

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE UnB GAMA-FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE**  
**MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS DE**  
**ELASTICIDADE LINEAR USANDO O MEC**

**KAIO LINS TEOTÔNIO**

**ORIENTADOR (A): Dr(a). CARLA TATIANA MOTA ANFLOR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS**  
**DA ENGENHARIA**

**PUBLICAÇÃO: FGA.DM – N°013A/2014**

**BRASÍLIA/DF: ABRIL/2014**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DE ENGENHARIA**

**KAIO LINS TEOTÔNIO**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS ELASTICIDADE  
LINEAR USANDO O MEC**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DE ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DE UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**ORIENTADOR(A): Dra. CARLA TATIANA MOTA ANFLOR**

Brasília-DF  
2014

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE GAMA/FACULDADE DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE  
MATERIAIS DE ENGENHARIA**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM PROBLEMAS ELASTICIDADE  
LINEAR USANDO O MEC**

**KAIO LINS TEOTÔNIO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DE ENGENHARIA DA FACULDADE GAMA E FACULDADE DE TECNOLOGIA DE UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Dra. Carla Tatiana Mota Anflor  
(Orientador)**

---

**Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque  
(Examinador Externo)**

---

**Prof. Dr. Artur Antonio de Almeida Portela  
(Examinador Externo)**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**KAIO LINS TEOTÔNIO**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR USANDO O MEC, [Distrito Federal] 2014.**

106 p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2014).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia.

1. ELEMENTOS

2. CONTORNO

3. ELASTICIDADE

4. QUADRÁTICO

I. FGA/FT/UnB

II. Mestre (FGA.DM-013A/2014)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

TEOTÔNIO, K. L. (2014). OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR USANDO O MEC. Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Integridade da Engenharia, Publicação N°013A/2014, Faculdade UnB Gama/FT/Universidade de Brasília, DF, 106 p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: KAIO LINS TEOTÔNIO.

TÍTULO: OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR USANDO O MEC

GRAU: Mestre

ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

**KAIO LINS TEOTÔNIO**

COND. MANSÕES ENTRE LAGOS CL02 LOTE 44 APT0. 101-REGIÃO DOS LAGOS – SOBRADINHO - CEP.: 73255-901 Brasília, DF – Brasil.

E-mail: kaiogtx@gmail.com

## **Agradecimentos**

*Agradeço primeiramente a Deus por me conceder o discernimento e o conhecimento necessários para construir minha história e por me ensiar a seguir Sua vontade, à Santíssima Virgem Maria pela santa intercessão, a meus pais e minha família, por todo o amor com que cuidam de mim e os sacrifícios feitos a fim de eu pudesse desfrutar de uma educação digna, à minha noiva Kelly, por todo amor e carinho e pelos momentos sem a minha atenção enquanto desenvolvia este trabalho, aos meus pais pelo amor incondicional, à família pelo apoio, à minha orientadora Carla Anflor, que sempre esteve dois passos na frente e valorizou minha evolução neste trabalho, à toda a equipe do GMEC – Grupo de Mecânica Computacional e Experimental (campus Gama) – pela camaradagem, estrutura e apoio científico, à Comunidade Católica da Universidade de Brasília que me ajudou em minha caminhada, à equipe Baja SAE Piratas do Cerrado, pela Companhia Nacional de Abastecimento – CONAB, pelo apoio para a conclusão deste mestrado, aos colegas do meu tempo de estágio, aos amigos de formação acadêmica e pessoas próximas pela troca de conhecimentos e amizade.*

*Kaio Lins Teotônio*

---

## RESUMO

O presente texto visa relatar as etapas que possibilitaram a otimização de problemas de elasticidade linear através de algoritmos computacionais baseados no Método dos Elementos de Contorno (MEC). O MEC é um dos métodos numéricos mais populares em problemas de engenharia, e está sendo constantemente desenvolvido nas últimas décadas. É um método que, apesar de possuir uma formulação elaborada, possui propriedades que facilita sua implementação em problemas de otimização. Este trabalho tem por objetivo aplicar o MEC em problemas de otimização estrutural de problemas bidimensionais de elasticidade linear. Este trabalho utiliza elementos quadráticos nos problemas de otimização estudados. Para tanto, foi desenvolvido um código em MATLAB que faz os cálculos e um processo iterativo, fornecendo novas topologias a partir de uma topologia inicial. Algumas otimizações de problemas bidimensionais são propostas e realizadas. Um exemplo simplificado de um componente automotivo é proposto para ser otimizado. As topologias finais apresetaram resultados condizentes com a literatura.

Palavras-chave: elementos, contorno, elasticidade, quadrático

---

## ABSTRACT

This work aims to report the procedures that make the optimization of linear elasticity problems be possible by computational codes based on the Boundary Element Method (BEM). The BEM is one of the hot research topic in numerical methods in engineering problems where more research has been conducted in the last decade. It is a method that, despite its elaborated formulation, has the features that make it more attractive to be applied in optimization problems. This work will use the BEM in the structural optimization of linear elasticity problems as a numerical approach. In this work, the structural optimization was performed with quadratic boundary elements. An iterative MATLAB code was developed to perform the optimization procedures, giving new topologies as output from a determined initial topology. Five benchmark tests commonly used for topological optimization procedure were optimized. Finally, a simplified problem of an automotive suspension arm optimization was also studied. The final topologies obtained are in good agreement with the literature.

Keywords: elements, boundary, elasticity, quadratic



*“Lute com determinação, abrace a vida com paixão, perca com classe e vença com ousadia, porque o mundo pertence a quem se atreve e a vida é muito para ser insignificante.”*

*Charles Chaplin*



# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>viii</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>x</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS</b> .....	<b>xi</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS DESTE TRABALHO.....	3
1.2 ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO .....	4
<b>2 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>5</b>
2.1 OTIMIZAÇÃO.....	5
2.2 TIPOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL .....	8
2.3 ALGUNS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO .....	11
<b>3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b> .....	<b>17</b>
3.1 CONCEITO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) .....	17
3.2 TEOREMA DE GAUSS-GREEN.....	18
3.3 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA .....	20
3.4 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC .....	21
3.5 RELAÇÃO DE CAUCHY.....	22
3.6 LEI DE HOOKE.....	22
3.7 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES E O VETOR DE GALERKIN.....	23
3.8 PROBLEMA DE KELVIN E A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL EM 3D .....	24
3.9 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL.....	26
3.10 TEOREMA DA RECIPROCIDADE .....	27
3.11 IDENTIDADE DE SOMIGLIANA .....	28
3.12 FORMULAÇÃO SINGULAR .....	28
3.13 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA TENSÃO .....	29
3.14 FORMULAÇÃO DE CONTORNO PARA DEFORMAÇÃO PLANA.....	30
3.14.1 – Estado Plano de Deformação .....	30
3.14.2 – Problema de Kelvin – caso de Estado Plano de Deformação .....	31
3.15 TENSÃO PLANA .....	32
3.16 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E ANÁLISE DE TENSÕES .....	34
<b>4 DERIVADA TOPOLÓGICA</b> .....	<b>36</b>
4.1 DERIVADA TOPOLÓGICA PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE .....	36
4.2 DESENVOLVIMENTO DA $D_T$ ANTES DA IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO COMPUTACIONAL .....	38
<b>5 ARQUITETURA DO MEC EM MATLAB</b> .....	<b>41</b>
5.1 APRESENTAÇÃO DO CÓDIGO.....	41
5.2 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA DE ANÁLISE DE TENSÕES .....	45
5.3 SELEÇÃO DO NÚMERO MÍNIMO DE PONTOS DE GAUSS UTILIZADO NO PROGRAMA .....	50
<b>6 RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>53</b>
6.1 PROBLEMA 1 – FLEXÃO ENGASTADA.....	53
6.2 PROBLEMA 2 – FLEXÃO BI-APOIADA 1 .....	57
6.3 PROBLEMA 3 – FLEXÃO BI-APOIADA 2 .....	58
6.4 PROBLEMA 4 – FLEXÃO BI-APOIADA 3 .....	60
6.5 PROBLEMA 5 – FLEXÃO BI-APOIADA 4 .....	63
6.6 ANÁLISE DOS PROBLEMAS 4 E 5 .....	66
6.7 OTIMIZAÇÃO DE BRAÇO DE SUSPENSÃO AUTOMOTIVO.....	69
6.7.1 - Obtenção Da Geometria Do Braço.....	70
6.7.2 - Definição Dos Carregamentos Do Braço (Condições De Contorno).....	71
6.7.3 - Construção Do Problema De Otimização Do Braço De Suspensão .....	81
6.7.4 - Resultados do Problema de Otimização do Braço de Suspensão .....	82
6.8 APRESENTAÇÃO DAS TOPOLOGIAS FINAIS .....	85
<b>7 CONCLUSÕES</b> .....	<b>87</b>
<b>8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>90</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Antigo diagrama de análise estrutural de veículo [1] .....	6
Figura 2 - Gráfico do problema de otimização sem restrição para maximizar $S(x)$ .....	7
Figura 3 - Problema de otimização com restrição para maximizar $S(x)$ .....	8
Figura 4 – Ilustração dos processos de otimização: a)Paramétrica; b)De forma; c)Topológica	9
Figura 5 – Variáveis de otimização paramétrica em exemplo de carcaça de torre de turbina eólica [20] .....	10
Figura 6 – Otimização de forma da seção transversal de uma mola helicoidal [21] .....	10
Figura 7 – Exemplo de resultado obtido pelo método da Homogenização [19], com volumes finais a (a)91%, (b)64%, (c)36% .....	12
Figura 8 - Distribuição de deformações na base da lâmpada com fatores de produção ótimos [26].....	14
Figura 9 – Análise de tensões de trem de engrenagens [22] .....	17
Figura 10 – Problema bidimensional. À esquerda, condições de contorno do problema. À direita, contorno discretizado em 6 elementos quadráticos descontínuos [3] .....	18
Figura 11 – Integração de um domínio $\Omega$ contornado por $\Gamma$ [7] .....	19
Figura 12 – Representação da distribuição retangular de um esforço sobre uma extensão $a$ de um objeto .....	21
Figura 13 – Superfície esférica utilizada no problema de Kelvin .....	24
Figura 14 – Superfície com abaulamento hemisférico .....	29
Figura 15 – Seção transversal do cilindro do Problema de Kelvin bidimensional [3] .....	31
Figura 16 – Caso de tensão plana [3].....	32
Figura 17 – Contorno discretizado em elementos [3].....	34
Figura 18 – Falta de associação entre dois domínios distintos para cálculo da Derivada Topológica .....	36
Figura 19 – Entendimento da Derivada Topológica expandindo-se um furo .....	37
Figura 20– Fluxo lógico do código de otimização .....	42
Figura 21 - Eliminação de "ilha" em duas iterações sucessivas de um problema de otimização: a)Topologia possui uma região quase isolada ao centro do lado esquerdo; b) Após os furos, criou-se uma ilha, que o programa eliminou automaticamente durante a iteração seguinte ....	43
Figura 22 - Diferentes tipos de pontos internos que podem ser gerados no código de otimização: a) Ortogonal; b) Diagonal; c) Próximo aos contornos .....	44
Figura 23 – Viga engastada com carregamento concentrado .....	45
Figura 24 – Problema de flexão [2] .....	46
Figura 25 – Comparação entre deslocamentos ao longo da linha média calculados numericamente e analiticamente .....	47
Figura 26 – a)O tracejado indica o alinhamento dos pontos na viga; b)Gráfico comparando os resultados da tensão $\sigma_x$ ao longo da posição vertical na viga .....	48
Figura 27 – Distribuição de $\sigma_y$ ao longo da posição vertical na viga, de acordo com a Figura 24-a) .....	48
Figura 28 – Distribuição de $\tau_{xy}$ ao longo da altura da viga, de acordo com a Figura 24-a) .....	49
Figura 29 – $D_T$ calculada em pontos verticais ao longo da espessura .....	50
Figura 30 – Avaliação da $D_T$ para diferentes pontos de Gauss .....	51
Figura 31 – Erro percentual da $D_T$ entre 10 pontos de Gauss e a solução analítica.....	51
Figura 32 – Detalhe das dimensões e das condições de contorno para o Problema 1 .....	53
Figura 33 – Histórico de otimização do Problema 1 .....	55
Figura 34 – Histórico de remoção de material para o Problema 1 .....	56
Figura 35 – a)Topologia obtida por trabalho anterior [3], utilizando o MEC e elementos lineares; b)Topologia final do Problema 1, após suavização .....	56
Figura 36 – Detalhe das dimensões e das condições de contorno do Problema 2 .....	57

Figura 37 – Topologias finais: a) ESO/MEF [16] e b)BEM/D <sub>T</sub> .....	58
Figura 38 – Dimensões e condições de contorno para o Problema 3 .....	59
Figura 39 – Geometria ótima – Problema 3 .....	60
Figura 40 – Ilustração do Problema 4 .....	60
Figura 41 – Evolução da topologia para o Problema 4 .....	62
Figura 42 – Topologia final do Problema 4 espelhada .....	63
Figura 43 – Gráfico de volume restante versus número da iteração para o Problema 4 .....	63
Figura 44 – Ilustração do Problema 5 .....	64
Figura 45 – Evolução das topologias do Problema 5 .....	65
Figura 46 – Gráfico de volume restante versus o número de iterações para o Problema 5 .....	66
Figura 47 – Comparação de topologias: (a) Abolbashari e Keshavarzmanesh [16]; (b) Problema 4; (c) Abolbashari e Keshavarzmanesh [16]; (d) Problema 5 ) .....	67
Figura 48 – Gráfico de volume restante versus iteração para o Problema 4 (pontos em asterisco) e para o Problema 5 (pontos em forma de quadrado) .....	67
Figura 49 – Realização de três furos, à esquerda de forma mais espaçada, e à direita de forma mais concentrada. Nota-se que, quanto mais próximos estão os furos, mais área é compartilhada entre os círculos, resultando em menos área total na realização dos furos .....	68
Figura 50 – Topologia final: (a) Problema 4; (b) Problema 5 .....	69
Figura 51 – Honda Civic EK4 Vti .....	69
Figura 52 – Confecção de desenho CAD do braço de suspensão através do programa Solidworks .....	70
Figura 53 – Vista isométrica de CAD 3D do braço de suspensão através do programa Solidworks para retirar dimensões para uso em MATLAB .....	71
Figura 54 – Discretização do braço de suspensão em MATLAB .....	71
Figura 55- Ilustração de um dos lados da suspensão traseira do Honda Civic de sexta geração – vista superior [1]. O braço inferior traseiro é a peça de número 7 .....	74
Figura 56 - Foto da suspensão traseira do Honda Civic do sexta geração, onde é possível visualizar o braço inferior traseiro ao centro .....	74
Figura 57 - Diagrama de corpo livre do facão traseiro do Honda Civic de sexta geração, visto a partir da traseira do veículo .....	75
Figura 58 - Diagrama de corpo livre do braço inferior da suspensão do Civic .....	76
Figura 59 - Diagrama das forças na suspensão traseira - rugosidade da pista. ....	78
Figura 60 - Diagrama de forças na suspensão traseira - curva para a esquerda .....	79
Figura 61 - Diagrama de forças na suspensão traseira - curva para a direita .....	80
Figura 62- Restrições de deslocamento e forças de superfície no problema do braço de suspensão .....	81
Figura 63 - Gráfico da redução de volume - braço de suspensão .....	82
Figura 64 - Evolução das topologias do problema do braço de suspensão .....	83
Figura 65 – Imagens das variações dos braços de suspensão do Civic 1996-2000: a)Modelo original em chapa de aço [30]; b)Modelo com alívio em círculos [31]; c)Modelo com bordas espessas [32]; d)Modelo com alívio em treliça [33] .....	84
Figura 66- Derivada Topológica da primeira iteração da otimização do braço inferior traseiro do Civic; as coordenadas horizontais correspondem às dimensões bidimensionais do braço; a dimensão vertical corresponde ao valor da Derivada Topológica .....	85
Figura 67- Detalhe das topologias finais conforme condições de contorno .....	86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Perfil esperado para o resultado com diferentes tipos de elementos, utilizando o mesmo número de graus de liberdade, para um exemplo de problema de elasticidade plana bidimensional usando o MEC .....	2
Tabela 2 - Principais dados do Problema 1 .....	54
Tabela 3 - Porcentagens de remoção de furos utilizadas no Problema 1 .....	54
Tabela 4 - Principais dados do Problema 2 .....	57
Tabela 5 - Principais dados do Problema 3 .....	59
Tabela 6 – Porcentagens utilizadas para realização de furos em cada iteração para o Problema 4.....	61
Tabela 7 – Porcentagens de furos realizados por iteração no Problema 5 .....	64
Tabela 8 - Características do carro que inspira a otimização de componente automotivo.....	70
Tabela 9- Resultados dos carregamentos na suspensão traseira - rugosidade da pista.....	77
Tabela 10 - Resultados dos carregamentos na suspensão traseira - curva para a esquerda.....	78
Tabela 11 - Resultados dos carregamentos na suspensão traseira - curva para a direita.....	80
Tabela 12- Principais constantes da otimização do braço de suspensão .....	82

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>BEM</i>	<i>Boundary Element Method</i>
$D_T$	Derivada Topológica
<i>EPD</i>	<i>Estado Plano de Deformações</i>
<i>ESO</i>	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
EPT	Estado Plano de Tensões
<i>FEM</i>	<i>Finite Element Method</i>
<i>FMM</i>	<i>Fast Multipole Method</i>
MEC	Método dos Elementos de Contorno

# 1 INTRODUÇÃO

*Este capítulo introduz o campo de estudo deste trabalho.*

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um dos métodos numéricos utilizados para encontrar soluções aproximadas de mecânica do contínuo, viabilizando o estudo de diversos casos práticos. Os campos de estudo dos problemas podem variar entre Transferência de Calor, Mecânica dos Sólidos, Mecânica dos Fluidos, Acústica, Eletromagnetismo etc.

Em uma pesquisa, com base no número de publicações, o método numérico mais utilizado é o Método dos Elementos Finitos [5]. O Método das Diferenças Finitas ocupa o segundo lugar, enquanto que o Método dos Elementos de Contorno aparece em terceiro lugar na mesma pesquisa.

O MEC apresenta diversas vantagens em relação a outros métodos numéricos de mecânica do contínuo, dentre elas a discretização somente do contorno e de bom uso quando a resposta do problema possui altos gradientes (Mecânica da Fratura, por exemplo). Em problemas de contorno infinito seu uso também é interessante, como a propagação de ondas em meio infinito proposta por Du e Zhao [17]. A sua utilização normalmente exige a resolução de um sistema linear que apresenta matrizes cheias, o que demanda relativo esforço computacional, mas diminui uma dimensão do problema, em relação ao MEF.

A utilização de MEC para cálculo de tensões e deformações em problemas de elasticidade plana exige um bom trabalho de programação. É necessário recorrer a elementos de maior ordem do que em problemas potenciais. O uso de elementos constantes neste caso é pouco comum, pois normalmente é necessário um número elevado de elementos para se produzir resultados com erros aceitáveis [2]. O uso de elementos lineares já aparece em várias aplicações inclusive em problemas de otimização topológica [6], [10].

A utilização de elementos quadráticos torna os resultados mais precisos que com elementos constantes ou lineares [2]. A Tabela 1 mostra um comparativo do perfil de solução esperado para um suposto problema de elasticidade linear plana de

MEC para diferentes tipos de elementos com o mesmo número total de graus de liberdade.

<b>Tipo de elemento</b>	<b>Constante</b>	<b>Linear</b>	<b>Quadrático</b>
<b>Número de elementos</b>	12	6	4
<b>Nós físicos por elemento</b>	1	2	3
<b>Graus de liberdade por nó (problema bidimensional)</b>	2	2	2
<b>Número total de graus de liberdade</b>	24	24	24
<b>Tamanho da matriz do sistema linear</b>	24x24	24x24	24x24
<b>Perfil da solução de deslocamento/tensão</b>	Retas horizontais descontínuas	Retas inclinadas interligadas por descontinuidade de inclinação (ângulo) a cada dois nós	Parábolas interligadas por descontinuidade de inclinação (ângulo) a cada três nós

*Tabela 1 – Perfil esperado para o resultado com diferentes tipos de elementos, utilizando o mesmo número de graus de liberdade, para um exemplo de problema de elasticidade plana bidimensional usando o MEC*

Em problemas bidimensionais mais simples de elasticidade linear, os deslocamentos e tensões assumem perfis lineares, parabólicos ou em maior ordem [4]. A representação de forças de superfície e deslocamentos por retas, como no caso dos elementos constantes ou lineares, limita a precisão das respostas. Neste sentido, o uso de elementos quadráticos é claramente vantajoso sobre os outros tipos de elementos citados, aumentando a precisão dos resultados ou diminuindo o número de elementos requeridos para uma determinada precisão. A utilização de elementos quadráticos em otimizações de problemas de elasticidade é percebido como um dos acréscimos a que este trabalho se propõe.

O uso de elementos de maior grau de complexidade em problemas de otimização torna-se extremamente atrativo do ponto de vista de precisão numérica, no entanto resulta em um aumento no tempo computacional. Neste sentido, faz-se necessário o controle dos vários parâmetros utilizados no processo de otimização de

topologia como, por exemplo, números de pontos de Gauss, tamanho e quantidade de furos realizados, geometria dos furos uma vez que são polígonos com número finito de lados (e não círculos perfeitos, o que poderia deixar lento o programa e deixar os nós próximos demais), cuidados com a colocação de pontos internos para evitar singularidades e a própria discretização do problema, que deve vir de uma correta interpretação dos dados. Para a obtenção de resultados interessantes deve-se obter boa precisão e controle do tempo computacional.

O tempo de execução de rotinas de otimização pode variar consideravelmente, e neste sentido, deve-se desenvolver rotinas numéricas que sejam robustas, simples e versáteis.

### **1.1 OBJETIVOS DESTE TRABALHO**

Este trabalho tem por objetivos:

1) O desenvolvimento de um código de otimização dedicado aos problemas de elasticidade. Os atributos que o código terá são:

- Ser capaz de trabalhar com praticamente qualquer problema bidimensional
- Ser o mais genérico possível, facilmente modificável e os parâmetros modificáveis devem ser os mais explícitos possíveis
- Será considerado o regime de tensões e deformações apenas na região linear da curva tensão-deformação do material
- O problema deve ser escrito em forma de arquivo de texto, que será lido pelo código. Como saídas, o código deve fornecer as tensões e deformações, além da topologia ao fim de cada iteração em arquivo de texto e a área de cada topologia obtida. As iterações de cada otimização devem estar todas salvas no computador, para possível acesso futuro
- A definição dos locais de remoção de material dentro do domínio será realizado via análise de sensibilidade empregando o conceito de Derivada Topológica deduzido para problemas de elasticidade
- O método numérico utilizado para a obtenção das tensões e deformações é o MEC, cujos resultados devem ser testados



- O MEC fará uso de elementos quadráticos, para resultados mais precisos em relação a elementos constantes ou lineares. Cada elemento quadrático é do tipo descontínuo, novamente mais preciso em relação ao elemento contínuo.
- O programa deve ser capaz de plotar as topologias obtidas pelo processo de otimização

2) Uma vez que o código de otimização desenvolvido esteja funcionando corretamente, ele deve ser utilizado para resolver problemas de otimização. À medida que os problemas de otimização sejam resolvidos, isto é, topologias bem definidas sejam obtidas, a complexidade dos novos problemas de otimização devem ser propostos de modo a aumentar gradativamente a complexidade dos mesmos.

## **1.2 ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO**

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, dos quais o primeiro é a presente introdução. O segundo capítulo realiza uma revisão bibliográfica sobre os principais métodos de otimização. Ainda neste capítulo, são abordados assuntos nos domínios de Mecânica dos Materiais, Matemática e Método dos Elementos de Contorno

-O terceiro capítulo descreve o código computacional desenvolvido para realizar as otimizações. Esse capítulo apresenta um procedimento para validar o presente código numérico através de um problema simples de flexão em viga, cuja solução analítica é conhecida.

-O quarto capítulo apresenta os problemas de otimização e suas respectivas análises realizadas durante este trabalho. São descritos geometria, condições de contorno, método de remoção de material e topologia final de cada problema.

-O quinto e último capítulo realiza o fechamento conclusivo acerca do trabalho desenvolvido.

## 2 INTRODUÇÃO

*Este capítulo trata dos conhecimentos básicos necessários para a realização do trabalho proposto*

### 2.1 OTIMIZAÇÃO

Otimização é *dar a (algo, uma máquina, uma empresa) um rendimento ótimo, criando-lhe as condições mais favoráveis ou tirando (dele ou dela) o melhor partido possível; tornar (algo) ótimo ou ideal*. Os projetos de engenharia em geral procuram responder a um problema proposto com uma solução que seja compatível com requisitos previamente determinados. Isso implica dizer que, dentre as infinitudes de soluções imagináveis, há as que melhor se adéquam aos objetivos.

Existem diversas formas de se chegar a um modelo considerado “ótimo” a um determinado problema. As soluções empíricas têm sido utilizadas pelo homem durante a sua existência, e se baseiam na experiência. Se uma solução é adequada ao problema, ela continuará a ser utilizada posteriormente. Se ela não soluciona satisfatoriamente o problema, ela deixará de ser utilizada. O empirismo não procura entender os mecanismos que torna uma solução melhor do que outra, e sim verificar o aspecto de causa-efeito.

Um bom exemplo da atuação do empirismo na indústria moderna é a opção por construir automóveis sem fechar o habitáculo do veículo de forma rígida. Projetava-se a estrutura do veículo contra cisalhamentos verticais e o momento de flexão aplicado por cada eixo, negligenciando-se o fenômeno de torção do chassi. A Figura 1 mostra um diagrama da carroceria de um automóvel de um livro da década de 20, onde é possível observar a ausência de consideração da torção.

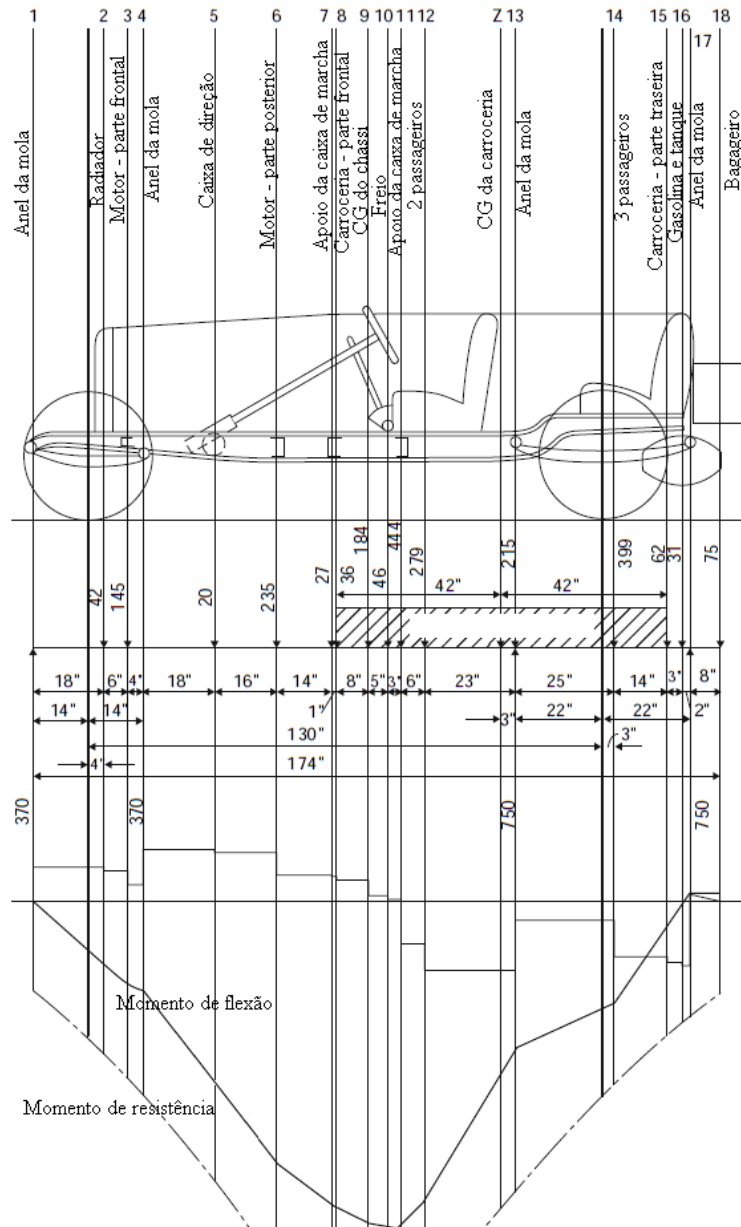


Figura 1 - Antigo diagrama de análise estrutural de veículo [1]

Uma baixa rigidez à torção prejudica a dirigibilidade, além de causar vibrações indesejadas no veículo, como seria conhecido posteriormente. A carroceria de habitáculo aberto era comum nessa época, uma forma que é intrinsecamente de baixa rigidez. Ao fechar o habitáculo de forma que provoque o aumento de rigidez, trincas na carroceria eram comuns, pois a carroceria recebia carga de torção transferida pelo chassi. A partir destas informações, buscava-se intuitivamente obter baixa rigidez à torção [1].

Em contrapartida, o método científico é um conjunto de atividades racionais e sistemáticas que, com rapidez e eficiência, nos permite alcançar o objetivo, traçando

o caminho a ser seguido detectando erros e auxiliando nas decisões do cientista [18]. Dessa forma, pode-se regular as causas até obter os efeitos desejados. Normalmente é este o caminho traçado em um processo de otimização.

