



Todo o conteúdo deste periódico, exceto onde está identificado, está licenciado sob uma Licença Creative Commons



All the contents of this journal, except where otherwise noted, is licensed under a Creative Commons Attribution License

Fonte: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_serial&pid=1517-3151&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_serial&pid=1517-3151&lng=pt&nrm=iso).

Acesso em: 22 de maio de 2014.

#### REFERÊNCIA

ROSA, Suélia de Siqueira Rodrigues Fleury et al. Modelagem matemática da tíbia humana usando Bond Graph. **Rev. Bras. Eng. Bioméd.**, Rio de Janeiro, v. 29, n. 4, p. 329-342, dez. 2013. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1517-31512013000400003&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-31512013000400003&lng=en&nrm=iso)>. Acesso em: 22 maio 2014. <http://dx.doi.org/10.4322/rbeb.2013.042>.

## Modelagem matemática da tíbia humana usando *Bond Graph*

Suelia de Siqueira Rodrigues Fleury Rosa\*, Êmille Késsy Ferreira de Souza, Pablo Alejandro de Abreu Urbizagástegui, Luciana Roberta Tenório Peixoto, Adson Ferreira da Rocha

**Resumo** **Introdução:** Procedimentos cirúrgicos ortopédicos como a osteotomia, em que se realiza o corte da tíbia, são muito comuns e devem ser muito bem executados para que sejam obtidos bons resultados. Nesse cenário, o estudo de como o osso reage ao processo de corte é um tópico relevante de estudos. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático do processo de corte na tíbia humana por uma serra automática, usando o método de Bond Graph. **Métodos:** Com base em um trabalho anterior, foi desenvolvido um modelo para a força de reação ao corte da serra. Além disso, foi desenvolvido um modelo embasado no método Bond Graph para se determinar a resposta das diversas partes do osso à ação da serra. Foram também realizadas análises no domínio da frequência para se analisar a estabilidade do sistema. **Resultados:** Foram obtidos e apresentados os resultados das simulações descritas. Os resultados mostraram boa concordância com o comportamento esperado para a força de reação à serra e para a resposta do material ósseo ao corte. Além disso, as análises no domínio da frequência mostraram que o método de modelagem proposto tem características promissoras com relação a estabilidade do sistema. **Conclusão:** Os resultados sugerem que o método tem bom potencial para ser usado, no futuro próximo, para análises do processo de perfuração antes de procedimentos cirúrgicos. Entretanto, estudos adicionais sobre a estabilidade e sobre o projeto adequado de um controlador de velocidade são ainda necessários.

**Palavras-chave** Modelagem matemática, Bond Graph, Osso humano, Osteoartrite, Osteotomia.

## *Modeling of the human tibia bone using Bond Graph*

**Abstract** **Introduction:** Orthopedic surgical procedures such as osteotomy, in which cutting of the tibia bone is performed, are very common and should be very well performed in order to yield good results. Under this scenario, the study on how the bone reacts to the cutting process is a relevant topic for studies. The goal of this work is to present a mathematical model of the cutting process in the human tibia bone using the Bond Graph method. **Methods:** Based on a previous work, a model for the reaction force to the cutting action of the saw has been developed. Moreover, a bond graph based model for determining the bone response to the cutting action of the saw has also been developed. Frequency domain analyses were performed for evaluating the stability of the system. **Results:** The results of the simulations described were obtained and presented. The results were in good agreement with the expected behavior for the reaction force to the saw, and with respect to the response of the bone material to the cutting process. Moreover, the frequency domain analyses showed that the proposed modelling method has promising characteristics regarding system stability. **Conclusion:** The results suggest that the method has good potential for use, in the near future, for analyses of the cutting process before the surgical procedures. However, additional studies on stability, as well as a proper project of a velocity controller, are still necessary.

**Keywords** Mathematical modeling, Bond Graph, Human bone, Osteoarthritis, Osteotomy.

## Introdução

O sucesso dos procedimentos cirúrgicos na área ortopédica depende do treinamento e da habilidade do médico especialista no tocante à manipulação de serras para cortes de ossos, e essa destreza é particularmente crítica no procedimento de osteotomia de tibia para tratamento de artrose no joelho, por exemplo. Fatores como a profundidade e a precisão do corte, o tempo de exposição do osso à sobrecarga e a acurácia do ângulo da cunha do material ósseo a ser retirado influenciam diretamente no sucesso ou nas complicações do procedimento cirúrgico (Avakian *et al.*, 2008; Lopes, 1997). A falha em se controlar esses fatores pode levar a problemas – por exemplo, um eventual excesso no aquecimento pode ocasionar a morte de células ósseas, e o controle indevido do processo pode levar ao risco da lâmina atingir tecidos adjacentes (Carranza, 2011).

Dessa forma, o estudo e a modelagem desse sistema podem ser ferramentas úteis para se conhecer seu comportamento em diferentes situações, possibilitando até mesmo o desenvolvimento de aparatos que possam interagir adequadamente com a reparação óssea (Rodrigues, 2005; Tyagi, 2011). Tais possibilidades beneficiariam tanto o paciente como o médico cirurgião, do qual é exigido grande esforço físico com alta demanda ergonômica durante o processo cirúrgico (Kabayama *et al.*, 2004; Rodrigues, 2005).

O foco do presente trabalho é a modelagem da osteotomia da tibia. É comum, no desenvolvimento de um modelo matemático, a observação do sistema a ser modelado e a definição das variáveis que são consideradas essenciais para compor o modelo. No modelo proposto neste trabalho, as variáveis idade, força de perfuração do osso e velocidade de secção do osso foram correlacionadas, por meio da técnica denominada Bond Graph (BG), para se construir uma representação do comportamento similar ao que ocorre no sistema estudado – o comportamento do osso sob a ação da lâmina de serra durante a osteotomia. Em muitos casos, o modelo é validado a partir da comparação de suas previsões com resultados experimentais, podendo ser útil, por exemplo, no ajuste do sistema e na busca por direções mais promissoras para a exploração experimental (Adade, 2003; Aguirre, 2004; Rodrigues, 2005). Uma possível consequência prática do trabalho poderá ser a aplicação do modelo para auxiliar o médico na análise da conduta no pré e pós-operatório de casos de osteotomia.

A pesquisa bibliográfica sobre o tema mostrou que existem poucos trabalhos envolvendo estudos sobre a resposta do sistema ósseo à força exercida por uma serra, não havendo, até o momento, nenhum modelo

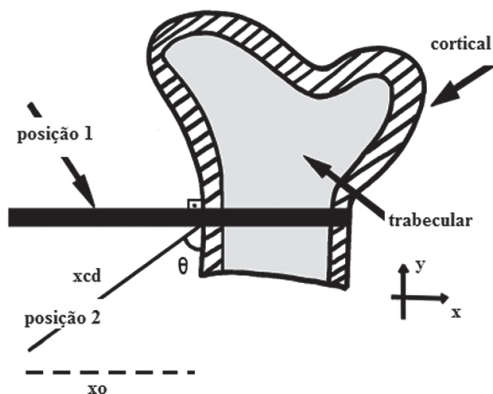
publicado sobre esse tema. Um ponto de partida para o presente trabalho foi o artigo de Allota *et al.* (1996), que analisou a força de perfuração de osso com uma broca helicoidal, fornecendo uma base para a presente proposta.

Na dissertação de mestrado de Rodrigues (2005) foi descrita uma nova proposta de serra mecatrônica para a realização de osteotomia, que é a serra que se pretende aplicar, no futuro, para o teste do modelo aqui apresentado. Percebeu-se a necessidade de se formular modelos do comportamento ósseo para se entender melhor o comportamento do osso durante a osteotomia e, possivelmente, permitir a previsão do prognóstico clínico após esse procedimento. Para isso, foram consideradas no modelo as características biológicas e mecânicas dos ossos e da serra para se descrever as relações entre as diversas variáveis que compõem todo o sistema. Na busca por essa descrição e representação matemática, poderiam ser utilizadas as Leis Básicas da Mecânica de Newton (diagramas de blocos) e a modelagem em *Bond Graph* (BG) (Kabayama *et al.*, 2004; Karnopp e Rosenberg, 1975). Optou-se pelo uso da modelagem em BG, pois a aplicação das Leis de Newton a todo o sistema mostrou-se demasiadamente complicada e com uma grande quantidade de equações.

O presente estudo tem como objetivo apresentar uma proposta de modelo matemático embasado em BG do sistema ósseo da tibia mediante a aplicação de uma força de corte com base em dados geométricos, posição, característica da broca de corte e a idade do paciente, objetivando a obtenção de um modelo matemático linear e uma análise da dinâmica geral para a excitação proposta.

