Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

A OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas

Eduardo Cordeiro Fideles

Brasília

2014

Eduardo Cordeiro Fideles

A OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo.

Brasília

2014

“OBSERVAÇÃO: Página de aprovação do Trabalho, com as assinaturas dos Membros da Banca”

Eduardo Cordeiro Fideles graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás onde foi bolsista de monitoria nas áreas de Álgebra e Geometria. Hoje é professor da Secretaria de Educação do Distrito Federal atuando no CED Irmã Regina na zona rural de Brazlândia.

Dedico este trabalho a Michelly, minha esposa. Laura minha filha e ao outro filho, que ainda sem nome, aguardamos ansiosamente para os próximos meses.

Agradecimentos

Primeiramente a Selma, minha mãe, pelo apoio aos meus estudos nas fases anteriores e mais difíceis, durante o Ensino Médio e o Curso Superior. A ela serei eternamente grato. A Michelly, minha esposa, pela paciência e disposição de me animar quando desanimado a ponto de querer desistir. A minha filha Laura por me inspirar de uma forma que somente as crianças conseguem.

Um agradecimento especial ao professor Kellcio pela sempre prota disposição de me orientar e auxílio indispensável para conclusão deste trabalho. Também ao professor Rui, que como coordenador local do programa esteve durante estes dois anos ao nosso lado como um verdadeiro amigo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, que não apenas me permitiu realizar este mestrado, mas principalmete me fez sentir valorizado como professor de escola pública, certo de que minha formação profissional é fundamental para o aumento da qualidade do ensino atual.

Resumo

Este trabalho não tem como objetivo resolver problemas de Olimpíadas de Matemática ou descrever um método para preparar alunos visando vencê-las. Propomos analisar a OBMEP como uma iniciativa que visa a melhoria da qualidade do ensino de Matemática, principalmente o desenvolvimento da habilidade de aplicar os conhecimentos matemáticos para resolver problemas e o uso de problemas para construir o conhecimento matemático. Assim, nos aprofundamos em métodos e estratégias de ensino que podem ser aplicados ao escolher, resolver e explorar os diversos problemas disponibilizados no material acadêmico da OBMEP.

Discutimos pontos importantes a ser levados em consideração ao participar de forma engajada nessa Olímpiada, como o cuidado que se deve ter com uma atitude demasiadamente competitiva ao resolver problemas e a análise de erros como oportunidade de reflexão pedagógica. Concluímos com uma exposição de como o professor pode usar as tecnologias disponíveis por meio da *internet* para criar ambientes de discussão *online* para potencializar o aprendizado e disponibilizar momentos de trocas de experiências.

Palavras-chave

Educação Matemática, Resolução de Problemas, OBMEP.

Abstract

This work does not aim to solve problems to Olympics describe a method of preparing students for overcome them. We propose face OBMEP as an educational project aimed in improving the quality of mathematics teaching, mainly developing the ability to apply mathematical knowledge to solve problems and use problems to construct mathematical knowledge. So, we go deeper in methods and teaching strategies that can be applied to choose, solve problems and explore the various available the material OBMEP.

We discuss the important points to be taken into account when participating in engaged manner in the OBMEP project as the care must be given to an overly competitive attitude, and cognitive thinking works to solve problems and analyze errors as an opportunity for pedagogical reflection. We conclude with a presentation of how the teacher can use the technologies available through the Internet to create online discussion environments to enhance the learning process and provide moments of exchanges of experiences.

Keywords

Mathematical Education, Problem Solution, OBMEP.

Sumário

1 Introdução

O baixo aprendizado nas escolas públicas, em especial na Matemática, é algo notado claramente pela maioria dos professores. Inúmeras pesquisas comprovam o baixo desempenho e as altas taxas de repetência e abandono em Matemática em todo o Brasil. Segundo o levantamento feito pelo programa "Todos Pela Educação" [22] baseado na Prova Brasil de 2011, apenas 10,3% dos alunos aprenderam o suficiente sobre Matemática ao terminar o Ensino Médio. As metas estabelecidas de 19,6% para 2011 e 70% para 2021 são consideradas pela comissão técnica do projeto o objetivo mais desafiador do programa. Diante deste contexto, de necessidade de melhoria do ensino, o Ministério da Educação e o Ministério de Ciência e Tecnologia em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) implementaram, com início em 2005, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que tem como objetivo, entre outros, estimular o estudo da Matemática e o interesse dos alunos e professores por meio da resolução de problemas contribuindo para melhoria do ensino da escola pública brasileira.

Uma pesquisa de impacto realizada em 2012 [3], revelou que as escolas que se inscreveram na OBMEP, tiveram na Prova Brasil de 2007, um aumento médio de 1,91 ponto o que equivale a 1% a mais que o desempenho anterior. Também revelou que escolas que participaram pela primeira vez não tiveram um aumento significativo, enquanto as que participaram em duas edições tiveram um aumento de 1,30 ponto e as que participaram de três edições aumentaram 2,28 pontos a nota na Prova Brasil. Isso é um indício de que participar de sucessivas edições da OBMEP pode influenciar ainda mais o desempenho dos alunos.

Essa influência positiva que a OBMEP tem conseguido em melhorar o aprendizado de Matemática se deve em grande parte pela disponibilização de um vasto material didático, baseado em problemas interessantes, que ajudam, não apenas a se preparar para a competição, mas principalmente, a aprender o conteúdo. Segundo Onuchic e Allevato [15], resolução de problemas pode ser uma ferramenta importante para dar significado a Matemática:

> Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas (ver [15] p.224).

De fato, a OBMEP oferece aos seus participantes várias oportunidade de experimentarem essa situação de aprendizado, seja na preparação para as provas, durante a própria competição ou após, em um reexame dos problemas junto com o professor.

No ano de 2013, a OBMEP atingiu o auge de escolas e municípios participantes com quase 20 milhões de inscritos. Eu, como professor de uma escola pública na zona rural de Brazlândia no DF, nunca fui premiado pela OBMEP e nem tive entre meus alunos algum medalhista. De fato, em nenhuma edição a escola em que eu trabalho teve um aluno com, sequer, uma menção honrosa. Apesar disso, percebo um progresso na competência e autonomia de meus alunos à medida que utilizava os problemas e o material didático fornecido nas aulas de Matemática. Isso me levou a querer pesquisar melhor como a resolução de problemas pode ser uma estratégia de ensino da Matemática. Uma vez que uma lacuna apontada por muitos participantes do programa é a falta de cursos de formação para os professores, pretendo que esse trabalho possa ajudar os docentes a usar o rico material didático disponibilizado pela OBMEP para enriquecer suas aulas contribuindo para melhoria do ensino público.

Apresentaremos primeiro um breve resumo do funcionamento e organização da OBMEP e seus objetivos. Depois nos aprofundaremos em quatro assuntos principais que visam ajudar o professor a motivar e despertar a curiosidade dos estudantes pela Matemática: o equilíbrio entre o espírito competitivo e cooperativo, o uso de resolução de problemas como estratégia de ensino, a análise dos erros e o uso de recursos visuais e tecnológicos. O objetivo desse trabalho não é falar sobre como preparar os alunos para vencerem a competição, mas sim de como melhorar a Educação Matemática e de que forma a OBMEP pode ser uma aliada para isso, mesmo para os alunos que não são destaques nessa disciplina.

2 Funcionamento da OBMEP

Todo ano as escolas precisam inscrever seus alunos na OBMEP. Embora algumas escolham inscrever apenas parte dos estudantes, talvez os que elas julguem melhores, a maioria das escolas cadastra todos para participarem. Isso parece algo mais produtivo, já que as matrículas são gratuitas e envolver todos no programa pode motivar mesmo os que não tem tanta habilidade em Matemática. No Distrito Federal, a abrangência é tão grande que o dia de aplicação da prova da primeira fase já é destacado no calendário escolar tornando-o, em certa medida, o dia especial da Matemática, já que em todos os turnos, todas as escolas param as atividades para se dedicarem exclusivamente a esse objetivo. Além disso, somente escolas públicas ou conveniadas com o serviço público, podem participar sendo que as conveniadas não recebem premiações, apenas seus alunos. Dessa maneira a OBMEP pode se concentrar na realidade e necessidades próprias da educação pública.

A primeira fase é dividida em três níveis, sendo: 6° e 7° anos equivalente ao Nível I (prova amarela), 8° e 9° anos equivalente ao Nível II (prova rosa) e Ensino Médio equivalente ao Nível III (prova azul). Nessa fase, os alunos da escola concorrem entre si para selecionar em média 5% dos participantes de cada nível para a segunda fase da competição. A prova é realizada na escola com questões de múltipla escolha e corrigida pelos professores locais com base em um gabarito fornecido pela própria OBMEP. As questões envolvem vários níveis de dificuldade e procuram não focar conteúdos específicos, concentrando-se mais na habilidade de resolver problemas e em tópicos elementares da Matemática. Dessa maneira, as provas de Nível I, Nível II e Nível III possuem algumas questões em comum, pois um problema difícil para o Nível I pode ser considerado médio para o Nível II.

A segunda fase mantém separados os três níveis da primeira e as provas são compostas de 5 a 8 questões discursivas. Frequentemente os problemas possuem vários itens que permitem, não apenas que o corretor perceba até que ponto o aluno compreendeu e conseguiu achar a resolução da questão, mas que também conduzem o aluno, em certa medida, ao resultado, já que o item anterior, mais simples, pode ser aplicado no item posterior, mais complicado. A correção é feita, primeiro localmente, e depois, as provas de melhores resultados, são enviadas para uma correção nacional. As provas são aplicadas no sábado em pólos escolhidos pela coordenação da OBMEP e alguns supõem que isso contribui para um número significativo de abstenções.

Encerrada as correções são divulgados os premiados. Essa é uma grande diferença da OBMEP em relação a outras Olimpíadas, já que não há um único vencedor, mas uma grande quantidade de premiados. São distribuídas 500 medalhas de ouro, 900 de prata, 4600 de bronze além de até 46200 menções honrosas. Os medalhistas de ouro, prata e bronze recebem o mesmo prêmio: uma bolsa de Iniciação Científica Jr.(PIC/CNPq) para os que continuarem a estudar em escola pública no ano seguinte e uma bolsa de Mestrado (PICME) para àqueles que escolherem as áreas de Matemática e tecnologia no nível superior. Há também, até certo ponto, um esforço de distribuir as medalhas por todo o Brasil, reservando uma quantidade para cada estado e o DF. Assim garante-se que todas as unidades federativas terão medalhistas. Outro detalhe, incluído recentemente, é que para escolas seletivas, aquelas onde os alunos são pré selecionados por uma prova ou por serem filhos de militares ou professores universitários, é disponibilizado um limite máximo de medalhas. Existem premiações para os professores que são pontuados segundo as notas dos seus alunos. Seguindo o padrão das premiações dos alunos, os prêmios fornecidos aos professores estão todos relacionados com a profissão, sendo um *tablet* e uma assinatura da Revista do Professor de Matemática. Há regras para distinguir escolas seletivas de não seletivas e pelo menos um professor premiado de cada unidade federativa. As escolas são premiadas com um quite esportivo seguindo os mesmos princípios.

Como referência de estudo, a OBMEP fornece um amplo material didático. Todas as provas anteriores das duas fases com resoluções escritas e algumas em vídeo estão disponíveis num endereço eletrônico e um "Banco de Questões" é enviado para as escolas inscritas. Este material será alvo de pesquisa desse trabalho que dará sugestões de como utilizá-lo da melhor maneira para, não só preparar os alunos para a competição, mas principalmente melhorar o aprendizado deles em Matemática. No próximo capítulo, falaremos da preocupação que muitos professores têm de que o espírito competitivo possa desestimular os alunos não premiados e de como podemos promover um ambiente de cooperação na nossa prática pedagógica ao nos engajar no projeto da OBMEP.

3 Competição e Cooperação na OBMEP

Alguns educadores tem questionado até que ponto atividades competitivas são salutares no ambiente escolar. Temem que, ao destacar alguns premiados, a grande maioria faça parte de um universo de "excluídos" que se sentiria desmotivada por não ter conseguido a vitória. Também se preocupam que os estudantes passem a entender que a competição em si é mais importante que a aprendizagem. Esses questionamentos não são completamente infundados, já que a OBMEP, como ação pública, que visa melhoria do ensino, não poderia ser causadora de exclusão. Além disso, como um dos objetivos propostos é estimular o interesse de alunos e professores pelo estudo da Matemática, não poderia desestimular uma maioria em prol de alguns poucos motivados com a vitória. Essa matéria fez parte da pesquisa de impacto da OBMEP realizada em 2011 que concluiu:

> Outro tema interessante para análise foi o da competição e concorrência. Neste relatório, evidencia-se que muitos alunos se depararam com situações de baixa autoestima diante da 'derrota', o que parece funcionar como um desestímulo, especialmente se o processo de preparação e envolvimento da escola, dos professores

> e dos próprios alunos nas Olimpíadas sobrevalorizar a premiação em detrimento do aprendizado que a participação engajada pode trazer. Ainda assim, as afirmações dos diferentes atores e dos próprios alunos mostram como a participação recorrente pode levar ao aprimoramento (ver [6] p.30).

Dessa forma, é fundamental que os professores conheçam melhor esse tema para ajudarem seus alunos a tirarem pleno proveito dos momentos de aprendizagem, mesmo que não venham a receber alguma premiação.

