



Universidade de Brasília

FACULDADE DE ADMINISTRAÇÃO, ECONOMIA E CONTABILIDADE - FACE  
CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM ECONOMIA E FINANÇAS – CIEF  
MESTRADO PROFISSIONAL EM GESTÃO DE NEGÓCIOS

GILBERTO TADEU STANZIONE

**Composição Ótima da Dívida Pública:** Um Mecanismo para Subsidiar a Escolha do  
Portfólio Ideal de Longo Prazo

Brasília  
2013

***Dedicatória...***

*À minha querida Harumi, com muito amor, em retribuição a todo apoio, carinho e inspiração de que você vem sendo fonte para mim, não só ao longo da elaboração deste trabalho, mas desde que iniciamos a nossa caminhada juntos.*

### *Agradecimentos...*

*A toda a equipe da Subsecretaria da Dívida Pública do Tesouro Nacional. Em especial, a Luiz Fernando Alves e Pedro Ivo Ferreira de Souza Júnior, que tanto me ajudaram durante a confecção deste estudo, sendo eles hoje os principais responsáveis pela utilização e desenvolvimento do modelo que balizou a maior parte desta dissertação.*

*Aos professores do Mestrado Profissional em Regulação e Gestão de Negócios da Universidade de Brasília, por ajudarem a construir os alicerces dos conhecimentos necessários à realização desta obra. Em especial, ao professor Maurício Bugarin pela seriedade e paciência com que sempre me tratou durante o processo de orientação.*

*Aos meus pais e avós (in memoriam), por todo o amor e por todos os sacrifícios que sempre fizeram em meu benefício e aos meus filhos, por constantemente me contagiarem com sua alegria de viver e serem a principal motivação para que eu busque algo de melhor em mim mesmo.*

## Aviso

Grande parte deste trabalho é baseada em um modelo desenvolvido e publicado pela Secretaria do Tesouro Nacional (STN) para determinação da composição ótima da Dívida Pública Federal Brasileira (Composição Ótima da Dívida Pública Federal: Definição de uma Referência de Longo Prazo, 2011), mas os resultados não são de modo algum de responsabilidade da instituição. Ressalte-se que o modelo da STN é bastante amplo, permitindo aplicações variadas, dentre as quais foram testadas diversas alternativas e feitas escolhas, que não necessariamente coincidem com aquelas testadas e escolhidas pela referida instituição. Dito de outra forma, o trabalho apresenta uma variação dos procedimentos adotados pela STN, ele não faz uso sistemático dos mesmos, de forma que seu produto final é único e de responsabilidade exclusiva do seu autor.

É preciso esclarecer ainda que esse produto decorre de uma visão bastante particular do que seriam alguns parâmetros de longo prazo de variáveis econômico-financeiras representativas da economia brasileira, tais como câmbio, inflação e taxas de juros. Visão esta, construída através da experiência do autor e de um ferramental relativamente simples, sendo que atualmente estão disponíveis técnicas bem mais sofisticadas para tal finalidade.

Por fim, é necessário chamar a atenção para as limitações do próprio modelo. Por ser fundamentalmente um algoritmo de simulação microeconômica, diversas questões de cunho macroeconômico escapam ao controle do mesmo. Esse é o caso, por exemplo, da influência da composição da Dívida Pública Federal na condução das políticas monetária e cambial da nação, questões estas que são de fundamental importância no contexto da gestão macroeconômica do país. Mesmo do ponto de vista exclusivamente microeconômico, há ressalvas a serem feitas. É o caso, por exemplo, das curvas de juros de longo prazo utilizadas pelo modelo. Tais curvas são tratadas como variáveis exógenas dentro do arcabouço de simulação apresentado, ou seja, uma vez determinadas, as curvas de juros serão sempre as mesmas, independentemente do volume de colocação em mercado dos títulos prescritos quando do resultado final das nossas simulações. Sabe-se, no entanto, que o mercado penaliza emissões de títulos em níveis muito baixos ou muito elevados ante a demanda dos mesmos, ou seja, preços são variáveis endógenas por natureza.

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo reunir parte do conhecimento gerado no Brasil e no resto do mundo acerca de modelos utilizados para a determinação da composição ótima da dívida pública. Ele traz também uma aplicação livre do modelo desenvolvido e publicado pela Secretaria do Tesouro Nacional para tal finalidade. Busca-se em primeiro lugar pela Fronteira Eficiente da relação risco-custo da Dívida Líquida do Setor Público (DLSP), gerada a partir de diferentes possibilidades de carteiras de títulos públicos no estoque da Dívida Pública Federal (DPF). Essa Fronteira é, então, submetida a restrições, que endereçam preocupações diversas da volatilidade da DLSP, medida primária de risco do modelo. Por fim, define-se uma Função de Utilidade para o setor público que permite solucionar o tradicional problema microeconômico da maximização restrita da utilidade, em que a Fronteira Eficiente assume o papel de restrição orçamentária. Os resultados mostram uma Fronteira Eficiente com uma presença significativa de todos os tipos de títulos (prefixados, indexados à inflação, cambiais e indexados à taxa SELIC), mas os títulos cambiais e indexados à taxa SELIC tem uma presença mais uniforme ao longo de toda a Fronteira, enquanto os outros dois estão ausentes das carteiras de maior risco dessa Fronteira. Isso acontece por causa dos custos médios significativamente mais baixos apresentados pelo primeiro grupo em relação ao segundo. Contudo, os títulos cambiais apresentam uma volatilidade de uma ordem de grandeza diferente e mais elevada que a dos demais e, desta forma, sobressaem-se no produto final deste trabalho, os títulos públicos indexados à taxa SELIC.

**Palavras-chave:** Dívida, Estratégia, Custo, Risco, Composição, Portfólio.

## **Abstract**

This work paper has the goal of gathering part of the knowledge produced in Brazil and in the rest of the world about models to establish the optimal composition of the public debt. Also, it brings to the reader a free application of the model developed and published by the Brazilian National Treasury to achieve this objective. First of all, there is a search for the Efficient Frontier of the cost-risk relationship of the Public Sector Net Debt (PSND) produced by different possibilities of sovereign bond portfolios in the Federal Public Debt (FPD) outstanding. Then, this frontier is put under constraints that address different concerns from our initial one, namely, PSND volatility, the model primary risk measure. Finally, we define a Utility Function for the public sector, which will allow us to solve the traditional microeconomic problem of constrained utility maximization, in which the Efficient Frontier is our budget constraint. The results show an Efficient Frontier with a meaningful presence of all kinds of bonds (nominal ones, foreign currency ones, inflation and basic interest rates – SELIC – linked ones), but the currency ones and the SELIC linked ones are present all over the Frontier, whereas the other two bonds are absent of the riskier portfolios along this Frontier. That happens because the first group has meaningfully lower average costs than the second one. However, the currency bonds show a volatility that is many times larger than the other ones and, this way, the SELIC linked ones stand out against the others in the final product of this work paper.

**Keywords:** Debt, Strategy, Cost, Risk, Composition, Portfolio.

## Índice Analítico

Seção 1 – Introdução.....	7
Seção 2 – Modelos de Equações de Finanças .....	11
2.1 – Modelos Vasicek, CIR e CKLS .....	11
2.2 – Movimento Geométrico Browniano .....	15
2.3 – O Modelo Nelson-Siegel Reinterpretado por Diebold-Li.....	16
2.4 – Decomposição de Cholesky .....	18
Seção 3 – Alguns Princípios Gerais sobre Gerenciamento de Dívida Pública .....	21
Seção 4 – Experiência Internacional na Composição Ótima da Dívida Pública .....	24
4.1 – Dinamarca .....	26
4.2 – Suécia.....	27
4.3 – Turquia.....	30
4.4 – Reino Unido .....	34
4.5 – Canadá .....	37
Seção 5 – Variáveis de Controle para o Risco da Dívida Pública .....	42
Seção 6 - O Modelo Brasileiro de Composição Ótima da Dívida Pública Federal .....	45
6.1 – A Dinâmica da Dívida Líquida do Setor Público Brasileiro.....	46
6.2 – Estrutura do Modelo .....	51
6.3 – O <i>Steady State</i> (Estado Estacionário) .....	54
6.4 – Consistência Macroeconômica .....	55
6.5 – Sub-Modelos .....	56
6.5.1 – As Curvas de Juros e a Taxa Básica da Economia (SELIC).....	56
6.5.2 – Inflação .....	60
6.5.3 – LIBOR de 6 Meses.....	61
6.5.4 – TJLP.....	62
6.5.5 – Câmbio Real.....	63

6.5.6 – Produto Interno Bruto Real (PIB Real).....	64
6.5.7 – A Matriz de Correlações .....	64
6. 6 – Resultados e Sensibilidade do Modelo .....	66
6.6.1 – Simulação com Dados Históricos (2005:2013) .....	66
6.6.2 – Simulação com Dados Históricos (2008:2013) .....	68
6.6.3 – Uma Visão Livre de Longo Prazo .....	69
6.6.4 – Uma Solução de Compromisso.....	73
6.6.5 – Conclusões Iniciais .....	74
6.7 – Restrições à Fronteira Eficiente .....	76
6.8 – Evolução Recente da Dívida Pública Federal .....	81
6.9 – Função de Utilidade .....	82
Seção 7 – Conclusões.....	85
7.1 Sugestões de Pesquisa.....	86
Referências Bibliográficas .....	88
Apêndices - Resultados de Simulações.....	91
Simulação 1.....	91
Simulação 2.....	94
Simulação 3.....	97
Simulação 4.....	100
Simulação 5.....	103
Simulação 6.....	106
Simulação 7.....	109
Simulação 8.....	112
Simulação 9.....	115
Simulação 10.....	118

## Índice de Figuras

Figura 1 – Fluxograma da Estrutura Básica dos Modelos de Estratégia para Dívida Pública.	25
Figura 2 – Fronteira Eficiente .....	45
Figura 3 – Fronteira Eficiente Restrita.....	46
Figura 4 - Diagrama Esquemático do Modelo Brasileiro .....	51
Figura 5 – Curvas de Juros de Longo Prazo – 2005:2013 .....	58
Figura 6 – Curvas de Juros de Longo Prazo – 2008:2013 .....	59
Figura 7 – Carteiras na Fronteira Eficiente Irrestrita .....	76
Figura 8 – Deslocamento da Fronteira Eficiente – Restrição no Câmbio.....	77
Figura 9 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (15% de Cambial) .....	77
Figura 10 – Deslocamento da Fronteira Eficiente – Restrição de Prazo Médio .....	78
Figura 11 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (3,5 Anos de Prazo Médio) .....	78
Figura 12 – Deslocamento da Fronteira Eficiente – Restr. de % Vincendo em 12 Meses .....	79
Figura 13 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (30% de % Vincendo em 12 Meses)....	80
Figura 14 – Deslocamentos da Fronteira Eficiente e Carteiras DPF .....	80
Figura 15 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (Todas as Restrições).....	81
Figura 16 – Processo de Maximização de Utilidade do Gestor de Dívida .....	84
Figura 17 – Curvas de Juros – Simulação 1 .....	91
Figura 18 – Fronteira Eficiente – Simulação 1 .....	92
Figura 19 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 1 .....	92
Figura 20 – Curvas de Juros – Simulação 2.....	94
Figura 21 – Fronteira Eficiente – Simulação 2 .....	95
Figura 22 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 2 .....	95
Figura 23 – Curvas de Juros – Simulação 3.....	97
Figura 24 – Fronteira Eficiente – Simulação 3 .....	98
Figura 25 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 3 .....	98
Figura 26 – Curvas de Juros – Simulação 4.....	100
Figura 27 – Fronteira Eficiente – Simulação 4 .....	101
Figura 28 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 4 .....	101
Figura 29 – Curvas de Juros – Simulação 5.....	103
Figura 30 – Fronteira Eficiente – Simulação 5 .....	104
Figura 31 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 5 .....	104

Figura 32 – Curvas de Juros – Simulação 6.....	106
Figura 33 – Fronteira Eficiente – Simulação 6 .....	107
Figura 34 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 6 .....	107
Figura 35 – Curvas de Juros – Simulação 7.....	109
Figura 36 – Fronteira Eficiente – Simulação 7 .....	110
Figura 37 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 7 .....	110
Figura 38 – Curvas de Juros – Simulação 8.....	112
Figura 39 – Fronteira Eficiente – Simulação 8 .....	113
Figura 40 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 8 .....	113
Figura 41 – Curvas de Juros – Simulação 9.....	115
Figura 42 – Fronteira Eficiente – Simulação 9 .....	116
Figura 43 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 9 .....	116
Figura 44 – Curvas de Juros – Simulação 10.....	118
Figura 45 – Fronteira Eficiente – Simulação 10 .....	119
Figura 46 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 10 .....	119

Importante: Todas as figuras exibidas neste trabalho são de elaboração própria.

## Índice de Tabelas

Tabela 1 – Taxas Nominais – 2005:2013 .....	57
Tabela 2 – Taxas Reais – 2005:2013 .....	57
Tabela 3 – Taxas Cambiais – 2005:2013 .....	58
Tabela 4 – Taxas Nominais – 2008:2013 .....	58
Tabela 5 – Taxas Reais – 2008:2013 .....	59
Tabela 6 – Taxas Cambiais – 2008:2013 .....	59
Tabela 9 – Inflação – 2005:2013 .....	61
Tabela 10 – LIBOR – 2005:2013.....	62
Tabela 11 – TJLP – 2005:2013 .....	63
Tabela 12 – Câmbio Real – 2005:2013.....	63
Tabela 13 – Produto Interno Bruto – 2005:2013 .....	64
Tabela 14 – Matriz de Correlação dos Resíduos – 2005:2013 .....	65
Tabela 15 – Parâmetros da Simulação 1 .....	91
Tabela 16 – Variáveis Observadas – Simulação 1 .....	93
Tabela 17 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) - Simulação 1 .....	93
Tabela 18 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 1 .....	93
Tabela 19 – Parâmetros da Simulação 2 .....	94
Tabela 20 – Variáveis Observadas – Simulação 2.....	96
Tabela 21 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 2 .....	96
Tabela 22 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 2 .....	96
Tabela 23 – Parâmetros da Simulação 3 .....	97
Tabela 24 – Variáveis Observadas – Simulação 3 .....	99
Tabela 25 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 3 .....	99
Tabela 26 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 3 .....	99
Tabela 27 – Parâmetros da Simulação 4 .....	100
Tabela 28 – Variáveis Observadas – Simulação 4.....	102
Tabela 29 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 4 .....	102
Tabela 30 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 4.....	102
Tabela 31 – Parâmetros da Simulação 5 .....	103
Tabela 32 – Variáveis Observadas – Simulação 5.....	105
Tabela 33 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 5 .....	105

Tabela 34 – Taxas Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 5.....	105
Tabela 35 – Parâmetros da Simulação 6 .....	106
Tabela 36 – Variáveis Observadas – Simulação 6.....	108
Tabela 37 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 6 .....	108
Tabela 38 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 6 .....	108
Tabela 39 – Parâmetros da Simulação 7 .....	109
Tabela 40 – Variáveis Observadas – Simulação 7 .....	111
Tabela 41 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 7 .....	111
Tabela 42 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 7 .....	111
Tabela 43 – Parâmetros da Simulação 8 .....	112
Tabela 44 – Variáveis Observadas – Simulação 8.....	114
Tabela 45 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 8 .....	114
Tabela 46 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 8 .....	114
Tabela 47 – Parâmetros da Simulação 9 .....	115
Tabela 48 – Variáveis Observadas – Simulação 9.....	117
Tabela 49 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 9 .....	117
Tabela 50 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 9 .....	117
Tabela 51 – Parâmetros da Simulação 10 .....	118
Tabela 52 – Variáveis Observadas – Simulação 10.....	120
Tabela 53 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 10 .....	120
Tabela 54 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 10 .....	120

Importante: Todas as tabelas apresentadas neste trabalho são de elaboração própria.

## Seção 1 – Introdução

A Secretaria do Tesouro Nacional (STN), enquanto órgão responsável pelo gerenciamento da Dívida Pública Federal (DPF) no Brasil, necessita definir parâmetros estruturais que orientem suas emissões de passivos no dia-a-dia. Dentre esses parâmetros, destaca-se a composição ótima da DPF, que nada mais é do que a sua estrutura ideal de longo prazo, em termos de prazos e de indexadores.

A dívida pública está dividida em contratual<sup>1</sup> e mobiliária<sup>2</sup>, mas focaremos na dívida mobiliária, dada sua larga preponderância no contexto geral da DPF. Dentro desta forma de emissão, destacam-se duas modalidades básicas de títulos públicos emitidos pela STN: a modalidade prefixada ou nominal, na qual o custo final para o emissor é determinado quando da colocação do título em mercado e a modalidade pós-fixada, na qual é definido de início um custo básico, ou rendimento básico do ponto de vista do investidor, ao qual é acrescida a variação de um determinado indexador desde o momento da emissão do papel até o seu vencimento. Hoje, os títulos pós-fixados emitidos pelo Tesouro são indexados ao IPCA<sup>3</sup> (inflação), à taxa SELIC (taxa básica da economia) ou a variação cambial (basicamente em relação ao dólar)<sup>4</sup>.

Além do tipo de indexador, dois outros atributos definem um título público: o fluxo de caixa e vencimento. Enquanto alguns títulos pagam a totalidade do passivo que representam no vencimento do papel, como é o caso Letras do Tesouro Nacional (títulos prefixados) e das Letras Financeiras do Tesouro (títulos indexados à taxa SELIC), as Notas do Tesouro Nacional (títulos que podem ser prefixados<sup>5</sup> ou indexados ao IPCA<sup>6</sup>) e os chamados *Globals* (títulos emitidos no mercado externo que podem ser prefixados em dólares ou reais) se caracterizam pelo pagamento dos chamados “cupons de juros” a cada semestre. Os vencimentos dos títulos, por sua vez, são variados, mas seguem uma dinâmica de *benchmarks*, isto é, um conjunto estável de prazos aproximados de emissão, por exemplo: um, dois, cinco, dez, vinte e trinta anos.

Uma vez definidas as características básicas dos títulos, resta agora saber quais as participações a serem perseguidas no longo prazo para cada um deles, ainda que de maneira

---

<sup>1</sup> Contraída junto a organismos multilaterais e bancos, geralmente de fomento.

<sup>2</sup> Dívida colocada sobre a forma de títulos livremente negociáveis em mercado.

<sup>3</sup> Índice de Preços ao Consumidor Amplo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

<sup>4</sup> De fato, trata-se de títulos prefixados denominados em moeda estrangeira.

<sup>5</sup> Notas do Tesouro Nacional série F.

<sup>6</sup> Notas do Tesouro Nacional série B.

estilizada, no total da DPF, de modo a se minimizar os riscos e os custos associados à emissão desse passivo mobiliário. Este é o nosso problema básico.

No passado, já houve momentos em que o gestor de dívida pública brasileiro não gozava de liberdade para escolher os tipos ou prazos dos títulos que colocava em mercado, dada a necessidade premente de rolagem da dívida pública como condição de solvência para o país. Ele estava quase que completamente submetido às demandas do mercado, que nem sempre coadunam com as da nação. Atualmente, a partir do desenvolvimento do país na área fiscal, esse paradigma mudou e o gestor de dívida pública conta com um grau de liberdade maior na condução do seu trabalho.

Seguramente ainda existem restrições a serem obedecidas pelo emissor de dívida soberana, mas hoje elas se reduziram significativamente em relação ao que já foram num passado não tão longínquo. Prova disso, são os avanços recentes na composição da DPF como, por exemplo, o aumento generalizado de prazos dos títulos públicos emitidos e a redução também substancial do percentual de títulos indexados à variação cambial no total da DPF. Títulos estes, cuja participação na DPF em níveis elevados é desaconselhada por organismos multilaterais, tais como o Fundo Monetário Internacional ou o Banco Mundial, dada à volatilidade que acrescentam ao serviço da dívida<sup>7</sup>, conforme detalharemos mais adiante.

Com a melhora na composição da DPF, surgiu a necessidade de se estabelecerem metas mais precisas para sua composição no longo prazo e, a partir dessa necessidade, foi gerado, na Secretaria do Tesouro Nacional, o modelo estocástico de estratégia para a dívida pública que servirá de base para a elaboração deste trabalho.

Antes, porém, de nos debruçarmos sobre o modelo brasileiro, estabeleceremos as bases para a sua compreensão na seção 2, apresentando o ferramental básico dos Modelos de Equações de Finanças. Essa classe de modelos, além de ser usada pelas autoridades brasileiras, é a mais amplamente utilizada para determinação de composições ótimas de dívidas públicas no plano internacional, conforme poderemos observar mais adiante. Nessa seção, procuraremos mostrar todas as principais formulações (sub-modelos) utilizadas no Brasil e no resto do mundo para a determinação de parâmetros econômico-financeiros fundamentais aos modelos de simulação para a dinâmica da dívida pública, bem como a maneira mais tradicionalmente utilizada para relacioná-las.

---

<sup>7</sup> Nos casos em que a distinção entre DPF e DLSP não for necessária, utilizaremos o conceito genérico de “dívida”, nos demais procuraremos explicitar qual o conceito está sendo utilizado.

Prosseguiremos na seção 3, estabelecendo as diretrizes básicas de um bom gerenciamento de dívida pública, de acordo com as recomendações de organismos multilaterais para esta prática (Fundo Monetário Internacional e Banco Mundial).

A literatura internacional no que tange especificamente aos modelos estocásticos de estratégias para dívida (doravante também chamados de Modelos de *Benchmarks*) não é muito extensa e os modelos apresentam diferenças significativas entre si, até porque representam realidades muito distintas e respondem a questões que frequentemente também são bem diferentes. Não obstante, existem algumas referências disponíveis para nos auxiliar, de forma que procederemos a uma revisão da literatura internacional a respeito do assunto na seção 4.

Além disso, tentaremos contribuir de maneira pontual em outros debates relevantes na definição da estrutura ideal para a Dívida Pública Federal brasileira no longo prazo. Por exemplo, hoje o parâmetro básico utilizado no Brasil para a definição da composição ideal da DPF é a Dívida Líquida do Setor Público como percentual do Produto Interno Bruto (PIB), mas nem todos os países adotam essa mesma variável de controle para riscos e custos. O Canadá, por exemplo, tem seus *benchmarks* determinados com base, não em um, mas em dois indicadores nominais: o Serviço da Dívida e a Necessidade de Financiamento do Setor Público (NFSP), que é a soma do déficit primário com as despesas de juros da dívida ou, de forma mais simples, o déficit nominal. Uma análise sobre essas variáveis de controle para riscos e custos da dívida pública será objeto de discussão na seção 5.

O objetivo fundamental deste trabalho, contudo, é demonstrar a utilização do modelo elaborado pela Secretaria do Tesouro Nacional para obtenção da composição ótima de longo prazo da Dívida Pública Federal brasileira. Procederemos à descrição e aplicação do modelo brasileiro na seção 6, com base em estudos publicados institucional ou individualmente por membros da equipe da STN.

No decorrer da subseção 6.6, serão apresentados os resultados de várias simulações, que mostrarão que a Fronteira Eficiente contém relativamente poucos títulos, muito embora haja títulos de todos os tipos analisados. Outra análise relevante a ser apresentada pelo presente trabalho diz respeito à sensibilidade do modelo aos vários parâmetros de entrada testados e à robustez dos resultados obtidos. Veremos que nossos resultados variam de forma bastante coerente com os parâmetros de entrada e que os resultados finais são relativamente robustos, uma vez não mudam tanto de uma simulação para outra. Além disso, os resultados iniciais serão submetidos a diversos tipos de restrições na subseção 6.7, que endereçam riscos outros que não simplesmente a volatilidade da Dívida Líquida do Setor Público (DLSP), que

é variável primária de controle do risco no modelo. Com isso, teremos a configuração final da nossa Fronteira Eficiente.

Faz parte do escopo desse trabalho, ainda, testar a consistência da evolução dos indicadores de risco e custo da DLSP no longo prazo a partir da evolução da carteira da DPF nos últimos anos, ou seja, verificar se, de acordo com nossos resultados, a composição da Dívida Pública Federal tem se movido consistentemente em direção ao seu ideal. Essa análise será apresentada na subseção 6.8. Veremos, contudo, que a composição da dívida pública, de acordo com as premissas adotadas nesse trabalho, tem se movido no sentido oposto ao que seria desejável.

Por fim, o presente trabalho também tem como um de seus principais objetivos complementar os esforços da STN, através da modelagem de uma família de Funções de Utilidade, cuja parametrização permita ajudar a escolher o balanço ideal entre risco e custo da DLSP.

O modelo atualmente utilizado pela STN gera a Fronteira Eficiente das combinações entre risco e custo da DLSP, deixando a escolha do ponto ideal a cargo do gestor da dívida, uma vez que esta é uma escolha que depende em última instância das preferências dele. Sistematizar essas preferências, no entanto, pode ajudar a tornar o processo decisório mais consciente e objetivo. Além disso, ao especificar uma família de Funções de Utilidade, dá-se consistência ao processo decisório nos casos em que as simulações são repetidas ao longo do tempo, seja por força de mudanças no ambiente econômico ou por qualquer outro motivo. Por isso, a subseção 6.9 descreverá um procedimento que visa obter uma função de utilidade adequada ao nosso processo de escolha. Veremos que o formato final da nossa Fronteira Eficiente, semelhante às curvas de preferências entre bens complementares perfeitos, tira um pouco da importância da discussão da Função de Utilidade. Entretanto, isso não nos impedirá de fazermos uma pequena discussão a respeito.

Uma vez definida uma forma funcional que expresse as preferências do gestor de dívida, procederemos então à resolução do problema de maximização de utilidade do governo federal, restrita pela a Fronteira Eficiente da relação risco-custo das carteiras de passivos do setor público. Isso nos indicará uma carteira ideal para a Dívida Pública Federal a partir da qual teceremos nossas conclusões na seção 7. Veremos que os títulos indexados à taxa SELIC se sobressaem bastante ante os demais ao final das nossas simulações.

## Seção 2 – Modelos de Equações de Finanças

São modelos projetados para executar simulações a partir de um conjunto de equações (sub-modelos) que utilizam um ferramental econométrico simples para retratar de forma independente o comportamento das variáveis econômico-financeiras de interesse (parâmetros das curvas de juros, taxas de inflação e câmbio, por exemplo). A coesão entre esses sub-modelos (consistência macroeconômica), por sua vez, é dada pela correlação dos resíduos dos mesmos. Mais adiante, ao tratar do Modelo de *Benchmarks* brasileiro retomaremos o tema da consistência macroeconômica.

Nos Modelos de Equações de Finanças cada equação descreve inicialmente o comportamento de determinada variável em função de parâmetros obtidos exclusivamente através da série histórica da própria variável e sua evolução no tempo. Quando da execução das simulações que caracterizam o modelo em sentido mais amplo, mantém-se a estrutura de correlação histórica verificada entre as variáveis. O mecanismo através do qual é garantida a manutenção da estrutura de correlação nas simulações é conhecido como “Decomposição de Cholesky”. A seguir, descreveremos os principais modelos (em sentido restrito) utilizados no Brasil e no mundo para simulação do comportamento dos instrumentos que compõe uma dívida pública qualquer, bem como os fundamentos da Decomposição de Cholesky.

### 2.1 – Modelos Vasicek<sup>8</sup>, CIR<sup>9</sup> e CKLS<sup>10</sup>

Todos esses modelos foram originalmente concebidos para descrever o comportamento de taxas de juros de curto prazo e apresentam uma série de características em comum, dentre as quais podemos citar a formulação, que pode ser retratada genericamente da seguinte forma:

$$dr_t = \alpha(\bar{r} - r_t)dt + \sigma_r r_t^\lambda dZ_t$$

---

<sup>8</sup> Modelo desenvolvido por Oldrich Vasicek em *An Equilibrium Characterization of the Term Structure* (1977).

<sup>9</sup> Modelo desenvolvido por John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll e Stephen A. Ross em *A Theory of the Term Structure of Interest Rates* (1985).

<sup>10</sup> Modelo desenvolvido por Ka-keung C. Chan, G. Andrew Karolyi, Francis A. Longstaff e Anthony B. Sanders em *An Empirical Comparison of Alternative Models of Short-Term Interest Rate* (1992).

Em que:

$r$ : Nível da taxa de juros de curto prazo

$\alpha$ : Velocidade de retorno à média

$\bar{r}$ : Média de longo prazo da taxa de juros de curto prazo

$\sigma_r$ : Volatilidade da taxa juros de curto prazo

$dZ$ : Processo de Wiener

Se “ $Z$ ” segue um processo de Wiener, para uma pequena mudança “ $\Delta Z$ ”, em um também pequeno intervalo de tempo “ $\Delta t$ ”, teremos um processo de difusão no qual  $\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ , em que “ $\varepsilon$ ” segue uma distribuição normal padrão. Além disso, para dois pequenos intervalos de tempo distintos, teremos variações independentes de “ $\Delta Z$ ”.

Uma característica fundamental desses modelos é a propriedade de reversão à média, que é facilmente observável a partir da constatação de que, sempre que a taxa de juros estiver abaixo do seu valor de longo prazo, ela terá uma tendência a aumentar no período seguinte, uma vez que  $\alpha$  é positivo. Se, pelo contrário, a taxa estiver acima da sua média histórica, sua tendência será cair.

Os modelos se diferenciam pelo parâmetro “ $\lambda$ ”. Enquanto no modelo Vasicek esse parâmetro é igual a zero, no CIR, ele é igual a meio e no modelo CKLS ele pode, a depender da abordagem, ser tomado como um (caso do Modelo Brasileiro de *Benchmarks*) ou ser estimado a partir de uma modelagem econométrica, caracterizando o que podemos chamar de uma abordagem generalizada dos demais modelos (formulação original).

O modelo Vasicek é, na realidade, uma aplicação do processo estocástico conhecido como Ornstein-Uhlenbeck, cuja aplicação básica se dava no campo da física, para determinação da taxa de juros de curto prazo. Sua forma dinâmica para uma variável genérica pode ser reduzida a:

$$dX = \alpha(\bar{X} - X)dt + \sigma dZ$$

Em que:

$X$ : Variável em estudo

$\alpha$ : Velocidade de retorno à média

$\bar{X}$ : Média de longo prazo da variável em estudo

$\sigma$ : Volatilidade da variável em estudo

$dZ$ : Processo de Wiener

Transformando a equação diferencial em uma equação de diferenças, temos:

$$\begin{aligned} X_{t+\Delta t} &= X_t + \alpha(\bar{X} - X_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t+\Delta t} \\ X_{t+\Delta t} &= \alpha\bar{X}\Delta t + (1 - \alpha\Delta t)X_t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

Renomeando os termos dessa equação e tomando  $\Delta t=1$  (passo do modelo), temos:

$$X_{t+\Delta t} = a + bX_t + \eta_{t+\Delta t}$$

Em que  $\eta_{t+\Delta t}$  é um ruído normalmente distribuído. A equação acima pode ser estimada como um processo auto-regressivo de primeira ordem [AR(1)]. A partir dos parâmetros obtidos, chega-se aos valores estimados dos parâmetros originais com auxílio das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 - b}{\Delta t} \\ \bar{X} &= \frac{a}{1 - b} \\ \sigma_r &= \sqrt{\frac{\text{var}(\eta_{t+\Delta t})}{\Delta t}} \end{aligned}$$

Os modelos Vasicek e principalmente o CIR são também bastante difundidos para o cálculo de preços e taxas de juros de títulos em geral (não só os de curto prazo), pois possuem fórmulas fechadas para esta finalidade. Nesses modelos é preciso fazer uma hipótese de não arbitragem para poder prever as taxas de juros de longo prazo a partir da taxa de juros de curto prazo. Com ajuda dessa hipótese, para o modelo CIR, pode-se demonstrar que os preços e as taxas de juros neutras ao risco<sup>11</sup> de um título (sem pagamento de cupom) com prazo  $\tau$  são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} P_t(\tau) &= A_t(\tau)e^{-B_t(\tau)r} \\ y(\tau) &= -\ln(A(\tau)) + B(\tau)r \end{aligned}$$

---

<sup>11</sup> A neutralidade ao risco é uma característica inerente desses modelos.

$$A_t(\tau) = \left[ \frac{2\gamma e^{\frac{(\alpha+\gamma)(\tau-t)}{2}}}{(\gamma + \alpha)(e^{\gamma(\tau-t)} + 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\alpha\theta}{\sigma_r^2}}$$

$$B_t(\tau) = \frac{2(e^{\gamma(\tau-t)} - 1)}{(\gamma + \alpha)(e^{\gamma(\tau-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma_r^2}$$

O modelo CIR existe em abordagens de um e dois fatores. A abordagem de um único fator implica que, para um mesmo nível da taxa de juros de curto prazo, o formato da curva de juros será único. Mas se sabe que isso não é verdade, que a curva de juros pode adquirir diferentes formatos para um mesmo nível de taxa de curto prazo, o que levou ao desenvolvimento do modelo de dois fatores.

Essa segunda abordagem está inserida dentro do contexto da análise de componentes principais, que é um método estatístico para explicar covariância dentro de um sistema multidimensional. Dentro desse contexto, a primeira componente principal é o nível da taxa de juros e a segunda é a inclinação da curva de juros. No Modelo de *Benchmarks* Dinamarquês, por exemplo, o modelo de um fator explica 66% da variância da taxa de juros, enquanto o modelo de dois fatores explica 88%, além de ter outras características mais aderentes às evidências empíricas. Mais adiante, veremos mais detalhes a respeito desse modelo.

Na abordagem de dois fatores, temos:

$$r = x_1 + x_2$$

$$dx_1 = \alpha_1(\theta_1 - x_1)dt + \sigma_1 x_1^\lambda dZ$$

$$dx_2 = \alpha_2(\theta_2 - x_2)dt + \sigma_2 x_2^\lambda dZ$$

Se  $x_1$  e  $x_2$  são independentes, analogamente ao modelo de um fator, temos a seguinte relação para o cálculo das taxas de juros:

$$y(\tau) = (-\ln(A_1(\tau)) + B_1(\tau)x_1) + (-\ln(A_2(\tau)) + B_2(\tau)x_2)$$

Em que:

$A_1(\tau)$ ,  $B_1(\tau)$ ,  $A_2(\tau)$  e  $B_2(\tau)$  são calculados como no caso de um fator, mas baseados nos parâmetros do caso de dois fatores.

Vale observar ainda que, no caso do modelo brasileiro, quando tomamos  $\lambda=1$  no modelo CKLS, estamos fazendo a suposição de que se trata de um processo homocedástico na mudança percentual da variável em estudo. Por exemplo, no caso do câmbio real, dividindo ambos os lados da formulação original pela referida variável, temos:

$$\frac{dC_t}{C_t} = \alpha \left( \frac{C^*}{C_t} - 1 \right) dt + \sigma_c dZ$$

Em que:

$C_t$ : Câmbio real

$C^*$ : Câmbio real de longo prazo

$\sigma_c$ : Volatilidade do câmbio real

## 2.2 – Movimento Geométrico Browniano<sup>12</sup>

Um processo de Wiener generalizado traz consigo a ideia de tendência e volatilidade e pode ser descrito através da seguinte equação:

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dZ$$

Um processo de Itô é uma extensão do processo anterior no qual  $a = a(x, t)$  e  $b = b(x, t)$ , ou seja, um processo no qual tendência e volatilidade dependem do nível da variável e da volatilidade da mesma. Um movimento geométrico browniano é um processo de Itô particular, cuja formulação original também se deu no campo da física. Aplicando esse processo à modelagem do Produto Interno Bruto, temos:

$$dY = \mu Y dt + \sigma_Y Y dZ$$

---

<sup>12</sup> Modelo originalmente concebido para descrever o movimento de partículas num fluido como consequência do choque entre moléculas. Foi observado originalmente pelo físico e botânico inglês Robert Brown.

Em que:

Y: Nível do Produto Interno Bruto

$\mu$ : Tendência (deslocamento)

$\sigma_Y$ : Volatilidade do Produto Interno Bruto

dZ: Processo de Wiener

Dividindo ambos os lados da equação por Y, temos:

$$\frac{d(Y)}{Y} = \mu dt + \sigma_Y dZ$$

Ou seja, uma vez mais estamos tratando de um processo homocedástico. Agora, na variação percentual do nível do Produto Interno Bruto. O diferencial é que desta vez há uma média para a variação percentual do Produto Interno Bruto, ou seja, para o crescimento do PIB.

Transformando a equação diferencial numa equação de diferenças e desenvolvendo, temos:

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-1}(\mu\Delta t + \sigma_Y \varepsilon \sqrt{\Delta t})$$

### 2.3 – O Modelo Nelson-Siegel<sup>13</sup> Reinterpretado por Diebold-Li<sup>14</sup>

A formulação de Diebold-Li para o modelo Nelson-Siegel é atualmente a mais utilizada no contexto de simulações para dívida pública, além de ter um grande número de outras aplicações. Eis a sua forma funcional:

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$$

Em que:

$\tau$ : prazo do título

$\lambda_t$ : taxa de decaimento exponencial

---

<sup>13</sup> Modelo desenvolvido por C.R. Nelson e A. F. Siegel em *Parsimonious Modeling of Yield Curves* (1987).

<sup>14</sup> Modelo desenvolvido por F. X. Diebold e C. Li em *Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields* (2006).

Para entendermos os significados dos dois primeiros fatores latentes (betas) basta tomarmos o limite da expressão acima para vencimentos que tendem a zero e a infinito, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} y_t(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} \left[ \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \right] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{1t}] + \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} \left[ \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) \right] + \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} \left[ \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) \right] - \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{3t} e^{-\lambda_t \tau}] \end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hospital no segundo e no terceiro limites, temos:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{1t}] + \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} \left[ \beta_{2t} \left( \frac{\lambda_t e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t} \right) \right] + \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} \left[ \beta_{3t} \left( \frac{\lambda_t e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t} \right) \right] \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{3t} e^{-\lambda_t \tau}] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{1t}] + \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{2t} e^{-\lambda_t \tau}] + \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{3t} e^{-\lambda_t \tau}] - \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{3t} e^{-\lambda_t \tau}] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{1t}] + \lim_{\tau \rightarrow 0, \infty} [\beta_{2t} e^{-\lambda_t \tau}] \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t(\tau) = \beta_{1t}$$

Dessa forma vemos que  $\beta_{1t}$  é o nível de longo prazo da curva de juros no instante  $t$  e  $\beta_{2t}$  é o oposto da inclinação da curva neste mesmo momento, isto é, o oposto da diferença entre a taxa de mais longo prazo e a taxa de curto prazo. Também se pode demonstrar que  $\beta_{3t}$  é a curvatura da estrutura a termo da taxa de juros. Uma segunda forma de se ver esses fatores é pensar neles como componentes de curto, longo e médio prazo<sup>15</sup>.  $\lambda_t$  é o decaimento exponencial. Pequenos valores para o parâmetro  $\lambda_t$  resultam num decaimento lento e servem melhor a vencimentos longos, enquanto grandes valores para  $\lambda_t$  resultam num decaimento rápido e servem melhor a vencimentos curtos.

A formulação inicial de Nelson-Siegel servia, nas palavras dos autores, para uma modelagem parcimoniosa da curva de juros. Com isso, eles queriam dizer que se tratava

<sup>15</sup> Esta é a forma originalmente descrita no trabalho de Nelson-Siegel.

basicamente de um modelo para interpolar uma curva de juros ou, mais propriamente, para determinar uma curva de juros de média de um determinado período. Os autores utilizavam o método dos mínimos quadrados generalizados para obter os fatores latentes de uma fórmula muito semelhante à colocada no início desta subseção.