### *O tecido ósseo*

O tecido ósseo possui um alto grau de rigidez e resistência à pressão. Quanto à estrutura histológica dos tecidos ósseos, é possível a classificação em dois tipos de tecidos: i) cortical (duro e compacto, com poucos espaços) e ii) trabecular (esponjoso, com espaços medulares mais amplos, sendo formado por várias trabéculas – o que dá um aspecto poroso ao tecido) (Junqueira e Carneiro, 2004). Um mesmo osso pode ter esses dois tipos de tecido, como ilustrado na Figura 1, que ilustra a porção proximal da tibia. Outro aspecto importante em relação aos ossos é a forma anatômica, havendo ossos longos, sesamóides, curtos, planos, pneumáticos e irregulares. O presente trabalho se deterá num osso longo: a tibia, que é formada em suas extremidades (epífises) por osso trabecular, com uma fina camada superficial de osso cortical (Cowin, 1989; Junqueira e Carneiro, 2004), e no seu comprimento (diáfise), por ter estrutura



**Figura 1.** O ângulo de posicionamento da serra ( $\theta$ ). A posição 1 e a posição 2 ilustram dois ângulos possíveis para o corte do osso. O ângulo  $\theta$  é o ângulo entre a superfície do osso e as lâminas da serra.  
**Figure 1.** The angle of the saw's positioning ( $\theta$ ). The positions 1 and 2 illustrate two possible angles for the bone cut.  $\theta$  is the angle between the surface of the bone and the blades of the saw.

compacta e levemente encurvada que lhe garante resistência a sobrecargas.

Com o objetivo de se extrair as equações de comportamento do osso que traduzam suas características mecânicas, procurou-se encontrar um modelo análogo. Observando-se a Figura 1, percebe-se que o osso é composto em sua parte interior por tecido ósseo do tipo trabecular e superficialmente por tecido ósseo do tipo cortical, com características físicas de maior dureza e resistência. Dessa forma, o processo de perfuração do osso atinge, sequencialmente, tecido ósseo cortical, trabecular e, novamente, cortical. Neste trabalho, o osso é tratado como um sistema mecânico-rotacional-translacional análogo ao sistema real. A variável velocidade na carga (força no osso) gera deformação e carregamento mecânicos, e essas variáveis compõem, no modelo BG, um sistema mecânico translacional. A rotacionalidade é associada à capacidade de transmissão e resistências aos esforços aplicados sem que haja rompimento do osso.

De acordo com Martin (1994), as propriedades geométricas são tão importantes na análise do comportamento mecânico dos ossos quanto a sua composição (porosidade e mineralização), organização (arquitetura do osso trabecular) e orientação das fibras de colágeno, que podem ser modificadas com o envelhecimento do indivíduo, por exemplo. Sendo assim, a idade foi uma variável considerada neste estudo na elaboração do modelo da força de perfuração, já que o envelhecimento causa alterações nas propriedades mecânicas dos ossos.

No modelo aqui apresentado, as propriedades morfológicas e químicas foram escolhidas com base

em ensaios laboratoriais do estudo de Rodrigues (2005), que tratam das características mecânicas entre tíbias de cadáveres e tíbias “reais”. As características geométricas que interferem no modelo deste artigo são os comprimentos das partes de tecido ósseo cortical e esponjoso que será seccionado; índices foram aplicados para simular a diferença de composição e o ângulo de corte. Os ossos apresentam comportamento viscoelástico, e o material ósseo pode ser classificado como material poro-viscoelástico anisotrópico gradativo.

### **Análise da tíbia e osteotomia**

O tecido ósseo é um composto natural complexo, conforme detalhado anteriormente, e como é um material anisotrópico, as propriedades mecânicas dos ossos são diferentes nas direções longitudinal (axial) e transversal (radial). Neste trabalho, foram consideradas apenas as características e medidas referentes à direção perpendicular ao eixo do osso, considerando-o um material isotrópico – desprezando-se, assim, as variações de plano.

As indicações em Shimano (1994) e Hewit *et al.* (1996) apresentam os valores das propriedades mecânicas do osso cortical úmido submetido a alguns ensaios de tração, compressão e torção perpendicular ao eixo, assim como das forças para perfurar o osso. Tais valores são apresentados na Tabela 1.

Em cirurgias ortopédicas como a cirurgia de osteotomia, é comum o uso da técnica de perfuração (*drilling*). A detecção tardia da ruptura da parte trabecular do tecido ósseo pode ocasionar um mau prognóstico cirúrgico. Devido a isso, eventos importantes a serem analisados são: i) o comportamento da força aplicada pela serra para realizar a secção e ii) a estratégia de corte. Esses dois pontos foram considerados na construção do modelo que será descrito a seguir.

### **Comportamento da força de perfuração**

Em Allota *et al.* (1996), foi estudado e proposto um modelo matemático para o comportamento da força de perfuração e para o torque de corte do osso durante o processo de perfuração. Uma observação importante a respeito das equações propostas por Allota *et al.* (1996) é que o comportamento temporal da expressão foi embasado no número de rotações da broca. Uma característica fundamental da força necessária para perfurar o tecido ósseo trabecular (esponjoso), segundo Rodrigues (2005), é que sua magnitude é cerca de doze vezes menor que a força aplicada para perfurar o tecido ósseo compacto (cortical). Esse fator justifica a variação da força com o tempo.

**Tabela 1.** Propriedades mecânicas do osso cortical úmido.**Table 1.** Mechanical properties of a wet cortical bone.

| Propriedade                            | Valor p/ Humano 20-60 anos                       |
|--|--|
| Força Elástica Máxima (MPa)            | 174 ± 1.2  |
| Deformação Máxima (%)                  | 1,50   |
| Módulo de Elasticidade na Tração (GPa) | 18,4   |
| Densidade – Tecido ósseo esponjoso     | 1,3g/cm <sup>3</sup>                             |
| Densidade – Tecido ósseo compacto      | 1,8g/cm <sup>3</sup>                             |
| Força para Perfurar – compacto         | 12-17 N (avanço = 2 mm/s e rotação 3300 rev/min) |
| Força para Perfurar – esponjoso        | 3-5 N (avanço = 2 mm/s e rotação 3300 rev/min)   |

Fonte: Adaptada de Shimano (2001).

### Modelos matemáticos usando Bond Graph

Modelos são representações ou abstrações de sistemas ou processos, que podem ajudar a entendê-los mais claramente e a fazer previsões sobre o seu comportamento. Em muitos casos, os modelos são representações aproximadas, usando-se hipóteses simplificadoras, que são fundamentais para se evitar uma complexidade excessiva. Este é o caso do modelo aqui apresentado.

O método do Bond Graph é uma abordagem gráfica para a representação de sistemas dinâmicos e se embasa no conceito intuitivo de que os componentes dentro desses sistemas interagem entre si por meio de trocas de energia. Essas trocas são representadas por grafos, que indicam a direção positiva desses transportes e o acoplamento entre os elementos existentes (Borutzky, 2010).

Nessa metodologia são usadas analogias para a modelagem de sistemas dinâmicos. Os principais tipos de variáveis utilizados são o esforço ( $e$ ), o fluxo ( $f$ ), o momento ( $p$ ) e o deslocamento ( $q$ ). Dessa forma, como cada ligação pressupõe uma variável de esforço e de fluxo, pode-se observar a transmissão de potência entre os elementos do sistema, pois  $\text{esforço} \times \text{fluxo} = \text{potência}$  (Karnopp, 1985; Rodrigues *et al.*, 2004).

Cada uma dessas variáveis possui uma relação constitutiva, necessária para a obtenção de modelos matemáticos capazes de descrever o sistema estudado. O significado dessas relações e suas constantes, entretanto, dependem do tipo do domínio físico analisado. No contexto deste artigo, foi considerado o domínio mecânico translacional, fazendo com que o esforço, fluxo, momento e deslocamento fossem interpretados como força, velocidade, momento e posição, respectivamente. Os tipos de junções também são importantes para a retirada das equações do sistema. Na abordagem via Bond Graph, a junção 0 representa um somatório de fluxos, enquanto que a junção 1 representa um somatório de esforços.

O Bond Graph foi a metodologia escolhida neste artigo devido a algumas de suas características. Uma de suas vantagens sobre o diagrama de blocos convencional é o fato de sua causalidade poder ser determinada após o modelamento do sistema. Além disso, sua estrutura em si já representa uma equação. O diagrama de blocos, por sua vez, não pode ser desenhado até que suas entradas e saídas sejam definidas, pois representa essas relações, em vez de equações.