Várias áreas do conhecimento se empenham em compreender os conceitos de cooperação e competição, tais como: a psicologia, a filosofia, a sociologia e a antropologia. Dependendo do referencial teórico, esses termos podem ter os mais variados significados. Palmieri [18] destaca que os termos "cooperação" e "competição" tradicionalmente são vistos como construtos em oposição entre si, mas que isso gera imprecisão conceitual diante da complexidade deste fenômeno. A autora adota em seu trabalho um contexto de uma orientação sócio-cultural construtivista onde "cooperação e competição não representam construtos motivacionais necessariamente opostas ou antagônicas"(ver [18] p.7). Dessa maneira, ações cooperativas são voltadas para objetivos comuns e ações competitivas são voltadas para objetivos excludentes. Devido o caráter dinâmico dos objetivos e metas de um indivíduo no seu contexto social, atitudes cooperativas e competitivas acabam tendo características igualmente dinâmicas em uma mesma situação. Em outras palavras, já que os nossos alunos não são motivados para um único objetivo, nem são estes estáticos, é provável que haja uma mistura de objetivos comuns e excludentes gerando, inevitavelmente, ações competitivas e cooperativas no ambiente escolar. A autora conclui qual é o papel da escola:

> Por essa razão, a escola, ao compartilhar com os alunos seus objetivos e metas, poderia melhor explorar as configurações motivacionais facilitadoras de modalidades construtivas de interdependência social. Estaria, pois, integrando espaços de cooperação a espaços de competição e de atividades individuais de maneira a propiciar um desenvolvimento pleno, flexível, sadio e diversificado a seus alunos, na direção de valores democráticos, e de autonomia associada à solidariedade (ver [18] p.19).

O professor Freire [8] defende que o espírito competitivo que observa-se nos jogos é apenas uma representação deste espírito na sociedade. Sendo a competição algo cultural não deveria, e nem seria possível, eliminá-la das instituições educacionais. Segundo ele, baseando-se na teoria evolucionista, ser competitivo é um recurso humano para se estar no mundo. No entanto, ele distingui essa característica humana com excessos cometidos durante a história.

> Não se deve confundir o elemento competitivo contido no espírito humano e presente em todas as civilizações com as formas nefastas que a competição adquire em certos momentos da nossa história. Recusar-se a fortalecer, na Educação, a forma depravada com que a competição se manifesta na sociedade tecnocrática, é desejável, mas sem negar a criança o direito de exercer e ampliar sua cultura (ver [18] p.152).

Apesar de defender a aplicação de jogos competitivos na edução, Freire reconhece a necessidade de equilíbrio e rechaça práticas prejudiciais como a supervalorização do vencedor em detrimento dos perdedores e o vencer a qualquer custo, predominantes nas atividades esportivas atuais. Por isso sugere que o professor não deve tentar eliminar toda as atividades competitivas mas sim tentar compreendê-las e utilizá-las para valorizar as relações humanas.

Portanto, é necessário um ponto de vista equilibrado sobre o tema e cabe ao professor, no desenvolvimento de sua prática pedagógica, motivar seus alunos de maneira a tirar o máximo proveito das oportunidades oferecidas pela Olimpíada. Por isso, faremos agora uma análise de como o regulamento da OBMEP procura manter equilibrado o foco no espírito competitivo.

3.1 A OBMEP e o espírito competitivo

Antes de explanar sobre como a OBMEP encara o espítiro competitivo, observe seus objetivos principais:

> OBJETIVOS DA OBMEP:
>
> 1. Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas;
> 2. Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica;
> 3. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas;
> 4. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
> 5. Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas;
> 6. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (ver [3] p.16).

Vejamos agora cinco motivos pelos quais a OBMEP não tem um caráter exageradamente competitivo, mas de forma positiva pode auxiliar os professores na melhoria do ensino da Matemática.

1. Embora haja vencedores **não há apenas um vencedor** e sim um grupo de medalhistas. Note que não há diferença na premiação dos alunos que conquistam ouro, prata ou bronze. Também são distribuídas uma grande quantidade de diplomas de honra ao mérito. Desta forma, não há uma supervalorização dos vencedores em detrimento dos perdedores.

2. Todos os prêmios oferecidos são relacionados com os estudos e melhoria da Educação. Não há premiações em dinheiro, viagens de férias, automóveis ou algo parecido, mas sim bolsas de estudo (para estudantes), *tablet* e a assinatura da RPM (para professores) e kits esportivos (para escolas). Fazendo assim fica evidente que **o objetivo principal é a aprendizagem** e não a competição.

3. O foco não é apenas na Educação, mas na **Educação Pública**. Por isso, apenas alunos que permanecem na escola pública podem participar do PIC Jr./CNPq e receber as bolsas de incentivo oferecidas aos medalhistas. A valorização da educação pública é extremamente necessária para a correção das desigualdades sociais e econômicas existentes no Brasil.

4. Veja que o terceiro objetivo é o de identificar jovens talentos e incentivar que ingressem nas **áreas científicas e tecnológicas**. Neste caso, a OBMEP funciona como seleção de estudantes com maior afinidade com a Matemática. Já na primeira edição da Olimpíada em 2005, ficou claro esse objetivo importante. Veja algumas citações de autoridades envolvidas na realização do projeto:

> Motivar para a Matemática é motivar para ciência em geral, é despertar entre os jovens vocações científicas de que o País tem hoje especial carência.(Mensagem presidencial por ocasião da realização da OBMEP - Luiz Inácio Lula da Silva, ver [16] p.4).

> No momento em que a Matemática é considerada uma das disciplinas prioritárias em países desenvolvidos, por sua interferência nas diversas áreas de ciência e tecnologia, no Brasil, a matéria não recebe a atenção necessária nas escolas, com consequências desastrosas para a Educação Pública e para o desenvolvimento tecnológico do país (Texto da diretoria disponível em [16] p.8).

Assim a OBMEP cumpri outro objetivo social ao preparar jovens com vocação para estas áreas tão carentes no país.

5. Uma forma de equilibrar o espírito de competição no ambiente escolar é por explorar os **diferentes potenciais e habilidades** que podem ser desenvolvidas pelo ser humano. Dessa maneira, todos os estudantes podem descobrir que se destacam em alguma área. Alguns talvez descubram ter um prazer e vocação especial para atividades

artísticas, outros para esportes e alguns para a Matemática e suas tecnologias. Sendo o estudo da Matemática tão deficiente na maioria das escolas públicas, a OBMEP pode contribuir para que esse potencial específico seja explorado pelos professores, restando para a escola desenvolver projetos que explorem outros possíveis potenciais. Veja o exemplo da SEDF (Secretaria do Estado de Educação do DF) e alguns programas que contemplam diversas habilidades: existem oito escolas especializadas em ensino de língua estrangeira, os CILs (Centro Interescolar de Línguas) e no ano de 2013 foi desenvolvido pelo GDF o projeto "Brasília sem fronteiras" que selecionou, através de uma prova, cento e vinte seis alunos dos CILs para participarem em um curso de quatro semanas na cidade de Washington-DC nos Estados Unidos. Os selecionados tiveram todas as despesas pagas pelo governo. Uma grande oportunidade para os jovens que se destacaram nos estudos de línguas para aprimorar seus conhecimentos. A SEDF também possui uma Escola de Música que oferece cursos de diferentes níveis para quem deseja desenvolver seu potencial artístico. Os CIDs (Centros de Iniciação Desportivas) oferecem cerca de 15 modalidades desportivas para alunos da rede pública. Além dessas alçoes maiores, pequenos projetos locais espalhados pelas escolas fomentam o afloramento de diversas habilidades. Portanto, a OBMEP deve ser vista como uma ação complementar que, junto com outros projetos desenvolvidos em todo o Brasil, contribuem para dar oportunidade de uma educação integral aos alunos da rede pública.

Todos sabemos a grande influência que os professores refletem em seus alunos. Portanto, é fundamental transmitir de maneira adequada, em sua prática pedagógica, o real espírito de uma Olimpíada científica, fazendo que o foco esteja na aprendizagem. Também devem, de alguma forma, valorizar o progresso obtido, mesmo que limitado por diversas dificuldades. O desejo de estudar deve estar vinculado a curiosidade dos problemas, ao espírito investigativo natural do ser humano e ao almejo de novas oportunidades de um aprendizado mais profundo, através da Bolsa de Iniciação Científica. Uma participação engajada no programa da OBMEP envolve organizações de clubes de Matemática, aulas de resolução de problemas e o uso pleno dos recursos didáticos oferecidos, o que contribui para atividades cooperativas entre os alunos. Dessa forma, os estudantes não estarão se preparando apenas para uma prova, mas para a vida e para exercerem sua cidadania. Canalle explica a diferença entre uma Olimpíada Científica e uma Olimpíada Esportiva:

> Enquanto o atleta esportivo precisa de técnico ou treinador, além de equipamen-

> tos para praticar sua modalidade esportiva (quadras, cavalos, esgrimas, barcos, raquetes, bolas, campos, revólveres, etc.) o 'atleta'científico precisa simplesmente estar na Escola, ter professores, livros e revistas para ler. Enquanto um se prepara para um evento efêmero, o outro prepara-se para a vida toda (ver [5] p. 11).

Convencidos do valor das Olímpiadas Ciêntificas, sobretudo da OBMEP por ser focada na Educação Pública, prosseguimos esse trabalho. Na próxima seção, falaremos de Resolução de Problemas como objetivo e método da aprendizagem de Matemática.

4 A OBMEP e o uso de Resolução de Problemas

Na sessão "Perguntas frequentes" do endereço eletrônico da OBMEP, encontramos uma resposta clara e direta acerca de seu objetivo: "o objetivo principal é estimular o estudo da Matemática por meio da resolução de problemas que despertem o interesse e a curiosidade de professores e estudantes." [13]. Assim, o uso da resolução de problemas para aumentar o interesse e o aprendizado dos alunos, resultando na melhoria do ensino público é algo de grande destaque na OBMEP. Desta forma, o professor que deseja fazer pleno uso dos recursos oferecidos deve se familiarizar com a didática da resolução de problemas e por isso dedicamos uma parte desta pesquisa para se aprofundar neste tema.

O caminho escolhido pela OBMEP mostra ser bem acertado já que tanto a literatura especializada quanto os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) enfatizam a necessidade do desenvolvimento desta habilidade. Muitos pesquisadores tem defendido a importância do uso de problemas para ensinar. Veja alguns exemplos:

> A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos (ver [11] p.5).

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (ver [20] p.5).

> Um dos principais objetivos do ensino de Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las (ver [7] p.10).

Seguindo este ponto de vista predominante os PCNs apontam a resolução de problemas como um método importante de ensino em todos os componentes curriculares, principalmente no ensino de Matemática.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentaçao (ver [4] p.52).

Assim, observamos dois motivos importantes para o professor utilizar problemas na aula de Matemática. É necessário desenvolver a habilidade de aplicar a Matemática para resolver problemas e é possível aprender Matemática ao se fazer isso. No mundo atual é extremamente necessário "entender" e "ser capaz" de usar a Matemática (ver [15] p.213). Estes dois objetivos se entrelaçam ao usarmos este método de ensino na prática pedagógica. Em quase dez anos de existência, a OBMEP produziu um grande banco de questões, sendo em sua maioria problemas curiosos e desafiadores, que são distribuídos gratuitamente por meio de materiais impressos para as escolas participantes e por meio do endereço eletrônico a qualquer pessoa interessada. Uma pesquisa realizada no ano de 2009 revelou que 63% dos professores entrevistados realizaram alguma atividade extra classe (grupos de estudos, clubes de Matemática e outras atividades) utilizando este material didático, e 40% declararam o utilizar pelo menos durante as aulas (ver [6] p.11). Se isso for feito a luz da metodologia correta poderá estimular o interesse dos alunos despertando o prazer de estudar Matemática.

4.1 A heurística da Resolução de Problemas

O professor Dante define problema "como qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la" (ver [7] p.9) e classifica-os em seis categorias:

1. exercícios de reconhecimento: objetiva que o aluno reconheça alguma propriedade;
2. exercícios de algoritmos: objetiva apenas o exercício da aplicação de algum

algoritmo;
3. problemas-padrão: objetiva a aplicação direta de algum algoritmo;
4. problemas-processo ou heurísticos: a solução envolve passos não descritos no enunciado. É preciso pensar em uma estratégia para resolvê-lo;
5. problemas de aplicação: trata-se da aplicação da Matemática para resolver problemas relacionados com o dia-a-dia;
6. problemas de quebra-cabeça: são problemas de desafio, cuja solução depende de algum tipo de truque difícil de se descobrir.

A maioria dos problemas da OBMEP são do quarto tipo e podem ser muito proveitosos para se desenvolver o raciocínio e o espírito investigativo dos alunos e ajudar no desenvolvimento do conhecimento Matemático. Os problemas do primeiro tipo são muito utilizados como um subproblema que auxilia na compreensão do problema maior, como discutiremos mais detalhadamente adiante. Problemas do quinto tipo talvez sejam os mais produtivos, mas seria difícil fazer parte de uma prova de Olimpíada, já que envolvem uma situação real de interesse peculiar àquele grupo de estudantes, tendo uma dimensão bem maior, sendo por isso conhecido também como situação-problema. Os outros tipos, embora tenham seu valor educativo, já são historicamente bastante trabalhados na sala de aula, enquanto deveriam ser apenas coadjuvantes do processo de aprendizagem, pois desenvolvem objetivos bem específicos e não despertam muito o interesse e criatividade dos alunos.

Para Pólya [20] o professor tem como papel principal auxiliar os estudantes a acharem a solução de um problema. Isso, porém, deve ser feito com equilíbrio, pois se o estudante recebe um auxílio insuficiente não conseguirá nem um progresso, mas se, por outro lado, o professor fizer tudo, não sobrará nada para seu aluno fazer. Ao auxiliar seus estudantes, o professor provavelmente perceberá que é levado a sempre fazer as mesmas perguntas e indicar os mesmos passos. A heurística, portanto, "procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade" (ver [20] p.87). Pólya propõe uma lista com quatro passos principais para resolver um problema: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Falaremos de forma resumida desse método e depois o exploraremos de forma prática indicando, por meio de problemas que fazem parte do banco de questões ou de provas anteriores da OBMEP, sugestões de como o professor pode conduzir seus alunos a solução correta e, principalmente, a construção do conhecimento durante o processo de solução. Não se esqueça que o objetivo deste trabalho é mostrar como o professor pode fazer bom uso do material didático disponibilizado pelo projeto para aumentar o interesse de seus alunos e conseguir a melhoria do ensino da Matemática.

