

**MODELO DE MICRO TRELIÇAS PARA DIMENSIONAMENTO  
DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

**AGNO ALVES VIEIRA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELO DE MICRO TRELIÇAS PARA  
DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
ARMADO**

**AGNO ALVES VIEIRA**

**ORIENTADOR: ANTONIO CARLOS O. MIRANDA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO  
CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-16A/13  
BRASÍLIA/DF: AGOSTO – 2013**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELO DE MICRO TRELIÇAS PARA  
DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
ARMADO**

**AGNO ALVES VIEIRA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

---

**Prof. Antonio Carlos de O. Miranda, D.Sc. (UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Wiliam Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (UnB)**  
(Examinador Interno)

---

**Prof. João da Costa Pantoja, D.Sc. (UNICEUB)**  
(Examinador Externo)

**BRASÍLIA/DF, 29 DE AGOSTO DE 2013.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

VIEIRA, AGNO ALVES

Modelo de Micro Treliças para dimensionamento de estruturas de Concreto Armado [Distrito Federal] 2013.

xiv, 86p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2013).  
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Micro Treliças

3. Carga Última

I. ENC/FT/UnB

2. Concreto Armado

4. Fissuração do Concreto

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

VIEIRA, A. A.; Modelo de Micro Treliças para dimensionamento de estruturas de Concreto Armado. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. 86p. Publicação E.DM - 16A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília – UnB. Brasília, DF, 86p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Agno Alves Vieira

TÍTULO: Modelo de Micro Treliças para dimensionamento de estruturas de Concreto.

GRAU: Mestre ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Agno Alves Vieira

Rua 53, Casa 221, Vila Nova, São Sebastião.

70.804-080 Brasília - DF- Brasil

e-mail: agnovieira@yahoo.com.br

Dedico à minha família, meus pais e minha esposa pelo apoio e incentivo. E principalmente as minhas filhas Ágata e Alana.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por sempre guiar os meus passos, me oferecendo a cada dia mais força para enfrentar os desafios que a vida oferece.

A minha família, meus pais Francisco Agapito e Vandercina, minha esposa Katiane e minhas filhas Ágata e Alana, pelo apoio e incentivo nessa jornada.

Ao meu orientador Antônio Carlos Miranda pela enorme ajuda no desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores do PECC pelos conhecimentos transmitidos, em especial os professores Paulo Chaves, Luciano Bezerra e Wiliam Taylor.

Aos amigos do PECC, em especial Eduardo, Wanderley, Fabiano, Carlos Pacheco e Gelson pelo apoio.

## **RESUMO**

### **MODELO DE MICRO TRELIÇA PARA DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

**Autor: Agno Alves Vieira**

**Orientador: Antônio Carlos de O. Miranda, DSc.**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, agosto de 2013**

Neste trabalho apresenta simulações numéricas de estruturas de concreto armado pelo modelo de Micro Trelças. Esse modelo é uma evolução do método das bielas e tirantes, o qual tem por finalidade a discretização do concreto por meio de barras, as quais mostram o comportamento das forças de compressão e tração no interior da peça. Não se considera a aderência entre o concreto e a armadura. Considera-se somente o acoplamento nodal entre os elementos de treliça plana que discretizam o concreto e as armaduras. Através do software Micro-Truss Analyzer são discretizados os modelos e com o software comercial de elementos finitos Abaqus são inseridas modelos constitutivos. Adicionalmente, é possível determinar os caminhos das fissuras como a carga última da peça. Também é possível estimar e localizar a armadura no concreto de tal forma que essa tenha a melhor eficiência possível, aproveitando ao máximo as propriedades do concreto e do aço. Pesquisas de literatura apresentam modelos discretizados de concreto apenas em geometrias que permitem gerar a micro treliça através de grids regulares. Nesse trabalho, um algoritmo de geração de malha de elementos finitos quadrilaterais com geometrias arbitrárias é usado, e posteriormente, essa malha é modificada para elementos de treliças com a finalidade de representar adequadamente o estado de tensões do meio contínuo. Por fim são comparados os resultados obtidos pelo modelo de micro treliças com resultados experimentais.

## **ABSTRACT**

### **MICRO TRUSS MODEL FOR DESIGNING OF CONCRETE STRUCTURES REINFORCEDE**

**Author: Agno Alves Vieira**

**Supervisor: Antônio Carlos de O. Miranda, DSc.**

**Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, Agosto de 2013.**

This work presents numerical simulations of reinforced concrete structures by Micro Truss model (MTM). This model is a development of strut and tie method, which has the purpose of discretization of the concrete by bars, and shows the behavior of tensile and compressive forces within the model. Does not consider the adhesion between concrete and reinforcing bars. Considers only the coupling between the nodal plane truss elements that discretizam concrete and reinforcement. Using the Micro-Truss Analyzer (MTA) software, that discretizes the models in bars and the commercial software Abaqus that considers constitutive models. Additionally, it is possible to determine the crack paths and the ultimate load. It is also possible to estimate and locate efficiently steel bars in the concrete, taking full advantages of the properties of concrete and steel. Some researches in literature present same discretized models of concrete only in geometries with regular grid of micro truss. In this work, an algorithm for generating quadrilateral finite element mesh is used. Implemented in MTA software, it is possible to generate mesh arbitrary geometries. Consequently this mesh is modified to elements of trusses elements in order to adequately represent the tension state of concrete continuous. Finally, results obtained by micro truss model are compared with experimental data.



# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. JUSTIFICATIVA .....	3
1.2. OBJETIVO .....	3
1.2.1. OBJETIVO GERAL .....	3
1.2.2. OBJETIVO ESPECÍFICO .....	4
1.3. ORGANIZAÇÃO .....	4
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>6</b>
2.1. MODELOS DE BIELAS E TIRANTES.....	6
2.2. MODELO DE MICRO TRELIÇA.....	10
<b>3. MODELOS CONSTITUTIVOS .....</b>	<b>22</b>
3.1. MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO .....	22
3.2. MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO.....	28
<b>4. PROGRAMA COMPUTACIONAL .....</b>	<b>29</b>
4.1. GERAÇÃO DA MALHA COM USO DE TEMPLATES .....	29
4.2. MICRO-TRUSS ANALYZER.....	32
<b>5. EXEMPLOS .....</b>	<b>39</b>
5.1. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO .....	39
5.2. EXEMPLOS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....	45
5.3. EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO .....	54
<b>6. CONCLUSÃO .....</b>	<b>62</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>64</b>
<b>APENDICE A – MODELAGEM NO MTA .....</b>	<b>66</b>
<b>APENDICE B .....</b>	<b>68</b>

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 5.1 - Deformação dos modelos Microtre1, Microtre2, Microtre3 e Microtre4. ....	42
Tabela 5.2 - Propriedades Mecânicas do Concreto (Guimarães, 1980). ....	45
Tabela 5.3 - Propriedades Mecânicas do Aço (Guimarães 1980). ....	46
Tabela 5.4 - Propriedades Mecânicas do Concreto (Macedo, 2011). ....	49
Tabela 5.5 - Propriedades Mecânicas do Aço (Macedo, 2011). ....	49
Tabela 5.6 - Tabela com pós processamento dos modelos MB 1ee.....	60

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Taxonomia da Mecânica da Fratura Computacional (Ingraffea, 2004). .....	2
Figura 2.1– Passos para geração do MBT (FIB BULLETIN 45, 2008) .....	7
Figura 2.2 - Tipos de regiões de Bernoulli e de descontinuidade (FIB BULLETIN 45, 2008). 8	
Figura 2.3 – Respostas de carga-deformação de um console curto com diferentes modelos de MBT (Ali e White, 2001). .....	9
Figura 2.4 – Diagrama esquemático do modelo de Micro Treliça (Salem, 2004). .....	12
Figura 2.5 – Representação deslocamento unitário para o elemento de treliça (Salem, 2004).12	
Figura 2.6 - Não-linearidade geométrica para um elemento de treliça (Salem, 2004). .....	13
Figura 2.7 – Modelos constitutivos do Concreto e do Aço (Salem, 2004). .....	13
Figura 2.8 – Viga parede (Salem, 2004). .....	14
Figura 2.9 – Deflexão e fissuras (Salem, 2004). .....	14
Figura 2.10 – Elementos tracionados (Salem, 2004). .....	15
Figura 2.11 – Elementos comprimidos (Salem, 2004). .....	15
Figura 2.12 – Gráfico Carga-Deslocamento (Salem, 2004). .....	15
Figura 2.13 – Arranjo dos elementos da micro treliça (Nagarajan et al., 2009). .....	16
Figura 2.14 – Modelos constitutivos do concreto e aço (Nagarajan et al., 2009) .....	17
Figura 2.15 - Viga parede bi-apoiada(Nagarajan et al., 2009). .....	17
Figura 2.16 - Viga parede com os modelos MMT e MBT(Nagarajan et al., 2009). .....	18
Figura 2.17 - Gráfico Carga-Deslocamento e padrão das fissuras, carga concentrada (Nagarajan et al., 2009). .....	18
Figura 2.18 - Gráfico Carga-Deslocamento e padrão das fissuras, duas cargas concentrada (Nagarajan et al., 2009). .....	19
Figura 2.19 - Gráfico Carga-Deslocamento e padrão das fissuras, carga distribuída(Nagarajan et al., 2009). .....	19
Figura 2.20 - Esquema de discretização do pilar(Kiouis et al., 2010). .....	20
Figura 2.21 - Simulação pilar de concreto armado 1(Kiouis et al., 2010). .....	20
Figura 2.22- Simulação pilar de concreto armado 2 (Kiouis et al., 2010). .....	21
Figura 3.1 - Gráficos tensão deformação do concreto. ....	28
Figura 3.2 - Gráfico tensão deformação do aço. ....	28
Figura 4.1 - Tipos dos subdomínios(Miranda e Martha, 2012). ....	30
Figura 4.2- Esquema de decomposição hierárquica para geração de elemento quadriláteros(Miranda e Martha, 2012). ....	31