Os problemas de otimização são tratados de duas maneiras, sem restrição e com restrição [9]. Na otimização sem restrição, o problema é resolvido da seguinte maneira, de acordo com a Equação ( 1 ):

$$\text{minimizar } S(x) \text{ ou maximizar } S(x), x \in \mathbb{R}^n \quad ( 1 )$$

A otimização sem restrição pode ser exemplificada graficamente pela Figura 2.

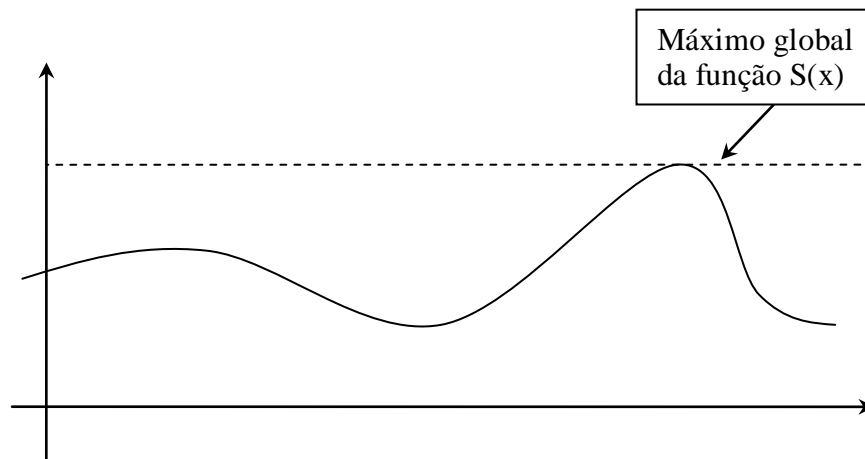


Figura 2 - Gráfico do problema de otimização sem restrição para maximizar  $S(x)$

A função  $S(x)$  é chamada de função-objetivo. Nos problemas de otimização com restrição, o problema é apresentado de acordo com a Equação (2).

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } S(x), \text{ sujeito a} \\ &g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, n_g \\ &h_k(x) = 0, j = 1, \dots, n_h \end{aligned} \quad ( 2 )$$

Na Equação (2),  $x$  é um vetor que contém as variáveis de projeto e  $g$  e  $h$  são as matrizes que armazenam as restrições de igualdade e desigualdade [9]. Um problema de otimização com restrição pode ser exemplificado pela Figura 3.

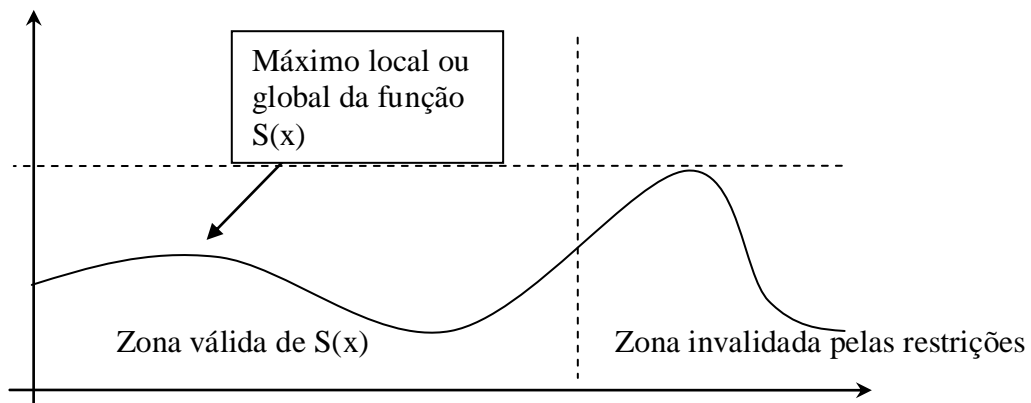


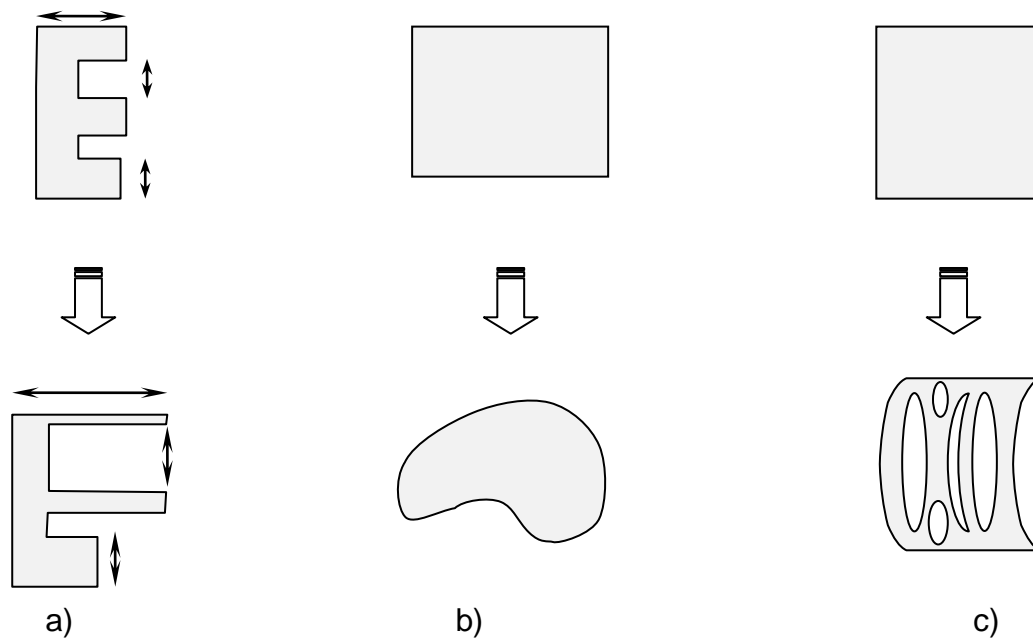
Figura 3 - Problema de otimização com restrição para maximizar  $S(x)$

Vários dos problemas contemporâneos de otimização são do tipo com restrição, por que a função  $S(x)$  pode não ser válida em um intervalo ou ainda apresentar valores que não possuem representatividade prática, por exemplo massas negativas, ou formas inviáveis para fabricação. Os problemas de otimização ainda podem ser separados em problemas que utilizam derivadas e problemas que não utilizam derivadas.

Antigamente, os projetistas realizavam uma análise de otimização através da construção e interpretação de gráficos produzidos manualmente, sem qualquer recurso computacional. Atualmente, os processos de otimização utilizam algoritmos específicos para o método empregado. Tais algoritmos contêm etapas que geram soluções intermediárias respeitando as restrições até que o critério de parada seja atingido. A finalização de um processo de otimização é dada pelo critério de parada que ocorre quando se atinge o mínimo da função-objetivo ou um número máximo de iterações.

## 2.2 TIPOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Um problema de otimização estrutural pode ser classificado em três tipos, que resultam em soluções finais distintas: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica [9], conforme ilustrado pela Figura 4.



*Figura 4 – Ilustração dos processos de otimização: a) Paramétrica; b) De forma; c) Topológica*

A otimização paramétrica ocorre quando as variáveis de projeto descrevem características geométricas da estrutura [9], como por exemplo, diâmetro, área de seção transversal, espessura, momento de inércia. Neste caso, a otimização pretende determinar quais valores dessas variáveis corresponderão a uma configuração de estrutura que corresponda a soluções ótimas. O trabalho de Perelmuter e Yurchenko [20], por exemplo, realiza uma otimização paramétrica da carcaça de torres de aço de turbinas eólicas. No referido trabalho, as variáveis de projeto são os diâmetros e espessuras ao longo do cone da carcaça e o diâmetro da hélice da turbina, como visto na Figura 5.

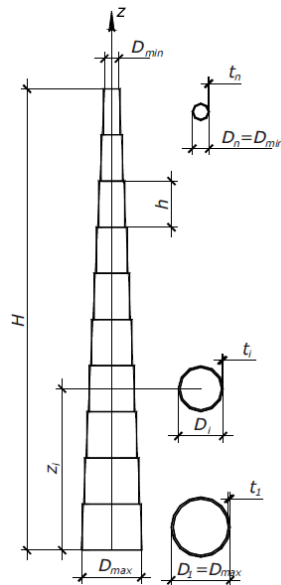


Figura 5 – Variáveis de otimização paramétrica em exemplo de carcaça de torre de turbina eólica [20]

A otimização de forma procura estabelecer soluções ótimas alterando-se apenas o contorno do problema. Em um problema de otimização de forma, o contorno variável é discretizado em nós e segmentos de reta unindo esses pontos [11]. Esses pontos podem se deslocar a fim de que se gerem novas soluções. Logo, pode-se selecionar a posição de pontos que forneça a solução ótima (menor massa ou melhor condução de calor, por exemplo). Uma vez que o MEC já utiliza o contorno para os cálculos, este método de otimização ganha praticidade, uma vez que é há a possibilidade de se utilizar os mesmos pontos que descrevem a solução para realizar os cálculos sem adição de novos pontos ou elementos. Um exemplo de otimização de forma pode ser visto na Figura 6:

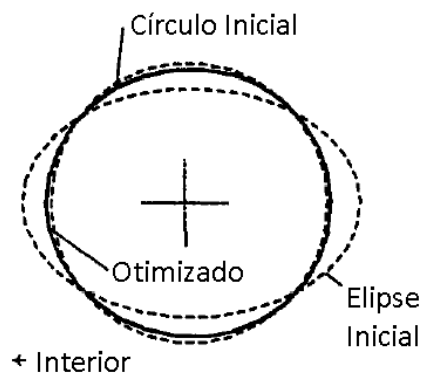


Figura 6 – Otimização de forma da seção transversal de uma mola helicoidal [21]

No trabalho de Kamiya e Kita [21], o MEC é desenvolvido para equações diferenciais quasi-harmônicas para integrais de primeiro e segundo tipo para otimizar a forma da seção transversal de uma mola de compressão. Um dos maiores objetivos em desenhar um seção transversal não-circular era a redução da tensão máxima de cisalhamento no lado interior da mola. A otimização era iniciada geralmente por perfis considerados simples, como, por exemplo, o perfil circular. A otimização objetivava reduzir a tensão máxima, assim como proporcionar uma distribuição uniforme de tensões na superfície. Os resultados mostraram que as formas ótimas eram formas ovais e, se o critério de redução da tensão máxima fosse rigorosamente obedecido, a forma ótima tenderia para uma forma quase circular.

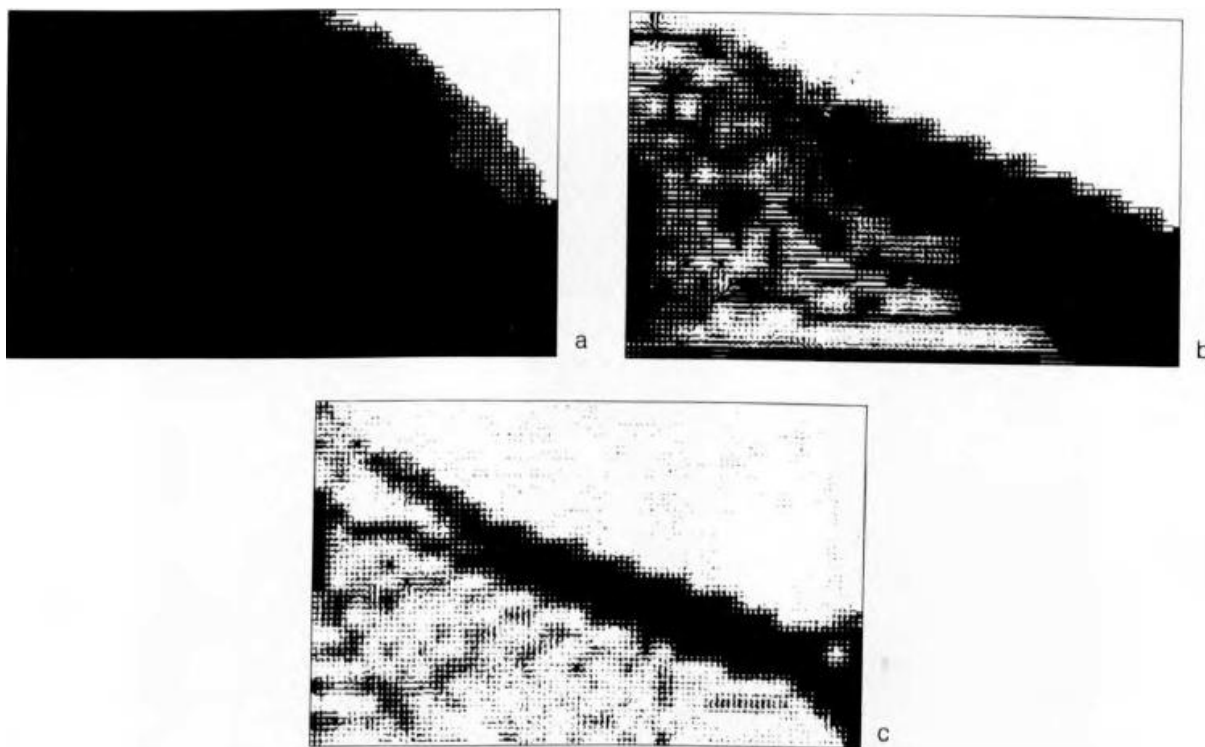
Otimização topológica se refere a problemas de projeto onde algum parâmetro é otimizado em função de sua topologia. As variáveis de projeto são intrínsecas na natureza do próprio objeto. No caso de estruturas discretas, como treliças, a topologia corresponde ao número de barras e juntas e a ordem na qual as barras são conectadas. No caso de estruturas contínuas, as variáveis topológicas podem ser representadas por furos, como no trabalho de Tai e Fenner [12].

## **2.3 ALGUNS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO**

### **2.3.1 – Método da Homogeneização**

Uma das formas pioneiras de otimização topológica é o Método de Homogeneização, o qual é empregado com o MEF. Este método é parametrizado dividindo-se a estrutura em pequenos pedaços e variando-se a densidade em cada pedaço durante o processo de otimização. Novas soluções são geradas variando-se as densidades dos pedaços [12] de modo a se obter a estrutura com a melhor configuração de densidades. Estas densidades podem ser posteriormente traduzidas em material (preto) ou vazio (branco), como mostra a Figura 7.





*Figura 7 – Exemplo de resultado obtido pelo método da Homogeneização [19], com volumes finais a (a)91%, (b)64%, (c)36%*

Em contrapartida, o método da Homogeneização pode gerar objetos finais incompatíveis com os processos atuais de fabricação. O principal problema do método é a “instabilidade de tabuleiro”, que é a criação de zonas de material e zonas vazias distribuídas uniformemente como um tabuleiro de xadrez, e a definição de presença/ausência de material nesta zona fica indefinida. Outro problema deste método é que as soluções finais são muito sensíveis aos intervalos de densidade com os quais se trabalha.

Trabalhos anteriores realizaram otimização com MEC utilizando a Formulação de Análise e Projeto Simultâneos (SAND) [13], que considera as variáveis de estado como incógnitas do problema de otimização e inclui as equações de equilíbrio como restrições de igualdade, não sendo necessário resolver a equação de equilíbrio por iteração. O equilíbrio é então obtido no fim do processo de otimização. O mesmo trabalho utiliza uma formulação do SAND para problemas de otimização de larga escala que simplificou o cálculo de primeira e segunda derivadas. Isso foi possível através de técnicas de separação parcial de funções da formulação SAND.

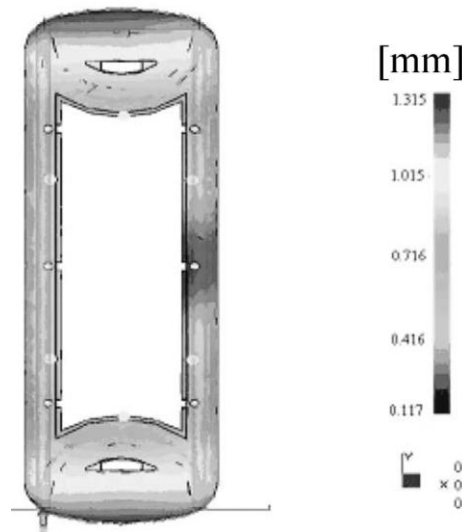
### 2.3.2 – Algoritmo Genético (AG)

Algoritmo Genético é uma ferramenta de otimização baseada em buscas populacionais. O AG é uma técnica inspirada em processos naturais de evolução biológica. O modelo se inicia com um conjunto de possíveis soluções que pode ser gerado aleatoriamente. A este conjunto é dado o nome de população. Cada indivíduo ou solução dessa população possui características próprias que normalmente são armazenadas em números para facilitar a combinação entre características dos indivíduos existentes.

A próxima geração de indivíduos é obtida a partir das informações da geração anterior, combinando os mecanismos de *crossover* – troca de características entre os indivíduos-, mutação – modificação normalmente aleatória de alguma característica de um indivíduo – e seleção – avaliação da satisfação ou não de um critério exigido nos indivíduos. Esses mecanismos podem ser editados para serem convenientes com o tipo de problema estudado. O processo é finalizado quando o critério procurado foi atendido pela população, ou quando a população alcança um determinado número de indivíduos [25].

É importante observar que se trata de um método aleatório. Não é assegurado que o mesmo algoritmo com as mesmas variáveis produza sempre a mesma resposta, nem se uma resposta satisfatória é encontrada no fim da otimização.

Através do Algoritmo Genético, realizou-se, por exemplo, a otimização da deformação sofrida por finas lâmpadas de plástico durante a fabricação, considerando como parâmetros a temperatura de molde, temperatura de fusão, pressão de empacotamento, tempo de empacotamento e tempo de resfriamento. Conseguiu-se uma redução da deformação de aproximadamente 46% [26], ilustrada pela Figura 8.



*Figura 8 - Distribuição de deformações na base da lâmpada com fatores de produção ótimos [26]*

### **2.3.3 – Redes Neurais**

As Redes Neurais, assim como o AG, também possuem inspiração na natureza, mais precisamente no funcionamento dos neurônios. As Redes Neurais são compostas por unidades básicas com entradas, saídas e processamentos de dados, que podem ser chamados de neurônios, por analogia. A interligação entre essas unidades básicas faz com que seja possível dividir o processamento entre elas, e a rede pode ser capaz de processar e responder de maneira cada vez mais complexa.

Num processo de redes neurais, não há exatamente uma rotina exata para solucionar um problema, mas um conjunto de unidades interligadas, capazes de dividir o processamento entre si e aprender o que deve ser feito. Podem ser atribuídos estímulos ou penalidades para os neurônios para que eles aprendam a realizar a tarefa corretamente.

Redes Neurais já foram desenvolvidas para otimizar o uso de energia do sistema híbrido de potência de um veículo elétrico [27]. A rede neural desse trabalho utilizou como entradas a potência total de entrada, intervalo de tempo para se alcançar a carga máxima e o estado atual de carga da bateria de NiH. Como saída da rede neural, era obtida a potência de saída do sistema. Foram utilizados também

algoritmos genéticos para acelerar a etapa de obtenção dos pesos de conexão da rede neural.

#### 2.3.4 – Algoritmo De Colônia De Abelhas

O Algoritmo de Colônia de Abelhas (*Artificial Bee Colony – ABC*) foi desenvolvido observando-se o comportamento das abelhas ao buscarem alimento para a respectiva colônia. As abelhas e as formigas possuem os mecanismos de tomada de decisão coletiva mais bem descritos.

As abelhas se dividem em três grupos para conseguir alimento:

**-Abelhas trabalhadoras:** fazem viagens para coleta de néctar próxima à colmeia, e quando retornam, fornecem informações sobre localização e quantidade de néctar disponível;

**-Abelhas exploradoras:** fazem buscas aleatórias de néctar ao redor da colmeia. Quando a fonte de néctar se esgota, a abelha trabalhadora se torna uma abelha exploradora e procura novas fontes.

**-Abelhas oportunistas:** observam a dança das abelhas trabalhadoras na área de dança da colmeia. A dança informa a localização e a quantidade de néctar disponível, permitindo que um número adequado de abelhas sejam alocadas para buscarem néctar nos lugares onde há maior probabilidade de encontrar néctar.

O Algoritmo de Colônia de Abelhas pode ser utilizado para buscar soluções de problemas de otimização. Há exemplos de aplicação deste algoritmo na solução de problemas de otimização discretos de estruturas treliçadas [28], reduzindo-se o peso dessas estruturas.

#### 2.3.5 – Algoritmo Simplex

O algoritmo Simplex busca basicamente um valor máximo para uma determinada função que depende das características do problema. É geralmente utilizado em problemas que apresentam características lineares, em que a função-objetivo se apresenta como uma soma ponderada dos parâmetros  $(x_1, x_2, x_3)$  do

problema:  $S = ax_1 + bx_2 + cx_3$ . As restrições do problema são geralmente representadas por inequações.

O algoritmo Simplex já foi utilizado, por exemplo, para encontrar pontos de sela e caminhos de mínima energia de superfícies de várias dimensões [35].

### **2.3.6 – Derivada Topológica**

A Derivada Topológica foi utilizada como técnica de otimização neste trabalho. A Derivada Topológica é uma função escalar válida em todo o domínio do problema que indica a sensibilidade de uma função-custo quando a topologia de um domínio analisado é alterada inserindo-se um pequeno furo. A Derivada Topológica pode então ser avaliada no centro desse pequeno furo [6]. A seção 2.17 fornece maiores detalhes sobre o desenvolvimento da Derivada Topológica para este trabalho.

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

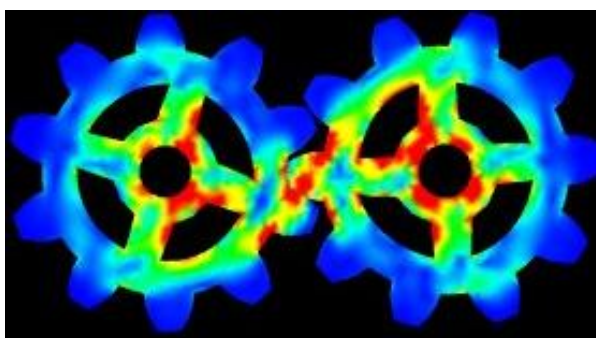
*Este capítulo trata dos principais equacionamentos do MEC para problemas de elasticidade*

#### 3.1 CONCEITO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

O Método dos Elementos de Contorno é um método numérico para analisar o comportamento de sistemas mecânicos e especialmente de estruturas de engenharia sujeitas a carregamentos externos. O termo “carregamento” se refere a uma fonte externa que produz uma função de campo não-nula que descreve a resposta do sistema (campo de temperaturas, campo de deslocamentos, campo de tensões etc.) e pode ser calor, tensão superficial, forças de corpo entre outros [7].

O método geralmente empregado para a análise de estruturas nas últimas três décadas é o Método dos Elementos Finitos - MEF. Uma pesquisa realizada em uma base de dados [5] através de palavras-chave indicou que o MEF possuía mais de 66237 entradas. O Método das Diferenças Finitas estava em segundo lugar na pesquisa, com mais de 19531 entradas. O MEC aparecia em terceiro lugar entre os métodos numéricos, com 10126 entradas.

O MEF é baseado na solução de sistemas de equações diferenciais através da discretização de uma matéria contínua em partes básicas, conforme ilustrado na Figura 9, permitindo que as equações que governam o problema possam ser aplicadas a cada uma delas.



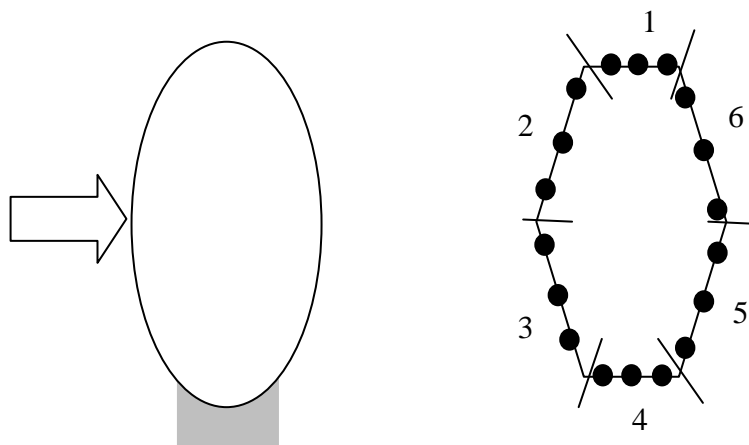
*Figura 9 – Análise de tensões de trem de engrenagens [22]*

Entretanto, o MEF exige que o sistema seja discretizado em elementos em todo o seu domínio. Um grande número de elementos implica em grandes tempos de cálculo para se encontrar a solução, mesmo com a implementação de algoritmos computacionais.

O MEF possui integrais de área para o cálculo de problemas 2D e integrais de volume para o cálculo de problemas 3D, além de possuir uma grande sensibilidade ao refino de malha para que as respostas obtidas sejam compatíveis com o problema.

Uma vez que a discretização no MEC ocorre apenas no contorno, conforme indicado na Figura 10, um menor número de elementos é necessário, o que pode resultar em menores tempos de cálculo. Essa vantagem do MEC em relação ao MEF é especialmente verificada em problemas infinitos, nos quais seria necessário discretizar não somente o contorno, como no MEC, mas toda a área ou volume envolvidos.

Em contrapartida, o MEF produz matrizes simétricas e esparsas, de solução mais simples, enquanto que o MEC utiliza matrizes cheias, mais difíceis de serem solucionadas. Mesmo assim, o MEC encontra solução mais fácil em vários tipos de problemas.



*Figura 10 – Problema bidimensional. À esquerda, condições de contorno do problema. À direita, contorno discretizado em 6 elementos quadráticos descontínuos [3]*

### **3.2 TEOREMA DE GAUSS-GREEN**

O teorema de Gauss-Green relaciona a integral da derivada de uma função sobre um determinado domínio  $\Omega$  à integral dessa mesma função sobre o seu contorno  $\Gamma$  [7]. Considerando um caso bidimensional, uma integral sobre o domínio pode ser escrita em termos de uma dupla integração em relação a  $x$  e a  $y$ , como na Equação (3):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \partial\Omega = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \{f(x_2, y) - f(x_1, y)\} dy \quad (3)$$

Se considerarmos um contorno descrito por uma variável  $s$  e um vetor normal  $\mathbf{n}$  composto pelas componentes  $n_x$  e  $n_y$ , temos, com o auxílio da Figura 11:

$$\frac{dy}{ds} = \cos \alpha = n_x$$

$$dy = n_x ds$$

$$-\frac{dx}{ds} = \sin \alpha = n_y$$

$$dx = -n_y ds$$

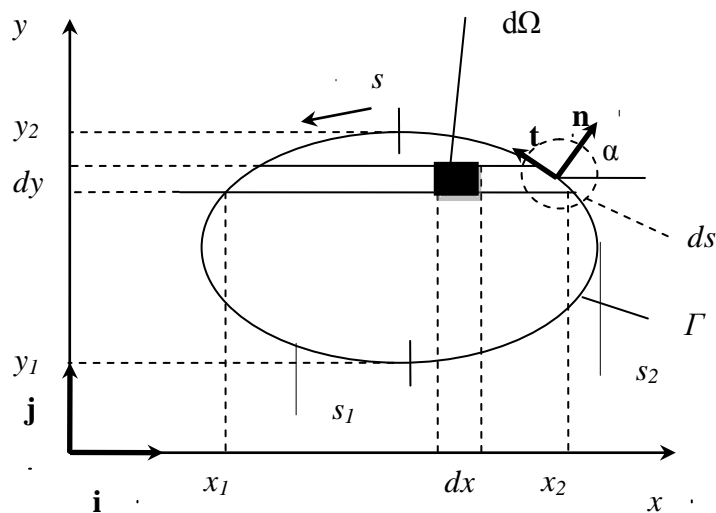


Figura 11 – Integração de um domínio  $\Omega$  contornado por  $\Gamma$  [7]

Utilizando-se os valores de  $dy$  e  $dx$  na Equação (3), tem-se que:

$$\int_{y_1}^{y_2} \{f(x_2, y) - f(x_1, y)\} dy = \int_{s_2} f(x_2, y) n_x ds - \int_{s_1} f(x_1, y) n_x ds \quad (4)$$

Aparece uma integral negativa da Equação (4), pois ela seria realizada no sentido horário sobre  $s_1$ , quando  $y$  varia de  $y_1$  até  $y_2$ . Rearranjando os termos da Equação (2), pode-se concluir que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \partial\Omega = \int_s f n_x ds \quad (5)$$

Pode-se chegar, analogamente à Equação (5), à Equação (6):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} \partial\Omega = \int_s f n_y ds \quad (6)$$



Aqui, uma integral de área foi reduzida a uma integral de contorno. Se houver uma função  $g=g(x,y)$ , então, da equação (5)

$$\int_s (fg) n_x ds = f \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} \partial\Omega + g \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \partial\Omega$$

$$g \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \partial\Omega = -f \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} \partial\Omega + \int_s (fg) n_x ds \quad (7)$$

$$g \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} \partial\Omega = -f \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial y} \partial\Omega + \int_s (fg) n_y ds \quad (8)$$

As equações (7) e (8) são conhecidas como Teorema de Gauss-Green.