O método descrito por Pólya se baseia em uma lista de indagações que aparecem na ordem em que é mais provável ocorrer. Possui como característica a generalidade que permite que seja aproveitado em quase todos os tipos de problemas. Aplicando o método o professor não dará respostas a seus alunos, pois quase sempre a resposta é de pouca importância, mas o ajudará a achar o caminho ao lhe mostrar as perguntas corretas que ele deve fazer a si mesmo quando procura a solução do problema. Mais do que isso, por imitação e prática, o aluno poderá adquirir autonomia e aprender a fazer as indagações corretas na hora correta processando as operações mentais necessárias para resolver sozinho outros problemas, mesmo sendo bem diferentes.

4.1.1 Compreensão do Problema

> É tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja (Pólia, [20] p.4)

A primeira coisa a se fazer é compreender bem o problema. Também é preciso desejar resolvê-lo. Para isso ele deve ser muito bem escolhido. Não pode ser fácil demais e nem demasiadamente difícil. Neste ponto, temos uma barreira, pois muitos professores e alunos apontam que as questões da OBMEP são muito difíceis diante da qualidade do ensino público na maioria das escolas brasileiras. É claro que seria impossível adequar as questões a realidade de todo o país com suas diversas peculiaridades (ver [6] p.26). Além disso, pelo seu caráter de Olimpíada, os problemas devem ser desafiadores contemplando assim aqueles estudantes que tem um potencial especial e interesse natural pela área da Matemática. Apesar disso, ao utilizar o material didático produzido pela OBMEP, o professor poderá escolher e até adaptar problemas para que estejam no nível desejado, na medida certa para seus alunos. Poderá decidir, por exemplo, aplicar alguns problemas das provas de nível inferior, como as de nível I para alunos de 8° e 9° anos ou de nível II para alunos do Ensino Médio. Na medida que os alunos adquirirem mais habilidade, conseguirão resolver problemas mais complexos. Portanto, mesmo que nenhum deles ainda esteja no nível de conseguir alguma medalha ou premiação, o nosso objetivo e o da OBMEP terá sido atingido. Ao ver o progresso de seus estudantes, o professor certamente se sentirá premiado e seus estudantes estarão melhor formados para a cidadania.

Para se compreender o problema é preciso, antes de tudo, entender seu enunciado verbal, interpretando adequadamente seu texto. Aqui temos novamente outra barreira:

a capacidade de leitura e interpretação é uma grande deficiência da educação brasileira, em especial da escola pública. Nessa situação, poderemos escolher entre dois caminhos: ler e explicar o enunciado e partir sem demora para as questões matemáticas envolvidas, ou gastar pacientemente parte preciosa do tempo da aula para ajudar o aluno a desenvolver a competência de leitura e interpretação. Devido a importância primordial dessa habilidade necessária, devemos admitir que todo professor, não importa o componente curricular que ministre, é solidariamente responsável em ajudar o estudante a suprir essa necessidade. Vencida essa barreira, ou talvez enquanto a atravessamos, temos as indagações gerais sugeridas por Pólya para a primeira etapa.

> Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?
> É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou é redundante? Ou contraditória?
> Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? (ver [20] p.XII).

4.1.2 Estabelecimento de um Plano

> O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano (Pólya, [20] p.5)

Nesta hora, quanto mais conhecimento sobre o assunto e experiência mais fácil será resolver o problema. Esta fase pode ser muito produtiva para se entender, particularizar ou generalizar conceitos matemáticos. É preciso paciência e perseverança já que nem sempre a ideia de um plano nos vem a mente rapidamente, principalmente nos problemas mais difíceis.

As indagações propostas por Pólya talvez possam ser úteis para fazer seguir a correta sequência de ideias que resultarão em êxito, porém nem sempre será assim. Talvez seja necessário modificar, particularizar, generalizar o problema, destrinchá-lo. Exatamente por essa complexidade desafiadora, essa é a fase mais interessante onde podemos desenvolver o raciocínio lógico-matemático de nossos alunos. Assim, os ajudaremos a construir de forma sólida e inesquecível os conhecimentos matemáticos envolvidos no problema. Devemos evitar resolvê-lo e explicar um possível plano a ser executado deixando para o estudante apenas a tarefa de fazer mecanicamente contas e algoritmos para chegar a resposta. Mas por meio de perguntas bem escolhidas, poderá conduzir seu aluno a um plano ou, se isso não for possível, lhe dar apenas parte da ideia deixando para ele concluí-la. Para conseguir isso o professor deve se colocar no lugar do aluno tentando compreender suas dificuldades e limitações. As indagações propostas para essa etapa são:

> Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?
> Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe seria útil?
> Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
> Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
> É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira?
> Volte as definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais específico? Um problema análogo?
> É possível resolver uma parte do problema? Mantenha uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados aprimorados para determinar a incógnita?
> É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?
> Utilizou todos os dados? Utilizou toda condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema? (Ver [20] p. XII, XIII).

4.1.3 Execução do Plano

Segundo Pólya "Executar o plano é muito mais fácil; paciência é do que mais se precisa" (ver [20] p. 8). Definido o plano, executá-lo é uma tarefa mecânica. Se o aluno tiver alguma habilidade com as operações e algoritmos necessários conseguirá fazê-lo sem dificuldades. No entanto, um alerta deve ser dado: verifique cada passo. Não desejamos depois de tanto esforço na etapa anterior nos perdermos em erros de desatenção. Além disso, nos concentrar nos princípios que justificam cada passo dado nos fornece uma preciosa oportunidade de fixar os conceitos básicos já aprendidos. Assim, as indagações para essa fase, apesar de apenas duas, são igualmente importantes. Vejam:

> É possível verificar claramente que o passo está correto?
> É possível demonstrar que ele está correto?" (Ver [20] p. XIII).

4.1.4 Retrospecto

> Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução (Pólya, [20] p.10).

Depois que o problema foi resolvido o bom professor não desejará passar apressadamente para outro sem antes explorar completamente o potencial e as relações envolvidas neste. Agora, temos uma visão geral da situação e o que era obscuro começa ser mais claro. Além disso, resolvê-lo usando outro plano, de outra forma, enriquecerá a experiência do aluno, tornando-o mais habilidoso na arte de resolver problemas. Pode ser que o problema resolvido seja a chave para resolver outros parecidos ou mais complicados. Veja as perguntas para esta última fase:

> É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?
> É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?
> É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema? (Ver [20] p.XIII).

4.2 Resolvendo Alguns Problemas

Vamos agora colocar em prática o método de Pólya descrito anteriormente usando alguns problemas do banco de questões da OBMEP e das provas anteriores. Começaremos pelos mais simples e depois resolveremos outros mais complexos. Lembre-se que o nosso objetivo não é resolvê-los (as soluções também são disponibilizadas pela OBMEP), mas sim explorar a resolução para ajudar o aluno a desenvolver a habilidade de resolver problemas com confiança e autonomia e construir o conhecimento matemático. Se o professor entender o espírito com que as seguintes resoluções foram abordadas será capaz de adaptá-las para as circunstâncias locais ajudando seus alunos a progredirem no entendimento da Matemática.

Problema 1: (Banco de Questões da OBMEP-2013: nível I, problema 1).

Fábio precisa obter exatamente quatro litros de água. Para isso ele usará apenas os dois únicos baldes de água que tem em sua casa e uma torneira. Sabendo que um dos baldes que Fábio tem em sua casa tem capacidade de três litros, e o outo tem capacidade de cinco litros, determine uma maneira com a qual Fábio pode obter a quantidade de água que necessita.

Solução. Observe primeiro que se trata de um problema heurístico segundo a classificação de Dante, pois apesar de envolver, em sua solução, apenas operações básicas de soma e subtração, não é fácil observar de imediato um plano para resolvê-lo, sendo preciso pensar no problema. Assim teremos que nos dedicar as quatro etapas explicadas anteriormente.

Compreender o problema.

Qual é a incógnita? Neste caso, não se trata de um valor. Deseja-se determinar "uma maneira" de se obter exatamente quatro litros de água. O nosso desejo é usar perguntas genéricas para que o aluno consiga, pela prática e imitação, organizar seu raciocínio em futuros problemas. Porém, se essa pergunta não der bons resultados, podemos tentar outra mais adaptada ao problema. Neste caso: qual é o objetivo de Fábio?

Quais são os dados? Qual é a condicionante? Só poderemos usar dois baldes e uma torneira. São dados a capacidade de cada balde (cinco e três litros). Talvez aqui também seja necessário adaptar a pergunta, por exemplo: o que Fábio possui para realizar o seu objetivo?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Um simples desenho dos baldes com proporções aproximadas pode ajudar o aluno fixar o sentido do problema. É claro que esperamos que, com tempo, ele desenvolva a habilidade de, mentalmente, imaginar essa situação.

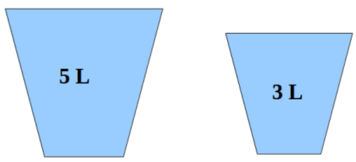


Figura 1: Desenho referente a solução do problema 1.

A partir de agora chamaremos os baldes de 5L e 3L. Essa notação evitará uma possível confusão de se dizer, por exemplo, "temos dois litros no balde de 5 litros". É importante pensar nesses detalhes.

Estabeleça um plano:

Esta é a parte de maior complexidade em que o aluno precisará muito do professor. Diante das diversas indagações propostas vamos direto àquelas que, de fato, nos ajudarão a resolver este problema. *É possível reformular o problema? É possível variar os dados?*

Podemos propor que o aluno descubra uma maneira de conseguir exatamente 1 litro, 2 litros, 3 litros ou 5 litros. Ele exercitará a ideia com esses problemas mais simples. Além disso veremos depois que a solução do problema inicial passa antes por alguma dessas novas situações. Vamos fazer apenas um como exemplo:

Como conseguir 2 litros?

1° passo: encha o balde 5L.

2° passo: despeje a água do balde 5L no balde 3L até que ele encha.

Observe que no balde 5L restou exatamente 2 litros de água.

A próxima pergunta é: *eis um problema correlato já resolvido. É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar seu método?* Se colocarmos dois litros no balde 3L faltará apenas um para completá-lo. Se enchermos o balde 5L poderemos completar o um litro do outro balde e então teremos os 4 litros desejados.

Execução do plano. Agora basta escrever, desde o começo, cada passo planejado.

1° passo: encha o balde 5 L;

2° passo: despeje a água do balde 5L no balde 3L;

3° passo: descarte a água do balde 3L;

4° passo: transfira os 2 litros do balde 5 L para o balde 3L;

5° passo: encha novamente o balde 5L;

6° passo: despeje a água do balde 5L até que complete o balde 3L que já continha 2 litros.

Observe que no balde 5L restou exatamente 4 litros.

Retrospecto.

É possível perceber isto num relance? É provável que agora o aluno até ache fácil o problema. Mas podemos desafiá-lo e instigar sua criatividade com uma simples pergunta: *é possível chegar ao resultado por um caminho diferente?* Ele conhece bem o problema e possui mais confiança e por isso não terá que passar novamente por todas as etapas. É provável que ache outra solução. Por exemplo, a seguinte:

1° passo: encha o balde 3L;

2° passo: despeje a água do balde 3L no balde 5L;

3° passo: encha novamente o balde 3L;

4° passo: despeje a água do balde 3L no balde 5L até que este fique cheio;

5° passo: descarte a água do balde 5L ;

6° passo: transfira o 1 litro do balde 3L para o balde 5L;

7° passo: encha o balde 3L;

8° passo: transfira os 3 litros do balde 3L para o balde 5L.

Observe que no balde 5L temos exatamente 4 litros.

Podemos perguntar agora aos nossos alunos: qual é a melhor solução? Uma pergunta pessoal, já que a Matemática exige definições claras. Então, vamos definir o que possa ser a melhor solução.

Definição 1. A melhor solução é a que exigiu menos passos. (Neste caso, a primeira).

Definição 2: A melhor solução é a que necessitou menos água. (Neste caso, a segunda).

Depois de explorar amplamente o potencial do nosso problema passemos para outro, agora um pouco mais complexo.

Problema 2:(Prova da OBMEP de 2009: 1ª fase, nível II questão 11. Ver [14]).

Na sequência 9, 16, 13, 10, 7... cada termo, a partir do segundo, é a soma de 7 com o algarismo das unidades do termo anterior. Qual é o 2009° termo da sequência?

A) 9 B)10 C) 11 D) 13 E) 15

Compreender o problema.

Qual é a incógnita? Desejamos encontrar o termo de posição 2009.

Quais são os dados? Qual é a condicionante? Foram dados os cinco primeiros termos da sequência e a maneira de descobrir o próximo através do anterior: somando-se 7 ao algarismo das unidades.

Uma forma de verificar se o aluno compreendeu este problema é pedir que ele escreva mais alguns elementos da sequência.

Estabeleça um plano.

Já o viu antes? Talvez o aluno já tenha visto problemas que envolvam sequências mais conhecidas, como as progressões aritmética e geométrica. Ele deverá observar que a sequência do problema não é nenhuma delas, porém tem em comum o fato de ter uma lógica (uma regra Matemática para formar os elementos). Os termos não estão aleatoriamente distribuídos, mas cada um deles é determinado quando conhecemos o anterior. Compreender isso já nos leva a um plano: calcular todos os termos até o 2009°. Parece um plano ruim, mas provavelmente não surgirá na mente da maioria dos nossos alunos outro melhor e por isso executemos o nosso plano.