Figura 4.3 - Exemplo de decomposição de domínio e geração de malha (Miranda e Martha, 2012).....	31
Figura 4.4- Estrutura interna do Quebra2d (Miranda et al., 2012).....	32
Figura 4.5 - Esquema de geração das Micro Treliças. ....	34
Figura 4.6 - Modelo de treliça para um elemento no estado tensão (Kioussis et al., 2010). ....	34
Figura 4.7 - Esquema de geração das Micro Treliças. ....	37
Figura 5.1 - Placa de concreto. ....	39
Figura 5.2- Microtre1 .....	40
Figura 5.3 - Microtre2. ....	40
Figura 5.4 - Microtre3. ....	41
Figura 5.5 - Microtre4. ....	41
Figura 5.6- Viga parede A1 adaptado de Guimarães (1980).....	45
Figura 5.7- Esquema geral de ensaio Filho (1995) apud Macedo (2011). ....	49
Figura 5.8 - Dimensões da Parede Filho (1995) apud Macedo (2011). ....	50
Figura 5.9 - Disposição da Armadura da Parede MB1ee Filho (1995) apud Macedo (2011). ....	50
Figura 5.10 - Malha MMT da viga A1.....	46
Figura 5.11 - Gráfico Carga x Deslocamento viga A1.....	47
Figura 5.12 - Tensões da viga A1. ....	47
Figura 5.13 - Tensões de Tração viga A1. ....	48
Figura 5.14 - Tensões de Compressão viga A1.....	48
Figura 5.15 - Malha MMT do MB 1ee.....	51
Figura 5.16 - Gráfico Carga x Deslocamento MB 1ee.....	52
Figura 5.17 - Tensões MB 1ee. ....	52
Figura 5.18 - Tensões de Tração MB 1ee. ....	53
Figura 5.19 - Tensões de Compressão MB 1ee.....	53
Figura 5.20 - Modelo parede MB 1ee sem armadura.....	54
Figura 5.21 - Tensões MB 1ee sem armadura.....	55
Figura 5.22 - Tensões de Tração MB 1ee sem armadura.....	55
Figura 5.23 - Tensões de Compressão MB 1ee sem armadura. ....	56
Figura 5.24 - Modelo parede MB 1ee com armadura 1. ....	57
Figura 5.25 - Tensões MB 1ee armadura inicial. ....	57
Figura 5.26 – Tensões de Tração MB 1ee armadura inicial.....	58
Figura 5.27 - Tensões de Compressão MB 1ee armadura inicial.....	58
Figura 5.28 - Modelo parede MB 1ee armadura 2. ....	59

Figura 5.29 - Modelo parede MB 1e e armadura 3. ....	59
Figura 5.31 - Gráfico Carga x Deslocamento, modelos de dimensionamento MB 1e. ....	61
Figura 0.1 – Principais Ferramentas do programa MTA .....	66
Figura 0.2 - Sequencia do processo de modelagem no MTA. ....	67

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

MMT	Modelo de Micro Treliça
MEF	Método dos Elementos Finitos
MBT	Modelo de Bielas e Tirantes
MFC	Mecânica da Fratura Computacional
MTA	Micro-Truss Analyzer
$E$	Módulo de Elasticidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\sigma$	Tensor de Tensões de Cauchy
$\varepsilon^{el}$	Deformação Elástica
$\varepsilon^{pl}$	Deformação Plástica
$\varepsilon$	Deformação
$\bar{\sigma}$	Tensor de Tensões efetiva
$D$	Tensor do estado danificado do concreto
$d$	Variável de Dano
$I$	Matriz Identidade
$E_0$	Rigidez Elástica do Material Intacto
$\Phi$	Função escalar de Potencial Plástico
$\nabla$	Operador Laplaciano
$\lambda$	Parâmetro de Consistência Plástica
$F$	Função de Escoamento
$k$	Variável interna de dano
$f_t$	Resistência a Tração do Concreto
$f_c$	Resistência a Compressão do Concreto
$d_c$	Variável de Dano a Compressão do Concreto
$d_t$	Variável de Dano a Tração do Concreto
$G_f$	Energia de Fratura
$g_\chi$	Densidade de Energia Dissipada
$f_y$	Tensão de escoamento do Aço
$f_u$	Tensão de Ruptura do Aço

# 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho faz um desenvolvimento do modelo de micro treliças (MMT), através do método dos elementos finitos (MEF), para análise de peças de concreto armado modeladas no estado plano de tensões. Com essa ferramenta são modelados alguns exemplos e também são extraídos, os modos de rupturas, propagação de fissuras e a taxa de aço necessária.

Desde o desenvolvimento das primeiras estruturas de concreto armado, existe uma busca contínua em metodologias de dimensionamento que otimizem ao máximo as propriedades do concreto e do aço dentro dos limites de segurança. Com a evolução da computação os métodos numéricos se tornaram uma das ferramentas mais utilizadas no dimensionamento de estruturas de concreto armado. Isso porque metodologias como MEF se destacam por sua precisão quando suas respostas são comparadas com dados experimentais.

Mas não somente o fato da precisão nas análises, o MEF também se destacou pela maneira com que problemas complexos são desenvolvidos e agilmente solucionados. Outra abordagem que se torna viável com essa ferramenta são as análises não lineares geométricas e físicas. A barreira do dimensionamento no regime elástico linear pode ser quebrada, assim é viável a previsão de estruturas que não ofereçam riscos de segurança e funcionando no regime elastoplástico.

Através do MEF pesquisadores conseguiram otimizar técnicas analíticas de dimensionamento de estruturas de concreto armado, como o Modelo de Bielas e Tirantes (MBT). Mas o que melhor traduz essa abordagem é o Modelo de Micro Treliça (MMT), que consiste na geração de um reticulado de treliças para representar o contínuo, que é uma forma simplificada e eficiente de obter os esforços internos de peças de concreto armado.

Alguns pesquisadores citam que o MMT é uma evolução do MBT. Essa afirmação se deve em parte pela intenção de chamar atenção para o MMT, pois na realidade os modelos são distintos onde, o MBT é um modelo rígido plástico no qual não há compatibilidade de deslocamento e são encontrados somente a carga última da peça analisada e o MMT se inicia com o estudo do campo de deslocamento, utilizando análises não lineares para gerar as relações de carga deslocamento das peças estudadas.

Um dos objetivos do MMT é a simulação dos modos de ruptura de peças de concreto, que compreende basicamente na simulação da propagação de fissuras da peça até o colapso. No

contexto da Mecânica da Fratura Computacional (MFC) as abordagens disponíveis atualmente são divididas em duas formas de representação. A primeira abordagem, a fissura é representada explicitamente na geometria do modelo. Este é o ramo esquerdo da taxonomia do MFC representado na Figura 1.1. Outra abordagem, um modelo subjacente não contém a trinca pois ela é representada implicitamente no modelo, não reproduzindo a geometria da trinca e seu crescimento. Em vez disso, a trinca está representada no modelo constitutivo do material ou num modelo cinemático. Este é o ramo da direita na Figura 1.1 (Ingraffea, 2004). No caso do MMT este pode ser classificado na metodologia da representação geométrica em específico o “*Lattice Methods*” onde o sistema é representado por um reticulado.