O trabalho de Diebold-Li complementou o trabalho precursor de Nelson-Siegel, dando à fórmula o seu formato atual e à parametrização, o seu caráter dinâmico (temporal). Nesse trabalho, os autores mostraram que o fator  $\lambda_t$  determinava o ponto em que a curvatura da estrutura a termo da taxa de juros seria máxima. Como a maioria dos conhecedores desse mercado sabia empiricamente o vencimento no qual tal curvatura máxima ocorria, era possível obter-se o fator  $\lambda_t$  com relativa facilidade<sup>16</sup>. De posse desse parâmetro, eles então encontraram as curvas de juros para vários momentos no tempo e, depois disso, deram aos betas uma modelagem típica de séries de tempo. Através de modelos auto-regressivos de primeira ordem para cada um dos fatores, eles criaram uma ferramenta capaz de reproduzir as mudanças da curva de juros no tempo, criando assim um mecanismo de previsão da curva de juros.

## 2.4 – Decomposição de Cholesky<sup>17</sup>

A decomposição de Cholesky é um mecanismo desenvolvido no campo da álgebra linear, cuja função mais imediata é a resolução de sistemas de equações. Esse mecanismo se aplica a matrizes semi-definidas positivas, ou seja, matrizes simétricas cujos autovalores são todos não negativos. Por esse método, uma matriz original é decomposta em uma matriz triangular inferior que, multiplicada pela sua transposta, resulta na própria matriz original. Assim, para a resolução de um sistema linear, cujos coeficientes estejam identificados numa matriz  $A$ , teríamos a princípio:

$$Ax = y$$

Decompondo  $A$  na matriz de Cholesky e na transposta dessa matriz, resulta:

$$GG^T x = y$$

---

<sup>16</sup> Basta derivar o terceiro termo e igualá-lo a zero, substituindo o prazo considerado adequado para obter o decaimento exponencial.

<sup>17</sup> André-Louis Cholesky (militar e matemático francês) criou a técnica descrita nesta seção no início do século XX.

Fazendo  $G^T x = b$ , temos:

$$Gb = y$$

Resolvendo o novo sistema para  $b$  e depois procedendo à resolução de  $G^T x = b$ , teremos a resolução do sistema original. A priori, parece que estamos resolvendo dois sistemas ao invés de um, mas a vantagem deste método é que existem fórmulas específicas para a obtenção de todos os componentes da matriz de Cholesky e as matrizes básicas com as quais se opera estão automaticamente escalonadas, o que torna a resolução dos sistemas bastante imediata.

Nas simulações estocásticas, a decomposição de Cholesky é útil porque as matrizes resultantes dessa decomposição preservam a informação das covariâncias implícitas entre as séries de erros dos modelos de cada uma das variáveis em estudo. Vejamos a razão para isso:

A matriz de covariância  $\Sigma$  pode ser representada da seguinte forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_1)(X_1 - \mu_1)] & \cdots & E[(X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1)] & \cdots & E[(X_n - \mu_n)(X_n - \mu_n)] \end{bmatrix}$$

Em que  $\mu_i = E[X_i]$

A definição acima equivale à multiplicação de um vetor coluna pela sua transposta.

$$\Sigma = E[(X - E[X])(X - E[X])^T]$$

Fazendo  $\epsilon = X - E[X]$ , temos:

$$\Sigma = E[\epsilon\epsilon^T]$$

Igualando a expressão a  $R$ , em que  $R$  é uma matriz que pode ser decomposta nos seus fatores de Cholesky, temos:

$$\Sigma = E[\epsilon\epsilon^T] = R = GG^T$$

Em que  $G$  (triangular inferior) é a matriz de Cholesky de  $R$ .

Seja  $\eta$  um vetor coluna de dimensão  $N$ , composto de variáveis independentes com variância unitária, ou seja, um vetor cuja matriz de covariância é  $\Sigma(\eta) = I$  (matriz identidade). Podemos, então, construir um vetor de erros  $\epsilon = G\eta$ , cuja matriz de covariância será:

$$\Sigma(\epsilon) = E[\epsilon\epsilon^T] = E[G\eta\eta^T G^T] = GE[\eta\eta^T]G^T = GIG^T = GG^T = R$$

Ou seja, ao multiplicar um vetor coluna de erros aleatórios não correlacionados pela decomposição de Cholesky da matriz de covariância original, encontramos exatamente a mesma estrutura de covariância da matriz original. Na nossa demonstração, trabalhamos com a matriz de covariância, mas pode-se também trabalhar com a matriz de correlação dos erros. A demonstração é análoga ao caso apresentado.

### Seção 3 – Alguns Princípios Gerais sobre Gerenciamento de Dívida Pública<sup>18</sup>

*“O principal objetivo do gerenciamento da dívida pública é assegurar que as necessidades de financiamento do governo sejam supridas ao menor custo possível consistente com um nível prudente de risco no médio e longo prazo.”*

*(Guidelines for Public Debt Management, FMI e Banco Mundial)*

Uma estrutura pobre de dívida pública em termos de prazos, moedas ou indexadores tem sido um importante fator para a disseminação de crises econômicas. Em muitas circunstâncias, essas crises surgem em função de um foco excessivo na diminuição de custos do serviço da dívida, associada com a emissão de grandes volumes de títulos de curto prazo ou flutuantes em um ambiente em que a curva de juros apresenta uma inclinação positiva<sup>19</sup>. O uso indiscriminado desse tipo de expediente, contudo, resulta numa severa exposição do governo a mudanças nas condições dos mercados financeiros por ocasião da rolagem dessa dívida. Da mesma forma, uma dívida cambial aparentemente mais barata *ex ante*, pode se revelar de fato mais cara se a taxa de câmbio se depreciar o suficiente até a maturação do contrato. Além disso, a excessiva confiança neste tipo de passivo pode levar a pressões na própria taxa de câmbio e/ou monetárias, caso os investidores se tornem relutantes ao refinanciamento dessa parcela do passivo. Por isso, os organismos multilaterais recomendam cautela na análise de riscos associados à dívida de curto prazo e/ou cambial. Sua presença na composição final, no entanto, não pode ser de todo excluída, uma vez que a carteira como um todo se beneficia da sua inclusão por conta do efeito da diversificação dos instrumentos financeiros utilizados.

Nesse ponto, vale lembrar também que, tipicamente, o setor privado se vê às voltas com enormes dificuldades quando ocorre um gerenciamento inadequado do risco soberano. Sendo assim, ao reduzir o risco do próprio portfólio para níveis seguros, o governo faz do

---

<sup>18</sup> Esta seção é fortemente baseada na publicação do FMI e do Banco Mundial intitulada *Guidelines for Public Debt Management* (2001).

<sup>19</sup> Na realidade, este não é um comportamento perfeitamente racional, pois, de acordo com a Teoria das Expectativas Puras, o que faz os títulos de longo prazo mais caros do que os de curto prazo na média é a estrutura positivamente inclinada do prêmio de risco dos títulos prefixados em relação à evolução prevista da taxa básica, o que independe do formato da curva de juros nominal. Para referências sobre a Teoria das Expectativas Puras, ver B. G. Malkiel em *The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns* (1966).

país como um todo um lugar menos suscetível ao contágio de uma crise econômica ou financeira internacional.

Estruturas de dívida prudentes ajudam a reduzir a exposição do governo a taxas de juros, câmbio e outros riscos. Por isso, muitos governos adotam metas para composição, distribuição de vencimentos e duração<sup>20</sup> dos portfólios de dívida no longo prazo em função de riscos e custos esperados (modelos de estratégia para a dívida). A partir dessas metas e do estoque atual da dívida, podem-se traçar também metas para o curto e o médio prazo. Essa é uma abordagem típica de países com mercados financeiros bem desenvolvidos, onde se pode emitir dívida com características desejadas em bases regulares como ocorre, por exemplo, no Brasil.

*“O modelo de estratégia para a dívida pode ser uma poderosa ferramenta gerencial porque representa a estrutura de dívida que o governo gostaria de ter, baseada em suas preferências de risco e custo esperado.”*

*(Guidelines for Public Debt Management, FMI e Banco Mundial)*

Existem várias ferramentas analíticas através das quais tais modelos são desenvolvidos, variando desde abordagens determinísticas, construídas a partir de um número limitado de cenários, até abordagens estocásticas, muitas das quais derivadas de modelos de simulação utilizados por instituições financeiras. Conceitos muito utilizados na iniciativa privada para avaliação de risco ganharam paralelos nesses modelos estocásticos para gerenciamento de dívida. Por exemplo, o VaR (*Value at Risk* – Valor em Risco), um conceito amplamente utilizado na indústria bancária e de fundos, ganhou uma nomenclatura específica na avaliação de riscos de uma carteira de títulos de dívida pública: o CaR (*Cost at Risk* – Custo em Risco). Nesse mesmo sentido, uma medida talvez ainda mais importante seja o CFAR (*Cash Flow at Risk* – Fluxo de Caixa em Risco), utilizado para determinar um nível confiável para um dado fluxo de caixa esperado.

O modelo brasileiro se encaixa no segundo grupo, ou seja, no grupo de modelos estocásticos de estratégia de dívida (Modelos de *Benchmarks*). Tais modelos exibem um grau de sofisticação elevado e estão restritos a um pequeno número de países que estão na

---

<sup>20</sup> Em finanças, duração é o tempo médio de recebimento de um fluxo de caixa, ponderado pelo valor presente de cada um dos componentes desse fluxo de caixa. Trata-se em última análise de uma medida da sensibilidade de um título ou carteira de títulos às taxas de juros.

vanguarda desse segmento de pesquisa. Na próxima seção, passaremos ao exame de alguns dos principais trabalhos realizados nesse campo, disponíveis para consulta nos *websites* dos escritórios de gerenciamento de dívida dos seus respectivos países ou nos *websites* do Fundo Monetário Internacional e do Banco Mundial.

Vale observar novamente que a composição mais adequada dependerá ainda da tolerância do governo ao risco. Esta, por sua vez, poderá variar no tempo, dependendo de fatores como o tamanho da dívida ou, de forma mais ampla, da vulnerabilidade do país a choques financeiros e/ou econômicos vindos de fora. Normalmente, quanto maior a vulnerabilidade externa do país, menor será o nível de risco aceitável por aquela nação, o que ironicamente implica *ex ante* na aceitação de custos mais altos para o serviço da dívida na média.

## **Seção 4 – Experiência Internacional na Composição Ótima da Dívida Pública**

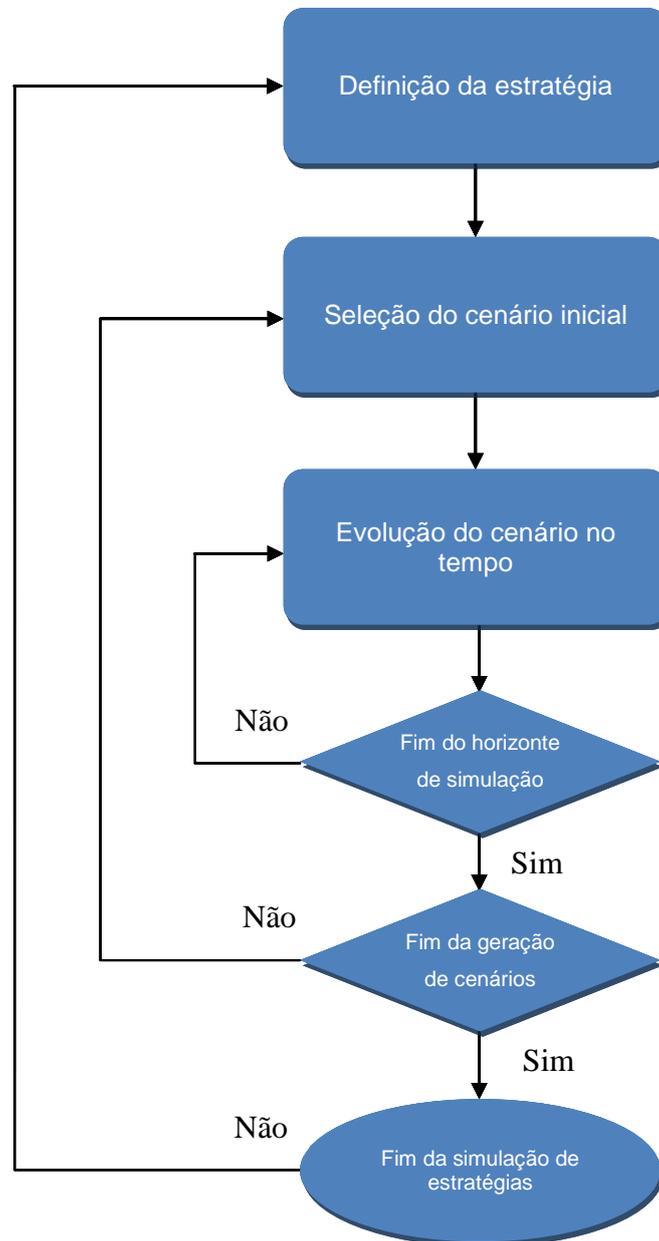
Ao longo das últimas duas décadas alguns países desenvolveram modelos estocásticos para definição de estratégias de gerenciamento de dívida pública, sobretudo na Europa. Contudo, o grau de divulgação desses modelos varia muito de um Estado para outro. Alguns países dão publicidade a seus modelos, enquanto outros não o fazem. E mesmo no caso em que eles são publicados, o grau de detalhamento dos referidos modelos também varia bastante de um lugar para outro, sendo que nenhum deles é totalmente público. Dentre os países que publicaram tais modelos, podemos citar, além do Brasil: Dinamarca, Suécia, Turquia, Reino Unido e Canadá, que serão objeto de estudo nesse trabalho. Além destes, sabemos que tais modelos também foram desenvolvidos em Portugal, na Irlanda, Áustria e Bélgica. No caso de Portugal, que foi um dos pioneiros no desenvolvimento de trabalhos dessa espécie, o uso do modelo já foi até descontinuado, por conta dos efeitos da crise econômica que se abateu sobre o país nos últimos anos, deixando a gestão da dívida pública sem qualquer margem de manobra para perseguir um ideal de composição de dívida.

Conforme já foi dito, as diferenças entre os modelos são frequentemente substanciais, mas eles possuem uma estrutura básica em comum, na qual o comportamento estocástico das variáveis de interesse é reproduzido através do algoritmo conhecido como “Simulações de Monte Carlo”. No presente contexto, tais simulações se caracterizam pela geração de uma infinidade de cenários alternativos que evoluem durante certo intervalo de tempo e que, no entanto, são mantidos constantes para cada uma das estratégias testadas. Dessa forma, teremos uma distribuição de possíveis resultados ao final do intervalo considerado, que nos dará uma boa ideia do comportamento que tais variáveis podem exibir na prática.

Colocado de outra forma, todos os modelos apresentam três níveis de recursividade: no primeiro, é definida a estratégia de financiamento a ser estudada (composição); no segundo, um cenário inicial aleatório é definido; no terceiro, o cenário evolui, também aleatoriamente, no tempo até o final do horizonte de simulação. Findo esse horizonte, o ciclo se repete, mas os cenários econômicos desta vez serão mantidos, variando-se somente a composição da dívida, donde advêm os novos resultados. Pode-se gerar tantos cenários quanto se deseje, consideradas restrições de cunho computacional, principalmente o tempo de simulação. Da mesma forma, múltiplas estratégias podem ser testadas e, a partir daí, avaliadas segundo diferentes critérios. Uma representação esquemática da estrutura básica

dos modelos estocásticos de estratégia para a dívida pública é mostrada a seguir e depois passaremos às especificidades dos modelos de alguns países.

**Figura 1 – Fluxograma da Estrutura Básica dos Modelos de Estratégia para Dívida Pública**



## 4.1 – Dinamarca<sup>21</sup>

Iniciaremos nossos estudos de caso da literatura internacional sobre Modelos de *Benchmarks* por aquele que é provavelmente o algoritmo de simulação mais simples a ser apresentado no presente trabalho. A forma como a Dinamarca administra sua dívida pública só encontra paralelo no modelo sueco, sendo bastante distinta da dos demais países a serem analisados. Ao invés do gerenciamento da dívida se fazer através de um número relativamente grande de instrumentos, eles emitem prioritariamente um título prefixado longo (dez anos com pagamento de cupons) e fazem uso de derivativos (*swaps de taxas de juros*<sup>22</sup>) para controlar a duração da carteira e, desta forma, o risco da mesma. No caso do passivo do governo, um prazo mais longo significa menos risco, ao contrário do que ocorre quando pensamos em ativos de renda fixa. Outro aspecto bastante relevante é a constatação de que é mais caro na média se financiar no longo que no curto prazo. Como este último aspecto é preponderante no caso de captações de títulos de dez anos dinamarqueses, para obter o balanço apropriado entre riscos e custos, o escritório de dívida pública do país habitualmente utiliza os *swaps* para diminuir a duração da carteira como um todo. Além dos títulos de 10 anos descritos anteriormente, o escritório de gerenciamento de dívida dinamarquês também emite um títulos sem pagamento de cupons de dois anos e se reserva o direito de colocar um título também sem pagamento de cupons e prazo inferior a doze meses em caso de necessidade. Como são extremamente poucos os títulos no mercado interno, eles têm o benefício de gozar de uma grande liquidez.

Na Dinamarca, não existe dívida indexada a inflação e a dívida cambial é toda ela denominada em euros. Como o regime é de câmbio fixo em relação ao euro, considera-se que o risco cambial é muito pequeno e a análise da estratégia para a dívida se concentra na parcela prefixada da mesma. Na realidade, a dívida cambial só existe para que o país possa manter reservas em euros e isso por si só já traria equilíbrio à gestão do risco cambial do país.

Conforme dito anteriormente, as metas para a dívida são estabelecidas em termos da duração da carteira. Não obstante, a taxa de repactuação (percentual das taxas de juros que são repactuadas durante um intervalo de um ano) é uma medida que também é acompanhada pelas autoridades daquele país, uma vez que a duração não contém informação sobre a exposição absoluta do governo à taxa de juros ou sua distribuição no tempo.

---

<sup>21</sup> Baseado em trabalhos do *Danmarks National Bank* intitulados *Danish government borrowing and debt 2005(2005)* e *Danish government borrowing and debt 2007(2007)*.

<sup>22</sup> Derivativos através dos quais são trocadas taxas prefixadas por taxas flutuantes.

Os exercícios com o modelo estocástico de estratégia de dívida dinamarquês visam responder perguntas simples, sobre questões específicas. Na aplicação do caso de estudo, o objetivo se restringe a examinar os possíveis resultados de uma mudança na duração do portfólio.

A granularidade do modelo é mensal, o horizonte da simulação é de 10 anos e são utilizadas 2.500 simulações em cada um dos cenários. A variável de controle é o custo esperado do serviço da dívida a cada ano do horizonte de simulação e o risco é avaliado pelo valor máximo esperado para o serviço da dívida com confiança de 95% (CaR).

O algoritmo de simulação dinamarquês não contempla uma modelagem de variáveis macroeconômicas, uma vez que elas não fazem parte do escopo do mesmo. Dessa forma, ele se restringe à previsão de taxas de juros nominais ao longo do tempo. Essas taxas são previstas utilizando-se o modelo CIR em abordagens de um e dois fatores.

Outra peculiaridade do modelo dinamarquês é que ele incorpora a geração de fortes superávits por parte do governo, de forma que ele contemplava uma grande redução no estoque da dívida nos anos seguintes à publicação do trabalho em estudo.

O resultado apresentado para a aplicação do modelo em 2007 respaldava um aumento da duração da carteira de 3,0 anos para 3,25 anos, uma vez que o aumento de custos verificado era baixo vis-à-vis a diminuição de riscos decorrente do alongamento da carteira.

## 4.2 – Suécia<sup>23</sup>

A forma como a Suécia gere sua dívida pública é semelhante à dinamarquesa, mas envolve a administração de riscos relativos a um número maior de indexadores. Lá, eles emitem somente dois títulos prefixados: um título de dez anos, que paga cupons e é o principal instrumento de gerenciamento da dívida, e um título de um ano, que não paga cupons e serve, sobretudo, para o gerenciamento do caixa do governo. O risco prefixado, como no caso dinamarquês, é controlado a partir do prazo do portfólio com auxílio de derivativos. Adicionalmente, o país emite um título indexado à inflação de vinte anos e, neste caso, não existem derivativos que possam influenciar na duração de tal parcela do portfólio. Há ainda dívida cambial, a qual sofre um tratamento semelhante ao da prefixada com a utilização de *swaps* cambiais, muito embora, neste caso, se tenha optado pela manutenção de um prazo de repactuação extremamente curto (0,125 anos). Dessa forma, não há como

---

<sup>23</sup> Baseado em trabalho do Escritório Central de Gerenciamento de Dívida Sueco intitulado *Proposed Guidelines – 2009–2011* (2008).

influenciar o prazo como um todo da carteira, senão através do prazo da parcela de prefixados.

No caso do modelo sueco, a variável de interesse para mensuração de risco é o prazo médio de repactuação da parcela prefixada da dívida. Por prazo de repactuação, entenda-se o tempo médio no qual haverá mudança da taxa de juros do título. Em se tratando de um título prefixado é o tempo até o vencimento do título, enquanto num título indexado está relacionado ao prazo para a mudança do indexador. O mesmo conceito estende-se para uma carteira de títulos.

Para a composição da dívida, que também poderia ser passível de estudo pelo modelo, já existem metas definidas, que foram construídas com base em outros parâmetros como, por exemplo, a demanda por títulos indexados à inflação por parte dos fundos de pensão. Durante o período de 2009 a 2011 essas metas eram de 15% de títulos cambiais, 25% de títulos indexados a inflação e 60% de títulos prefixados. Todas as cinco estratégias do estudo de caso no qual nos baseamos contemplam essa mesma composição e só se diferenciam pelo prazo médio de repactuação. A meta à época da publicação do trabalho era de 3,5 anos e, além dessa possibilidade, estudam-se também outras quatro: 0,5, 1, 2 e 3 anos. Como se vê, o objetivo do estudo é verificar se seria possível obter ganho com a diminuição do prazo médio de repactuação da carteira.

A modelagem da curva de juros nominal, assim como veremos que acontece na grande maioria dos casos, utiliza a abordagem de Nelson-Siegel adaptada por Diebold-Li. Neste caso, são modelados os três fatores dinâmicos latentes (betas) da formulação original. Tais parâmetros são estimados através de regressões lineares, dentro do contexto do ferramental de séries de tempo. Vale ressaltar que não existe uma curva de juros de títulos bem formada por só serem emitidos títulos de 10 anos. Então, utiliza-se como referência a curva de *swaps* de taxas de juros.

O caso da curva de juros real se constitui num problema ainda maior, pois ela tinha um histórico muito curto à época em que o trabalho de referência foi escrito e tampouco havia derivativos que permitissem uma caracterização da curva. Logo ela foi calibrada a partir da curva nominal, dada a impossibilidade de que ela fosse modelada diretamente. Em média, o nível da curva real corresponde à curva nominal menos a inflação esperada, isto é, a meta do Banco Central Sueco. Esse procedimento se justifica, por um lado, pelo histórico de inflação consistentemente próximo da meta e que gera prêmios de inflação muito diminutos e, por outro, pela existência de um prêmio de liquidez nos títulos indexados, que atua no sentido contrabalancear o efeito do outro prêmio. De forma semelhante, as médias da

inclinação e da curvatura das curvas real e nominal coincidem, mas se considera que a curva real tenha uma volatilidade equivalente a apenas metade da volatilidade da curva nominal. É necessário também assumir que a correlação entre os parâmetros reais e nominais é de 0,7.

A mesma lógica foi aplicada à curva em moeda estrangeira, cujo nível médio também foi considerado igual ao da curva prefixada, a despeito de nesse caso haver referências. Tal procedimento é justificado pelo fato de que isso não compromete os resultados, na medida em que o que está sendo testado é só uma mudança na carteira prefixada. Antes de passar à simulação de fato, no entanto, o trabalho de referência encontra uma curva cambial representativa da média ponderada das taxas de todas as moedas nas quais o governo sueco capta externamente, que são muitas. Isso resulta numa inclinação e curvatura bem menores do que no caso da curva interna. Mesmo assim, essa curva acabou sendo descartada.

A dinâmica do câmbio e inflação é modelada de forma muito parecida com o que ocorre no caso dos parâmetros das curvas de juros. Todas variáveis seguem processos estocásticos estacionários, traduzidos no modelo sueco através da formulação de Ornstein-Uhlenbeck, que se traduz por processos auto-regressivos de primeira ordem (modelo Vasicek).

No trabalho em estudo, as simulações são realizadas utilizando-se um total de vinte mil cenários em um intervalo de 30 anos com granularidade mensal. Contudo, os resultados são apresentados para 1, 5, 10, 20 e 30 anos. Conforme mencionado anteriormente, cinco estratégias são testadas e a variável de controle é a mesma que veremos que é utilizada no caso brasileiro, a taxa ou custo de carregamento, que pode ser vista como o custo do estoque da dívida em termos percentuais. Esse custo já corrige eventuais problemas dos cupons de juros dos títulos indexados a inflação (problema comum em outros países). No entanto, diferentemente do caso brasileiro, utiliza-se uma medida de extremo da distribuição para o risco (95% percentil). Essa medida é chamada de RYaR (*Running Yield at Risk* – Taxa de Carregamento em Risco). Por fim, vale mencionar que os choques que sensibilizam o modelo foram feitos com dois níveis de volatilidade, sendo que o segundo era igual ao dobro do primeiro. Os resultados são coerentes com o que se esperaria, mostrando uma redução de custo e aumento de risco conforme se encurta o prazo de repactuação do portfólio. A diminuição de custos, contudo, parece ter pouco impacto em termos de aumento de riscos no caso em estudo, muito embora esse aumento de riscos seja substancialmente maior no ambiente de mais volatilidade.

### 4.3 – Turquia<sup>24</sup>

O modelo do Tesouro turco para a análise de estratégia para dívida tem como produto principal a geração de uma distribuição de probabilidades para o fluxo de caixa anual da dívida pública dentro de um horizonte de médio prazo (cinco anos). Apesar do produto do modelo ser apresentado de forma anual, a granularidade do modelo é trimestral. Existem três possíveis variáveis de controle para os custos: os gastos com juros baseados nas saídas de caixa, o nível do estoque da dívida e o nível do estoque da dívida ajustado pela inflação. A primeira medida é adequada para a medição de custos de dívida prefixada, mas não para a dívida indexada à inflação. Isso ocorre por causa da maneira como é feita a contabilização dos custos da dívida na Turquia. Os custos dos instrumentos de dívida indexados a inflação levam em conta somente a variação do indexador sobre os cupons de juros, desprezando seus efeitos sobre o principal. Trata-se de uma visão que pode ser associada ao desembolso de caixa. Uma vez que a variação do principal não é paga juntamente com os cupons, sendo acumulada para ser paga somente ao final do prazo, ela não é contabilizada como custo de imediato. No caso de países onde a inflação é baixa e os cupons são muito próximos às taxas de juros de emissão, esse problema não é tão sério quanto seria, por exemplo, no caso brasileiro, mas ainda assim ele se faz presente. Na segunda medida, então, todo o estoque da dívida é corrigido para incorporar a distorção relativa à inflação do período sobre o principal. No caso da variação cambial, como a volatilidade do custo é bem maior, a estatística oficial é feita considerando-se os efeitos sobre o principal. No entanto, para mensurar os efeitos do câmbio sobre o custo, optou-se pela construção de um terceiro indicador que despreza os efeitos do câmbio sobre o principal. As principais medidas de risco utilizadas pelo Tesouro turco são o já mencionado *Cost at Risk (CaR)* e o *Conditional Cost at Risk (CCaR)*. A primeira medida refere-se ao 95º percentil da distribuição do custo ao final da simulação e a segunda, à média dos valores que ocorrem na calda da distribuição, isto é, a partir do 95º percentil. A primeira medida segue um padrão bem tradicional no gerenciamento de carteiras, é o valor máximo que a variável pode adquirir com uma confiança de 95%; enquanto a segunda é mais sofisticada e tenta caracterizar uma situação típica de uma zona de estresse.

O modelo é composto de três módulos: um banco de dados para caracterização do estoque da dívida, um motor para geração de cenários econômico-financeiros e um motor para geração de fluxos de caixa.

---

<sup>24</sup> Baseado no trabalho de Emre Balibek e Handi Alper Memis intitulado *Turkish Treasury Simulation Model for Debt Strategy Analysis* (2012).

O primeiro módulo foi construído em Access e possui registros detalhados de todo o estoque da dívida turca. A existência desse módulo, ou seja, de um banco de dados com as características de todos os instrumentos da dívida pública atual denota que tal modelo se propõe a encontrar uma estrutura ótima de dívida em termos de risco e custo para um horizonte definido, qual seja, os próximos cinco anos, considerando a dívida já contratada. Veremos mais adiante que o modelo brasileiro não responde exatamente ao mesmo tipo de pergunta, buscando uma composição ideal para um intervalo inespecífico, ao invés de uma composição ideal para um período particular. No caso turco, como grande parte da dívida a vencer nos próximos cinco anos já está contratada, as emissões tem um efeito bem menor no resultado final da simulação que, por exemplo, no caso brasileiro, tanto em termos de custo quanto em termos de risco.

O módulo gerador de cenários produz caminhos alternativos para as variáveis financeiras de interesse. Ele opera sob a plataforma do MATLAB e calcula a Necessidade de Financiamento a partir de hipóteses sobre o PIB e o superávit primário que, por sua vez, são obtidas das metas de médio prazo estabelecidas pelo governo para tais variáveis. No presente caso de estudo, cinco mil cenários foram gerados para cada estratégia. Esse motor é calibrado pelo usuário, faz previsões utilizando o ferramental de séries de tempo e trabalha a partir de choques aleatórios correlacionados entre si para as seguintes variáveis: curvas de juros soberanas em liras turcas (reais e nominais), dólares e euros; taxas de câmbio entre a lira e o dólar e entre a lira e o euro; e o índice de preços ao consumidor local.

A taxa de juros nominal de curto prazo pode ser prevista utilizando-se o modelo CIR ou o modelo CKLS. Tais modelos são bastante eficientes para o cálculo da taxa de juros de curto prazo, mas não para a de longo prazo<sup>25</sup>, de forma que o Tesouro turco decidiu adotar uma abordagem híbrida para a definição da estrutura a termo das taxas de juros. Esses modelos híbridos partem da taxa de curto prazo e utilizam a variação do modelo de Nelson e Siegel proposta por Diebold e Li.

Num primeiro passo estimam-se os parâmetros dessa formulação ( $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ ) para os dados históricos. Posteriormente,  $\beta_{2t}$  e  $\beta_{3t}$  (prospectivos) são igualados a  $\beta_2$  e  $\beta_3$  (parâmetros históricos), enquanto  $\beta_{1t}$  é o único fator a variar nas previsões. Valores ajustados desse parâmetro são calculados com base nos resultados dos modelos CIR ou CKLS, conforme a opção do usuário, com ajuda da seguinte equação:

---

<sup>25</sup> Essa afirmação baseia-se em testes empíricos. No caso do modelo CIR, diz o texto turco, foi demonstrado que ele consistentemente subestima taxas de longo prazo.

$$\beta'_{1t} = L_t - \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) - \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$$

Em que:

$\beta'_{1t}$ : Valor ajustado de  $\beta_1$

$L_t$ : Nível de previsão simulada para o curtíssimo prazo no período t

O Tesouro turco considera os deslocamentos paralelos de uma curva de juros positivamente inclinada como os movimentos mais relevantes a serem estudados no caso do país, mas como o modelo restringe mudanças na inclinação e na curvatura da estrutura a termo das taxas de juros, foi desenvolvido um suplemento que permite estudar ao menos as mudanças na inclinação baseando-se nas máximas e mínimas históricas.

No caso da taxa de câmbio, uma visão comum nos mercados financeiros é de que esta variável segue um passeio aleatório quando o regime é de câmbio flutuante, como no caso turco. Um Movimento Geométrico Browniano é um processo baseado num passeio aleatório que é consistente com o arcabouço de simulação multivariada do país.

O índice de preços ao consumidor também é modelado como um Movimento Geométrico Browniano. A intuição por trás desse modo de proceder é de que os preços têm uma importante interação com a taxa de juros e com a taxa de câmbio, resultando também num passeio aleatório em torno de uma tendência.

As taxas de juros reais são estimadas via regressões lineares simples baseadas em relações históricas entre taxas de juros nominais e reais para vencimentos comparáveis. As estimativas advindas da regressão são somadas com as estimativas de inflação e os resultados são comparados com as taxas de juros nominais para checagem de resultados.

Como no caso sueco, adotou-se um Modelo de Equações de Finanças. Portanto, o modelo requer a criação de números aleatórios correlacionados, o que é feito a partir de uma decomposição de Cholesky da matriz de covariâncias dos erros dos modelos das variáveis em estudo.

No caso básico do modelo turco, uma distribuição normal é utilizada para a geração de choques aleatórios, mas a plataforma também permite utilizar distribuições de caudas pesadas (*t* de Student) e choques assimétricos (também advindos da distribuição *t*). Existe ainda uma opção de estimação manual para produzir os cenários futuros, caso o gestor de dívida acredite que os dados históricos não refletem as condições futuras da economia.

O último módulo é o chamado motor de fluxo de caixa e no centro do trabalho desse motor está a chamada matriz de estoque da dívida. Nessa matriz, cada linha representa um instrumento de financiamento e cada coluna representa um atributo desse instrumento, tal como o cupom de juros, frequência de pagamento, moeda, data de emissão e de vencimento. O motor de fluxo de caixa recebe do módulo inicial as características da dívida existente através da matriz do estoque de dívida. Ele é alimentado também com hipóteses sobre o superávit primário e com o produto dos cenários gerados no segundo módulo, resultando na Necessidade de Financiamento para cada um dos próximos trimestres (fluxo de caixa). Tal Necessidade de Financiamento é suprida através de uma estratégia de emissão de dívida definida pelo usuário cujos resultados em termos de custos e riscos são objeto da análise do gestor. Assim, um número limitado de estratégias é testado.

Uma estratégia é dita eficiente, quando para um mesmo nível de risco não existe outra estratégia que apresente custo inferior. Estratégias ineficientes são descartadas durante a análise dos resultados, mas vale lembrar que uma estratégia que é eficiente segundo um critério pode não o ser se considerarmos outro e existem três possíveis abordagens para os custos.

Restrições de várias naturezas também podem ser impostas às colocações de títulos junto ao mercado e o gestor de dívida turca ressalta a importância da experiência do escritório encarregado dessas colocações para definir quais estratégias são passíveis de estudo. É sensato estabelecer limites mínimos e máximos para emissões de um determinado instrumento, tendo em vista tanto restrições de demanda por parte do mercado, quanto distorções de preços apresentadas por instrumentos pouco líquidos (prêmio de liquidez).

Por fim, as autoridades turcas ressaltam que os produtos e análises resultantes do modelo não podem ser os únicos critérios na hora da definição da estratégia de gerenciamento da dívida. É importante levar em consideração também o ambiente macroeconômico, as perspectivas do mercado de títulos e restrições advindas da estrutura da política econômica, além da já mencionada experiência dos responsáveis pela colocação de títulos em mercado.

#### 4.4 – Reino Unido<sup>26</sup>

O modelo que doravante chamaremos de modelo do Reino Unido não é propriamente um modelo oficialmente utilizado pelo país, que nunca chegou a ter metas específicas de composição para a dívida. Contudo, ele foi desenvolvido por um dos membros do escritório de gerenciamento de dívida britânico (*Debt Management Office* ou *DMO* na sigla em inglês) em parceria com uma segunda pessoa e foi durante algum tempo avaliado pela instituição, até ser descartado por não ter boa aderência à realidade depois da crise financeira de 2008.

Esse modelo compartilha da estrutura básica dos demais modelos apresentados e as simulações de estratégias, assim como no caso turco, restringem-se a alguns casos pontuais. Desta forma, também não existe a geração de uma Fronteira Eficiente para as carteiras de títulos.

As variáveis de controle no caso do Reino Unido, contudo, se distinguem dos demais casos apresentados. Adota-se uma medida de custo do serviço da dívida como proporção do PIB e o risco é medido simplesmente como o desvio padrão da primeira medida (volatilidade). O objetivo da política relacionada à dívida pública também está claramente expresso no modelo. Diferentemente dos modelos apresentados anteriormente, nos quais se pode estabelecer uma meta nominal para a redução da dívida, neste caso se busca pela estabilização da relação Dívida/PIB do país no seu patamar de longo prazo (tomado como sendo de 33%). Neste ponto, a formulação britânica se assemelha à brasileira. A única diferença entre elas é que o Brasil utiliza o conceito de dívida líquida, enquanto a Grã-Bretanha e todos os demais modelos apresentados neste trabalho utilizam o conceito de dívida bruta. A dívida líquida se diferencia da dívida bruta pelo fato de que a primeira, além dos passivos, também considera ativos financeiros do setor público, dentre os quais se destacam as reservas internacionais do país.

Isso nos leva a um ponto de convergência entre as abordagens da Turquia e do Reino Unido: ambas modelam a Necessidade de Financiamento, como forma de determinar as emissões necessárias, embora neste caso o objetivo seja manter estável a relação dívida/PIB ao invés de abater dívida nominalmente.

O modelo britânico apresenta mais uma característica em comum com o brasileiro. Ele não leva em consideração o estoque atual da dívida na sua formulação, ou seja, de início se supõe que em algum momento do tempo a composição do estoque é igual a da estratégia

---

<sup>26</sup> Baseado no trabalho de Andreas Pick e Myrvin Anthony intitulado *Simulation Model for the Analysis of the UK's Sovereign Debt Strategy* (2006).

que está sendo testada e a mesma composição é mantida até o final do horizonte de simulação.

O tipo de formulação macroeconômica utilizada pelo modelo do Reino Unido também é distinta da dos demais. Ao invés de um VAR (caso canadense), ou de um Modelo de Equações de Finanças (demais), no qual a ligação entre variáveis se faz através de choques correlacionados, adota-se um modelo macroestrutural. Isso significa que o comportamento da economia é regido por uma série de equações nas quais as variáveis de interesse estão relacionadas entre si. Os choques nestas variáveis, contudo, são independentes a cada etapa no tempo, seguindo como de hábito uma distribuição normal.

No caso britânico, os resultados são apresentados a partir de duas mil simulações e o horizonte dessas simulações é de 125 anos, ou 500 trimestres, embora uma medida de 100 trimestres também seja apresentada.

Utilizam-se cinco diferentes equações para a modelagem macroeconômica, sendo que uma delas serve simplesmente para a estimação do índice de preços ao varejo, indexador dos títulos públicos britânicos, a partir do índice de preços ao consumidor local, que é o índice que serve de referência para a política monetária. Dentre estas equações podemos distinguir uma curva IS, uma curva de Philips e uma regra de reação da autoridade monetária (regra de Taylor<sup>27</sup>). Utiliza-se uma abordagem de séries temporais na modelagem das equações e as variáveis podem estar defasadas de um período (modelo auto-regressivo de primeira ordem ou AR[1]), conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \alpha_t + \rho y_{t-1} - \beta(r_{t-1}(0) - cpi_{t-1}) + \varepsilon_{y,t} \\
 f_t &= \mu + \nu f_{t-1} - \pi y_{t-1} - \theta(d_{t-1} - d^*) + \varepsilon_{f,t} \\
 cpi_t &= \zeta(1 - \xi) + \xi cpi_{t-1} + \psi y_{t-1} + \varepsilon_{f,t} \\
 rpi_t &= \kappa + cpi_t + r_t(0) + \varepsilon_{rpi,t} \\
 r_t(0) &= \phi + cpi_{t-1} + \chi y_{t-1} + \varepsilon_{r(0),t}
 \end{aligned}$$

Em que:

$y_t$ : hiato do produto como proporção do PIB potencial (2,5%)

$r_t(0)$ : taxa de juros básica

$cpi_t$ : índice de preços ao consumidor

---

<sup>27</sup> John B. Taylor foi um dos precursores da literatura sobre funções de reação da autoridade monetária, introduzida em *Discretion versus Police Rules in Practice* (1993).