Execução do plano.

Lembre-se que é preciso ter paciência. Sabemos que o aluno poderá perceber melhor o padrão da sequência a medida que escreve mais termos dela. Alguns perceberão logo, outros depois de várias linhas de cálculo. Não devemos ser precipitados e tirar deles o gosto desta descoberta. Veja os primeiros termos:

9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15, 12, 9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15, 12,
9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15, 12, 9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15, 12,
9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15, 12, 9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15...

Agora temos um plano melhor. Não precisamos de tanto trabalho, já que observamos que a sequência possui um ciclo que se repete de dez em dez. Se aplicarmos a divisão euclidiana e observarmos o resto acharemos qual elemento do ciclo corresponde ao elemento de posição 2009 ($2009 = 10 \cdot 200 + 9$) e o nono termo do ciclo é o 15. Resposta letra E.

Retrospecto.

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? Em nossas vidas, várias coisas são cíclicas, repetindo o mesmo padrão. O movimento do sol, os anos, meses e as estações dos anos. A própria vida. Para desenvolver melhor esse método na mente dos alunos passe outros problemas que envolvam ciclos. Deixamos algumas sugestões para o leitor. Depois de analisá-las perceberão que não se tratam de exercícios mecânicos de aplicação de algum algoritmo. Os problemas são muito diferentes e exigirá do aluno que pense e desenvolva um plano que terá como parte, ou detalhe, a divisão e consideração do resto.

(Banco de questões da OBMEP 2013: nível I, questão 4. Ver [2]).

(Banco de questões da OBMEP 2013: nível I, questão 16. Ver [2]).

(Prova da 1° fase de 2012: nível II, questão 3. Ver [14]).

(Prova da 1° fase de 2012: nível III, questão 4. Ver[14]).

Discutiremos, por último, um problema de Geometria.

Problema 3: (Prova 2° fase da OBMEP 2012: nível III, questão 4. Ver [14]).

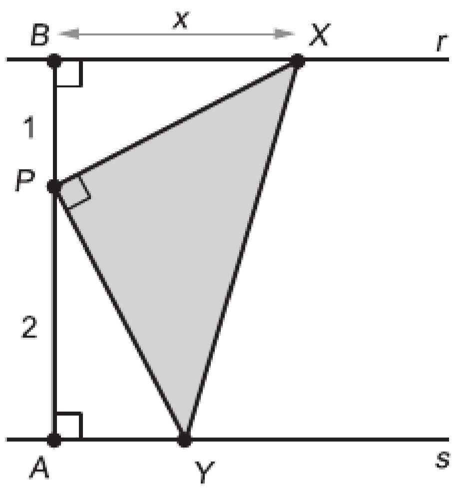


Figura 2: Ilustração do Problema 3.

Na figura acima, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, nesse segmento, é tal que AP=2 e BP=1. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x. O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P.

a) Explique por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes.

b) Calcule a área do triângulo XPY em função de x.

c) Para quais valores de x a área do triângulo XPY é igual a $\frac{5}{2}$?

d) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor dessa área.

Compreendendo o problema. Por ser um problema mais complexo esta primeira etapa pode ser um pouco desafiadora. O responsável pela elaboração da questão já fornece uma ajuda, pois cada item anterior será útil para resolver o próximo, mais difícil. Essa é uma característica comum das questões da 2° fase da OBMEP que o professor fará bem em explorar e imitar ao elaborar e resolver problemas junto com seus alunos. Assim, evite resolver cada item separadamente, mas antes tenha uma visão geral da situação. Por isso, respondamos a primeira pergunta para o problema como um todo. *Qual é a incógnita?* Queremos encontrar a área do triângulo XPY e achar a medida de x tal que a área do triângulo XPY é $\frac{5}{2}$. Observe que nos itens c e d a incógnita é a mesma, o que muda é a pergunta sobre a área do triângulo XPY.

Adote uma notação adequada. Nesse problema, isso será algo fundamental, mas o faremos a medida que vermos a necessidade de incluir algum símbolo no desenho.

Elaboração de um Plano. No primeiro item, precisamos explicar por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes. Peça aos alunos que faça uma lista com todos os casos de semelhança de triângulos.

- (AA-ângulo, ângulo). Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.
- (LLL-lado, lado, lado). Se todos os lados de um triângulo forem proporcionais aos lados de outro, os dois triângulos são semelhantes.
- (LAL-lado, ângulo, lado). Se dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais, os dois triângulos são semelhantes.

Eis um problema correlato já resolvido. É possível utilizar seu resultado? Em outras palavras, posso usar algum dos casos acima para provar que PAY e XBP são semelhantes? Como os triângulos são retângulos parece mais fácil usar o primeiro caso, pois bastará mostrar que existe outro par de ângulos congruentes.

Execução do plano. Denotemos por α o ângulo BPX e por β o ângulo PYA. Como o triângulo PAY é retângulo temos que $APY = 90^\circ - \beta$. Também observamos que APB é um ângulo raso, assim temos:
$\alpha + 90^\circ + 90^\circ - \beta = 180^\circ$, daí
$\alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ$, o que implica que
$\alpha - \beta = 0^\circ$, e portanto
$\alpha = \beta$.
Pelo caso AA, os triângulos PAY e XBP são semelhantes.

Na solução do item b), usaremos o resultado do item a).

Solução: Seja AY = y . A semelhança dos triângulos PAY e XBP nos dá a relação $\frac{y}{1} = \frac{2}{x}$.
Segue do teorema de Pitágoras que PX = $\sqrt{1+x^2}$ e
PY = $\sqrt{1+y^2} = \sqrt{4+\frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x}\sqrt{1+x^2}$.

Temos então:
$$Area(XPY) = \frac{PX \cdot PY}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2}\cdot 2\sqrt{1+x^2}}{2x} = \frac{1+x^2}{x}.$$

Para resolver os itens c) e d), temos agora apenas um exercício de aplicação de equações do 2° grau e máximos e mínimos da parábola.

Retrospecto. O professor poderá usar esse problema para poder introduzir a teoria de vértice da parábola e análise da situação de máximos e mínimos. Assim o conteúdo terá mais significado para os alunos.

4.3 Uma breve experiência no Centro Educacional Irmã Regina

Concluiremos este capítulo relatando uma breve experiência de uma aula de resolução de problemas, realizada aplicando-se as diversas sugestões abordadas. Esta aula foi realizada no Centro Educacional Irmã Regina, localizado na zona rural da Região Administrativa de Brazlândia, no Distrito Federal, com uma turma de 2° ano do Ensino Médio. Aplicamos uma lista com três problemas do material da OBMEP (anexo I). O objetivo principal da atividade era ajudá-los a desenvolver a habilidade de resolver problemas e diagnosticar possíveis deficiências neste campo. Não pretendemos fazer uma descrição detalhada desta experiência, mas apenas alguns comentários e percepções positivas e negativas que obtivemos ao propor uma aula envolvendo problemas.

1. Foi bom observar o surgimento de várias **estratégias diferentes de resolução** para o mesmo problema. Não é possível conseguir isso com um ensino baseado em prática e repetição de exercícios de aplicação direta de algoritmos e fórmulas. Relataremos aqui três soluções apresentadas pela turma para o primeiro problema da lista e faremos alguns comentários sobre como esse especto pode ser explorado pelo professor.

Problema 1:(Questão 16, nível III, 1° fase da OBMEP de 2009. Com adaptação)
Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Quantos quadradinhos possui o 30° desenho?

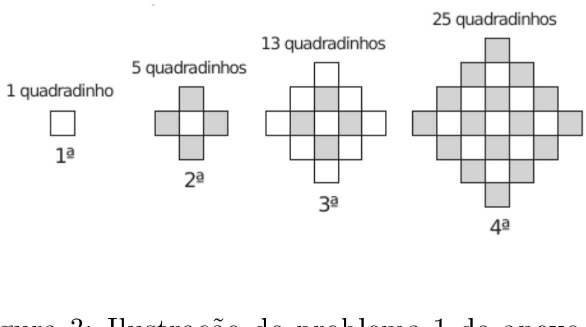


Figura 3: Ilustração do problema 1 do anexo I.

Esta era, originalmente, uma questão de múltipla escolha que pedia que se descobrisse qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos. A adaptação feita tinha o objetivo de que fosse possível calcular todos os termos até o 30°, com a ajuda de uma calculadora, caso o aluno não conseguisse observar uma estratégia melhor. Isso de fato aconteceu e essa foi a estratégia mais usada. Vamos então as três soluções apresentadas pela turma:

I- (Solução apresentada pelo aluno D.S.S.)

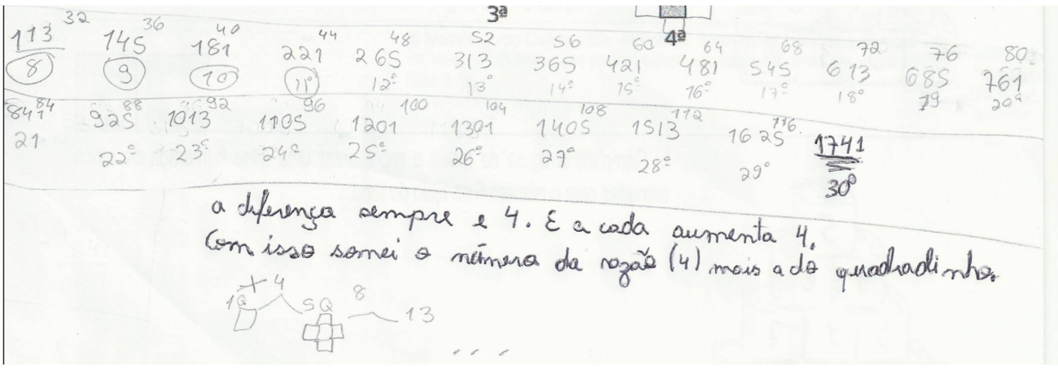
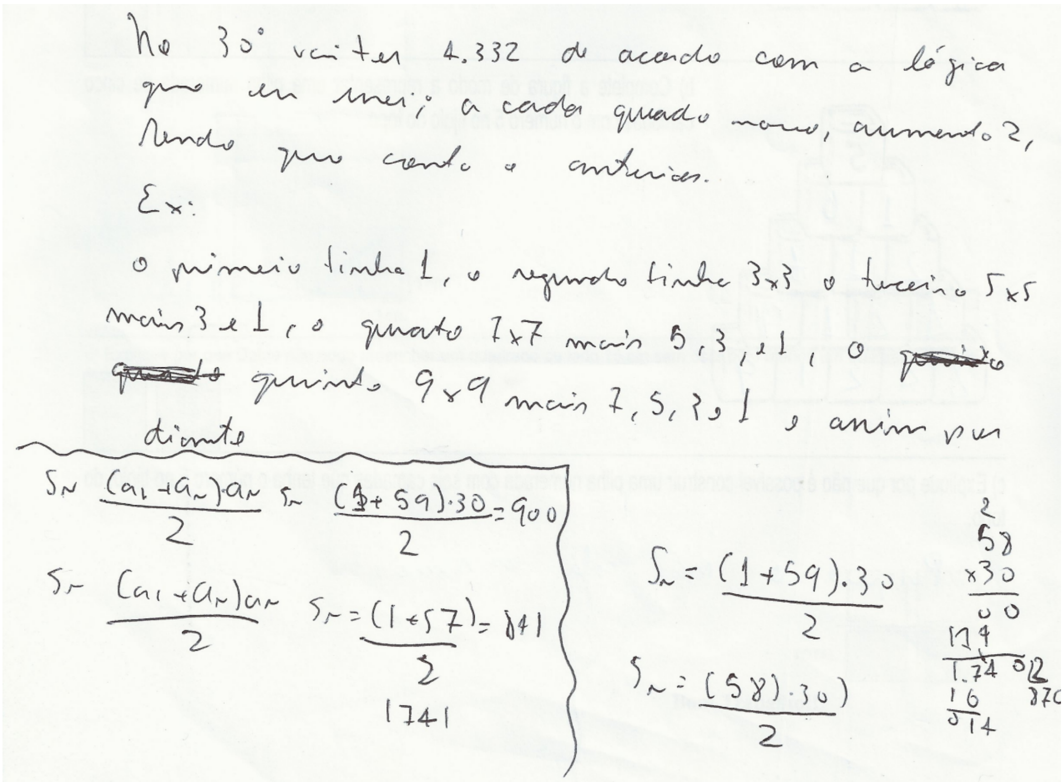


Figura 4: Solução apresentada pelo aluno D.S.S. para o "Problema 1" do "Anexo I".

Comentário. O estudante estava familiarizado com o conteúdo sobre Progressões Aritméticas e Geométricas. Ele percebeu que a sequência formada era uma Progressão Aritmética de 2° ordem, embora não conhecesse essa nomenclatura, e conseguiu calcular todos os termos até o 30° sem precisar fazer o desenho. Essa foi a solução obtida mais rapidamente, embora envolvesse vários cálculos, pois foi gasto pouco tempo para elaborar a estratégia.

II-(Solução apresentada pelo aluno L.A.S.)


No 30° vai ter 4.332 de acordo com a lógica que eu vi; a cada quadro novo, aumenta 2, sendo que conta o anterior.