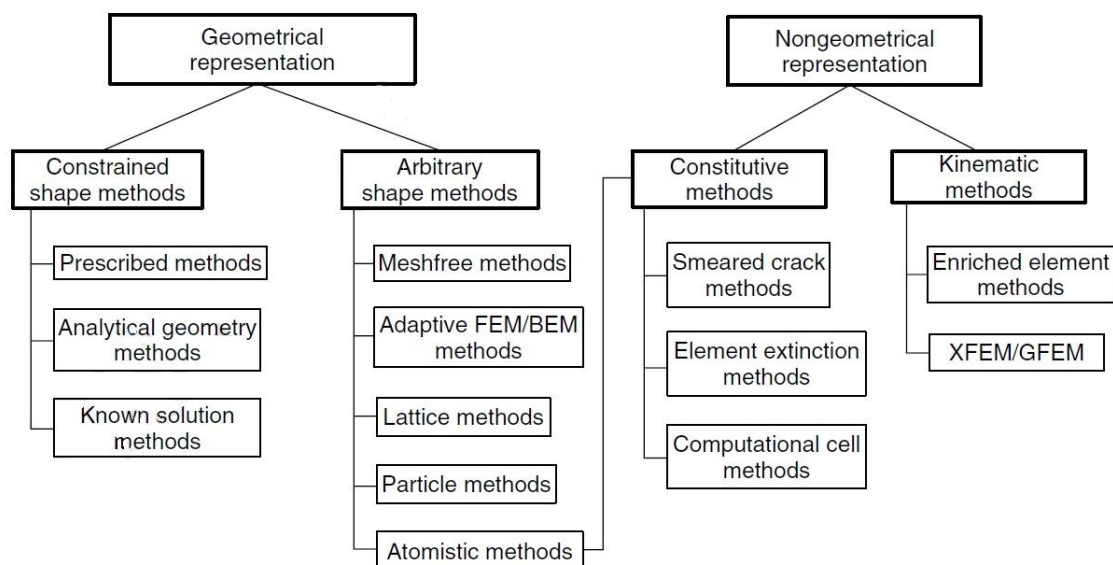


Figura 1.1 - Taxonomia da Mecânica da Fratura Computacional (Ingraffea, 2004).

No contexto da modelagem do aço na armadura de estruturas de concreto armado pelo MEF segundo Kwak e Filippou (1990), existe basicamente três métodos:

- Método homogeneizado ou “smeared”, ele é utilizado em casos onde, há uma distribuição uniforme da armadura, de modo que os elementos nesta região podem ser simulados como um novo material homogêneo com uma rigidez diferente. No entanto, para encontrar esta rigidez equivalente não é um trabalho simples.
- Método embutido ou “Embedded”, o aço é considerado como um membro axial incorporado no elemento isoparamétrico de tal forma que os seus deslocamentos são consistentes com os do elemento.



- Método discreto onde os elementos que representam a armadura podem ser elementos unidimensionais de treliça ou viga com dois ou três graus de liberdade por nó, que são conectados aos elementos que representam o concreto pelos nós ou através de elementos de contato que simulam a aderência aço concreto. O concreto pode ser modelado com elementos unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. O MMT está classificado nessa categoria, onde tanto o concreto como aço são modelados através de elementos unidimensionais de treliça com dois graus de liberdade por nó.

## **1.1. JUSTIFICATIVA**

A utilização convencional do MEF sem o uso dos métodos de simulação da armadura mencionados anteriormente para dimensionamento de peças de concreto armado oferece alguns contratempos já que suas respostas não fornecem diretamente as regiões e as taxas de armaduras necessárias. Mas com o Modelo de Micro Treliça essa tarefa se torna bem mais fácil, pois a metodologia é relativamente simples, com baixo custo computacional quando comparado com outros métodos e fornece diretamente as forças de tração e compressão advindas dos esforços internos da peça. Outro aspecto positivo é a otimização da armadura, ou seja, é possível colocar o aço em pontos estratégicos de tal forma que os materiais tenham suas propriedades otimizadas ao máximo. Essa metodologia também oferece uma ferramenta para detectar os modos de ruptura das peças, e como traçar os caminhos das fissuras dentro da estrutura.

Sem dúvida alguma, a criação de uma ferramenta computacional capaz de fornecer aos engenheiros de estruturas uma forma de dimensionar peças de concreto armado com precisão e velocidade é de grande valor. A cada dia às arquiteturas de edifícios, pontes, viadutos entre outros ficam mais arrojadas gerando formas bastante complexas e exigindo soluções mais eficientes.

## **1.2. OBJETIVO**

### **1.2.1. OBJETIVO GERAL**

Diante desses fatos essa dissertação tem como objetivo geral mostrar o desenvolvimento teórico do Modelo de Micro Treliças no dimensionamento de estruturas de concreto armado, demonstrando a simplicidade e eficiência do método.

## 1.2.2. OBJETIVO ESPECÍFICO

Como objetivo específico é apresentado a seguir:

- Criação de um algoritmo baseado no modelo de micro treliças capaz de dimensionar estruturas de concreto armado com formas complexas no estado plano de tensões.
- Demonstração do algoritmo em exemplos específicos através do programa computacional *Micro Truss Analyzer* (MTA) e programa comercial *Abaqus 6.10*
- Comparação dos resultados do MTA com dados experimentais.

## 1.3. ORGANIZAÇÃO

Este trabalho está organizado em seis capítulos mais dois apêndices, dispostos da seguinte forma:

Capítulo 1 – Introdução: Apresenta os conceitos iniciais do MMT, seu enquadramento dentro das técnicas de modelagem numéricas atuais, a justificativas do trabalho e os objetivos.

Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica: Apresenta dois tópicos, onde o primeiro relata o desenvolvimento e o conceito empregado no MBT e o segundo, o histórico e metodologia envolvida no MMT.

Capítulo 3 – Apresenta o modelo constitutivo do concreto o qual será aplicado e o modelo constitutivo do aço.

Capítulo 4 – Primeiramente é apresentado o algoritmo de geração da malha dos modelos, em seguida o histórico como as características do programa computacional *Micro Truss Analyzer* (MTA) e a metodologia empregada na modelagem e dimensionamento das áreas transversais das barras das Micro Treliças.

Capítulo 5 – Apresenta a aplicação do método, primeiramente com um exemplo de validação e depois com dois exemplos extraídos da literatura onde são comparados os resultados do MMT com os dados experimentais destes. Finalmente é proposto um modelo dimensionado com o MMT.

Capítulo 6 – Conclusão: Apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## Referências Bibliográficas.

Apêndice A – Apresenta um exemplo de modelagem no MTA.

Apêndice B – Apresenta o artigo com os principais tópicos desse trabalho o qual foi submetido ao XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering-CILAMCE 2013.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

No dimensionamento de estruturas de concreto armado, pode ser adotado, em certos casos, metodologias diferentes para o mesmo problema. Os modelos de bielas e tirantes (MBT), designação inglesa de *strut-and-tie-models*, é uma das metodologias para o dimensionamento de estruturas de concreto armado e resume na condensação de todas as tensões de compressão e tração em elementos de barra sujeitos a esforços axiais, sendo estas barras ligadas entre si por nós (Schlaich et al., 1987).

O modelo de bielas e tirantes (MBT) teve sua origem nos trabalhos feitos por Ritter (1899) e Morsch (1902) onde esses fizeram uma série de estudos nos quais estruturas de vigas de concreto eram idealizadas como treliças, essas tinham como função a representação das tensões de compressão e tração dentro da peça, geradas pelos esforços cortantes na viga. Tal modelo sofreu algumas mudanças ao longo dos anos, porém a sua essência continua a mesma. Hoje é indicado em diversas normas como uma forma de dimensionamento de estribos para vigas.

Na década de 1980 autores como Schlaich et al. (1987), partindo do modelo da treliça de Morsch descrita anteriormente, generalizaram esse método de modo a aplicá-lo na forma de biela e tirante para qualquer parte da estrutura. O intuito era obter uma ferramenta que fosse capaz de dimensionar com exatidão regiões da estrutura onde as tensões não se apresentavam de forma regular. As regiões de um elemento estrutural em que a hipótese de Bernoulli de distribuição no plano de tensões é válida são conhecidas como regiões B, onde B significa Bernoulli. As outras regiões onde as distribuições de tensão são não-lineares são conhecidas como regiões D, em que D representa descontinuidade ou perturbação. Enquanto as teorias bem definidas estão disponíveis para a concepção de regiões B, como equações empíricas estão sendo usados para projetar regiões D, embora as regiões B e D são igualmente importantes. O modelo de bielas e tirantes (MBT) oferece uma alternativa a esses métodos empíricos e oferece aos engenheiros de estrutura uma opção mais flexível e intuitiva para a concepção de elementos estruturais. O MBT é uma abordagem realista e simplificada quando comparado a análise não linear, este tem encontrado lugar em várias normas, como o código o americano (ACI 318-11), Eurocódigo (Eurocode2:2004), e outros (Nagarajan et al., 2009).

De maneira geral, os elementos estruturais mais comuns de concreto armado ou protendido são dimensionados utilizando métodos simplificados que desprezam as deformações causadas pelo cisalhamento e admitem uma distribuição linear de deformações ao longo da seção perpendicular. Entretanto, para regiões “D”, o esforço cortante é preponderante e os métodos de cálculo usuais são pouco eficientes, conduzindo a dimensionamentos inseguros. E assim, o dimensionamento de regiões “D” tem sido feito por décadas considerando-se experiências práticas utilizadas sem maiores problemas no passado.

Um critério utilizado para delimitar as zonas B e D baseia-se no princípio de Saint-Venant, onde este admite uma dimensão de comprimento  $h$  no qual se dá a regularização das tensões, esta dimensão permite definir então as dimensões da região D. Refere-se que a delimitação da estrutura em regiões B e D não é um aspecto decisivo na modelagem, mas tornar-se vantajoso para o desenvolvimento do MBT, uma vez que permite compreender estruturalmente como se prossegue a transmissão das forças internas. A Figura 2.1 mostra um exemplo para dimensionamento de uma estrutura de concreto usando o MBT.