### Métodos

#### Modelagem da força de perfuração do osso

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo para o processo de corte do osso da tibia por meio da serra mecatrônica descrita no trabalho de Rodrigues (2005). Um primeiro passo foi o desenvolvimento de um modelo matemático para a força de corte, que foi desenvolvido por meio da adaptação dos resultados apresentados no artigo de Allota *et al.* (1996), onde foi apresentado um modelo similar para a força de perfuração no osso com uma broca helicoidal. O objetivo do modelo foi permitir captar e abstrair o comportamento da carga adequadamente ou o mais próximo possível do comportamento real. Entre as variáveis que compõem o modelo, destaca-se a variável ângulo de posicionamento ( $\theta$ ) da serra para a realização do corte, que está ilustrada na Figura 1.

As posições 1 e 2, apresentadas na Figura 1, ilustram dois possíveis ângulos de corte, onde  $\theta$  é o ângulo entre a superfície do osso e a lâmina. Para a posição 2, a relação matemática que define tal ângulo é dada por

$$\sin(\theta) = \frac{x_0}{x_{cd}} \quad (1)$$

onde  $x_0$  (mm) – que corresponde ao cateto oposto ao ângulo  $\theta$  – é a distância do osso a algum ponto de referência na lâmina, ao longo da direção perpendicular ao osso, e  $x_{cd}$  (mm) é a distância, ao longo da direção da

lâmina, entre o osso e o mesmo ponto de referência – ou seja, a hipotenusa do triângulo.

Outra variável incorporada ao modelo matemático proposto é a influência da idade do paciente, representada pelo fator adimensional ( $I_d$ ), que causa um decréscimo na força com o aumento da idade. De acordo com Rodrigues (2005), essa taxa de decréscimo da massa óssea se relaciona com a idade da seguinte forma: i) 0 a 20 anos – Nessa faixa etária, a incidência de cirurgia de osteotomia é desprezível; ii) 20 a 40 anos –  $I_d = 1$ ; iii) 40 a 60 anos –  $I_d = 0,8$ ; iv) 60 a 80 anos –  $I_d = 0,6$ ; v) acima de 80 anos –  $I_d = 0,5$ . A força de resistência à perfuração é denominada  $f_{rc}(e_L, v, d)$ , e é definida por

$$f_{rc}(e_L, v, d) = \begin{cases} f_1 = c_{comp} \dot{x}(t), \text{ para } 0 < d < x_1 \text{ e } x_2 < d < x_3 \\ f_2 = c_{esp} \dot{x}(t), \text{ para } x_1 < d < x_2 \end{cases} \quad (2)$$

com as condições iniciais  $f_{rc}(e_L, 0, 0) = 0 \text{ N}$  e  $\dot{f}_{rc}(e_L, 0, 0) = 0 \text{ N/s}$ .

Na Equação 2,  $e_L$  é a espessura da lâmina (mm),  $v$  é a velocidade de avanço do corte (mm/s) e  $d$  é a posição (mm) atual do corte na estrutura óssea da tíbia. Os demais elementos da Equação 2 são calculados por meio das Equações de 3 a 6.

$$c_{comp} = (K_{scomp} a / e_L) I_d \quad (3)$$

$$K_{scomp} = \Delta \cdot Ru_{comp} \quad (4)$$

$$Ru_{comp} = F_{em} \cdot e_L \quad (5)$$

$$c_{esp} = c_{comp} / \text{decaimento} \quad (6)$$

Outros coeficientes que compõem o modelo matemático da força de perfuração proposta, com suas respectivas unidades, são: i)  $K_{scomp}$  ( $\text{J/mm}^3$ ), que é a energia total para causar deformação por unidade de volume; ii)  $Ru_{comp}$  (MPa), que é máxima tensão de ruptura (MPa), à qual é associada o parâmetro  $\Delta$ , que no osso humano possui um faixa entre 4,8 a 6,0 e leva em conta a energia requerida para causar a deformação e também a fricção realizada; iii)  $a$  (mm/s), que é a taxa de perfuração; iv)  $F_{em}$  (MPa), que é força elástica máxima; v)  $c_{esp}$ , que é coeficiente do osso esponjoso; e  $c_{comp}$ , que é o coeficiente do osso compacto. O parâmetro decaimento, que é uma constante que relaciona os parâmetros  $c_{esp}$  e  $c_{comp}$ , foi determinado em um experimento para identificação de parâmetros em tíbias de suínos, tendo sido calculado pela seguinte expressão (Rodrigues, 2005):

$$\text{decaimento} = ((12+17)/2)/((3+5)/2) = 3,625 \quad (7)$$

Além disso, na composição das posições  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , deve-se levar em conta o ângulo de inserção da lâmina no osso devido à transição, em função do comprimento, para cada tipo de tecido que está sendo cortado. Esses parâmetros são expressos pelas relações

$$x_1 = x_{comp} \sin \theta \quad (8)$$

$$x_2 = x_{esp} \sin \theta \quad (9)$$

$$x_3 = x_{comp2} \sin \theta \quad (10)$$

onde  $x_{comp}$  (mm) é o comprimento de osso compacto que será cortado no início do corte,  $x_{esp}$  (mm) é o comprimento do osso esponjoso que será cortado,  $x_{comp2}$  (mm) é o comprimento total do osso que será cortado,  $\theta$  (radianos) é o ângulo de corte e  $x$  (mm) é a posição atual da serra.

### Modelagem do comportamento do material que compõe o osso

Um ponto essencial ao se modelar o comportamento viscoelástico de um material é escolher a forma adequada das componentes elástica e viscosa, bem como combinar os elementos no melhor sistema possível, de forma que o comportamento em função do tempo seja previsto adequadamente. Dessa forma, para a construção do modelo análogo do osso humano, levando-se em conta a sua estrutura tecidual, foram utilizados três arranjos de componentes básicos descritos na literatura: o modelo de Maxwell, o modelo de Voight ou Kelvin e o modelo de três ou quatro parâmetros, como apresentado por Nabais (2006), que são modelos viscoelásticos que representam aproximações do comportamento dos materiais reais. O modelo de Voight ou Kelvin consiste em uma mola com elasticidade  $K$  em paralelo com um amortecedor com viscosidade  $\eta$ . Se uma tensão constante  $\sigma$  é aplicada no instante  $t = 0 \text{ s}$ , a elongação da mola poderá não ser instantânea, sendo retardada pelo amortecedor. A deformação ocorre a uma taxa variável, com a tensão distribuída entre os dois componentes, e após um tempo dependente da viscosidade do amortecedor, a mola aproxima-se da elongação máxima. Quando a causa da deformação é removida, ocorre o processo reverso, onde a deformação decai com o tempo e o comprimento inicial tende a se restabelecer. Este é o modelo básico de um sólido, porque a resposta a longo prazo a uma tensão aplicada constante é idêntica à de um sólido, ou seja, com o tempo o sólido deixa de se deformar. O modelo de Maxwell consiste em uma mola e um amortecedor em série, que é o modelo básico de um fluido, porque a resposta a longo prazo a uma tensão aplicada constante é idêntica à de um fluido, ou seja, o

material o material não para de se deformar. Os modelos de Maxwell e Voight não produzem, sozinhos, uma resposta qualitativa que represente o comportamento dos materiais reais, sendo necessário o uso de modelos mais complexos. Nessa perspectiva, um modelo de quatro parâmetros descrito por Senan (1998 *apud* Nabais, 2006) é também utilizado na representação do osso humano, sendo este a combinação de um elemento de Maxwell e um elemento de Voight. O osso humano apresenta um comportamento viscoelástico que justifica a utilização de elementos que caracterizam a relaxação de tensões, descrito pelo elemento de Maxwell e a fluência, descrito pelo elemento de Voight. Assim, de forma intuitiva, elementos de Maxwell, Voight e o modelo de quatro parâmetros foram combinados para expressar o comportamento do osso. Utilizando-se tais modelos na tentativa de se representar o comportamento aproximado do osso humano, foram feitas algumas considerações. O elemento de Maxwell é constituído por uma mola em série com um amortecedor e representa uma resposta elástica instantânea com um amortecimento viscoso, enquanto o elemento de Voight apresenta uma resposta elástica retardada. Sabe-se que o osso é constituído por uma parte trabecular, cuja resistência à perfuração é menor, e uma cortical, com maior resistência à perfuração. Sendo assim, associou-se a parte trabecular ao elemento de Maxwell e a cortical ao elemento de Voight, sendo que foi inserido um modelo de quatro parâmetros no início do sistema de forma a representar a resistência inicial à força de perfuração (Lei da Inércia). Ressalta-se que é importante para a concepção desse modelo a necessidade de elevação da força aplicada para a perfuração da parte cortical em relação à trabecular. Dessa forma, a parte central do sistema apresenta um número menor de elementos resistivos. Considerou-se, ainda, um elemento rotacional quando da passagem do tecido compacto para o esponjoso, e vice-versa, devido às diferenças em suas propriedades mecânicas. Algumas considerações foram assumidas na modelagem do sistema: i) a não-uniformidade