Ex:

o primeiro tinha 1, o segundo tinha 3x3 o terceiro 5x5 mais 3 e 1, o quarto 7x7 mais 5, 3, e 1, o ~~próximo~~ ~~quarto~~ quinto 9x9 mais 7, 5, 3 e 1 e assim por diante

$S_n = \frac{(a_1+a_n)a_n}{2}$ $S_n = \frac{(1+59)\cdot 30}{2} = 900$

$S_n = \frac{(a_1+a_n)a_n}{2}$ $S_n = \frac{(1+57)}{2} = 841$

1741

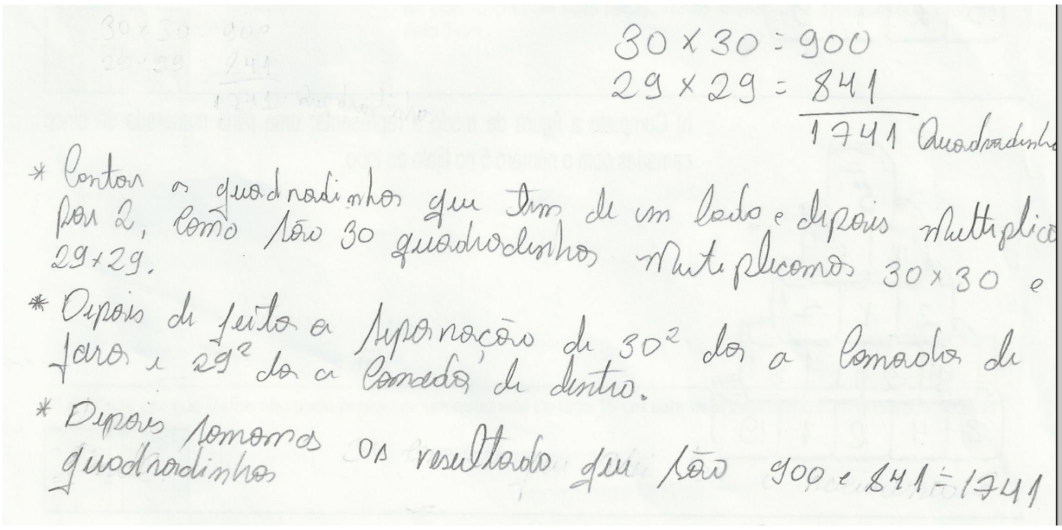
$S_n = \frac{(1+59)\cdot 30}{2}$

$S_n = \frac{(58)\cdot 30)}{2}$

Figura 5: Solução apresentada pelo aluno L.A.S. para o "Problema 1" do "Anexo I".

Comentário. Seguindo um argumento mais geométrico o aluno percebeu que, embora a quantidade de quadradinhos não formasse uma PA, a quantidade de quadradinhos da coluna maior formava uma PA de razão 2 e termo inicial 1. Dessa maneira, o 30° desenho teria 59 quadradinhos em sua coluna central. Neste desenho, a quantidade de quadradinhos de cada coluna também formava uma PA de razão 2. Concluiu assim que precisava realizar a soma $(1+3+5+...+59)+(57+55+...+1)$ e obteve a solução correta.

III- (Solução apresentada pelo aluno B.S.F.)


30 x 30 = 900
29 x 29 = 841
1741 Quadradinh

* Contar os quadradinhos que tem de um lado e depois multiplic
por 2, como são 30 quadradinhos multiplicamos 30 x 30 e
29+29.

* Depois de feito a separação de 30^2 dos a camada de
fora e 29^2 da a camada de dentro.

* Depois somamos os resultado que são 900 e 841 = 1741
quadradinhos

Figura 6: Solução apresentada pelo aluno B.S.F. para o "Problema 1" do "Anexo I".

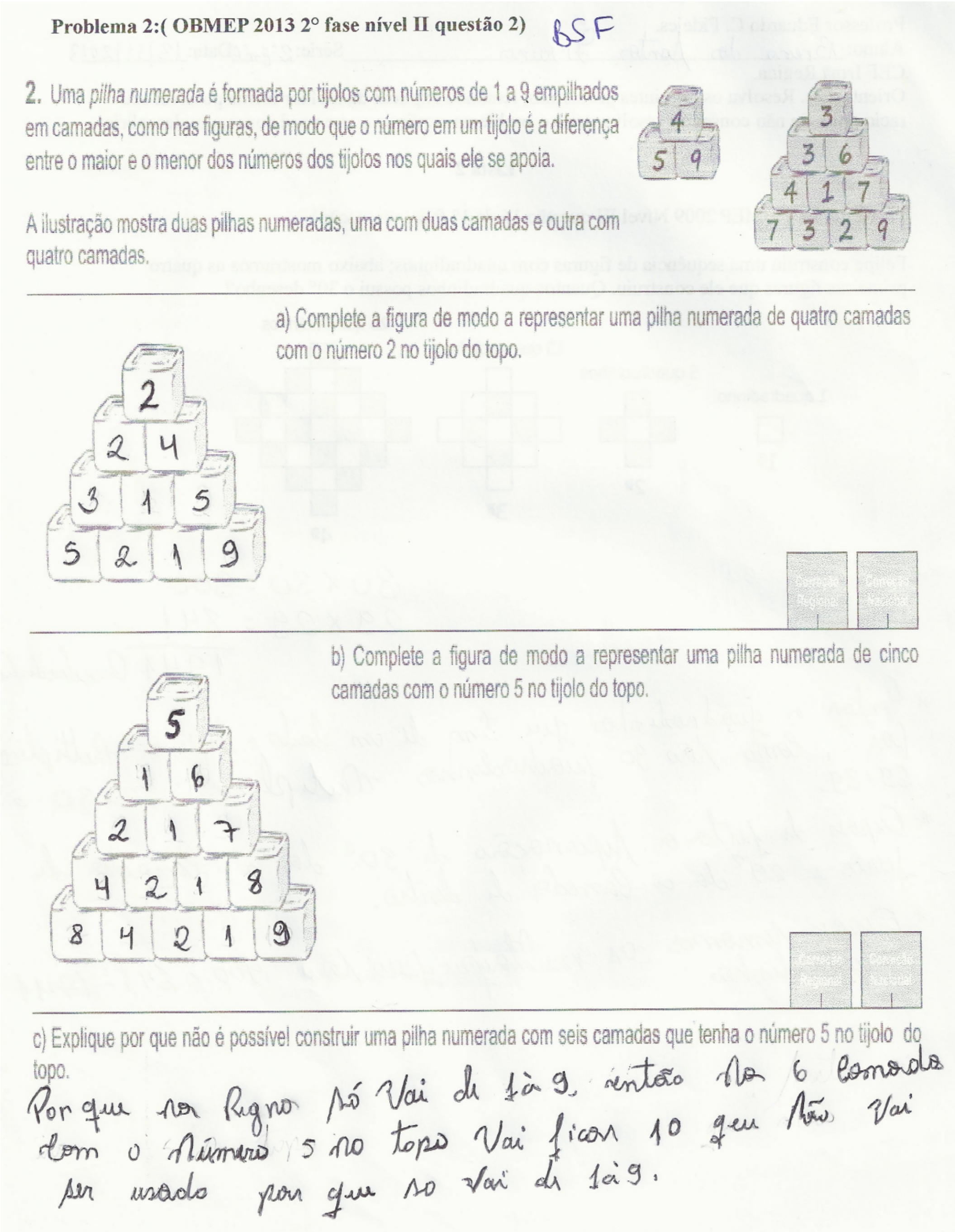
Comentário. O estudante conseguiu a melhor estratégia, no sentido de ser necessário menos trabalho de execução, ou seja, menos cálculo. Percebeu que a 30ª figura teria 30 diagonais com 30 quadradinhos cinzas cada e 29 diagonais com 29 quadradinhos brancos cada. Portanto, calculou $(30 \cdot 30) + (29 \cdot 29)$ obtendo a solução correta.

2. A aula foi desenvolvida no laboratório de informática, e a disposição das cadeiras, uma ao lado da outra, proporcionou naturalmente a formação de grupos que discutiam sobre os avanços obtidos. Após as atividades, os alunos socializaram suas respostas e pareceram bem animados em explicar uns aos outros o seu modo diferente de chegar a solução. Isso gerou um agradável momento de **cooperação** na turma.

3. A atividade não foi feita como preparação para OBMEP, e nem seria considerada para formação da nota bimestral. Assim, os estudantes ficaram motivados e curiosos porque **se sentiram desafiados pelos problemas**, que possuíam um nível de dificuldade apropriado para eles.

4. A atividade mostrou que problemas com vários itens que conduzem progressivamente a solução são produtivos para ajudar os estudantes a amadurecer a capacidade de elaborar um plano. A segunda questão da lista proposta era desse tipo e os alunos precisaram de pouca intervenção para achar a solução. Observamos uma solução apresentada e fizemos algumas observações sobre esse tipo de problema comum na segunda fase da OBMEP.

(Solução apresentada pelo aluno B.S.F. para o "Problema 2" do "Anexo I").



Problema 2:(OBMEP 2013 2° fase nível II questão 2) BSF

2. Uma *pilha numerada* é formada por tijolos com números de 1 a 9 empilhados em camadas, como nas figuras, de modo que o número em um tijolo é a diferença entre o maior e o menor dos números dos tijolos nos quais ele se apoia.

A ilustração mostra duas pilhas numeradas, uma com duas camadas e outra com quatro camadas.

4
5 9

3
3 6
4 1 7
7 3 2 9

a) Complete a figura de modo a representar uma pilha numerada de quatro camadas com o número 2 no tijolo do topo.

2
2 4
3 1 5
5 2 1 9

b) Complete a figura de modo a representar uma pilha numerada de cinco camadas com o número 5 no tijolo do topo.

5
1 6
2 1 7
4 2 1 8
8 4 2 1 9

c) Explique por que não é possível construir uma pilha numerada com seis camadas que tenha o número 5 no tijolo do topo.

Porque nos Rigno só vai de 1 à 9, então na 6 camada com o número 5 no topo vai ficar 10 que não vai ser usado por que so vai de 1 à 9.

Figura 7: Solução apresentada pelo aluno B.S.F. para o "Problema 2" do "Anexo I".

Comentário: O primeiro item tem como objetivo que o aluno compreenda a situação proposta pelo enunciado. Há várias formas de resolver e todos fizeram sem dificuldades.

O segundo item é mais difícil. Não existem tantas possibilidades e só é possível resolvê-lo com mais facilidade se perceberem que em cada camada terão de colocar pelo menos um número maior que o da camada superior. Essa também é a chave para resolver o terceiro item. Dessa maneira, como a primeira camada começa com 5, na segunda camada precisaremos colocar o 6, na terceira camada o 7, na quarta camada o 8 e na última camada o 9. Essa foi a dificuldade encontrada, onde precisamos intervir. Depois de tentarem alguns minutos, sem êxito, fizemos as seguintes perguntas para ajudá-los a encontrar uma estratégia de solução: *é possível que todos os números da segunda camada sejam menores que 5? E iguais a 5?* Essa pequena intervenção foi suficiente para, depois de pensarem um pouco, conseguiram achar a solução do segundo e terceiro item.

5. O terceiro problema era sobre cálculo de áreas de figuras facilmente decompostas em triângulos retângulos e quadrados. Apesar disso, apenas um aluno, depois de muitas intervenções, conseguiu achar a solução. Ele confundiu o conceito de área com o de perímetro, e esclareceu essa dúvida depois de várias explicações e exemplos. Também não compreendeu o conceito de decomposição de figuras planas. Percebemos que os alunos tem uma **dificuldade especial em geometria**.

6. Por último, notamos uma enorme **deficiência na habilidade de escrita**, sejam em usar a linguagem Matemática ou com a própria língua portuguesa. Não estamos falando apenas dos erros de ortografia e algumas letras quase ilegíveis, mas da capacidade de expressar de forma clara a ideia que tiveram. Acreditamos que essa deficiência só possa ser sanada por meio de ações interdisciplinares envolvendo toda a escola e comunidade. O professor de Matemática também é responsável em alcançar esse objetivo fundamental e atividades como essa que propomos auxilia o aluno a desenvolver sua capacidade de leitura e escrita.

5 Obstáculos no aprendizado de Matemática.

> Na educação, a noção de obstáculo pedagógico também é desconhecida. Acho surpreendente que os professores de ciências, mais do que os outros se possível fosse, não compreendam que alguém não compreenda (Bachelard, [1] p.16).

Atualmente, a Matemática tem sido considerada por muitos alunos uma matéria difícil de aprender, acessível apenas para os mais inteligentes. Os altos índices de repetência e desistência neste componente curricular preocupam muitos educadores que tentam compreender quais as principais dificuldades dos estudantes em assimilar os conceitos e técnicas empregados. Principalmente ao trabalhar com problemas, o professor perceberá que grande parte dos alunos não conseguem alcançar a solução, mesmo para alguns problemas bem simples. Perceberá, também, que os tipos de erros cometidos são vários, desde uma falta de atenção até não compreender algum conceito básico envolvido. Portanto, nos dedicamos agora a analisar como devemos considerar o erro ao trabalhar com o ensino da Matemática, e utilizá-lo como ferramenta de reflexão para a prática pedagógica, diagnosticando as deficiências de nossos alunos.

O ensino escolar tradicional, baseado em decorar e aprender por repetição tem se mostrado falho em proporcionar um aprendizado significativo. Os estudantes aprendem a realizar um algoritmo mas não entendem o porquê nem como aplicá-lo para resolver problemas. É como ajudá-los a manusear com habilidade uma ferramenta sem saber sua utilidade. Assim vemos o aluno seguir passos decorados para dar ao professor a resposta correta. São incentivados a decorar a tabuada de multiplicação para fornecer uma resposta certa e rápida, mas quando contam com os dedos são repreendidos, mesmo que estejam aplicando a definição de produto e exercitando a utilização do conceito. Ao dar mais importância aos algoritmos que aos conceitos os estudantes não desenvolvem a capacidade de resolver problemas. Dessa maneira é fundamental refletirmos sobre como encaramos os erros e acertos de nossos alunos nas aulas de Matemática.