$rpi_t$ : índice de preços ao varejo

$f_t$ : necessidade de financiamento como proporção do PIB

$d_t$ : relação dívida/PIB

$d^*$ : relação dívida/PIB de longo prazo (33%)

$\varsigma$ : meta de inflação

$\alpha_t$ : parâmetro dependente do regime (*Markov switching intercept*<sup>28</sup>)

$\rho, \beta, \xi, \psi, \phi, \omega, \chi$ : parâmetros

A modelagem da taxa de juros nominal, como da maioria dos casos, é feita com base no modelo Nelson-Siegel reinterpretado por Diebold-Li. Os três fatores latentes (nível, inclinação e curvatura) são modelados a partir de considerações teóricas e empíricas. Por outro lado, a modelagem da curva de juros reais é bem mais simples, sendo obtida subtraindo-se da curva nominal a meta de inflação local, ou seja, ignorando-se o prêmio de inflação dos títulos nominais.

Vale também uma menção aos resultados encontrados. Na comparação entre estratégias de emissões de títulos prefixados foram considerados papéis de 1, 5, 10 e 30 anos. Os resultados, contudo, não foram consistentes nesta simulação, pois o custo obtido nas carteiras com maior quantidade de títulos longos foi menor do que nas carteiras com títulos curtos. Os autores atribuíram o resultado a uma curva de juros negativamente inclinada, mas isso por si só não explicaria o resultado, porque a despeito da inclinação da curva, a opção por uma rolagem utilizando instrumentos mais curtos tende a ser sempre mais barata, porque a estrutura a termo dos prêmios de risco dos títulos prefixados deveria ser sempre positivamente inclinada. Uma explicação teoricamente mais plausível para o resultado seria estrutura de prêmios negativamente inclinada em função de alguma falha específica do mercado. Quando a simulação foi realizada a partir de uma curva positivamente inclinada, os resultados continuaram inconsistentes, mas dessa vez as carteiras com títulos mais longos mostraram tanto mais risco quanto mais custo do que as carteiras com títulos mais curtos.

Na segunda simulação, que incluía o título de 30 anos indexado a inflação, os resultados foram melhores. Nesse caso, os dados sobre o alongamento da carteira perdem importância para o fato de que a introdução de títulos indexados a inflação faz da carteira algo mais volátil, mas diminui significativamente os custos da mesma.

---

<sup>28</sup> Modelo de duplo regime (recessão e crescimento).

## 4.5 – Canadá <sup>29</sup>

O modelo canadense é talvez o mais sofisticado modelo estocástico para a estratégia de dívida disponível no mundo. Uma característica em comum desse modelo com o modelo turco é o fato dele também considerar o estoque atual da dívida na sua análise, ou seja, dele também buscar por uma composição que minimize custos e riscos dentro de um horizonte definido, embora neste caso seja um horizonte de mais longo prazo (10 anos). Este modelo, contudo, apresenta diversas características distintivas que merecem a nossa atenção.

Uma das peculiaridades principais do modelo diz respeito à definição das variáveis de controle. Os custos são sempre definidos como sendo médias anuais do serviço da dívida para o horizonte de dez anos, mas os riscos dependem daquilo que o *Bank of Canada*, encarregado da gestão da dívida no país, define como “objetivos de política”. Esses objetivos são variados, mas podemos citar duas abordagens como sendo as principais: A primeira, mais direta, trata da volatilidade no serviço da dívida; já a segunda trata da volatilidade na Necessidade de Financiamento do governo, ou nas palavras do *Bank of Canada*, do seu “orçamento”. A intenção por trás dessa abordagem é de que o serviço da dívida seja o menor possível quando o governo passar por dificuldades na área fiscal. A métrica utilizada pelo *Bank of Canada* também é diferenciada em relação, por exemplo, ao modelo turco. Em primeiro lugar, utiliza-se prioritariamente um *Relative CaR* (CaR relativo), ao invés da medida absoluta, isto é, trabalha-se com a diferença entre o 95º percentil e sua média. Alternativamente, o risco também é medido no seu sentido mais comum, ou seja, através do desvio padrão da distribuição, vale dizer, ao invés de uma medida do extremo da distribuição, utiliza-se uma média da dispersão. Combinados, esses dois pares de conceitos de risco resultam em quatro possíveis métricas para o risco. À medida de extremo da distribuição do orçamento dá-se o nome de BaR (*Budget at Risk* – Orçamento em Risco). Por fim, no caso em estudo foram utilizados dez mil cenários para cada simulação de estratégia.

Um segundo aspecto distintivo do modelo canadense é a modelagem da Necessidade de Financiamento do país, composta pelo resultado primário das contas do governo e pela conta de juros da dívida. Receitas e despesas primárias dependem do estado da economia, cuja modelagem é parte integrante da simulação, enquanto a conta de juros depende dos custos da dívida antiga e das próximas emissões. Mas as características do estoque da dívida são conhecidas e a conta de juros futuros também é um subproduto do modelo canadense.

---

<sup>29</sup> Baseado nos trabalhos de Jamieson Bolder para o *Bank of Canada* intitulados *The Canadian Debt-Strategy Model* (2008) e *The Canadian Debt Strategy Model: An Overview of the Principal Elements* (2011). Neste último, houve uma parceria com Simon Deeley.

Logo, é possível determinar qual será o resultado nominal do governo (Necessidade de Financiamento). Isso não impede, contudo, que o governo tenha uma meta de redução definida para a dívida. De fato, o modelo contempla uma meta de amortização anual, mas o resultado esperado é de uma flutuação em torno dessa meta. Em anos de maior crescimento, a dívida diminui mais do que a meta e em anos de menor crescimento ela diminui menos. Isso ocorre por dois fatores básicos: Por um lado, as despesas do governo são em geral mais rígidas do que as receitas. Por outro, os governos frequentemente adotam uma postura anticíclica na economia, aumentando gastos em momentos de crise e os diminuindo em momentos de prosperidade. É certo que crises de natureza fiscal inviabilizam em grande medida esse tipo de atuação, mas quando os governos dispõem de algum espaço fiscal é natural que façam uso do mesmo. O crescimento é, portanto, a principal variável na determinação de receitas e despesas primárias do governo.

Outra característica distintiva do modelo canadense são as chamadas funções de penalização relativas a emissões. Se tais emissões ocorrem em patamares inferiores ou superiores a determinados níveis para um instrumento qualquer, seus custos dentro do modelo aumentam de forma não linear. Isso ocorre porque, por um lado, existe teto para a assimilação de cada tipo de instrumento pelo mercado. Teto este, a partir do qual o excesso de oferta do papel começa a refletir fortemente no preço do próprio título. Por outro lado, papéis que apresentam volumes muito pequenos em mercado via de regra pagam o chamado prêmio de liquidez – na realidade, um prêmio pela falta dela. Apesar das referidas funções apresentarem um forte grau de discricionariedade na sua formulação, o *Bank of Canada* acredita que seu modelo representa melhor a realidade com elas do que sem elas. Ademais, é um objetivo explícito do governo canadense a manutenção do bom funcionamento do mercado dos seus títulos, em conjunto com a minimização dos custos do serviço da dívida sujeita a manutenção dos riscos em patamares prudentes.

Neste ponto, vale mencionar que o modelo canadense conta com um módulo de otimização que visa encontrar as carteiras de menor custo para cada nível de risco dentro de um determinado intervalo. A restrição no nível de risco é imposta de acordo com a variável de controle escolhida que, como já vimos, pode ser de naturezas diversas, embora existam quatro vertentes principais. Através deste módulo, constrói-se a chamada Fronteira Eficiente da relação risco-custo da dívida pública canadense, bem como se obtém todas as carteiras que fazem parte dessa fronteira.

O portfólio analisado no caso canadense também é mais simples do que o turco ou o brasileiro, não apresentando títulos cambiais. De fato, somente oito ativos são considerados:

títulos prefixados de 3, 6 ou 12 meses sem pagamento de cupons (*treasury bills*), títulos prefixados de 2, 5, 10 e 30 anos com pagamentos de cupons e um único título de 30 anos com pagamento de cupons e indexação à inflação. A introdução deste título, contudo, faz necessária a correção do custo da dívida nos mesmos termos do caso turco para títulos indexados. Por sinal, dependendo de como é feita a contabilização de custos no país esse procedimento será mandatório. Não é, contudo, o caso brasileiro.

Por fim, vale a pena chamar à atenção para a modelagem dos cenários gerados no caso canadense. Utiliza-se um modelo do tipo VAR (*Vector Auto Regressive* ou Vetor Auto Regressivo) para a modelagem macroeconômica e financeira. Na parte macroeconômica, o modelo funciona com base em defasagens de três variáveis básicas: hiato do produto, inflação e a taxa de juros básica. Com auxílio de funções impulso-resposta é possível avaliar o funcionamento do modelo quando choques são simulados nessas variáveis. Assim como nos Modelos de Equações de Finanças, uma decomposição de Cholesky é utilizada na geração de choques correlacionados no VAR. Da mesma forma que nos outros modelos, trata-se de variáveis estacionárias, isto é, sua tendência é sempre voltar para uma condição de equilíbrio, e a granularidade do modelo é trimestral, apesar do resultado ser apresentado na forma de uma média de custo anual de longo prazo (dez anos).

Não obstante, a curva de juros possui cinco diferentes possibilidades de modelagem. Além da já mencionada variação do modelo Nelson-Siegel proposta por Diebold-Li, pode-se ainda gerar cenários com base em outros quatro modelos e, a depender do modelo, os resultados são diferentes, pois as curvas de juros geradas por eles também o são. Em alguns casos, as diferenças são pequenas, mas em outros não. A conclusão do gestor de dívida canadense a esse respeito é de que não se pode ignorar neste caso o risco associado à escolha do modelo.

Some-se a isto o fato de que diferentes formas de se definir risco também geram diferentes resultados e, segundo o gestor de dívida canadense, veremos que, apesar deste ser um exercício válido para subsidiar a definição de uma estratégia, os resultados obtidos não substituem a experiência e a sensibilidade do gestor.

### Quadro Resumo da Experiência Internacional

País	Indicadores	Resumo	Autor / Ano
Dinamarca	<p><b>Custo:</b> Serviço da anual da dívida ao longo dos 10 anos de simulação.</p> <p><b>Risco:</b> Custo máximo esperado (com intervalo de confiança de 95%) para o serviço da dívida.</p>	Não discute composição, somente duração do portfólio de prefixados composto por dois títulos e derivativos, simulações restringem-se a curvas de juros.	<i>Danmarks National Bank(2007)</i>
Suécia	<p><b>Custo:</b> Taxa de Carregamento do estoque da dívida em vários pontos ao longo de 30 anos.</p> <p><b>Risco:</b> Taxa máxima de carregamento esperada (com intervalo de confiança de 95%).</p>	Somente dois títulos prefixados, composição dada, mas há títulos cambiais e indexados a inflação, portanto é necessário simular o comportamento de variáveis macroeconômicas. Modelo de Equações de Finanças.	Escritório Central de Gerenciamento de Dívida Sueco (2008)
Turquia	<p><b>Custo:</b> Serviço anual da dívida durante intervalo de cinco anos baseado nas saídas de caixa (desconsidera variação do principal dos títulos indexados a inflação por conta do indexador); Serviço da dívida baseado na variação do estoque (considera variação do principal dos títulos indexados a inflação); Serviço da dívida, desconsiderada a variação de principal em função de variações cambiais.</p> <p><b>Risco:</b> Custo máximo esperado para o serviço da dívida (com intervalo de confiança de 95%) e média do custo na cauda da distribuição (situação de estresse).</p>	Destaca-se por trabalhar a partir do estoque atual de títulos, modelagem de inúmeras variáveis macroeconômicas, Modelo de Equações de Finanças que pode trabalhar com distribuições de caudas pesadas. Utiliza abordagem híbrida entre CIR e Nelson Siegel para curvas de juros nominais com curvas de mesmo formato para cada nível de taxas de juros. Entretanto, permite simulações de mudanças de inclinação a partir de dados históricos.	Emre Balibek e Handi Alper Memis (2012)

Inglaterra	<p><b>Custo:</b> Serviço da Dívida como percentual do PIB depois de 25 anos e 125 anos.</p> <p><b>Risco:</b> Volatilidade do Serviço da Dívida como percentual do PIB.</p>	<p>Busca estabilização da relação Dívida/ PIB em oposição aos demais, modelagem macroestrutural das variáveis macroeconômicas, apresenta resultados inconsistentes para parte da simulação.</p>	<p>Andreas Pick e Myrvin Anthony (2006)</p>
Canadá	<p><b>Custo:</b> Custo médio do serviço da dívida como percentual do estoque para intervalo de dez anos.</p> <p><b>Risco:</b> Volatilidade ou custo máximo esperado (com intervalo de confiança de 95%) para o serviço da dívida ou para resultado nominal do governo (quatro variáveis de controle principais). Além dessas variáveis, diversas outras possibilidades são apresentadas e testadas.</p>	<p>Trabalha a partir do estoque atual de títulos, modela dinâmica fiscal do governo, estabelece funções de penalização dependendo das quantidades emitidas, possui módulo de otimização para diversos objetivos de política (parâmetros de controle), obtém a fronteira eficiente da relação risco-custo da dívida, modela juros de cinco formas diferentes e utiliza VAR para modelagem das variáveis econômico-financeiras.</p>	<p>Jamieson Bolder para o <i>Bank of Canada</i> (2008 e 2011)</p>

## Seção 5 – Variáveis de Controle para o Risco da Dívida Pública

Conforme vimos, não há consenso sobre qual a variável mais adequada para a medição do risco da dívida pública. De fato, não existe sequer uma discussão ampla a respeito do assunto. Na maioria das vezes, o orçamento e as metas fiscais são apresentados de forma nominal e, por isso, a maior parte das análises caminha na referida direção. Em um de seus trabalhos sobre o Modelo de *Benchmarks*, o *Bank of Canada* limita suas discussões a respeito do assunto a este único argumento. No caso turco, a discussão é ainda mais superficial, limitando-se ao fato de que o mais comum é que os riscos associados à dívida pública sejam medidos em termos de variáveis nominais. Ambos os países adotam o *Cost at Risk* (variável mais amplamente utilizada) para controle do risco referente à dívida pública, apesar do Canadá utilizar também outras formas para medir esse risco. Interessante notar, no entanto, que os resultados finais do modelo dependem da escolha da variável de controle, conforme atestam os próprios trabalhos canadenses.

Numa outra linha, o escritório de gerenciamento de dívida britânico diz que a apuração dos custos da dívida como proporção do PIB oferece um melhor retrato da situação financeira do país. Além disso, essa métrica também se adéqua às metas fiscais inglesas, que são definidas em relação ao PIB. Por fim, ele completa que esse tipo de meta obedece a um critério rudimentar de ALM (*Asset Liability Management* - Gerenciamento de Ativos e Passivos), na medida em que o custo da dívida está relacionado com a fonte através da qual o governo assegura suas receitas de impostos (PIB), que são seus principais ativos.

No nosso entender, a chave para a escolha da melhor variável de controle para os riscos associados à dívida pública está na compreensão dos objetivos originais dos Modelos de *Bechmarks*. Um dos pilares desse tipo de modelo está na literatura sobre *tax smoothing*<sup>30</sup>. Esta nos diz que um sistema tributário eficiente se rege pela estabilidade no tempo. Contudo, para que a carga tributária possa ficar constante no tempo, é necessário que o resultado nominal do governo também fique relativamente estável. Caso contrário, haverá pagamento ou acúmulo de dívida de forma sistemática. O primeiro caso não chega a ser preocupante, podendo até mesmo ser desejável, a depender dos objetivos de governo. Ainda assim, melhor seria que houvesse relativa estabilidade no resultado positivo e, por conseguinte, no abatimento da dívida. Dessa forma, também o nível de gastos poderia ser preservado durante

---

<sup>30</sup> Para mais referências sobre *tax smoothing* e dívida pública ver Robert Barro em *Notes on Optimal Debt Management* (1995).

determinado tempo, a partir do qual impostos pudessem ser reduzidos ou os gastos elevados. Já o segundo caso é mais complexo: Em uma primeira análise poderíamos supor que toda a dívida gerada teria que ser paga com o produto de novos impostos ou sacrifícios de gastos do governo em algum momento no futuro. Contudo, isso não necessariamente é verdade. Se a dívida aumentar de forma muito errática ou a taxas estáveis, mas suficientemente altas, haverá em algum momento a percepção de insustentabilidade por parte dos investidores, que frequentemente adquire contornos de profecia auto-realizável. Não obstante, se a dívida aumentar de forma relativamente estável e a taxas suficientemente pequenas, não existe grande prejuízo para a rolagem da mesma, pois a capacidade de pagamento do governo também aumenta conforme o país cresce, afastando a possibilidade de inadimplência. Por isso, alguns países adotam como meta implícita ou explícita a manutenção de um patamar estável na relação dívida/PIB. Tudo isso considerado, parece mais razoável que se busque, não pela estabilidade dos custos da dívida em si, mas de forma mais ampla pela estabilidade no resultado final das contas do governo.

É isso que o *Bank of Canadá* tenta fazer quando adota o enfoque do *Budget at Risk*. Dentro desse contexto, o modelo contempla duas possibilidades: pode-se trabalhar com uma meta de abatimento nominal de dívida ou simplesmente com a possibilidade de manter estável a dívida no seu atual patamar nominal (meta de abatimento de dívida zero). Em ambos os casos, é necessário que haja superávit primário para pagar, pelo menos, o serviço da dívida. Esse superávit é que ditará o comportamento estável ou declinante da dívida pública no longo prazo, muito embora o modelo contemple desvios de curto prazo. Poderíamos pensar ainda, sem grandes prejuízos, numa meta de abatimento de dívida negativa, ou seja, num pequeno aumento da dívida no tempo. Ocorre que, quando a medida do risco muda do *Cost at Risk* para o *Budget at Risk*, a carteira ideal também muda em favor de uma maior presença de títulos indexados a inflação. Isso acontece pelo fato de que o serviço da dívida resultante da presença desses títulos no passivo faz um contraponto natural para a arrecadação. Se houver inflação, o PIB nominal crescerá por força da elevação no nível de preços e com ele a arrecadação. Por outro lado, o serviço da dívida como um todo também crescerá na presença dos referidos títulos. Dessa forma, o resultado nominal tende a ser mais neutro na presença de títulos indexados a inflação. O enfoque, contudo, continuou sendo somente em variáveis nominais.

O mesmo efeito ocorre quando o modelo pressupõe metas em termos da estabilização da relação dívida/PIB, conforme também observaremos quando abordarmos o modelo brasileiro. Uma possível explicação para isso reside no fato de que, nesta abordagem, a

capacidade de pagamento do governo também tem uma relação direta com o PIB. Não obstante, vale destacar que os tratamentos são diferentes, pois a arrecadação depende do PIB, mas também de outras variáveis, que fazem com que ela tenha uma dinâmica própria, muito embora exiba boa correlação com o produto.

Ambos os procedimentos descritos nos últimos parágrafos nos parecem igualmente válidos e a escolha entre eles decorre (agora sim) mais que tudo da forma como o governo vê suas metas em relação à dívida pública no longo prazo. Esses procedimentos nos parecem superiores a uma visão de riscos associados à dívida que a desvinculem totalmente do contexto fiscal no qual ela está intrinsecamente inserida. Fato é que a evolução da dívida pública no tempo depende em primeiro lugar do resultado da política fiscal e só depois do seu próprio gerenciamento. Tratar o risco da dívida de forma individual só faz sentido quando esse resultado fiscal é absolutamente estável, situação que é muito pouco observada na prática. De outra forma, isso se traduz por abrir mão de alguma liberdade no gerenciamento da dívida, pois significa ignorar a correlação entre a política fiscal e estratégia de longo prazo para essa dívida, sobre a qual o gestor tem algum controle. Idealmente, o serviço da dívida deveria servir como um amortecedor do resultado nominal do governo, sendo maior quando o resultado primário fosse bom e menor em caso de um resultado primário ruim ou, pelo menos, colaborar o menos possível para um aumento da volatilidade desse resultado. Em outros termos, quanto maior a correlação entre superávit primário e o serviço da dívida, melhor e, ao alterar a composição, mudamos também a referida correlação. Sabemos, no entanto, que a capacidade do gestor de dívida influenciar no resultado nominal como um todo é muito inferior a de influenciar no comportamento da própria dívida. Mesmo assim essa capacidade não deveria ser ignorada.

No caso brasileiro, optou-se pela estabilização da trajetória DLSP/PIB, em consonância com os objetivos de política do país. Contudo, é preciso ter em mente que esse método apresenta a desvantagem de não mensurar de forma mais precisa as receitas e despesas do governo, aproximando o comportamento do saldo dessas duas contas pelo comportamento do PIB, quando as receitas, por exemplo, costumam exibir um comportamento mais volátil que o produto. Nesse sentido, a correlação sobre a qual tratamos no parágrafo anterior é mais tênue do que poderia ser em uma modelagem do resultado nominal. A questão fundamental é que o problema de estabilização da dívida pública no país não é nem precisa ser necessariamente visto em termos nominais.

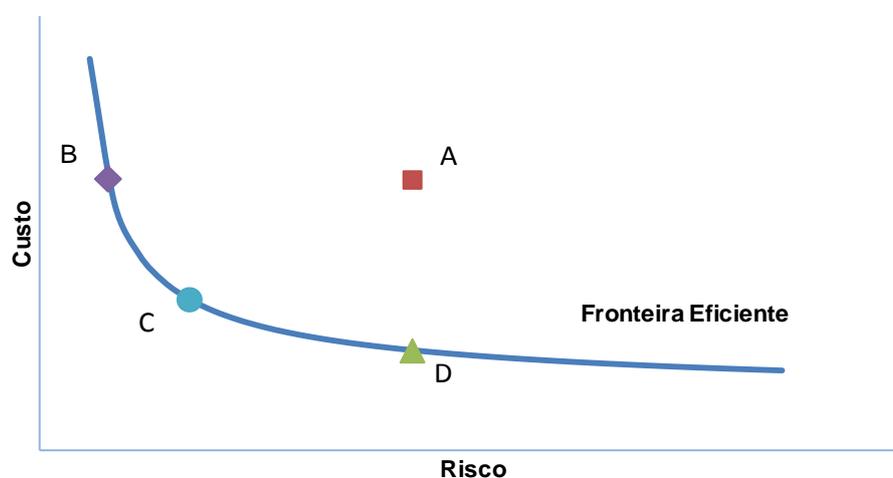
## Seção 6 - O Modelo Brasileiro de Composição Ótima da Dívida Pública Federal<sup>31</sup>

O modelo brasileiro para obter a composição ótima (Modelo de *Benchmarks*), assim como todos os modelos do gênero, pode ser visto em última instância como uma aplicação da moderna teoria de finanças, mais precisamente da Teoria do Portfólio<sup>32</sup>, geralmente utilizada na definição de uma carteira de ativos. No nosso caso, contudo, utilizaremos o modelo para definir a composição ideal do nosso passivo. Basicamente, esta teoria nos mostra como compor o risco e o retorno de um grupo de ativos individuais para encontrar uma composição ideal para uma carteira composta por uma combinação qualquer desses ativos.

O procedimento descrito na teoria de Markowitz se inicia com a determinação da chamada “Fronteira Eficiente”, ou seja, do conjunto de carteiras que possui o maior retorno para cada nível de risco, ou de modo análogo, do conjunto de carteiras que possui o menor risco para cada nível de retorno. No nosso caso, no entanto, buscaremos pelas carteiras com o menor nível tanto de custo quanto de risco para a DLSP.

A figura 2 ilustra a Fronteira Eficiente do caso em estudo e mostra três possibilidades de escolha nessa fronteira (B, C e D), enquanto o ponto A, apesar de factível, não seria uma boa escolha, tendo em vista que existem pontos com menor custo e o mesmo nível de risco, a exemplo do ponto D; com menor risco para o mesmo nível de custo, a exemplo do ponto B; ou ainda com níveis de custo e risco menos elevados, como no caso do ponto C.

**Figura 2 – Fronteira Eficiente**

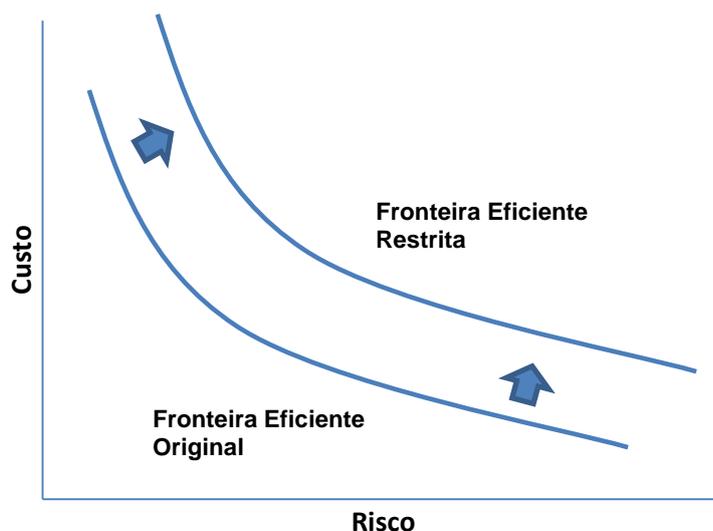


<sup>31</sup> Baseado em trabalho publicado da Secretaria do Tesouro Nacional intitulado Composição Ótima da Dívida Pública Federal: Definição de uma Referência de Longo Prazo, 2011.

<sup>32</sup> Teoria introduzida por Henry Markowitz através do trabalho *Portfolio Selection* de 1952.

Vale observar ainda, que ao nosso problema de minimização de riscos e custos podem ser adicionados outros condicionantes, dentre as quais podemos citar restrições de demanda, prazo médio da carteira ou de outra natureza. Cada novo condicionante faz a Fronteira Eficiente se mover para assimilar mais custos e/ou riscos (para cima e para a direita na figura 3).

**Figura 3 – Fronteira Eficiente Restrita**



### **6.1 – A Dinâmica da Dívida Líquida do Setor Público Brasileiro**

O primeiro passo na determinação da Fronteira Eficiente é escolher a variável de controle. Conforme já mencionado em sessão anterior, a nossa variável básica de controle é a Dívida Líquida do Setor Público como proporção do PIB. A opção pela dívida líquida se dá porque ela leva em consideração não só os passivos do governo, mas também os ativos, o que garante uma visão um pouco mais ampla da situação do país, algo semelhante a um balanço no caso de uma empresa. Nosso objetivo é obter uma distribuição de probabilidades para o custo dos portfólios, que obedecerá à caracterização mais amplamente difundida no campo da estatística, ou seja, faremos uso da média e do desvio padrão da distribuição do custo (medido em termos da taxa de carregamento) da DLSP para mostrar, respectivamente, custo e o risco dessa variável.

Para calcular a evolução da Dívida Líquida do Setor Público como percentual do PIB, o primeiro passo e o mais fundamental, tendo em vista o nosso objetivo, é determinar como a Dívida Pública Federal irá se comportar. O montante desta dívida é dado pela DPF no

período anterior (estoque) acrescido de seu custo de carregamento, mais a variação da base monetária, menos o superávit primário, conforme a equação a seguir:

$$DPF_t = (DPF_{t-1} \cdot (1 + R_t^D)) + \Delta BM_t - sp_t$$

A variação da base monetária torna necessária a emissão ou o cancelamento de títulos da dívida pública para fins de política monetária<sup>33</sup>. Para fins de caracterização do nosso modelo, no entanto, adotaremos como pressuposto uma base monetária que se mantém constante como proporção do Produto Interno Bruto, tendo em vista sua baixa relevância na dinâmica da DLSP em termos de custo e risco.

Adotaremos também o pressuposto básico de que o serviço da DLSP será custeado exclusivamente pela geração de nova dívida. Dito de outra forma, o superávit primário do governo será sempre igual à zero. Como se vê, a priori, não existe nesse trabalho qualquer consideração sobre a sustentabilidade da dívida. No entanto, numa segunda análise imporemos restrições à Fronteira Eficiente, o que em certa medida equivale a tentar impedir que a dívida assuma valores que possam resultar na percepção de uma trajetória insustentável para ela em um momento qualquer do horizonte da simulação.

O interesse principal do modelo é verificar como a DLSP reage a uma série de possibilidades de choques “normais”<sup>34</sup> nas principais variáveis econômicas e financeiras de acordo com a composição adotada para a DPF. Buscamos uma composição com custos tão estáveis e baixos quanto possível. Essa abordagem vai ao encontro da literatura de tributação ótima, que recomenda o chamado “*tax smothering*”, ou seja, uma carga tributária constante, que permita aos agentes econômicos manter a consistência intertemporal de suas decisões, garantindo eficiência ao sistema econômico<sup>35</sup>. Observadas as hipóteses iniciais, nossa equação de dinâmica da DPF se resume a seguinte expressão:

$$DPF_t = (DPF_{t-1} \cdot (1 + R_t^D)) + \Delta BM_t$$

---

<sup>33</sup> Na realidade, somente ocasionalmente é necessária a efetiva emissão de títulos públicos para o Banco Central e nunca ocorreu cancelamento dos títulos que são emitidos para a entidade. No critério do próprio Banco Central, somente os títulos utilizados como lastro nas suas operações compromissadas são computados como dívida pública, ficando os demais na condição “livre”.

<sup>34</sup> Todos os choques simulados no presente trabalho obedecem a uma distribuição normal.

<sup>35</sup> Trata-se, no entanto, de uma abordagem parcial do problema, pois a estabilidade da carga tributária depende em última análise do resultado nominal do governo, do qual o serviço da dívida é somente uma parte.

O custo de carregamento da DPF é definido como o somatório dos percentuais da DPF vinculados a um determinado indexador multiplicados pela taxa de carregamento desse indexador no período em análise, conforme a equação a seguir:

$$R_t^D = \lambda_{SELIC} R_t^{SELIC} + \lambda_{PRE} R_t^{PRE} + \lambda_{IPCA} R_t^{IPCA} + \lambda_{Cambia} R_t^{C\u00e2mbio} \quad \square$$

O custo de carregamento dos t\u00edtulos indexados \u00e0 taxa SELIC<sup>36</sup> ser\u00e1 dado simplesmente pela varia\u00e7\u00e3o acumulada do indexador no per\u00edodo, ou seja, eventuais \u00e1gios e des\u00e1gios com que s\u00e3o negociadas as LFT's (Letras Financeiras do Tesouro) ser\u00e3o desconsiderados por conta do seu efeito marginal no pre\u00e7o do t\u00edtulo. Segue a f\u00f3rmula de c\u00e1lculo do custo de carregamento dos t\u00edtulos indexados \u00e0 SELIC:

$$R_t^{SELIC} = \frac{d(SELIC_t)}{SELIC_t}$$

O custo de carregamento de um determinado t\u00edtulo prefixado<sup>37</sup> ser\u00e1 dado pela m\u00e9dia ponderada das taxas de emiss\u00e3o desse t\u00edtulo, conforme a seguinte equa\u00e7\u00e3o:

$$R_t^{PRE} = \sum_{s=0}^n \omega_{t-s} r_{t-s}$$

Em que:

$\omega_{t-s}$  \u00e9 o percentual do instrumento emitido em  $t - s$  da carteira desse instrumento

$r_{t-s}$  \u00e9 o custo de emiss\u00e3o em  $t - s$

Nesse ponto, cabe observar que o modelo pressup\u00f5e tamb\u00e9m um perfil de matura\u00e7\u00e3o constante, ou seja, que os vencimentos est\u00e3o uniformemente distribu\u00eddos ao longo do tempo. Assim, todos os meses temos o mesmo valor agregado de t\u00edtulos vencendo e sendo refinanciados, provavelmente a novas taxas. N\u00e3o obstante, apesar de todos esses t\u00edtulos terem o mesmo valor agregado na matura\u00e7\u00e3o, o valor presente deles em um momento qualquer \u00e9 diferente, tanto pelo efeito do prazo at\u00e9 o vencimento quanto por conta de

<sup>36</sup> Taxa m\u00e9dia apurada no Sistema Especial de Liquida\u00e7\u00e3o e Cust\u00f3dia para opera\u00e7\u00f5es de empr\u00e9stimos de um dia lastreadas em t\u00edtulos p\u00fablicos.

<sup>37</sup> Conforme voltaremos a mencionar \u00e0 frente, nossa an\u00e1lise inicial somente considera carteiras contendo 100% de um determinado instrumento e carteiras com 50% de cada ativo que dela fa\u00e7a parte. Na segunda hip\u00f3tese, o custo de carregamento da carteira ser\u00e1 a m\u00e9dia simples dos custos dos dois ativos que a comp\u00f5e.

eventuais diferenças de taxas de emissão do instrumento. Portanto, para calcular os pesos de cada título na carteira do instrumento, é necessário calcular o valor presente de cada vencimento e também o valor total do estoque do título em questão, o que pode ser feito através da seguinte fórmula<sup>38</sup>:

$$\omega_{t-s} = \frac{(1 + r_{t-s})^{-s}}{\sum_{s=0}^{\tau} (1 + r_{t-s})^{-s}}$$

Em que  $\tau$  é o prazo até o vencimento do instrumento.

As taxas (também chamadas cupons) dos títulos cambiais e indexados a inflação ( $R_t^{IPCA}$  e  $R_t^{C\grave{a}mbio}$ ) são calculadas da mesma forma que as taxas dos títulos prefixados, inclusive no que tange aos pesos de cada taxa de emissão na carteira total, mas nesse caso, para obter o custo de carregamento, é necessário também considerar a variação do indexador no período. Para os títulos indexados ao IPCA, temos:

$$R_t^{IPCA} = \left(1 + \frac{d(IPCA_t)}{IPCA_t}\right) (1 + R_t^{IPCA}) - 1$$

A fórmula de cálculo para os títulos cambiais só se diferencia pelo indexador. Dessa forma, temos:

$$R_t^{C\grave{a}mbio} = \left(1 + \frac{d(C\grave{a}mbio_t)}{C\grave{a}mbio_t}\right) (1 + R_t^{C\grave{a}mbio}) - 1$$

A DLSP é calculada no nosso modelo como a soma da DPF, base monetária (BM), reservas internacionais e outros ativos líquidos do setor público (os dois últimos com o sinal negativo por serem ativos), conforme equação a seguir:

$$DLSP_t = DPF_t + BM_t - Reservas_t - Ativos_t \quad \square$$

---

<sup>38</sup> A fórmula apresentada se assemelha à fórmula de precificação de uma LTN (Letra do Tesouro Nacional), muito embora para o modelo seja irrelevante o instrumento utilizado. Por simplicidade, nossas considerações normalmente estarão direcionadas a títulos sem cupons.

Para as reservas internacionais, faremos a hipótese simplificadora de que todos os ativos são remunerados através da LIBOR<sup>39</sup> (London Interbank Offered Rate) de 6 meses. Nesse caso, é imprescindível considerar também o efeito do câmbio na rentabilidade. Dessa forma, a remuneração das reservas será dada pela seguinte equação:

$$R_t^{Reservas} = (1 + LIBOR) \left( 1 + \frac{d(\text{Câmbio})}{\text{Câmbio}} \right)$$

Por fim, para efeito de síntese, nosso modelo considerará os outros ativos líquidos da União como sendo ativos indexados a TJLP<sup>40</sup> (Taxa de Juros de Longo Prazo), dado que a maior parte desses ativos são empréstimos do BNDES (Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social) junto ao governo federal e esses empréstimos são na sua maioria remunerados com base nesse indexador. Utilizaremos a notação  $R_t^{TJLP}$  para a remuneração dos outros ativos e passivos da união.

Dividindo todos os termos da equação da DLSP pelo Produto Interno Bruto e colocando cada termo em função do seu valor defasado de um período e do seu custo de carregamento ou rendimento, assim como do crescimento do PIB, que denotaremos por  $R^{PIB}$ , resulta a seguinte equação dinâmica da DLSP:

$$\frac{DLSP_t}{PIB_t} = \frac{DPF_{t-1}(1 + R^D)}{PIB_{t-1}(1 + R^{PIB})} + \frac{BM_{t-1}}{PIB_{t-1}} - \frac{Reservas \cdot (1 + R_t^{Reservas})}{PIB_{t-1}(1 + R^{PIB})} - \frac{Ativos \cdot (1 + R_t^{TJLP})}{PIB_{t-1}(1 + R^{PIB})}$$

A partir da leitura atenta da equação apresentada, saltam aos olhos duas conclusões iniciais: A primeira delas já foi anteriormente mencionada, trata-se do fato de que ativos com boa correlação com o PIB nominal servem de proteção natural contra variações na carteira da DLSP. A segunda é que ativos indexados à variação do dólar servem de proteção contra variações no valor em reais (nossa moeda base) das reservas internacionais. No entanto, este tipo de proteção é custosa, tendo em vista que os títulos cambiais emitidos pelo governo brasileiro geralmente custam mais do que a remuneração das reservas. Podemos descrever

<sup>39</sup> Taxa de juros para empréstimos entre bancos sem garantia no mercado internacional.

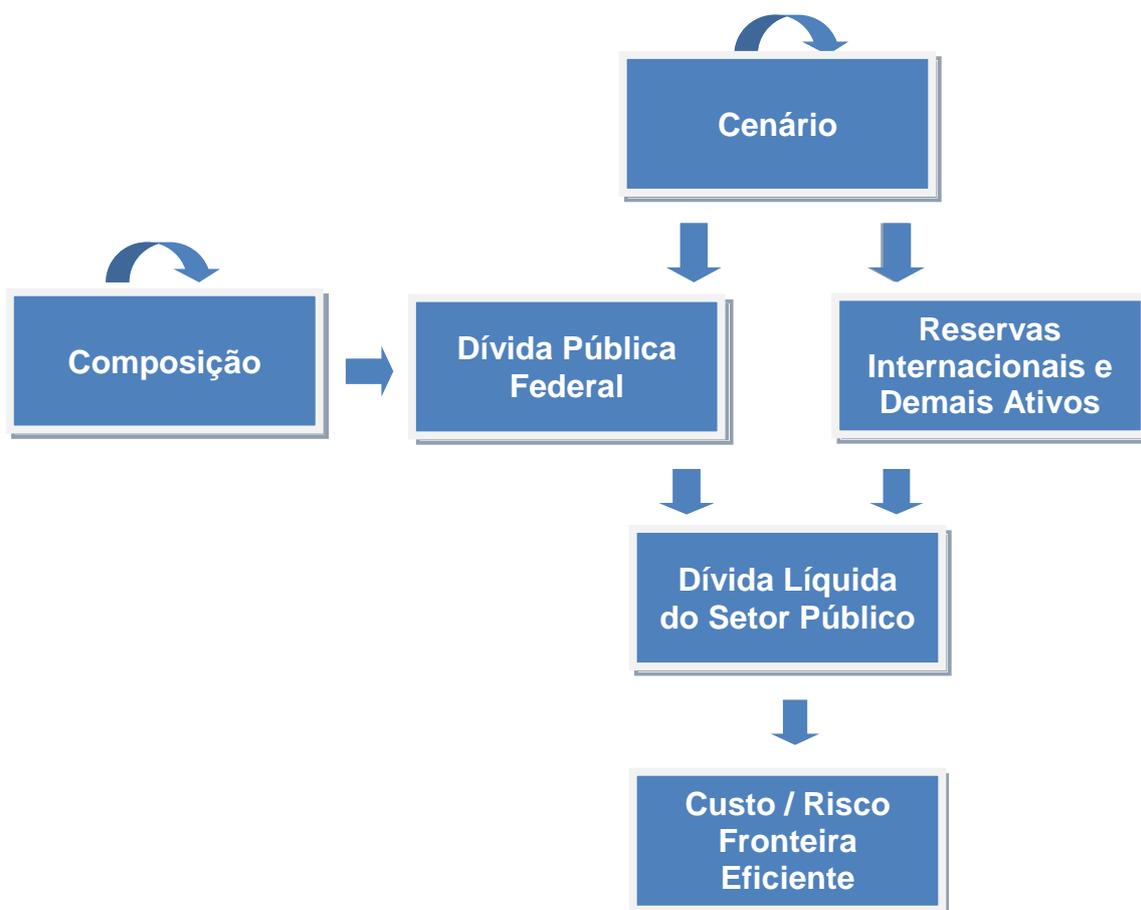
<sup>40</sup> Taxa fixada pelo Conselho Monetário Internacional e que serve como base para empréstimos do BNDES.

esses efeitos como primários, mas a diversificação da carteira implica efeitos secundários que também são importantes no resultado final.