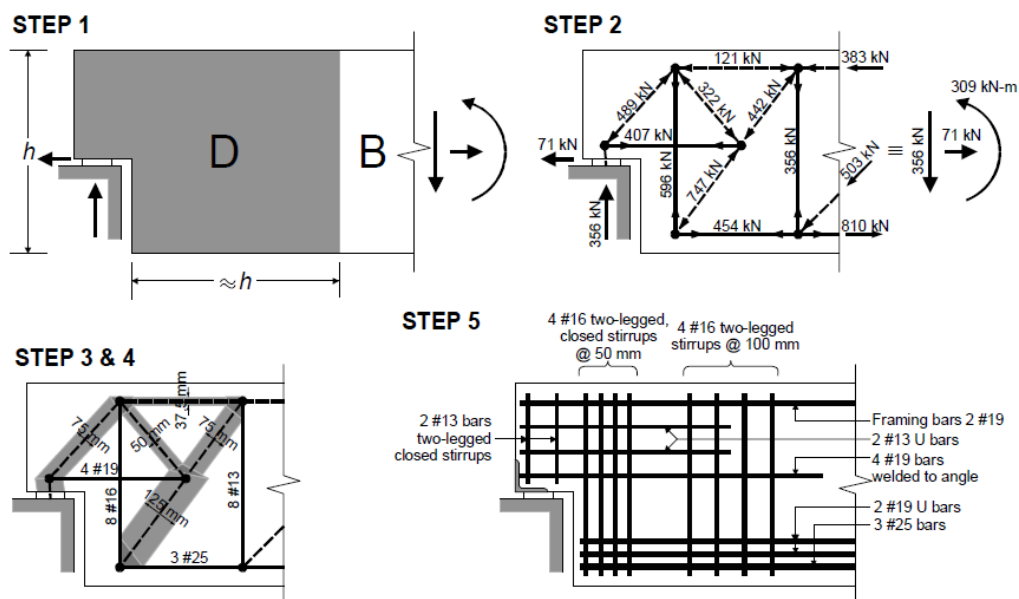


Figura 2.1– Passos para geração do MBT (FIB BULLETIN 45, 2008)

Exemplos de divisão de regiões e B e D são mostradas na Figura 2.2 onde a área sombreada com notação B indica uma Região-B a área sombreada com a notação D indica região-D.

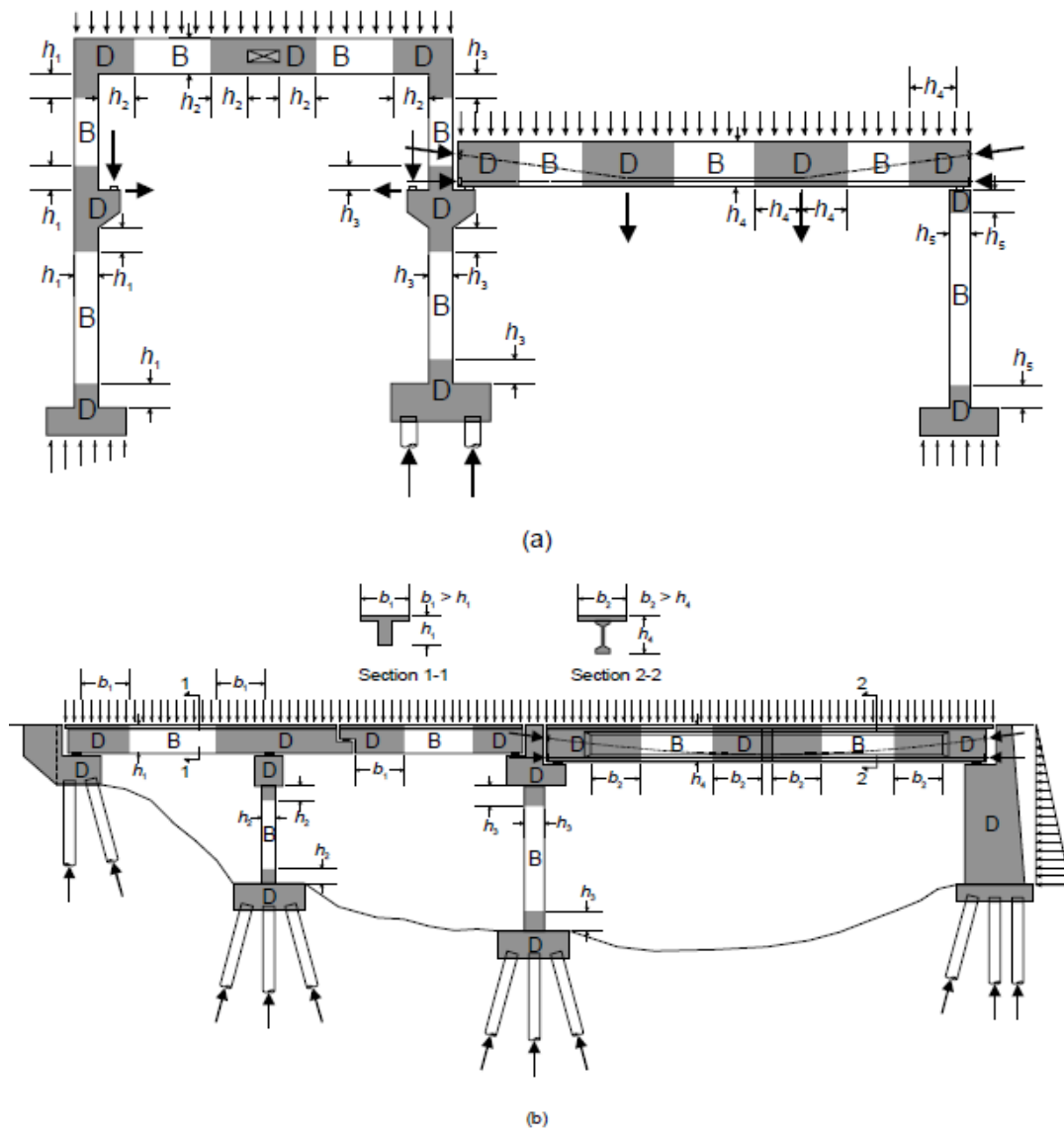


Figura 2.2 - Tipos de regiões de Bernoulli e de descontinuidade (FIB BULLETIN 45, 2008)

O MBT é baseado no teorema do limite inferior da plasticidade. Esse teorema baseia-se no princípio de que se o equilíbrio e os critérios de ruptura são satisfeitos, um limite inferior para a carga última é obtido. A compatibilização de deformações não é considerada no modelo, pois não é exigida no teorema do limite inferior e até mesmo devido à complexa distribuição de deformações não-lineares que existe em regiões “D”. De modo geral não existe um único MBT para um determinado caso, vários modelos podem ser criados, porém a ductilidade do concreto limita o número de soluções viáveis para cada projeto e sugere que os modelos de MBT viáveis devem ser aqueles que apresentam as melhores condições de deformação e exijam uma pequena redistribuição de cargas antes do início das fissuras.

Na Figura 2.3, a importância de selecionar MBT é ilustrada, mostrando a previsão não linear de elemento finito de respostas de carga-deformação associados com três desenhos de MBT para um console curto sujeito a uma carga pontual na sua ponta. O MBT selecionado para cada projeto é diferente, mas a capacidade de carga de projeto era a mesma para todas, contudo, uma elevada variabilidade na resposta prevista para a capacidade de carga ocorreu entre os desenhos. O projeto 1 gerou a pior capacidade de carga e de deformação, porque o MBT selecionado não foi compatível com as condições de deformação e fissuras excessivas ocorreram na região superior perto do apoio após o escoamento das diagonais, sem muita redistribuição de carga. No projeto dois o comportamento melhorou e a redistribuição da carga do tirante para a biela diagonal ocorreu antes do colapso da estrutura devido a divisão diagonal. Dos três projetos o terceiro gerou a maior capacidade, a carga adicional suportada gerou uma redistribuição equilibrada entre os elementos (Ali e White, 2001).