Teixeira [21] explica que na abordagem behaviorista ou comportamental, considera-se que o erro ocorre pela falta de condicionamento ou reforçamento adequado. Assim, o erro é visto como fracasso e deve ser evitado. Segundo esta visão "como o erro é algo a ser evitado, ele não tem função pedagógica" (ver [21] p.49). Dessa forma, o professor diante do erro dos alunos, procura reforçar os procedimentos corretos objetivando que aprendam pela sua repetição.

Por outro lado, segundo Pinto ([19] p.37-39), na teoria piagetiana da equilibração, o erro acontece devido a conflitos cognitivos quando o aluno se esforça a se adaptar a novas situações. Esses conflitos surgem ao se passar de um estado de equilíbrio a outro, quando acontecem os processos de assimilação e acomodação. Dessa forma, o erro é visto como algo natural no processo de desenvolvimento da inteligência e no aprendizado.

Em sua obra "A formação do espírito científico" Bachelard [1] propõe uma nova forma de ver os erros cometidos, que chama de obstáculos. Ele demonstra que na história da evolução do conhecimento na passagem de um nível pré-científico para um nível científico ocorre a rejeição de conhecimentos anteriormente cristalizados, e enfrenta certos obstáculos.

> E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos (ver [1] p.11).

Assim em certas ocasiões, os erros surgem, não pela falta de conhecimento, mas por conhecimentos anteriores, que são corretamente aplicaveis em algumas situações mas não em outras. É algo natural do aprender e revela muito a respeito do nível de desenvolvimento dos estudantes. Por isso os professores devem estar interessados nos erros cometidos pelos estudantes com fim de compreender sua natureza e buscar formas de conduzi-los ao aprendizado.

Ao analisar a evolução das ciências experimentais, Bachelard observa que houve muitos períodos de dificuldades, causados pelo que chamou de obstáculos epistemológicos. Falando da infantilidade própria do espírito pré-científico dos séculos XVIII e XIX ele cita alguns exemplos, como quando amianto incombustível foi usado para fazer lampiões duráveis e concluiu-se que poderiam fazer lampiões eternos retirando o óleo do amianto. Em outro exemplo, por perceber que uma corrente elétrica causava tremores em um mapa feito de vidro, Cavallo conclui que essa fosse a causa de terremotos. Seguindo esse equívoco, abbé Bertholon propõe uma solução que chama de "pára-tremores" de terra que poderia salvar uma cidade atingida. Ao citar esses exemplos Bachelard concluí: "Constata-se como, para Cavallo ou para o abbé Bertholon, o fenômeno tão ilustrado de uma simples vibração física produzida por descarga elétrica leva a explicações afoitas"(ver [1] p.36). Esses obstáculos apresentados no desenvolvimento da ciência surge inevitavelmente na prática pedagógica atual durante a construção dos conceitos científicos pelos estudantes.

Apesar dos diversos equívocos observados no desenvolvimento das ciências experimentais, Bachelard admite que "... a história da Matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro" (ver [1] p.20). Não significa que não surgem erros no desenvolver do conhecimento matemático, mas sim que o texto científico final, com demonstrações esmeradas e em uma ordem lógica e clara, não exprime as dificuldade encontradas no decorrer da criação. "Os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na etapa em que as conjecturas são feitas pelo matemático, praticamente, desaparecem no resultado final apresentado pelo texto científico"(ver [17] p.41).

Portanto, é de se esperar que os estudantes de Matemática enfrentem obstáculos semelhantes, principalmente nas primeiras fases de aprendizagem de um conceito.

5.1 Os tipos de erros

Usando o estudo feito por Brousseau podemos compreender melhor a noção de obstáculos no campo da didática da Matemática. Ele os classifica em três tipos: ontológicos, didáticos e epistemológicos. Antes, falaremos de um tipo de erro muito comum, que não pode ser considerado um obstáculo ao aprendizado, aqueles que acontecem por falta de atenção.

Glissement cognitivo.
Em francês o termo *glissement* significa deslize. Portanto esse tipo de erro surge de um lapso ou engano involuntário (ver [17] p.95). Não significa uma falta de conhecimento ou não aprendizagem, mas apenas um engano, produzido em muitos casos por falta de atenção. Faremos duas considerações importantes em relação a esse tipo de erro.

Primeiro devemos refletir sobre como ele será tratado nas avaliações de aprendizagem, cujo objetivo principal é mensurar o quanto o aluno compreendeu do conteúdo. Alguns professores desconsideram completamente uma questão onde, apesar do aluno seguir todos os procedimentos corretamente, cometeram um deslize em algum cálculo, encontrando uma solução errada. Além disso, devido ao tempo escasso para planejamento pedagógico, é hábito a aplicação de testes com gabaritos de múltiplas escolhas que tornam impossível a distinção desse tipo de erro. Apesar disso o professor deve observar a importância de destacar os conceitos e procedimentos principais e observar o progresso do aluno por detrás destes deslizes. Apesar de trabalhoso é recompensador a correção cuidadosa dos testes.

Por outro lado, as grandes provas de seleção e avaliação de grande escala, como concursos, vestibulares e a própria OBMEP, são limitados a questões objetivas e por isso queremos que esses erros cometidos por falta de atenção aconteçam o mínimo possível. Algumas hábitos simples podem ajudar, como treinar bastante alguns cálculos e algoritmos, revisar cuidadosamente cada questão, resolver os problemas com calma e ser bem organizado. Devemos, em nossas aulas, nos esforçar em ser exemplos nesse sentido, resolvendo os problemas com esmero, apesar de constantemente sermos pressionados pelo curto tempo que nos é destinado. Acima de tudo porém, fazemos bem feito apenas aquilo que nos interessa. Por isso, se conseguirmos despertar sua curiosidade, os estudantes resolveram as questões com mais cuidado.

Obstáculos didáticos
Quando há uma falha na transposição do saber científico para o saber escolar surgem os chamados obstáculos didáticos. Quando o conhecimento é transmitido sem significado, longe de uma contextualização, o aluno tem dificuldade de compreender. Pais [17] explica que alguns conteúdos são inclusos nos currículos escolares com fim estritamente didático, com o objetivo de facilitar a aprendizagem, como, por exemplo, os produtos notáveis. Mais se forem ensinados desvinculados desse propósito ficam sem significado (ver [17] p.20).

Obstáculos Epistemológicos.
São obstáculos que surgem na construção dos conceitos. Aparecem à medida que certos conhecimentos corretamente aplicáveis em determinadas situações se tornam ineficazes diante de uma nova situação. É comumente observado na história do desenvolvimento das Ciências e surgem como obstáculos ao aprendizado no cotidiano escolar.

5.2 O erro como oportunidade de reflexão da prática pedagógica.

Pinto [19] observa que uma reflexão cuidadosa nos erros cometidos pelos estudantes pode fomentar três importantes níveis de discussão: o da formação do professor, o do ensino da Matemática e o do processo de avaliação da aprendizagem.

Ao refletir com cuidado na gênesis do erro o professor tem a oportunidade de se reformar, admitindo que, em certas ocasiões, a falha se deve a metodologia aplicada, ou seja, na forma como fez a transposição do conhecimento científico para o conhecimento escolar. Poderá proporcionar uma mudança de atitude, como observa Pinto:

> Ao considerar o erro como estratégia didática construtiva, levando a hipótese de que a passagem de uma visão condutivista – em que o erro é avaliado como produto – para uma visão construtivista – na qual ele é avaliado como parte do processo – apresenta-se como uma possibilidade para a mudança do ensino.
>
> Em geral, o professor tende a orientar sua ação sobre o erro por uma perspectiva essencialmente empirista, isto é, sobretudo, corretiva. Essa "postura corretiva" por parte do professor, que considera o erro como uma incapacidade do aluno, pode ser substituída por uma "postura construtiva", em que se da mais importância aos procedimentos que aos resultados, em que o erro passa a ser problematizado, sob várias dimensões, e focalizado na sua gênese (ver [19] p.23).

Dessa forma, ao admitir uma origem didática ao erro, educadores responsáveis pelo sistema de ensino poderão refletir com mais cuidado nos objetivos e procedimentos adotados na escola para promover o aprendizado e na postura apresentada pelo professor, propondo uma estratégia didática inovadora.

Essa análise também poderá ser utilizada como ferramenta de ensino. Pinto, ao destacar a teoria pregada por Piaget, observa que "o desafio central colocado pelo construtivismo à pedagogia é tornar o erro 'um observável' para o aluno." (Ver [19] p.39). Isso significa que é necessário que o estudante entenda o que errou. Muitas vezes, nas aulas de Matemática, ao corrigir uma atividade, explicamos o procedimento correto de resolução de um problema. Em algumas situações o aluno compreende a resolução apresentada pelo professor e verifica que sua resposta está errada, mas não compreende o que errou. Tornar o erro "um observável" é mais produtivo para um aprendizado significativo do que apenas desconsiderar os argumentos desenvolvidos pelo estudante e apresentar-lhe os nossos argumentos corretos e inquestionáveis. Além disso, ao perceber a origem epistemológica de certos obstáculos, podemos auxiliar os nossos alunos a superarem certas dificuldades ocasionadas pela aplicação equivocada de certos conhecimentos fortemente arraigados e ajudá-los a progredir em seus aprendizados construindo e generalizando novos conceitos de maneira apropriada.

Por último, analisar as origens dos erros cometidos pelos nossos alunos é importante para uma melhor avaliação de aprendizagem, já que proporciona uma melhor mensuração não apenas quantitativa, mas, sobretudo, qualitativa diante do progresso apresentado. Luckesi [10] explica que durante a história várias formas de castigo tem sido empregadas como corretivas. No Sul do Brasil era usada a régua para bater nos alunos que não respondessem adequadamente a lição, e no Nordeste, a palmatória. Ficar de joelhos no grão de milho ou permanecer levantado de braços abertos encostado no quadro já foram costumes por aqui. Essas formas de tratamento foram substituídas por outras mais sutis como as promessas de testes extremamente complicados, as provas surpresas ou as ameaças de reprovação. Ele propõe uma visão mais positiva do erro:

> Reconhecendo a origem e constituição de um erro, podemos superá-lo, com benefícios significativos para o crescimento. Por exemplo, quando atribuímos uma atividade a um aluno e observamos que este não conseguiu chegar ao resultado esperado, conversamos com ele, reorientamos seu entendimento e sua prática. E, então, muitas vezes ouvimos o aluno dizer: "Poxa, só agora compreendi o que era para fazer!". Ou seja, foi o erro, conscientemente elaborado, que possibilitou a oportunidade de revisão e avanço. Todavia, se nossa conduta fosse a de castigar, não teríamos a oportunidade de reorientar, e o aluno não teria a chance de

> crescer. Ao contrário, teria um prejuízo no seu crescimento, e nós perderíamos a oportunidade de sermos educadores (ver [10] p.57).

Dessa forma o professor poderá propor avaliações menos classificatórias e mais formativas, fazendo da avaliação parte do processo de ensino e não apenas ferramenta de medição de desempenho.

5.3 Outra experiência no Centro Educacional Irmã Regina.

Esta experiência também foi realizada no Centro Educacional Irmã Regina, mas desta vez com alunos de 8° e 9° anos do Ensino Fundamental. Foi aplicado uma atividade com três problemas dissertativos do Banco de Questões da OBMEP (Anexo II). Os estudantes foram incentivados a escrever da melhor forma possível seu modo de pensar sobre as questões propostas mesmo que não conseguisse chegar a uma solução. Poucos alunos tiveram êxito em resolver alguns problemas. Mais precisamente, de 52 alunos, apenas 2 conseguiram resolver algum problema completamente, sendo que o restante os resolveram apenas parcialmente. Agora, ao fazer uma análise crítica das soluções apresentadas, reflitamos na nossa prática pedagógica e nos obstáculos encontrados pelos nossos alunos ao resolver problemas.

Comentários: Antes de vermos algumas soluções apresentadas observe o primeiro problema da lista proposta.

Problema 1.(Questão 1, nível I, Banco de Questões da OBMEP 2013) "Água na medida certa". Fábio precisa obter exatamente quatro litros de água. Para isso ele usará apenas os dois únicos baldes de água que tem em sua casa e uma torneira. Sabendo que um dos baldes que Fábio tem em sua casa tem capacidade de três litros, e o outro tem capacidade de cinco litros, determine uma maneira com a qual Fábio pode obter a quantidade de água que necessita.

Este foi resolvido de forma detalhada na seção anterior, onde discorremos sobre a heurística das resoluções de problemas e mostramos como o professor poderia conduzir uma aula e fazer pequenas intervenções para ajudar os alunos a chegarem a solução. Diferente disso, nesta atividade não foi feita nenhuma intervenção, propondo que os alunos fizessem o máximo que conseguissem sozinhos. Com isso conseguimos observar o seu primeiro modo de pensar, suas primeiras impressões, e diagnosticar algumas dificuldades que encontram ao resolver problemas. Vamos enumerar algumas conclusões observadas.

1. Percebemos a grande dificuldade dos alunos em **interpretarem o texto** do problema. Ao observar os três tipos de soluções mais apresentadas observei que confusões foram feitas no modo como entenderam o enunciado.
Veja a solução apresentada pelo aluno D.M.B.:

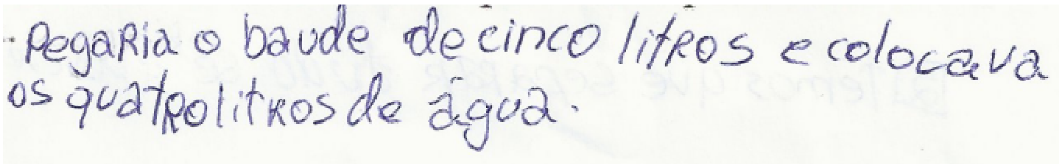

Pegaria o baude de cinco litros e colocava os quatrolitros de água.

Figura 8: Solução apresentada pelo aluno D.M.B. para o “Problema 1” do “Anexo II”.