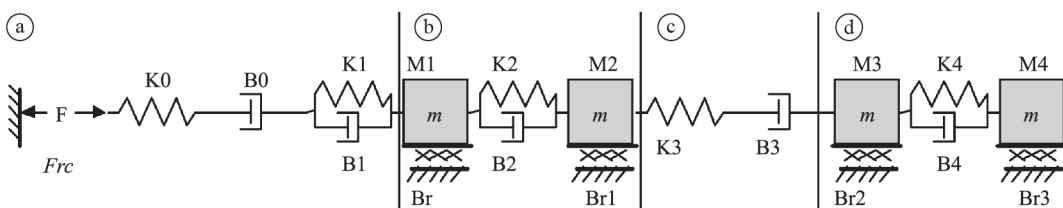
das partes analisadas, na estrutura geométrica, foi representada por elementos dissipadores de diferentes graus; ii) a geometria do osso foi considerada como fixa; iii) considerou-se que os parâmetros do sistema são concentrados; iv) assumiu-se que não há ruídos no sistema; v) desprezou-se a influência de músculos circundantes e do tecido sanguíneo.

Na revisão técnica da literatura realizada, não foram encontrados dados fidedignos de um sistema com essa abordagem. Por esse motivo, foi realizada uma simplificação da proposta acima detalhada, com o objetivo de se realizar uma primeira análise. A simplificação do sistema análogo mecânico-rotacional-translacional do osso humano está apresentada na Figura 2.

O modelo foi dividido em quatro partes conforme a descrição a seguir:

- Região A: modela o atrito estático do sistema, responsável pela resistência do osso ao movimento inicial da serra. Um modelo de quatro parâmetros foi utilizado com objetivo de se obter uma descrição do sistema mais próxima do real;
- Região B: representa a primeira parte do osso a ser perfurada, do tipo cortical, em que a fluência é o fenômeno dominante;
- Região C: representa o osso do tipo trabecular e, por apresentar menor resistência à perfuração, é composta por um número menor de elementos resistivos. É de se esperar uma resposta elástica instantânea e um amortecimento viscoso baixo;
- Região D: representa a segunda parte do osso cortical, apresentando uma composição de elementos igual à parte B.

Em um primeiro momento, buscou-se a solução desse sistema por meio de uma análise fenomenológica. Sob esse ponto de vista, cada elemento do análogo mecânico contribui com uma força, que será diferente dependendo de sua natureza e de suas constantes. Isso gera uma composição de forças que se relacionam por meio da Segunda Lei de Newton, resultando nas



20-sim 4.2 Viewer (c) CLP 2012

**Figura 2.** Sistema simplificado análogo mecânico-rotacional-translacional do osso humano implementado com o Software de desenho e simulação 20-Sim.

**Figure 2.** Simplified analogous mechanical-rotational-translational system of the human bone through the drawing and simulation software 20-Sim.

equações de estado que descreveriam o sistema. No entanto, essa análise mostrou-se demasiadamente trabalhosa e complicada, revelando certa ineficiência para sistemas como o aqui estudado. Por isso, foi escolhido, para a análise desse sistema mecânico, o método de *Bond Graph*, que usa uma representação gráfica de um sistema embasada no conceito de troca de energia. O método é um procedimento que permite desenvolver representações de sistemas físicos na perspectiva da troca de energia – variável de fluxo e variável de esforço. Com base no princípio de que não há perdas de energia entre dois pontos, a representação é unificada com interações em paralelo e em série. Assim, uma estrutura gráfica de ligações é construída, onde as variáveis generalizadas de esforço e fluxo seguem uma relação de causalidade para cada dispositivo modelado. A causalidade é a análise de causa e efeito pela porta de energia quando uma variável adequada de esforço ou fluxo é aplicada. Por exemplo, um degrau de tensão aplicado na entrada de um capacitor resultaria, idealmente, em uma corrente infinita, mas o capacitor contém imperfeições físicas que o tornam não-ideal, evitando que isso aconteça na prática. Mesmo assim, esse efeito mostra que a tensão não é uma entrada natural para um capacitor, mas, sim, a corrente (Wojcik, 2003). O modelo *Bond Graph* do sistema ósseo humano foi implementado no *software* de simulação 20-Sim. A obtenção desse sistema ocorreu por meio da aplicação em sequência da mudança do modelo físico para modelo análogo e para o modelo em *Bond Graph*, do qual foram obtidas as equações matemáticas. O *Bond Graph* obtido é composto por quatro grupos básicos de elementos: elementos passivos de uma porta, elementos ativos de uma porta, elementos de duas portas e elementos de duas junções, como ilustrado na Figura 3.

As equações que descrevem o comportamento da força de corte de uma serra cirúrgica e do osso humano durante o processo de corte foram implementadas em

MatLab. Usaram-se os comandos de simulação de sistemas lineares em espaço de estados, realizando o processo via Ode45. Os programas para simulação foram executados em um computador com processador Intel Core i3, 2.4 GHz. Inicialmente, investigou-se a resposta da modelagem matemática da força de perfuração por meio de uma comparação com os dados da literatura. Posteriormente, outra análise realizada foi a verificação da influência da idade na magnitude da força de corte necessária. Em seguida, foram feitas simulações para validar o modelo simplificado proposto com base nos elementos de Maxwell, Voigt e quatro parâmetros. Finalmente, analisou-se a resposta em frequência do sistema modelado, para se observar a faixa em que este apresenta melhores características e, com isso, correlacioná-la com a velocidade de corte.

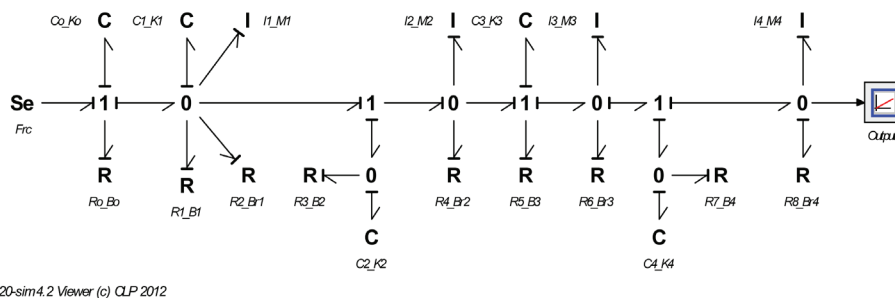
### Força de corte do osso

Para a realização dessa simulação foram buscados na literatura os índices  $\Delta$ ,  $\theta$ ,  $e_L$  e  $v$ . Os demais itens foram medidos e estimados pelos autores. Para a simulação do comportamento da força de corte, foi usado método ode45 (Dormand-Prince) e passo de integração automática. Na simulação foram usados parâmetros típicos de uma pessoa de 40 anos, com as seguintes características: i)  $I_d$  com valor de 0,8 (adimensional); ii)  $\theta$  com valor de  $\pi/2$  rad; iii)  $e_L$  com valor de 2 mm; iv)  $v$  igual a 2 mm/s; v)  $\Delta$  com o valor de 5,4 (adimensional) e vi)  $x_{comp}$  igual a 5 mm;  $x_{esp}$  igual a 35 mm e  $x_{comp2}$  igual a 40 mm. Há, ainda, a definição dos tamanhos dos deslocamentos em função do ângulo de corte:

$$x_1 = 5 \times \sin\theta \tag{11}$$

$$x_2 = 35 \times \sin\theta \tag{12}$$

$$x_3 = 40 \times \sin\theta \tag{13}$$



**Figura 3.** Bond graph do sistema, que é composto por quatro grupos básicos de elementos: elementos passivos de uma porta, elementos ativos de uma porta, elementos de duas portas e elementos de duas junções.

**Figure 3.** System's bond graph, which is composed of four basic groups of elements: one port passive elements, one port active elements, two ports elements and two junctions elements.



Os resultados dessa simulação (Figura 4) serão apresentados na seção de resultados.