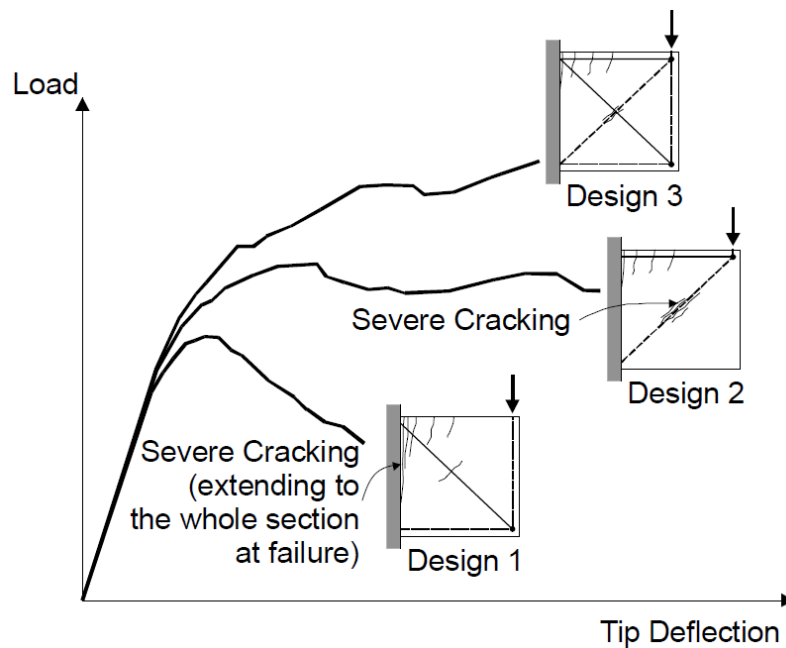


Figura 2.3 – Respostas de carga-deformação de um console curto com diferentes modelos de MBT (Ali e White, 2001).

O desenvolvimento dos modelos de Treliça para o MBT apresenta algumas regras gerais que serão descritas a seguir:

- Recomenda-se a procura de modelos simples com um número de elementos de bielas e tirantes reduzidos. Caso necessário, é possível refinar o modelo mais tarde;

- Orientar o modelo de acordo com o comportamento elástico para adaptar ao fluxo principal de forças;
- Os tirantes devem ter uma configuração simples, de modo a seguirem uma distribuição prática. A pormenorização final das armaduras deve estar em conformidade com o modelo utilizado na sua concepção;
- Evitar a adoção de ângulos entre bielas e tirantes menores que  $30^\circ$ , pois violam as condições de compatibilidade;
- As bielas representam campos de compressão com uma determinada seção a ser considerada, logo, devem manter uma distância adequada da fronteira da peça;
- É possível surgirem mecanismos. Caso se verifique, o projetista deve adicionar bielas diagonais, que tornam o modelo estaticamente determinado. No entanto, deve-se verificar se estas não afetam os campos de tensões prévios;
- Para uma representação mais realista do fluxo de tensões principais, convém fazer a sobreposição de dois modelos de bielas e tirantes quando se possuem modelos hiperestáticos;
- Quando se verifica uma estrutura de estaticidade indeterminada, é melhor recorrer a uma otimização, para que seja possível alocar rigidez nos vários elementos de bielas e tirantes, assim como, uma análise não linear.

O MBT possui muitas outras características para sua concepção as quais não foram informadas neste trabalho por não serem objetos deste. O intuito aqui foi mostrar uma metodologia em que consiste na discretização de elementos contínuos de concreto em elementos de barra para determinar as tensões internas e a carga última da peça. Além do que o MBT teve um papel importante nos conceitos empregados no Método das Micro Treliças.

## **2.2. MODELO DE MICRO TRELIÇA**

O Modelo de Micro Treliça (MMT) pode ser considerado como uma generalização do MBT e pode ser utilizado para desenvolver modelos otimizados de MBT, além disso, pode ser usado para prever respostas não lineares de elementos estruturais de concreto armado (Nagarajan et al., 2009).



A origem do MMT se confunde com o início da utilização do modelo reticulado na simulação numérica de elementos de concreto. Segundo pesquisas bibliográficas o primeiro modelo a utilizar elementos reticulados para fazer tais simulações foi o modelo Framework de Hrennikoff (1941), que propôs a discretização de um contínuo em um reticulado de treliça. Entretanto, para se obter uma solução exata de elasticidade, as barras devem ser muito pequenas, o que exige um esforço computacional enorme e havia tornado essa abordagem inadequada. Porém, com o avanço tecnológico na área da informática, ultimamente esta abordagem tem recebido muita atenção (Wang, 2002).

A partir dos trabalhos de Hrennikoff (1941), Salem (2004) propôs uma forma de discretização de viga parede, conforme Figura 2.4, em que essa foi dividida em pequenas regiões quadrilaterais as quais possuem dois elementos de treliça horizontais, dois verticais e dois diagonais. Os elementos horizontais recebem as tensões normais na direção horizontal, enquanto que os verticais na direção vertical. Os elementos diagonais recebem os esforços de cisalhamento através de um mecanismo de compressão, um elemento puxando o outro. Se a malha é girada 45 graus, o papel dos elementos é invertido. Os membros horizontais e verticais, em seguida, recebem o carregamento de cisalhamento enquanto que os elementos diagonais os esforços normais.

Através desse modelo o autor tinha o objetivo de simular as fissuras oriundas da flexão da peça. Em outras palavras, espera-se simular os danos gerados pela flexão e o cisalhamento. No entanto, MMT, o bloqueio de agregados não é tomado em consideração. Portanto, o modelo proposto não pode simular o modo de falha de corte deslizante e pode não ser capaz de simular o efeito do tamanho do corte.

Na Figura 2.4 é notada a facilidade de simular as armaduras longitudinais da viga. No entanto, deve ser mantida em mente que as barras de aço estão limitadas a posição horizontal, vertical ou a 45 graus com a horizontal. O autor acredita que essa limitação não causa problemas graves uma vez que praticamente a maior parte das barras da armadura de vigas são alinhadas como tal.

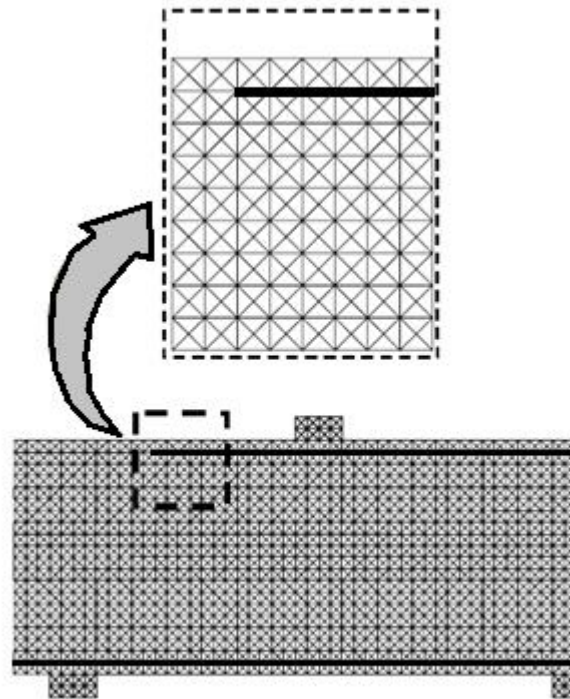


Figura 2.4 – Diagrama esquemático do modelo de Micro Treliza (Salem, 2004).

Neste modelo, as treliças são solucionadas através do método da rigidez por meio de uma análise não-linear geométrica e física, onde são aplicados modelos constitutivos para o aço e concreto a fim de captura as respostas elastoplásticas desses materiais. A formulação da matriz de rigidez de cada elemento de barra é formulada diretamente assumindo um deslocamento unitário na direção global, conforme Figura 2.5.

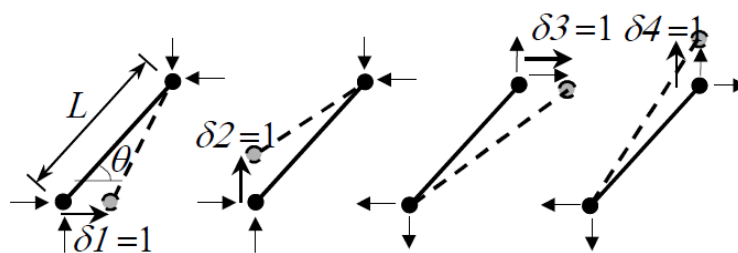


Figura 2.5 – Representação deslocamento unitário para o elemento de treliça (Salem, 2004).

A não-linearidade geométrica é simplesmente introduzida pela atualização dos deslocamentos a cada iteração, e computado as deformações com base nos deslocamentos mais atuais. Um exemplo é mostrado na Figura 2.6 para um elemento horizontal experimentando apenas o deslocamento vertical em relação à sua extremidade. Se a não-linearidade geométrica não é levada em consideração, a deformação será zero. No entanto, se a não-linearidade geométrica

é considerada, em relação ao deslocamento vertical irá causar algum alongamento no membro o que significa que existe deformação normal (Salem, 2004).

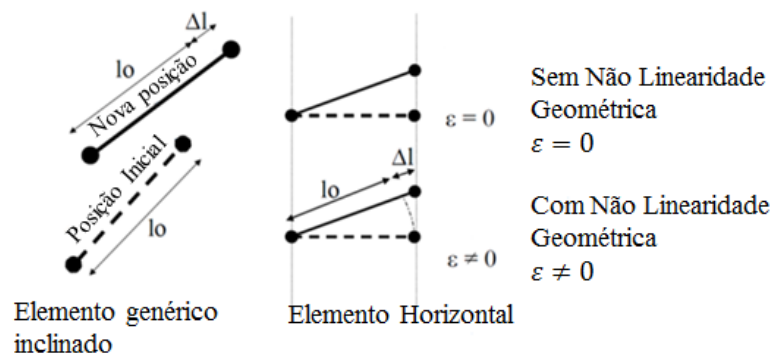


Figura 2.6 - Não-linearidade geométrica para um elemento de treliça (Salem, 2004).