No verso da atividade o aluno fez a justificativa de sua resposta:

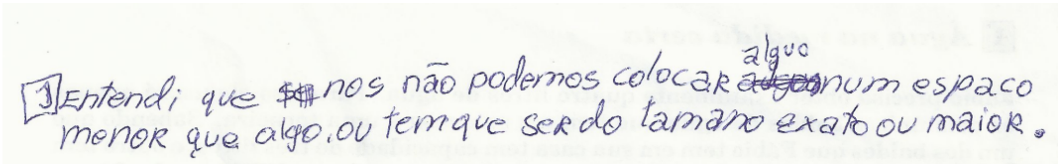

1 Entendi que nos não podemos colocar algo ~~algum~~ num espaco menor que algo. ou tem que ser do tamano exato ou maior.

Figura 9: Justificativa apresentada pelo aluno D.M.B. para o “Problema 1” do “Anexo II”.

Vários outros apresentaram essa mesma solução, que revela uma interpretação confusa do problema. Em outras palavras, o raciocínio empregado foi: se desejo captar quatro litros de água terei de usar o balde que suporta cinco litros, pois o balde que suporta apenas três litros é insuficiente para conter quatro litros.

O aluno L.D.P. propôs a seguinte solução:

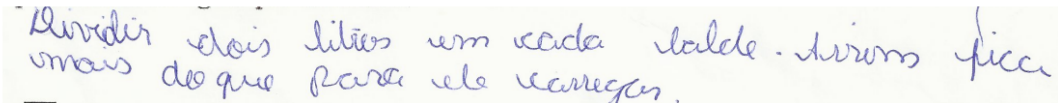

Dividir dois litros em cada balde. Assim fica mais do que para ele carregar.

Figura 10: Solução do “Problema 1” do “Anexo II” apresentada pelo aluno L.D.P.

Assim como este, vários entenderam que teriam de usar os dois baldes, e que a melhor forma de dividir a água era ao meio, sendo dois litros em cada balde. O aluno J.G.P. também entendeu que deveria usar os dois baldes mas desejou dividir a água de outra maneira.

Vejamos:

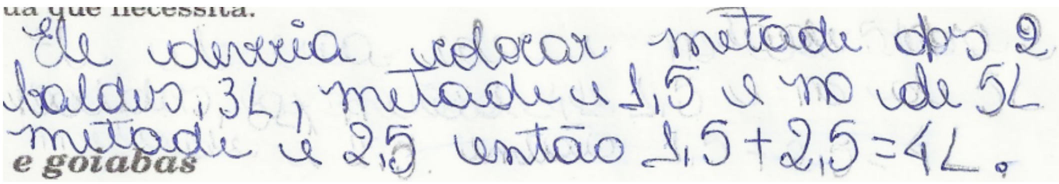


Figura 11: Solução do “Problema 1” do “Anexo II” apresentada pelo aluno J.G.P.

Já que, em geral, é mais fácil estimar a metade de um balde do que $\frac{1}{5}$, essa solução foi a mais próxima de resolver a situação como foi proposta.

Ao analisar as soluções dadas percebemos a importância de trabalhar esse tipo de problema para que o aluno desenvolva a habilidade de ler e interpretar os textos. Eles não tiveram a oportunidade de exercitar seu raciocínio matemático, já que não conseguiram nem entender qual era o objetivo da questão.

2. Também foi notado que alguns alunos pensam que a solução de um problema matemático é sempre a busca de algum algorítimo. Observe três exemplos de como os estudantes tentaram encontrar alguma “fórmula mágica” para achar a solução.

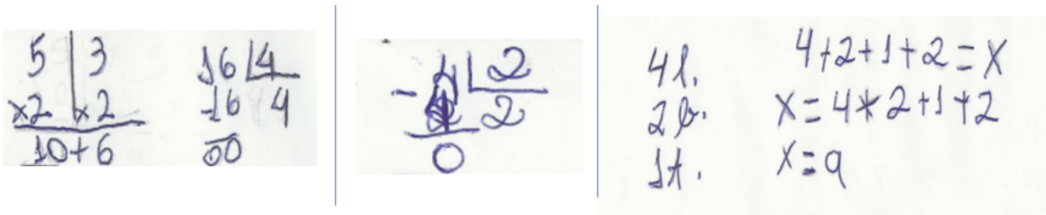


Figura 12: Soluções apresentadas pelos alunos P.A. L.C.R. e R.A.S.

O único aluno que conseguiu compreender o problema e solucioná-lo achou necessário justificar a solução na forma de um algoritmo. Veja a solução:

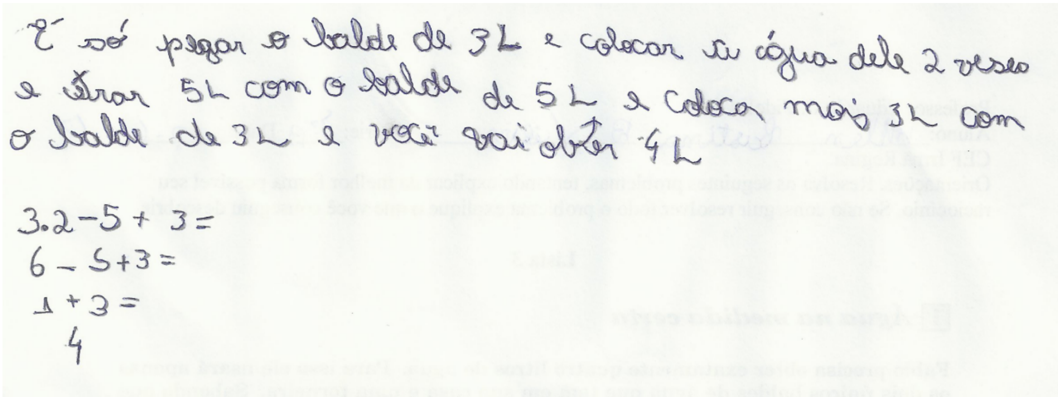


Figura 13: Solução apresentada pelo aluno K.C.B.V. para o "Problema 2" do "Anexo II".

Embora sua explicação esteja um pouco confusa foi possível perceber que ele entendeu o problema e achou um dos modos de resolver apresentados na seção anterior deste trabalho. Apesar disso, o aluno escreveu uma expressão numérica para explicar o raciocínio, como se fosse fundamental um cálculo para justificar a solução.

Esses exemplos mostram o cuidado que o professor deve ter para que se priorize a construção dos conceitos matemáticos, deixando aos algoritmos o papel de auxiliares para facilitar a solução de alguma parte do problema. Pinto observou essa fonte de obstáculo para o aprendizado da Matemática:

> Considerando as inferências das pesquisas apresentadas na revisão bibliográfica, é possível constatar que os erros cometidos pelos alunos não são simples falhas de memória, mas têm raízes mais profundas. Isso torna evidente que um tratamento necessário para sua regulação também necessita operar em um nível mais profundo. Nesse sentido, não basta um ensino centrado na aquisição de procedimentos algorítmicos: é necessário que o ensino se oriente em direção ao desenvolvimento de estruturas conceituais corretas (ver [19] p. 35).

Nesse sentido, acreditamos que a OBMEP pode ser usada de maneira muito positiva, ajudando os estudantes a desenvolverem a capacidade de interpretar e resolver problemas.

3. Por outro lado, eles não conseguiram **aplicar os conhecimentos já adquiridos** para resolver um problema. A terceira questão proposta envolvia encontrar a medida

do menor caminho entre dois vértices opostos de um cubo andando pela sua superfície. Embora nenhum tenha observado o caminho certo, perceberam um caminho quase ideal, percorrendo a diagonal de um quadrado. Apesar de já terem acabado de estudar o Teorema de Pitágoras, eles não perceberam que este seria útil para achar a medida desejada. Conseguem aplicá-lo apenas em questões diretas, como quando o enunciado diz: " ache o valor de x usando o Teorema de Pitágoras". Sem essa habilidade, conhecer o referido teorema é inútil. Nesse sentido, a resolução de problemas ajuda o aluno a aprender aplicar a Matemática em diferentes contextos.

6 O uso de novas tecnologias e Educação a Distância

Ao trabalhar com esta perspectiva apresentada com foco na resolução de problemas provavelmente nos depararemos com mais uma dificuldade: o pouco tempo que temos para as aulas de Matemática. Uma questão importante é sobre como trabalhar os conteúdos significativos, temas transversais e ainda ter tempo para desenvolver algo relacionado especificamente com a OBMEP. Apesar de muitas escolas desenvolverem projetos envolvendo Olimpíadas no turno contrário as aulas, nem sempre isso é possível por diversos motivos como falta de espaço físico, falta de transporte ou alimentação para os estudantes ou indisponibilidade de professores. Por isso propomos nesse momento uma reflexão sobre as novas tecnologias e suas influências na Educação a Distância como uma possível saída para que professores e alunos possam ter um espaço, mesmo que virtual, para discussões sobre a Matemática e os diversos problemas interessantes que podemos resolver por utilizá-la. A proposta é fazer uso da *internet* para formação de grupo de estudo, *blogs*, fóruns e até mesmo cursos como complemento das aulas presenciais. Acreditamos que o uso dessas novas tecnologias da informação possa gerar oportunidades para que o professor fomente a curiosidade e prazer dos alunos pelo estudo da Matemática, principalmente por temas que não sejam apresentados no currículo tradicional. Além disso, o aumento do uso da *internet* para fornecer cursos a distância ou semipresenciais em níveis técnico, superior e pós-superior fará com que muitos de nosso alunos recorram a Educação a Distância para conseguir uma formação profissional. Dessa maneira, desenvolver projetos que envolvem esse tipo de ferramenta, mesmo que de modo moderado, poderá fornecer um treinamento inicial principalmente para alunos que cursam o Ensino Médio.

Embora os conceitos e metodologias usadas na Educação a Distância se apliquem principalmente para uma formação mais completa fornecida em cursos, graduações e pós-graduações principalmente para um público adulto, alguns de seus princípios poderão nos ajudar a organizar atividades e grupos de estudo para os jovens estudantes da rede pública. Desde o ano de 2013 tem sido organizado os Clubes de Matemática da OBMEP. Um ambiente virtual fornece o suporte para que, localmente se formem grupos de estudo que trocam informações com outros grupos em todo o Brasil. O professor pode fazer uso dessa ferramenta ou de outras disponíveis. Faremos uma breve análise de alguns conceitos que poderão nos ajudar nessa tarefa.

6.1 Mídias e Tecnologias

Moore [12] destaca a diferença entre os termos "tecnologia" e "mídia". Segundo ele existem quatro tipos de mídias: texto, imagens, sons e dispositivos. Estas são as linguagens em que a mensagem é produzida. Tais mensagens são veiculadas por diversas tecnologias, que podem suportar uma ou mais formas de mídias. A *internet* é uma tecnologia muito especial, já que suporta todos os tipos de mídias, embora muitos usuários sejam limitados pela qualidade de processamento ou velocidade da conexão. Nesta relação entre "mídias" e "tecnologia" o autor destaca o papel principal das mídias, que devem ser feitas com qualidade, pois elas que tratarão da mensagem a ser divulgada. Na falta de uma tecnologia superior as mídias poderão ser transmitidas por meio de uma tecnologia acessível.

A arte de ensinar a distância está na capacidade de perceber as limitações e potenciais das mídias e tecnologias disponíveis e utilizá-las da melhor maneira para cada conteúdo e objetivos propostos. Faremos uma breve revisão sobre a história do uso das tecnologias no ensino a distância e depois falaremos sobre algumas sugestões para usar as tecnologias atuais para incentivar o estudo da Matemática.

6.2 As gerações do Ensino a Distância

Moore [12] aborda a evolução da Educação a Distância com o surgimento de novas tecnologias e desenvolvimento de novos métodos. Ele separa essa evolução em cinco gerações da Educação a distância que abordaremos agora.

A primeira geração dá inicio ao Educação a Distância com o **Estudo por Correspondência**. Com o desenvolvimento de serviços postais melhores e mais baratos era possível desenvolver cursos onde o aluno, de forma individual poderia estudar em casa ou no trabalho. O objetivo da criação desses cursos era alcançar aqueles que não tinham acesso a educação tradicional. Isso incluía as mulheres, que muitas vezes eram excluídas no que se refere a receber educação escolar. Sendo assim, muitos cursos eram produzidos especialmente para o público feminino e elas tiveram um papel importante na criação da Educação a Distância.

No início do século XX surge outra grande tecnologia de informação, o rádio, que também foi usado com otimismo pelas universidades. Apesar do entusiasmo, esse tipo de ensino não cumpriu as expectativas, mostrando-se um recurso medíocre que não conseguia competir com as emissoras comerciais que usavam os cursos para conseguir anúncios. Já a televisão mostrou melhor potencial, já que suportava três tipos de mídias, o som, as imagens e o texto. Surgem os canais educativos, transmitindo os mais variados tipos de conhecimento por meio da mistura dessas mídias. A segunda geração, marcada pelo uso do **rádio e televisão**, tinha como limitação a falta de interação com o professor, que só era possível quando aliada ao ensino por correspondência.

A terceira geração não surgiu pelo aparecimento de uma nova tecnologia, mas pelo desenvolvimento de um modelo sistêmico de ensino. A criação das chamadas **Universidades Abertas**, na Grã-Bretanha proporcionou uma nova forma de enxergar a Educação a Distância, ao usar uma gama de tecnologias disponíveis aliado a formação de equipes de cursos, orientação face a face e um método prático em uma abordagem sistêmica.

A quarta geração era baseada no ensino por **teleconferências** e atraiu o interesse de muitos professores por se aproximar do ensino tradicional em classes. Primeiro desenvolveu-se as audioconferências, com uso de telefone, alto-falantes e microfones, onde era possível reunir uma turma de participantes para ouvir uma aula. Com o surgimento de novas tecnologias, como as transmissões via satélite e o computador, foi possível acontecer videoconferências com, pela primeira vez, interação em tempo real entre alunos e professores.