### 3.3 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Tem-se um campo vetorial descrito por  $\mathbf{t} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ , onde  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  são vetores unitários,  $a=a(x,y)$  e  $b=b(x,y)$ . Aplicando-se a equação (5) para  $f=a$  e a Equação (6) para  $f=b$ , resulta na Equação (9):

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) \partial\Omega = \int_{\Gamma} (an_x + bn_y) ds \quad (9)$$

Usando-se notação indicial para as direções  $x$  e  $y$  como sendo, respectivamente, as direções 1 e 2, pode-se reescrever a Equação (9) em notação indicial:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \partial\Omega = \int_{\Gamma} u_i n_i ds \quad (10)$$

Reescrevendo-se a equação anterior em notação vetorial:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \partial\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (11)$$

A Equação (11) é conhecida com sendo o Teorema da Divergência. O termo  $\nabla$  é chamado de gradiente de um dado vetor de um domínio  $\Omega$ . Corresponde a  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$  (caso bidimensional) ou  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  (caso tridimensional). O termo  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  corresponde a um fluxo do vetor  $\mathbf{u}$  sobre o contorno  $\Gamma$ .

### 3.4 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Submete-se um corpo a um esforço concentrado de forma homogênea sobre um determinado intervalo de região, de forma que ele possa ser representado por uma função retangular, como na Figura 12.

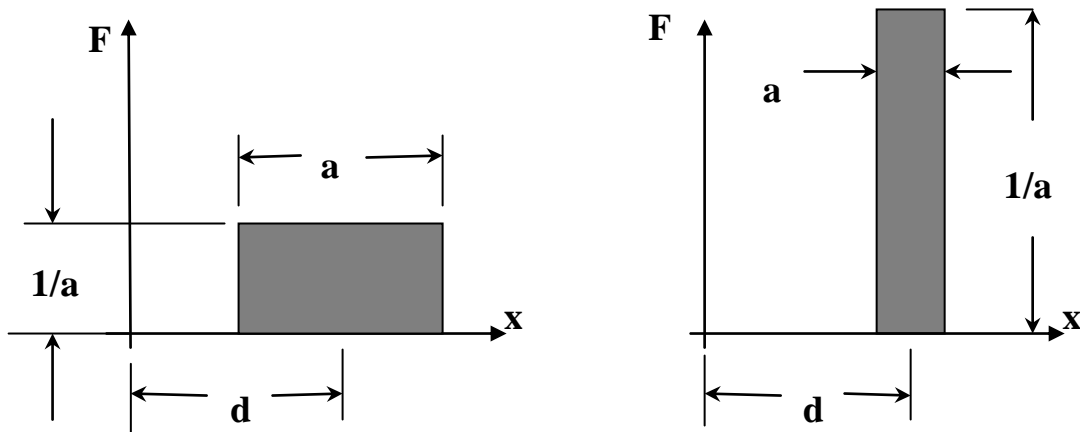


Figura 12 – Representação da distribuição retangular de um esforço sobre uma extensão  $a$  de um objeto

A coordenada  $d$  representa, neste caso, o ponto médio da base do retângulo,  $1/a$  representa a altura do retângulo e o valor do esforço ao longo da extensão  $a$ . Para saber qual é o esforço total deste carregamento no objeto, deve-se integrar o esforço ao longo da extensão  $a$ , ou simplesmente calcular a área do retângulo da Figura 12, como na Equação (12):

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = a \frac{1}{a} = 1 \quad (12)$$

À medida que a extensão de atuação do esforço ( $a$ ) diminui, o valor do esforço tem que aumentar para que o valor da integral permaneça constante, que é o que ocorre na passagem do lado direito para o lado esquerdo da Figura 12. Extrapolando-se esta situação para um caso em que a extensão tende a ser nulo, o esforço tende a alcançar valores que tendem ao infinito, mas conserva-se o valor da integral, como na Equação (13):

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 1 \quad (13)$$

A função que descreve estes esforços na Equação (13) é chamada de função Delta de Dirac, como na Equação (14):

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(x) = \delta(x - d) \quad (14)$$

A partir deste desenvolvimento, pode-se concluir que a função Delta de Dirac é infinita quando  $x=d$  e é nula quando  $x$  assume qualquer outro valor. Outra propriedade notável da função Delta de Dirac é a da Equação (15):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - d)dx = f(d) \quad (15)$$

### 3.5 RELAÇÃO DE CAUCHY

As componentes do vetor de forças de superfície  $t_i$  estão relacionadas com as componentes de tensão  $\sigma_{ij}$  e a normal  $n_j$  através da relação de Cauchy, na forma de Equação (16):

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (16)$$

A relação de Cauchy (Equação (16)) pode ser usada para descrever a equação de equilíbrio de um sólido. Partindo do fato que este equilíbrio é realizado por forças que atuam na superfície do objeto e por forças de corpo que atuam no volume do objeto, pode-se chegar nas Equações (17) e (18):

$$\sigma_{j,i,j} + f_i = 0; \quad i, j = 1,2,3 \quad (17)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij}; \quad i, j, k = 1,2,3 \quad (18)$$

$\sigma_{j,i,j}$ =forças no contorno

$f_i$ =forças no volume

$e_{kk}, e_{ij}$ =deformações

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1-\nu)} = \text{módulo de cisalhamento}$$

$E$ =módulo de elasticidade

$\nu$ =número de Poisson

### 3.6 LEI DE HOOKE

Para um material isotrópico, o material reage às solicitações segundo um mesmo comportamento, não importando a direção delas. Neste caso, a Lei de Hooke pode ser expressa de acordo com a Equação (19):

$$\sigma_{kl} = C_{klmn}e_{mn} \quad (19)$$

$\sigma_{kl}$ =tensão

$C_{klmn}$ =coeficiente de rigidez

$e_{mn}$ =deformação

### 3.7 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES E O VETOR DE GALERKIN

Em elasticidade linear, o problema resume-se em encontrar três componentes de deslocamento, seis deformações independentes e seis componentes independentes do tensor de tensões, dados forças de corpo, forças de superfície e deslocamentos de superfície. As 15 incógnitas são governadas por 6 relações deformação-deslocamento, 6 relações tensão-deformação e 3 equações de equilíbrio, a seguir:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (20)$$

$$\sigma_{kl} = C_{klmn}e_{mn} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (21)$$

$$\sigma_{j,i,j} + f_i = 0 \quad (22)$$

Combinando-se as Equações (20), (21) e (22), chega-se à equação de Navier-Stokes de elasticidade:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\mu + \lambda)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad (23)$$

Entretanto, a Equação (23) possui um acoplamento. Galerkin propôs uma substituição de variável que desacopla a equação, de acordo com a Equação (24):

$$2\mu u_i = 2(1 - \nu)g_{i,jj} - g_{j,ii} \quad (24)$$

$$\nabla^2(\nabla^2\mathbf{g}) + \frac{1}{(1-\nu)}\mathbf{f} = 0 \quad (25)$$

Se, na Equação (25),  $\mathbf{f} = 0$ , a equação anterior é chamada de equação bi-harmônica, pois o laplaciano do laplaciano é chamado de operador bi-harmônico. Para se obter as tensões a partir da solução da equação desacoplada de Navier-Stokes, utiliza-se a Equação (26):

$$\sigma_{ij} = (1 - \nu)[g_{i,kkj} + g_{j,kki}] - g_{k,kkj} + \nu\delta_{ij}g_{l,lkk}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (26)$$

### 3.8 PROBLEMA DE KELVIN E A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL EM 3D

Em elasticidade tridimensional, o problema de Kelvin descreve a resposta de um meio infinito, homogêneo, isotrópico e elástico em relação a uma carga pontual. Este efeito pontual é conseguido aplicando-se um caso limite em uma força de corpo atuando em uma esfera quando seu raio tende a zero e a intensidade da força de corpo aumenta para manter a força resultante  $P$  constante [3]. O conceito é compatível com o conceito do Delta de Dirac visto na seção 2.3.

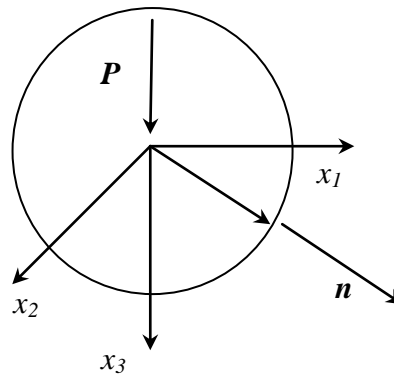


Figura 13 – Superfície esférica utilizada no problema de Kelvin

A carga  $P$  atuando no centro da esfera na Figura 13 é tal que a esfera se encontra em equilíbrio, de acordo com a Equação (27):

$$\sum F_3 = 0 = P + \int_{\Gamma} t_3 d\Gamma = P + \int_{\Gamma} \sigma_{j3} \frac{x_j}{\rho} d\Gamma \quad (27)$$

A Equação (26) pode ser utilizada aplicada à Equação (27) para o vetor de Galerkin aparecer na equação de equilíbrio de Kelvin. Se o raio  $\rho$  e os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são coordenadas esféricas, resulta na Equação (28)

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho x_j \{ (1 - \nu) [g_{3,kkj} + g_{j,kk3}] - g_{k,k3j} + \nu \delta_{3j} g_{l,lkk} \} \sin \theta d\theta d\phi = -P \quad (28)$$

Resta ainda conhecer a forma que o vetor de Galerkin assume neste problema. Presume-se que a integral da Equação (28) deve ser independente do raio assumido. Nota-se que os dois primeiros termos dentro da integral configuram unidade de comprimento ao quadrado. Deste modo, a terceira derivada do vetor de Galerkin deve possuir grandeza do inverso de comprimento ao quadrado. Uma forma de se resolver à presunção é propor um vetor na forma de Equação (29):

$$g_1 = g_2 = 0; g_3 = b\rho \quad (29)$$

A constante  $b$  resta a ser determinada. Pode-se encontrar [3] que:

$$b = \frac{-P}{8\pi(\nu - 1)}$$

Assim, o vetor de Galerkin proposto não só é compatível com as equações de Navier-Stokes para elasticidade, mas também é o vetor que respeita a condição de equilíbrio e soluciona o problema de Kelvin. Esta solução pode ser utilizada para descrever a solução de Kelvin para deslocamento, tensão e tensor de tensões, respectivamente nas equações (30), (31) e (32).

$$u_{ik} = \frac{P}{16\mu\pi(1-\nu)}\rho^{-1}\{(3 - 4\nu)\delta_{ik} + \rho_{,i}\rho_{,k}\} \quad (30)$$

$$\sigma_{ijk} = \frac{P(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}\rho^{-2}\left\{\delta_{ij}\rho_{,k} - \delta_{jk}\rho_{,i} - \delta_{ki}\rho_{,j} - \frac{3}{(1-2\nu)}\rho_{,i}\rho_{,j}\rho_{,k}\right\} \quad (31)$$

$$t_{ik} = \sigma_{ijk}n_j = \frac{-P}{8\pi(1-\nu)}\rho^{-2}\left\{\rho_{,j}n_j[(1 - 2\nu)\delta_{ki} + 3\rho_{,j}\rho_{,k}] + (1 - 2\nu)[\rho_{,i}n_k - \rho_{,k}n_i]\right\} \quad (32)$$

O símbolo 'k' indica, neste caso, que se trata da solução fundamental, que corresponde à resposta de uma carga concentrada em um meio infinito, obedecendo à equação de equilíbrio (Equação (33)) com a presença do delta de Dirac no termo não-homogêneo (Equação (34)) [3]:

$$\sigma_{j,i,j} + f_i = 0 \quad \text{ou} \quad (33)$$

$$\sigma_{jik,j} + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})\delta_{ik} = 0 \quad (34)$$

A origem do sistema de coordenadas estava sempre coincidente ao ponto onde está a carga nas equações precedentes. Para generalizar sua aplicação para qualquer ponto, basta observar que o raio  $\rho$  é representado pela diferença entre um ponto qualquer  $\mathbf{x}$  e o ponto de carga  $\mathbf{d}$ . Então, quando aparecia  $x_i$  nas fórmulas anteriores deve ser substituído por  $y_i$ , como nas Equações (33), (34) e (35):

$$y_i = x_i - d_i \quad (33)$$

$$\rho = [y_k y_k]^{1/2} = [(x_1 - d_1)^2 + (x_2 - d_2)^2 + (x_3 - d_3)^2]^{1/2} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \rho_{,i} = y_i \rho^{-1} \quad (35)$$

### 3.9 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

As formulações de MEC costumam se basear em uma equação integral típica, do tipo de Equação (36):

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi - Q)w \, d\Omega = 0 \quad (36)$$

A expressão  $(\nabla^2 \phi - Q)$  é o resíduo de uma equação diferencial aproximada do problema, cujas características dependerão do domínio  $\Omega$  e do tipo de problema (elasticidade, transferência de calor etc.). A variável  $w$  é chamada de função peso, que pode assumir um valor arbitrário, mas costuma receber valores convenientes com o problema que está sendo estudado.

A equação utilizada dentro da integral da Equação (36) no tratamento de problemas de elasticidade é a própria equação de Equilíbrio (33). A variável  $w$  receberá aqui um valor para cada direção assumida, resultando na Equação (37):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i)w_i \, d\Omega = 0 \quad (37)$$

Aparece uma derivada no primeiro termo dentro da integral da Equação (37), que pode ser reescrita, através da regra da derivada de produto, como sendo igual a  $\{[\sigma_{ji}w_i]_j - \sigma_{ji}w_{i,j}\}$ . Usando o teorema da divergência e a transformação de tensões de Cauchy, pode-se chegar à Equação (38):

$$\int_{\Gamma} t_i w_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} f_i w_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} \, d\Omega \quad (38)$$

Quando tensores simétricos e anti-simétricos estão envolvidos em uma contração, o resultado é zero. Esse fato, adicionado com o fato que o tensor de tensões é simétrico reescrever a Equação (38) na forma da Equação (39):

$$\int_{\Gamma} t_i w_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} f_i w_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{j,i}) \, d\Omega \quad (39)$$

Se, na Equação (39), o termo  $w_i$  fosse algum tipo de campo virtual de deslocamentos  $\delta u_i$ , o lado esquerdo desta equação representaria o valor do trabalho que seria realizado pelas forças de superfície e pelas forças de corpo enquanto o corpo percorre esses deslocamentos. Com essa substituição, a Equação (39) poderia se tornar a Equação (40), e passaria a representar o princípio do trabalho virtual, com  $\delta e_i$  representando um campo virtual de deformações.

$$\int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta e_i d\Omega \quad (40)$$

### 3.10 TEOREMA DA RECIPROCIDADE

Um objeto qualquer possui domínio  $\Omega$  e um contorno  $\Gamma$ . Em uma situação em que este objeto seja submetido a um conjunto de esforços estáticos, ou seja, um determinado conjunto de forças de corpo e forças de superfície. Nomeando esta situação pelo índice (1), pode-se aplicar o princípio do trabalho virtual a esta situação, conhecendo-se os valores cinemáticos resultantes (deformações, deslocamentos).

Para uma situação (2), aonde exista um outro conjunto de condições estáticas e cinemáticas virtuais, a equação (40) pode ser igualmente utilizada. Entretanto, para que ela seja válida, basta apenas que ela contenha os valores estáticos correspondentes a uma situação de equilíbrio [3]. Escrevendo-se arbitrariamente a Equação (40) com os valores cinemáticos trocados, chega-se às Equações (41) e (42):

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} e_i^{(2)} d\Omega \quad (41)$$

$$\int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(2)} e_i^{(1)} d\Omega \quad (42)$$

Ao se utilizar a Equação (19) (Lei de Hooke) no integrando do lado direito da Equação (41), pode-se chegar a uma correspondência com o lado direito da Equação (42). Disso, obtém-se que os lados esquerdos das mesmas equações são equivalentes, segundo a Equação (44):

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega \quad (44)$$

A Equação (44) corresponde ao Teorema da reciprocidade, ou teorema de Betti, que expressa que o trabalho feito por um conjunto de forças de superfície e forças de corpo com uma deformação hipotética associada a um segundo conjunto de forças de superfície e forças de corpo é igual ao trabalho realizado se os esforços e os valores cinemáticos fossem trocados [3].



### 3.11 IDENTIDADE DE SOMIGLIANA

Faz-se uso da Equação (44), tendo como situação (1) o problema que se deseja estudar, e como situação (2) a solução do problema de Kelvin para um corpo localizado em um lugar  $\mathbf{d}$  no meio infinito, já que todo corpo pode ser imaginado como sendo esculpido de um meio infinito com e sujeito a forças de superfície e deslocamentos de contorno correspondentes à solução fundamental [3]. Representando os dados correspondentes à solução fundamental com um índice extra “k” e o problema em si sem índice exclusivo, pode-se reescrever a identidade de Somigliana para esta situação com a Equação (45):

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{ik} (x - d) u_i d\Omega \quad (45)$$

Já que a última integral da Equação (45) possui uma função Delta de Dirac, pode-se reescrever a equação como na Equação (46):

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(\mathbf{d}) \quad (46)$$

A Equação (45) corresponde à Identidade de Somigliana. Nesta equação, as forças de corpo, correspondentes à segunda integral da mesma equação, foram desprezadas. Estas equações, válidas para um caso tridimensional, onde os índices variam de ‘1’ até ‘3’, também são válidas para um caso bidimensional ao se aplicar apenas os valores ‘1’ e ‘2’ aos índices.

### 3.12 FORMULAÇÃO SINGULAR

Os carregamentos aos quais é submetido um objeto estão geralmente localizados em sua superfície. Entretanto, ao se observar as Equações (30) e (32), observa-se que os deslocamentos fundamentais e as forças de superfície fundamentais dependem de  $\rho^{-1}$  e de  $\rho^{-2}$ , respectivamente. Neste caso, as integrais da Identidade de Somigliana tenderiam ao infinito para um ponto  $\mathbf{d}$  localizado na superfície do objeto. Para passar por essa dificuldade, foi utilizado um artifício matemático para se avaliar este ponto. A superfície do objeto circunda o ponto de carga com um mesmo raio  $\rho$  de tal modo que, quando o raio tendesse a zero, o ponto passasse a pertencer ao contorno. O fenômeno é bem representado pela Figura 14 e pela Equação (47):

$$I_k \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma-\rho} t_{ik} u_i d\Gamma + \int_{\rho} t_{ik} u_i d\Gamma \right] = I_k^{(1)} + I_k^{(2)} \quad (47)$$

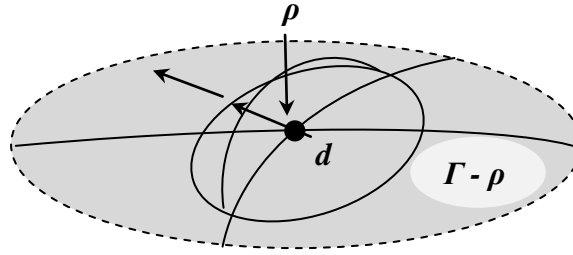


Figura 14 – Superfície com abaulamento hemisférico

A primeira integral do limite da Equação (47) corresponde a toda a superfície do objeto fora do abaulamento hemisférico, enquanto que a segunda integral corresponde à calota que envolve o ponto  $\mathbf{d}$ .

É possível encontrar os valores para  $I_k^{(2)}$  [3], de forma que, utilizando a Identidade de Somigliana, encontra-se a Equação (48):

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma - \frac{1}{2} u_k(\mathbf{d}) + u_i(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + \frac{1}{2} u_i(\mathbf{d}) \quad (48)$$

### 3.13 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA TENSÃO

Em uma análise de tensões, é útil conhecer a distribuição de tensões dentro do objeto. A Equação (49) exprime uma forma de se obter essas tensões [3]:

$$-\sigma_{ij}(d) = \int_{\Gamma} D_{ijr} t_r d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijr} u_r d\Gamma \quad (49)$$

$$D_{ijr} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \{3\rho_{,i}\rho_{,j}\rho_{,r} + (1-2\nu)(\delta_{ri}\rho_{,j} + \delta_{rj}\rho_{,i} - \delta_{ij}\rho_{,r})\}$$

$$S_{ijr} = \frac{-\mu}{4\pi(1-\nu)} \rho^{-3} \{3\rho_{,s}n_s [(1-2\nu)\rho_{,r}\delta_{ij} + \nu(\rho_{,i}\delta_{rj} + \rho_{,j}\delta_{ri}) - 5\rho_{,i}\rho_{,j}\rho_{,r}]\}$$

$$+ 3\nu[\rho_{,j}\rho_{,r}n_i + \rho_{,i}\rho_{,r}n_j] + (1-2\nu)[3\rho_{,i}\rho_{,j}n_r + \delta_{ri}n_j + \delta_{rj}n_i] - (1-4\nu)\delta_{ij}n_r\}$$

Considerando um caso bidimensional, as matrizes D e S assumem a forma da Equação (50):

$$D_{ijr} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} R^{-1} \{2R_{,r}R_{,i}R_{,j} + (1-2\nu)(\delta_{ri}R_{,j} + \delta_{rj}R_{,i} - \delta_{ij}R_{,r})\} \quad (50)$$

$$S_{ijr} = \frac{-2\mu}{4\pi(1-\nu)} R^{-2} \{2R_{,k}n_k [R_{,r}\delta_{ij}(1-2\nu) + \nu(R_{,j}\delta_{ri} + R_{,i}\delta_{rj}) - 4R_{,r}R_{,i}R_{,j}]\}$$

$$+ 2\nu[R_{,r}R_{,j}n_i + 2R_{,r}R_{,i}n_j] + (1-2\nu)[2R_{,i}R_{,j}n_r + \delta_{ri}n_j + \delta_{rj}n_i] - (1-4\nu)\delta_{ij}n_r\}$$

Na Equação (50),  $\sigma_{ij}(d)$  representa o tensor de tensões em um ponto  $d$ ,  $t_r$  e  $u_r$  são, respectivamente, o campo de tensões e o campo de deslocamentos de um contorno  $\Gamma$ ,  $n$  é um vetor normal ao contorno,  $R$  é a distância entre o ponto campo e o ponto fonte e  $\nu$  e  $\mu$  são constantes que dependem do material.

### 3.14 FORMULAÇÃO DE CONTORNO PARA DEFORMAÇÃO PLANA

#### 3.14.1 – Estado Plano de Deformação

O Estado Plano de Deformação é caracterizado por possuir deformações em apenas duas direções, que combinadas podem formar um plano. É o caso observado ao se fixar um longo cilindro pelas extremidades e sujeitá-lo a carregamentos somente transversais. Se, no caso do cilindro,  $x_3$  representar a direção axial, na qual não há deformação neste caso, e  $x_1$  e  $x_2$  forem suas direções transversais, pode-se definir os deslocamentos da forma da Equação (51):

$$u_i = u_i(x_1, x_2), i = 1, 2; u_3 = 0 \quad (51)$$

Relembrando uma relação existente entre deformação e deslocamentos,  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ , tem-se:

$$e_{11} = u_{1,1}$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$e_{13} = e_{31} = e_{23} = e_{32} = e_{33} = 0$$

Quanto às tensões, utilizando a Equação (18) para este caso, chega-se a:

$$\sigma_{11} = \lambda(e_{11} + e_{22}) + 2\mu e_{11} \quad (52)$$

$$\sigma_{22} = \lambda(e_{11} + e_{22}) + 2\mu e_{22} \quad (53)$$

$$\sigma_{33} = \lambda(e_{11} + e_{22}) = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (54)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu e_{12} \quad (55)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0 \quad (56)$$

Observa-se que no Estado Plano de Deformação há uma componente da tensão na direção  $x_3$ , dependente das tensões nas outras direções. Utilizando-se a

equação de equilíbrio tridimensional (17) para este caso, que altera somente o valor dos índices, tem-se a Equação (57):

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0; \quad i, j = 1, 2 \quad (57)$$

A forma da Equação de Navier-Stokes e das tensões em função do vetor de Galerkin também não se altera em relação ao observado no caso 3D [3], o que resulta na equação (58):

$$\sigma_{ij} = (1 - \nu)[g_{i,kkj} + g_{j,kki}] - g_{k,kkj} + \nu\delta_{ij}g_{l,lkk}; \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (58)$$

### 3.14.2 – Problema de Kelvin – caso de Estado Plano de Deformação

O Problema de Kelvin já foi visto na seção 2.8 para um caso tridimensional de uma esfera e uma carga pontual. Já para o caso bidimensional, estuda-se a atuação de uma carga com valor P por unidade de espessura atuando sobre uma linha em toda a extensão de um cilindro infinito de raio R na direção  $x_1$ , como mostra a Figura 15:

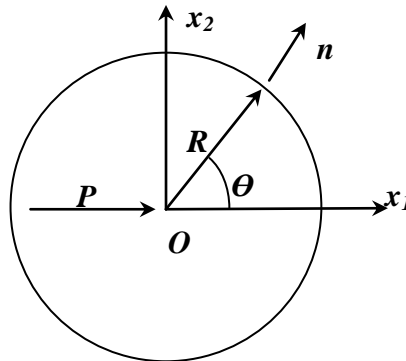


Figura 15 – Seção transversal do cilindro do Problema de Kelvin bidimensional [3]

As forças de superfície devem equilibrar a carga recebida pelo cilindro. Logo, a equação de equilíbrio fica, utilizando a Equação (58), como:

$$\sum F_1 = 0 = P + \int_{\Gamma} \sigma_{jl} \frac{x_j}{R} d\Gamma \quad (59)$$

$$0 = P + \int_{\Gamma} R^{-1} x_j \{ (1 - \nu)[g_{l,kkj} + g_{j,kkl}] - g_{k,kkj} + \nu\delta_{lj}g_{l,lkk} \} d\Gamma \quad (60)$$

Agora, resta encontrar a forma desejada do vetor de Galerkin que satisfaça à Equação (60) de forma que a integral que aparece nela não seja dependente do raio do cilindro. A forma do vetor de Galerkin e as soluções fundamentais para este caso são representadas, respectivamente, pelas equações (61), (62), (63) e (64) [3]:

$$g_1 = R^2 \ln R; g_2 = 0 \quad (61)$$

$$u_{ik} = \frac{P}{8\mu\pi(1-\nu)} \left\{ \left[ (3-4\nu) \ln R - \frac{7}{2} \right] \delta_{ik} + R_{,i}R_{,k} \right\} \quad (62)$$

$$\sigma_{ijk} = \frac{-P(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} R^{-1} \left\{ R_{,i}\delta_{jk} + R_{,j}\delta_{ki} - R_{,k}\delta_{ij} + \frac{2}{(1-2\nu)} R_{,i}R_{,j}R_{,k} \right\} \quad (63)$$

$$t_{ik} = \sigma_{ijk}n_j = \frac{-P}{4\pi(1-\nu)} R^{-1} \left\{ (1-2\nu)[R_{,i}n_k - R_{,k}n_i] + R_{,j}n_j[(1-2\nu)\delta_{ki} + 2R_{,i}R_{,k}] \right\} \quad (64)$$

O índice extra 'k' indica, nas equações (62), (63) e (64), que se trata de soluções fundamentais, que representam a resposta a uma carga pontual em um plano infinito. Estes resultados foram obtidos com a origem do sistema de coordenadas sobre o ponto de carga. Para que elas sejam válidas para um ponto de carga localizado em um ponto qualquer do caso plano, basta substituir  $x_i$  por  $y_i$  no desenvolvimento anterior e utilizar-se das equações (65), (66) e (67):

$$y_i = x_i - d_i \quad (65)$$

$$R = [y_k y_k]^{1/2} = [(x_1 - d_1)^2 + (x_2 - d_2)^2]^{1/2} \quad (66)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = R_{,i} = y_i R^{-1} \quad (67)$$

A equação de equilíbrio toma a forma da Equação (68) no problema de Kelvin bidimensional:

$$\sigma_{jik,j} + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})\delta_{ik} = 0 \quad (68)$$

### 3.15 TENSÃO PLANA

Uma situação da tensão plana é caracterizada por carregamentos planos em um objeto fino e achatado, como mostra a Figura 16:

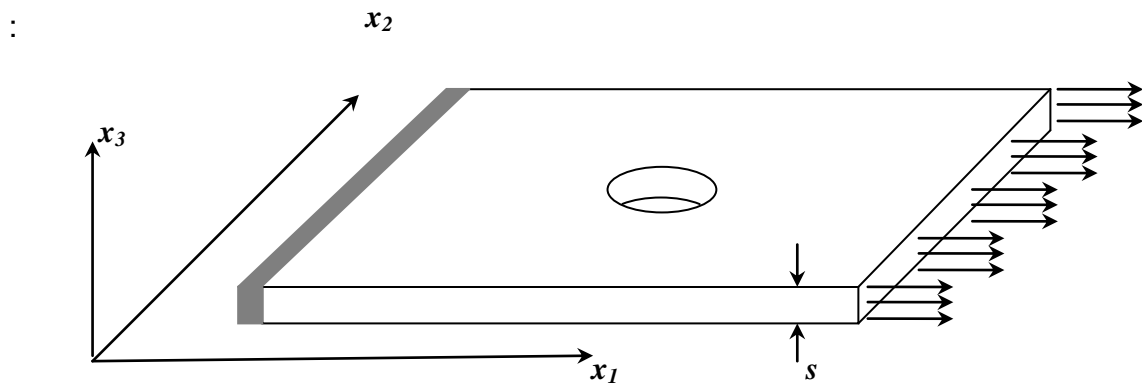


Figura 16 – Caso de tensão plana [3]

As tensões podem ter componentes nas três direções no caso de deformação plana. Já para o caso de tensão plana, podem aparecer deformações nas três direções. Essa diferenciação ocorre, pois no estado de deformação plana o efeito de Poisson na terceira dimensão é inibido, o que não ocorre no estado de tensão plana.