A não-linearidade física utilizado neste modelo é ilustrada na Figura 2.7 onde são mostrados os esquemas dos modelos constitutivos adotados para simular o concreto e o aço.

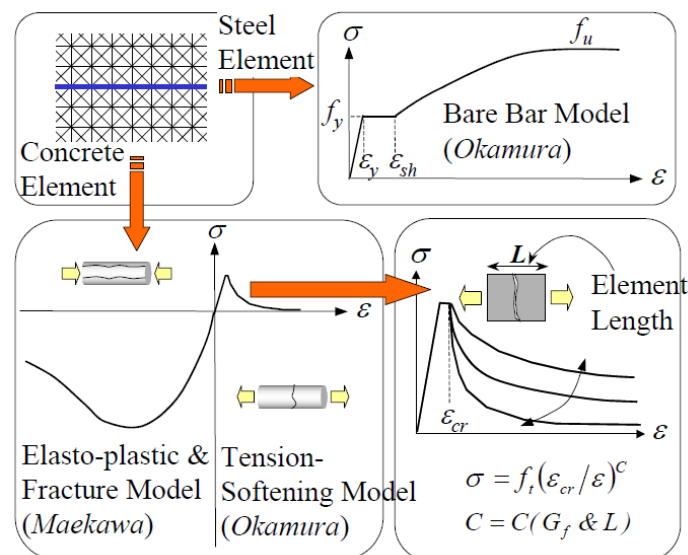


Figura 2.7 – Modelos constitutivos do Concreto e do Aço (Salem, 2004).

Para validar sua proposta (Salem, 2004) utilizou um modelo de viga com um vão de 2400 mm e seção retangular de 200 x 600 mm e armadura constituída de uma barra de 19 mm de diâmetro, sem armadura de alma e tensão de escoamento do aço de 350 MPa. O concreto apresentou uma resistência a compressão de 30 MPa e a resistência a tração de 2,5 MPa. Os elementos de barra da micro treliça foram escolhidos com dimensões de 30 mm, a Figura 2.8 ilustra o exemplo.

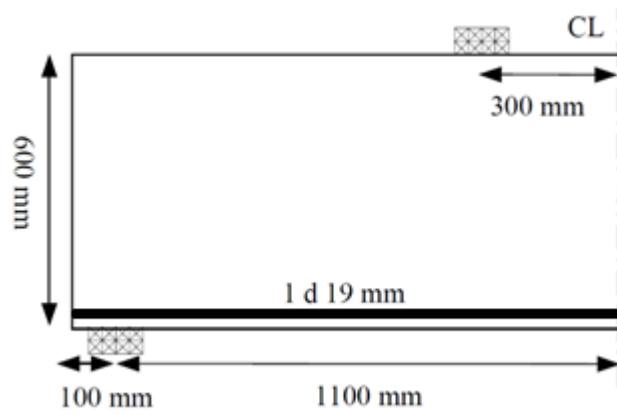


Figura 2.8 – Viga parede (Salem, 2004).

A seguir são mostrados os resultados deste modelo. Na Figura 2.9 mostra a deflexão e o padrão das fissuras, onde os elementos que atingem a ruptura são removidos a partir dos desenhos, resultando no padrão apresentado. Na Figura 2.10 representa os elementos tracionados e na Figura 2.11 os comprimidos. A Figura 2.12 mostra um gráfico de carga deslocamento comparando o modelo numérico com o experimental, demonstrando a eficiência do método.

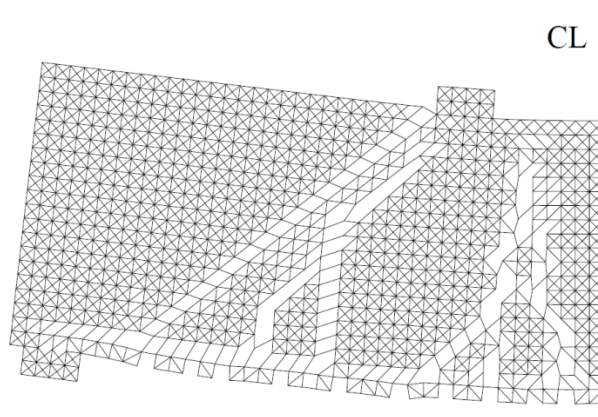


Figura 2.9 – Deflexão e fissuras (Salem, 2004).

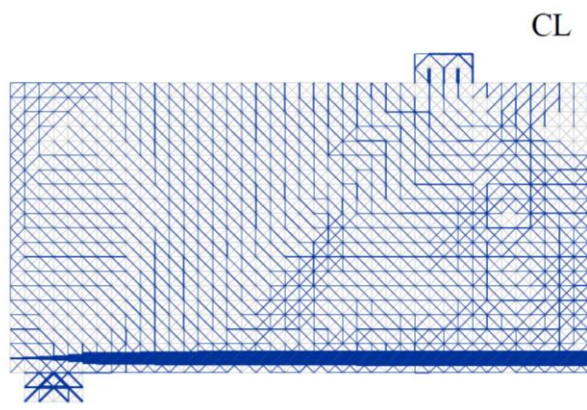


Figura 2.10 – Elementos tracionados (Salem, 2004).

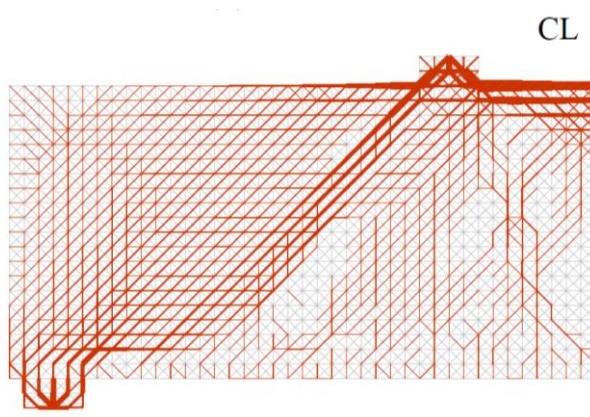


Figura 2.11 – Elementos comprimidos (Salem, 2004).

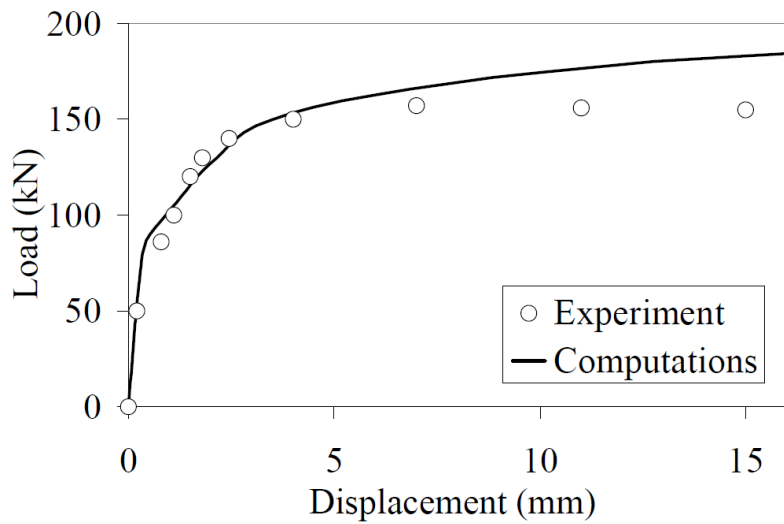


Figura 2.12 – Gráfico Carga-Deslocamento (Salem, 2004).

Na mesma linha de pesquisa (Nagarajan et al., 2009) deu continuidade ao MMT, onde esses adotaram o modelo de treliças ilustrado na Figura 2.13:

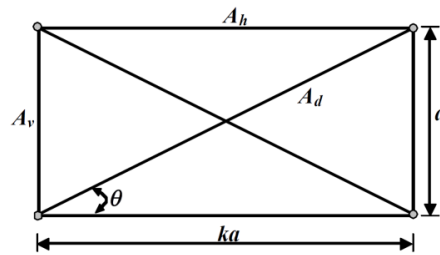


Figura 2.13 – Arranjo dos elementos da micro treliça (Nagarajan et al., 2009).

Na Figura 2.13  $A_h, A_d, A_v$  são as áreas das seções transversais dos elementos horizontais, diagonal e vertical, respectivamente, e são avaliadas como:

$$A_h = \frac{3}{8}(3 - k^2)at \quad \text{eq. 2.1}$$

$$A_d = \frac{3}{8} \frac{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{k} at \quad \text{eq. 2.2}$$

$$A_v = \frac{3}{8} \frac{(3k^2 - 1)}{k} at \quad \text{eq. 2.3}$$

Onde  $k$  é coeficiente de proporção entre a altura e largura da micro treliça e  $t$  é a espessura da estrutura a ser analisada.