**Modelo matemático Bond Graph do osso**

Na análise inicial do grafo de ligação, para elementos de dois terminais a causalidade determina como o elemento generalizado pode armazenar energia e interagir produzindo as relações dinâmicas num sistema. Duas formas de causalidade podem ser identificadas: integral e derivativa. De acordo com Rodrigues (2005), a forma mais natural é a causalidade integral, pois evita o processo de derivação temporal das variáveis dinâmicas. No sistema em questão, nota-se que não há presença de causalidade derivativa, o que significa que a equação de estado desse sistema terá a forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ . A equação do sistema é dada por

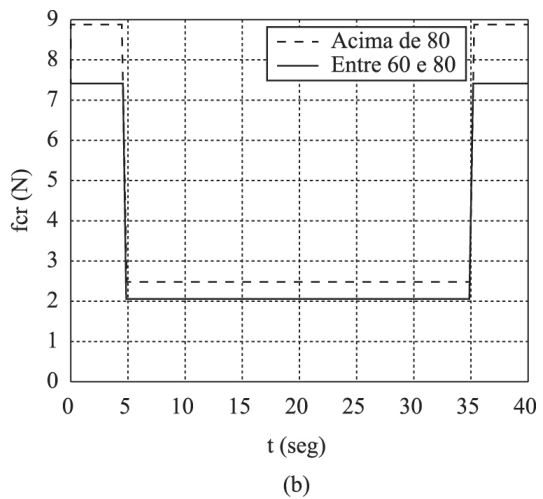
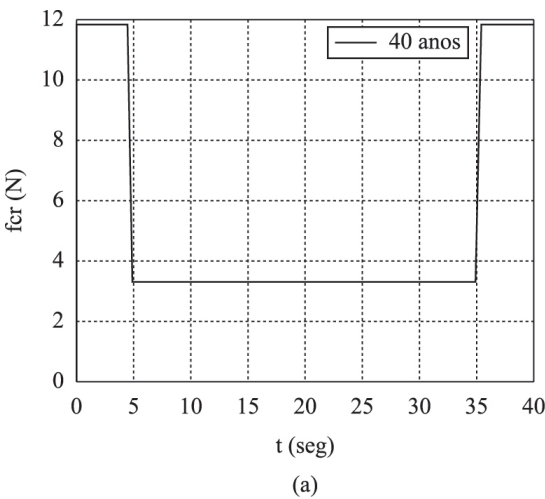
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + [B]f_{rc} \tag{14}$$

e as saídas podem ser obtidas por

$$[y] = [C][x] \tag{15}$$

sendo que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_0 B_0} & -\frac{1}{K_0 B_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{K_0 B_0} & -\frac{1}{K_1}(P+\alpha) & -\frac{1}{M_1} & \frac{1}{K_2}\left(\frac{1}{B_{r2}}-\alpha\right) & -\frac{1}{M_2} & \frac{\alpha}{K_3} & -\frac{\beta}{M_3} & \frac{\beta}{B_{r4}K_4} & \frac{\beta}{M_4} \\ 0 & \frac{1}{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{B_{r2}}-\alpha\right) & 0 & -\frac{1}{K_2}\left(\frac{1}{B_{r2}}+\frac{1}{B_2}+\alpha\right) & \frac{1}{M_2} & -\frac{\alpha}{K_3} & \frac{\beta}{M_3} & -\frac{\beta}{B_{r4}K_4} & \frac{\beta}{M_4} \\ 0 & \frac{1}{K_1} & 0 & -\frac{1}{K_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{K_1} & 0 & -\frac{\alpha}{K_2} & 0 & -\frac{\alpha}{K_3} & \frac{\beta}{M_3} & -\frac{\beta}{B_{r4}K_4} & \frac{\beta}{M_4} \\ 0 & \frac{\beta}{K_1} & 0 & -\frac{\beta}{K_2} & 0 & -\frac{\beta}{K_3} & \frac{\gamma\beta}{M_3} - \frac{\gamma}{M_3} & \frac{\gamma}{B_{r4}K_4} - \frac{\gamma\beta}{B_{r4}K_4} & \frac{\gamma\beta}{M_4} - \frac{\gamma}{M_4} \\ 0 & \frac{\beta}{B_{r4}K_1} & 0 & -\frac{\beta}{B_{r4}K_2} & 0 & -\frac{\beta}{B_{r4}K_3} & \frac{\gamma\beta}{B_{r4}M_3} - \frac{\gamma}{B_{r4}M_3} & \frac{1}{K_4}\left(\frac{\gamma}{B_{r4}} - \frac{\gamma\beta}{B_{r4}} - \frac{1}{B_{r4}} - \frac{1}{B_4}\right) & \frac{1}{M_4}\left(\frac{\gamma\beta}{B_{r4}} - \frac{\gamma}{B_{r4}} + 1\right) \\ 0 & \frac{\beta}{K_1} & 0 & -\frac{\beta}{K_2} & 0 & -\frac{\beta}{K_3} & \frac{\gamma\beta}{M_3} - \frac{\gamma}{M_3} & \frac{1}{K_4}\left(\frac{\gamma}{B_{r4}} - \frac{\gamma\beta}{B_{r4}} - 1\right) & \frac{\gamma\beta}{M_4} - \frac{\gamma}{M_4} \end{bmatrix} \tag{16}$$



**Figura 4.** (a) Comportamento da força para uma velocidade constante de 2 mm/s para uma pessoa de 40 anos de idade e para uma tibia de 40 mm de largura e (b) Comportamento da força para uma velocidade constante de 2 mm/s para pessoas de 60 anos e acima de 80 anos de idade e para uma tibia de 40 mm de largura.

**Figure 4.** (a) Strength's behavior for a 2 mm/s constant speed in a 40 years old person with a 40 mm wide tibia; (b) Strength's behavior for a 2 mm/s constant speed in 40 years old people and older than 80 years old, for a 40 mm wide tibia.

e

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{B_0} \\ \frac{1}{B_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

em que:

$$\alpha = \frac{B_{r3} + B_{r4}}{B_{r3}B_3 + B_{r4}B_3 + B_{r3}B_{r4}},$$

$$\beta = \frac{B_{r3}B_{r4}}{B_{r3}B_3 + B_{r4}B_3 + B_{r3}B_{r4}},$$

$$\gamma = \frac{B_{r3}B_{r4}}{B_{r3} + B_{r4}},$$

$$P = \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_{r1}} + \frac{1}{B_{r2}}.$$

As características que compõem a equação dinâmica do sistema ósseo humano estão listadas a seguir: i) vetor de estado com ordem  $x \in \mathbb{R}^9$ ; ii) sistema implícito; iii) sistema sem *loop* algébrico e SISO (*Single Input Single Output*); iv) sistema linear e invariante no tempo; v) sistema contínuo; vi) parâmetros concentrados e vii) sistema determinístico. O Vetor de Entrada ou Controle é a força  $f_{cr}$  e o vetor de saída contém os

deslocamentos (e também as velocidades) das massas, podendo ser usado para se determinar a velocidade de penetração da serra. As dimensão das matrizes são as seguintes: A é  $9 \times 9$ , B é  $9 \times 1$  e C é  $1 \times 9$ . As constantes desse sistema estão apresentadas na Tabela 2.

### Dinâmica geral do sistema ósseo humano

Neste artigo, devido à impossibilidade de se obter os valores reais de alguns parâmetros e à ausência de valores explícitos na literatura estudada, foram atribuídos alguns valores de variáveis com base em informações retiradas da literatura e em algumas considerações adicionais. Tal procedimento foi realizado para se verificar a validade do comportamento dos modelos obtidos e se as simulações refletiriam o comportamento do modelo matemático. Os cuidados que foram tomados ao se realizar essas considerações seguiram a lógica apresentada a seguir.

A matriz de espaço de estado foi simulada em MatLab, considerando os valores apresentados na Tabela 3. De acordo com Rodrigues (2005), a força na parte A é doze vezes maior do que a força necessária para perfuração da parte B, enquanto a força na parte C é 27% menor do que a necessária em B. Com base nesses valores, realizou-se uma definição de valores constantes para os elementos do modelo obedecendo a essas proporções. Considerou-se que as partes B e D são iguais, diferindo entre si apenas na ordem em que os valores de  $B_r$  aparecem, pois há uma diferença entre uma transição cortical-trabecular e uma trabecular-cortical.

Tabela 2. Constantes do sistema.