No estado de deformação plana, que envolve materiais espessos, cada uma das várias camadas das quais o material é composto deforma-se de forma compatível com as camadas vizinhas, e isso impediria que houvesse deformação na terceira dimensão, embora haja uma tensão. Já o caso de tensão plana, caracterizando bem materiais finos, observa-se um afinamento do material, que é compensado por deformações na terceira dimensão.

A deformação no terceiro plano, no caso de tensão plana, tem uma relação direta com as deformações nas outras dimensões. Características válidas de tensão plana aparecem nas equações de (69) até (73) [3]:

$$\sigma_{i3} = 0 \quad (69)$$

$$e_{33} = \frac{-\lambda}{(\lambda+2\mu)} e_{kk}; k = 1,2 \quad (70)$$

$$\sigma_{11} = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)} e_{kk} + 2\mu e_{11} \quad (71)$$

$$\sigma_{22} = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)} e_{kk} + 2\mu e_{22} \quad (72)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12} \quad (73)$$

É importante notar que as constantes que aparecem nas equações de (69) até (73) são diferentes das constantes obtidas no caso de deformação plana. Ao utilizar-se a equação de equilíbrio e a relação deslocamento-deformação nas equações anteriores, pode-se notar que há uma diferença no valor de  $\lambda$  entre tensão plana e deformação plana. Dessa forma, as relações tensão-deformação e a equação de equilíbrio para tensão plana e deformação plana seguem nas Equações (74) a (79), com o valor de  $\lambda$  oriundo do caso de deformação plana:

**Tensão Plana:**

$$\text{Relação tensão-deformação: } \sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (74)$$

$$\text{Equação de equilíbrio: } \mu \frac{(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)} u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + f_i = 0 \quad (75)$$

$$\text{Número de Poisson: } \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \quad (76)$$

**Deformação Plana:**

$$\text{Relação tensão-deformação: } \sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (77)$$

$$\text{Equação de equilíbrio: } (\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + f_i = 0 \quad (78)$$

$$\text{Número de Poisson: } \nu = \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \quad (79)$$

### 3.16 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E ANÁLISE DE TENSÕES

Os passos e equações que apareceram até agora levavam em consideração o objeto como um todo, na forma em que ele realmente é. Quando ocorre a discretização do problema, as soluções deixam de ser exatas para serem aproximações, já que o problema deixa de ser contínuo para ser composto por um número finito de elementos de contorno com propriedades bem definidas. A discretização constitui em um passo essencial na utilização do MEC. A Figura 17 mostra esta decomposição em um problema genérico plano de elasticidade.

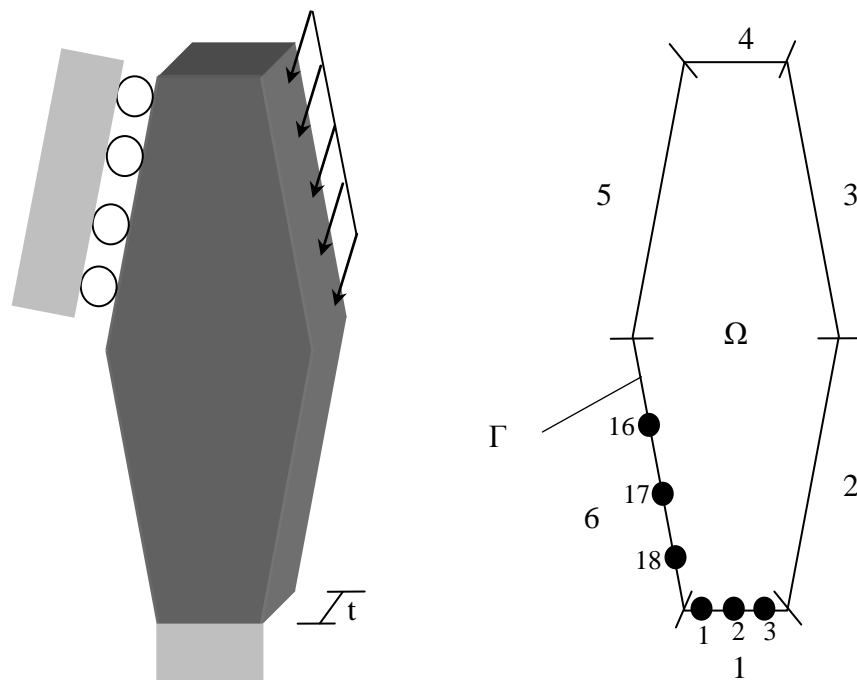


Figura 17 – Contorno discretizado em elementos [3]

No caso da Figura 17, o contorno foi discretizado em 6 elementos e contêm 3 nós em cada elemento. Em seguida, aplica-se a identidade de Somigliana ao caso de um número finito de elementos NE, como mostra a Equação (80):

$$\sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} t_i(x) u_{ik}(x, d) d\Gamma = \sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} t_{ik}(x, d) u_i(x) d\Gamma + c_{ik} u_i(d) \quad (80).$$

O campo de forças de superfície é representado por  $t$ ,  $u$  corresponde a um campo de deslocamentos,  $c_{ik}$  é um fator multiplicativo e  $x$  e  $d$  são, respectivamente, o ponto campo e o ponto fonte. Os termos com um índice se referem ao problema propriamente dito, enquanto que os termos com dois índices se referem às soluções fundamentais. Em cada elemento, deverá ser conhecido o valor das tensões ou dos deslocamentos correspondentes ao problema. As matrizes F e G são montadas de acordo com a teoria de MEC e a Equação (81) pode ser escrita:

$$[\mathbf{F}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{t}\} \quad (81)$$

Os vetores da Equação (81) apresentam valores conhecidos e desconhecidos. A Equação (81) é rearranjada na forma de um sistema linear do tipo  $[A]\{x\} = [B]$ , onde os valores desconhecidos do problema são todos acumulados no vetor  $\{x\}$ . Em seguida, utiliza-se a Equação (50) para conhecer a distribuição de tensões dentro do objeto.



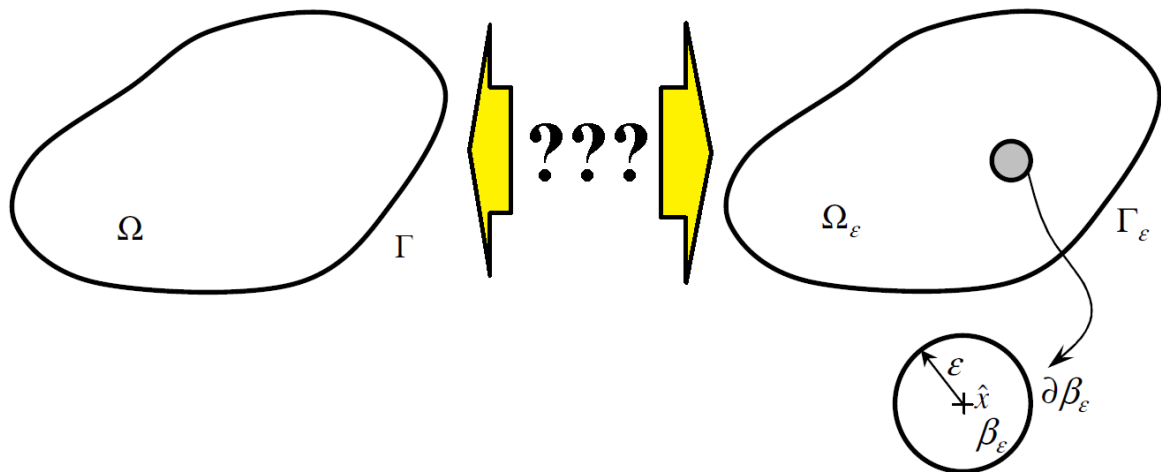
## 4 DERIVADA TOPOLÓGICA

*Este capítulo trata do cálculo da Derivada Topológica para problemas de elasticidade plana*

### 4.1 DERIVADA TOPOLÓGICA PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

A  $D_T$  fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade de uma função-custo quando um pequeno furo é criado [14]. Quando esta sensibilidade é suficientemente baixa, pode-se fazer retiradas de material. Considera-se dois domínios distintos, respectivamente, o domínio original ( $\Omega$ ) e o domínio perturbado com um pequeno furo de raio  $\varepsilon$  ( $\Omega_\varepsilon$ ). Os domínios têm um contorno de Neumann  $\Gamma_t$  submetido a forças de superfície  $\bar{t}$  e restrições de deslocamento em um contorno de Dirichlet  $\Gamma_u$ . Se  $\psi$  é a função-custo e  $f(\varepsilon)$  é uma função de regularização que depende do problema, a  $D_T$  pode ser escrita da forma da Equação (82) [10]:

$$D_T(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\varepsilon) - \psi(\Omega)}{f(\varepsilon)} \quad (82)$$



*Figura 18 – Falta de associação entre dois domínios distintos para cálculo da Derivada Topológica*

Entretanto, como mostra a Figura 18, não havia uma maneira de estabelecer um isomorfismo entre os dois domínios, já que não são iguais. Para atender a esta situação, foi proposto que a  $D_T$  devido à criação de um pequeno furo pode ser usada neste contexto considerando a dilatação em um valor de  $\partial\varepsilon$  de um furo pré-existente

com raio que tende a zero, e a definição da  $D_T$  pode ser reescrita como na Equação (83):

$$D_T(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta\varepsilon \rightarrow 0}} \frac{\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon}) - \psi(\Omega_\varepsilon)}{f(\varepsilon+\delta\varepsilon) - f(\varepsilon)} \quad (83)$$

Na equação anterior,  $\psi(\Omega_\varepsilon)$  e  $\psi(\Omega_{\varepsilon+\delta\varepsilon})$  são, respectivamente, a função-custo avaliada no domínio original e a função-custo avaliada no domínio perturbado. O novo entendimento da Derivada Topológica encontra-se ilustrado na Figura 19:

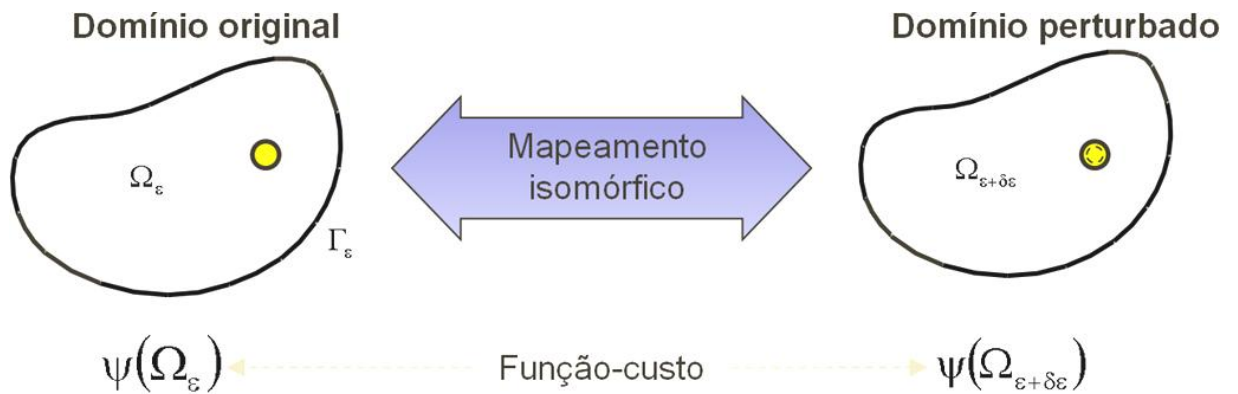


Figura 19 – Entendimento da Derivada Topológica expandindo-se um furo

Percorrendo os mesmos passos utilizados para se obter a Derivada Topológica em problemas de elasticidade linear [12], o problema de valor de contorno é imposto como na Equação (84):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } u_\varepsilon \text{ tal que:} \\ \text{div } \sigma_\varepsilon = b \text{ em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u \\ \sigma_\varepsilon n = \bar{t} \text{ em } \Gamma_t \\ \sigma_\varepsilon n = 0 \text{ em } \Gamma_\varepsilon \end{array} \right. \quad (84)$$

A utilização da  $D_T$  vem apresentando bons resultados em vários campos de aplicação da Engenharia. Neches e Cisilino [10], por exemplo, já realizaram otimizações topológicas em problemas de elasticidade linear bidimensional utilizando o MEC e a  $D_T$ . Entretanto, nem sempre a  $D_T$  é simples de se obter. É apresentada uma formulação geral para se obter a Derivada Topológica cuja metodologia pode ser aproveitada até mesmo para o tratamento de problemas inversos [14].

No caso de problemas de elasticidade linear, a função-custo normalmente empregada é a energia potencial total, que pode ser expressa pela Equação (85) no domínio correspondente:

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \varepsilon_\varepsilon(u_\varepsilon) d\Omega_\varepsilon - \int_{\Gamma_N} \bar{t} u_\varepsilon d\Gamma_\varepsilon \quad (85)$$

Na Equação (85), a integral do lado direito representa a energia total armazenada no corpo, enquanto que a outra integral representa o trabalho externo. Maiores detalhes sobre a dedução podem ser obtidos por bibliografia complementar [8],[10]. Utilizam-se, então, além da Equação (85), as equações de estado em sua forma fraca e a Equação (82), além do Teorema de Transporte de Reynolds, para se obter a Equação (86):

$$D_T(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f(\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{2} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \varepsilon_\varepsilon(u_\varepsilon) d\partial B_\varepsilon \quad (86)$$

Avaliando-se o limite da equação (86), sendo  $\sigma$  o tensor de tensões e sendo  $\varepsilon$  o tensor de deformações, obtém-se, finalmente, que o valor da Derivada Topológica no domínio original corresponde à Equação (87) para o caso de Estado Plano de Tensões (EPT):

$$D_T(x) = \frac{2}{1+\nu} \sigma \cdot \varepsilon + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu^2)} tr \sigma tr \varepsilon \quad (87)$$

Para o caso de Estado Plano de Deformações (EPD), a expressão é de acordo com a Equação (88):

$$D_T(x) = 2(1-\nu) \sigma \cdot \varepsilon + \frac{(1-\nu)(4\nu-1)}{2(1-2\nu)} tr \sigma tr \varepsilon \quad (88)$$

## 4.2 DESENVOLVIMENTO DA $D_T$ ANTES DA IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO COMPUTACIONAL

As Equações (87) e (88) serão utilizadas para o cálculo da  $D_T$  no código de otimização que será construído. Para tanto, é necessário desenvolvê-las para que sejam inseridas em linguagem compatível com o código.

Suponha dois tensores  $T$  e  $S$ , de forma que ambos tenham dimensão 3x3. Da definição de produto tensorial, a multiplicação de  $T$  por  $S$  resulta na Equação (89):

$$T:S = T_{ij}S_{ji}$$

$$= T_{11}S_{11} + T_{12}S_{21} + T_{13}S_{31} + T_{21}S_{12} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{32} + T_{31}S_{13} + T_{32}S_{23} + T_{33}S_{33} \quad (89)$$

Neste caso, os tensores T e S são, respectivamente,  $\sigma$  e  $\varepsilon$ . Para um caso de EPT, estes tensores possuem a forma da Equação (90):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (90)$$

Observa-se que as tensões associadas ao EPT no plano z são, por definição, nulas. Entretanto, devido ao coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), que associa as deformações longitudinais com mudanças de área de seção transversal, para que este efeito não cause tensões na terceira dimensão, o material se deforma também nesta dimensão e, portanto, nenhuma das entradas do tensor  $\varepsilon$  é necessariamente nula. Aplicando-se a equação (90) na equação (87), pode-se encontrar a equação (91):

$$\sigma : \varepsilon = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{yx} + 0 + \tau_{yx}\gamma_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$\sigma : \varepsilon = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{yx} + \tau_{yx}\gamma_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} \quad (91)$$

Logo, a partir da Equação (91), pode-se reescrever  $D_T$  para um EPT conforme a Equação (92):

$$D_T(x) = \frac{2}{1+\nu} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{yx} + \tau_{yx}\gamma_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}) + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu^2)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (92)$$

Entretanto, ao se desenvolver o MEC em um problema bidimensional, ele naturalmente não fornece as deformações associadas à terceira dimensão, e por isso não forneceria o valor de  $\varepsilon_{zz}$ . Entretanto, a partir da definição do coeficiente de Poisson, pode-se reescrever a equação (92) na forma que propõe a equação (93):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{E} [\tau_{xy}(1 + \nu)] \\ \gamma_{yx} &= \frac{1}{E} [\tau_{yx}(1 + \nu)] \end{aligned} \quad (93)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

Uma vez que, por definição,  $\sigma_{zz}$  é nulo,  $D_T$  para um EPT pode ser encontrado pela equação (94):

$$D_T(x) = \frac{2}{1+\nu} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{yx} + \tau_{yx}\gamma_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}) + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu^2)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]) \quad (94)$$

No caso de Estado Plano de Deformação, os tensores assumem a forma da equação (95):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

É notável que, no EPD, há componentes nulas tanto no tensor de tensões quanto no tensor de deformações. Desenvolvendo-se o produto da equação (89) com os tensores da equação (95):

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{yx} + 0 + \tau_{yx}\gamma_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{yx} + \tau_{yx}\gamma_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}$$

Então, a  $D_T$  para um problema do tipo EPD pode ser calculada a partir da Equação (96):

$$D_T(x) = 2(1-\nu)(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{yx} + \tau_{yx}\gamma_{xy} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}) + \frac{(1-\nu)(4\nu-1)}{2(1-2\nu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (96)$$

# 5 ARQUITETURA DO MEC EM MATLAB

*Este capítulo trata do trabalho sobre o código em MATLAB antes dos trabalhos de otimização*

## 5.1 APRESENTAÇÃO DO CÓDIGO

Foi desenvolvido um código em MATLAB para a otimização estrutural de problemas de elasticidade, que se baseia em uma rotina principal iterativa complementada por outras sub-rotinas. O programa permite a edição da topologia e das condições do problema em um bloco de notas. A topologia obtida em cada iteração é também armazenada em um bloco de notas próprio. A cada iteração, é possível obter os valores das forças de superfície e deslocamentos da topologia e construir a topologia da iteração seguinte. O código é composto pelas seguintes etapas:

1. Leitura dos parâmetros do código, como, por exemplo, tamanho do furo, critério de remoção de furos, número de pontos de Gauss utilizados para as integrações numéricas, tipo de grid de pontos internos, área mínima, número de iterações etc.
2. Leitura dos dados da iteração atual (geometria, conectividades, carregamentos, localização do grid de pontos internos etc.)
3. O problema é resolvido através do MEC, onde são encontrados os deslocamentos e tensões nos pontos do contorno e no grid de pontos internos escolhido
4. A  $D_T$  é calculada a partir da Equação (94) ou (96) e são escolhidos os pontos internos com os valores mais baixos de  $D_T$ .
5. Criam-se furos que têm como centro os pontos selecionados na etapa 4, removendo-se material.
6. O critério de parada é verificado, através da comparação do volume atual com um volume mínimo escolhido ou um número de iterações pré-determinado. Cria-se um arquivo com os dados da nova topologia, que será usada na iteração seguinte e retorna-se ao passo 1 até que o critério seja satisfeito.

A Figura 20 mostra um diagrama esquemático que contém as principais etapas percorridas pelo código de otimização:

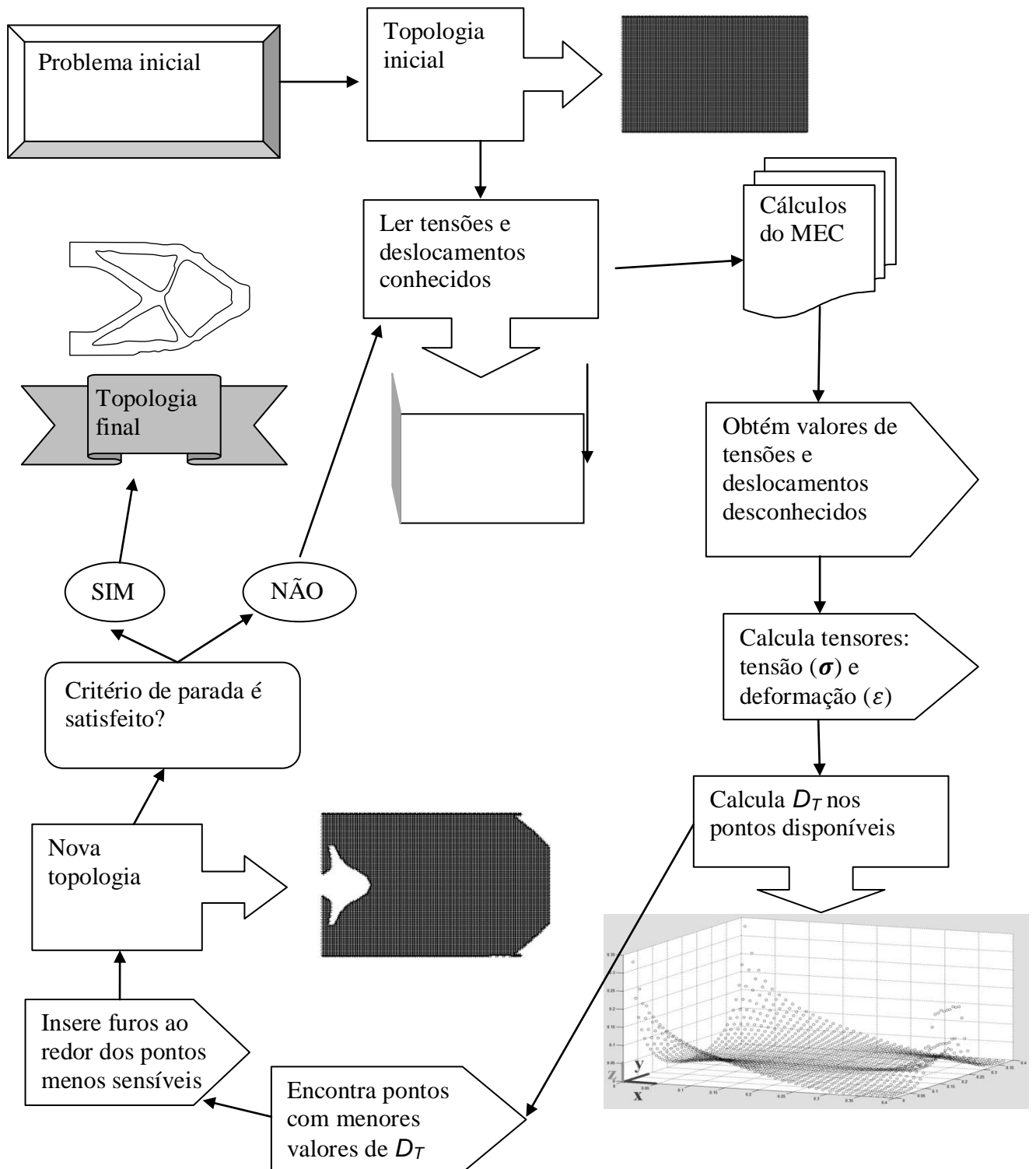
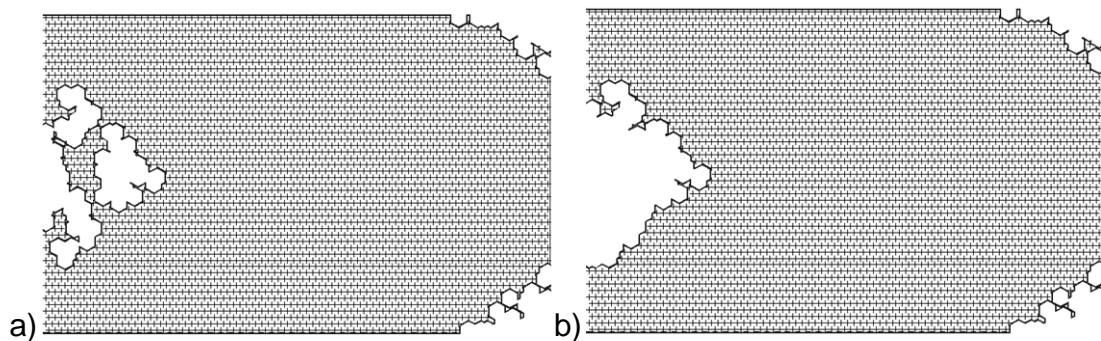


Figura 20– Fluxo lógico do código de otimização

O código desenvolvido se destaca pela versatilidade e pelos recursos incorporados, além de diversos parâmetros reguláveis. Algumas propriedades do código serão listadas a seguir:

**-Zona de restrição de furos:** determinadas zonas podem ser escolhidas para que não recebam furos. O recurso é útil quando se deseja eliminar a possibilidade de se remover involuntariamente elementos com condições de contorno prescritas

**-Eliminação automática de “ilhas”:** quando há remoção de material, o programa identifica e elimina contornos fechados envolvidos por furos em que não há condições de contorno prescritas, ou “ilhas”, para gerar topologias de desenho mais suave. A Figura 21 mostra a eliminação de uma ilha durante uma otimização.



*Figura 21 - Eliminação de "ilha" em duas iterações sucessivas de um problema de otimização: a) Topologia possui uma região quase isolada ao centro do lado esquerdo; b) Após os furos, criou-se uma ilha, que o programa eliminou automaticamente durante a iteração seguinte*

**-Geração automática de pontos internos:** a geração de pontos internos possui várias regulagens, como mostra a Figura 22. Além de um refinamento maior ou menor de pontos internos, Pode-se escolher se eles se alinham na vertical e horizontal ou se alinham diagonalmente, permitindo o uso de menos pontos internos para a mesma área. Adicionalmente, há um recurso de criação de pontos internos próximos ao contorno, que pode gerar contornos mais suavizados.



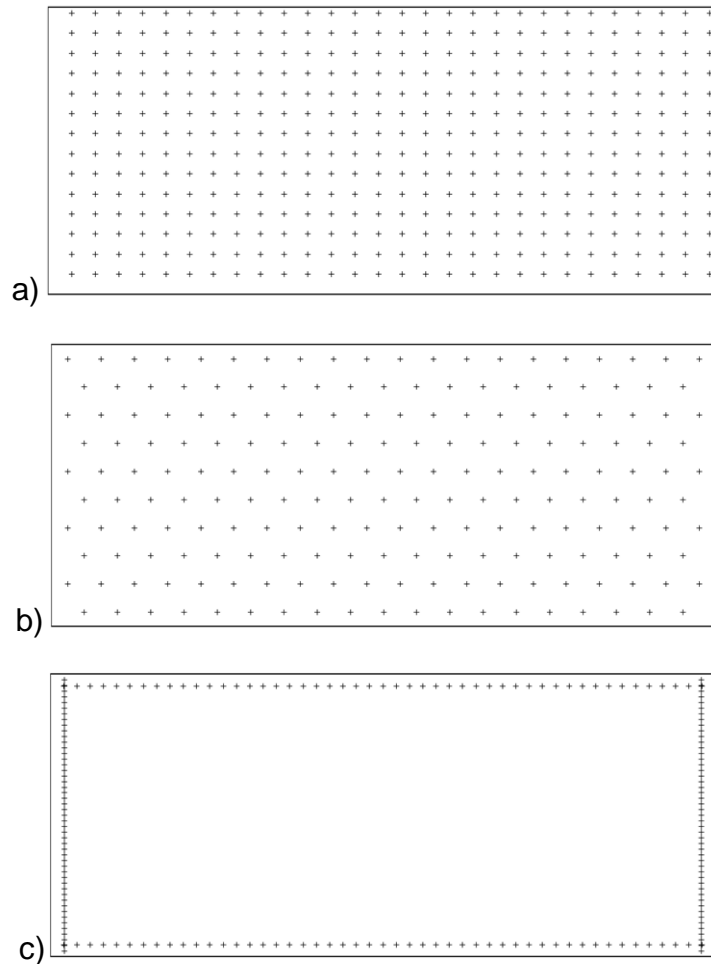


Figura 22 - Diferentes tipos de pontos internos que podem ser gerados no código de otimização: a) Ortogonal; b) Diagonal; c) Próximo aos contornos

**-Controle de criação de furos:** os furos podem ser ajustados em número de elementos, dois (quadrado), três (hexágono), quatro (octógono) e assim por diante. O ângulo do polígono dos furos pode ser ajustado. Os furos podem ser ajustados em tamanho para evitar que estejam muito próximos de pontos internos e para evitar regiões de parede muito fina entre os furos, diminuindo problemas de singularidade

**-Seleção de sensibilidade:** pode-se escolher se as áreas removidas serão as áreas menos sensíveis (os menores valores de  $D_T$  da iteração) ou as áreas mais sensíveis (os maiores valores de  $D_T$ )

**-Quantidade de furos:** existem três técnicas principais de escolha de furos. Na estratégia de *cut-off*, os valores de  $D_T$  são normalizados em função do valor mais alto e podem ser furados todos os pontos internos que apresentarem um valor normalizado de  $D_T$  abaixo do valor escolhido. Na estratégia de número fixo de furos por iteração, o número de furos em cada iteração pode ser determinado diretamente.

Na estratégia de percentual fixo de furos, um percentual do número total de pontos internos disponíveis é escolhido para os furos

**Armazenamento de dados:** a cada iteração concluída, é gerado um novo arquivo em bloco de notas, correspondente à topologia da iteração seguinte. No caso de um desligamento involuntário do computador, a otimização pode ser continuada posteriormente. Também podem ser gerados arquivos com as tensões, deformações e  $D_T$  e áreas das iterações.