## 6.2 – Estrutura do Modelo

O modelo brasileiro para determinação da composição ótima da Dívida Pública Federal compartilha a estrutura básica dos demais modelos estocásticos de estratégia de dívida, mas se diferencia por ser um modelo para dívida líquida ao invés da dívida bruta. Isso não muda em nada a estrutura básica apresentada anteriormente, mas torna necessárias simulações de variáveis adicionais quando da geração dos cenários econômico-financeiros. Dessa forma, também no nosso caso haverá três níveis de recorrência. Abaixo, apresentamos um diagrama específico para o modelo brasileiro, que ressalta suas peculiaridades em relação aos demais.

**Figura 4 - Diagrama Esquemático do Modelo Brasileiro**



No primeiro nível de recorrência, é escolhida a composição a ser testada. Na figura 4, a seta sobre a caixa da “Composição” ressalta o fato de que existe a necessidade de que diversas carteiras sejam geradas. Da mesma forma, a seta sobre a caixa “Cenário” demonstra que serão gerados múltiplos caminhos para as variáveis econômico-financeiras. Nestes caminhos destaca-se ainda a recorrência temporal, na medida em que vários períodos serão analisados. Além disso, é preciso recordar que os mesmos cenários servem de base para todas as composições.

A composição depende do conjunto de instrumentos a ser testado. No presente exercício, consideraremos o conjunto de 11 títulos listado a seguir:

Prefixados: 1, 3, 5, 10 e 20 anos

Indexados ao IPCA: 5, 10 e 30 anos

Prefixados em dólares: 10 e 30 anos

Indexado à Selic: 5 anos

Uma possível abordagem (talvez a mais comum) seria gerar um número suficientemente grande de carteiras e suas respectivas representações no plano risco-custo e posteriormente determinar a Fronteira Eficiente a partir da envoltória desses pontos. Esse tipo de abordagem, contudo, é muito custoso do ponto de vista computacional, considerando que, para cada carteira, temos que utilizar milhares de cenários que se estendem por períodos também muito longos. A plataforma que utilizamos na simulação (MATLAB) possui uma biblioteca de funções financeiras, dentre as quais existe um módulo que gera diretamente a Fronteira Eficiente a partir dos retornos de ativos individuais e da matriz de correlação dos retornos desses ativos<sup>41</sup>. Isso simplifica bastante a nossa situação, pois dessa forma podemos nos ater ao cálculo dos custos e dos desvios padrões das carteiras compostas por um único ativo e pelas carteiras compostas por todas as combinações possíveis do conjunto dos ativos individuais dois a dois, em uma proporção de 50-50%. Na realidade, as carteiras com dois ativos servem somente para a determinação da matriz de correlação entre eles. Simuladas as carteiras individuais, disporemos das variâncias de cada um dos ativos e simulando os pares de 50%, teremos a variância das carteiras com quantidades iguais de cada um dos ativos. Da estatística, emprestamos a seguinte relação entre variâncias:

---

<sup>41</sup> Para utilizar essa biblioteca no nosso tipo de aplicação, é necessário trabalhar com custos como se fossem retornos negativos.

$$\sigma^2(aX + bY) = a^2 \cdot \sigma_A^2 + b^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot cov(A, B)$$

Em que  $a$  e  $b$  podem ser interpretados como as proporções de um determinado ativo numa carteira. Desenvolvendo, chegamos à fórmula que rege a covariância entre os ativos individuais.

$$cov(A, B) = \frac{\sigma^2(0,5 \cdot X + 0,5 \cdot Y) - 0,25 \cdot \sigma_A^2 - 0,25 \cdot \sigma_B^2}{0,50}$$

As combinações dos 11 ativos individuais dois a dois são 55 ao todo. Dessa forma, além das 11 carteiras com ativos individuais, que nos darão custos e desvios padrões, calcularemos outras 55 carteiras, que nos darão as covariâncias e, portanto, as correlações entre os ativos, de maneira que possamos obter nossa Fronteira Eficiente.

Nesse ponto, cabe observar que a Fronteira Eficiente só será uma função contínua caso a matriz de correlação seja semi-definida positiva, o que é verdade em alguns casos, mas não em todos eles.

Uma matriz é semi-definida positiva quando é simétrica e todos os seus auto-valores são não negativos. No caso da matriz de correlação, a primeira premissa é sempre atendida, mas não a segunda. A maneira de corrigir um possível problema dessa natureza é utilizar uma decomposição espectral. Nesse procedimento, os valores negativos dos auto-valores são substituídos por zeros e a matriz original é reconstruída a partir dos novos auto-valores. Como são sempre poucos os auto-valores negativos esta é considerada uma aproximação bastante razoável pela literatura especializada<sup>42</sup>. Ademais, o procedimento de criar um invólucro numa nuvem de pontos também se constitui em uma aproximação, geralmente considerada aceitável por todos.

Passemos agora à discussão dos demais níveis de recorrência do nosso modelo. O segundo nível exige a definição do número de simulações para as nossas variáveis econômico-financeiras. No presente caso, optamos por 2500 diferentes caminhos para as nossas variáveis, quantidade que se mostrou suficiente para uma convergência de respostas. No terceiro nível de recorrência, optamos por utilizar um intervalo de 10 anos com granularidade mensal, ou seja, serão 120 períodos. Esses diferentes caminhos tomados pelas variáveis constituem nossos “cenários” e a seta acima da caixa com esse nome no singular na figura 4 denota os dois níveis de recursividade do nosso modelo nela incluídos. Esse novo

---

<sup>42</sup> Ver P. JÄCKEL em *Monte Carlo Methods in Finance* (2001).

diagrama também procura ressaltar o fato de que os cenários são os mesmos para diferentes carteiras testadas e que eles incluem outros parâmetros da DLSP além da DPF, cuja composição é o principal objeto do nosso estudo.

Antes de passarmos à especificação de cada uma das variáveis econômico-financeiras do modelo, vale à pena discorrer um pouco sobre duas das suas mais importantes características: o estado estacionário e a consistência macroeconômica.

### **6.3 – O *Steady State* (Estado Estacionário)**

Nosso modelo é um modelo de estado estacionário, isto é, ele parte de uma situação um tanto quanto idealizada de equilíbrio de longo prazo e, a partir de uma série de choques aleatórios, simula o comportamento das variáveis econômico-financeiras que, por sua vez, determinarão a trajetória da Dívida Líquida do Setor Público ao longo do tempo.

Num plano mais amplo, isso significa que a Dívida Pública Federal parte de uma composição específica, que se manterá durante todo o horizonte da simulação por ser considerada a composição ideal, muito embora não saibamos a princípio qual é esta composição. Conforme colocado anteriormente, a distribuição dos vencimentos ao longo do tempo também é uma distribuição perfeita, com a maturação da DPF uniformemente distribuída ao longo de cada mês.

Neste ponto, cabe observar um problema da nossa representação estilizada da realidade: as proporções iniciais dos termos que compõe a DLSP são importantes para a determinação da dinâmica desta dívida e não sabemos ao certo quais serão essas proporções no estado estacionário. Portanto, teremos que adotar mais uma hipótese simplificadora: neste caso, consideraremos que as proporções em questão serão as mesmas vigentes na atualidade. Portanto, para inicializar o modelo, adotaremos os seguintes valores<sup>43</sup>:

DLSP/PIB = 34,5%

DPF/PIB = 59,3%

Base Monetária/PIB = 4,7%

Reservas Internacionais/PIB = 17,7%

Outros ativos/PIB = 9,6%

---

<sup>43</sup> Fonte: Banco Central do Brasil

De forma semelhante, as variáveis econômico-financeiras (curvas de juros, inflação, câmbio, crescimento do PIB, etc.) partem de sua condição de equilíbrio e perturbações aleatórias retirarão essas variáveis da sua situação inicial. Não obstante, elas apresentarão a tendência de retornar para o valor de equilíbrio (propriedade de reversão à média), fazendo com que sempre oscilem em torno desse valor. A depender da característica da variável, ela poderá apresentar maior ou menor persistência (capacidade de se manter longe da média), mas sempre apresentará tendência de retorno ao parâmetro de longo prazo.

Tudo isso considerado, nota-se que nosso modelo será altamente dependente da nossa visão de equilíbrio de longo prazo.

#### **6.4 – Consistência Macroeconômica**

Sabemos que as variáveis macroeconômicas não se movem independentemente umas das outras. Tampouco as variáveis financeiras são independentes entre si ou das variáveis macroeconômicas. Pelo contrário, há uma série de relações bem conhecidas, que são o resultado de séculos de observações dentro do campo de estudos da Economia. Por exemplo, a curva de Philips mostra uma relação entre inflação e crescimento do produto. Um modelo macroestrutural explicita essas relações entre as variáveis macroeconômicas através de um sistema de equações. Dessa forma, um único choque aleatório em uma das variáveis pode afetar todas as demais. O mesmo raciocínio vale para as variáveis financeiras, que estão relacionadas às variáveis macroeconômicas, como no caso da curva de juros nominal, que mais do que tudo representa a expectativa de comportamento da taxa de juros básica da economia ao longo do tempo<sup>44</sup>. Esta curva, por sua vez, ditará boa parte do comportamento da curva de juros real, enquanto outra parte será ditada pelas expectativas de inflação. Dessa forma, costumamos construir todo um encadeamento lógico entre variáveis econômico-financeiras.

Nossa abordagem, porém, será diferente. As variáveis serão modeladas de forma independente, com base simplesmente em valores defasados das mesmas, seja em termos de níveis ou de suas variações (diferenças). Para dar consistência ao modelo, contudo, preservaremos as correlações históricas observadas entre os resíduos dos modelos econométricos que regem cada uma das variáveis econômico-financeiras. Isso será feito, conforme antecipado, através da decomposição de Cholesky da matriz de covariância desses

---

<sup>44</sup> Para referências sobre a Teoria das Expectativas Puras, ver B. G. Malkiel em *The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns* (1966).

resíduos. Através desse procedimento é possível criar choques correlacionados para todas as 16 variáveis que fazem parte do nosso modelo.

## 6.5 – Sub-Modelos

Passaremos agora, à descrição dos sub-modelos econométricos que descrevem o comportamento das variáveis de interesse deste trabalho.

### 6.5.1 – As Curvas de Juros e a Taxa Básica da Economia (SELIC)

Para obter as curvas de juros (nominal, real e cambial), utilizamos a formulação dinâmica da curva de Nelson-Siegel (1987), na reinterpretação de Diebold-Li (2006), que conforme mencionado anteriormente é um modelo de três fatores latentes (betas), onde o primeiro é o nível de longo prazo, o segundo é o oposto da inclinação e o terceiro determina a curvatura da estrutura a termo das taxas de juros, conforme a equação a seguir:

$$y_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$$

Em que:

$\tau$ : prazo do título

$\lambda_t$ : taxa de decaimento exponencial

Como  $\beta_0$  é o nível de longo prazo e  $\beta_1$  é o oposto da inclinação, a taxa de juros básica (taxa de juros de mais curto prazo) é dada simplesmente pela soma desses dois parâmetros.

Além dos betas, existe também um parâmetro que regula o decaimento exponencial da curva ( $\lambda_t$ ). Para obter esse parâmetro, o trabalho de Diebold-Li sugere que, através da observação dos dados históricos, é possível saber o ponto de máxima curvatura e a partir daí, então, calcular o valor do decaimento exponencial através do terceiro termo da nossa equação. De posse desse valor é mais fácil estimar os betas, que são modelados dinamicamente como processos auto-regressivos de primeira ordem [AR(1)]. Para obter tais parâmetros, no entanto, utilizamos um aplicativo que faz uso de um filtro de Kalman, associado a uma função de máxima verossimilhança. Essa ferramenta executa um processo de otimização que retorna o exato valor de  $\lambda_t$ , os valores dos betas históricos, os coeficientes

das equações dos processos auto-regressivos de cada um dos betas e as volatilidades desses parâmetros.

Para obter tais parâmetros, nós utilizamos dados históricos das curvas de juros obtidos no *website* da Associação Brasileira das Entidades do Mercado Financeiro e de Capitais (ANBIMA) para o caso da curva de juros nominais e da curva de juros reais, bem como dados obtidos no aplicativo da Bloomberg<sup>45</sup> para a curva cambial. Cabe frisar, contudo, que tais dados tiveram que ser tratados antes de serem utilizados, pois o nosso modelo macro trabalha somente com taxas para títulos sem cupons (*zero cupom*). Utilizamos o método de “*bootstrapping*”<sup>46</sup> para obter a curva zero cupom (ou simplesmente curva zero) a partir dos dados das Notas do Tesouro Nacional série B e das curvas cambiais. No caso das curvas nominais, utilizamos sempre que possível os dados das Letras do Tesouro Nacional. Quando necessário, complementamos esses dados com informações das Notas do Tesouro Nacional série F, tratados pelo mesmo método mencionado anteriormente.

Em nossas simulações de curvas de juros, utilizamos dois períodos como base. Um mais longo, que se inicia em janeiro de 2005 e termina em junho de 2013 e outro mais curto, que se inicia em janeiro de 2008 e também termina em junho de 2013. As tabelas seguir mostram os resultados encontrados com a série histórica iniciada em 2005 (incluímos também uma figura com cada uma das curvas de juros de longo prazo encontradas no procedimento de parametrização):

**Tabela 1 – Taxas Nominais – 2005:2013**

$\lambda=1,4638$	$\beta_{LongoPrazo}$	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	12,578783	1,019842	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117

**Tabela 2 – Taxas Reais – 2005:2013**

$\lambda=0,4789$	$\beta_{LongoPrazo}$	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,673078	0,280090	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-0,636576	-0,022928	0,963982	0,698385
$\beta_2$	2,489834	0,269423	0,891791	1,481715

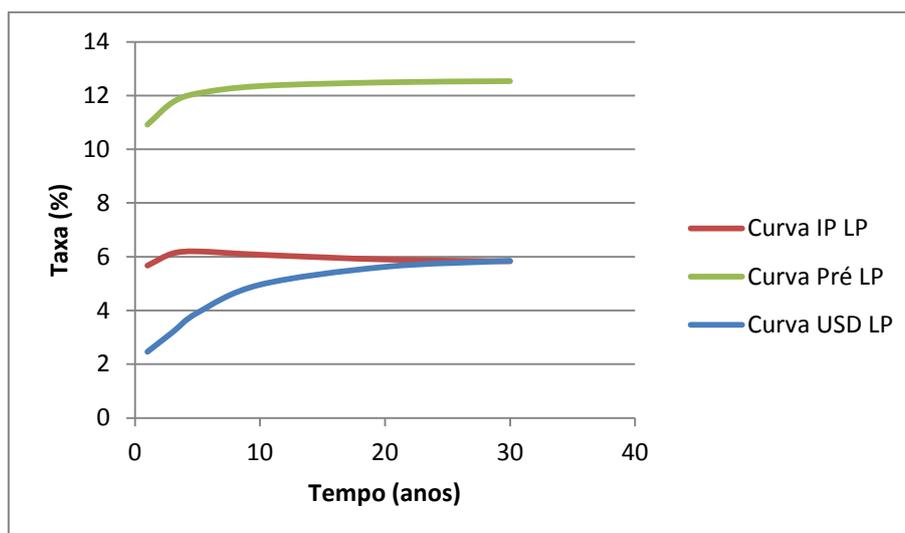
<sup>45</sup> Software de disseminação de informações financeiras.

<sup>46</sup> A principal característica do método é manter estáveis as taxas de juros entre dois vencimentos futuros de títulos (*taxas forward*). Composto as *taxas forward*, obtemos as *taxas zero* ao igualar os fluxos de pagamentos descontados pela TIR e os fluxos descontados a partir das *taxas zero*. Para referências, ver W. F. Sharp, G. J. Alexander e J. V. Bailey em *Investments* (1998).

**Tabela 3 – Taxas Cambiais – 2005:2013**

$\lambda=0,6211$	$\beta_{LongoPrazo}$	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,270373	0,393191	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-3,917573	-0,169177	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-4,544297	-0,625058	0,862452	0,988206

**Figura 5 – Curvas de Juros de Longo Prazo – 2005:2013**



Considerando os dados acima, chegamos a taxas de juros de curto prazo de 10,24%, 5,03% e 2,35% para as curvas nominal, real e cambial, respectivamente. São taxas bastante elevadas se considerarmos os padrões atuais, apesar de coerentes com o histórico brasileiro. Ademais, a curva de títulos indexados a inflação exibe um formato bastante peculiar, com as taxas aumentando por um período curto e depois retornando a patamares parecidos com os iniciais. Por isso, optamos por fazer também uma segunda parametrização utilizando dados mais recentes.

**Tabela 4 – Taxas Nominais – 2008:2013**

$\lambda=1,5066$	$\beta_{LongoPrazo}$	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	12,342786	1,053584	0,914640	0,679561
$\beta_1$	-2,670147	-0,274358	0,897250	0,737186
$\beta_2$	-2,442928	-0,150408	0,938431	1,248214

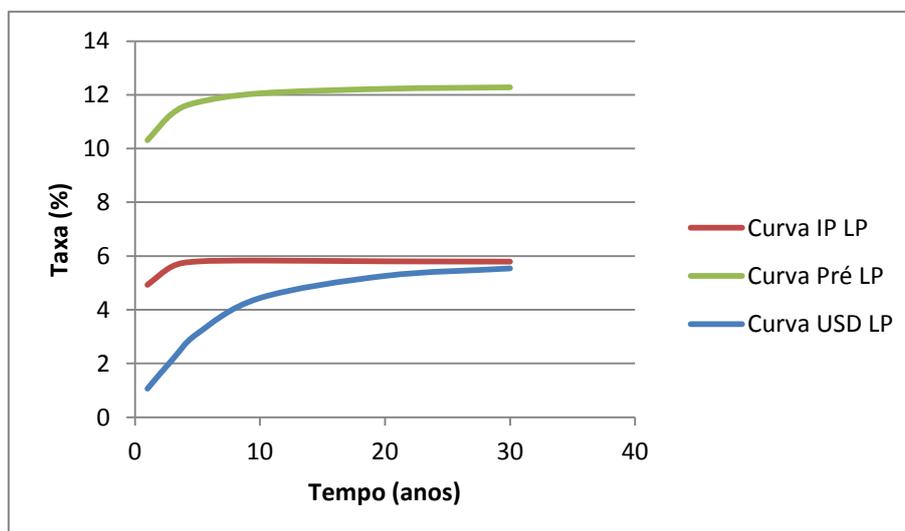
**Tabela 5 – Taxas Reais – 2008:2013**

$\lambda=0,6121$	$\beta_{LongoPrazo}$	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,749214	0,271170	0,952834	0,215736
$\beta_1$	-1,728147	-0,216430	0,874762	0,778263
$\beta_2$	2,075282	0,279445	0,865346	1,590499

**Tabela 6 – Taxas Cambiais – 2008:2013**

$\lambda=0,6364$	$\beta_{LongoPrazo}$	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,064030	0,404640	0,933272	0,392511
$\beta_1$	-5,297619	-0,577600	0,890970	0,450441
$\beta_2$	-5,365369	-0,865997	0,838595	1,021587

**Figura 6 – Curvas de Juros de Longo Prazo – 2008:2013**



Nessa nova parametrização, obtivemos taxas de curto prazo de 9,67%, 4,02% e 0,77%. Se, por um lado as taxas dos títulos denominados em reais nos parecem mais coerentes com as mudanças ocorridas na economia brasileira nos últimos anos, por outro, vemos que a curva cambial reflete ainda mais fortemente os efeitos da crise econômica mundial, que começou justamente em 2008. Isso ensejará mais algumas adaptações no nosso modelo que serão detalhadas mais adiante, quando da análise dos resultados do mesmo.

Passemos agora à descrição dos demais sub-modelos de previsão das variáveis econômico-financeiras. Cabe esclarecer que todos eles fazem uso do arcabouço apresentado na seção 2 e apresentam como características principais a hipótese de homocedasticidade e a

propriedade de reversão à média. As fórmulas apresentadas nesta seção constituem desdobramentos imediatos dos modelos apresentados naquela seção ou pequenas variações dos mesmos. Nos casos em que tais adaptações modificarem os modelos anteriormente apresentaremos tais modificações serão explicitadas nesta seção. As séries históricas utilizadas para obtenção dos parâmetros advêm do sistema de séries temporais do Banco Central do Brasil.

Outro esclarecimento necessário diz respeito à série histórica iniciada em 2008. Nessa série, verificamos alguns problemas de aderência dos modelos com os quais trabalhamos aos dados, sobretudo nos casos em que a velocidade de reversão a média era pequena, motivo pelo qual optamos por apresentar nesta seção somente os parâmetros obtidos com a série original iniciada em 2005.

### **6.5.2 – Inflação**

Nosso modelo demanda um mecanismo de previsão para três índices de inflação: IPCA, IGP-M<sup>47</sup> e o CPI (*Consumer Price Index* – índice de preços ao consumidor) norte-americano. O IPCA tem uma aplicação mais imediata, o cálculo do custo de carregamento dos títulos a ele indexados, mas possui também uma segunda aplicação não tão direta, o cálculo do deflator do PIB. Ocorre que nosso mecanismo de previsão do produto interno bruto trabalha com uma série de dados medidos em termos reais e a dinâmica da DLSP depende do PIB nominal. Logo, necessitamos de uma forma de corrigir o PIB inicial para refletir as mudanças de preços na economia. Ocorre que o deflator do PIB considera as mudanças de preços em todos os bens e serviços produzidos, diferentemente do que ocorre com os índices de inflação, que registram as mudanças de preços em cestas de bens determinadas. Um cálculo preciso do deflator do PIB foge ao escopo desse trabalho, portanto achamos por bem utilizar uma regra de bolso segundo a qual o PIB nominal será calculado a partir do PIB real corrigido por um índice de inflação composto no qual o IPCA representa 75% e o IGP-M representa 25%<sup>48</sup>. Por isso, a necessidade de se ter um mecanismo de previsão também para o IGP-M.

Além disso, o IPCA possui ainda uma terceira aplicação, associada ao cálculo do câmbio nominal. Também o câmbio em nossa formulação é previsto em termos reais, sendo necessário calcular posteriormente o câmbio em termos nominais, tanto para obter o custo

---

<sup>47</sup> Índice Geral de Preços – Mercado, da Fundação Getúlio Vargas.

<sup>48</sup> Essa regra advém da regressão linear do deflator do PIB, tendo como variáveis exógenas os índices de inflação mencionados.

final dos títulos cambiais, quanto a rentabilidade das reservas internacionais. Para tanto, faremos uso da Teoria da Paridade do Poder de Compra Relativa<sup>49</sup>, que prevê que o câmbio de longo prazo na média desvaloriza a razão do diferencial de inflação entre os dois países considerados. Por isso, além do IPCA, faz-se necessário ainda prever o comportamento do índice de preços ao consumidor norte-americano (*CPI*).

No caso dos índices de inflação, todas as variáveis fazem uso da formulação de Vasicek, que nada mais é do que uma apresentação diferenciada de um modelo autorregressivo de primeira ordem [AR(1)]. Dessa forma, o modelo adquire o formato apresentado a seguir:

$$inflação_t = c(1) * (c(2) - inflação_{t-1})$$

A seguir, apresentamos os dados obtidos no nosso procedimento de parametrização de inflação:

**Tabela 9 – Inflação – 2005:2013**

Índice	c(1) = Vel. de Rev. à Média	c(2) = Média de Longo Prazo	Volatilidade
IPCA	0,402201	5,21% aa	0,001793
IGP-M	0,436061	5,52% aa	0,004664
CPI	0,479656	2,45% aa	0,004002

### 6.5.3 – LIBOR de 6 Meses

Para a reprodução da LIBOR de 6 meses, utilizamos o modelo CIR, que é um modelo recomendado para a simulação de taxas de juros de curto prazo. Ocorre que a série histórica da LIBOR sofreu uma quebra estrutural em 2008, com o início da crise econômica e financeira internacional. No início do referido ano, as taxas saíram da casa dos 4% e rapidamente vieram abaixo de 1%, sem sair deste patamar até junho de 2013. Para isolar o efeito da crise internacional, nós introduzimos uma *dummy* em 2008 (estatisticamente significativa com um intervalo de confiança de 99%), que permitiu que controlássemos a quebra estrutural e fez com que o modelo tivesse uma perfeita aderência aos dados da série histórica.

<sup>49</sup> Para referências ver Paul Krugman e Maurice Obstfeld em Economia Internacional (1999).

$$\frac{libor_t - libor_{t-1}}{libor_{t-1}^{1/2}} = \frac{c(1) * (c(2) - libor_{t-1})}{libor_{t-1}^{1/2}} + c(3) \cdot dummy$$

Observe-se que, quando das simulações do nosso modelo, que parte do estado estacionário, consideraremos que as condições normais desse mercado (pré 2008) já estarão restabelecidas, ou seja, que a *dummy* voltará a ser zero, não demandando nenhuma modificação no nosso arcabouço original (CIR).

A tabela a seguir mostra os resultados obtidos:

**Tabela 10 – LIBOR – 2005:2013**

	c(1) = velocidade de rev. à média	c(2) = média de longo prazo	c(3) = coeficiente da dummy	volatilidade do modelo
LIBOR	0,052976	4,77%	-3,15%	0,011244

#### 6.5.4 – TJLP

Para reproduzir o comportamento desta variável, utilizamos um modelo CKLS, ou seja, trabalhamos com a variação percentual da taxa. Como a taxa costuma ficar inalterada por longos períodos de tempo, nossa série exibe um grande número de zeros, o que ajuda para que a mesma obedeça ao preceito de estacionariedade, necessário ao modelo.

Abaixo, transcrevemos o formato final da nossa equação de parametrização:

$$\frac{tjlp_t - tjlp_{t-1}}{tjlp_{t-1}} = \frac{c(1) * (c(2) - tjlp_{t-1})}{tjlp_{t-1}}$$

Observe-se que, quando da implementação do nosso sub-modelo de simulação, optamos por arredondar o resultado da simulação em intervalos de 0,25% para tornar mais verossímil a sua previsão. A tabela a seguir mostra os resultados obtidos durante o procedimento de parametrização:

**Tabela 11 – TJLP – 2005:2013**

	c(1) = Velocidade de rev. à média	c(2) = Média de longo prazo	Volatilidade do modelo
TJLP	0,029154	5,05%	0,021337

### 6.5.5 – Câmbio Real

Na parametrização do câmbio real, utilizamos uma variação do modelo CKLS. O câmbio real exibe uma persistência bem maior que a das demais variáveis, fato que foi contornado a partir da adição de um termo defasado da variação do câmbio real. Em econometria, isto equivale à adição de um termo em segundas-diferenças. Com isso, conseguimos uma boa aderência do nosso modelo à base de dados histórica, mas isso implica numa correção do termo do erro do modelo CKLS, que deve refletir a presença do termo adicional na equação de parametrização, que é mostrada a seguir:

$$\frac{(\text{câmbio}_t - \text{câmbio}_{t-1})}{\text{câmbio}_{t-1}} = \frac{c(1) \cdot (c(2) - \text{câmbio}_{t-1})}{\text{câmbio}_{t-1}} + \frac{c(3) \cdot (\text{câmbio}_{t-1} - \text{câmbio}_{t-2})}{\text{câmbio}_{t-2}}$$

Nesse caso, o modelo CKLS (nos termos descritos na seção 2) corrigido resulta:

$$\frac{dC_t}{C_t} = \alpha \left( \frac{C^*}{C_t} - 1 \right) dt + \beta \left( \frac{C_{t-1}}{C_{t-2}} - 1 \right) + \sigma_c dZ$$

A tabela a seguir mostra os resultados obtidos:

**Tabela 12 – Câmbio Real – 2005:2013**

	c(1) = Velocidade de rev. à média	c(2) = Média de longo prazo	c(3) = Coeficiente da 2ª diferença	Volatilidade do modelo
Câmbio Real	0,068920	1	0,365741	0,032338

### 6.5.6 – Produto Interno Bruto Real (PIB Real)

Optamos mais uma vez por uma parametrização em termos de variações (diferenças) ao invés de trabalharmos diretamente com o nível da variável. Usamos um movimento geométrico browniano para descrever o comportamento dessa variável, ou seja, o crescimento do PIB será tratado como um passeio aleatório em torno de uma tendência fixa de longo prazo. Contudo, a série do produto interno bruto é trimestral ao invés de mensal, o que nos traz um problema para a estrutura da parametrização. A solução utilizada para esse problema foi a utilização do índice de atividade econômica IBC-BR do Banco Central para obter as volatilidades e as correlações dessa variável com as demais.

**Tabela 13 – Produto Interno Bruto – 2005:2013**

	C = Tendência de Longo Prazo	Volatilidade do Modelo
Crescimento do PIB	2,85%	0,009707

### 6.5.7 – A Matriz de Correlações

Obtidos os modelos que nos permitirão gerar cenários econômico-financeiros, passeamos à geração da matriz de correlação dos erros desses sub-modelos. Construímos essa matriz através das séries dos resíduos gerados por cada um desses sub-modelos, com auxílio do *E-views*, plataforma econométrica utilizada no presente trabalho. A página a seguir apresenta a matriz de correlação das variáveis apresentadas anteriormente:

**Tabela 14 – Matriz de Correlação dos Resíduos – 2005:2013**

Correlação	Pre 1	IGPM	IPCA	Dólar	Libor	PIB	CPI	TJLP	Pre 2	Pre 3	IP 1	IP 2	IP 3	Cambial 1	Cambial 2	Cambial 3
Pre 1	1	0,248518	0,067885	0,281193	0,142888	-0,049673	-0,295404	0,33753	-0,819413	-0,223052	0,374553	-0,338934	0,786498	0,470709	-0,172008	0,298853
IGPM	0,248518	1	0,490396	0,229666	0,146812	0,227145	0,232501	0,198059	-0,204119	0,165076	-0,169498	-0,355536	0,514137	0,121283	0,047639	0,177942
IPCA	0,067885	0,490396	1	-0,063131	-0,101922	0,09531	0,206328	0,011891	-0,096661	0,114745	-0,203522	-0,384134	0,302706	0,148105	-0,096611	0,019898
Dólar	0,281193	0,229666	-0,063131	1	0,384152	-0,077187	-0,268133	0,606	-0,157862	-0,441345	0,242899	-0,161794	0,11685	0,367185	-0,060405	0,406743
Libor	0,142888	0,146812	-0,101922	0,384152	1	-0,052572	0,00656	0,190716	-0,190776	-0,18891	0,186141	-0,088287	-0,039527	0,154919	-0,190242	0,354299
PIB	-0,049673	0,227145	0,09531	-0,077187	-0,052572	1	0,041127	-0,113934	0,090888	0,467942	-0,106858	0,126807	0,130863	0,021976	0,083346	-0,078099
CPI	-0,295404	0,232501	0,206328	-0,268133	0,00656	0,041127	1	-0,105976	0,160775	0,368076	-0,237818	0,19026	-0,154163	0,103687	-0,170753	0,011254
TJLP	0,33753	0,198059	0,011891	0,606	0,190716	-0,113934	-0,105976	1	-0,190353	-0,445194	0,203587	-0,175179	0,230099	0,637194	-0,14021	0,255503
Pre 2	-0,819413	-0,204119	-0,096661	-0,157862	-0,190776	0,090888	0,160775	-0,190353	1	0,108344	-0,134128	0,551825	-0,720629	-0,31708	0,19189	-0,28744
Pre 3	-0,223052	0,165076	0,114745	-0,441345	-0,18891	0,467942	0,368076	-0,445194	0,108344	1	-0,226361	0,364708	0,069463	-0,08627	0,032619	-0,002984
IP 1	0,374553	-0,169498	-0,203522	0,242899	0,186141	-0,106858	-0,237818	0,203587	-0,134128	-0,226361	1	0,048199	-0,021687	0,269083	-0,111429	0,07949
IP 2	-0,338934	-0,355536	-0,384134	-0,161794	-0,088287	0,126807	0,19026	-0,175179	0,551825	0,364708	0,048199	1	-0,514021	0,016543	0,005492	-0,095427
IP 3	0,786498	0,514137	0,302706	0,11685	-0,039527	0,130863	-0,154163	0,230099	-0,720629	0,069463	-0,021687	-0,514021	1	0,339205	-0,134119	0,219257
Cambial 1	0,470709	0,121283	0,148105	0,367185	0,154919	0,021976	0,103687	0,637194	-0,31708	-0,08627	0,269083	0,016543	0,339205	1	-0,574172	0,266292
Cambial 2	-0,172008	0,047639	-0,096611	-0,060405	-0,190242	0,083346	-0,170753	-0,14021	0,19189	0,032619	-0,111429	0,005492	-0,134119	-0,574172	1	-0,458275
Cambial 3	0,298853	0,177942	0,019898	0,406743	0,354299	-0,078099	0,011254	0,255503	-0,28744	-0,002984	0,07949	-0,095427	0,219257	0,266292	-0,458275	1

## 6.6 – Resultados e Sensibilidade do Modelo

A seguir analisaremos os resultados obtidos a partir das simulações realizadas com nosso modelo, que são apresentados sob a forma de tabelas e gráficos, juntamente com os parâmetros que lhes deram origem na seção Apêndices, ao final deste trabalho.

### 6.6.1 – Simulação com Dados Históricos (2005:2013)

Iniciamos a apresentação dos resultados da nossa simulação com os resultados obtidos com a série histórica que se inicia em 2005<sup>50</sup>, cujos parâmetros foram apresentados na seção anterior.

O resultado dessa simulação é bastante simples e ilustrativo do que ocorrerá em todos os demais resultados apresentados. Somente quatro títulos aparecem na Fronteira Eficiente: um prefixado de um ano, um indexado à inflação de 30 anos, um título cambial de 10 anos e um título indexado à SELIC de 5 anos. Veremos que esses títulos e o título cambial de 30 anos são dominantes em relação aos demais em todas as nossas simulações. À parte de menor risco da fronteira, estão associados percentuais expressivos de títulos com menor risco individual ante os demais (prefixados e indexados à inflação), enquanto à parte de maior risco da fronteira estão associados títulos que individualmente apresentam mais risco (cambiais e indexados à SELIC). Ocorre que este segundo grupo tem uma presença bem mais marcante na fronteira, sobretudo os cambiais, que chegam a 100% no ponto de maior risco. Mesmo na parte de menor risco, a fronteira apresenta aproximadamente 49% de títulos cambiais e 13% de títulos indexados à SELIC, enquanto há somente 23% de títulos indexados à inflação e 15% de títulos prefixados. Isso revela uma questão marcante do nosso modelo, a despeito dos títulos cambiais serem substancialmente mais arriscados, conforme podemos verificar na tabela de desvios padrões das taxas de carregamento da simulação, seus custos são substancialmente inferiores aos dos demais, o que faz com que tenham esse caráter dominante nas simulações. Isso nos leva a pensar na adequação desta série de dados a um dos preceitos básicos do nosso modelo, o estado estacionário. Seriam os dados dessa série representativos de um estado de equilíbrio de longo prazo. Existem vários indicativos de que a resposta a essa pergunta é negativa. Quando testamos a série de LIBOR de seis meses, por exemplo, concluímos que existia uma quebra estrutural na série de taxas de juros de curto prazo norte-americanas. Ocorre que as taxas de juros norte-americanas servem de base para a

---

<sup>50</sup> Ver Simulação 1 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

precificação dos títulos brasileiros denominados em dólares<sup>51</sup>. Então, testamos nosso modelo da curva em dólares para uma quebra estrutural (crise financeira internacional) a partir de novembro de 2008, concluindo no mesmo sentido, conforme detalharemos mais à frente.

Além disso, a curva de juros nominais média do período também não parece representar bem as mudanças estruturais ocorridas na economia brasileira nos últimos anos. A taxa SELIC de equilíbrio de longo prazo nesta simulação é de 10,25%, valor que parece bastante elevado quando comparado ao patamar atual das taxas de juros brasileiras.

Também as taxas reais de curto-prazo exibem patamares de equilíbrio relativamente elevados (5,04%). Neste caso, temos um problema adicional a considerar: o formato da curva de juros nos parece inadequado para tratar uma situação de equilíbrio de longo prazo, pois a curva de juros é crescente durante um intervalo relativamente curto e, posteriormente, passa a ser continuamente decrescente, até atingir um patamar semelhante ao original.

Uma série de dados mais longa levaria a níveis de taxas de juros ainda mais elevados em todas as curvas, logo a solução encontrada foi no sentido de utilizar uma série de dados mais curta, muito embora isto implique em uma série de outros problemas, cujo detalhamento também será apresentado mais a frente.

Retornando à análise da Fronteira Eficiente, verificamos também o seu caráter assintótico em relação a uma vertical no trecho de menor risco, ou seja, grandes variações de preço neste trecho da curva produzem ganhos muito pequenos em termos de risco, essa é outra característica bastante marcante dos nossos resultados: nos trechos de baixo risco, incrementos de custo são geralmente grandes.

Outro pressuposto do modelo é de que a inflação de longo prazo no Brasil é de 5,21%, o que demonstra, por um lado, uma média histórica bastante divergente do centro da meta estabelecida pelo Banco Central do Brasil (4,5%) e, por outro, a expectativa de que tal diferencial permaneça nesse patamar ao longo do tempo. Em nosso primeiro teste da sensibilidade do modelo, mantivemos todos os parâmetros originais de 2005 e modificamos somente os índices de inflação de longo prazo, considerando o centro da meta para o IPCA e um IGP-M que no longo prazo tem média igual ao do IPCA, isto é, os mesmos 4,5%. Adicionalmente, reduzimos a volatilidade desses sub-modelos proporcionalmente ao decréscimo do valor da inflação de longo prazo.

O resultado<sup>52</sup> mostra uma diferença marcante em relação ao original, qual seja, a ausência do título prefixado de um ano na Fronteira Eficiente. A diminuição do custo de

---

<sup>51</sup> Os títulos brasileiros são normalmente cotados como um *spread* (risco país) sobre os títulos norte-americanos.

carregamento do título indexado à inflação por conta da diminuição do parâmetro de longo prazo do IPCA mais do que compensou o risco adicional do título indexado a inflação em relação ao prefixado. Vale observar que, em média, o título prefixado de um ano tornou-se mais caro do que o indexado à inflação de trinta anos (10,86% contra 10,56% de taxa de carregamento) nesta nova situação, enquanto na situação anterior isso não acontecia (10,82% contra 11,32% em média). Isso colabora para explicar a predominância dos títulos indexados à inflação no novo modelo, mas também mostra que uma pequena variação nos parâmetros já é capaz de produzir mudanças visíveis nos resultados.