Através dos modelos constitutivos ilustrado na Figura 2.14 para o concreto e aço o autor desenvolveu suas análises também no âmbito da não linearidade física. Com os modelos apresentados na Figura 2.14 é verificado que não foi considerado uma curva de amolecimento do concreto pós carga última de tração, ou seja, os elementos das treliças de concreto que chegam ao limite de tração são automaticamente eliminados pois entraram em colapso.

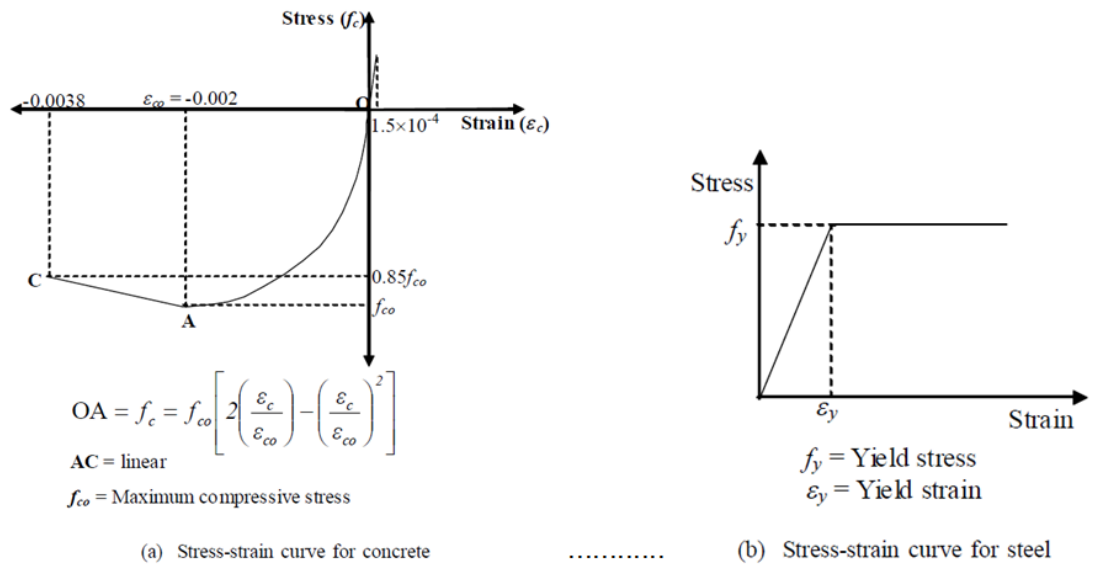


Figura 2.14 – Modelos constitutivos do concreto e aço (Nagarajan et al., 2009)

Através do software de elementos finitos ANSYS 10.0 o autor aplicou o MMT em uma viga parede bi-apoiada com vão de 6m e altura de 3m, os detalhes são mostrados na Figura 2.15. A resistência a compressão do concreto foi de 30 MPa e a tensão de escoamento do aço foi de 415 MPa. O tamanho da placa de apoio foi de 0,45 m x 0,5 m. A viga foi projetada para resistir a uma carga total de serviço (incluindo peso próprio) de 1000 KN. Para essa viga foram simuladas três situações, a primeira com carregamento concentrado no meio do vão, a segunda com duas cargas concentradas e a terceira com carga distribuída.

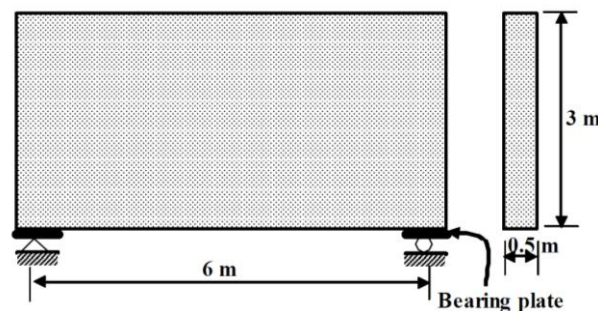


Figura 2.15 - Viga parede bi-apoiada (Nagarajan et al., 2009).

Através do MMT o autor gerou um modelo de MBT conforme Figura 2.16, onde as bielas estão representadas com linhas tracejadas e os tirantes com linhas cheias.

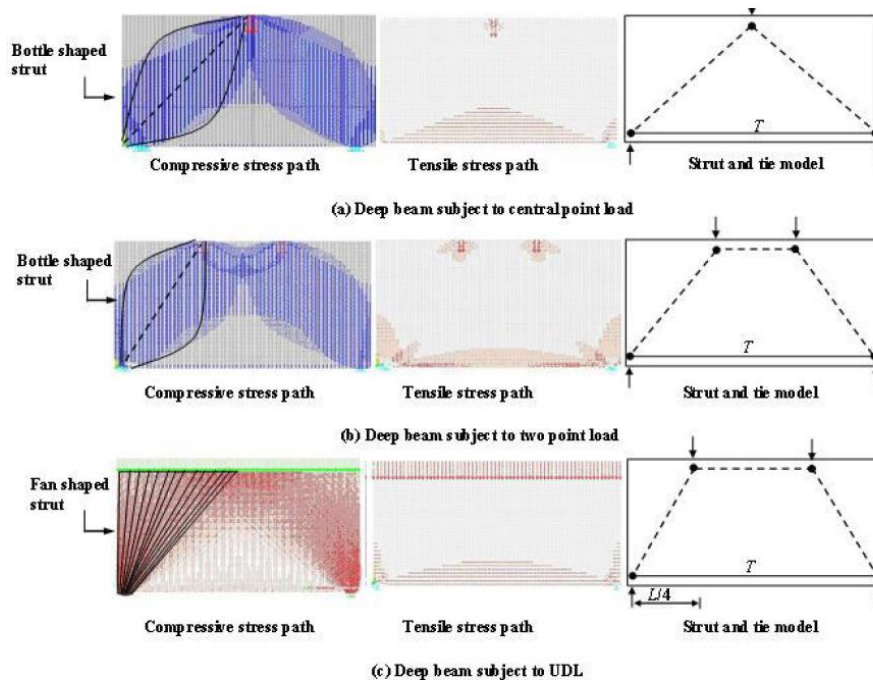
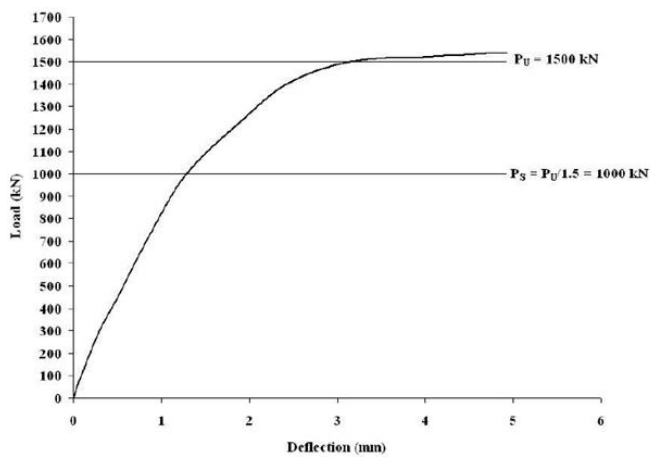
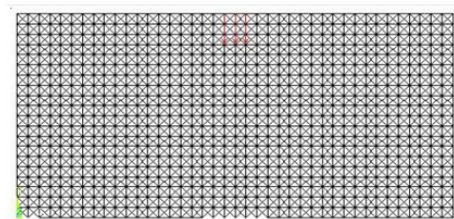


Figura 2.16 - Viga parede com os modelos MMT e MBT(Nagarajan et al., 2009).

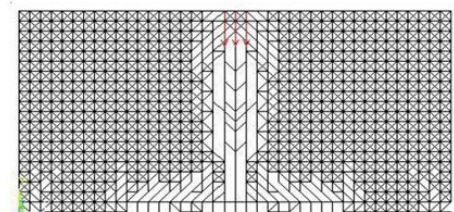
Na Figura 2.17, 2.18 e 2.19 são representados os resultados obtidos, onde o autor conclui que os modelos apresentaram uma capacidade de carga maior que a de projeto demonstrando uma quantidade razoável de segurança do ponto de vista do projeto.



(a) Load-deflection at mid span



(b) Crack pattern at service stage



(c) Crack pattern at ultimate load

Figura 2.17 - Gráfico Carga-Deslocamento e padrão das fissuras, carga concentrada (Nagarajan et al., 2009).