## 5.2 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA DE ANÁLISE DE TENSÕES

O processo de otimização desenvolvido neste trabalho é realizado por uma rotina principal que emprega rotinas auxiliares. Uma destas rotinas é um programa que realiza cálculo das tensões e deformações do problema. Antes de se iniciar o processo de otimização, é necessário validar a rotina. Para a realização da validação numérica, foi utilizado um problema simples cuja solução analítica é obtida facilmente. O problema escolhido para validar o programa de análise de tensões é um problema de viga engastada com um carregamento de flexão na outra extremidade, conforme a Figura 23.

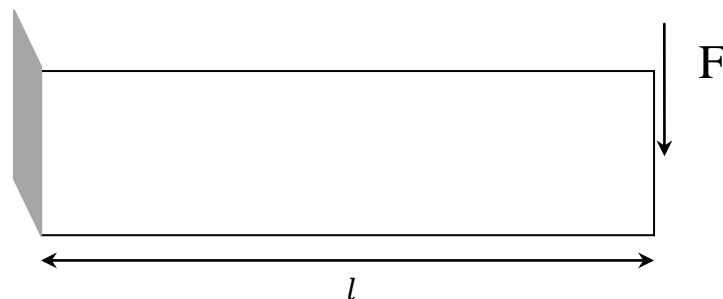


Figura 23 – Viga engastada com carregamento concentrado

Os deslocamentos verticais da viga forma obtidos ao longo da linha média ( $y$ ) e na extremidade da viga ( $y_{max}$ ) através das Equações (97) e (98), conforme recomendado por Shigley [4].

$$y = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l) \quad (97)$$

$$y_{max} = -\frac{Fl^3}{3EI} \quad (98)$$

O momento fletor gerado é calculado pela Equação (99).

$$M_f = F(x - l) \quad (99)$$

Obtém-se a tensão de flexão em um ponto de distância vertical  $c$  da linha media pela Equação (100).

$$\sigma_f = \frac{M_f c}{I_{zz}} \quad (100)$$

$I_{zz}$  é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação ao eixo  $z$ , que, para o caso de uma seção retangular de altura  $h$  e largura  $b$ , é calculado de acordo com a Equação (101).

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12} \quad (101)$$

O problema escolhido de flexão também pode ser encontrado na bibliografia disponível [2]. Utilizou-se um carregamento de flexão uma tensão parabólica de valor mínimo igual a zero e valor máximo igual a 1,5 MPa. O problema é mostrado conforme Figura 24, onde os pontos no contorno representam os nós físicos.

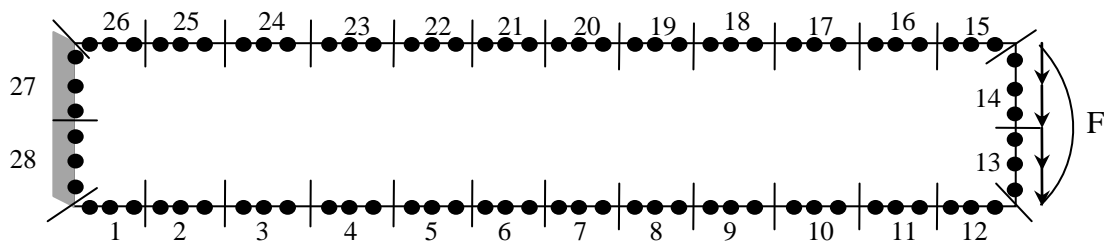


Figura 24 – Problema de flexão [2]

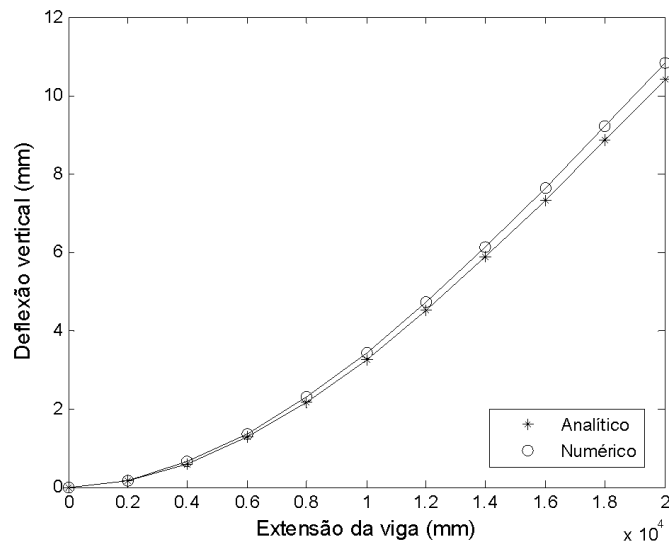
As dimensões da viga são 20m de comprimento por 4m de altura. O coeficiente de Poisson vale 0,2 e módulo de elasticidade ( $E$ ) vale 192000 MPa (que equivale a um módulo de elasticidade ao cisalhamento de 80000 MPa). Os nós do lado do engaste foram fixados para simular o engaste.

Utilizou-se um total de 28 elementos quadráticos no problema de validação. Decorrente do fato que as equações desenvolvidas neste trabalho para elasticidade utilizarem variáveis isoparamétricas, a tensão também possui um comportamento quadrático em cada elemento do contorno. A curva quadrática das tensões do contorno da extremidade livre teve que ser descoberta para se aplicar os valores corretos de tensão.

Os principais resultados utilizando-se dez pontos de Gauss são mostrados nas figuras seguintes. A Figura 25 mostra as deflexões ao longo da linha média, em

comparação com resultados analíticos, possuindo o maior erro de deflexão na extremidade da viga. A partir da Equação (98), pode-se obter que a deflexão na extremidade livre da viga ( $y_{max,ana}$ ) é igual a  $10,41mm$ .

O resultado numérico encontrado foi de  $y_{max} = 10,83mm$  que corresponde a uma diferença de  $4,03\%$ .



*Figura 25 – Comparação entre deslocamentos ao longo da linha média calculados numericamente e analiticamente*

A posição dos pontos na viga é ilustrada pelo caminho tracejado na Figura 26-a). Figura 26-b), Figura 27 e Figura 28 mostram as tensões em pontos internos dispostos verticalmente, ao longo da espessura no centro da viga.

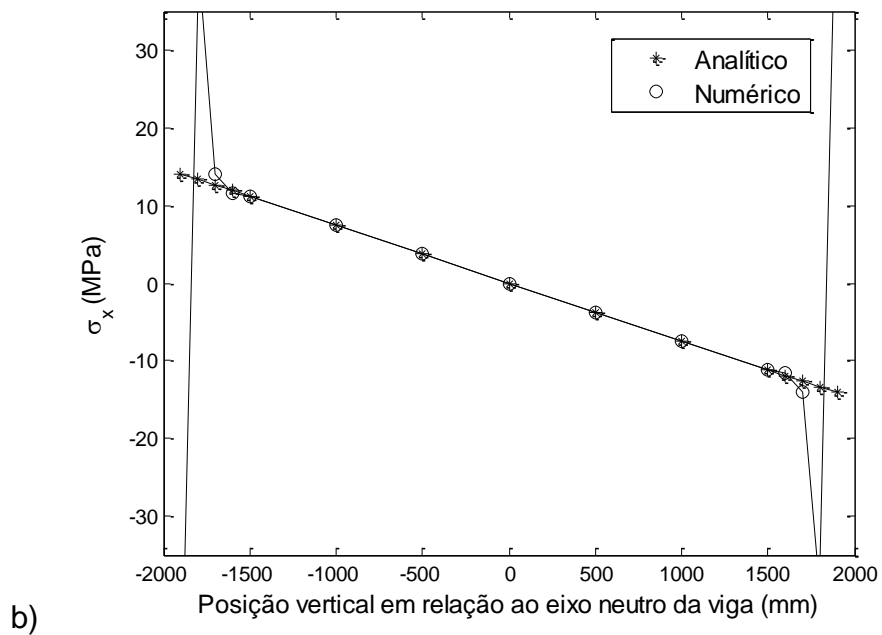
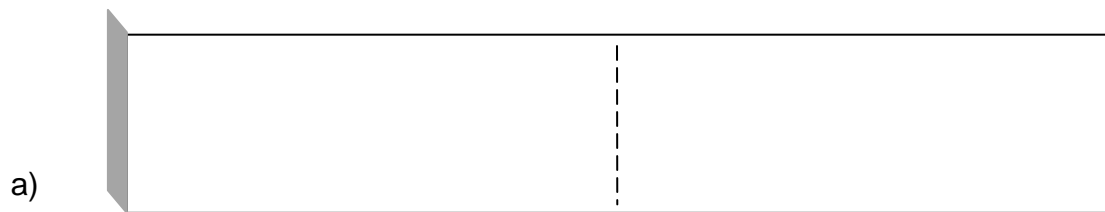


Figura 26 – a) O tracejado indica o alinhamento dos pontos na viga; b) Gráfico comparando os resultados da tensão  $\sigma_x$  ao longo da posição vertical na viga

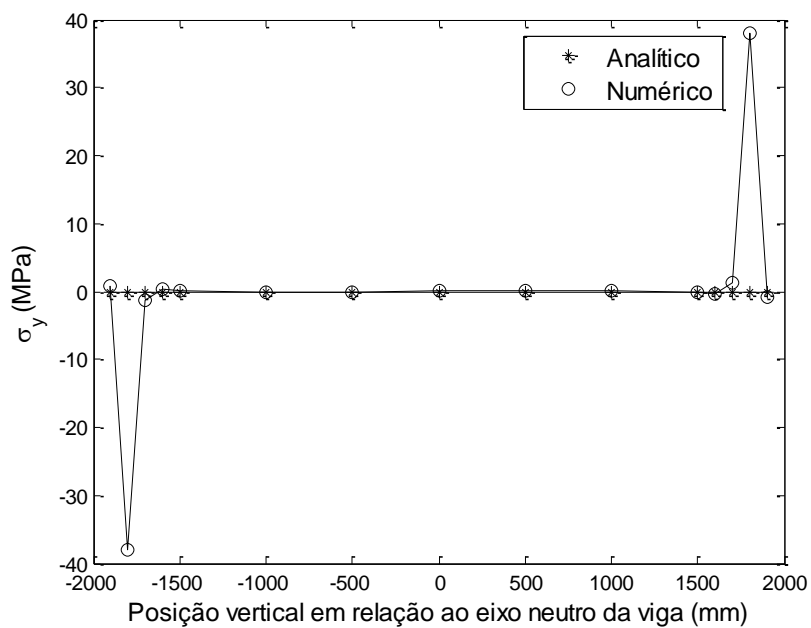


Figura 27 – Distribuição de  $\sigma_y$  ao longo da posição vertical na viga, de acordo com a Figura 26-a)



Figura 28 – Distribuição de  $\tau_{xy}$  ao longo da altura da viga, de acordo com a Figura 26-a)

As tensões apresentam diferenças significantes nas extremidades da viga, o que pode ser verificado nas Figura 26, Figura 27 e Figura 28, devido ao problema de singularidade, nas regiões onde pontos internos estão muito próximos dos nós físicos. Podem-se atenuar as diferenças encontradas aumentando-se o número de elementos do contorno. Adicionalmente, houve um controle na distribuição de pontos internos para que não ficassem muito próximos do contorno.

A  $D_T$  é calculada a partir de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  na rotina iterativa desenvolvida no MATLAB. O gráfico é apresentado conforme a Figura 29.

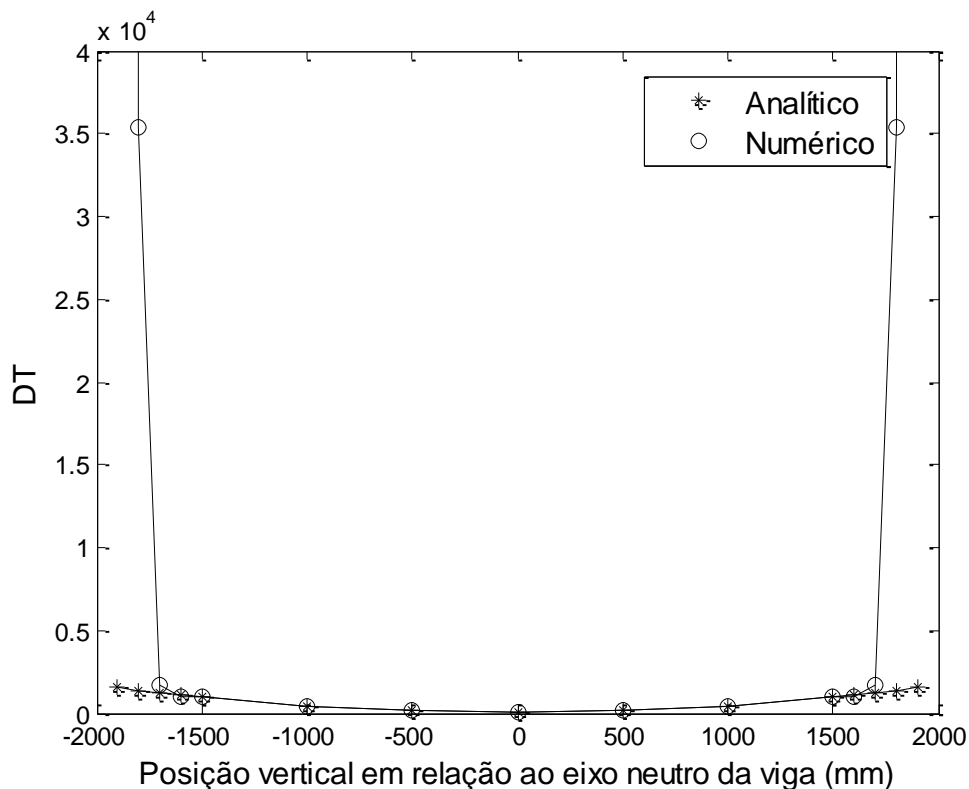


Figura 29 –  $D_T$  calculada em pontos verticais ao longo da espessura

Através da Figura 29, observa-se que o gráfico da solução numérica, com pontos marcados por círculos, com exceção da região das extremidades, é tão suave quanto o gráfico com pontos em asterisco, que representa os valores analíticos da  $D_T$ .

### 5.3 SELEÇÃO DO NÚMERO MÍNIMO DE PONTOS DE GAUSS UTILIZADO NO PROGRAMA

A escolha do número de pontos de Gauss deve considerar uma situação de equilíbrio entre erro e tempo de cálculo. Se forem escolhidos poucos pontos de Gauss, o erro de integração aumenta e a otimização apresenta resultados bem diferentes dos reais. Um número grande de pontos de Gauss, apesar de tornar os resultados mais precisos, resulta em um processo de otimização lento.

Yang [15] resolve um problema de otimização de forma empregando o MEC com oito pontos de Gauss. Em um trabalho de otimização topológica de problemas de elasticidade bidimensionais utilizando o MEC, Marczak [6] obteve resultados aceitáveis utilizando oito pontos de Gauss, ainda que estivesse utilizando elementos

lineares [6]. O mesmo problema de flexão em viga engastada foi utilizado para verificar as dispersões dos resultados utilizando diferentes números de pontos de Gauss. Os resultados de  $D_T$  foram plotados na Figura 30. Os pontos estão dispostos na viga de acordo com a linha tracejada na Figura 26-a)

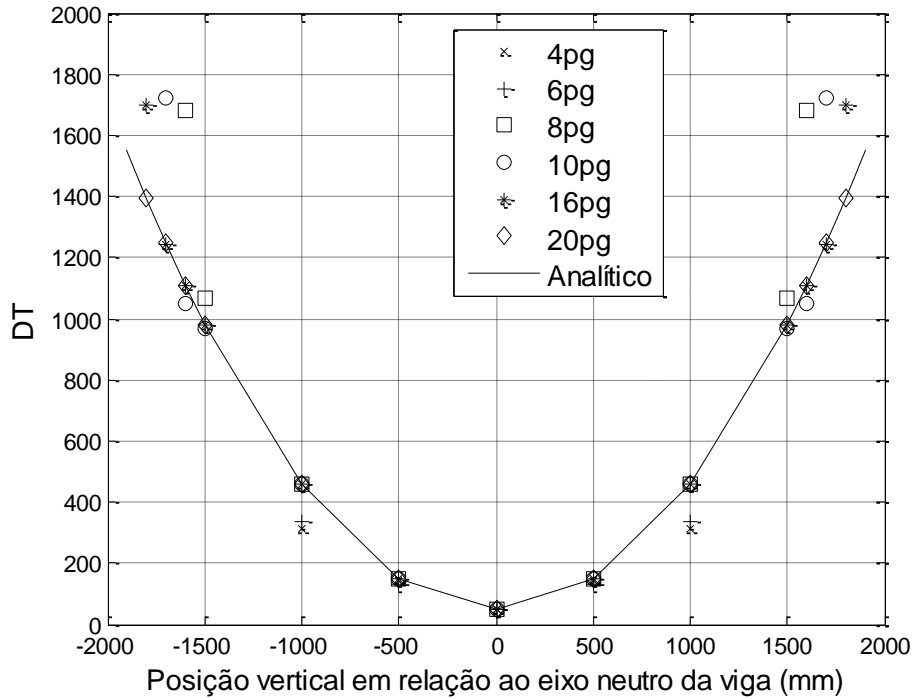


Figura 30 – Avaliação da  $D_T$  para diferentes pontos de Gauss

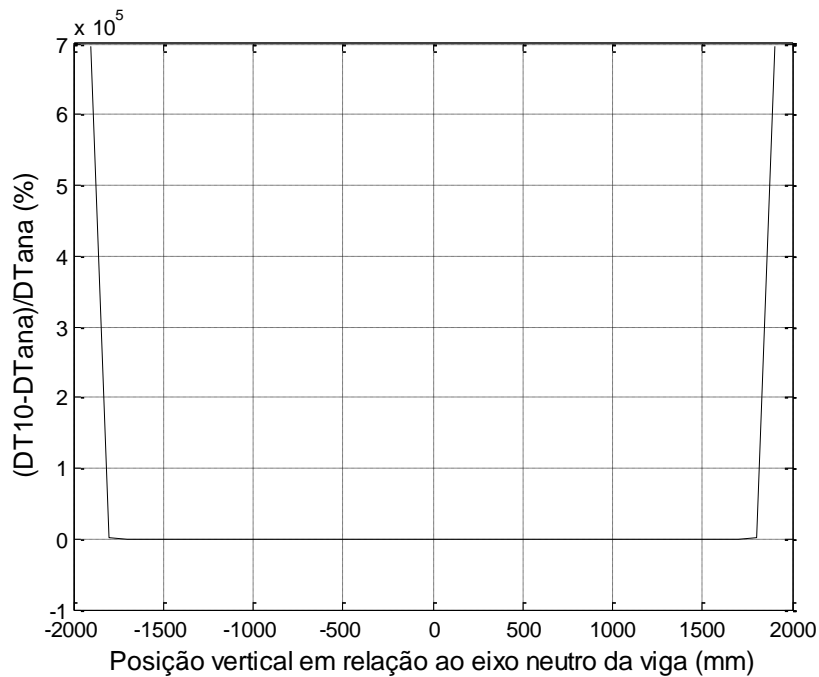


Figura 31 – Erro percentual da  $D_T$  entre 10 pontos de Gauss e a solução analítica



A partir da Figura 30 é possível observar que, para valores de pontos de Gauss inferiores a 8, ocorre uma variação significativa dos valores de  $D_T$  quando próximos à aresta superior ou inferior da viga. A Figura 31 mostra que o erro percentual na utilização de 10 pontos de Gauss é controlado fora da região próxima às extremidades. Entretanto, o aumento do número de pontos de Gauss utilizados nas integrações provoca um aumento exponencial no tempo que o computador utiliza para fazer as contas. Após essas análises, decidiu-se utilizar 10 pontos de Gauss para as otimizações.

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

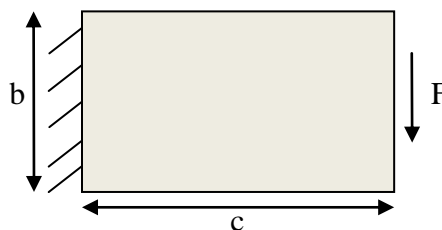
*Este capítulo trata dos principais resultados das otimizações*

Todas as otimizações foram realizadas através de código desenvolvido no MATLAB em um computador com processador Intel Core 2 Duo de 2,93GHz, 4,00Gb de RAM e sistema operacional de 64 bits. Todas as otimizações utilizaram 10 pontos de Gauss para realizar as integrações numéricas.

Foram estudados seis problemas bidimensionais de otimização estrutural. O primeiro problema trata de uma viga engastada com força vertical na extremidade livre. Os Problemas 2, 3, 4 e 5 referem-se a uma viga biapoiada com uma força central. No Problema 2, as extremidades são engastadas. No Problema 3, o centro é engastado e as extremidades recebem forças verticais. Os Problemas 4 e 5 são idênticos, exceto pelos apoios. No Problema 4 uma das extremidades está livre na direção horizontal. No Problema 5, ambas as extremidades estão fixas nas duas direções. O último caso refere-se a um problema de otimização de topologia aplicado ao braço inferior traseiro da suspensão de um veículo.

### 6.1 PROBLEMA 1 – FLEXÃO ENGASTADA

O problema de otimização proposto é uma viga retangular engastada em uma extremidade. A extremidade oposta recebe uma força vertical descendente concentrada em um elemento central, como ilustra a Figura 32.



*Figura 32 – Detalhe das dimensões e das condições de contorno para o Problema 1*

A Tabela 2 contém os principais dados a respeito do Problema 1.

<b>Valor da dimensão c</b>	160 unidades
<b>Valor da dimensão b</b>	100 unidades
<b>Módulo de Elasticidade (E)</b>	1
<b>Coefficiente de Poisson</b>	0,333
<b>Tipo de problema</b>	Estado Plano de Deformações
<b>Nº inicial de elementos quadráticos</b>	200 elementos descontínuos
<b>Pontos de Gauss nas integrações</b>	10
<b>Raio dos furos</b>	1,98 unidades

*Tabela 2 - Principais dados do Problema 1*

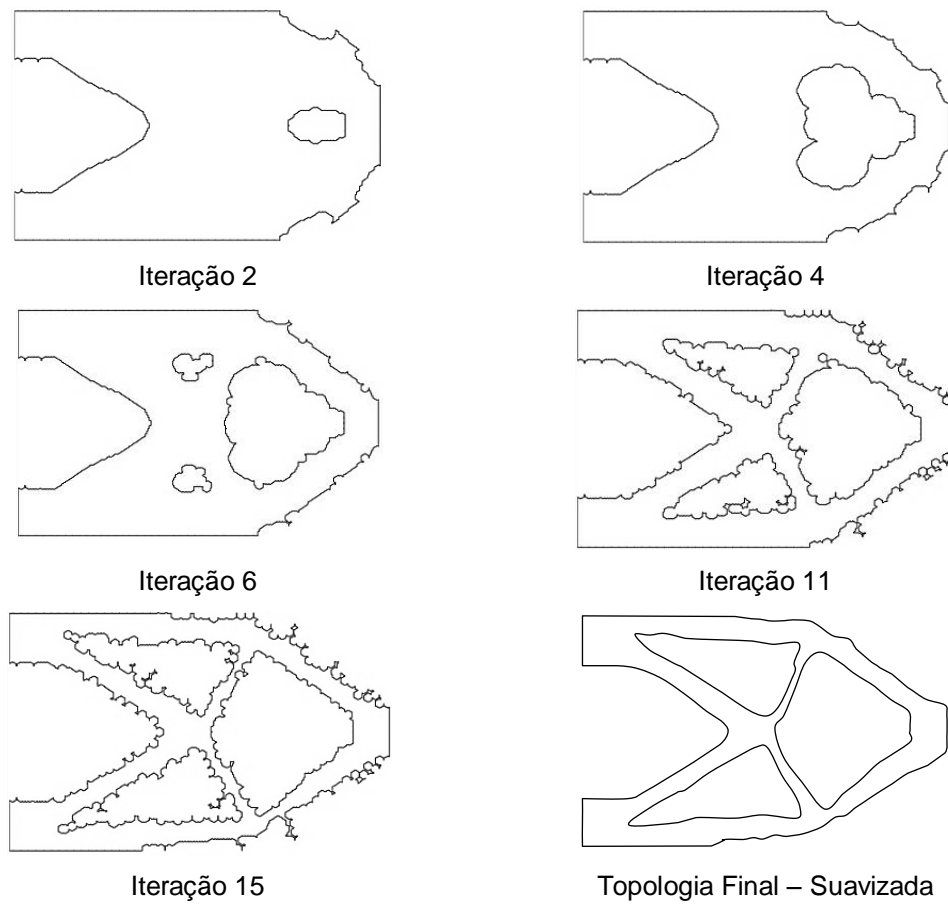
A estratégia de remoção de material foi definida da seguinte forma:

-Determina-se um percentual dos pontos internos com os menores valores de Derivada Topológica e realizam-se furos nos centros desses pontos, removendo-se as áreas de menor eficiência a cada iteração. Para tanto, as porcentagens são cuidadosamente ajustadas para a obtenção de topologias finais coerentes. O processo iterativo foi interrompido quando o volume final da topologia alcançou 35% sobre o volume inicial. A otimização durou aproximadamente 8 horas e 46 minutos. As porcentagens utilizadas no Problema 1 encontram-se na Tabela 3. Observa-se que no início da otimização, o processo foi acelerado com o uso de maiores porcentagens, objetivando-se topologias bem definidas.

Número da Iteração	1	2	3	4 até 15
Porcentagem a ser furada (%)	10	10	10	1,5

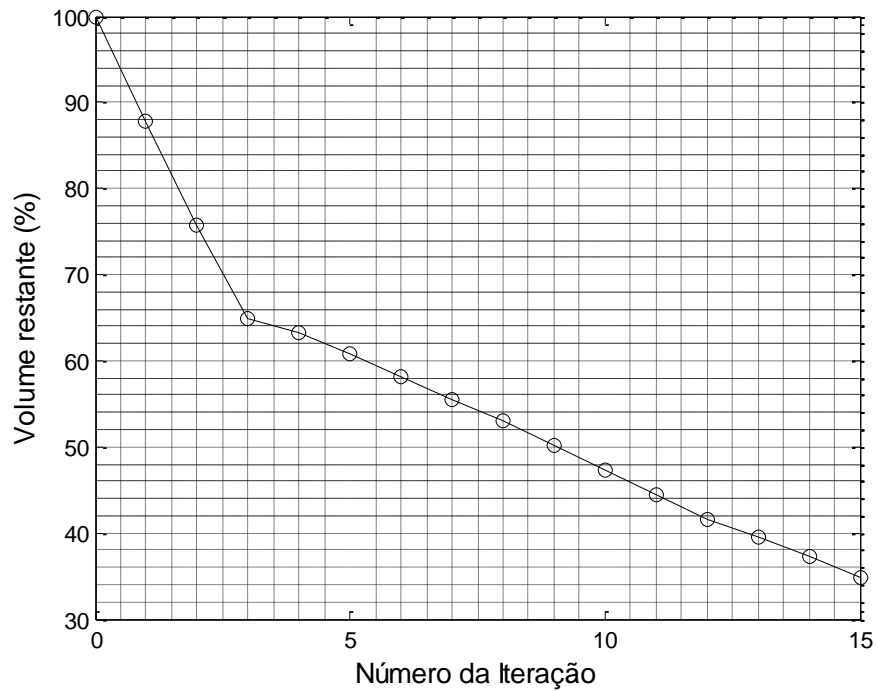
*Tabela 3 - Porcentagens de remoção de furos utilizadas no Problema 1*

Uma suavização da topologia final foi realizada com curvas de Bézier, empregando-se uma rotina de pós-processamento, a fim de se obter um contorno mais suavizado e compatível com os atuais processos de fabricação. A evolução do processo de otimização é apresentada na Figura 33:



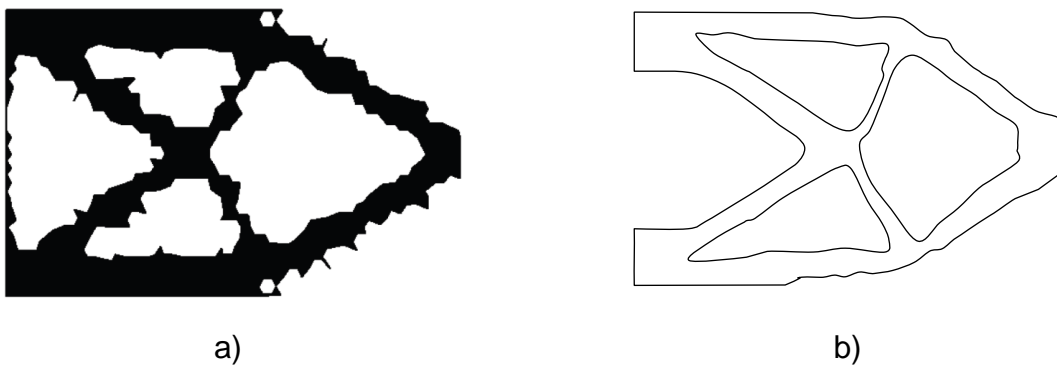
*Figura 33 – Histórico de otimização do Problema 1*

A Figura 34 mostra a evolução da remoção de volume do Problema 1. Analisando-se o gráfico, é possível verificar uma mudança de inclinação da curva a partir da terceira iteração, indicando a redução gradual da quantidade de material a ser removida.