A parte da fronteira indexada ao câmbio, entretanto, não foi afetada pela nova parametrização. De fato, ao considerarmos um patamar de inflação mais baixo para o longo prazo diminui a depreciação esperada do dólar ante o real, tendo em vista que esta está diretamente relacionada ao diferencial de inflação interna/ externa, isso colabora para taxas de carregamento medidas em reais ainda mais baixas, reforçando os resultados desses títulos em relação aos demais.

### **6.6.2 – Simulação com Dados Históricos (2008:2013)**

Para fugirmos de soluções *ad hoc*, tentamos recorrer a uma parametrização com dados mais recentes: séries históricas iniciadas em janeiro de 2008. Isso implica em utilizar séries com 66 elementos ao invés de nossas antigas séries de 102, o que prejudica a aderência dos sub-modelos utilizados. Sobretudo as variáveis com velocidades de reversão à média diminuta, como a LIBOR, o câmbio real e a TJLP não puderam ser representados com significância estatística a partir de séries históricas tão curtas dentro do arcabouço disponível. Em sendo assim, optamos por modificar somente os parâmetros das curvas em uma primeira aproximação<sup>53</sup> e adicionalmente também os parâmetros das inflações<sup>54</sup>, uma vez que elas puderam ser representadas mesmo com esse intervalo menor em uma segunda aproximação.

O resultado de tal parametrização foi uma diminuição generalizada dos custos da DLSP, notadamente no que diz respeito à ponta curta da curva cambial. Nessa nova parametrização, a taxa mais curta da referida curva atinge o patamar de 0,77%. Considerando que a taxa básica norte-americana permaneceu entre 0 e 0,25%, o resultado não chega a ser estranho, mas é muito difícil poder extrapolá-lo para uma condição de equilíbrio de longo prazo, como demanda o nosso modelo.

---

<sup>52</sup> Ver Simulação 2 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

<sup>53</sup> Ver Simulação 3 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

<sup>54</sup> Ver Simulação 4 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

Seja como for, o resultado dessa simulação foi muito semelhante ao da simulação com dados da série iniciada em 2005 em termos das carteiras na fronteira. A parte de menor risco da fronteira exhibe predominantemente títulos prefixados de um ano e indexados a inflação de 30 anos, com ampla participação de títulos cambiais de 10 anos e uma leve retração na presença de títulos indexados à SELIC em favor dos dois primeiros títulos nessa nova configuração. Já a parte de maior risco da fronteira não apresentou nenhuma mudança significativa em relação à parametrização original, com amplo domínio dos títulos cambiais.

No entanto, a Fronteira Eficiente em si muda para fazer frente aos custos mais baixos impostos nesta nova parametrização e que se refletem nas taxas de carregamento finais, ou seja, a Fronteira Eficiente é deslocada para baixo. Nota-se também uma mudança de formato na fronteira, a qual não converge tão claramente para um nível de risco determinado, como no caso da série histórica de 2005.

Também chama à atenção o fato do título indexado à SELIC ter apresentado uma volatilidade menor nesse período que o título prefixado de um ano.

Uma vez mais, fizemos um exercício modificando as inflações segundo seus diversos índices (dessa vez, incluímos também o *CPI*), que passaram a ser estimadas a partir dos parâmetros de 2008. Isso implicou uma elevação da inflação brasileira, enquanto a variável norte-americana recuou.

Com os novos parâmetros a mudança mais significativa é a ausência de títulos indexados à inflação na fronteira, uma vez que o custo de carregamento dessas variáveis aumentou com a inflação mais alta no longo prazo. Uma vez mais, sua participação foi substituída, sobretudo, por títulos prefixados de um ano.

### **6.6.3 – Uma Visão Livre de Longo Prazo**

Uma terceira forma de se trabalhar com o modelo é a partir de uma visão bem estabelecida de parâmetros de longo prazo para a economia e os mercados financeiros brasileiros. Nesse tipo de abordagem, enquanto alguns parâmetros têm origem na série histórica escolhida, outros são introduzidos no modelo com base em um conhecimento prévio, que antecede a aplicação do mesmo. Utilizar a meta de inflação ao invés da inflação histórica, como em exercício anterior, já é um passo nesse sentido. Passo este, por sinal, que será mantido na simulação que usaremos para exemplificar este novo tipo de abordagem. No

sentido oposto, manteremos a matriz de correlações da série histórica de 2005 nas simulações por vir.

Seguiremos adiante com um olhar mais otimista da economia brasileira. Uma visão segundo a qual a economia atingiu em algum ponto entre hoje e um futuro não tão distante um grau de maturidade que ainda não se reflete na série histórica.

Consideraremos a taxa de juros real da economia brasileira como sendo de 3,5%<sup>55</sup>. Computando uma inflação de 4,5% e uma ausência de prêmio de risco relacionado à inflação na taxa de juros de um dia, chegamos a uma taxa SELIC de equilíbrio de 8,16%. Manteremos todos os demais parâmetros da curva nominal histórica (inclinação, curvatura e decaimento exponencial), mas modificaremos o nível de longo prazo para refletir a taxa de 8,16% no curtíssimo prazo. Com isso, chegamos a um valor de 10,49% para a taxa de juros de longo prazo na curva prefixada.

Continuaremos nosso exercício, considerando um prêmio de risco de inflação de 0,21% (21 pontos base) no prazo mais longo da curva de juros real<sup>56</sup>, a meta de inflação de 4,5% e a taxa de juros nominal de longo prazo de 10,49%. Subtraindo, num abuso de linguagem, os dois primeiros do segundo, chegaremos a uma taxa de juros real de longo prazo de 5,53%. Como partimos do pressuposto de que a taxa de juros real mais curta é de 3,5%, resulta uma inclinação de 2,03% para a curva. Os demais parâmetros históricos serão mantidos.

Obteremos a nossa curva cambial de forma análoga, utilizando também uma visão que se apóia em prêmios de risco previamente conhecidos. A curva cambial será alcançada com base na curva nominal, no diferencial de inflação e no chamado *risco de fronteira*.

Neste ponto, cabe um esclarecimento, o risco de fronteira é diferente do risco país. O primeiro decorre simplesmente do fato de que um título é emitido no mercado internacional e sob a égide da legislação norte-americana, enquanto o outro é emitido em solo brasileiro e sob a égide da legislação local. Esse prêmio é mais nítido quando pensamos em títulos brasileiros denominados em reais no Brasil e nos EUA<sup>57</sup>. Observe-se que o investidor norte-americano que compra um título naquele mercado está sujeito às mesmas oscilações por efeito de mudanças na taxa de juros ou no câmbio a que estaria caso tivesse uma aplicação no Brasil. Contudo, o mesmo título será negociado a taxas significativamente mais baixas nos

---

<sup>55</sup> Baseado no estudo de Gilmar Gonçalves Ferreira e Fabiano Colbano para a Secretaria do Tesouro Nacional intitulado Taxa de Juros Real de Equilíbrio para o Brasil (2012).

<sup>56</sup> Baseado em um breve estudo do diferencial entre a taxa de juros prefixada e a soma da taxa de juros real com a inflação de longo prazo prevista no Boletim Focus do Banco Central.

<sup>57</sup> Na realidade, avaliamos esse diferencial justamente a partir da comparação entre títulos denominados em reais no país e fora dele, descontados os efeitos de eventuais impostos no ingresso de recursos no Brasil.

Estados Unidos do que no Brasil, pois o investidor internacional se sente mais protegido sob a legislação daquele país, além de ter a comodidade de não precisar enviar dinheiro ao exterior. Fizemos uso desta definição, pois hoje o Brasil só emite títulos cambiais no exterior. Como nossas comparações se dão exclusivamente entre títulos brasileiros é preciso diferenciar taxas praticadas dentro e fora do país. O chamado risco Brasil, por sua vez, diz respeito ao diferencial de juros entre os títulos do tesouro norte-americano e os títulos do tesouro brasileiro denominados em dólares, tratando-se, portanto, de títulos de diferentes origens desde que ambos sejam denominados na mesma moeda. Grosso modo, esse diferencial está ligado à percepção do mercado de probabilidade de inadimplência de uma instituição vis-à-vis a outra.

Com base no histórico recente, consideraremos um risco de fronteira de aproximadamente 150 pontos base no curto prazo (147 pontos base para ser exato), de forma que o diferencial aproximado entre as curvas será de 3,50% (expectativa de desvalorização do real ante o dólar de 2% mais risco de fronteira de 1,5%), o que nos leva a uma taxa cambial de curto prazo de 4,50%<sup>58</sup>. No longo prazo, vale o mesmo diferencial de inflação e prêmio de risco do curto prazo, pois o risco de fronteira não varia de forma significativa com o prazo, como no caso do risco país. Dessa forma, chegamos a uma taxa cambial de 6,75% no longo prazo, o que implica uma inclinação de 225 pontos base entre a parte curta e a parte longa da curva. Ocorre que, utilizando a curvatura histórica obteríamos inflexões injustificáveis nessa curva, motivo pelo qual emprestaremos da curva prefixada a curvatura para a curva cambial, mantendo tão somente o decaimento exponencial da curva cambial original.

Esse conjunto de modificações, contudo, demanda pequenas mudanças na especificação da dinâmica de nossas curvas. Como se tratam de processos auto-regressivos de primeira ordem, para obter as mudanças desejadas nos níveis de longo prazo é preciso ajustar as constantes. A velocidade de reversão à média e as volatilidades, no entanto, serão mantidas.

Com isso, temos novas curvas a partir das quais poderemos vislumbrar como o modelo reage a informações diferenciadas<sup>59</sup>. Em termos absolutos, essa nova parametrização resulta numa curva cambial mais cara em relação à última parametrização, ao mesmo tempo em que as curvas denominadas em reais ficaram mais baratas. Logo, na comparação relativa, as curvas cambiais foram duplamente desfavorecidas. Isso resulta em um modelo com

---

<sup>58</sup> Ao subtrairmos de um determinado vértice da curva cambial o risco Brasil correspondente, chegaremos à respectiva taxa norte-americana. Um risco país de 100 pontos básicos no curtíssimo prazo equivale a *FED Funds* (taxa básica norte-americana) de 3,50% para o exemplo acima.

<sup>59</sup> Ver Simulação 5 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

significativamente menos títulos cambiais do que os anteriores, embora tais títulos ainda permaneçam presentes em quase toda a fronteira. Somente no ponto de maior risco, obtivemos a total substituição dos títulos cambiais por títulos indexados à SELIC.

Já a parcela de menor risco da fronteira exhibe uma grande presença de títulos prefixados de um ano. Os indexados a inflação de 30 anos ainda estão presentes, mas de forma bastante discreta. Isso reflete o fato de que os prefixados curtos têm taxas médias de carregamento muito inferiores às taxas dos títulos indexados à inflação longos (8,73% contra 10,21%) nessa nova parametrização.

Por fim, parte significativa do espaço antes preenchido pelos títulos cambiais, sobretudo no trecho de maior risco da fronteira foi preenchido agora por títulos indexados à SELIC. Esses títulos possuem em geral um risco maior do que o dos títulos prefixados e indexados à inflação, mas com o mesmo nível de grandeza, enquanto os títulos cambiais exibem uma volatilidade bastante diferenciada, conforme atestam nossos resultados até aqui.

Outro ponto a ser mencionado diz respeito ao formato da nova Fronteira Eficiente, que desta vez exhibe também um comportamento assintótico em relação à horizontal na parte de maior risco da fronteira. Esse formato de “L” torna à primeira vista mais fácil a escolha de um ponto ótimo, pois há dois trechos bem diferenciados: um no qual um pequeno incremento de risco leva a imensos incrementos de custo e outro no qual o inverso é verdadeiro. Dessa forma a intersecção entre os dois trechos parece uma escolha natural.

O aumento dos custos dos títulos cambiais também significou um deslocamento substancial da Fronteira Eficiente. Enquanto nas precificações anteriores era possível obter variações nulas ou mesmo negativas da relação DLSP/ PIB sobre a Fronteira Eficiente, nesta nova situação não encontramos variações inferiores a 5%. Como regra geral, notaremos que custos mais elevados de títulos cambiais elevam significativamente os patamares de variação da fronteira da relação DLSP/PIB como um todo.

Prosseguimos nesta abordagem, com duas novas parametrizações barateando duas vezes em sequência os títulos indexados a inflação em relação aos demais<sup>60</sup> a partir das taxas de longo prazo e os resultados mostraram substituição dos títulos prefixados de um ano por indexados à inflação de 30 anos em linha com a diminuição gradual dos custos da curva de títulos indexados à inflação, reforçando o caráter de substituição exibido por esses dois títulos, enquanto as proporções dos demais se mantiveram relativamente estáveis.

---

<sup>60</sup> Ver Simulações 6 e 7 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

Ainda nesta linha retornamos aos parâmetros originais das curvas de indexados à inflação e desta vez experimentamos uma curva cambial mais barata<sup>61</sup>, mantendo fixo o nível de curto prazo. O resultado foi uma fronteira composta exclusivamente por três títulos: prefixados de um ano, cambiais de 10 anos e indexados à SELIC de 5 anos, com amplo domínio dos cambiais. Por fim, barateamos os títulos indexados à inflação e os cambiais longos ao mesmo tempo<sup>62</sup>, obtendo uma curva na qual aparecem também títulos cambiais de 30 anos na parte de menor risco da fronteira, amplo domínio dos cambiais ao longo de toda essa fronteira, grande quantidade de prefixados de um ano e uma pequena proporção de títulos indexados à inflação no trecho de menor risco novamente.

Ao final, verificamos novamente que o modelo é sensível a modificações nos parâmetros, sobretudo a grandes modificações nos custos relativos dos títulos como as dos últimos testes, mas por outro lado vimos também que ele responde aos nossos impulsos em termos de parametrização de forma coerente.

#### **6.6.4 – Uma Solução de Compromisso**

Nossa última abordagem tentará solucionar os problemas encontrados nas três parametrizações anteriores, agregando elementos de todas elas. Nossa base será a série histórica original de 2005.

Nossa primeira providência foi testar a curva cambial para uma quebra estrutural a partir de novembro de 2008, tal qual o procedimento adotado com o sub-modelo da LIBOR. Os testes tiveram a inclusão de *dummies* nos processos auto-regressivos dos três parâmetros da curva (nível, inclinação e curvatura). As *dummies* de nível e curvatura mostraram-se estatisticamente significantes com um nível de confiança de 95%, respaldando uma quebra estrutural na série a partir do início da crise internacional. Por outro lado, mesmo com um nível de confiança de 90%, a *dummy* introduzida na série da inclinação não se mostrou significativa. Optamos, então, por trabalhar com os parâmetros resultantes dessa nova modelagem na qual isolamos os efeitos da crise onde eles se mostraram significantes. O resultado foi uma curva cambial mais cara, que nos parece mais representativa da condição de longo prazo, ao invés da curva extremamente barata que em grande parte da crise resultou.

No caso das curvas de juros nominais e da curva de juros reais, optamos por utilizar a parametrização com a série histórica de 2008, tendo em vista que, neste caso, acreditamos

---

<sup>61</sup> Ver Simulação 8 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

<sup>62</sup> Ver Simulação 9 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

que parâmetros recentes são mais representativos da condição da economia de longo prazo. Por exemplo, para a taxa de juros de equilíbrio, encontramos o valor de 9,67%, que consideramos mais próximo da realidade do que o valor de 10,25% da série iniciada em 2005. Pode-se argumentar que as curvas de juros denominadas em reais também foram impactadas pelos efeitos da crise financeira internacional. Contudo, cremos que esse efeito é secundário em face das mudanças estruturais na economia brasileira, que impunham uma trajetória continuamente decrescente à taxa de juros básica desde antes da crise.

Outra vantagem da série de 2008 é que a curva de juros real de médio e longo prazo apresenta um comportamento relativamente estável, enquanto a curva resultante da série histórica de 2005 mostra um comportamento claramente declinante e de difícil explicação no contexto de um equilíbrio de longo prazo.

Todas as demais variáveis, bem como a estrutura de correlações, foram mantidas na condição obtida na parametrização com a série histórica de 2005.

O resultado<sup>63</sup> é semelhante àquele obtido na seção anterior (parametrização livre), muito embora a fronteira esteja associada a custos significativamente mais elevados, que são frutos das observações históricas.

No trecho de menor risco, a fronteira é composta, sobretudo, por títulos prefixados de um ano, um percentual pequeno de indexados a inflação de 30 anos, títulos cambiais de 10 anos, que estão distribuídos de forma relativamente uniforme em toda a fronteira, e um pequeno percentual de títulos indexados à SELIC. No trecho de maior risco, preponderam os títulos indexados à SELIC com a já mencionada presença dos cambiais.

#### **6.6.5 – Conclusões Iniciais**

Antes de tecermos nossas conclusões gerais acerca do nosso modelo macro, cabem alguns comentários sobre os resultados iniciais e a robustez do mesmo. Vimos que mudanças nos principais parâmetros geram respostas diferentes do modelo, mas existem algumas características bastante uniformes em todas as simulações.

A parte de maior risco da fronteira, por exemplo, é invariavelmente composta exclusivamente de títulos cambiais e/ou de indexados a inflação. Esses títulos são dominantes ante os demais neste trecho da fronteira e, nos casos em que a curva cambial é mais cara, ela é invariavelmente substituída de forma quase exclusiva por títulos indexados à SELIC nessa região.

---

<sup>63</sup> Ver Simulação 10 nos Apêndices para tabelas e gráficos dos parâmetros e resultados.

No trecho de menor risco da fronteira, sempre há um percentual significativo de títulos cambiais, seja de 10 ou de 30 anos, um pequeno percentual de títulos indexados à SELIC, que eventualmente pode desaparecer no extremo da fronteira, e um grande percentual de títulos prefixados e indexados à inflação, que são altamente substituíveis entre si, cuja presença maior ou menor varia à razão do custo relativo entre as duas curvas ou por influência do parâmetro que rege o indexador dos títulos indexados à inflação no longo prazo.

Todos os demais vencimentos estão ausentes da fronteira, sendo amplamente dominados pelo grupo descrito acima.

Outra conclusão que decorre das simulações realizadas é de que a fronteira em si desloca-se fortemente em função dos custos associados a cada curva, mas em especial aos custos associados à curva cambial, que é geralmente a mais barata, além da mais arriscada. Uma provável explicação para este fato é a presença desses títulos ao longo de toda a fronteira. Presença esta, que pode ser explicada pela imunização da carteira em razão das grandes reservas cambiais mantidas pelo país.

Vale ressaltar também que é de se esperar que mudanças de custos relativos, seja através da estrutura a termo da taxa de juros ou de indexadores de determinada curva, produzam modificações nos resultados do modelo, pois tais mudanças alteram significativamente o custo de cada instrumento, enquanto o risco permanece praticamente inalterado entre as simulações. Considerando também que a mudança dos resultados é bastante coerente com a mudança dos custos relativos, conclui-se que o modelo é relativamente robusto, a despeito da sensibilidade exibida aos parâmetros de entrada.

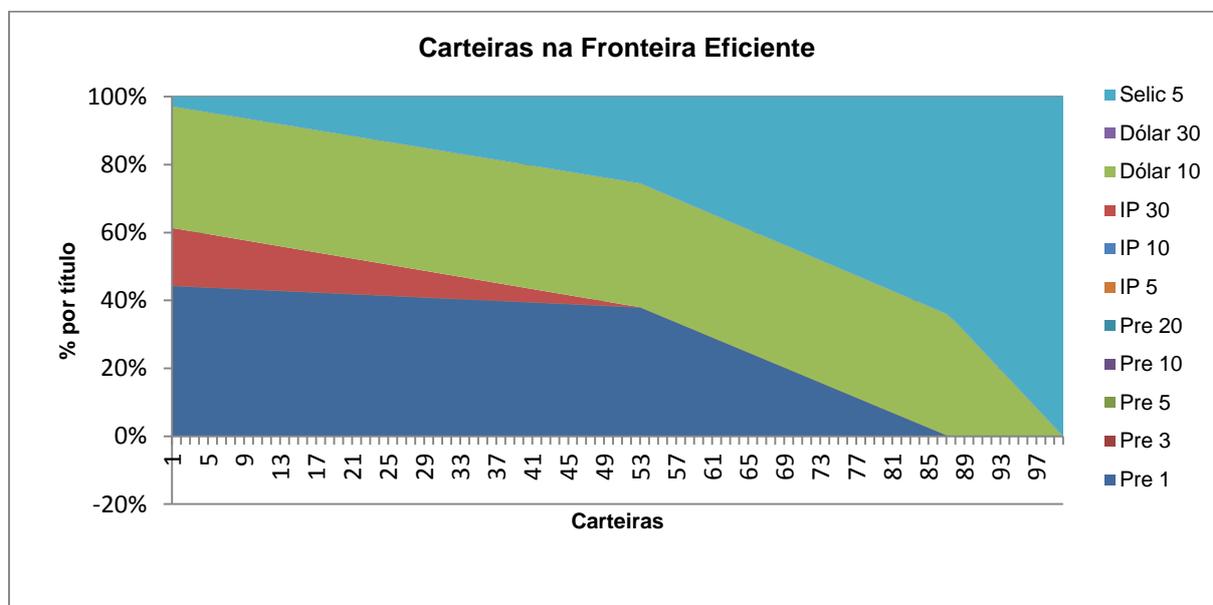
Fizemos alguns testes também modificando a velocidade de reversão à média nos sub-modelos da LIBOR e do câmbio e nesses casos não houve modificações relevantes nas respostas do modelo.

## 6.7 – Restrições à Fronteira Eficiente

Quando da construção de uma carteira ótima para a Dívida Pública Federal, é preciso ter em mente que o Tesouro tem que enfrentar no dia-a-dia um conjunto de riscos bem mais extenso do que aquele representado exclusivamente pelo desvio padrão da taxa de carregamento<sup>64</sup>. Um dos principais tipos de risco é o risco de rolagem, definido como a possibilidade do Tesouro ter que colocar dívida em mercado a um custo significativamente mais alto do que o normal, ou mesmo de não conseguir colocar dívida em mercado durante certo espaço de tempo. Para evitar este e outros tipos de risco, existem determinadas recomendações comuns aos gestores de dívida. Dentre elas, podemos citar a manutenção de um percentual de dívida vincendo em 12 meses relativamente baixo, um prazo médio relativamente elevado e uma quantidade limitada de títulos cambiais na carteira, conforme citado anteriormente. A obediência a esses preceitos minimiza as conseqüências de ocasionais condições adversas de funcionamento dos mercados financeiros.

Em sendo assim, prosseguiremos no nosso exercício sujeitando a Fronteira Eficiente anteriormente escolhida às restrições citadas. Para efeito de comparação, mostraremos inicialmente as carteiras da fronteira irrestrita.

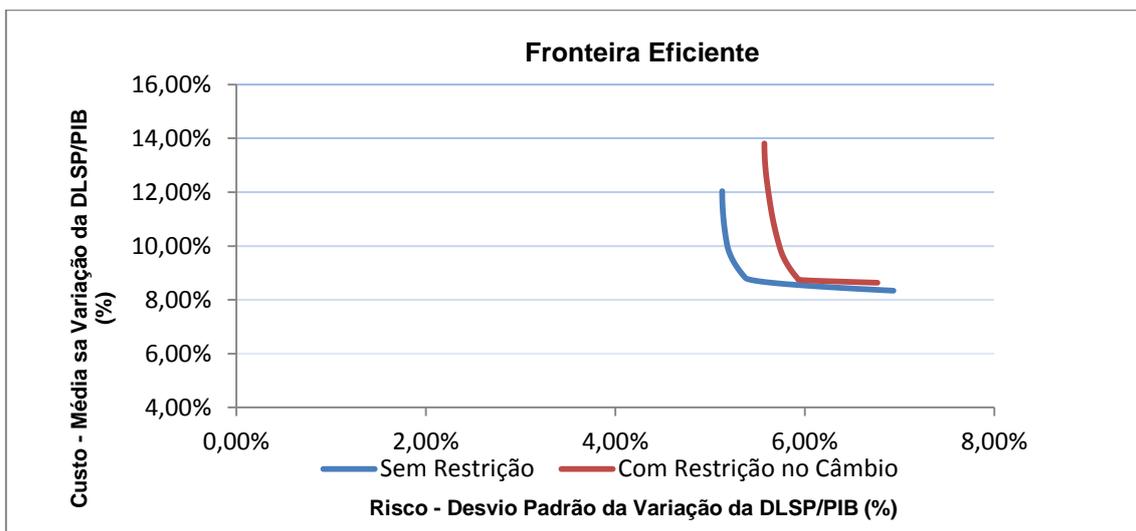
**Figura 7 – Carteiras na Fronteira Eficiente Irrestrita**



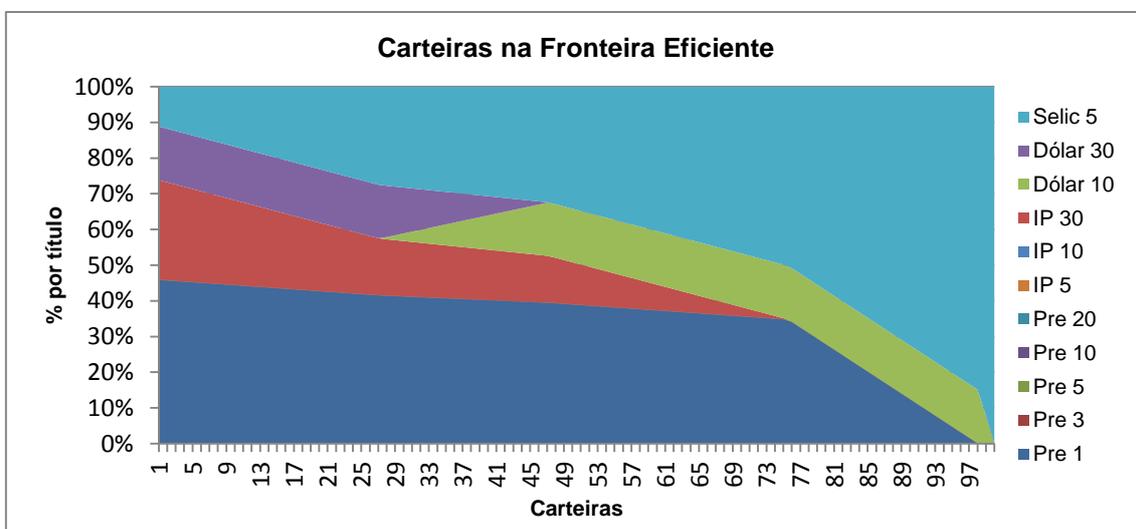
<sup>64</sup> Ver *Guidelines for Public Debt* do Fundo Monetário Internacional e do Banco Mundial para uma lista completa dos riscos envolvidos no processo de gerenciamento de dívida pública.

Iniciaremos os testes, restringindo a Fronteira Eficiente quanto a um percentual máximo de títulos cambiais nela presentes. Vimos nos nossos testes que os títulos cambiais estão presentes em todas as fronteiras apresentadas, em geral em percentuais elevados, colaborando sobremaneira para a redução de custos associados à DLSP. Hoje o percentual desses títulos na DPF é, contudo, inferior a 5%. Então, avaliaremos uma situação (*ad hoc*) na qual se permitisse um percentual máximo de 15% de títulos cambiais na DPF. Isso significaria um nível de emissões dessa espécie substancialmente mais elevada que a atual. É preciso ter em conta também que a demanda internacional por tais títulos dessa natureza é limitada, o que provavelmente já seria suficiente para impedir que a composição indicada pela fronteira irrestrita fosse atingida com os mesmos custos previstos inicialmente no modelo. A figura a seguir, mostra o impacto da restrição aos títulos cambiais na fronteira.

**Figura 8 – Deslocamento da Fronteira Eficiente – Restrição no Câmbio**



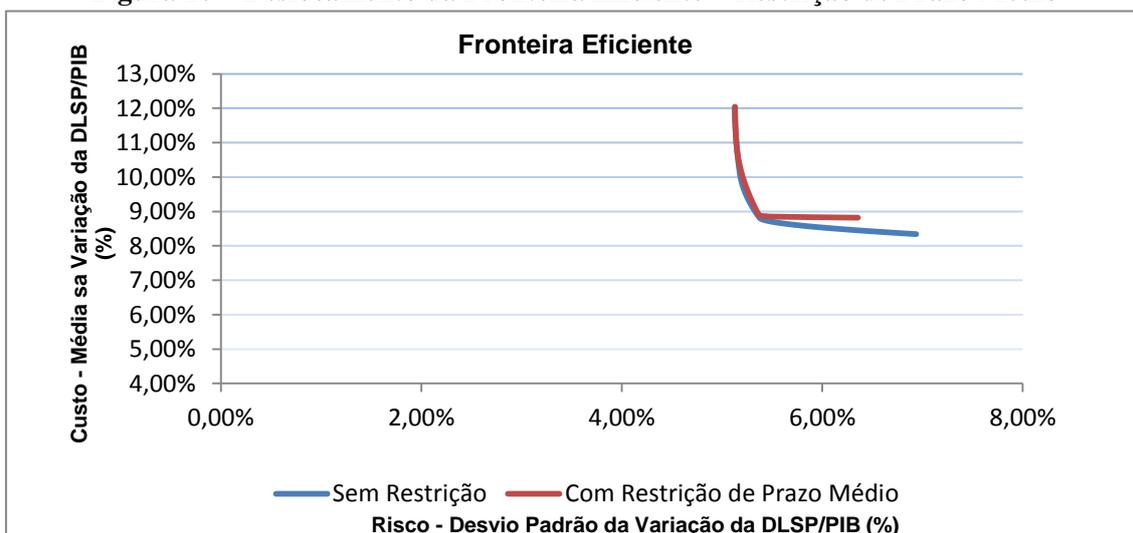
**Figura 9 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (15% de Cambial)**



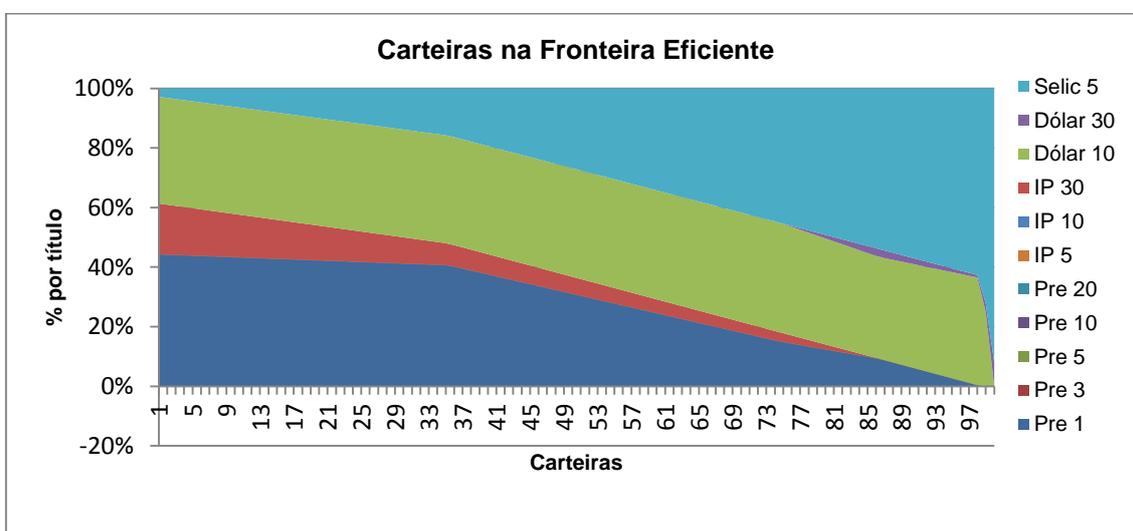
A restrição ao percentual de dívida cambial deslocou a fronteira para cima e para a direita, conforme previsto. Além disso, ela exibe uma variação menor em termos de risco ao longo de sua extensão. Na nova carteira, os títulos cambiais foram substituídos predominantemente pelos demais títulos anteriormente presentes na fronteira. Contudo, títulos cambiais de 30 anos tomaram o lugar dos títulos de 10 anos no trecho de menor risco da mesma.

Nossa segunda restrição à carteira diz respeito ao prazo médio da mesma. Partiremos da hipótese de que o prazo médio de um título é igual à metade do seu prazo de vencimento (compatível com uma maturação uniforme) e limitaremos o mesmo a 3,5 anos, fazendo com que a situação não piore muito em relação à atual (4,26 anos em junho de 2013). As figuras 11 e 12 mostram o resultado isolado da restrição de prazo médio.

**Figura 10 – Deslocamento da Fronteira Eficiente – Restrição de Prazo Médio**



**Figura 11 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (3,5 Anos de Prazo Médio)**

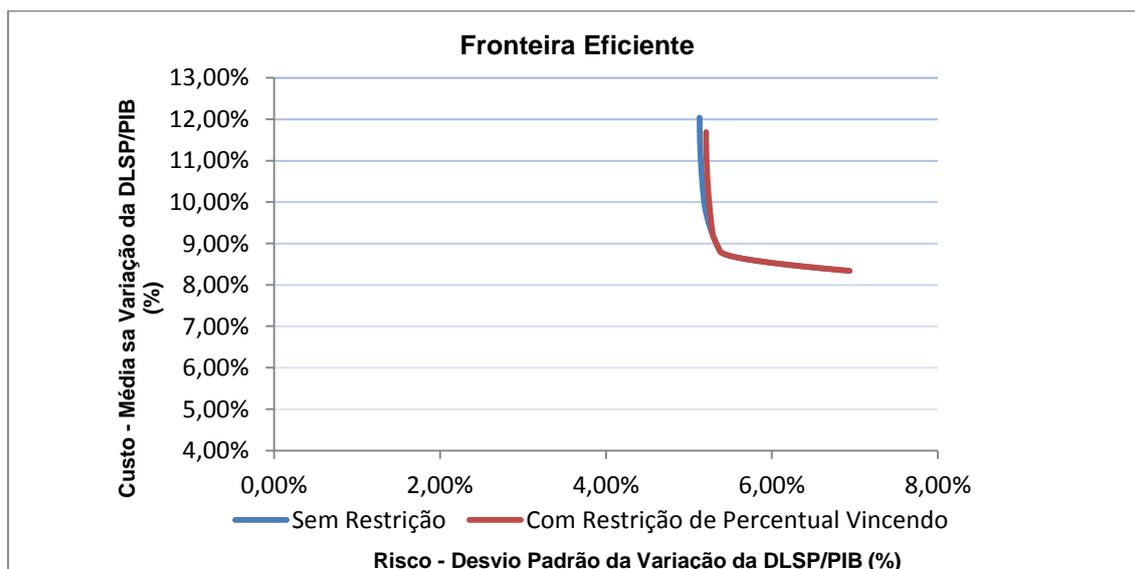


Essa restrição não se mostrou muito efetiva, uma vez grande parte da fronteira já estava sujeita a ela. Somente o trecho de maior risco foi impactado através da introdução de pequenas quantidades de títulos de 30 anos cambiais ou indexados à inflação. Uma vez que esses títulos têm prazo médio muito elevado, uma pequena quantidade dos mesmos já soluciona pequenos desvios em relação à meta de 3,5 anos. A Fronteira Eficiente só se desloca no trecho de maior risco, movendo-se para cima em resposta à nova restrição.

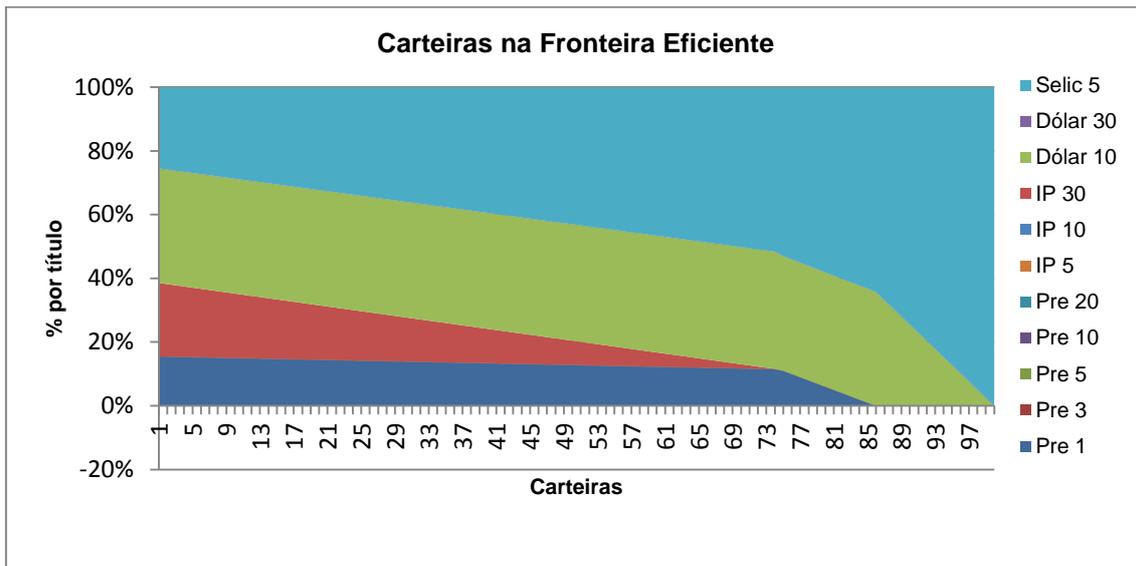
Nossa última restrição diz respeito ao percentual de títulos a vencer em doze meses. Em junho de 2013, tal número estava em 22,5%. Da mesma forma que nos casos anteriores, não permitiremos uma piora expressiva desse índice também. Para tanto, trabalharemos com uma restrição de percentual vincendo de no máximo de 30%.

A parametrização dessa restrição, no entanto, é mais complicada que as demais. Parte-se da hipótese de vencimentos uniformes no tempo para cada título. Posteriormente é necessário calcular o valor presente de cada um dos fluxos nominais (em termos de proporção) mês a mês do momento atual até o mês de vencimento do mesmo. Por fim, estabelece-se o percentual em termos do valor presente agregado dos fluxos descontados dos 12 primeiros meses em relação ao total do instrumento. Como é de se supor que os rendimentos de todas as curvas sejam semelhantes, optamos por uma simplificação segundo a qual calculamos os valores presentes exclusivamente com base na curva prefixada de longo prazo. As figuras 13 e 14 mostram os resultados isolados de restrição de percentual vincendo.