Table 2. System's constants.

| Constantes do Sistema | Descrição Sistema Real                          | Descrição Sistema Análogo                      | Bond Graph                            | Estado |
|-----------------------|---|--|---------------------------------------|--------|
| $K_0$                 | Primeira resposta elástica à perfuração.        | Rigidez da mola linear.                        | Capacitância $C_0$                    | x1     |
| $B_0$                 | Oposição à velocidade.                          | Atrito viscoso.                                | Resistência $R_0$                     | -      |
| $K_1$ e $B_1$         | Resposta elástica retardada.                    | Mola linear e amortecedor viscoso em paralelo. | Capacitância $C_1$ /Resistência $R_1$ | x2     |
| $M_1$                 | Parede do osso.                                 | Massa translacional.                           | Inércia $I_1$                         | x3     |
| $B_{r1}$              | Atrito da broca com o osso.                     | Atrito linear.                                 | Resistência $R_2$                     | -      |
| $K_2$ e $B_2$         | Características de fluência do tecido cortical. | Mola e amortecedor em paralelo.                | Capacitância $C_2$ /Resistência $R_3$ | x4     |
| $M_2$                 | Passagem cortical-trabecular.                   | Massa translacional.                           | Inércia $I_2$                         | x5     |
| $B_{r2}$              | Atrito da broca com o osso.                     | Atrito linear.                                 | Resistência $R_4$                     | -      |
| $K_3$ e $B_3$         | Relaxação de tensões do tecido trabecular.      | Mola e amortecedor em série.                   | Capacitância $C_3$ /Resistência $R_5$ | x6     |
| $M_3$                 | Passagem trabecular-cortical.                   | Massa translacional.                           | Inércia $I_3$                         | x7     |
| $K_4$ e $B_4$         | Resposta elástica retardada.                    | Mola linear e amortecedor viscoso em paralelo. | Capacitância $C_4$ /Resistência $R_4$ | x8     |
| $M_4$                 | Parede do osso.                                 | Massa translacional.                           | Inércia $I_3$                         | x9     |

**Tabela 3.** Valores das constantes utilizados para simulação.*Table 3.* Values of the constants used in the simulations.

| Constantes do Sistema | Valor Simulação 1 | Valor Simulação 2 | Valor Simulação 3 |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $K_0$                 | 12                | 12                | 6                 |
| $B_0$                 | 12                | 6                 | 12                |
| $K_1$                 | 10                | 10                | 5                 |
| $B_1$                 | 10                | 5                 | 10                |
| $B_2$                 | 1                 | 0,5               | 1                 |
| $K_2$                 | 1                 | 1                 | 0,5               |
| $B_3$                 | 0,27              | 0,13              | 0,27              |
| $K_3$                 | 0,27              | 0,27              | 0,13              |
| $B_4$                 | 1                 | 1                 | 0,5               |
| $K_4$                 | 1                 | 0,5               | 1                 |
| M1; M2; M3; M4        | 1,02 g            | 1,02 g            | 1,02 g            |
| $B_{11}; B_{14}$      | 28,43             | 28,43             | 28,43             |
| $B_{12}; B_{13}$      | 7,84              | 7,84              | 7,84              |

Outro fator considerado foi o coeficiente de atrito entre o osso e três diferentes tipos de metais, obtendo-se uma média de  $\mu = 0,51$ , considerada para abranger diferentes possibilidades do material a ser utilizado para fabricar a ferramenta de corte (broca). Considerando a força para perfurar o tecido cortical como sendo de 14,5 N e a força para perfurar o tecido esponjoso de 4 N, pode-se usar a relação  $F_{\text{atr}} = \mu F_{\text{normal}}$  que fornecerá o valor da força normal que poderá ser usada como parâmetro na simulação. Sendo assim, os cálculos resultam em  $F_{\text{normal(esponjoso)}} = 7,84$  N e  $F_{\text{normal(compacto)}} = 28,43$  N. A Tabela 3 apresenta os valores usados para as simulações. Optou-se por se fazer uma variação de itens com diminuição para 50% do valor base, como mostrado na coluna Valor-Simulação 1, e se verificar qual parâmetro tem maior influência sobre a dinâmica do sistema.

Os resultados dessa simulação estão apresentados na seção de resultados.

Para se avaliar a estabilidade do sistema, foram traçadas curvas com o Lugar Geométrico das Raízes e o Diagrama de Bode do sistema.

Finalmente, foi realizada uma simulação em que se supôs que foi usado um controlador que tem a capacidade de manter uma velocidade de corte constante, mesmo quando a parte cortante da serra muda de tecido, e foi preparado um gráfico com o perfil de força em função do tempo juntamente com a resposta do osso da tíbia.

## Resultados

A Figura 4a mostra o comportamento da força de resistência (entrada) como função do deslocamento (saída) de perfuração para uma pessoa de 40 anos. A Figura 4b ilustra o comportamento da força de resistência como função do deslocamento de perfuração

para uma pessoa idosa com idade entre 60 e 80 anos e outra acima de 80 anos.

Nas Figuras 5a e b, estão apresentados os resultados das simulações do sistema em espaço de estados para os valores da coluna 2 da Tabela 3. Obteve-se a resposta ao degrau do sistema sob a perspectiva de quatro estados principais  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_6$  e  $x_8$ , ou seja, a matriz  $C = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$ .

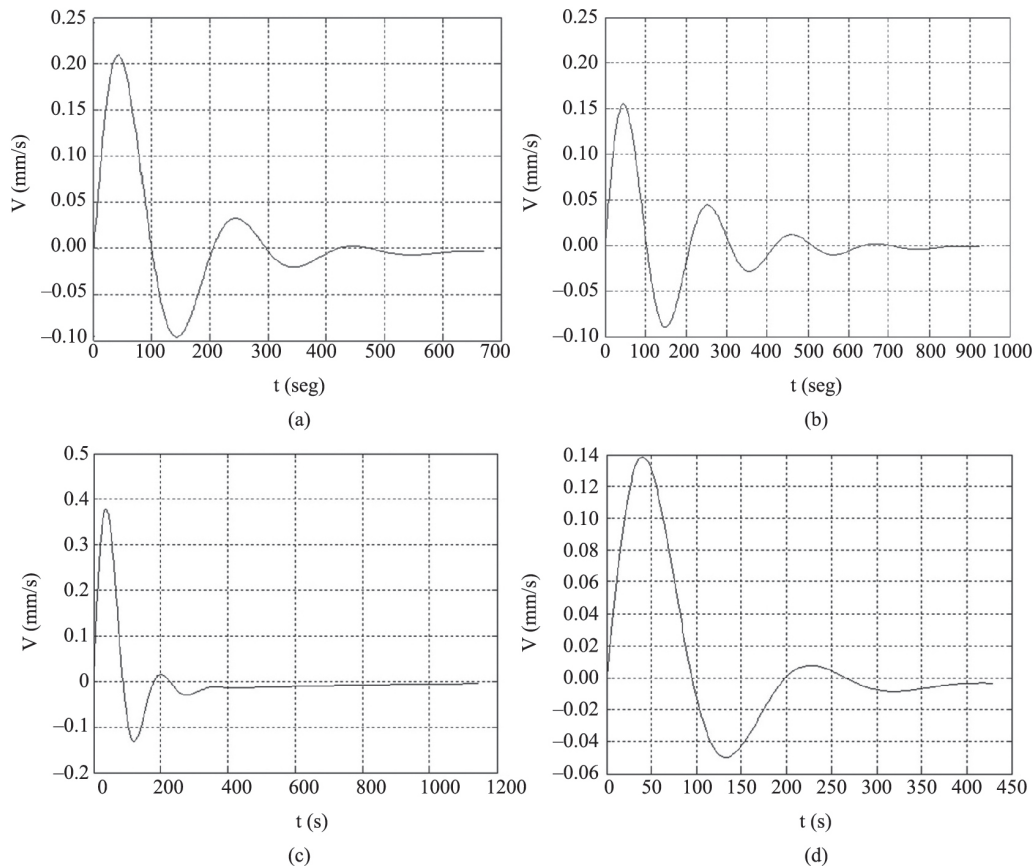
Na Figura 6, estão apresentados os gráficos com o Lugar Geométrico das Raízes e o Diagrama de Bode do sistema.

Na Figura 7 é apresentado o gráfico com a simulação do comportamento dinâmico da força de perfuração do osso aplicada no sistema modelado e sua resposta dinâmica durante o processo de corte, quando se assume que a força foi gerada por um controlador ideal.

## Discussão

Na Figura 4, que ilustra o comportamento da força de resistência como função da posição da serra no osso, obteve-se um comportamento compatível com o esperado, com a redução da força na parte trabecular do osso. Também, observou-se a esperada redução da força de reação com o avanço da idade.