*Figura 34 – Histórico de remoção de material para o Problema 1*

A topologia final para o Problema 1 é bastante similar a topologias de trabalhos anteriores utilizando elementos lineares [6], mostrado na Figura 35, e que utilizou 40 iterações para obter o mesmo volume final. No caso do Problema 1, a topologia final foi obtida após 15 iterações.



*Figura 35 – a) Topologia obtida por trabalho anterior [3], utilizando o MEC e elementos lineares; b) Topologia final do Problema 1, após suavização*

## 6.2 PROBLEMA 2 – FLEXÃO BI-APOIADA 1

O segundo problema de otimização estudado consiste em um bloco retangular com carregamento vertical aplicado no meio da aresta inferior. Ambas as extremidades estão engastadas, conforme ilustrado na Figura 36.

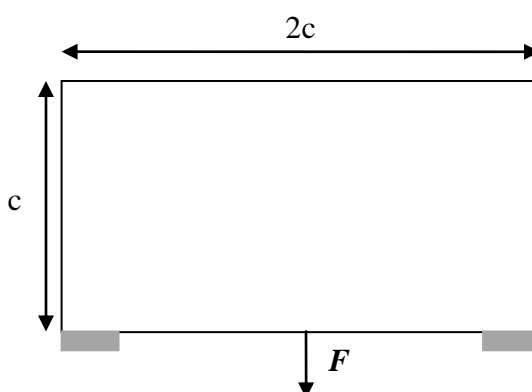


Figura 36 – Detalhe das dimensões e das condições de contorno do Problema 2

Os principais dados do Problema 2 encontram-se relacionados na Tabela 4:

<b>Valor da dimensão c</b>	50 mm
<b>Valor da força F</b>	400 N
<b>Largura da região de cada engaste</b>	2 mm
<b>Módulo de Elasticidade (E)</b>	210000N/mm <sup>2</sup>
<b>Coefficiente de Poisson</b>	0,333
<b>Tipo de problema</b>	Estado Plano de Deformações
<b>Número inicial de elementos quadráticos utilizados</b>	200 elementos descontínuos
<b>Número de pontos de Gauss nas integrações</b>	10
<b>Raio dos furos</b>	1,65 mm

Tabela 4 - Principais dados do Problema 2

No total, foram realizadas 15 iterações e o volume foi reduzido até 35,6% do volume inicial. A estratégia requerida para cada iteração no problema 2 foi de remover 2% do número total de furos a cada iteração. O processo de otimização durou aproximadamente 29 minutos devido a uma malha menor de pontos internos decorrente do tamanho do raio do furo. Uma geometria similar foi encontrada para o mesmo tipo de problema empregando MEF e ESO, conforme a Figura 37-a). A

geometria otimizada deste problema encontra-se na Figura 37-b) e demonstra boa concordância com a topologia obtida por [16].

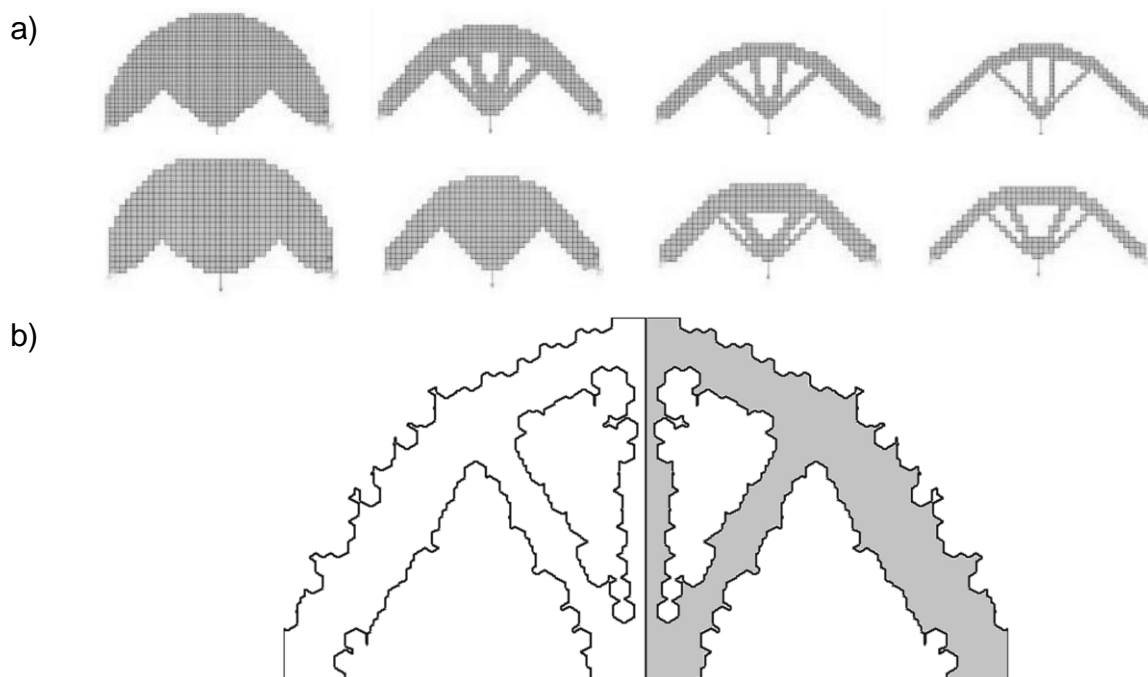
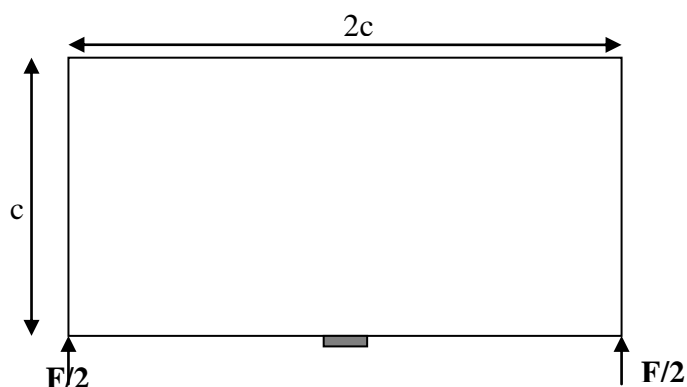


Figura 37 – Topologias finais: a) ESO/MEF [16] e b) BEM/D<sub>T</sub>

### 6.3 PROBLEMA 3 – FLEXÃO BI-APOIADA 2

O terceiro problema de otimização estudado se trata também de um bloco retangular com carregamento vertical. Entretanto, o mesmo foi invertido para permitir que os nós do apoio se movimentem livremente. Deste modo, em comparação com o Problema 2, a força vertical descendente foi substituída por um engaste no centro e os engastes foram substituídos por forças verticais ascendentes nas extremidades, como pode ser visto na Figura 38:



*Figura 38 – Dimensões e condições de contorno para o Problema 3*

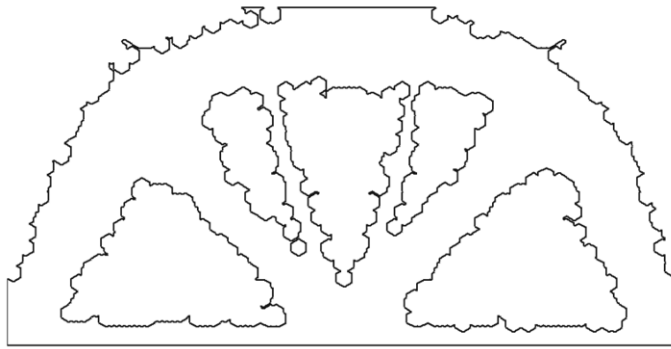
A Tabela 5 reúne os principais dados do Problema 3:

<b>Valor da dimensão c</b>	50 mm
<b>Valor da força F</b>	400 N
<b>Largura da região de cada engaste</b>	2 mm
<b>Módulo de Elasticidade (E)</b>	210000N/mm <sup>2</sup>
<b>Coefficiente de Poisson</b>	0,333
<b>Tipo de problema</b>	Estado Plano de Deformações
<b>Número inicial de elementos quadráticos utilizados</b>	200 elementos descontínuos
<b>Número de pontos de Gauss nas integrações</b>	10
<b>Raio dos furos</b>	1,31 mm

*Tabela 5 - Principais dados do Problema 3*

Foram realizadas 8 iterações e o volume foi reduzido até atingir 41,26% do volume inicial. A estratégia requerida para cada iteração no problema 3 foi de remover maior porcentagem dos furos nas primeiras iterações. Assim, foram removidos, respectivamente, 8%, 7%, 5% e 3% do número total de furos nas quatro primeiras iterações, e 1,3% nas subsequentes. O processo de otimização durou aproximadamente uma hora e 59 minutos. A geometria otimizada é ilustrada na Figura 39.



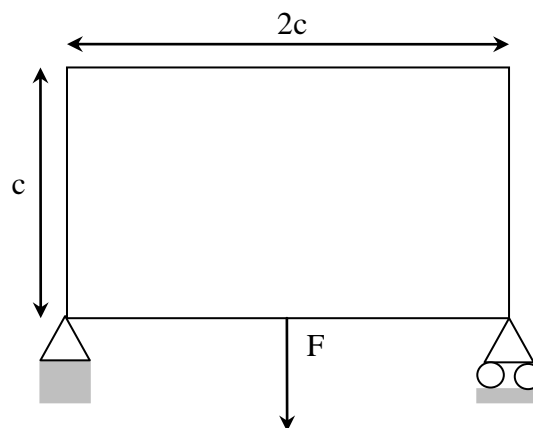


*Figura 39 – Geometria ótima – Problema 3*

O resultado do Problema 3 lembra novamente uma estrutura treliçada radialmente. Similaridades com esta topologia final podem ser encontradas em outros trabalhos [8],[16] . Entretanto naqueles trabalhos, foi utilizado o MEF. Além disso, o método de seleção de áreas a serem retiradas, assim como alguns parâmetros do problema, estão diferentes. Mesmo assim, tanto esta topologia como as outras apresentam a forma de semicirclo com membros radiais.

#### **6.4 PROBLEMA 4 – FLEXÃO BI-APOIADA 3**

A proposta dos Problemas 4 e 5 é de se observar a mudança da topologia ao se alterar ligeiramente as condições de contorno, mantendo o máximo de similaridade entre os problemas. O Problema 4 se trata de um problema de flexão biapoiada, similar ao do Problema 3, mas sem a inversão proposta anteriormente, como mostra a Figura 40. Os deslocamentos nulos foram aplicados sobre apenas um nó dos elementos que os recebem, a fim de se permitir rotação do elemento, já que os apoios são do tipo pino e rolo.



*Figura 40 – Ilustração do Problema 4*

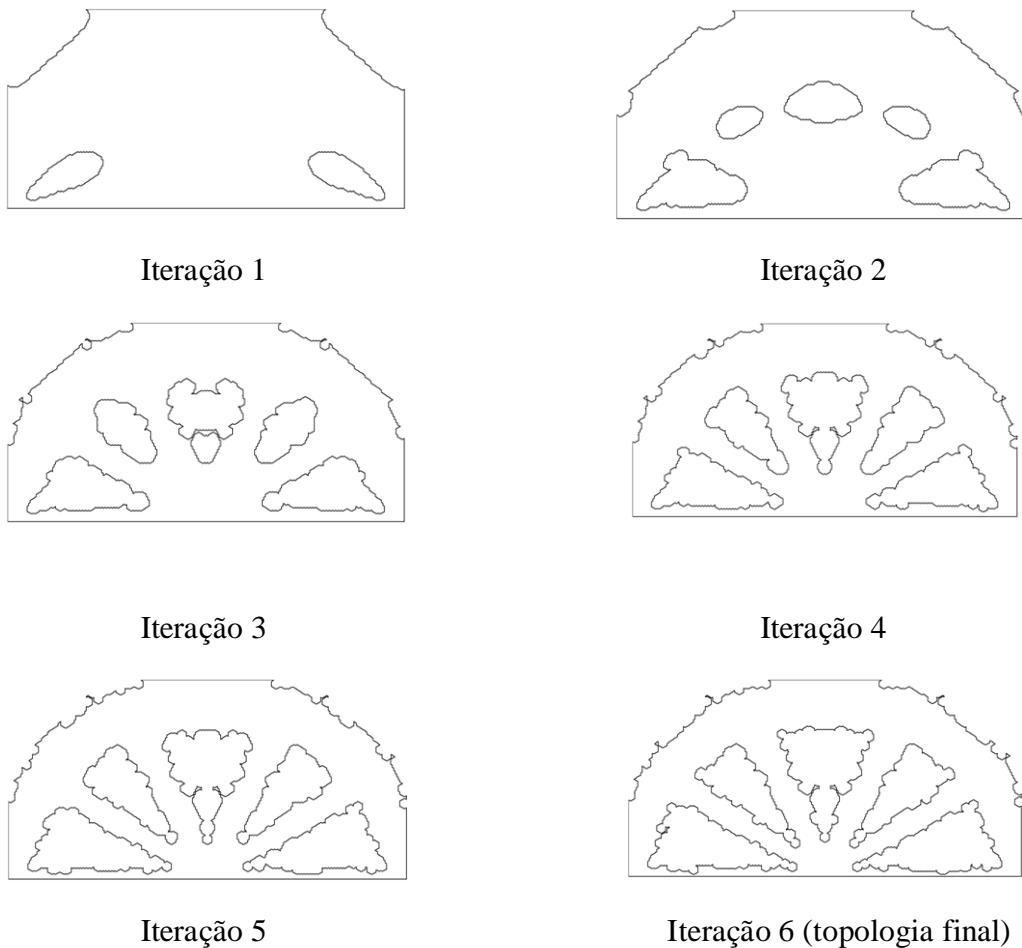
O modelo inicial do Problema 4 foi discretizado com 150 elementos quadráticos descontínuos no contorno. Uma força total vertical  $F$  de 1000N foi aplicada sobre dois elementos centrais. Na Figura 40, a dimensão  $b$  é igual a 5,0m e  $c=2b$ . O módulo de elasticidade foi de 100GPa, o coeficiente de Poisson utilizado foi de 0,3 e foi considerado o problema do tipo Estado Plano de Tensões (EPT). O raio de cada furo realizado foi igual a 0,13m. O critério de parada foi estabelecido quando o volume final alcançasse aproximadamente um valor de 54% do volume inicial.

A estratégia de otimização utilizada é similar à dos problemas anteriores. Após avaliar o valor da Derivada Topológica em todos os pontos internos disponíveis, determina-se uma porcentagem do número total deles para receber furos em cada iteração. As porcentagens utilizadas estão na Tabela 6.

Número da Iteração	1	2	3	4	5	6
Porcentagem a ser furada (%)	12	8	5	3	1	1

*Tabela 6 – Porcentagens utilizadas para realização de furos em cada iteração para o Problema 4.*

O tempo do processo de otimização foi de aproximadamente duas horas. Foram realizadas seis iterações. A Figura 41 mostra a evolução do processo de otimização.



*Figura 41 – Evolução da topologia para o Problema 4*

A topologia final para o Problema 4 se assemelha a formas tradicionais utilizadas no dia-a-dia, podendo ser, por exemplo, uma estrutura treliçada de uma ponte. Se um espelho da topologia final for feito sobre sua base, a estrutura toma a forma de uma roda com elementos radiais, a exemplo da forma básica das rodas comuns de bicicleta, conforme ilustrado na Figura 42.

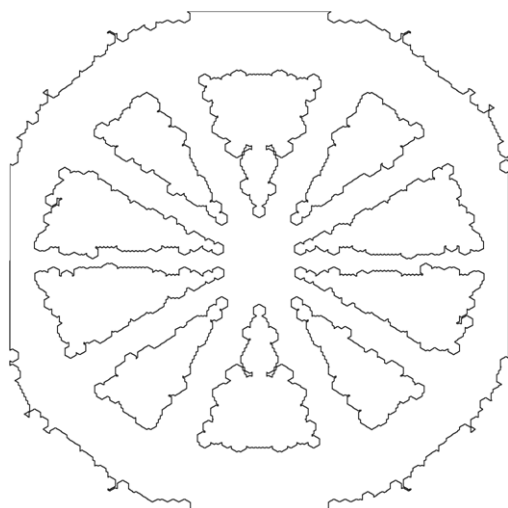


Figura 42 – Topologia final do Problema 4 espelhada

O gráfico da Figura 43 mostra o volume da topologia em função do número de iterações.

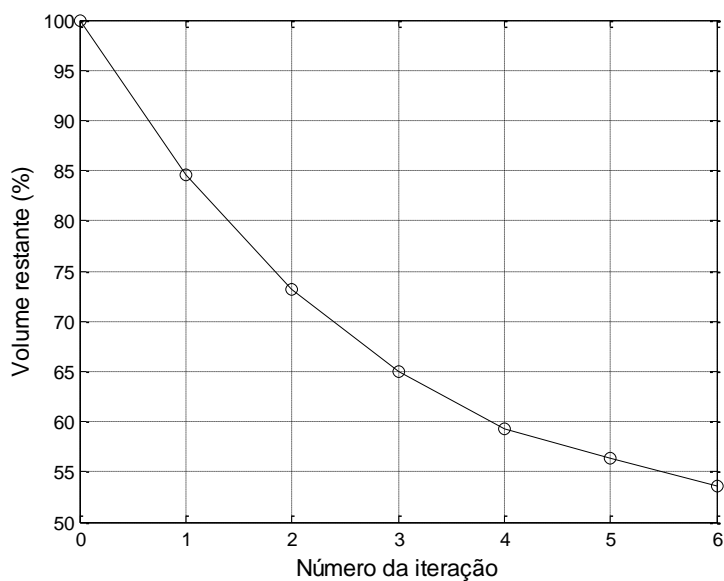


Figura 43 – Gráfico de volume restante versus número da iteração para o Problema 4

## 6.5 PROBLEMA 5 – FLEXÃO BI-APOIADA 4

O Problema 5 é uma modificação do Problema 4, ou seja, corpo submetido a uma força vertical total de 1000N no centro de um dos lados, como mostra a Figura 44.

A topologia inicial do Problema 5 tem 150 elementos quadráticos descontínuos, a dimensão b da Figura 44 tem 5,0m e a dimensão a é tal que  $c=2b$ . A

força  $F$  foi aplicada em dois elementos centrais do lado de baixo do objeto, e o nó central de dois elementos recebeu as restrições de deslocamento nas duas direções ortogonais, representando cada apoio do tipo pino mostrado na Figura 44 e permitindo a rotação dos elementos. O módulo de elasticidade utilizado foi de 100GPa, o coeficiente de Poisson foi de 0,3 e foi considerado um problema do tipo Estado Plano de Tensões.

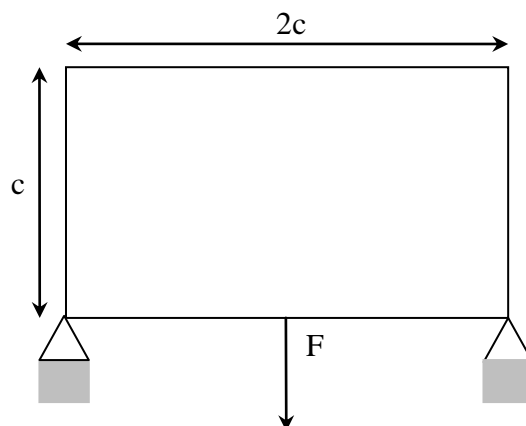


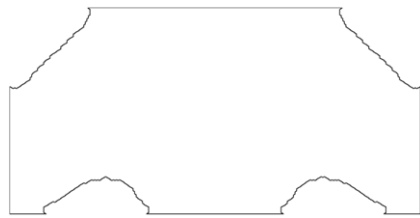
Figura 44 – Ilustração do Problema 5

A estratégia de remoção de material foi de remover uma porcentagem de todos os pontos internos disponíveis. A porcentagem utilizada foi a mesma até a quarta iteração, como pode ser visto na Tabela 7. A partir da quinta iteração, uma porcentagem fixa de 1% foi empregada na otimização.

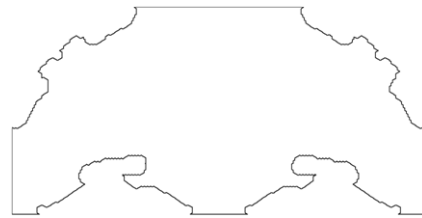
Número da iteração	1	2	3	4	5	6	7	8
Porcentagem furada(%)	12	8	5	3	1	1	1	1

Tabela 7 – Porcentagens de furos realizados por iteração no Problema 5

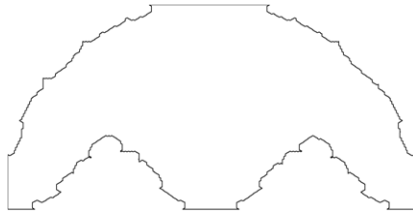
O critério de parada para o Problema 5 foi aplicado para um volume final equivalente a 54% do volume inicial, para posterior comparação com o Problema 4. Todos os furos possuem raio equivalente a 0,13m. O processo de otimização gerou 8 iterações e durou aproximadamente 1 hora e 33 minutos. A Figura 45 mostra a evolução da topologia para o Problema 5.



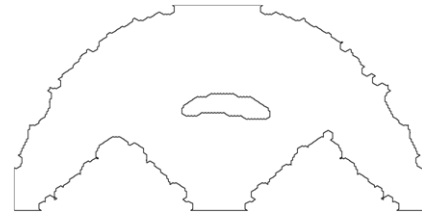
Iteração #1



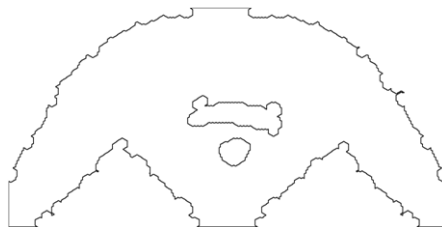
Iteração #2



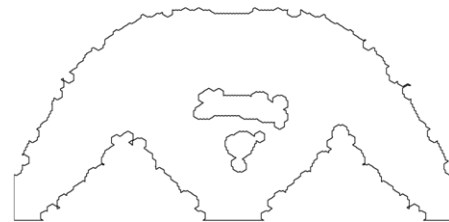
Iteração #3



Iteração #4



Iteração #5



Iteração #6



Iteração #7



Iteração #8 (topologia final)

*Figura 45 – Evolução das topologias do Problema 5*

A diminuição do volume no Problema 5 pode ser acompanhada na Figura 46.

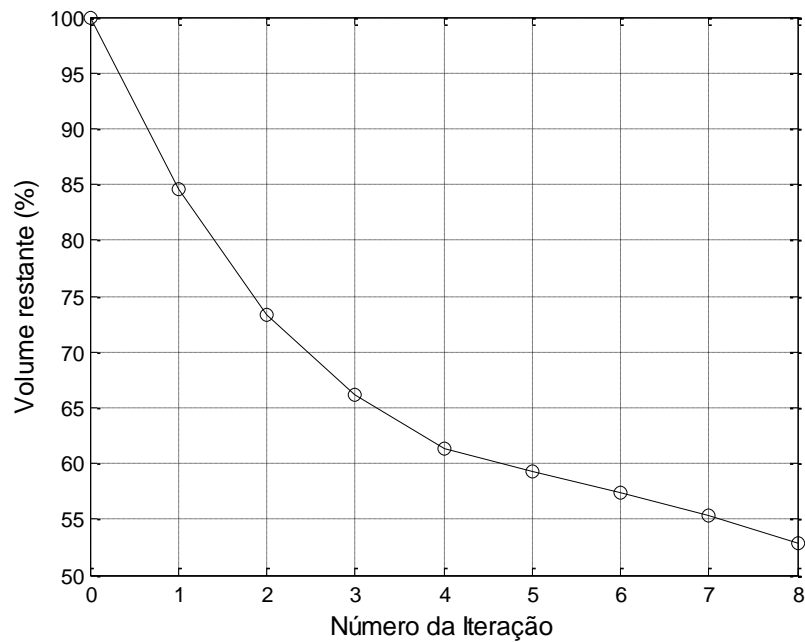


Figura 46 – Gráfico de volume restante versus o número de iterações para o Problema 5

## 6.6 ANÁLISE DOS PROBLEMAS 4 E 5

O Problema 4 e o Problema 5 tiveram suas dimensões retiradas de dois problemas de otimização inspirados do mesmo trabalho [16]. É esperado que as topologias apresentem pequenas diferenças, pois foram utilizados métodos numéricos distintos e métodos de otimização distintos (Método dos Elementos Finitos e Otimização Estrutural Evolucionária – ESO). Mesmo assim, foram obtidas topologias similares, que se comparam a arcos de circunferência com elementos radiais. A Figura 47 compara as topologias obtidas.

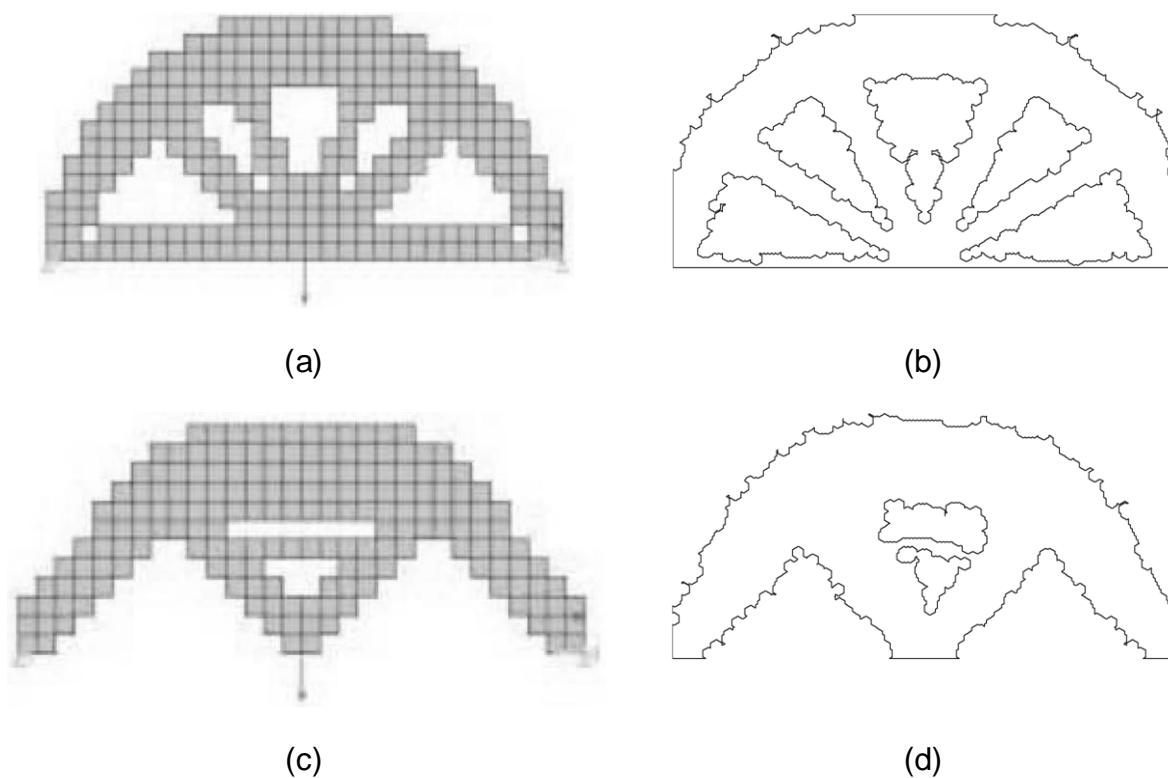


Figura 47 – Comparação de topologias: (a) Abolbashari e Keshavarzmanesh [16]; (b) Problema 4; (c) Abolbashari e Keshavarzmanesh [16]; (d) Problema 5 )

A Figura 48 mostra um gráfico comparando a evolução da remoção de material no Problema 4 e no Problema 5:

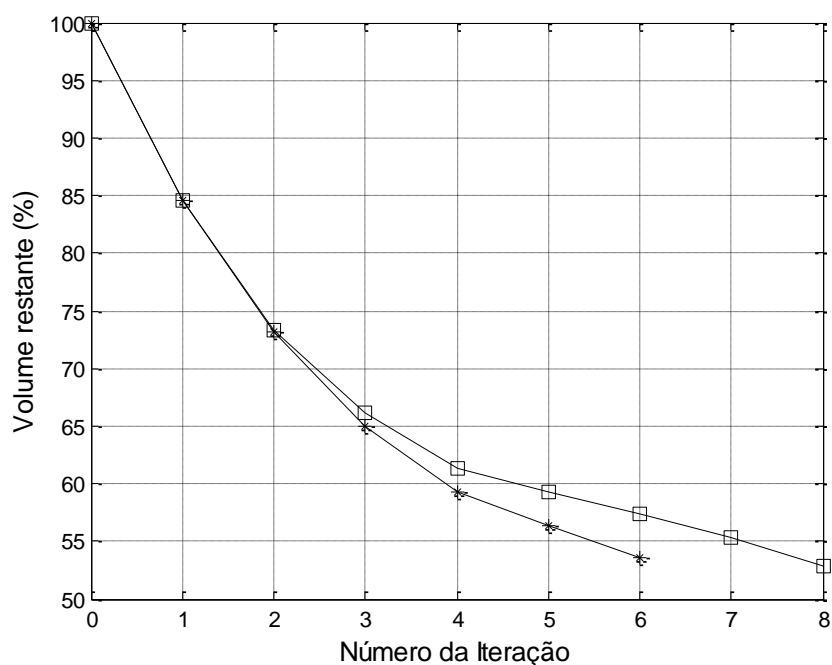
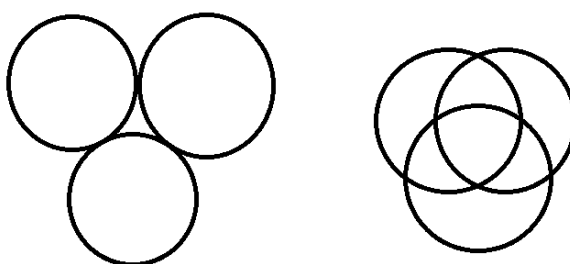


Figura 48 – Gráfico de volume restante versus iteração para o Problema 4 (pontos em asterisco) e para o Problema 5 (pontos em forma de quadrado)

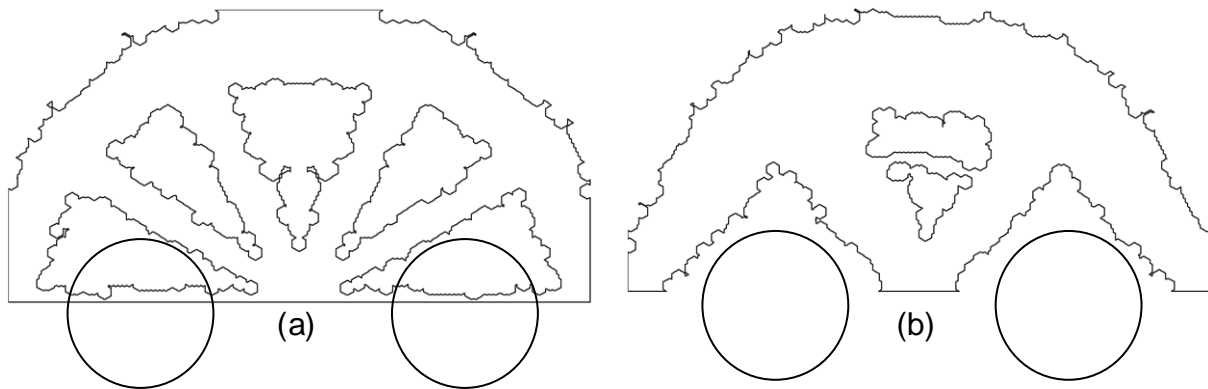


A diferença observada nas curvas da Figura 48 resulta do critério de remoção de material. Ambos os problemas começam com o mesmo número de pontos internos e foram ajustados para remover as mesmas porcentagens de furos disponíveis. Mesmo assim, estes furos pareciam estar mais concentrados no Problema 5 e mais distribuídos no Problema 4. Quanto mais próximos estão os furos removidos com áreas adjacentes em uma iteração, menor é a diminuição do volume total, como pode ser visto na Figura 49. Uma consequência disso é um número maior de iterações no Problema 5 para que alcançasse o mesmo volume final do Problema 4.