**Figura 12 – Deslocamento da Fronteira Eficiente – Restr. de % Vincendo em 12 Meses**



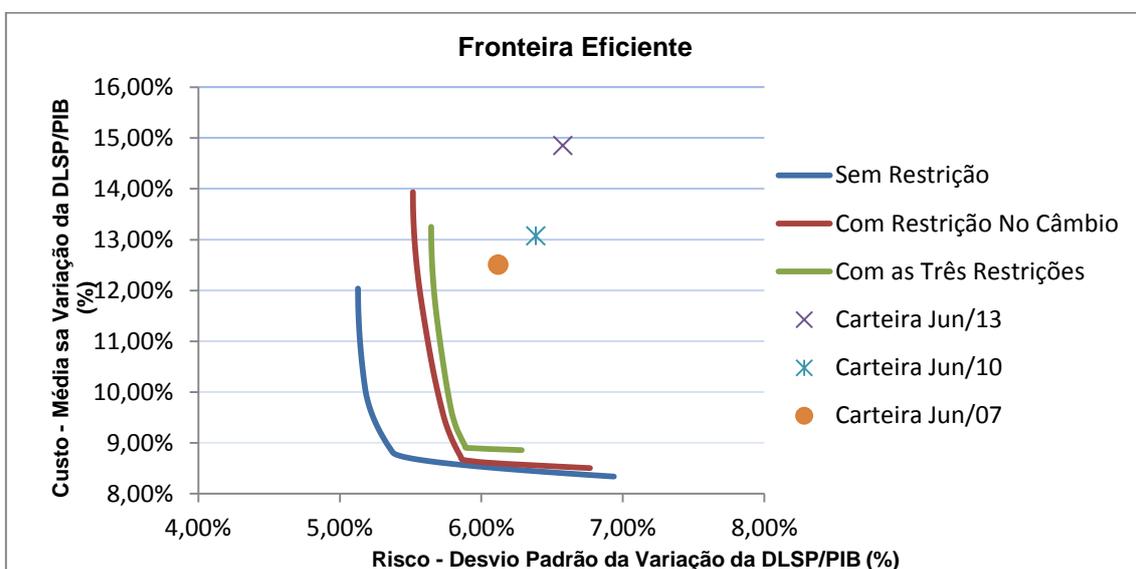
**Figura 13 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (30% de % Vencendo em 12 Meses)**



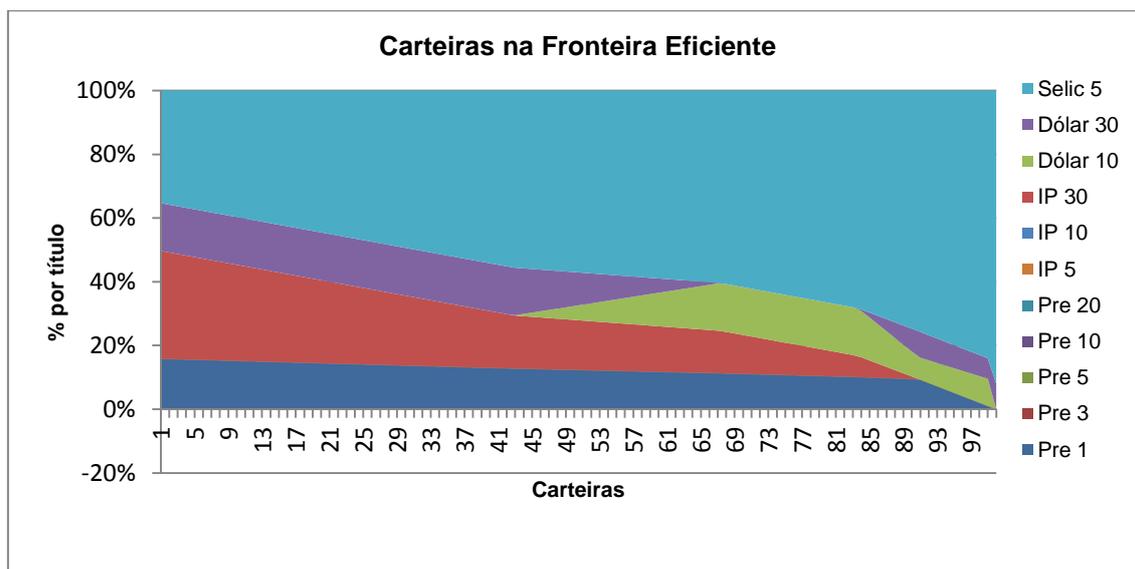
Ao contrário do que ocorreu com a restrição de prazo médio, desta vez o trecho de menor risco da fronteira é que foi afetado, pois neste trecho havia grande concentração de títulos prefixados de um ano cujo percentual vencendo em 12 meses é de 100%. Nesse caso, contudo, a substituição dos títulos prefixados se deu basicamente por títulos indexados à SELIC. A Fronteira Eficiente, por sua vez, desloca-se exclusivamente no trecho de menor risco da fronteira para a direita.

As figuras 14 e 15 mostram os resultados combinados das três restrições apresentadas, bem como a evolução da carteira da Dívida Pública Federal ao longo dos últimos seis anos.

**Figura 14 – Deslocamentos da Fronteira Eficiente e Carteiras DPF**



**Figura 15 – Carteiras na Fronteira Eficiente Restrita (Todas as Restrições)**



Duas das restrições impostas sobre a Fronteira Eficiente (prazo médio e percentual vincendo em doze meses) atuaram no sentido de coibir a presença de títulos prefixados de um ano sobre a nova fronteira, enquanto uma limitou diretamente os títulos indexados ao câmbio. Como resultado, elevou-se a participação de títulos indexados à inflação e, sobretudo, à SELIC em toda a fronteira. Outro resultado interessante é que as restrições mudaram a carteira da fronteira no que tange aos títulos cambiais, impondo uma predominância dos cambiais longos sobre os curtos, sobretudo na parte de menor risco da fronteira, onde a substituição foi completa.

## **6.8 – Evolução Recente da Dívida Pública Federal**

Simulamos também a evolução recente da Dívida Pública Federal, a partir de uma simulação com apenas quatro títulos: um prefixado, um indexado à inflação, um cambial e um indexado à SELIC, sendo que cada um deles tinha vencimento igual ao prazo médio da sua classe de indexadores na DPF no momento considerado. Além disso, as participações de cada título na carteira eram equivalentes a composição da DPF em termos de estoque nesses momentos considerados. Retiramos os dados do *website* do Tesouro Nacional, mais especificamente dos anexos do Relatório Mensal da Dívida de julho de 2013.

O resultado básico é que a composição da Dívida Pública Federal está se afastando da Fronteira Eficiente. Isso ocorre porque vimos que esta fronteira pede por grandes quantidades de títulos cambiais e/ou indexados à taxa SELIC. À medida que a participação desses títulos

no estoque da DPF foi baixando, a carteira da dívida foi se afastando da Fronteira Eficiente, assimilando mais risco em termos de desvio da média, mas, sobretudo, mais custo na sua trajetória.

## **6.9 – Função de Utilidade<sup>65</sup>**

Nossa última tarefa é a especificação de uma família de Funções de Utilidade que possa ajudar a sistematizar a escolha da carteira ideal. Tal tarefa depende do nível de aversão a risco do gestor de dívida e sempre estará sujeita a um determinado grau de subjetividade. Nossa intenção aqui não é de determinar exatamente qual a carteira perfeita, mas sistematizar características necessárias, alguns dos comportamentos geralmente observados nas escolhas dos gestores de dívida, bem como recomendações de organismos multilaterais. Um exemplo de aplicação dessa função está na manutenção de um critério estável de escolha da carteira ideal ao longo do tempo, nos casos em que os resultados do modelo tenham que ser eventual ou sistematicamente atualizados.

A família de funções pela qual procuramos deve possuir determinadas características que lhe permitam caracterizar de maneira adequada a escolha entre custo e risco que se coloca ante o gestor da dívida pública. Primeiramente, essa função deve ser decrescente tanto em relação ao custo, quanto em relação ao risco da dívida, pois ambos os atributos são indesejados. Essa função também deve levar em consideração o fato de que existe um nível limite inferior para o risco (zero), mas não existe nível limite para o custo, tendo em vista que nada impede que tenhamos custos negativos em termos da relação DLSP/PIB. Basta que o PIB nominal cresça a taxas mais rápidas que a DLSP para que esse tipo de resultado se realize e quanto mais decrescer essa relação, melhor para o gestor da DLSP. Por fim, também procuramos como atributos para essa função a simplicidade e algum grau de flexibilidade, de forma que existam parâmetros na mesma que possam ser alterados para uma melhor adequação a uma eventual nova realidade. Nesse ponto, recordaremos a recomendação do FMI e do Banco Mundial no sentido de que os países tomem menos risco quando apresentarem maior vulnerabilidade externa. A seguir, mostramos uma expressão que acreditamos que atende a estes critérios:

---

<sup>65</sup> A especificação de uma função utilidade não faz parte do escopo de nenhum dos trabalhos já publicados sobre modelos estocásticos de estratégia de dívida que foram consultados durante a execução deste estudo.

$$Utilidade(Custo, Risco) = -Custo(Risco) - A \cdot x \cdot Risco^2$$

Em que  $A$  é uma constante que determina a aversão ao risco do gestor de dívida e  $x$  é uma constante a ser determinada empiricamente.

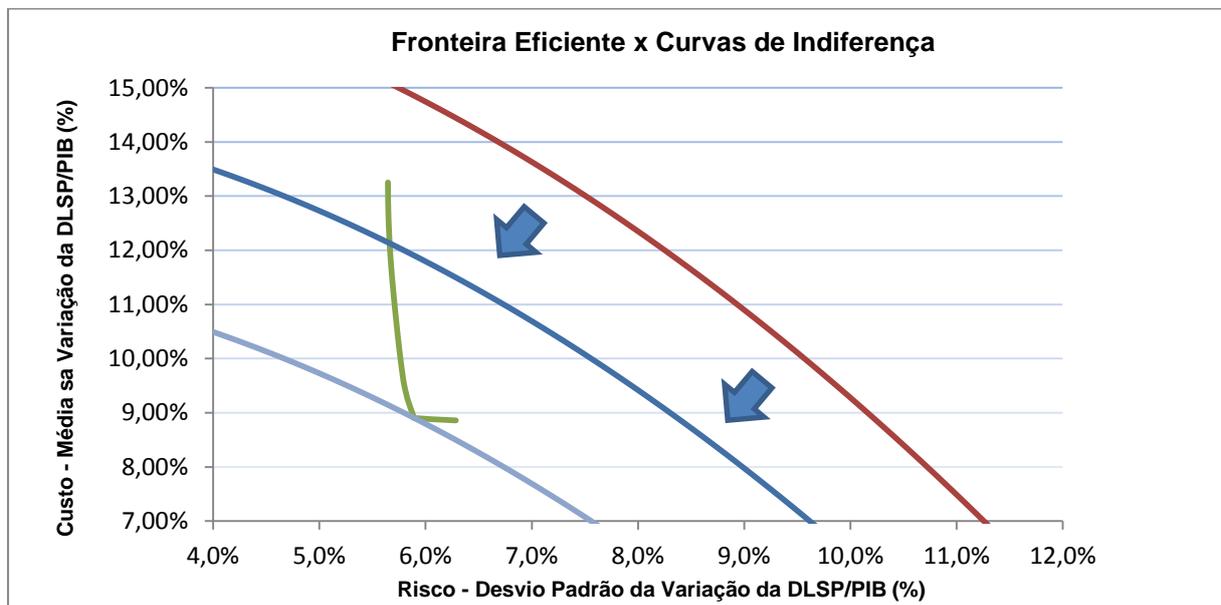
As curvas de nível da Função de Utilidade nesse caso são parábolas que se deslocam ao longo do eixo vertical. Como se pode verificar, conforme risco e custo diminuem, a utilidade aumenta. Além disso, se o risco está próximo de zero, o gestor estará mais propenso a assumir grandes quantidades de risco em troca de pequenas reduções de custo e conforme ele se afasta de zero, diminui a propensão a tomar risco como forma de diminuir custos. Quando o risco é zero, a tendência é de assumir uma quantidade infinita de risco em troca de uma diminuição infinitesimal de custo (derivada igual a zero), o oposto, contudo, não é verdadeiro, pois não existe condição na qual o gestor opte por aumentar infinitamente seus custos por uma diminuição de risco. Isso decorre do fato de que sempre será possível obter reduções de custo adicionais.

O termo  $A$  foi propositalmente destacado na expressão anterior como forma do gestor poder controlar sua aversão a risco. Para um nível fixo de utilidade, quanto maior o valor de  $A$ , mais a parábola se aproximará do eixo vertical, ou seja, maior será o custo de que o gestor abrirá mão por uma mesma diminuição de risco. Assim, pode-se, por exemplo, atender as recomendações dos organismos multilaterais através do aumento dessa constante, caso o país se encontre numa situação de maior vulnerabilidade externa. Numa situação normal, a recomendação é manter  $A$  com valor unitário.

Já o coeficiente  $x$  precisa ser calibrado. A forma mais simples é através de uma escolha inicial do gestor na fronteira. De posse desse valor, bastaria igualar as derivadas da expressão acima e da fronteira no ponto escolhido para obter o valor de  $x$ , supondo  $A$  unitário (situação de normalidade), e supondo ainda que haja derivada. No nosso caso, contudo, não contamos com nenhuma escolha prévia do gestor. Portanto, faremos a escolha por nós mesmos. Partiremos de conversas com gestores de dívida e também da literatura especializada. Em ambos os casos, escutamos relatos de que se busca por pontos onde pequenos incrementos de risco não signifiquem grandes sacrifícios em termos de custo. Em termos práticos, isso significa dizer que não existem preferências extremas em termos do balanço entre custos e riscos. Eliminados os extremos e considerando que as variações na relação DLSP/PIB e as volatilidades têm o mesmo nível de grandeza, uma aproximação que nos parece suficiente é atribuir um peso semelhante a cada um dos atributos da DLSP. No nosso caso, utilizamos uma relação um para um. O passo seguinte é procurar na Fronteira

Eficiente, um ponto com inclinação semelhante à previamente estabelecida e posteriormente igualar a derivada da expressão anterior à derivada da fronteira no ponto escolhido. No presente caso, nossa tarefa foi facilitada por uma inflexão na curva da fronteira (ausência de derivada da Fronteira eficiente). Nesta situação, virtualmente qualquer maximização de Função Utilidade teria o mesmo resultado. Não obstante, obtivemos o valor de 8,485 para o parâmetro  $x$ . A configuração final do nosso problema de maximização de utilidade pode ser vista no gráfico a seguir:

**Figura 16 – Processo de Maximização de Utilidade do Gestor de Dívida**



De posse dessa informação, concluímos que a carteira ideal está na parte de maior risco da fronteira, o que vale dizer que nela existe forte presença de títulos indexados à SELIC e cambiais até o limite que lhes foi imposto.

Vale ressaltar que, como não existe derivada da Fronteira Eficiente no ponto onde as duas curvas se encontram, dado formato da mesma, tivemos que buscar uma solução mais geral, ou seja, o ponto de tangência entre as duas curvas.

## Seção 7 – Conclusões

Iniciamos chamando à atenção para o fato de que as discussões sobre variáveis de controle para o risco da dívida pública são em geral bastante superficiais, principalmente em se considerando sua importância nos resultados finais dos modelos de determinação de composição ótima da dívida pública. No nosso entender, uma visão mais abrangente, seja através da relação Dívida/PIB ou de uma modelagem conjunta da dinâmica da dívida e do resultado fiscal são melhores do que abordagens que consideram a evolução dívida como um problema isolado. Isso ocorre porque o serviço da dívida pode de alguma forma servir de contraponto à aos ciclos da política fiscal. Formulações com essa conotação apresentam como característica comum uma presença mais marcante de títulos indexados à inflação no estoque da dívida, pois esses títulos possuem boa correlação com o crescimento da arrecadação.

Vimos também que estabelecer parâmetros de longo prazo para um conjunto extenso de variáveis econômico-financeiras no Brasil não é tarefa fácil. Como nosso modelo é sensível a mudanças de custos relativos e nos parâmetros de longo prazo de indexadores das curvas de juros, a definição exata da Fronteira Eficiente depende em grande parte da habilidade do usuário do modelo de prever as condições de equilíbrio da economia brasileira. Por isso, os resultados têm que ser relativizados, tendo mais valor como um direcional do que deve estar contido na carteira do que como uma configuração fechada a ser perseguida.

As variações nas respostas do modelo, contudo, são bastante consistentes com as variações nos parâmetros de entrada e as carteiras na Fronteira Eficiente apresentam muitas características em comum, como a presença de títulos prefixados de um ano e indexados à inflação de 30 anos juntos ou substituindo um ao outro no trecho de menor risco da fronteira e títulos cambiais ou indexados à SELIC presentes ao longo de toda a fronteira e se confrontando de forma quase exclusiva no trecho de maior risco da mesma.

Não obstante, a imposição de restrições à Fronteira Eficiente, como forma de mitigar outros tipos de risco a que a dívida pública está exposta, limita o papel dos títulos prefixados curtos e dos cambiais, favorecendo os títulos indexados à inflação e principalmente os indexados à taxa SELIC na fronteira final. Tais restrições estão em linha com as recomendações do Fundo Monetário Internacional de ter cuidado com o acúmulo de dívidas de curto prazo e cambial. Além disso, elas colaboram com um resultado final robusto para o nosso modelo, tendo em vista que o formato da Fronteira Eficiente (semelhante às curvas de

indiferença entre bens complementares perfeitos) aponta no sentido de uma carteira repleta de títulos indexados à SELIC, seja qual for a Função de Utilidade escolhida.

Nossos resultados também apontam no sentido de que restrições adicionais a emissões títulos cambiais ou indexados à SELIC podem ser contraproducentes, tanto em termos de custos quanto em termos de riscos associados à dívida pública. É preciso lembrar que esses títulos, além de reduzirem significativamente os custos de emissão do Tesouro Nacional, ainda colaboram para a diversificação da carteira, apresentando efeitos positivos do ponto de vista de riscos. De fato, nos últimos anos, a volatilidade associada à dívida pública no longo prazo parece estar aumentando ao invés de diminuir, como resultado de uma política de restrição a emissões desses tipos de instrumentos.

É preciso mencionar, no entanto, que há outras questões macroeconômicas a se considerar quando abordamos o problema da composição da dívida, como a diminuição a eficiência da política monetária como consequência de um percentual elevado de títulos indexados à SELIC em mercado ou eventuais pressões indesejadas na condução da política cambial do país.

## **7.1 Sugestões de Pesquisa**

A seguir, enumeramos algumas sugestões de temas para pesquisa que são complementares àquele desenvolvido neste trabalho:

1. Modelagem da composição ideal da dívida, tendo o Resultado Nominal como variável de controle – Essa abordagem, adotada pelo governo canadense, pressupõe a adição de um módulo que simule a dinâmica fiscal do país, que se soma a dinâmica da dívida pública para fornecer um arcabouço alternativo para o problema da composição ótima, que não mais precisaria ser tratada em termos de proporção do PIB;
2. Geração de cenários por meio de um VaR (Vetor Auto-Regressivo) – Consiste em trocar o Modelo de Equações de Finanças por um VaR na função de geração de cenários para as variáveis econômico-financeiras das simulações;
3. Abandonar conjunto de 11 títulos para trabalhar a partir da duração de um único título representativo de cada tipo de instrumento – Consiste em substituir o extenso conjunto de títulos testado neste trabalho por um conjunto

menor, que pudesse ser definido em termos de cada indexador e da duração mais adequada a cada tipo de instrumento;

4. Modelagem de Funções de Penalização para emissões em descompasso com a demanda de títulos – Consiste na tentativa de tornar endógenos ao modelo os preços dos títulos, ao punir emissões em volumes muito maiores ou menores do que a demanda de mercado dos mesmos.

## Referências Bibliográficas

ALVES, L. F. **Composição Ótima da Dívida Pública Brasileira: uma estratégia de longo prazo**. 2009. Disponível em:

[https://www.tesouro.fazenda.gov.br/images/arquivos/artigos/Premio2009\\_Tema1\\_3.pdf](https://www.tesouro.fazenda.gov.br/images/arquivos/artigos/Premio2009_Tema1_3.pdf) .

BARRO, R. **Notes on Optimal Debt Management**. Journal of Applied Economics, vol. 2, p. 282-290, 1999.

BOLDER, D. J. **The Canadian debt-strategy model**. Bank of Canada Review. 2008.

Disponível em: <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/06/bolder.pdf>.

BOLDER, D. J.; SIMON DEELEY. **The Canadian debt-strategy model: An Overview of the Principal Elements**. Bank of Canada Review. 2011.

Disponível em: <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2011/05/dp11-3.pdf>.

CABRAL, R; LOPES, M. **Benchmark para a Dívida Pública: Duas Abordagens Alternativas**. Annual Meeting of the Brazilian Society of Finance, 2005. Disponível em:

[http://www3.tesouro.fazenda.gov.br/Premio\\_TN/IXpremio/divida/2afdpIXPTN/2premio\\_afdp.pdf](http://www3.tesouro.fazenda.gov.br/Premio_TN/IXpremio/divida/2afdpIXPTN/2premio_afdp.pdf)

CHAN, K.C; KAROLYI, G.A; LONGSTAFF, F.A; SANDERS A.B. **An Empirical Comparison of Alternative Models of Short-Term Interest Rate**. The Journal of Finance, vol. 47, p. 1209-1227, 1992.

COX, J.C; INGERSOLL, J.E; ROSS S.A. **A Theory of the Term Structure of Interest Rates**. Econometrica, vol. 53, p. 385-408, 1985.

DANMARKS NATIONALBANK. **Danish government borrowing and debt 2005**. 2005.

Disponível em:

[http://www.nationalbanken.dk/C1256BE9004F6416/side/Danish\\_Government\\_borrowing\\_and\\_Debt\\_2005/\\$file/slog\\_05\\_uk\\_web.pdf](http://www.nationalbanken.dk/C1256BE9004F6416/side/Danish_Government_borrowing_and_Debt_2005/$file/slog_05_uk_web.pdf).

DANMARKS NATIONALBANK. **Danish government borrowing and debt 2007**. 2007.

Disponível em:

[http://www.nationalbanken.dk/DNUK/Publications.nsf/side/641ECA8BEF727D57C12573F70044669C/\\$file/SLOG\\_UK\\_2007\\_web.pdf](http://www.nationalbanken.dk/DNUK/Publications.nsf/side/641ECA8BEF727D57C12573F70044669C/$file/SLOG_UK_2007_web.pdf).

DIEBOLD, F.X; LI, C. **Forecasting the term structure of government bond yields**.

Journal of Economics, v. 130, p. 337-364, 2005.

ELTON, E. J; GRUBER, M.J; BROWN, S.J; GOETZMANN, W. N. **Mothern Portfólio Theory and Investment Analysis**. 5. ed. John Wiley & Sons,1995.

FERREIRA G. G; COLBANO F. **Taxa de Juros Real de Equilíbrio para o Brasil**, 2012.

Disponível em: [http://www3.tesouro.fazenda.gov.br/textos\\_discussao/downloads/td1.pdf](http://www3.tesouro.fazenda.gov.br/textos_discussao/downloads/td1.pdf).

JÄCKEL, P. **Monte Carlo Methods in Finance**. John Wiley & Sons, 2001.

JORION, P. **Value at Risk – A nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro**.

2. ed. The McGraw Hill Company, 2001.

KRUGMAN P; OBSTFELD M. **Economia Internacional**. 4. ed. Makron Books, 1999.

MALKIEL, B.G. **The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns**. Princeton University Press, 1966.

MARKOWITS, H. **Portfólio Selection**. The Journal of Finance, v. 7, p. 77-91, 1952.

NELSON C. R; SIEGEL A. F. **Parsimonious Modeling of Yield Curves**. The Journal of Business, v. 60, p. 473-489, 1987.

PICK, A.; ANTHONY, M. **A simulation model for the analysis of the UK's sovereign debt strategy**. 2006. UK DMO Research Paper. Disponível em:

[http://www.dmo.gov.uk/index.aspx?page=Research/DMO\\_research](http://www.dmo.gov.uk/index.aspx?page=Research/DMO_research)

RIKSGÄLDEN-SWEDISH NATIONAL DEBT OFFICE. **Central Government Debt Management. Proposed Guidelines – 2009–2011.** 2008. Disponível em: [https://www.riksdagen.se/Dokument\\_eng/press/guidelines/2009/Proposed%20guidelines%202009-2011.pdf](https://www.riksdagen.se/Dokument_eng/press/guidelines/2009/Proposed%20guidelines%202009-2011.pdf).

RIKSGÄLDEN-SWEDISH NATIONAL DEBT OFFICE. **Financial and risk policy.** 2013. Disponível em: [https://www.riksdagen.se/Dokument\\_eng/about/financial\\_and\\_riskpolicy.pdf](https://www.riksdagen.se/Dokument_eng/about/financial_and_riskpolicy.pdf).

SHARP, W.F; ALEXANDER, G. J; BAILEY, J. V. **Investments.** 6. Ed. Prentice Hall, 1999.

TAYLOR, J.B. **Discretion versus Police Rules in Practice.** Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, vol. 39, p. 195-214, 1993.

TESOURO NACIONAL. **Composição ótima da dívida pública federal: definição de uma referência de longo prazo.** 2011. Disponível em: [http://www3.tesouro.gov.br/hp/downloads/paf/Publicacao\\_Completa.pdf](http://www3.tesouro.gov.br/hp/downloads/paf/Publicacao_Completa.pdf).

UNITED KINGDOM DEBT MANAGEMENT OFFICE (UK-DMO). **Quantitative analysis of debt service cost and risk: an extract from the Debt and Reserves Management Report 2011-2012.** 2011. Disponível em: [http://www.dmo.gov.uk/documentview.aspx?docname=research/DRMR%202011-12\\_AnnexB\\_website\\_final.pdf&page=Research/DMO\\_research](http://www.dmo.gov.uk/documentview.aspx?docname=research/DRMR%202011-12_AnnexB_website_final.pdf&page=Research/DMO_research).

VASICEK, O. **An Equilibrium Characterization of the Term Structure.** Journal of Financial Economics, vol. 5, p. 177-188, 1977.

WORLD BANK AND INTERNATIONAL MONETARY FUND (WB, IMF). **Guidelines for public debt management.** 2001. Disponível em: [http://treasury.worldbank.org/bdm/pdf/PDM\\_Guidelines\\_2001\\_english.pdf](http://treasury.worldbank.org/bdm/pdf/PDM_Guidelines_2001_english.pdf).

## Apêndices - Resultados de Simulações

### Simulação 1

Dados Históricos (2005-2013)

**Tabela 15 – Parâmetros da Simulação 1**

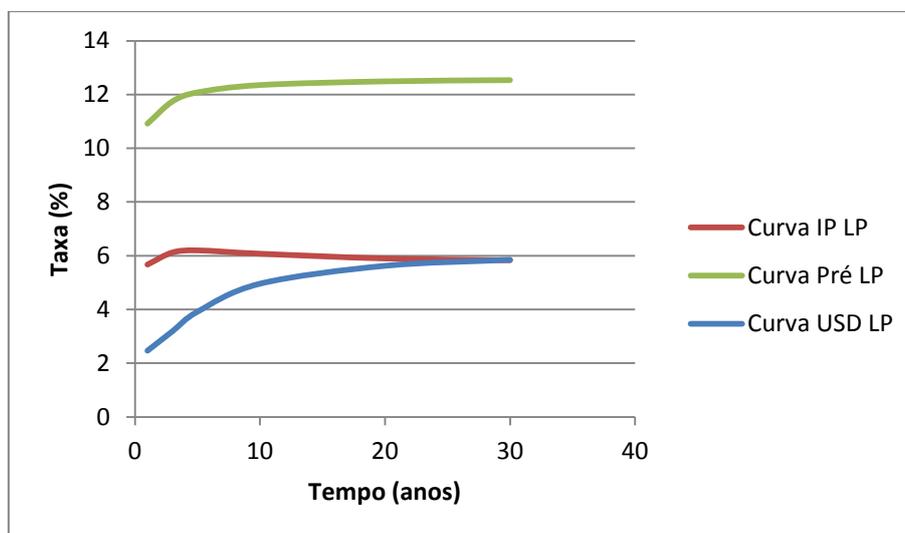
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	5,52	5,21	1,00	4,77	2,85	2,45	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,004664	0,001793	0,032338	0,011244	0,009707	0,004002	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	12,578783	1,019842	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117
$\lambda$	1,463800	-	-	-

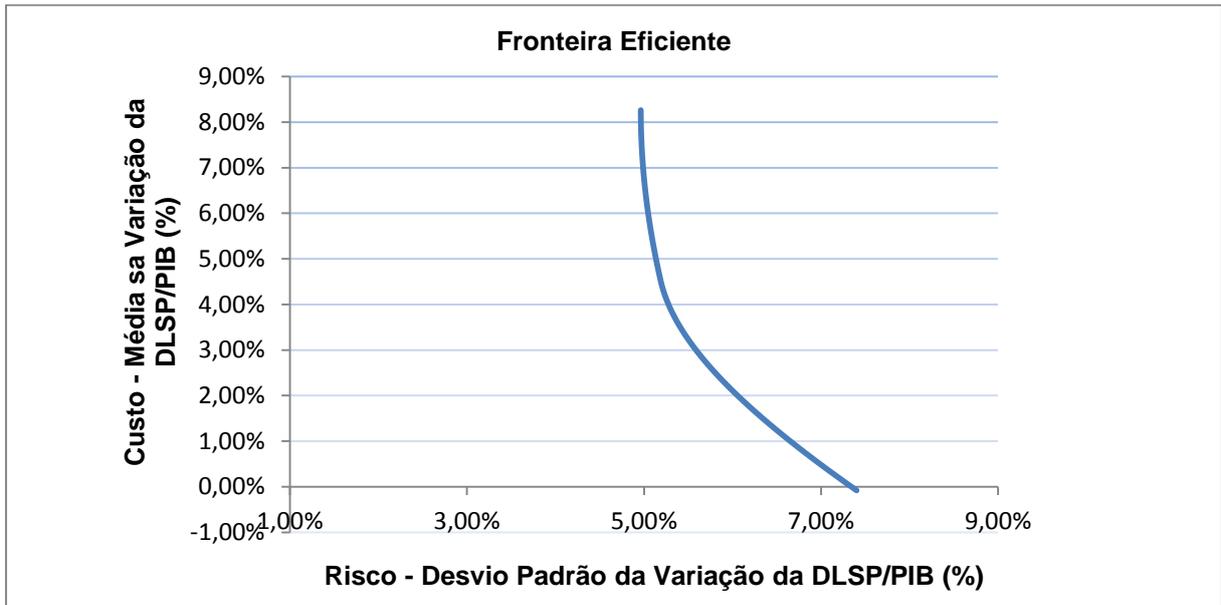
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,673078	0,280090	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-0,636576	-0,022928	0,963982	0,698385
$\beta_2$	2,489834	0,269423	0,891791	1,481715
$\lambda$	0,478900	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,270373	0,393191	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-3,917573	-0,169177	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-4,544297	-0,625058	0,862452	0,988206
$\lambda$	0,621100	-	-	-

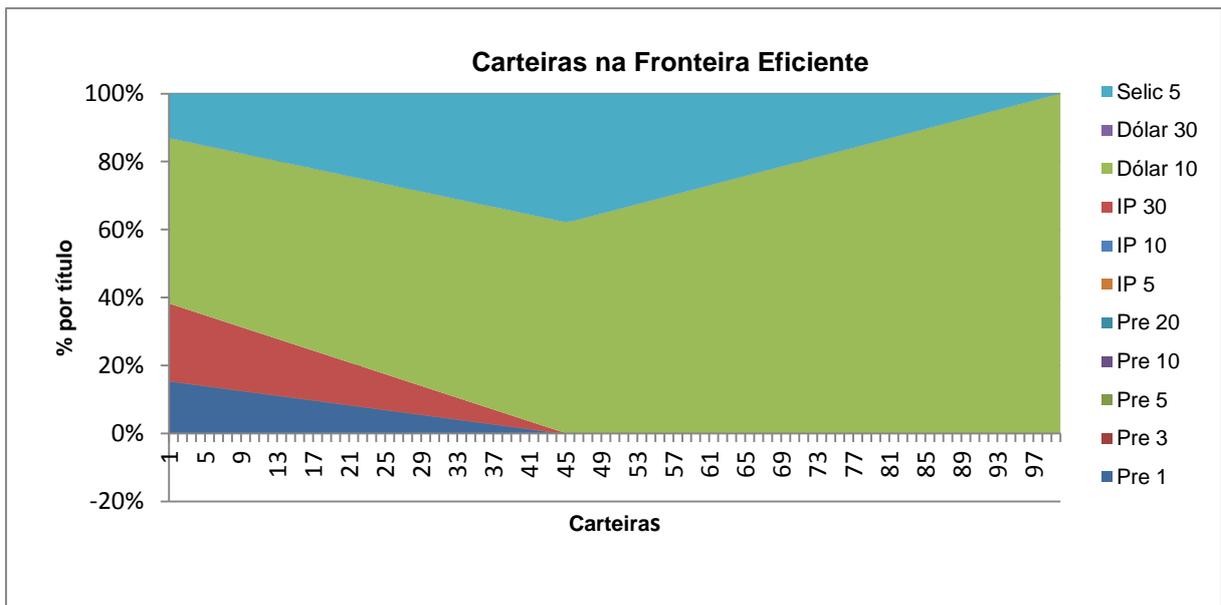
**Figura 17 – Curvas de Juros – Simulação 1**



**Figura 18 – Fronteira Eficiente – Simulação 1**



**Figura 19 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 1**



**Tabela 16 – Variáveis Observadas – Simulação 1**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	10,22%	5,56%	5,22%	3,99%	4,76%	2,82%	2,48%
<b>Desvio Padrão</b>	1,23%	3,43%	1,41%	14,40%	0,23%	2,90%	2,72%
<b>Percentil 5º</b>	8,22%	0,02%	2,92%	-17,92%	4,39%	-2,24%	-1,93%
<b>Percentil 95º</b>	13,08%	13,74%	8,49%	41,76%	5,30%	9,00%	8,92%

**Tabela 17 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) - Simulação 1**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,82%	0,88%	9,37%	12,89%
<b>Pre 3 anos</b>	11,67%	0,64%	10,60%	13,15%
<b>Pre 5 anos</b>	12,00%	0,52%	11,15%	13,18%
<b>Pre 10 anos</b>	12,26%	0,27%	11,80%	12,85%
<b>Pre 30 anos</b>	12,41%	0,07%	12,28%	12,55%
<b>IP 5 anos</b>	6,13%	0,45%	5,39%	7,15%
<b>IP 10 anos</b>	6,02%	0,18%	5,72%	6,43%
<b>IP 30 anos</b>	5,79%	0,03%	5,74%	5,85%
<b>Dólar 10 anos</b>	4,91%	0,17%	4,63%	5,31%
<b>Dólar 30 anos</b>	5,81%	0,03%	5,75%	5,87%
<b>Selic 5 anos</b>	10,22%	1,24%	8,21%	13,10%

**Tabela 18 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 1**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,82%	0,88%	9,37%	12,89%
<b>Pre 3 anos</b>	11,67%	0,64%	10,60%	13,15%
<b>Pre 5 anos</b>	12,00%	0,52%	11,15%	13,18%
<b>Pre 10 anos</b>	12,26%	0,27%	11,80%	12,85%
<b>Pre 20 anos</b>	12,41%	0,07%	12,28%	12,55%
<b>IP 5 anos</b>	11,67%	1,57%	9,11%	15,33%
<b>IP 10 anos</b>	11,56%	1,51%	9,10%	15,06%
<b>IP 30 anos</b>	11,32%	1,49%	8,89%	14,78%
<b>Dólar 10 anos</b>	9,09%	15,24%	-14,09%	49,07%
<b>Dólar 30 anos</b>	10,02%	15,38%	-13,37%	50,38%
<b>Selic 5 anos</b>	10,22%	1,24%	8,21%	13,10%

## Simulação 2

Dados históricos (2005:2013) com inflação de longo prazo na meta do Banco Central

**Tabela 19 – Parâmetros da Simulação 2**

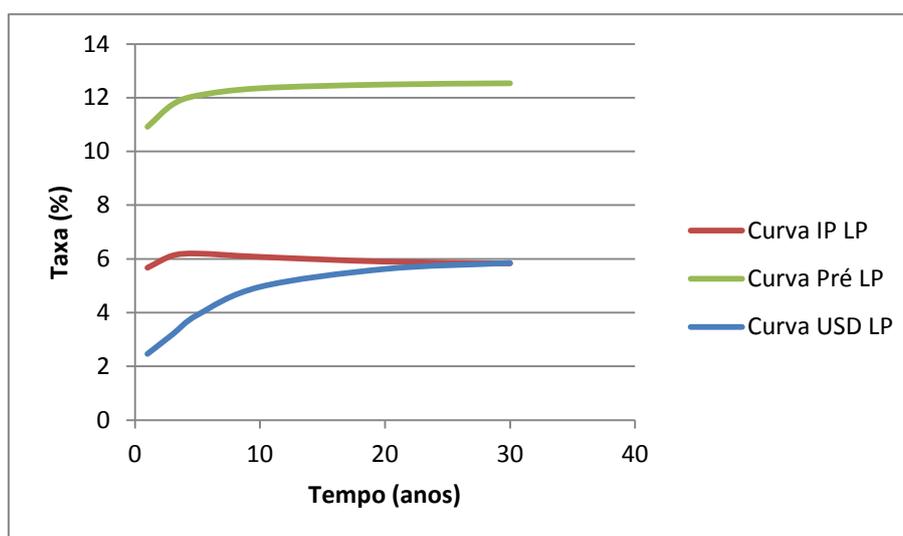
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	4,5	4,5	1,00	4,77	2,85	2,45	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,003800	0,001549	0,032338	0,011244	0,009707	0,004002	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	12,578783	1,019842	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117
$\lambda$	1,463800	-	-	-

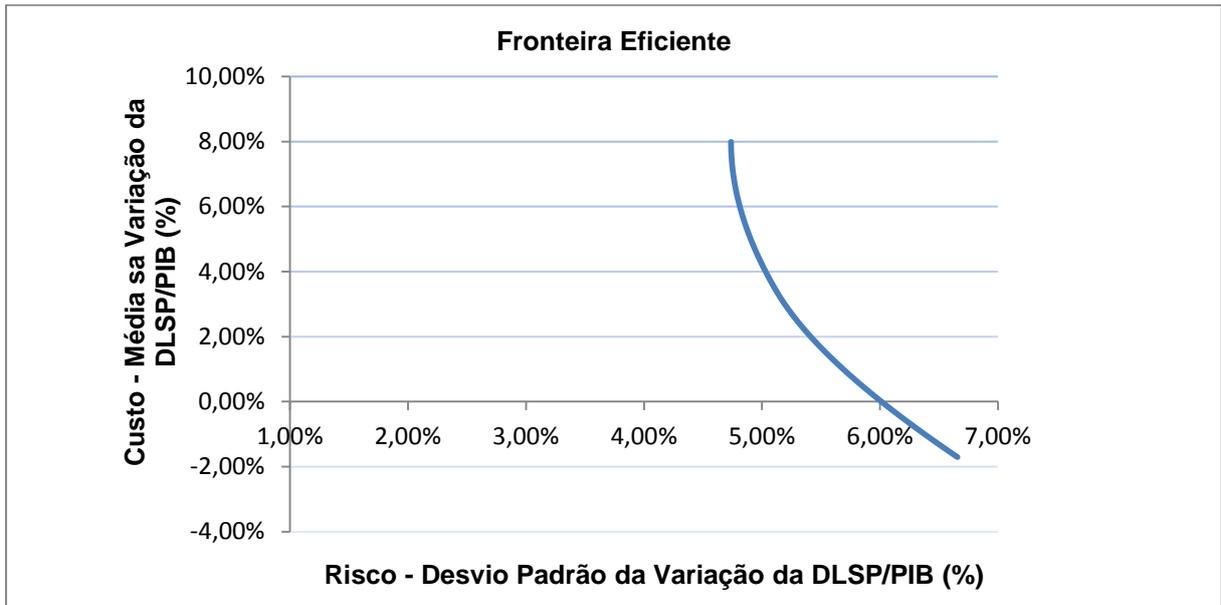
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,673078	0,280090	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-0,636576	-0,022928	0,963982	0,698385
$\beta_2$	2,489834	0,269423	0,891791	1,481715
$\lambda$	0,478900	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,270373	0,393191	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-3,917573	-0,169177	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-4,544297	-0,625058	0,862452	0,988206
$\lambda$	0,621100	-	-	-