6.3 Uso de ambientes Virtuais

Em [9] (p.61) encontramos algumas sugestões de métodos de ensino que podem ser aplicados no ensino pela WEB. O primeiro é o uso da *internet* como meio de difusão do conhecimento. Nunca antes o aluno teve ao seu alcance tanta informação disponível e por isso é natural que ele tenha dificuldade em encontrar o que é mais relevante e também confiável. O professor pode disponibilizar artigos, textos, endereços (*links*) de outras *home pages* e vídeos que direcionem e facilite o trabalho de pesquisa. O segundo é o apoio e assistência ao estudante o que pode ser feito por meio de *chats* ou grupos de discussão, onde o professor direciona o debate respondendo as dúvidas e corrigindo as soluções apresentadas. Por terceiro há também a colaboração interna do grupo, propiciando a oportunidade de cooperação entre os alunos à medida que auxiliam uns aos outros com suas participações. O quarto é a participação externa, podendo um professor de outra turma ou escola contribuir com sua participação. Por último existe o método de desenvolvimento gerativo, quando os estudantes produzem conteúdos para serem incluídos no Ambiente Virtual utilizado.

O uso da *internet* deve fazer parte de uma escola moderna, e as ferramentas disponibilizadas por essa tecnológia precisam ser conhecidas pelo professor. Estudar este tema certamente será muito proveitoso para aqueles que desejam deixar os modelos tradicionais e se adaptar ao novo perfil de aluno. Poderá começar usando ferramentas mais simples e conhecidas, e depois de certa prática, incluir outras mais específicas. Envolver os próprios estudantes em um projeto como esse, já que o conhecimento de tecnologia parece fazer parte dessa nova geração, pode ser uma chance de mostrar que a escola é um local em que o professor ensina e aprende.

7 Considerações finais

Durante as últimas décadas as políticas públicas voltadas para educação priorizaram o acesso ao ensino, aumentando a capacidade de receber a grande demanda de alunos. Em um país onde, por séculos, a educação era privilégio das classes dominantes o lema 'Educação Para Todos' trazia uma utopia de justiça social. Investir em Educação se tornou fundamental, sobretudo, para aumentar as vagas, universalizando o ensino. Apesar de diversos outros fatores, é certo que a necessidade de estender o alcance da escola é um grande fator impactante na diminuição de sua qualidade. Com este objetivo em mente iniciou-se a construção de mais escolas com menos infraestrutura, a formação rápida e deficiente de professores e organização de transporte precário para alunos das zonas rurais. Hoje, o Brasil consegue alcançar recordes de acesso tendo porém o grande desafio de produzir uma educação de qualidade.

Sem dúvida a busca da qualidade de ensino passa pela formação e valorização dos professores, principalmente dos que atuam na educação básica. Por isso programas como este, o PROFMAT, que permitem uma formação profissional profunda precisam ser expandidos. Além disso, durante a pesquisa para este trabalho observamos que a OBMEP pode ser considerada mais que uma Olimpíada Científica, mas um programa amplo, que proporciona oportunidade de, para o professor, reflexão de sua prática pedagógica, e para o aluno, desenvolvimento de uma habilidade especialmente deficiente, resolver problemas.

Vimos também a necessidade de se manter um conceito equilibrado sobre a competição para que o foco esteja na aprendizagem e não na vitória. Isso pode fazer com que os prêmios e reconhecimento fornecidos pelo programa se tornem um incentivo sem que a possível falta da conquista de medalhas seja um desestímulo. Além disso, para os que se destacam, o PIC (Programa de Iniciação Científica) proporciona uma formação ampliada aos que possuem especial gosto pela Matemática.

Ensinar usando Resolução de Problemas pode dar significado ao ensino da Matemática, tornar o aluno mais confiante e autônomo, melhorar seu aprendizado e, consequentemente, fazer o trabalho docente mais gratificante. A OBMEP tem proporcionado aos alunos da escola pública a oportunidade de resolver problemas em diversas áreas da Matemática e em vários níveis de dificuldade. Como professores, devemos nos esforçar e potencializar essa experiência para o desenvolvimento de nossos estudantes.

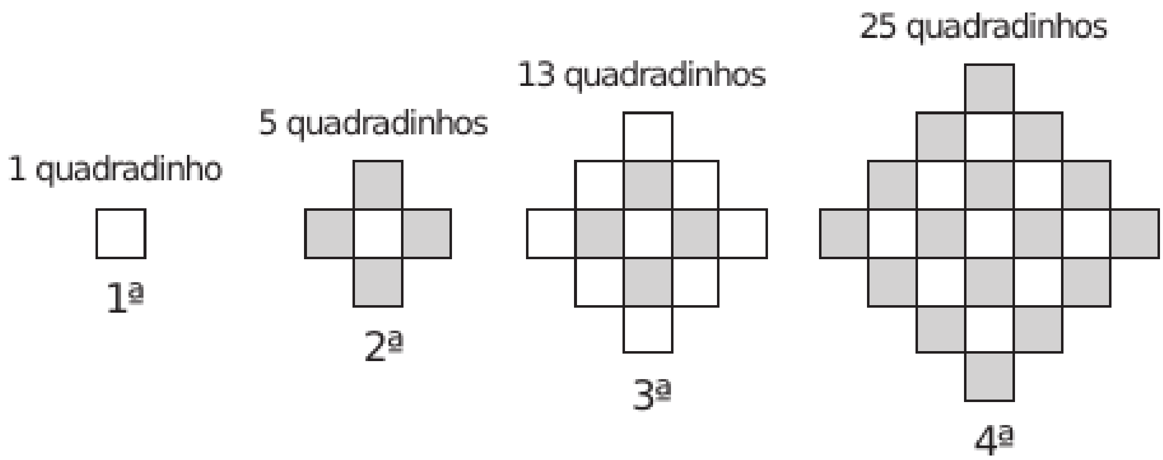
ANEXOS

ANEXO I

Eduardo C. Fideles.
Aluno: Série: Data:
CEF Irmã Regina.
Orientações. Resolva os seguintes problemas, tentando explicar da melhor forma possível seu raciocínio. Se não conseguir resolver todo o problema explique o que você conseguiu descobrir.

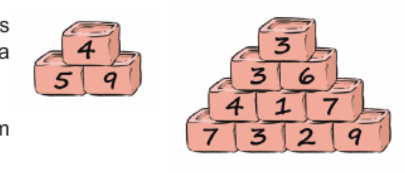
Lista 1

1:(OBMEP 2009 Nível III questão 16 da 1° fase, adaptação)
Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Quantos quadradinhos possui o 30° desenho?



Problema 2:(OBMEP 2013 2° fase nível II questão 2.)

2. Uma *pilha numerada* é formada por tijolos com números de 1 a 9 empilhados em camadas, como nas figuras, de modo que o número em um tijolo é a diferença entre o maior e o menor dos números dos tijolos nos quais ele se apoia.



A ilustração mostra duas pilhas numeradas, uma com duas camadas e outra com quatro camadas.

a) Complete a figura de modo a representar uma pilha numerada de quatro camadas com o número 2 no tijolo do topo.

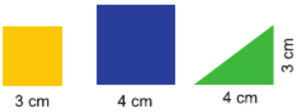
Correção Regional | Correção Nacional

b) Complete a figura de modo a representar uma pilha numerada de cinco camadas com o número 5 no tijolo do topo.

Correção Regional | Correção Nacional

c) Explique por que não é possível construir uma pilha numerada com seis camadas que tenha o número 5 no tijolo do topo.

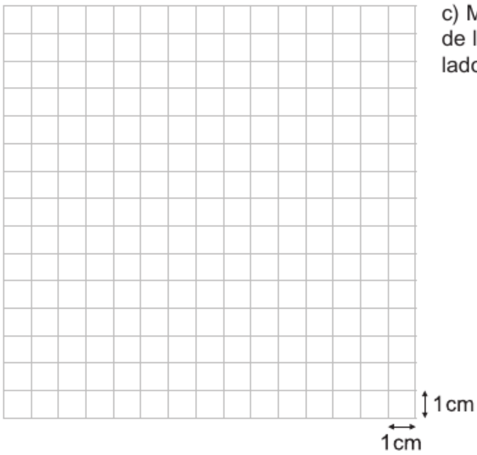
Problema 3:(OBMEP 2013 2° fase nível II questão 3.)



3. Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado à esquerda. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono à direita.

a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

b) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?



c) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.

d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

TOTAL

Bom Trabalho!!!

ANEXO II

Eduardo C. Fideles.

Aluno: Série: Data:

CEF Irmã Regina.

Orientações. Resolva os seguintes problemas, tentando explicar da melhor forma possível seu raciocínio. Se não conseguir resolver todo o problema explique o que você conseguiu descobrir.

Lista 2

1 ***Água na medida certa***

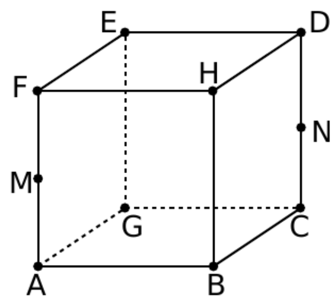
Fábio precisa obter exatamente quatro litros de água. Para isso ele usará apenas os dois únicos baldes de água que tem em sua casa e uma torneira. Sabendo que um dos baldes que Fábio tem em sua casa tem capacidade de três litros, e outro tem capacidade de cinco litros, determine uma maneira com a qual Fábio pode obter a quantidade de água que necessita.

2 ***Laranjas e goiabas***

Numa quitanda, há três caixas. Uma contém apenas laranjas, outra contém apenas goiabas, e a terceira contém laranjas e goiabas. Ives, que trabalha nesta quitanda, escreveu em uma caixa "Laranjas", em outra "Goiabas" e em outra "Laranjas e Goiabas", de maneira que cada nome estivesse na caixa errada. Pedindo a Ives que retire e mostre apenas uma fruta de apenas uma caixa, é possível saber como reescrever todos os nomes nas caixas de maneira correta. Explique como!

6 ***Formiga esperta***

Uma formiga esperta, que passeia sobre a superfície do cubo abaixo, faz sempre o menor caminho possível entre dois pontos. O cubo tem arestas de tamanho 1 cm.



Qual distância a formiga esperta percorrerá se ela for:

a) Do vértice A ao vértice B?

b) Do ponto M ao ponto N?

c) Do vértice A ao vértice D?

Bom Trabalho!!!

Referências

[1] BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento.* Rio de Janeiro: Contraponto, 1996

[2] BELTRÁN,Johel.[et al.].*Banco de questões 2013.* Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[3] BIONDI, R.L.; VASCONCELLOS, L.; MENEZES-FILHO, N. A. *Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais.* São Paulo: Fundação Getúlio Vargas, Escola de Economia de São Paulo.2009

[4] BRASIL.*Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Introdução. Ensino Fundamental.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

[5] CANALLE, J. B. G. et al. *Resultados da III Olimpíada Brasileira de Astronomia.* Física na Escola, v. 3, n. 2, p. 11–16, 2002.

[6] CENTRO DE GESTÃO E ESTUDOS ESTRATÉGICOS.*Avaliação do Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).* Brasília: CGEE, 2011. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o>. Acesso em: 28 2013.

[7] DANTE, Luiz Roberto.*Didática da resolução de problemas de matemática: para estudantes de magistério e professores do* 1° *grau.* São Paulo: Ática, 1989.

[8] FREIRE, João Batista. *Educação de corpo inteiro: teoria e prática da educação física.* São Paulo: Scipione, 1989.(Série Pensamento e Ação no Magistério.)

[9] LUCENA, Carlos Jose Pereira de; FUKS, Hugo. *Professores e aprendizes na web: A educacao na era da internet.* Rio de janeiro: Clube Do Futuro, 2000. 156

[10] LUCKESI, Carlos Cipriano. *Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude.* In: Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2005. p. 48-59.

[11] LUPINACCI,M.L.V; BOTIN, M.L.M.*Resolução de Problemas no Ensino de Matemática* Anais do VIII Encontro Nacional de Educação. Recife, 2004.

[12] MOORE, Michael G.; KEARSLEY, Greg.*Educação a distância: uma visão integrada.* São Paulo: Cengage Learning, 2011.

[13] OBMEP.*Perguntas Frequentes.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/faq.htm>. Acesso em: 28 nov 2013.

[14] OBMEP. *Provas e Soluções.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 28 nov 2013.

[15] ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N.S.G. *Novas relaxões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas* In:2. BICUDO, Maria Aparecida Viggiane; Borba, Marcelo de Carvalho.(Org.) *Eduacação matemática: pesquisa em movimento.* Cortez editora. 2004.p.213-230.

[16] RELATÓRIO da primeira OBMEP*Somando novos talentos para o Brasil.* Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[17] PAIS, Luiz Carlos.*Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[18] PALMIERI, Marilicia Witzler Antunes Ribeiro. *Cooperação, competição e individualismo: Uma análise microgenética de contextos de desenvolvimento na pré-escola.* Tese de Doutorado. Brasília, 2003.

[19] PINTO, Neuza Bertoni.*O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar.* São Paulo: Papirus, 2000.

[20] PÓLYA, George.*A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Rio de janeiro: Interciência, 1986.

[21] TEIXEIRA, L.R.M.*A Análise de erros: uma perspectiva cognitiva para compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos.* Revista Nuances, Presidente Prudente/SP, UNESP, vol.III, set 1997.p.47-53.

[22] TODOS PELA EDUCAÇÃO. *Relatório do Projeto Todos Pela Educação.* Disponível em <http://www.todospelaeducacao.org.br/educacao-no-brasil/dados-das-5-metas/> acessado às 12:35 do dia 2 de novembro de 2013.