*Figura 49 – Realização de três furos, à esquerda de forma mais espaçada, e à direita de forma mais concentrada. Nota-se que, quanto mais próximos estão os furos, mais área é compartilhada entre os círculos, resultando em menos área total na realização dos furos*

A topologia final do Problema 5 se aproxima de estrutura treliçada, mas ficou distinta da topologia final do Problema 4. É necessário recordar que todas as condições em ambos os problemas são idênticas, exceto que, para o Problema 5, ambos os nós de apoio da base recebem condição de deslocamento nulo nas duas direções perpendiculares. Já no Problema 4 um desses dois nós é liberado para translação no eixo horizontal. A Figura 50 mostra ambas as topologias finais dos Problemas 4 e 5, que possuem aproximadamente o mesmo volume final (aproximadamente 54% do volume inicial).



*Figura 50 – Topologia final: (a) Problema 4; (b) Problema 5*

Na Figura 50, as principais diferenças entre as duas topologias finais dos Problemas 4 e 5 são ressaltadas pelos círculos. No Problema 4, a área assinalada sofre pequenas remoções de material, restando uma porção de material que é progressivamente diminuída, como se pode observar na Figura 41. Já no Problema 5, a mesma região assinalada é completamente removida logo nas primeiras iterações, como pode ser verificado na Figura 45. Logo, a diminuição dos deslocamentos horizontais neste problema acarretou com a diminuição dos valores de Derivada Topológica naquela região.

## **6.7 OTIMIZAÇÃO DE BRAÇO DE SUSPENSÃO AUTOMOTIVO**

Esta otimização difere das anteriores por se tratar de um problema inspirado em uma situação real. O componente a ser otimizado é o braço de suspensão traseiro do veículo Honda Civic EK4 (1996-2000). Este veículo é apresentado na Figura 51.



*Figura 51 – Honda Civic EK4 Vti*

Algumas especificações do carro aparecem listadas na Tabela 8 [23].

<b>Motor</b>	4 cilindros em linha; 1595cm <sup>3</sup> ; 16 válvulas
<b>Potência</b>	158hp a 7600rpm
<b>Torque</b>	15,3mkg a 7000rpm
<b>Transmissão</b>	Dianteira
<b>Câmbio</b>	manual de 5 marchas
<b>Peso</b>	1240kg (União Européia)

Tabela 8 - Características do carro que inspira a otimização de componente automotivo

### 6.7.1 - Obtenção Da Geometria Do Braço

Conseguiu-se uma unidade do braço de suspensão para retirar as dimensões do problema. Um braço de suspensão foi feito em CAD 3D através do programa Solidworks, utilizando a foto da peça e algumas dimensões retiradas diretamente. A Figura 52 e a Figura 53 mostram estas etapas do processo.

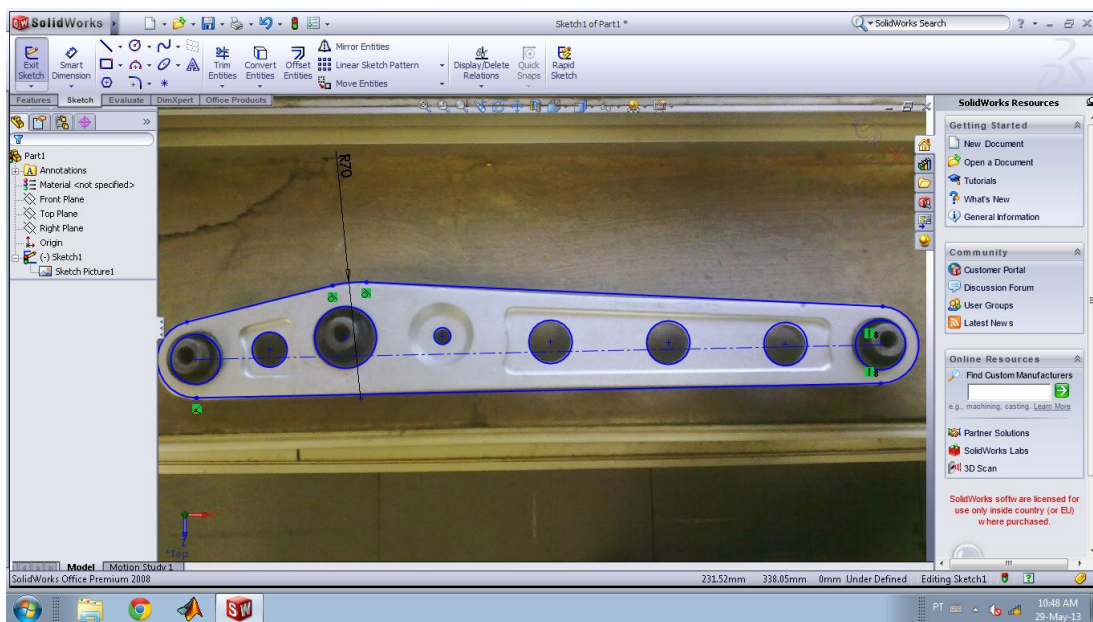
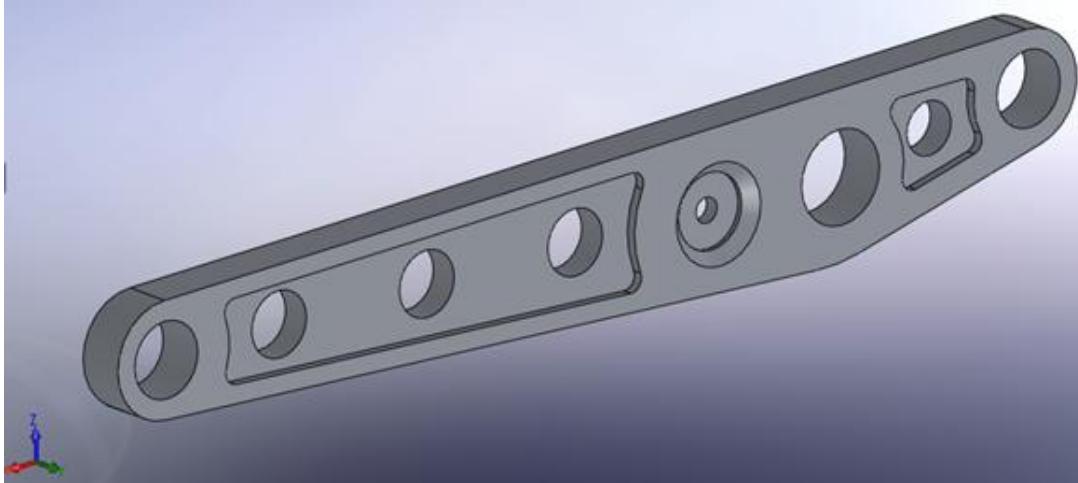
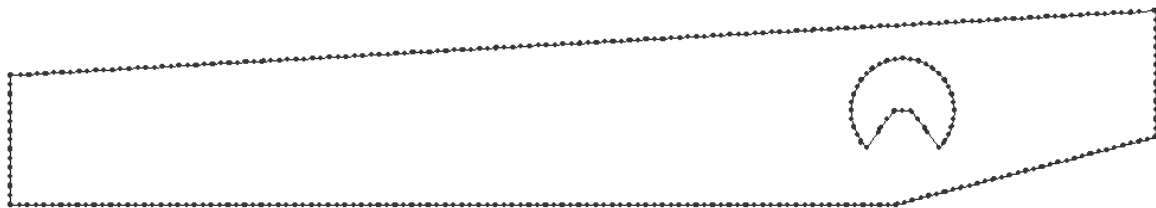


Figura 52 – Confeção de desenho CAD do braço de suspensão através do programa Solidworks



*Figura 53 – Vista isométrica de CAD 3D do braço de suspensão através do programa Solidworks para retirar dimensões para uso em MATLAB*

A confecção da peça em CAD foi utilizada para fazer a discretização da geometria no programa de otimização. A discretização pode ser visualizada na Figura 54.



*Figura 54 – Discretização do braço de suspensão em MATLAB*

### **6.7.2 - Definição Dos Carregamentos Do Braço (Condições De Contorno)**

As hipóteses consideradas para a otimização do braço de suspensão são as seguintes:

- 1) A peça comporta-se fundamentalmente de forma bidimensional, ou seja, carregamentos fora do plano são desprezados
- 2) O material da peça comporta-se sob o Estado Plano de Tensões
- 3) Os carregamentos desprezam a variação de ângulo do braço
- 4) O peso do veículo está dividido igualmente entre as quatro rodas
- 5) O ponto de fixação entre o braço e a carroceria foi considerado como sendo rígido, e o ponto de conexão entre o braço e o amortecedor teve deslocamento restringido na vertical

6) A barra estabilizadora foi desconsiderada. Outras versões do mesmo veículo utilizam o mesmo braço de suspensão sem a barra estabilizadora

7) A peça, como observado na Figura 53, possui furos em suas extremidades para colocação das buchas de suspensão. Uma vez que as paredes dos furos são finas nas extremidades, eram empregados vários elementos para representá-las, e a adição de furos não foi permitida nessas regiões, pois poderia provocar um rompimento da parede. Então, as extremidades foram simplificadas para economizar memória do computador, como mostra a Figura 54. O campo de derivada topológica não foi alterado significativamente com a simplificação

Para a determinação das forças atuantes no braço de suspensão traseiro, é necessário compreender a dinâmica do carro e as forças atuantes nas rodas traseiras. A melhor maneira para calcular as forças atuantes na roda é realizar uma simulação dinâmica do veículo em diversas situações, utilizando um programa adequado como, por exemplo, o MSC Adams.

Neste trabalho, será empregada uma metodologia proposta por Diniz [34], evitando a utilização de simulação dinâmica. Nesta teoria, os esforços dinâmicos aos quais é submetido o veículo são aproximadamente múltiplos dos esforços estáticos do mesmo. Dessa maneira,

$$F_d = cF_e$$

Na equação anterior,  $F_d$  é a força resultante dinâmica,  $c$  é um fator multiplicativo e  $F_e$  é a força estática, resultante do próprio peso do veículo. Assim, para cada situação simulada, o fator  $c$  recebe um valor específico.

Em outra bibliografia [29], com base em numerosos grupos de dados experimentais, os automóveis são submetidos a uma rugosidade correspondente ao trajeto que realiza durante seu ciclo de vida, que induz um carregamento dinâmico. Este carregamento é flutuante e possui um valor de amplitude máxima aproximadamente equivalente a duas vezes a carga estática do veículo.

Estima-se que um valor extremo para projeto para o fator  $c$  varia entre 3,0 e -1,0, logo possuindo o valor máximo de 3,0. Então, uma estimativa do valor extremo de  $F_d$  é, conforme a Equação [102].

$$F_d = 3F_e \tag{102}$$

Para o caso do Honda Civic VTi EK4,

$$F_d = 3.1240\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2 = 36493,2 \text{ N}$$

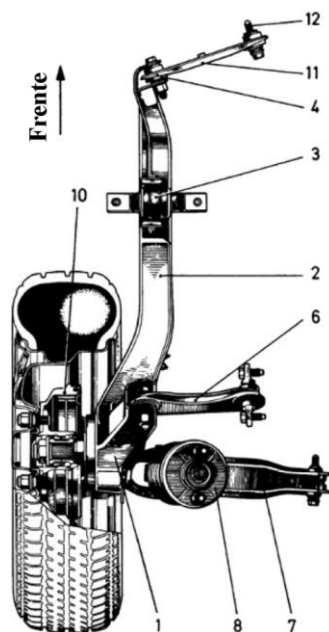
Neste trabalho, considerou-se uma distribuição de peso ideal entre rodas dianteiras e traseiras (50%/50%). Distribuindo-se o peso igualmente entre as duas rodas traseiras, estima-se que a força na roda traseira conforme a Equação (103):

$$F_{y\text{roda}} = \frac{1}{2} \cdot 50\% \cdot F_d = \frac{1}{2} \cdot 50\% \cdot 36493,2 \text{ N} = 9123,3 \text{ N} \quad (103)$$

Para simular uma situação ainda mais crítica, simula-se uma curva no carro com raio de 33,0 metros e velocidade de 80,0 km/h, ou 22,22 m/s. A força centrípeta resultante no eixo traseiro pode ser calculada.

$$F_{cp} = \frac{m_c \cdot V_c^2}{R} \cdot 50\% = \frac{1240 \cdot 22,22^2}{33} \cdot 50\% = 9276,11 \text{ N} = F_{x\text{roda}}$$

Em uma situação extrema, a roda traseira do lado contrário ao da curva pode não estar no asfalto, enquanto que a roda do lado da curva suporta toda a força centrípeta do eixo traseiro. Uma vez que se conhecem as forças na roda traseira, é necessário transferi-las para a suspensão. A suspensão traseira dos Honda Civic de sexta geração é do tipo *multilink*. com a presença de três braços articulados e um feixe, como na Figura 55. O amortecedor traseiro do Honda Civic está conectado ao braço inferior traseiro. O braço inferior traseiro pode ser melhor visualizado na Figura 56:



*Figura 55- Ilustração de um dos lados da suspensão traseira do Honda Civic de sexta geração – vista superior [1]. O braço inferior traseiro é a peça de número 7*



*Figura 56 - Foto da suspensão traseira do Honda Civic do sexta geração, onde é possível visualizar o braço inferior traseiro ao centro*

Desse modo, faz-se necessário separar os componentes da suspensão traseira para encontrar os esforços. Realiza-se o equilíbrio no conjunto roda-facão, conforme ilustrado na Figura 57.

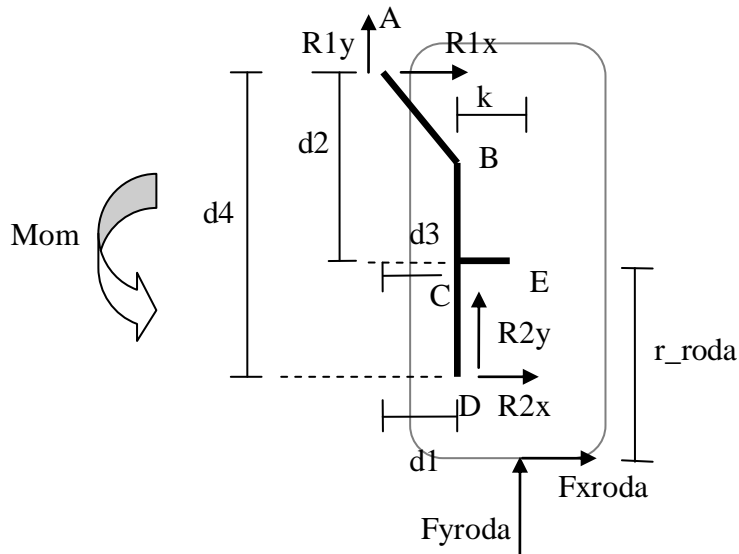


Figura 57 - Diagrama de corpo livre do facão traseiro do Honda Civic de sexta geração, visto a partir da traseira do veículo

Escrevem-se as equações de equilíbrio de forças no facão de acordo com as Equações (104) e (105).

$$\sum F_x = 0; R_{1x} + R_{2x} + F_{xroda} = 0 \quad (104)$$

$$\sum F_y = 0; R_{1y} + R_{2y} + F_{yroda} = 0 \quad (105)$$

Adiciona-se mais um dado no equilíbrio, que é o ângulo  $\theta$  da reação  $R_1$  do braço superior, que receberá valores futuros.

Dessa forma, reescrevem-se as equações de equilíbrio de forças no facão e isolam-se as componentes da reação no braço traseiro inferior conforme as Equações (106) e (107):

$$R_1 = \frac{-F_{xroda} - R_{2x}}{\cos \theta} \quad (106)$$

$$R_1 = \frac{-F_{yroda} - R_{2y}}{\sin \theta} \quad (107)$$

Realiza-se o equilíbrio de momentos no ponto C do facão, de acordo com a equação (108). Nota-se que aparece um momento aplicado devido à roda traseira.

$$\sum M_C = 0; F_{xroda} \cdot r_{roda} + F_{yroda} \cdot k - R_1 \cos \theta d_2 - R_1 \sin \theta d_3 + R_{2x} \cdot (d_4 - d_2) = 0 \quad (108)$$

$$R_1 \cos \theta d_2 + R_1 \sin \theta d_3 = F_{xroda} \cdot r_{roda} + F_{yroda} \cdot k + R_{2x} \cdot (d_4 - d_2)$$



$$R_1(\cos \theta d_2 + \sin \theta d_3) = F_{xroda} \cdot r_{roda} + F_{yroda} \cdot k + R_{2x} \cdot (d_4 - d_2)$$

$$R_1 = \frac{F_{xroda} \cdot r_{roda} + F_{yroda} \cdot k + R_{2x} \cdot (d_4 - d_2)}{\cos \theta d_2 + \sin \theta d_3} \quad (109)$$

Uma vez descoberto o módulo da força aplicada pelo braço superior, de acordo com Equação (109), é deduzida a fórmula para o cálculo das componentes vertical e horizontal da força no braço superior, como mostra a Equação (110) e (111):

$$R_{2x} = -R_1 \cos \theta - F_{xroda} \quad (110)$$

$$R_{2y} = -R_1 \sin \theta - F_{yroda} \quad (111)$$

Parte-se para as equações de equilíbrio no braço inferior, a partir da Figura 58:

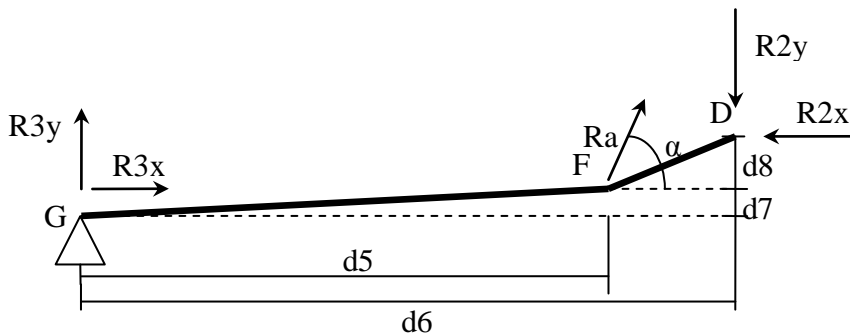


Figura 58 - Diagrama de corpo livre do braço inferior da suspensão do Civic

Aplica-se o equilíbrio de forças no braço inferior (Equações (112) e (113)):

$$\sum F_x = 0; R_{3x} - R_{2x} + R_a \cos \alpha = 0; R_{2x} = R_{3x} + R_a \cos \alpha \quad (112)$$

$$\sum F_y = 0; R_{3y} - R_{2y} + R_a \sin \alpha = 0; R_{2y} = R_{3y} + R_a \sin \alpha \quad (113)$$

Aplica-se o equilíbrio de momentos no braço inferior, conforme a Equação (114). A expressão da força aplicada pelo amortecedor é dada pela Equação (115):

$$\sum M_F = 0; R_a \sin \alpha d_5 - R_a \cos \alpha d_8 + R_{2x}(d_7 + d_8) - R_{2y}d_6 = 0 \quad (114)$$

$$R_a(\sin \alpha d_5 - \cos \alpha d_8) = -R_{2x}(d_7 + d_8) + R_{2y}d_6$$

$$R_a = \frac{-R_{2x}(d_7 + d_8) + R_{2y}d_6}{\sin \alpha d_5 - R_a \cos \alpha d_8} \quad (115)$$

Em seguida, as componentes da reação no ponto G podem ser encontradas na forma das Equações (116) e (117):

$$R_{3x} = R_a \cos \alpha - R_{2x} \quad (116)$$

$$R_{3y} = R_a \sin \alpha - R_{2y} \quad (117)$$

As equações para os carregamentos do braço de suspensão já estão definidas, entretanto deve-se observar que as forças deste problema mudam de acordo com o comportamento do veículo. Logo, é conveniente observar o comportamento das forças alterando-se o comportamento do veículo.

Estudaram-se três situações, para as quais as forças no braço inferior traseiro foram estimadas:

1) Aplicação das forças dinâmicas de rugosidade

Neste caso, a força aplicada às rodas deve-se somente pela ação da força máxima devido aos carregamentos dinâmicos devido à rugosidade da pista, estimada em três vezes o valor do peso estático do veículo, que corresponde a um carregamento vertical na roda traseira. Houve uma estimativa para os ângulos desconhecidos. O braço superior recebeu um ângulo positivo de 30 graus devido ao movimento da suspensão, enquanto que o ângulo do amortecedor foi fixado em 90 graus com a base do braço inferior. Os resultados encontram-se na Tabela 9.

Variável	Valor
Força horizontal na roda (F <sub>xroda</sub> )	0,0 N
Força vertical na roda (F <sub>yroda</sub> )	9123,3 N
Ângulo de inclinação do braço superior	30,0°
Componente horizontal da reação no braço superior (R <sub>1x</sub> )	2878,9 N
Componente vertical da reação no braço superior (R <sub>1y</sub> )	1662,1 N
Componente horizontal da reação no braço inferior (R <sub>2x</sub> )	-2878,9 N
Componente vertical da reação no braço inferior (R <sub>2y</sub> )	-10785 N
Ângulo de apoio do amortecedor no braço inferior	90°
Componente horizontal da força do amortecedor (R <sub>ax</sub> )	0,0N
Componente vertical da força do amortecedor (R <sub>ay</sub> )	-13630 N
Reação horizontal no suporte do braço inferior (R <sub>3x</sub> )	-2878,9 N
Reação vertical no suporte do braço inferior (R <sub>3y</sub> )	2844,7 N

Tabela 9- Resultados dos carregamentos na suspensão traseira - rugosidade da pista

A Figura 59 mostra um diagrama das forças aplicadas no facão e no braço inferior. O modelo simplificado das peças aparece em azul, enquanto que as forças aparecem em vermelho.

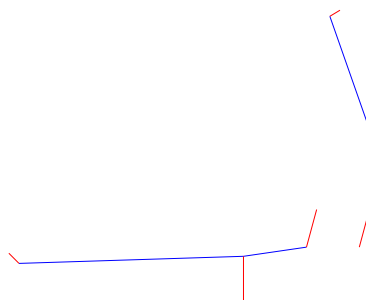


Figura 59 - Diagrama das forças na suspensão traseira - rugosidade da pista.

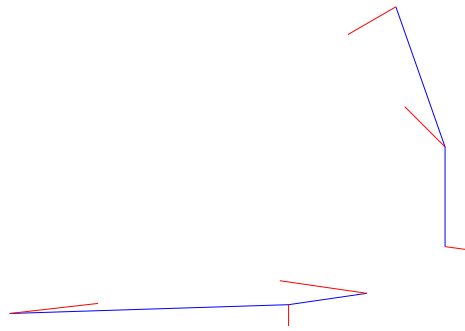
## 2) Curva para a esquerda

A força vertical do primeiro caso já é um valor extremo, porém não leva em conta a compensação das forças laterais que surgem quando o veículo faz curvas. Para tanto, aplicou-se a força horizontal equivalente à carga máxima das duas rodas traseiras em uma roda só, para o caso em que a roda do lado interno ao da curva levante da pista. A carga vertical devido à rugosidade foi mantida. As principais definições e resultados das cargas para este caso encontram-se na Tabela 10.

Variável	Valor
Força horizontal na roda ( $F_{xroda}$ )	-9276,11 N
Força vertical na roda ( $F_{yroda}$ )	9123,3 N
Ângulo de inclinação do braço superior	30,0°
Componente horizontal da reação no braço superior ( $R1x$ )	-10947 N
Componente vertical da reação no braço superior ( $R1y$ )	-6320,2 N
Componente horizontal da reação no braço inferior ( $R2x$ )	20223 N
Componente vertical da reação no braço inferior ( $R2y$ )	-2803,1 N
Ângulo de apoio do amortecedor no braço inferior	90°
Componente horizontal da força do amortecedor ( $Rax$ )	0,0N
Componente vertical da força do amortecedor ( $Ray$ )	-5081,6 N
Reação horizontal no suporte do braço inferior ( $R3x$ )	20223 N
Reação vertical no suporte do braço inferior ( $R3y$ )	2278,5 N

Tabela 10 - Resultados dos carregamentos na suspensão traseira - curva para a esquerda

Na Figura 60, é possível visualizar os vetores de forças no facão e no braço inferior traseiro.



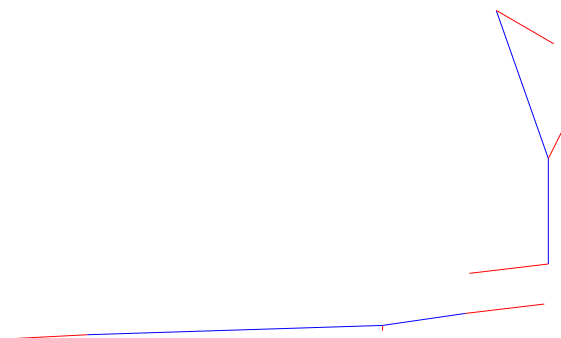
*Figura 60 - Diagrama de forças na suspensão traseira - curva para a esquerda*

### 3) Curva para a direita

O terceiro comportamento estudado foi a curva para a direita. Para tanto, aplicou-se na roda traseira, além da força vertical de rugosidade da pista, força horizontal para a esquerda. Como esta roda é a roda interna à curva neste caso, as forças tendem a ser menores pois há transferência de peso para a roda externa à curva. Então, a roda recebeu carregamento horizontal equivalente à metade da força centrípeta aplicada ao eixo traseiro. A carga vertical devido à rugosidade, que já se trata de um valor superestimado, foi mantida. O ângulo do braço superior foi estimado em 30 graus negativos, para simular o movimento da suspensão durante a curva. O ângulo do amortecedor com o braço traseiro foi conservado em 90 graus. Os resultados das forças na suspensão traseira podem ser verificados na Tabela 11. As forças no braço inferior e no facão podem ser visualizados em diagrama na Figura 61.