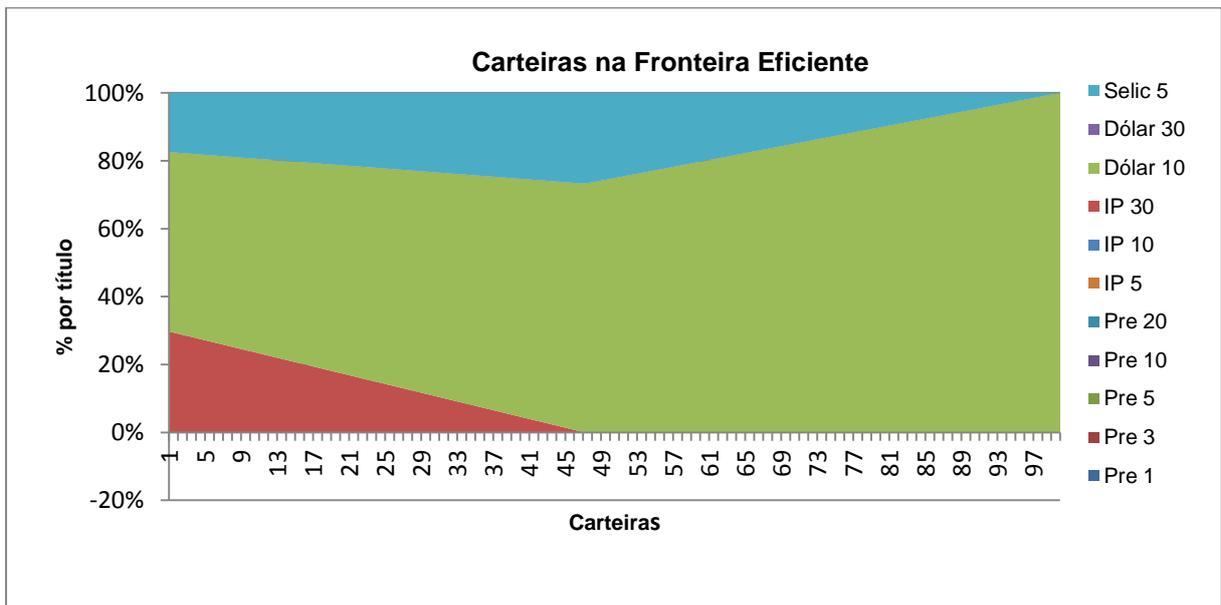
**Figura 20 – Curvas de Juros – Simulação 2**



**Figura 21 – Fronteira Eficiente – Simulação 2**



**Figura 22 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 2**



**Tabela 20 – Variáveis Observadas – Simulação 2**

<i>a.a.</i>	SELIC	IGP	IPCA	Câmbio Nominal	Libor	PIB	Inflação Externa
<b>Média</b>	10,25%	4,54%	4,50%	2,91%	4,76%	2,84%	2,56%
<b>Desvio Padrão</b>	1,23%	2,79%	1,21%	14,14%	0,23%	2,89%	2,82%
<b>Percentil 5º</b>	8,20%	2,95E-04	2,52%	-18,57%	4,40%	-2,20%	-2,01%
<b>Percentil 95º</b>	13,09%	11,16%	7,36%	40,35%	5,30%	8,99%	9,29%

**Tabela 21 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 2**

<i>a.a.</i>	Média	Desvio Padrão	Percentil 5º	Percentil 99º
<b>Pre 1 ano</b>	10,86%	0,87%	9,43%	12,88%
<b>Pre 3 anos</b>	11,68%	0,65%	10,59%	13,21%
<b>Pre 5 anos</b>	12,00%	0,54%	11,10%	13,25%
<b>Pre 10 anos</b>	12,26%	0,28%	11,78%	12,92%
<b>Pre 30 anos</b>	12,41%	0,08%	12,27%	12,56%
<b>IP 5 anos</b>	6,14%	0,45%	5,39%	7,17%
<b>IP 10 anos</b>	6,02%	0,18%	5,71%	6,45%
<b>IP 30 anos</b>	5,79%	0,03%	5,74%	5,86%
<b>Dólar 10 anos</b>	4,90%	0,18%	4,61%	5,30%
<b>Dólar 30 anos</b>	5,80%	0,04%	5,74%	5,87%
<b>Selic 5 anos</b>	10,25%	1,24%	8,19%	13,11%

**Tabela 22 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 2**

<i>a.a.</i>	Média	Desvio Padrão	Percentil 5º	Percentil 99º
<b>Pre 1 ano</b>	10,86%	0,87%	9,43%	12,88%
<b>Pre 3 anos</b>	11,68%	0,65%	10,59%	13,21%
<b>Pre 5 anos</b>	12,00%	0,54%	11,10%	13,25%
<b>Pre 10 anos</b>	12,26%	0,28%	11,78%	12,92%
<b>Pre 20 anos</b>	12,41%	0,08%	12,27%	12,56%
<b>IP 5 anos</b>	10,92%	1,37%	8,68%	14,16%
<b>IP 10 anos</b>	10,80%	1,30%	8,68%	13,85%
<b>IP 30 anos</b>	10,56%	1,28%	8,46%	13,58%
<b>Dólar 10 anos</b>	7,93%	14,95%	-14,80%	47,48%
<b>Dólar 30 anos</b>	8,86%	15,09%	-14,07%	48,78%
<b>Selic 5 anos</b>	10,25%	1,24%	8,19%	13,11%

### Simulação 3

Curvas de 2008

**Tabela 23 – Parâmetros da Simulação 3**

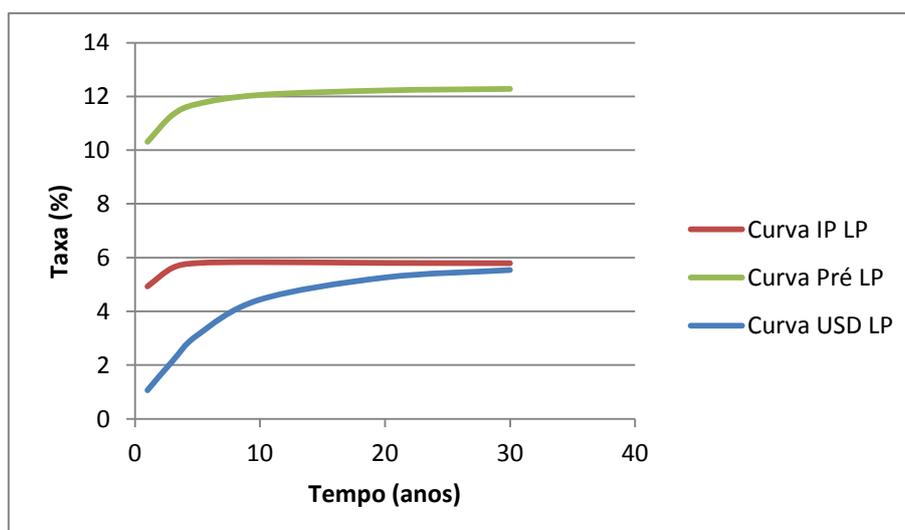
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	5,52	5,21	1,00	4,77	2,85	2,45	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,004664	0,001793	0,032338	0,011244	0,009707	0,004002	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	12,342786	1,053584	0,914640	0,679561
$\beta_1$	-2,670147	-0,274358	0,897250	0,737186
$\beta_2$	-2,442928	-0,150408	0,938431	1,248214
$\lambda$	1,506600	-	-	-

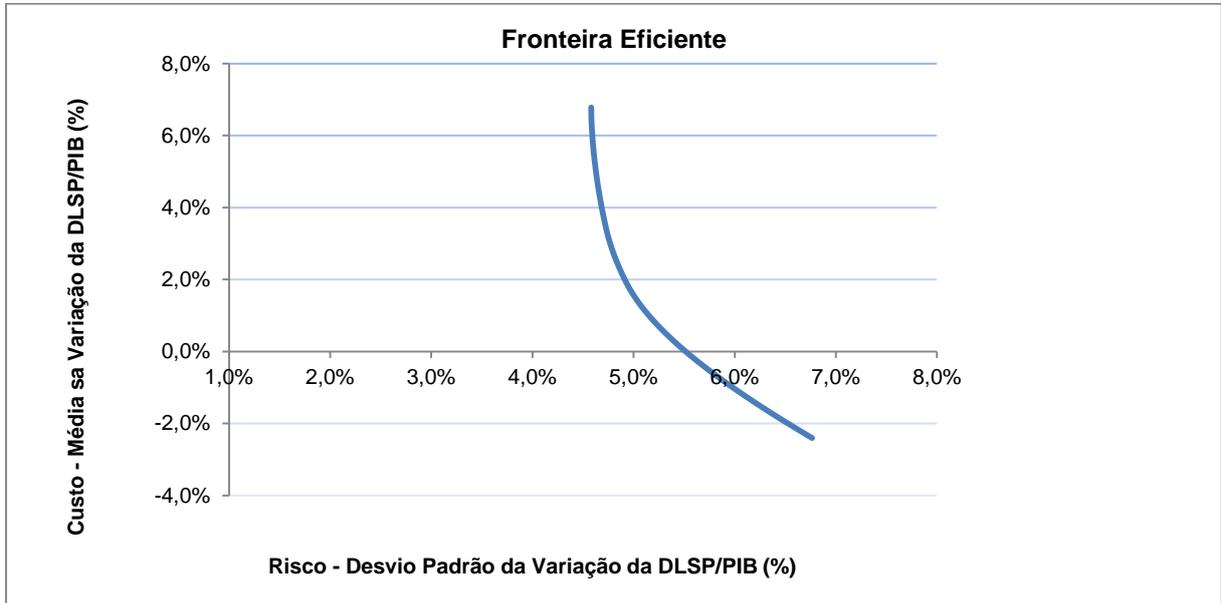
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,749214	0,271170	0,952834	0,215736
$\beta_1$	-1,728147	-0,216430	0,874762	0,778263
$\beta_2$	2,075282	0,279445	0,865346	1,590499
$\lambda$	0,612100	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,064030	0,404640	0,933272	0,392511
$\beta_1$	-5,297619	-0,577600	0,890970	0,450441
$\beta_2$	-5,365369	-0,865997	0,838595	1,021587
$\lambda$	0,636400	-	-	-

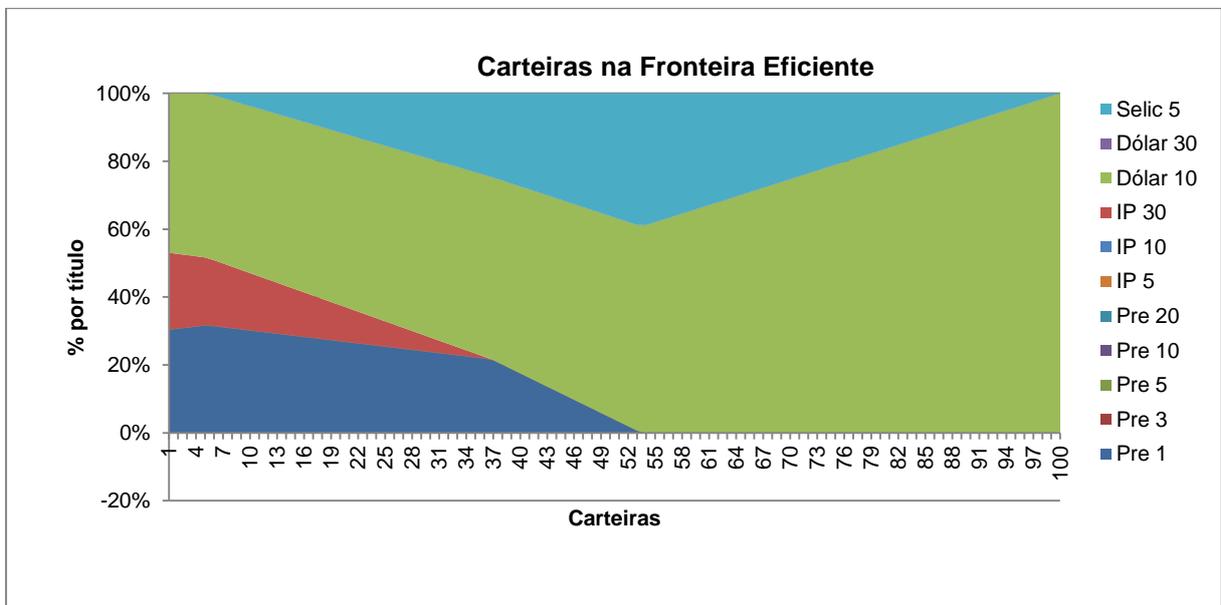
**Figura 23 – Curvas de Juros – Simulação 3**



**Figura 24 – Fronteira Eficiente – Simulação 3**



**Figura 25 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 3**



**Tabela 24 – Variáveis Observadas – Simulação 3**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	9,67%	5,55%	5,20%	4,11%	4,76%	2,82%	2,43%
<b>Desvio Padrão</b>	0,81%	3,46%	1,40%	14,61%	0,23%	2,88%	2,71%
<b>Percentil 5º</b>	8,32%	-6,28E-04	2,92%	-17,86%	4,39%	-2,16%	-2,01%
<b>Percentil 95º</b>	11,54%	13,84%	8,50%	43,12%	5,31%	8,99%	8,82%

**Tabela 25 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 3**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,25%	0,98%	8,64%	12,52%
<b>Pre 3 anos</b>	11,25%	0,76%	9,98%	13,01%
<b>Pre 5 anos</b>	11,65%	0,58%	10,70%	12,96%
<b>Pre 10 anos</b>	11,97%	0,29%	11,49%	12,57%
<b>Pre 30 anos</b>	12,14%	0,08%	12,01%	12,28%
<b>IP 5 anos</b>	5,76%	0,38%	5,13%	6,63%
<b>IP 10 anos</b>	5,79%	0,17%	5,50%	6,19%
<b>IP 30 anos</b>	5,76%	0,03%	5,71%	5,82%
<b>Dólar 10 anos</b>	4,38%	0,19%	4,07%	4,81%
<b>Dólar 30 anos</b>	5,49%	0,04%	5,43%	5,56%
<b>Selic 5 anos</b>	9,67%	0,81%	8,32%	11,54%

**Tabela 26 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 3**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,25%	0,98%	8,64%	12,52%
<b>Pre 3 anos</b>	11,25%	0,76%	9,98%	13,01%
<b>Pre 5 anos</b>	11,65%	0,58%	10,70%	12,96%
<b>Pre 10 anos</b>	11,97%	0,29%	11,49%	12,57%
<b>Pre 20 anos</b>	12,14%	0,08%	12,01%	12,28%
<b>IP 5 anos</b>	11,25%	1,52%	8,78%	14,85%
<b>IP 10 anos</b>	11,29%	1,49%	8,86%	14,80%
<b>IP 30 anos</b>	11,26%	1,48%	8,85%	14,75%
<b>Dólar 10 anos</b>	8,67%	15,38%	-14,47%	49,75%
<b>Dólar 30 anos</b>	9,83%	15,55%	-13,56%	51,36%
<b>Selic 5 anos</b>	9,67%	0,81%	8,32%	11,54%

## Simulação 4

Curvas de 2008 com inflações de 2008

**Tabela 27 – Parâmetros da Simulação 4**

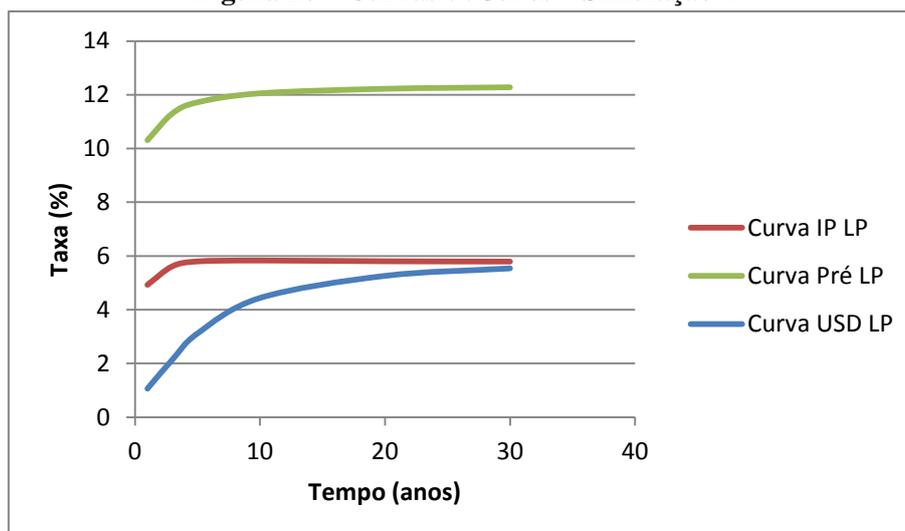
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	5,88	5,62	1,00	4,77	2,85	2,03	5,05
Veloc. De Rev.	0,557468	0,606520	0,068920	0,052976	-	0,558192	0,029154
Volatilidade	0,004741	0,001718	0,032338	0,011244	0,009707	0,003974	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	12,342786	1,053584	0,914640	0,679561
$\beta_1$	-2,670147	-0,274358	0,897250	0,737186
$\beta_2$	-2,442928	-0,150408	0,938431	1,248214
$\lambda$	1,506600	-	-	-

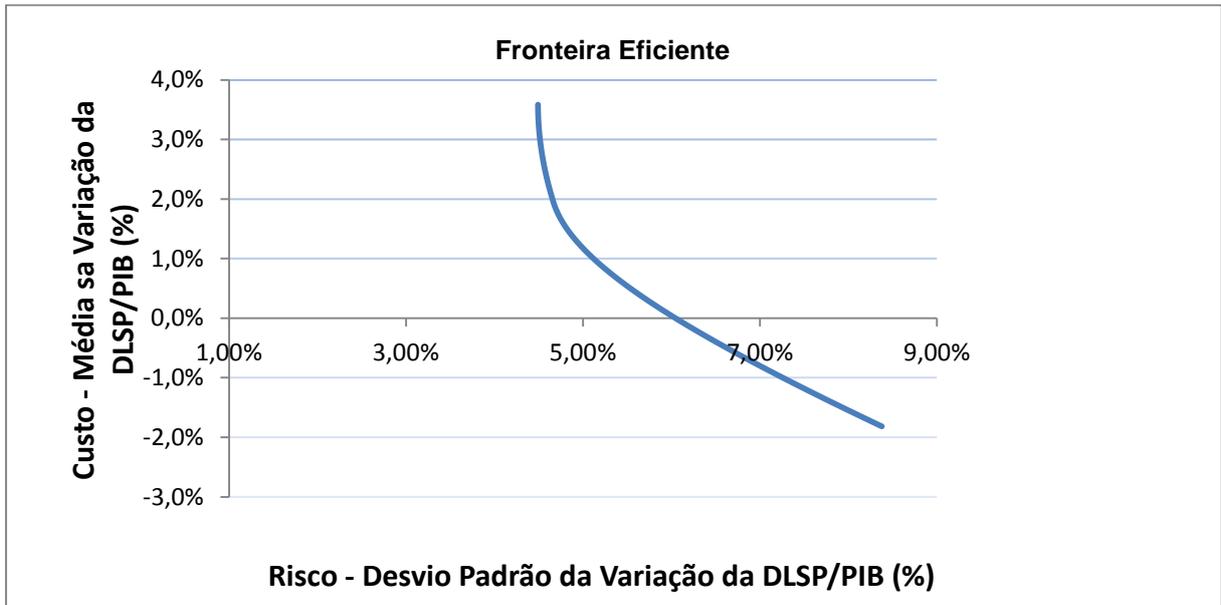
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,749214	0,271170	0,952834	0,215736
$\beta_1$	-1,728147	-0,216430	0,874762	0,778263
$\beta_2$	2,075282	0,279445	0,865346	1,590499
$\lambda$	0,612100	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,064030	0,404640	0,933272	0,392511
$\beta_1$	-5,297619	-0,577600	0,890970	0,450441
$\beta_2$	-5,365369	-0,865997	0,838595	1,021587
$\lambda$	0,636400	-	-	-

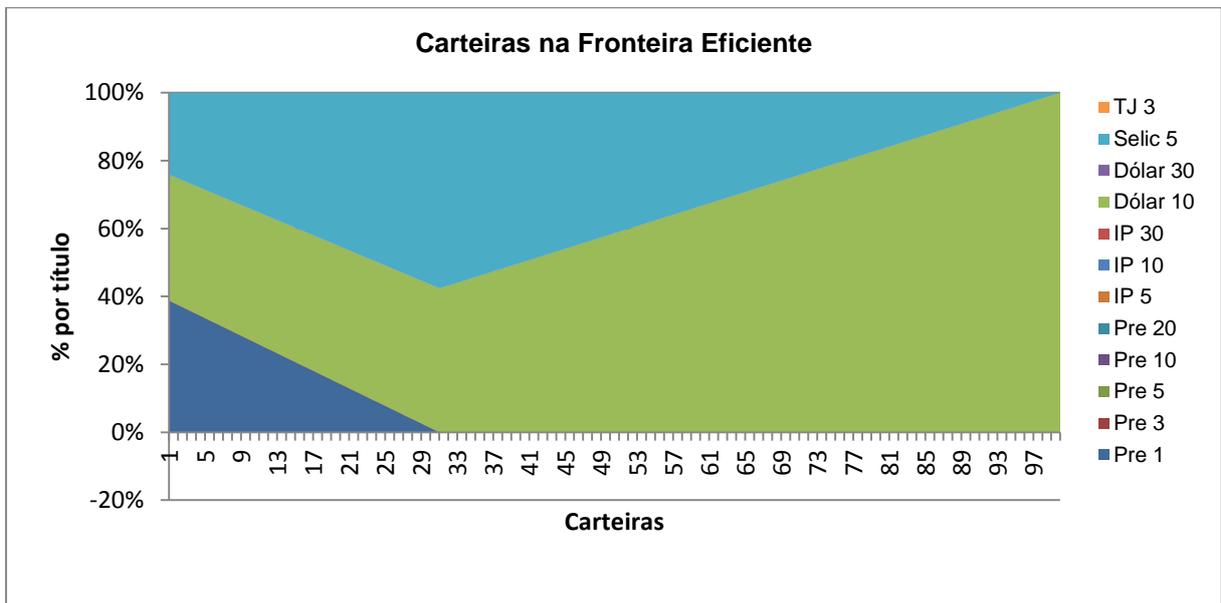
**Figura 26 – Curvas de Juros – Simulação 4**



**Figura 27 – Fronteira Eficiente – Simulação 4**



**Figura 28 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 4**



**Tabela 28 – Variáveis Observadas – Simulação 4**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	9,67%	5,55%	5,20%	4,11%	4,76%	2,82%	2,43%
<b>Desvio Padrão</b>	0,81%	3,46%	1,40%	14,61%	0,23%	2,88%	2,71%
<b>Percentil 5º</b>	8,32%	-6,28E-04	2,92%	-17,86%	4,39%	-2,16%	-2,01%
<b>Percentil 95º</b>	11,54%	13,84%	8,50%	43,12%	5,31%	8,99%	8,82%

**Tabela 29 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 4**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,25%	0,98%	8,64%	12,52%
<b>Pre 3 anos</b>	11,25%	0,76%	9,98%	13,01%
<b>Pre 5 anos</b>	11,65%	0,58%	10,70%	12,96%
<b>Pre 10 anos</b>	11,97%	0,29%	11,49%	12,57%
<b>Pre 30 anos</b>	12,14%	0,08%	12,01%	12,28%
<b>IP 5 anos</b>	5,76%	0,38%	5,13%	6,63%
<b>IP 10 anos</b>	5,79%	0,17%	5,50%	6,19%
<b>IP 30 anos</b>	5,76%	0,03%	5,71%	5,82%
<b>Dólar 10 anos</b>	4,38%	0,19%	4,07%	4,81%
<b>Dólar 30 anos</b>	5,49%	0,04%	5,43%	5,56%
<b>Selic 5 anos</b>	9,67%	0,81%	8,32%	11,54%

**Tabela 30 – Taxas Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 4**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,25%	0,98%	8,64%	12,52%
<b>Pre 3 anos</b>	11,25%	0,76%	9,98%	13,01%
<b>Pre 5 anos</b>	11,65%	0,58%	10,70%	12,96%
<b>Pre 10 anos</b>	11,97%	0,29%	11,49%	12,57%
<b>Pre 20 anos</b>	12,14%	0,08%	12,01%	12,28%
<b>IP 5 anos</b>	11,25%	1,52%	8,78%	14,85%
<b>IP 10 anos</b>	11,29%	1,49%	8,86%	14,80%
<b>IP 30 anos</b>	11,26%	1,48%	8,85%	14,75%
<b>Dólar 10 anos</b>	8,67%	15,38%	-14,47%	49,75%
<b>Dólar 30 anos</b>	9,83%	15,55%	-13,56%	51,36%
<b>Selic 5 anos</b>	9,67%	0,81%	8,32%	11,54%

## Simulação 5

Livre baseada em prêmios

**Tabela 31 – Parâmetros da Simulação 5**

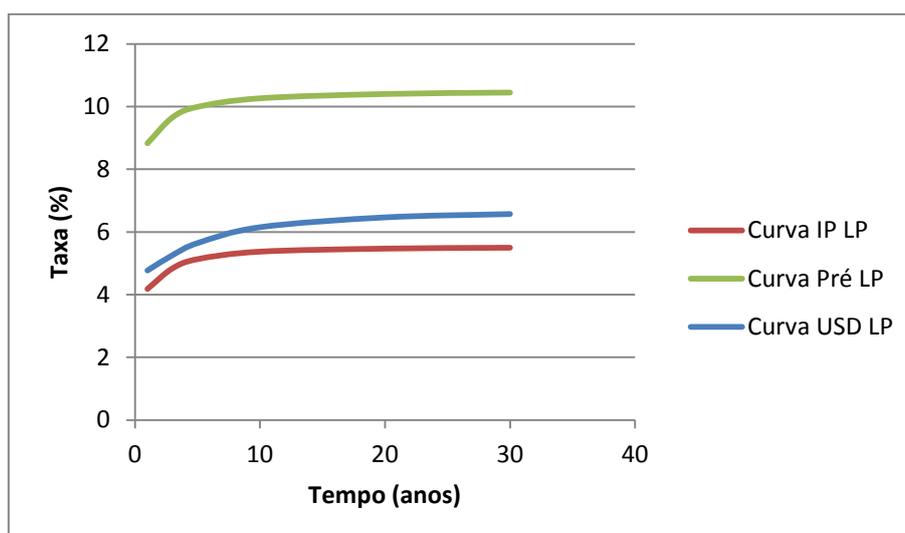
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	4,5	4,5	1	4,77	2,85	2,5	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,003800	0,001549	0,032338	0,011244	0,009707	0,004080	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	10,490000	0,850491	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117
$\lambda$	1,463800	-	-	-

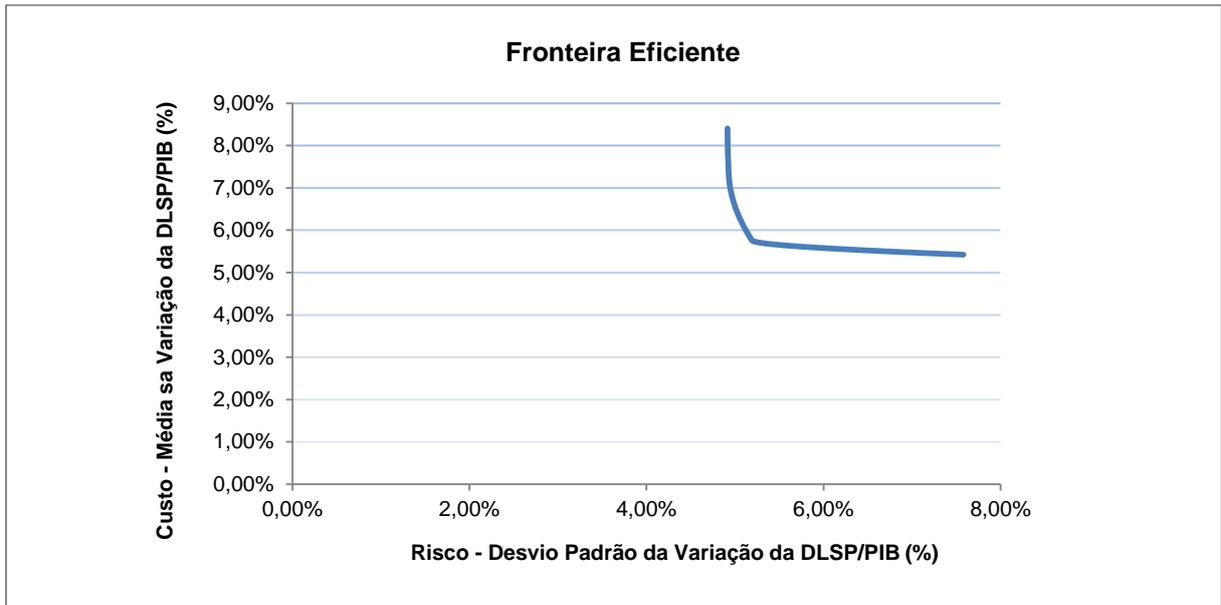
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,530000	0,273026	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-2,030000	-0,073117	0,963982	0,698385
$\beta_2$	1,108251	0,119923	0,891791	1,481715
$\lambda$	0,478900	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,750000	0,423266	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-2,250000	-0,097164	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-1,756513	-0,241605	0,862452	0,988206
$\lambda$	0,621100	-	-	-

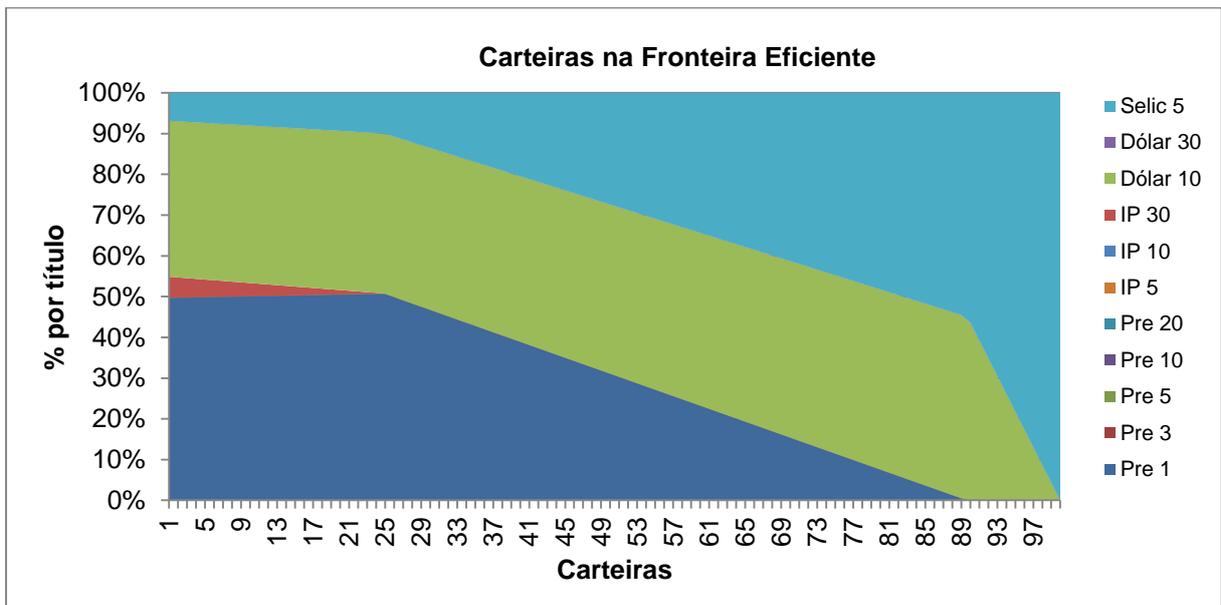
**Figura 29 – Curvas de Juros – Simulação 5**



**Figura 30 – Fronteira Eficiente – Simulação 5**



**Figura 31 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 5**



**Tabela 32 – Variáveis Observadas – Simulação 5**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	8,16%	4,53%	4,50%	2,93%	4,76%	2,74%	2,51%
<b>Desvio Padrão</b>	1,24%	2,80%	1,21%	14,09%	0,23%	2,89%	2,80%
<b>Percentil 5º</b>	6,12%	-1,87E-05	2,52%	-18,44%	4,39%	-2,32%	-2,05%
<b>Percentil 95º</b>	11,03%	11,14%	7,38%	40,06%	5,30%	8,86%	9,17%

**Tabela 33 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 5**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 30 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	5,08%	0,46%	4,32%	6,10%
<b>IP 10 anos</b>	5,32%	0,19%	5,01%	5,74%
<b>IP 30 anos</b>	5,46%	0,03%	5,40%	5,52%
<b>Dólar 10 anos</b>	6,10%	0,16%	5,82%	6,46%
<b>Dólar 30 anos</b>	6,53%	0,03%	6,47%	6,58%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

**Tabela 34 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 5**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 20 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	9,81%	1,36%	7,61%	13,06%
<b>IP 10 anos</b>	10,06%	1,29%	7,96%	13,14%
<b>IP 30 anos</b>	10,21%	1,28%	8,12%	13,25%
<b>Dólar 10 anos</b>	9,20%	15,06%	-13,62%	48,86%
<b>Dólar 30 anos</b>	9,65%	15,13%	-13,29%	49,50%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

## Simulação 6

Livre baseada em prêmios, diminuído custos da curva real a partir do longo prazo

**Tabela 35 – Parâmetros da Simulação 6**

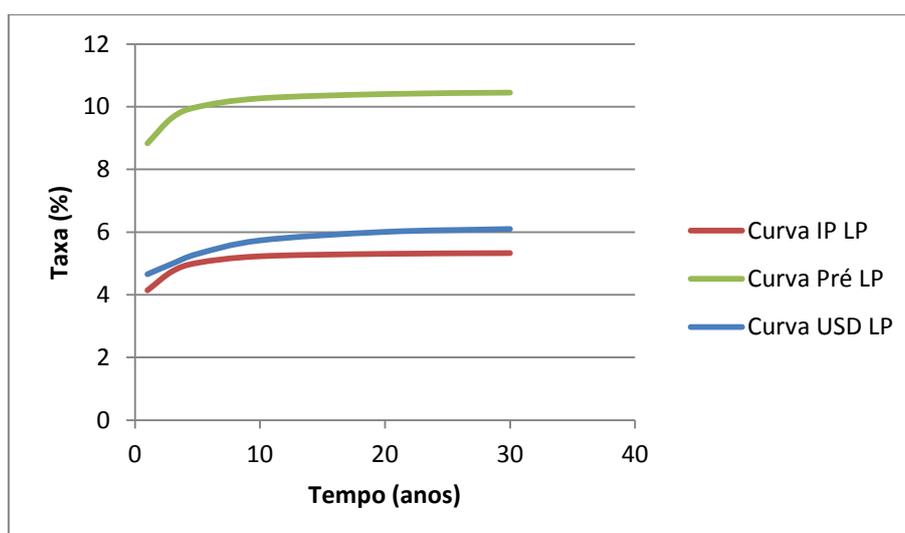
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	4,5	4,5	1	4,77	2,85	2,5	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,003800	0,001549	0,032338	0,011244	0,009707	0,004080	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	10,490000	0,850491	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117
$\lambda$	1,463800	-	-	-

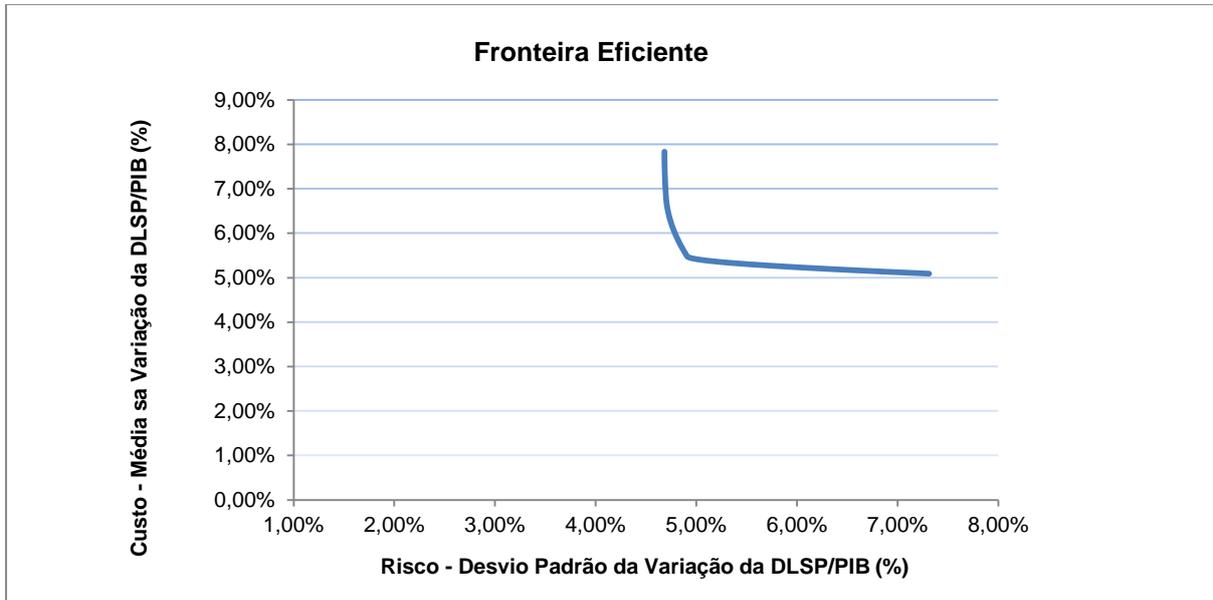
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,350000	0,264139	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-1,850000	-0,066634	0,963982	0,698385
$\beta_2$	1,108251	0,119923	0,891791	1,481715
$\lambda$	0,478900	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,750000	0,423266	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-2,250000	-0,097164	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-1,756513	-0,241605	0,862452	0,988206
$\lambda$	0,621100	-	-	-

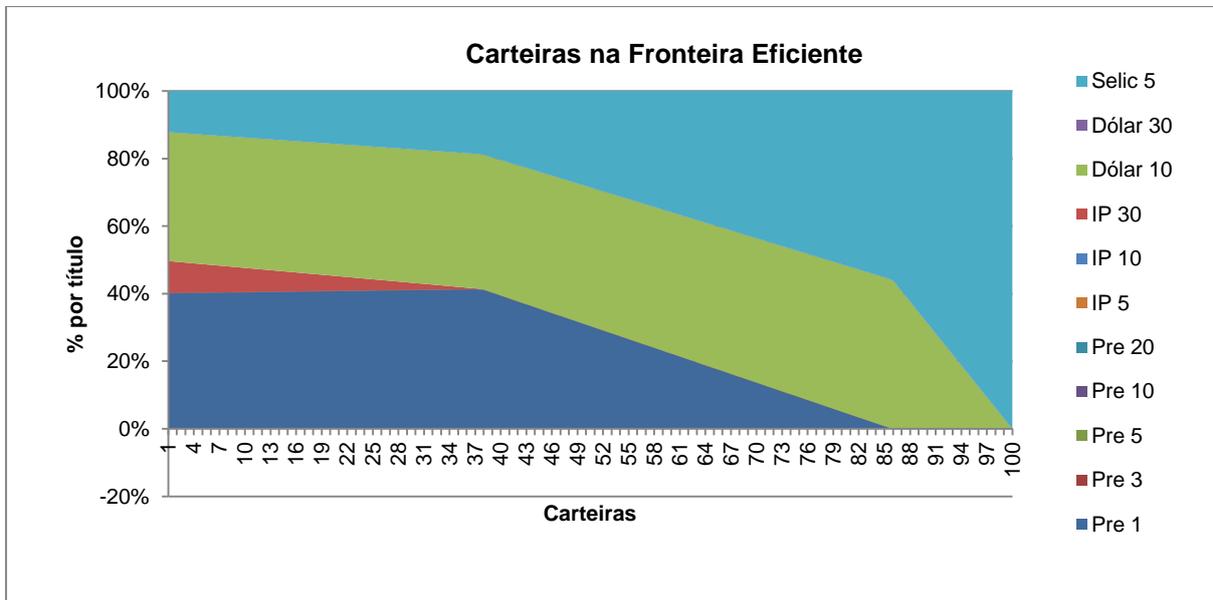
**Figura 32 – Curvas de Juros – Simulação 6**