Na Figura 5, que mostra simulações das respostas do sistema ao degrau unitário, percebe-se que a saída não consegue atingir o valor de referência de 1 mm/s de velocidade. Isso se deve a duas análises sob perspectivas distintas: i) Este sistema é tipo 0 (sem polos na origem), onde ocorre um erro de regime permanente, nesse caso, de 0,8 mm/s. Durante o processo de corte, para um intervalo de 11 minutos, a velocidade apresenta em seu primeiro pico a resistência elástica oriunda do modelo de quatro parâmetros, que está em consonância com a hipótese de se realizar um



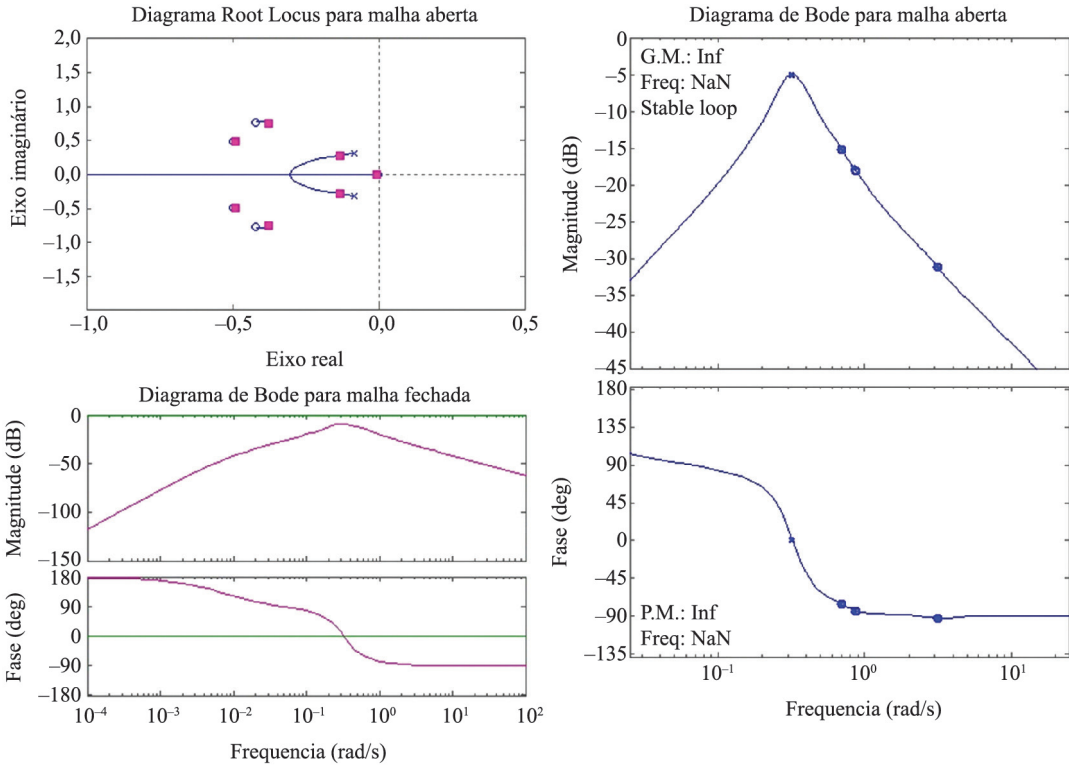
**Figura 5.** (a) Resposta do sistema a uma excitação degrau unitária; (b) Resposta ao degrau do sistema a uma segunda simulação; (c) Resposta a degrau unitário do sistema com os parâmetros resistivos reduzidos em 50%; (d) Resposta a degrau unitário do sistema com os parâmetros armazenadores de energia reduzidos em 50%.

**Figure 5.** (a) System response to a unit step function; (b) System response to a second simulation; (c) Response to a unit step function with a reduction of 50% the resistive parameters; (d) Response to a unit step function with a reduction of 50% of the energy accumulator parameters.

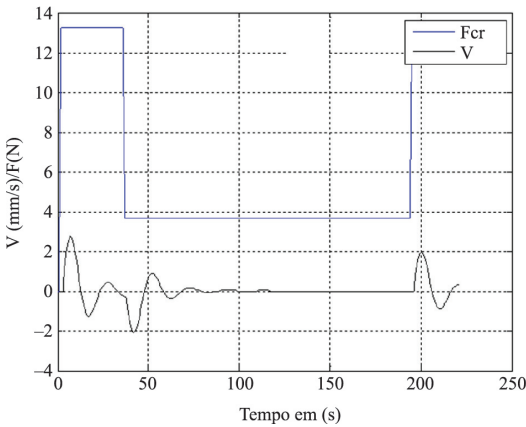
aplicação de velocidade diferenciada nesse instante de entrada ao osso; ii) A parte C do osso (trabecular) apresenta um pico de amplitude negativa, indicando que não existe necessidade de velocidade elevada para essa região, haja vista que o seu processo de corte usa a inércia da força que vem se dissipando da parte dura do osso. Nota-se ainda que sua amplitude é cerca de 45% menor em módulo que a magnitude maior, fato este não convergente com o esperado, em que a força para essa região seria 27% menor. Entretanto, as massas obtidas influenciam diretamente nesse valor. Na Figura 5b, ilustra-se a simulação com massas de M1 a M4 50% menores e percebe-se o descrito. Ao se interpretar os estados, busca-se ler os vetores que mostram como se propaga a velocidade ao longo do processo de corte do osso. Seu comportamento será analisado a fim de se verificar como tal variável se comporta em cada camada óssea e, com isso, promover uma análise de comando da força. Ao se focar em velocidade, os elementos em BG que fornecem

essa informação são estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_6$  e  $x_8$ . A influência dos parâmetros mecânicos nesse sistema pode ser comprovada por meio da análise da resposta dinâmica dos estados.

Por meio de uma redução de 50% dos elementos resistivos, que são dissipadores de energia, nota-se uma resposta instantânea inicial que, sob o efeito de um degrau unitário, vai reduzindo consideravelmente sua amplitude ao longo do sistema. Este comportamento pode ser observado na Figura 5c, via simulação para parâmetros da coluna 3. Em seguida, em uma análise similar à anterior, reduziram-se os armazenadores de energia em 50% de suas constantes e se obteve uma redução de amplitude significativa, de aproximadamente 75%. Sob o enfoque biológico, haja vista a amplitude solicitada vista na Figura 5d, seria possível indicar uma redução das características mecânicas ósseas, o que necessita de um processo de perfuração diferenciado. No caso de uma análise sob o enfoque da resposta em frequência e estabilidade via



**Figura 6.** Lugar Geométrico das Raízes e Diagrama de Bode do sistema.  
**Figure 6.** Root-Locus and Bode diagram of the system.



**Figura 7.** Comportamento dinâmico da força de perfuração do osso aplicada no sistema modelado e sua resposta dinâmica durante o processo de corte.  
**Figure 7.** Dynamic behavior of the bone drilling strength applied in the modeled system and its dynamic response during the process.

Lugar Geométrico das Raízes (*Root-Locus*), busca-se uma resposta em regime estacionário de um sistema com entrada senoidal. No sistema, a velocidade da serra pode ser variada a fim de se obter um corte mais rápido ou mais lento. Além disso, essa planta possui incertezas (deficientemente conhecidas) que

podem ser mais bem caracterizadas pelos métodos de Bode e pela visualização do Lugar Geométrico das Raízes (*Root-Locus*). Nota-se que o sistema modelado é estável, pois seu Lugar Geométrico das Raízes apresenta traçado no lado esquerdo do plano S. Deve-se ressaltar que o sistema é de nona ordem, indicando visualmente a predominância de polos dominantes nesse sistema. Uma análise nesse sentido, entretanto, não é foco deste estudo. Observa-se que se deve restringir ao cálculo da resposta em frequência, pois o sistema é assintoticamente estável. Com isso, nota-se que a relação do diagrama de módulo e ordem do sistema (tipo 0) é clara, pois os coeficientes de erro estático de posição, velocidade e aceleração descrevem o comportamento em baixa frequência dos sistemas tipo 0 (zero). Ressalta-se que o tipo do sistema determina a inclinação da curva do log-módulo em baixas frequências.

Como a inclinação é crescente, verifica-se um erro de regime elevado, conforme visto na Figura 6.