Variável	Valor
Força horizontal na roda ( $F_{xroda}$ )	4638,1 N
Força vertical na roda ( $F_{yroda}$ )	9123,3 N
Ângulo de inclinação do braço superior	-30,0°
Componente horizontal da reação no braço superior ( $R1x$ )	14349 N
Componente vertical da reação no braço superior ( $R1y$ )	-7174,5 N
Componente horizontal da reação no braço inferior ( $R2x$ )	-17065 N
Componente vertical da reação no braço inferior ( $R2y$ )	-1948,8 N
Ângulo de apoio do amortecedor no braço inferior	90°
Componente horizontal da força do amortecedor ( $Rax$ )	0,0N
Componente vertical da força do amortecedor ( $Ray$ )	-1248,5 N
Reação horizontal no suporte do braço inferior ( $R3x$ )	-17065 N
Reação vertical no suporte do braço inferior ( $R3y$ )	700,2 N

*Tabela 11 - Resultados dos carregamentos na suspensão traseira - curva para a direita*



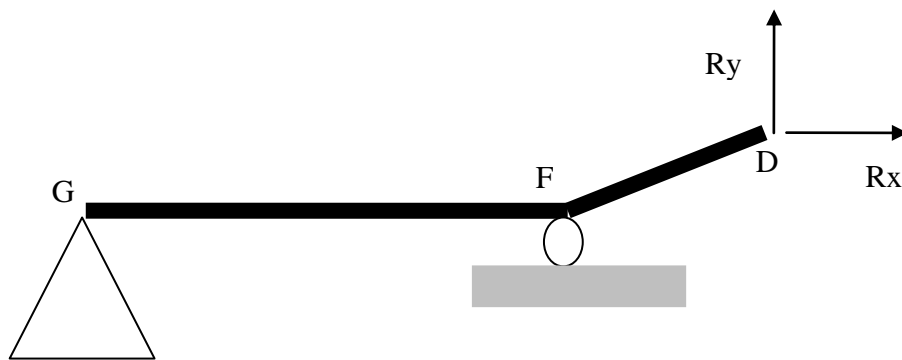
*Figura 61 - Diagrama de forças na suspensão traseira - curva para a direita*

É possível observar que a componente horizontal da força do braço inferior induzida pelo facão, segundo a Tabela 10 e a Tabela 11, apresenta sentidos que se invertem. Esses carregamentos opostos, além de provocar tração/compressão no braço inferior, provocam flexão por estarem descentralizadas em relação às juntas do braço. Se braço possuísse características de simetria, como no Problema 1, as formas ótimas também poderiam ser similares por serem simétricas. Entretanto, uma falta de simetria em flexão, como a simulação da metade da geometria do Problema 2 separada, tende a gerar topologias sem simetria. Desse modo, as formas ótimas poderiam ser bem diferentes para o braço inferior nestas situações.

Entretanto, observa-se que a componente vertical dessa força é positiva no braço inferior nos três casos. Adicionalmente, a força horizontal no caso em que somente a rugosidade da pista é considerada, possui um valor mais baixo em relação aos outros casos. Como os carregamentos devido às curvas são transitórios e o carregamento devido à rugosidade é mais presente na vida útil dos veículos e, lembrando os outros fatos enumerados anteriormente, o caso escolhido neste trabalho para propósitos de otimização estrutural é o caso 1) de rugosidade sem considerar as curvas. Note-se que, mesmo sem carregamentos laterais na roda, há forças horizontais no braço inferior devido ao tipo de suspensão traseira.

### 6.7.3 - Construção Do Problema De Otimização Do Braço De Suspensão

O braço de suspensão recebeu as restrições conforme a Figura 62:



*Figura 62- Restrições de deslocamento e forças de superfície no problema do braço de suspensão*

Na Figura 62, o vértice A corresponde à junção de parafuso entre o braço de suspensão e o chassi do carro, que foi aproximado para uma junção rotulada. O vértice B representa a junção entre a peça e o amortecedor traseiro, que é unida por parafuso. Considerando que o amortecedor impõe forças em ângulos praticamente verticais neste caso, a junção com o amortecedor foi aproximada para um apoio de rolete horizontal, permitindo a translação horizontal do ponto. O vértice C representa o ponto de aplicação dos carregamentos verticais e horizontais resultantes do conjunto roda-suspensão.

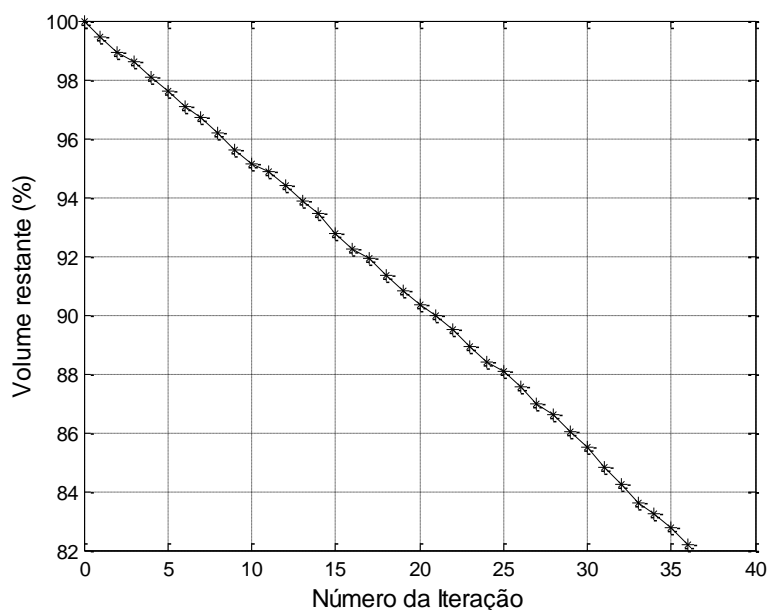
A otimização foi realizada de acordo com as propriedades listadas na Tabela 12. Para esta peça, foram utilizadas as propriedades do alumínio.

<b>Valor da força vertical</b>	10785 N
<b>Valor da força horizontal</b>	2878,9 N
<b>Diâmetro dos furos</b>	9,1 mm
<b>Módulo de Elasticidade (E)</b>	71000N/mm <sup>2</sup>
<b>Coefficiente de Poisson</b>	0,33
<b>Comportamento do material</b>	Estado Plano de Tensões
<b>Número inicial de elementos quadráticos utilizados</b>	170 elementos descontínuos
<b>Número de pontos de Gauss nas integrações</b>	10
<b>Número fixo de furos em cada iteração</b>	3
<b>Diâmetro dos furos</b>	9,1 mm

*Tabela 12- Principais constantes da otimização do braço de suspensão*

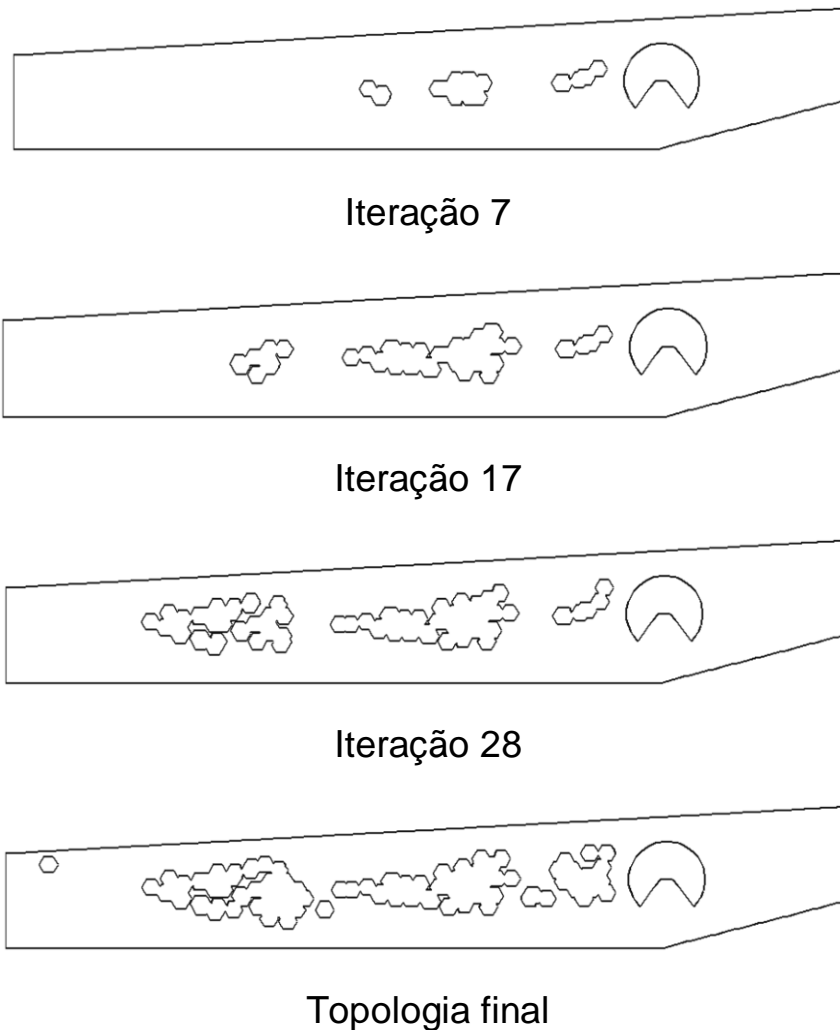
#### 6.7.4 - Resultados do Problema de Otimização do Braço de Suspensão

Foram realizadas 36 iterações do problema de otimização do braço, retirando-se um número fixo de três furos a cada iteração. A otimização utilizou um tempo total de 20 horas e 44 minutos. Houve uma redução de volume total de 17,8%. A Figura 63 mostra um gráfico da diminuição do volume ao longo das iterações. Nela, é possível observar que a retirada de volume assumiu um comportamento quase linear, devido ao número constante de furos de mesmo tamanho retirados em casa iteração.



*Figura 63 - Gráfico da redução de volume - braço de suspensão*

A evolução das topologias pode ser vista na Figura 64:



*Figura 64 - Evolução das topologias do problema do braço de suspensão*

Analisando-se as áreas subtraídas na Figura 64 durante o processo de otimização, nota-se que há uma tendência a retirar áreas próximas à linha horizontal central da peça, devido à flexão. A flexão induz formas com maior momento de inércia de área, então as regiões mais distantes do eixo de rotação, que são as regiões mais distantes do eixo horizontal, tendem a ser preservadas. Entretanto, a peça não possui eixos de simetria, e as regiões com furos não foram exatamente centrais. Outro fato que colabora com isso é a existência da força horizontal descentralizada que implica tração e flexão conjugadas.

Embora não haja resultados de literatura, o mesmo braço de suspensão do Civic possui diversas variações fabricadas para quem deseja personalizar seu veículo. O alívio da região central é amplamente empregado nessa peça, como se pode observar na Figura 65.





a)



b)



c)

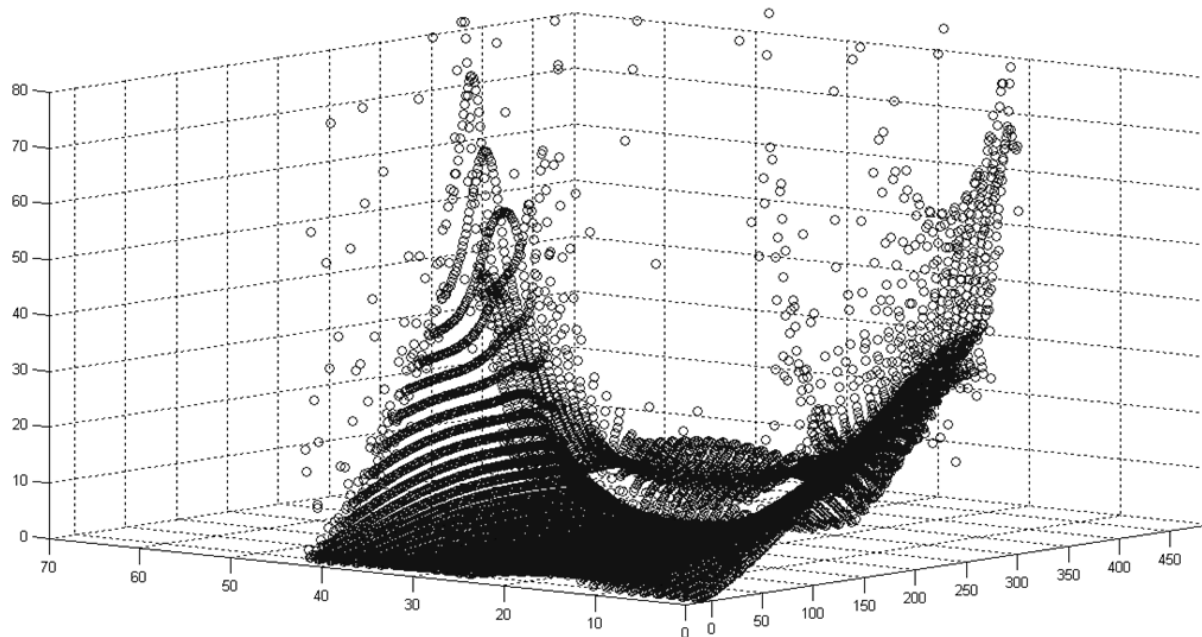


d)

Figura 65 – Imagens das variações dos braços de suspensão do Civic 1996-2000: a) Modelo original em chapa de aço [30]; b) Modelo com alívio em círculos [31]; c) Modelo com bordas espessas [32]; d) Modelo com alívio em treliça [33]

O grande diferencial da topologia obtida na Figura 64 é propor que os alívios de peso concentrem-se em áreas espaçadas ao longo da linha central e em formato de setas. É possível encontrar similaridade desta topologia final com a topologia final do Problema 1, com a repetição da estrutura central ao longo da linha horizontal.

Os valores da Derivada Topológica ( $D_T$ ) na primeira iteração da otimização foram plotados na Figura 66, observando-se o ponto D a partir do ponto G do braço. observa-se que a região da linha central horizontal corresponde a um “vale”, onde os valores de  $D_T$  já são baixos. Essa tendência justifica tanto a topologia final da Figura 64 quanto os modelos variados de braços da Figura 65.



*Figura 66- Derivada Topológica da primeira iteração da otimização do braço inferior traseiro do Civic; as coordenadas horizontais correspondem às dimensões bidimensionais do braço; a dimensão vertical corresponde ao valor da Derivada Topológica*

## 6.8 APRESENTAÇÃO DAS TOPOLOGIAS FINAIS

Em um problema de otimização, diversos parâmetros influenciam na forma final da topologia, pois estes afetam diretamente a sensibilidade do domínio. A Figura 67 apresenta a influência das condições de contorno na topologia final da peça analisada. É possível visualizar que, dependendo da condição de contorno imposta, a configuração geométrica muda significativamente. Obviamente, sempre haverá uma diferença de topologia final relacionada ao método de otimização empregado, à quantidade de material removido por iteração, entre outros parâmetros. No entanto, com base em trabalhos disponíveis na literatura, estas diferenças ocorrem, mas geralmente a forma final da estrutura resulta muito semelhante independentemente do método empregado.

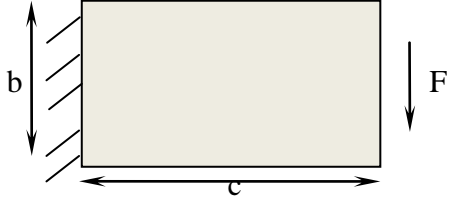
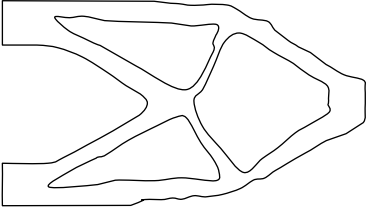
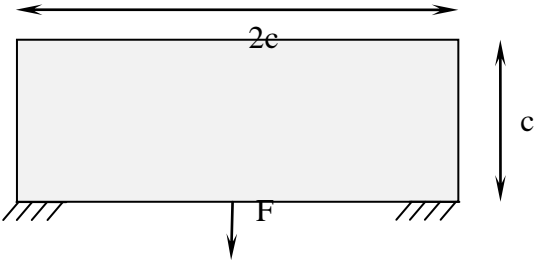
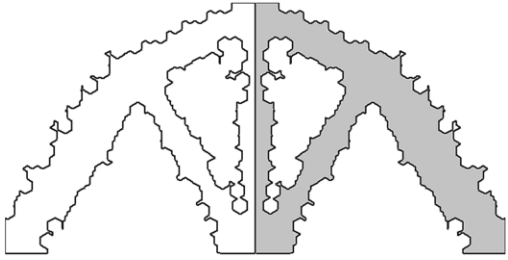
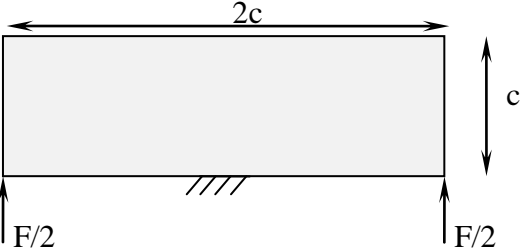
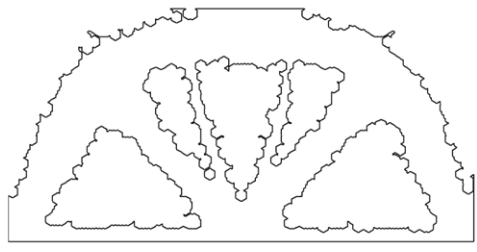
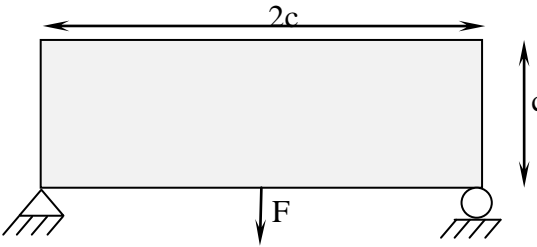
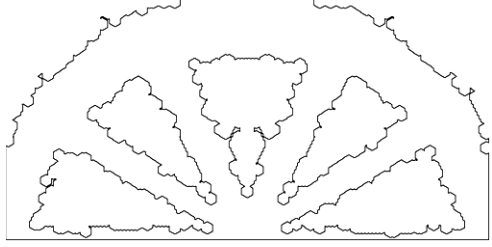
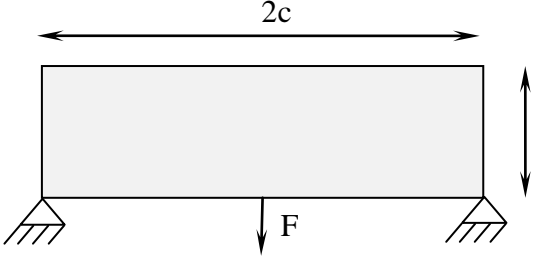
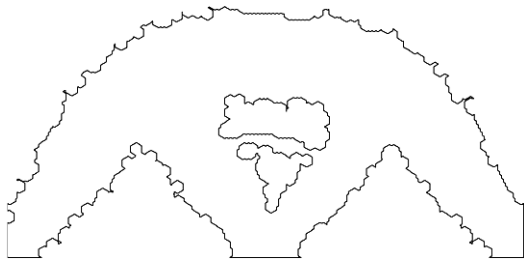
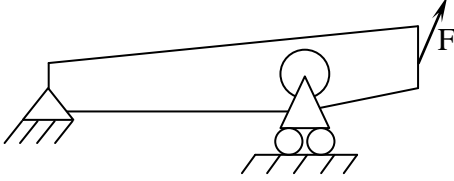
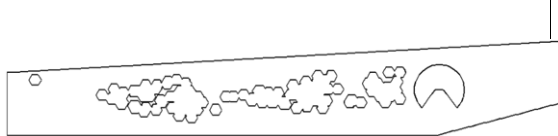
Tipo de Problema	Topologia ótima
<p>1</p> 	
<p>2</p> 	
<p>3</p> 	
<p>4</p> 	
<p>5</p> 	
<p>6</p> 	

Figura 67- Detalhe das topologias finais conforme condições de contorno

## 7 CONCLUSÕES

O presente estudo apresenta uma inovação na área do MEC voltado para problemas de elasticidade linear, pois utiliza elementos quadráticos descontínuos para rotinas de otimização iterativa através da Derivada Topológica. A sua eficácia pode ser comprovada pela obtenção de topologias similares com menor número de iterações no Problema 1 [6], assim como topologias condizentes com trabalhos anteriores nos Problemas 2, 3, 4 e 5 [16] e topologias que apresentam alguma similaridade com os componentes reais no problema de suspensão automotiva. O procedimento mostrou ser prático de ser implementado em problemas de natureza fundamentalmente bidimensionais em que as forças de corpo possam ser desprezadas em relação aos carregamentos do problema. Dificuldades foram encontradas na definição dos parâmetros de otimização, como a escolha no número de furos a ser realizado, os raios dos furos, a geração de malhas que evitem problemas de singularidade etc. Normalmente, um maior refinamento nos elementos e na geração dos pontos internos consegue gerar melhores resultados, até que o computador não possa processar esses dados.

A utilização de elementos quadráticos em problemas de otimização de MEC requer extrema atenção na programação dos códigos computacionais, devendo-se prezar pela economia de memória temporária do computador. As otimizações foram repetidas objetivando-se que os resultados fossem retirados de computadores de configuração acessível, provando que, mesmo com o alto esforço computacional gerado pela utilização de MEC com elementos quadráticos, é um procedimento viável. Para problemas mais refinados, entretanto, é recomendável utilizar computadores com maior capacidade de armazenamento temporário e processamento de dados.

A conversão do problema de elasticidade físico para problema discretizado em elementos de contorno exige atenção, principalmente na regularidade do tamanho dos elementos, na conversão das forças em um padrão equivalente de forças de superfície, como na tradução das restrições de apoio que permitem rotação. Esta última dificuldade foi superada invertendo-se os esforços no Problema 3, bem como aplicando as restrições de deslocamento no nó intermediário dos Problemas 4 e 5, em vez de aplicar no nó da extremidade.

O MEC mostrou-se eficiente e preciso no processo iterativo dos cálculos estruturais durante a otimização, possibilitando a obtenção de estruturas ótimas. Para que a otimização estrutural possa melhorar a sua viabilidade do ponto de vista de tempo computacional e ao mesmo tempo aumentar a sua precisão, recomendam-se para futuros trabalhos algumas sugestões:

- Acelerar a solução do sistema linear através de métodos como FMM;
- Implementar elementos de ordem superior;
- Adaptar o código para trabalhar com problemas em três dimensões;
- Desenvolver a expansão assintótica da derivada para outras funções-objetivos diferentes da energia potencial total;

A partir deste trabalho, foram geradas as seguintes publicações:

- 1) Teotônio, K.L.; Anflor, C. T. M. **Otimização de um problema de elasticidade bidimensional utilizando o Método dos Elementos de Contorno.** *IV Encontro de Ciência e Tecnologia da Faculdade UnB – Gama, Brazil* (2012)
- 2) Anflor, C. T. M. ; Teotônio, K. L. ; Albuquerque, E. L. . **A quadratic Boundary Implementation for Solving 2D Problems of Elasticity by Topology Optimization.** *Applied Mechanics and Materials*, v. 394, p. 554-559 (2013)
- 3) Teotônio, K. L. ; Anflor, C. T. M. ; Albuquerque, E. L. . **A quadratic implementation for 2D elasticity topology optimization using BEM.** *International Conference on Boundary Element Technique, 2013, Paris. Advances in Boundary Element & Meshless Techniques.* Eastleigh, Hampshire (UK): EC Ltd UK,. v. XIV. p. 270-274 (2013)
- 4) Teotônio, K. L. ; Anflor, C. T. M. ; Albuquerque, E. L. .**Structural Optimization of 2D Elasticity Problems Using the Boundary Element Method.** *XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Pirenópolis, Brazil (2013)

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Crolla, David .A (Ed.). **Automotive Engineering: Powertrain, Chassis System and Vehicle Body**, 1.ed. Amsterdam: Elsevier, (2009)
- [2] Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C. **Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering**, SpringerVerlag (1984)
- [3] Kane, James H. **Boundary element analysis in engineering continuum mechanics**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, (1994)
- [4] Shigley, J. E.; Mischke, C.R.; Budynas, R.G., **Projeto de Engenharia Mecânica**. 7. ed. Rio de Janeiro: Editora Bookman (2005)
- [5] Cheng, Alexander H.-D.; Cheng, Daisy T. **Heritage and early history of the boundary element method**. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29, pág. 258-302. Elsevier (2005)
- [6] Marczak, R J, **Optimization of elastic structures using boundary elements and a topological-shape sensitivity formulation**, *Latin American Journal of Solids and Structures* 5 99-117 (2008)
- [7] Katsikadelis, J, **Boundary Elements Theory and Applications**, Elsevier (2002)
- [8] Novotny, A. A. **Análise de Sensibilidade Topológica**, LNCC/MCT, D.Sc., Modelagem Computacional (2003)
- [9] Anflor, C. T. M., **Otimização evolucionária e topológica em problemas governados pela equação de poisson empregando o método dos elementos de contorno**, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2007).
- [10] Neches, L C; Cisilino, A. P., **Topology optimization of 2D elastic structures using boundary elements**, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 32, 533–544, (2008).
- [11] Xu, Changwen; Yu, Minghua, **Shape Otimization of Structures to Minimize Stress Concentration**, *Computers and Structures* Vol. 36 no.3 491-497. Pergamon Press, Great Britain (1990)

- [12] Tai, K.; Fenner, T., **Optimum shape and topology design using the boundary element method**, *International Journal of Solids and Structures* 36, 2021-2040, Pergamon Press (1999)
- [13] Canelas, A.; Herskovits, J.; Telles, J.C.F., **Shape optimization using the boundary element method and a SAND interior point algorithm for constrained optimization**, *Computers and Structures* 86, 1517-1526, Elsevier (2007)
- [14] Giusti, S. M.; **Análise de Sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas**, Tese de doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica (2009)
- [15] Yang, R.J.; **Component shape optimization using BEM**, *Components and Structures* Vol. 37 no. 4 pp, 561-568, Pergamon Press (1990)
- [16] Abolbashari, M. H.; Keshavarzmanesh, S., **On various aspects of application of the evolutionary structural optimization method for 2D and 3D continuum structures**, *Finite Elements in Analysis and Design* 42, 478-491, Elsevier (2006)
- [17] Du, Xiuli; Zhao, Mi, **A local time-domain transmitting boundary for simulating cylindrical elastic wave propagation in infinite media**, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30 (10), p.937-946, Elsevier (2010)
- [18] NETO, Álvaro Reá. **A aplicação do método científico no processo de solução de problemas clínicos**. Dissertação de Mestrado de Medicina Interna. Setor de Ciências da Saúde. Universidade Federal do Paraná (1994)
- [19] Bensøe, M.P. & Kikuchi, N. **Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a homogenization method**. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 71, p. 197-224, Elsevier, (1988)
- [20] Perelmuter, Anakoly & Yurchenko, Vitalina. **Parametric Optimization of Steel Shell Towers of High-Power Wind Turbines**. *Procedia Engineering* 57 p. 895-905 (2013)
- [21] Kamiya, N & Kita, E. **Boundary Element Method for Quasi-Harmonic Differential Equation with Application to Stress Analysis and Shape Optimization of Helical Spring**. *Computers & Structures*, 37, vol.1 p. 81-86 (1990)



- [22] Disponível em: <<http://www.mechanicalengineeringblog.com/wp-content/uploads/2011/04/01-Finite-element-analysis-gear-meshing-analysis-of-gear-meshing-Find-gear-force-find-power-tran.jpg>> Acesso em: 16/01/14
- [23] Disponível em: <<http://www.zeperfs.com/en/fiche3138-honda-civic-1-6-vti-ek4.htm>> Acesso em: 16/01/14
- [24] Disponível em: <<http://www.dicio.com.br/otimizar/>> Acesso em:12/05/13
- [25] Sathiya, P., Ajith, P. M. & Soundararajan, R. **Genetic algorithm based optimization of the process parameters for gas metal arc welding of AISI 904 L stainless steel.** *Journal of Mechanical Science and Technology* 27 (8), p.2457-2465 (2013)
- [26] Kurtaran, H. & Erzurumlu, T. **Efficient warpage optimization of thin shell plastic parts using response surface methodology and genetic algorithm.** *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 27, p.468-472 (2006)
- [27] Xie, C., Quan, S. & Chen, Q. **Control Strategy of Hybrid Power System for Fuel Cell Electric Vehicle based on Neural Network Optimization.** *International Conference on Automation and Logistics* (2008)
- [28] Sonmez, M. **Discrete optimum design of truss structures using artificial bee colony algorithm.** *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43, p. 85-97 (2011)
- [29] Kamal, Mounir M.; Wolf Jr, Joseph A.(Eds.). **Modern automotive structural analysis.** New York: Van Nostrand Reinhold Company (1982).
- [30] Disponível em: <[http://jdmengineland.com/images/CONTROLARMS/EKEL-LCA%20\(Small\).jpg](http://jdmengineland.com/images/CONTROLARMS/EKEL-LCA%20(Small).jpg)>. Acesso em: 27/02/14.
- [31] Disponível em: <[http://i00.i.aliimg.com/photo/v1/335824662/Rear\\_Lower\\_Control\\_Arm\\_for\\_Honda\\_96.jpg](http://i00.i.aliimg.com/photo/v1/335824662/Rear_Lower_Control_Arm_for_Honda_96.jpg)>. Acesso em: 27/02/14.
- [32] Disponível em: <[http://www.hardrace.com/images/product/pro\\_200706081102360.JPG](http://www.hardrace.com/images/product/pro_200706081102360.JPG)>. Acesso em: 27/02/14.
- [33] Disponível em: <[http://www.function7.com/f7images/eklca-sp/images/img\\_0877.jpg](http://www.function7.com/f7images/eklca-sp/images/img_0877.jpg)>. Acesso em: 27/02/14.

- [34] Diniz, P. M. W. dos S. **Optimização de juntas de perfis de alumínio para uma estrutura automóvel.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade do Porto, Porto (1996)
- [35] Müller, K & Brown, L. D. **Location of saddle points and minimum energy paths by a constrained simplex optimization procedure.** *Theoretica Chimica Acta* vol. 53, p.75-93 (1979).