**Figura 33 – Fronteira Eficiente – Simulação 6**



**Figura 34 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 6**



**Tabela 36 – Variáveis Observadas – Simulação 6**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	8,16%	4,53%	4,50%	2,93%	4,76%	2,74%	2,51%
<b>Desvio Padrão</b>	1,24%	2,80%	1,21%	14,09%	0,23%	2,89%	2,80%
<b>Percentil 5º</b>	6,12%	-1,87E-05	2,52%	-18,44%	4,39%	-2,32%	-2,05%
<b>Percentil 95º</b>	11,03%	11,14%	7,38%	40,06%	5,30%	8,86%	9,17%

**Tabela 37 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 6**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 30 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	5,08%	0,46%	4,32%	6,10%
<b>IP 10 anos</b>	5,32%	0,19%	5,01%	5,74%
<b>IP 30 anos</b>	5,46%	0,03%	5,40%	5,52%
<b>Dólar 10 anos</b>	6,10%	0,16%	5,82%	6,46%
<b>Dólar 30 anos</b>	6,53%	0,03%	6,47%	6,58%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

**Tabela 38 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 6**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 20 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	9,81%	1,36%	7,61%	13,06%
<b>IP 10 anos</b>	10,06%	1,29%	7,96%	13,14%
<b>IP 30 anos</b>	10,21%	1,28%	8,12%	13,25%
<b>Dólar 10 anos</b>	9,20%	15,06%	-13,62%	48,86%
<b>Dólar 30 anos</b>	9,65%	15,13%	-13,29%	49,50%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

## Simulação 7

Livre baseada em prêmios, com segunda diminuição de custos da curva real a partir do longo prazo

**Tabela 39 – Parâmetros da Simulação 7**

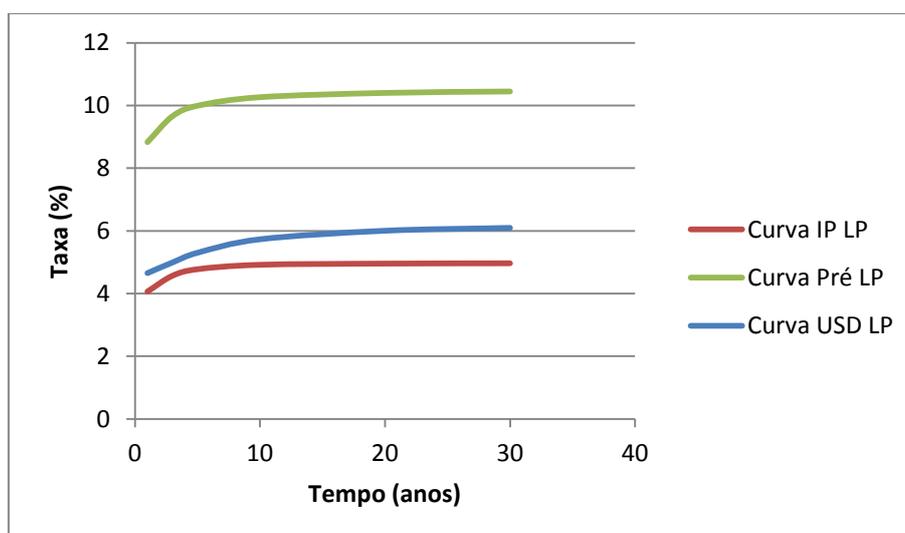
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	4,5	4,5	1	4,77	2,85	2,5	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,003800	0,001549	0,032338	0,011244	0,009707	0,004080	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	10,490000	0,850491	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117
$\lambda$	1,463800	-	-	-

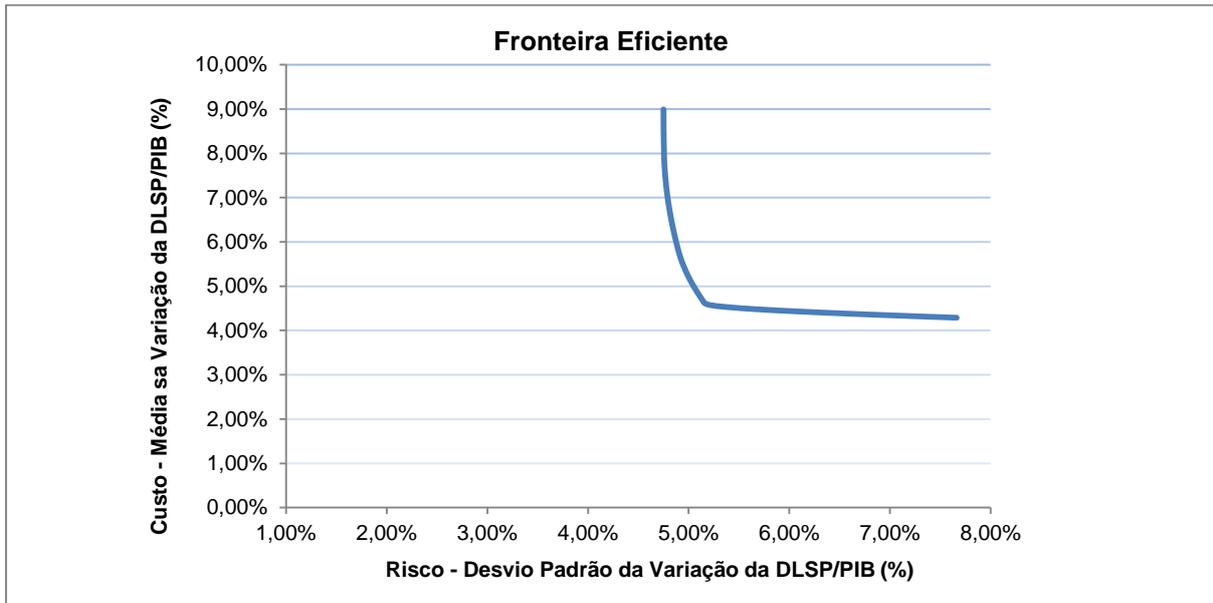
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	4,960000	0,244884	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-1,460000	-0,052587	0,963982	0,698385
$\beta_2$	1,108251	0,119923	0,891791	1,481715
$\lambda$	0,478900	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,750000	0,423266	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-2,250000	-0,097164	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-1,756513	-0,241605	0,862452	0,988206
$\lambda$	0,621100	-	-	-

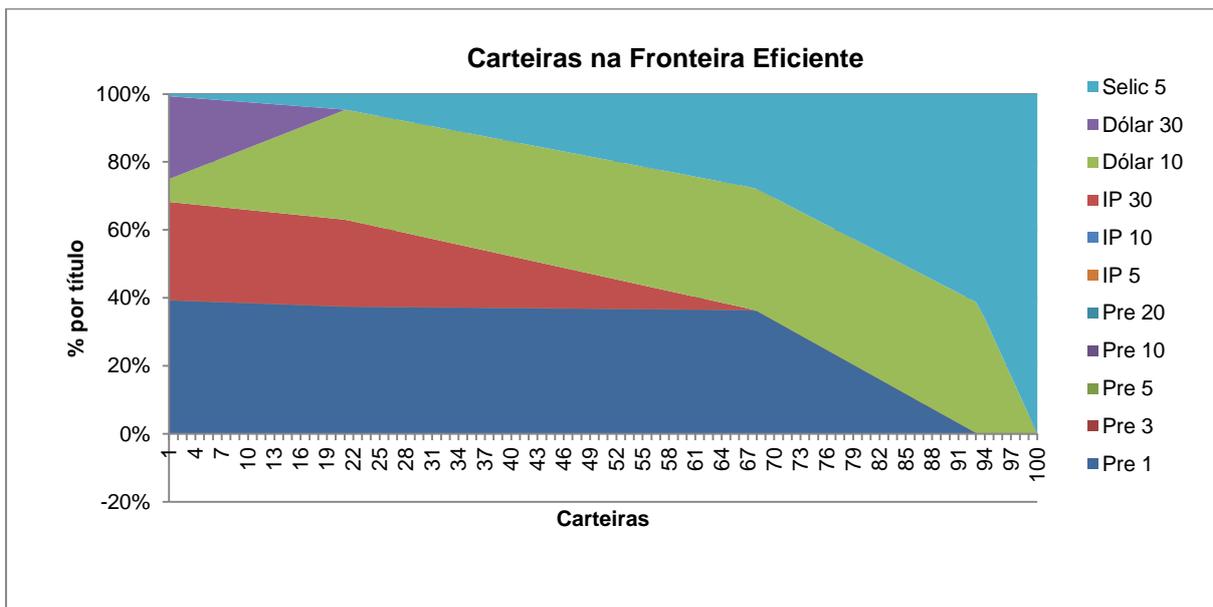
**Figura 35 – Curvas de Juros – Simulação 7**



**Figura 36 – Fronteira Eficiente – Simulação 7**



**Figura 37 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 7**



**Tabela 40 – Variáveis Observadas – Simulação 7**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	8,16%	4,53%	4,50%	2,93%	4,76%	2,74%	2,51%
<b>Desvio Padrão</b>	1,24%	2,80%	1,21%	14,09%	0,23%	2,89%	2,80%
<b>Percentil 5º</b>	6,12%	-1,87E-05	2,52%	-18,44%	4,39%	-2,32%	-2,05%
<b>Percentil 95º</b>	11,03%	11,14%	7,38%	40,06%	5,30%	8,86%	9,17%

**Tabela 41 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 7**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 30 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	5,08%	0,46%	4,32%	6,10%
<b>IP 10 anos</b>	5,32%	0,19%	5,01%	5,74%
<b>IP 30 anos</b>	5,46%	0,03%	5,40%	5,52%
<b>Dólar 10 anos</b>	6,10%	0,16%	5,82%	6,46%
<b>Dólar 30 anos</b>	6,53%	0,03%	6,47%	6,58%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

**Tabela 42 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 7**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 20 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	9,81%	1,36%	7,61%	13,06%
<b>IP 10 anos</b>	10,06%	1,29%	7,96%	13,14%
<b>IP 30 anos</b>	10,21%	1,28%	8,12%	13,25%
<b>Dólar 10 anos</b>	9,20%	15,06%	-13,62%	48,86%
<b>Dólar 30 anos</b>	9,65%	15,13%	-13,29%	49,50%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

## Simulação 8

Livre baseada em prêmios, com diminuição de custos da curva cambial

**Tabela 43 – Parâmetros da Simulação 8**

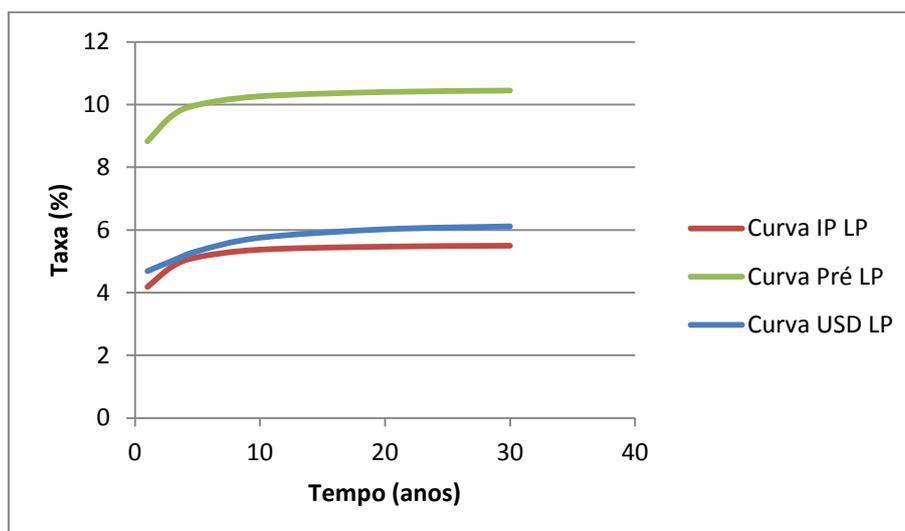
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	4,5	4,5	1	4,77	2,85	2,5	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,003800	0,001549	0,032338	0,011244	0,009707	0,004080	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	10,490000	0,850491	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117
$\lambda$	1,463800	-	-	-

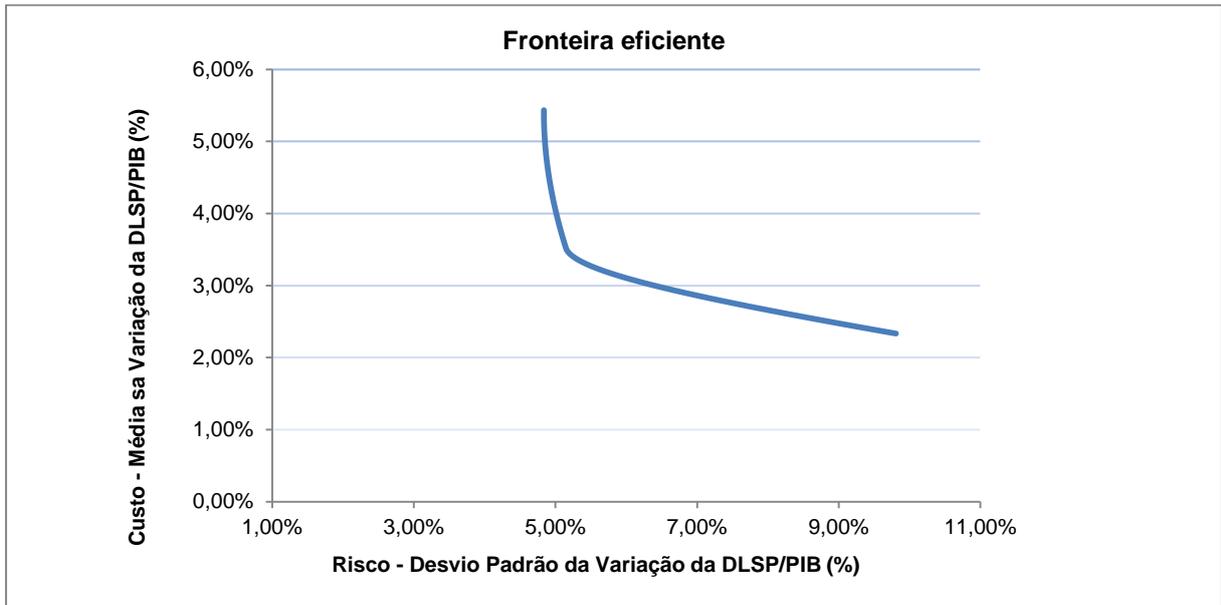
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,530000	0,273026	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-2,030000	-0,073117	0,963982	0,698385
$\beta_2$	1,108251	0,119923	0,891791	1,481715
$\lambda$	0,478900	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,250000	0,391913	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-1,730000	-0,074709	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-1,756513	-0,241605	0,862452	0,988206
$\lambda$	0,621100	-	-	-

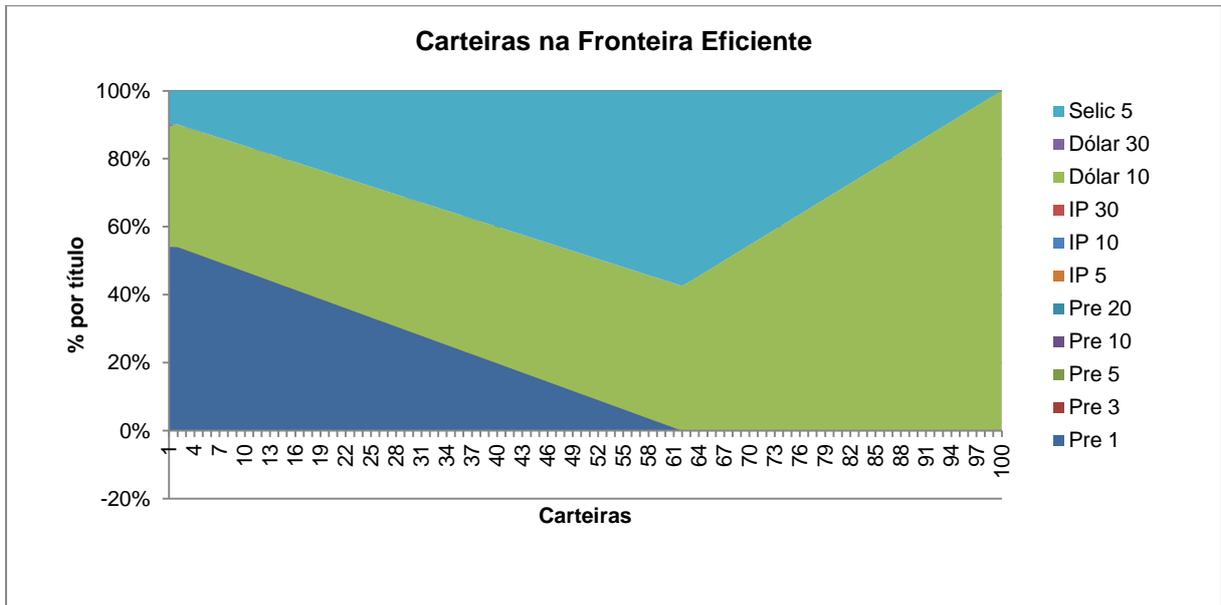
**Figura 38 – Curvas de Juros – Simulação 8**



**Figura 39 – Fronteira Eficiente – Simulação 8**



**Figura 40 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 8**



**Tabela 44 – Variáveis Observadas – Simulação 8**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	8,16%	4,53%	4,50%	2,93%	4,76%	2,74%	2,51%
<b>Desvio Padrão</b>	1,24%	2,80%	1,21%	14,09%	0,23%	2,89%	2,80%
<b>Percentil 5º</b>	6,12%	-1,87E-05	2,52%	-18,44%	4,39%	-2,32%	-2,05%
<b>Percentil 95º</b>	11,03%	11,14%	7,38%	40,06%	5,30%	8,86%	9,17%

**Tabela 45 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 8**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 30 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	5,08%	0,46%	4,32%	6,10%
<b>IP 10 anos</b>	5,32%	0,19%	5,01%	5,74%
<b>IP 30 anos</b>	5,46%	0,03%	5,40%	5,52%
<b>Dólar 10 anos</b>	6,10%	0,16%	5,82%	6,46%
<b>Dólar 30 anos</b>	6,53%	0,03%	6,47%	6,58%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

**Tabela 46 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 8**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 20 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	9,81%	1,36%	7,61%	13,06%
<b>IP 10 anos</b>	10,06%	1,29%	7,96%	13,14%
<b>IP 30 anos</b>	10,21%	1,28%	8,12%	13,25%
<b>Dólar 10 anos</b>	9,20%	15,06%	-13,62%	48,86%
<b>Dólar 30 anos</b>	9,65%	15,13%	-13,29%	49,50%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

## Simulação 9

Livre baseada em prêmios, com diminuição de custos da curva cambial e real

**Tabela 47 – Parâmetros da Simulação 9**

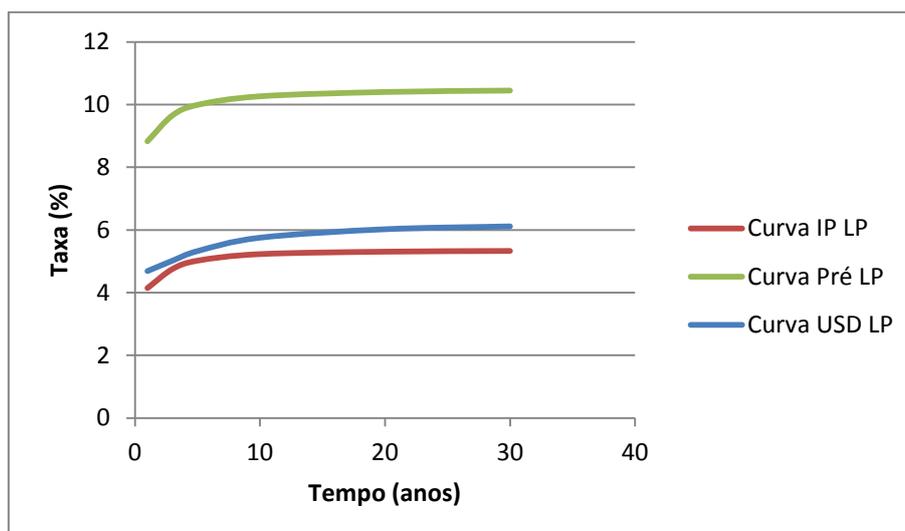
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	4,5	4,5	1	4,77	2,85	2,5	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,003800	0,001549	0,032338	0,011244	0,009707	0,004080	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	10,490000	0,850491	0,918924	0,680986
$\beta_1$	-2,329301	-0,113131	0,951431	0,756573
$\beta_2$	-1,756513	-0,115286	0,934366	1,172117
$\lambda$	1,463800	-	-	-

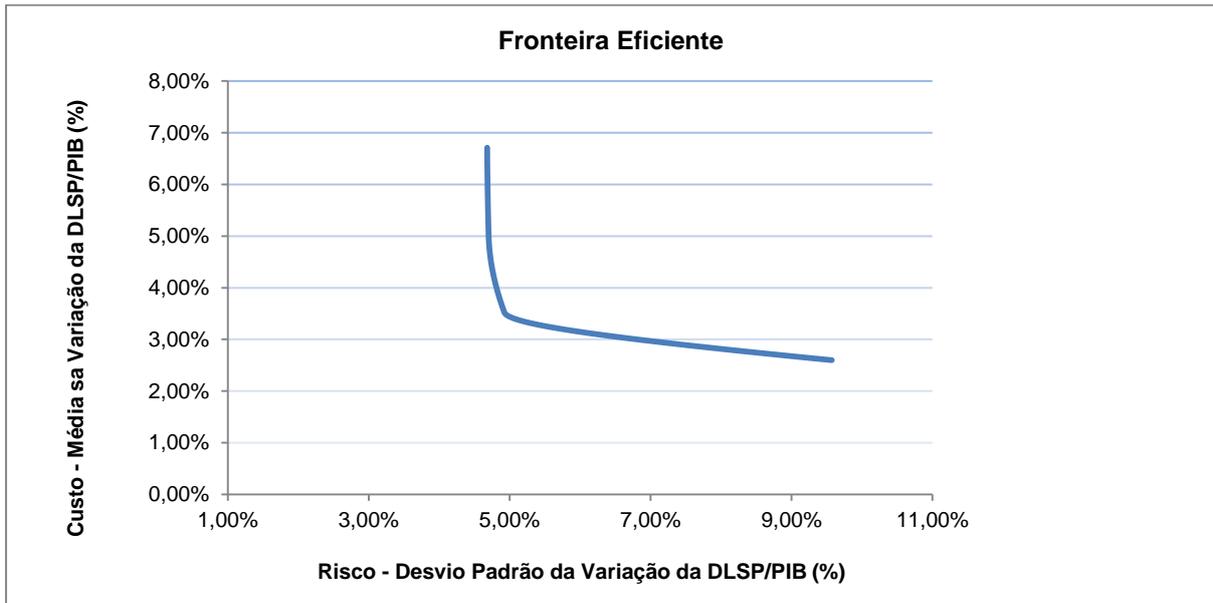
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,350000	0,264139	0,950628	0,254251
$\beta_1$	-1,850000	-0,066634	0,963982	0,698385
$\beta_2$	1,108251	0,119923	0,891791	1,481715
$\lambda$	0,478900	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	6,250000	0,391913	0,937294	0,381479
$\beta_1$	-1,730000	-0,074709	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-1,756513	-0,241605	0,862452	0,988206
$\lambda$	0,621100	-	-	-

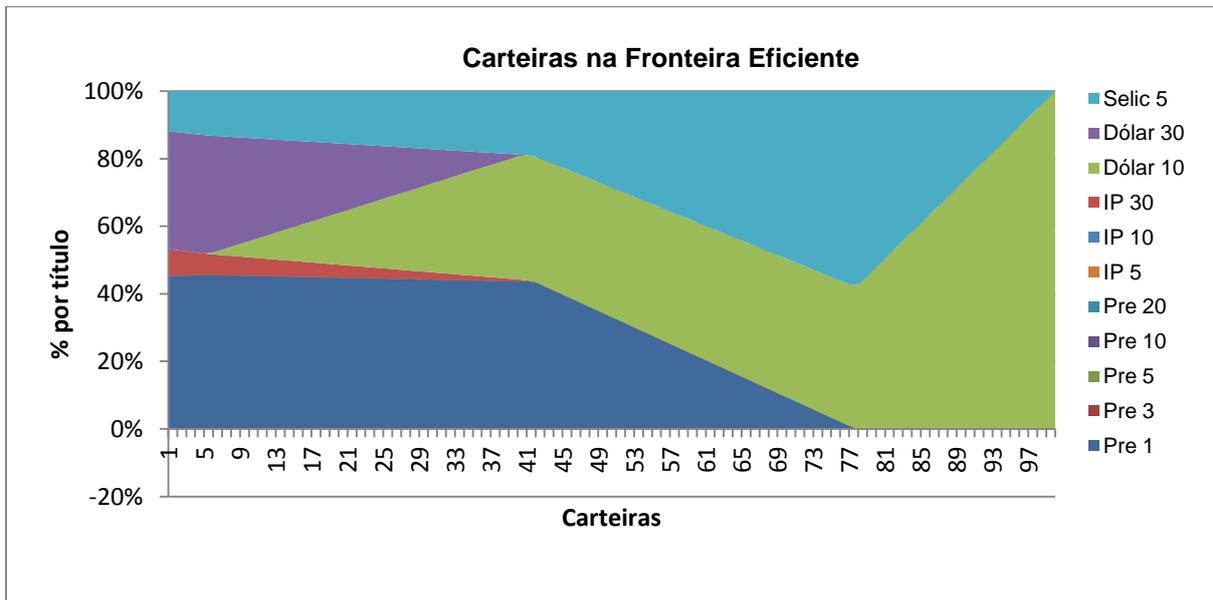
**Figura 41 – Curvas de Juros – Simulação 9**



**Figura 42 – Fronteira Eficiente – Simulação 9**



**Figura 43 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 9**



**Tabela 48 – Variáveis Observadas – Simulação 9**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	8,16%	4,53%	4,50%	2,93%	4,76%	2,74%	2,51%
<b>Desvio Padrão</b>	1,24%	2,80%	1,21%	14,09%	0,23%	2,89%	2,80%
<b>Percentil 5º</b>	6,12%	-1,87E-05	2,52%	-18,44%	4,39%	-2,32%	-2,05%
<b>Percentil 95º</b>	11,03%	11,14%	7,38%	40,06%	5,30%	8,86%	9,17%

**Tabela 49 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 9**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 30 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	5,08%	0,46%	4,32%	6,10%
<b>IP 10 anos</b>	5,32%	0,19%	5,01%	5,74%
<b>IP 30 anos</b>	5,46%	0,03%	5,40%	5,52%
<b>Dólar 10 anos</b>	6,10%	0,16%	5,82%	6,46%
<b>Dólar 30 anos</b>	6,53%	0,03%	6,47%	6,58%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

**Tabela 50 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 9**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	8,73%	0,88%	7,28%	10,75%
<b>Pre 3 anos</b>	9,58%	0,65%	8,50%	11,08%
<b>Pre 5 anos</b>	9,91%	0,53%	9,03%	11,12%
<b>Pre 10 anos</b>	10,17%	0,29%	9,68%	10,78%
<b>Pre 20 anos</b>	10,31%	0,09%	10,15%	10,48%
<b>IP 5 anos</b>	9,81%	1,36%	7,61%	13,06%
<b>IP 10 anos</b>	10,06%	1,29%	7,96%	13,14%
<b>IP 30 anos</b>	10,21%	1,28%	8,12%	13,25%
<b>Dólar 10 anos</b>	9,20%	15,06%	-13,62%	48,86%
<b>Dólar 30 anos</b>	9,65%	15,13%	-13,29%	49,50%
<b>Selic 5 anos</b>	8,16%	1,25%	6,11%	11,04%

## Simulação 10

### Solução de Compromisso

**Tabela 51 – Parâmetros da Simulação 10**

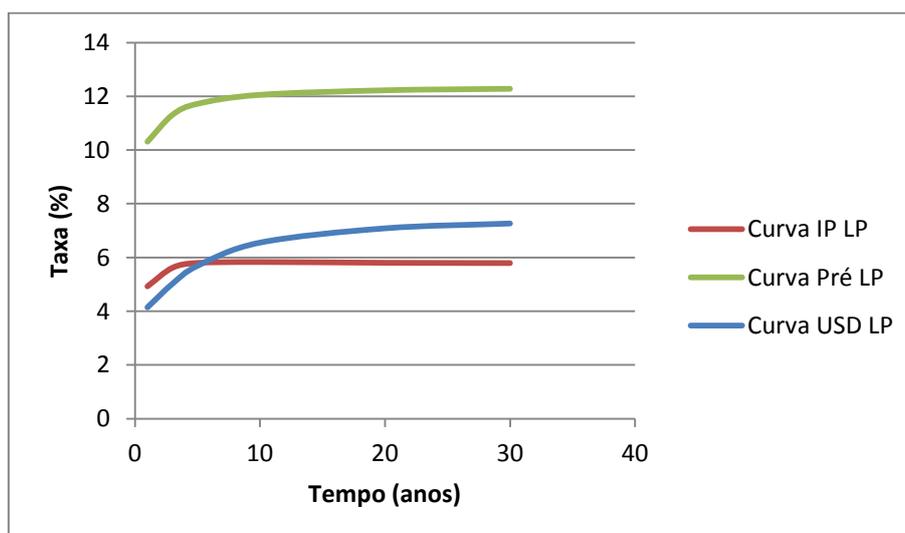
	IGP-M	IPCA	Dólar Real	LIBOR	PIB	CPI	TJLP
Média (% aa)	5,52	5,21	1,00	4,77	2,85	2,45	5,05
Veloc. De Rev.	0,436061	0,402201	0,068920	0,052976	-	0,479656	0,029154
Volatilidade	0,004664	0,001793	0,032338	0,011244	0,009707	0,004002	0,021337

Nominal	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	12,342786	1,053584	0,914640	0,679561
$\beta_1$	-2,670147	-0,274358	0,897250	0,737186
$\beta_2$	-2,442928	-0,150408	0,938431	1,248214
$\lambda$	1,506600	-	-	-

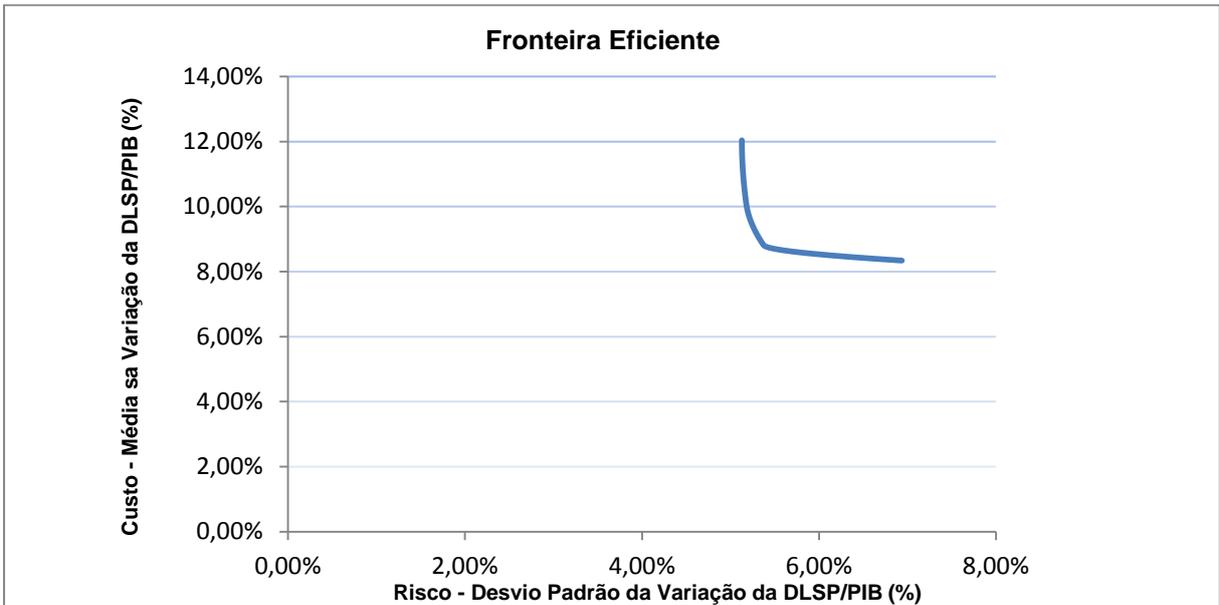
Real	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	5,749214	0,271170	0,952834	0,215736
$\beta_1$	-1,728147	-0,216430	0,874762	0,778263
$\beta_2$	2,075282	0,279445	0,865346	1,590499
$\lambda$	0,612100	-	-	-

Cambial	$\beta$ Longo Prazo	Constante	AR(1)	Volatilidade
$\beta_0$	7,590894	0,721431	0,904961	0,599624
$\beta_1$	-3,917573	-0,169177	0,956816	0,454880
$\beta_2$	-2,845655	-0,611406	0,785144	0,924404
$\lambda$	0,621100	-	-	-

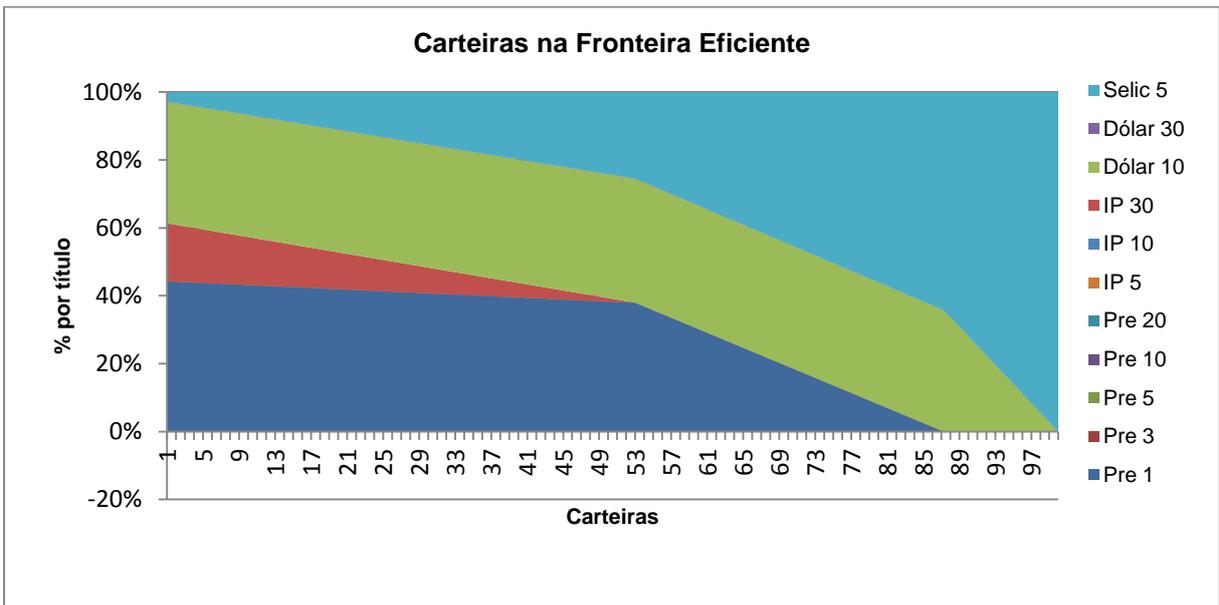
**Figura 44 – Curvas de Juros – Simulação 10**



**Figura 45 – Fronteira Eficiente – Simulação 10**



**Figura 46 – Carteira Fronteira Eficiente – Simulação 10**



**Tabela 52 – Variáveis Observadas – Simulação 10**

<i>a.a.</i>	<b>SELIC</b>	<b>IGP</b>	<b>IPCA</b>	<b>Câmbio Nominal</b>	<b>Libor</b>	<b>PIB</b>	<b>Inflação Externa</b>
<b>Média</b>	9,67%	5,63%	5,23%	4,10%	4,76%	2,83%	2,46%
<b>Desvio Padrão</b>	0,80%	3,45%	1,39%	14,63%	0,23%	2,88%	2,73%
<b>Percentil 5º</b>	8,35%	6,44E-04	2,96%	-18,04%	4,40%	-2,20%	-1,96%
<b>Percentil 95º</b>	11,54%	13,85%	8,53%	42,37%	5,31%	8,90%	9,00%

**Tabela 53 – Taxas dos Títulos sem Indexadores (Cupons) – Simulação 10**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,24%	0,95%	8,67%	12,43%
<b>Pre 3 anos</b>	11,25%	0,74%	10,04%	13,00%
<b>Pre 5 anos</b>	11,66%	0,57%	10,72%	13,02%
<b>Pre 10 anos</b>	11,98%	0,28%	11,52%	12,63%
<b>Pre 30 anos</b>	12,15%	0,07%	12,02%	12,29%
<b>IP 5 anos</b>	5,75%	0,37%	5,14%	6,60%
<b>IP 10 anos</b>	5,79%	0,17%	5,51%	6,18%
<b>IP 30 anos</b>	5,76%	0,03%	5,71%	5,82%
<b>Dólar 10 anos</b>	6,49%	0,19%	6,17%	6,91%
<b>Dólar 30 anos</b>	7,21%	0,03%	7,15%	7,27%
<b>Selic 5 anos</b>	9,67%	0,81%	8,35%	11,55%

**Tabela 54 – Taxas com Indexadores (Custo de Carregamento) – Simulação 10**

<i>a.a.</i>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Percentil 5º</b>	<b>Percentil 99º</b>
<b>Pre 1 ano</b>	10,24%	0,95%	8,67%	12,43%
<b>Pre 3 anos</b>	11,25%	0,74%	10,04%	13,00%
<b>Pre 5 anos</b>	11,66%	0,57%	10,72%	13,02%
<b>Pre 10 anos</b>	11,98%	0,28%	11,52%	12,63%
<b>Pre 20 anos</b>	12,15%	0,07%	12,02%	12,29%
<b>IP 5 anos</b>	11,29%	1,53%	8,83%	14,92%
<b>IP 10 anos</b>	11,33%	1,49%	8,91%	14,86%
<b>IP 30 anos</b>	11,30%	1,47%	8,90%	14,78%
<b>Dólar 10 anos</b>	10,85%	15,71%	-12,95%	51,95%
<b>Dólar 30 anos</b>	11,61%	15,83%	-12,36%	53,01%
<b>Selic 5 anos</b>	9,67%	0,81%	8,35%	11,55%