É interessante observar que as margens de ganho e fase possuem valores infinitos, fato que indica o fator pelo qual o ganho do sistema pode ser aumentado para atingir o limiar de estabilidade. Com um alto valor da margem de ganho, o comportamento do “loop”

fechado será mais robusto e, assim, mais segura será a operação do processo quando controlado. Em outras palavras, quanto mais alta for a margem de ganho mais alto será o fator segurança na sintonia do sistema. Ademais, há o fator de segurança margem de fase, que é uma quantidade adicional de fase necessária para desestabilizar o sistema. Nesse caso, valores infinitos mostram que quanto maior a margem de fase maior o fator de segurança utilizado para sintonia de controladores. É de se esperar, pelos resultados obtidos anteriormente, que, ao se projetar um controlador simples nesse processo de corte de osso humano, resultados eficientes sejam obtidos. O resultado da Força  $f_{tc}$  no sistema gera o gráfico representado na Figura 7, que ilustra o perfil da força responsável pela perfuração em comparação com a resposta do osso à mesma. Como esperado, a parte mole apresenta muito pouca resistência à perfuração quando comparada à compacta. Como a força aplicada na parte C é constante, percebe-se que a variação de velocidade imita esse comportamento, a não ser no momento em que há a passagem do osso cortical para o trabecular. Nesse caso, há uma variação que pode ser entendida como a primeira resposta direta do osso esponjoso à lâmina. Essa resposta, além de apresentar uma amplitude menor do que a da parte dura, começa antes da reação da parte B ter se estabilizado. As reações no início e no final do sistema são semelhantes à entrada força  $F_{cr}$ , tendo como saída a velocidade (em mm/s), pois se trata de um mesmo tipo de osso, no caso, o cortical. A diferença de amplitude entre eles é devida ao fato de que a força inicial começa em zero, resultando em uma amplitude de resposta maior. A parte D recebe, inicialmente, a força que vinha sendo aplicada à região anterior.

Nas contribuições apresentadas uma descrição da tíbia humana, analisando suas características mais importantes para se estabelecer os principais requisitos que devem ser incorporados a um simulador de força de resistência ao corte desse osso, possibilitando a simulação das características dinâmicas desse processo. Em uma segunda análise, apresentou-se o modelo análogo do sistema ósseo com base em modelos existentes e incorporações embasadas na técnica de modelagem fenomenológica. Nessa abordagem, usou-se a técnica de modelagem Bond Graph para o desenvolvimento de modelos matemáticos para simulação do processo de corte da tíbia. No desenvolvimento do modelo, foram utilizados elementos mecânicos para expressar o comportamento do sistema em termos de um análogo. A ausência de estudos similares na literatura mostrou-se um aspecto negativo, pois não foi possível se fazer comparações, dificultando a avaliação da precisão dos resultados. No tocante aos resultados, estes

mostraram a confiabilidade e a estabilidade do modelo desenvolvido, e apresentaram um comportamento satisfatório quando comparados aos poucos dados e modelos existentes na literatura. A ausência de estudos que tratassem das constantes necessárias para proceder às simulações foi um obstáculo que pode ter causado imprecisões nos resultados. A possibilidade de se gerar famílias de curvas em trabalhos futuros será uma linha de ação que os autores pretendem explorar; outros trabalhos que estão em processo de desenvolvimento incluem o desenvolvimento de um controlador adequado e a análise de estabilidade relativa e interna. A importância do estudo realizado é clara, visto que diversas circunstâncias podem levar a consequências negativas no procedimento cirúrgico. Assim, o desenvolvimento de modelos como o proposto podem levar a melhorias no processo cirúrgico.

## Referências

- Adade AF. Análises de sistemas dinâmicos. 3. ed. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA; 2003.
- Aguirre LA. Introdução à identificação de sistemas - técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais. 3. ed. Belo Horizonte: UFMG; 2004.
- Allota B, Belmonte F, Bosio L, Dario P. Study on a mechatronic tool for drilling in the osteosynthesis of long bones: Tool/bone interaction, modeling and experiments. *Mechatronics*. 1996; 6(4):447-59. [http://dx.doi.org/10.1016/0957-4158\(96\)00005-0](http://dx.doi.org/10.1016/0957-4158(96)00005-0)
- Avakian R, Severino NR, Cury RPL, De Oliveira VM, Tatsuo Aihara T, Camargo OPA. Osteotomia tibial alta em pacientes com artrose do joelho. *Acta Ortopédica Brasileira*. 2008; 16(3):152-6. <http://dx.doi.org/10.1590/S1413-78522008000300005>
- Borutzky W. Bond graph methodology: development and analysis of multidisciplinary dynamic system models. London: Springer; 2010.
- Carranza AF. *Periodontia Clínica*. Newman MG, Takei HH, Klokewold PR [editores]. Fonseca DR [tradutora]. Rio de Janeiro: Elsevier; 2011.
- Cowin SC. The mechanical properties of cancellous bone tissue. In: Cowin SC, editores. *Bone mechanics*. Florida: CRC Press; 1989. p. 129-58.
- Hewit JR, Browbank I, Bouazza-Marouf K. Robot-assisted invasive orthopaedic surgery. *Mechatronics*. 1996; 6:381-97. [http://dx.doi.org/10.1016/0957-4158\(96\)00002-5](http://dx.doi.org/10.1016/0957-4158(96)00002-5)
- Kabayama AM, Slade AP, Hewit JR, Trabasso LG. Design and commissioning of a mechatronic orthopaedic saw. In: *Mechatronics: Proceedings of the 9th Mechatronics Forum International Conference, Aug 30 - Sept 1; Ankara, Turkey*. Ankara; 2004.

- Karnopp D, Rosenberg RC. System dynamics: a unified approach. New York: Wiley Interscience Publication; 1975.
- Karnopp D. Bond graph models for eletromagnetic actuators. Journal of The Franklin Institute. 1985; 319(1-2):173-81. [http://dx.doi.org/10.1016/0016-0032\(85\)90072-9](http://dx.doi.org/10.1016/0016-0032(85)90072-9)
- Junqueira LC, Carneiro J. Histologia básica. 11ª ed. Rio de Janeiro: 2004.
- Lopes MCA. Reparação óssea após osteotomias com broca tronco-cônica, serra oscilatória e serra recíprocante. Estudo histológico em cães [dissertação]. Piracicaba: Faculdade de Odontologia de Piracicaba, Universidade Estadual de Campinas; 1997.
- Martin RB. Determinants of the mechanical properties of bone. Journal of Biomechanics 1994; 24(Suppl.1):79-88. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9290\(91\)90379-2](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9290(91)90379-2)
- Nabais AC. Análise numérica da interface osso-cimento na ortoplastia da anca [dissertação]. Porto: Universidade do Porto; 2006. 130 p.
- Rodrigues SS, Simões TS, Kienitz KH, Trabasso LG. Modelagem e controle do suporte das lâminas da serra inteligente guiada por um sistema robótico para assistência em cirurgias de osteotomia. In: Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC: Anais do 3. Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC; 2004, Ilha Solteira. Ilha Solteira: UNESP; 2004. (CTA/ITA-IEE/AE-055/2004).
- Rodrigues SS. Modelagem dinâmica para controle de uma serra automática utilizada em cirurgias ortopédicas [dissertação]. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica; 2005. 192 p.
- Senan AS. Determination of the viscoelastic properties of general anisotropic materials [dissertação]. Maine: The University of Maine; 1998.
- Shimano AC. Análise das propriedades geométricas e mecânicas de tibia humana: proposta de metodologia. São Carlos [tese]. São Paulo: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo; 1994.
- Shimano MM. Histerese de fêmures de ratas submetidos a ensaio de flexão, em diferentes faixas etárias [dissertação]. São Paulo: Universidade de São Paulo; 2001.
- Tyagi P. Modeling and Simulation of Thoracic Region of Spine. In: Proceedings of the International Conference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2011) December 20-22, 2011. Advances in Intelligent and Soft Computing. 2012; 131:649-57. [http://dx.doi.org/10.1007/97881-322-0491-6\\_59](http://dx.doi.org/10.1007/97881-322-0491-6_59)
- Wojcik LA. Musculoskeletal modeling using a bond graph approach. Journal of the Franklin Institute. 2003; 340(1):63-76. [http://dx.doi.org/10.1016/S0016-0032\(03\)00011-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0016-0032(03)00011-5)

---

## Autores

**Suélia de Siqueira Rodrigues Fleury Rosa\***, **Émille Késsy Ferreira de Souza**, **Pablo Alejandro de Abreu Urbizagástegui**, **Luciana Roberta Tenório Peixoto**, **Adson Ferreira da Rocha**

Laboratório de Engenharia e Biomaterial – BioEngLab®, Engenharia Biomédica, Faculdade UnB Gama, Universidade de Brasília – UnB, Área Especial de Indústria, Projeção A, Setor Leste (GAMA), CEP 72444-240, Brasília, DF, Brasil.

**Luciana Roberta Tenório Peixoto**, **Adson Ferreira da Rocha**

Programa de Pós-graduação em Ciências Médicas, Universidade de Brasília – UnB, Campus Universitário Darcy Ribeiro, CEP 70910-900, Brasília, DF, Brasil.