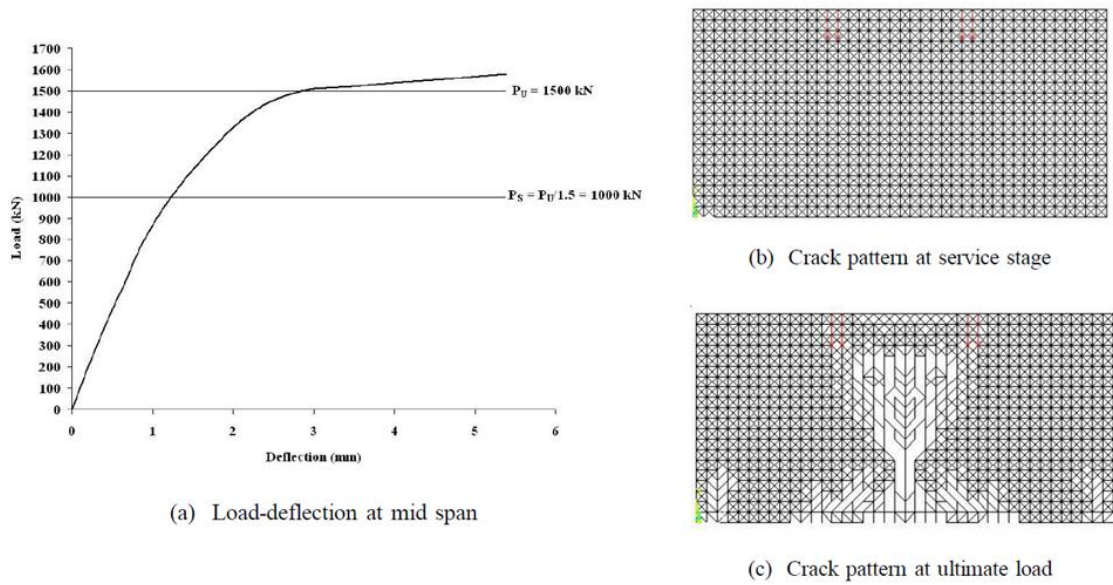


Figura 2.18 - Gráfico Carga-Deslocamento e padrão das fissuras, duas cargas concentrada (Nagarajan et al., 2009).

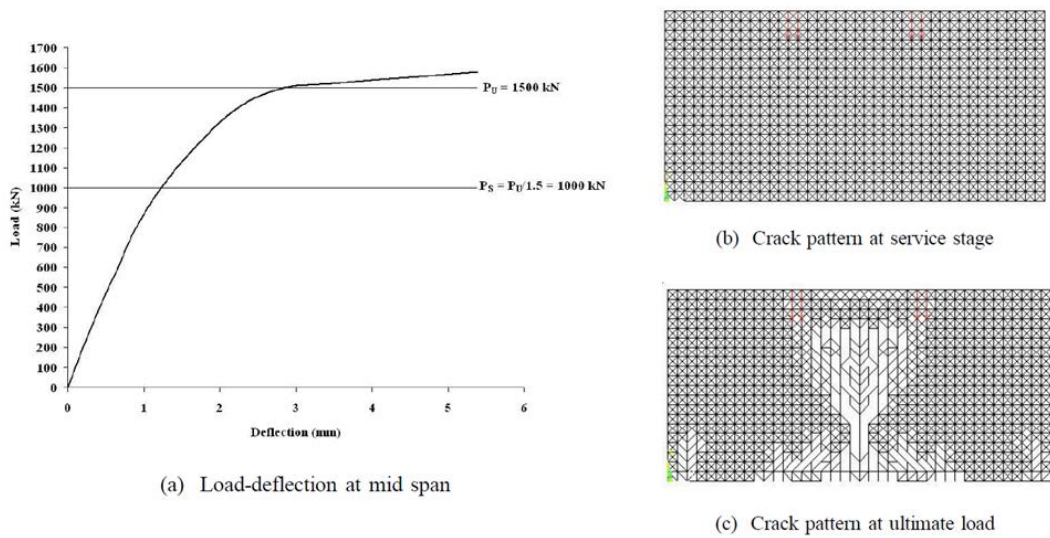


Figura 2.19 - Gráfico Carga-Deslocamento e padrão das fissuras, carga distribuída (Nagarajan et al., 2009).

Kiousis et al. (2010) utilizou MMT para simular pilares de concreto armado sob compressão, em seu estudo foi utilizado modelos constitutivos do concreto que simulam os efeitos do confinamento advindos da armadura. Este estudo apresentou uma simulação bidimensional de um problema tridimensional. A simulação do estado plano de tensões é mais representativa

nos estágios iniciais de carregamento, em que o confinamento do núcleo é mínimo. Para se levar em consideração o estado triaxial, um regime tensões mais complexo que se desenvolve com os efeitos de confinamento, o autor identificou as regiões confinadas e não confinadas dentro do pilar, considerou o estado tridimensional de tensões nas equações constitutivas e selecionou uma boa disposição das treliças para esse problema, a Figura 2.20 mostra o esquema de discretização adotado.

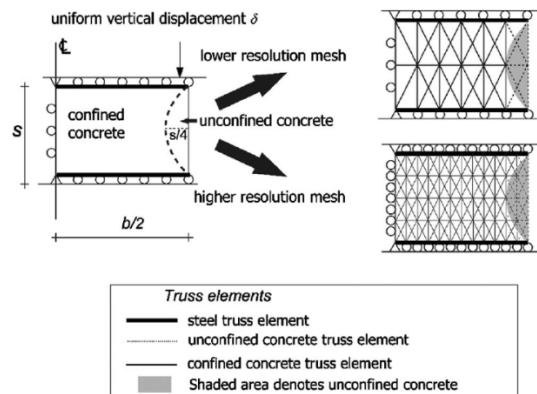


Figura 2.20 - Esquema de discretização do pilar(Kiousis et al., 2010).

O autor utilizou seu modelo em pilares com seção transversal quadrada onde foi submetido a carregamentos axiais até sua ruptura. Os resultados foram comparados com dados experimentais conforme as figuras a seguir:

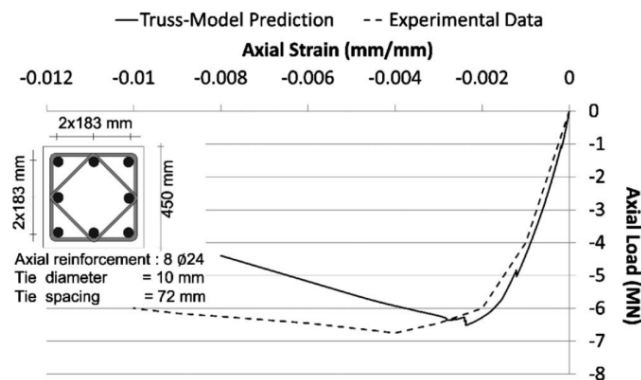


Figura 2.21 - Simulação pilar de concreto armado 1(Kiousis et al., 2010).

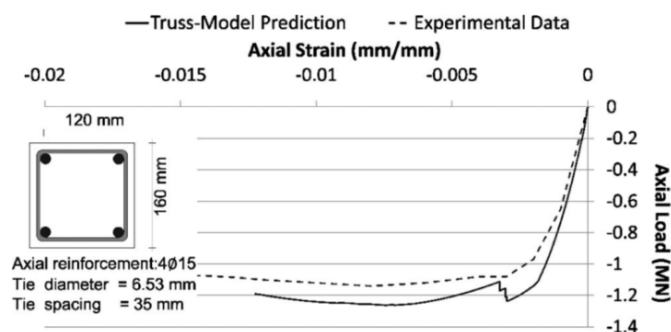


Figura 2.22- Simulação pilar de concreto armado 2 (Kioussis et al., 2010).

Nepomuceno (2012) estudou duas vigas-parede bi apoiadas sujeitas a duas cargas concentradas e uma viga contínua sujeita a duas cargas concentradas, o autor utilizou modelo analítico através do MBT, o software CAST que utiliza o MBT e o software *Micro-Truss Analyzer* que utiliza o MMT. O modelo de MMT adotado se baseou numa malha de elementos triangulares onde suas arestas formavam as barras das micro treliças.

Os resultados quando comparados com dados experimentais mostraram que o modelo analítico obteve repostas bastante aproximadas. O autor ressalta que para as situações estudadas, onde a geometria era simples, o método é bastante eficiente, pois se faz uso de cálculos simples e de fácil desenvolvimento. O software CAST subestimou bastante a carga ultima da peça. O MTA forneceu resultados bastante satisfatórios e também apresentou excelentes resultados de pós-processamento quando comparados com os dados experimentais.

### 3. MODELOS CONSTITUTIVOS

#### 3.1. MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO

Neste trabalho será feita análise não-linear física logo é preciso à inserção de modelos constitutivos que represente o estado elástoplástico dos materiais envolvidos. Nesse contexto a seguir serão mostrados os modelos constitutivos aplicados no modelo de micro treliças. Os modelos constitutivos a serem utilizados são os dispostos no programa comercial Abaqus 6.10. No caso do concreto o modelo a ser adotado é o “Concrete Damage Plasticity” baseado nos trabalhos de (Lubliner et al., 1989) e (Lee, 1998).

O modelo é desenvolvido utilizando o conceito da energia de fratura baseado nos danos semelhantes ao modelo de Barcelona. Duas variáveis de dano, uma para dano à tração e a outra para compressão, representam os diferentes estados de dano. A função de escoamento proposta por Lubliner et al. (1989), é modificada usando danos múltiplos ou variáveis de endurecimento. As funções de força uniaxial são divididas em duas partes, correspondentes à tensão efetiva e a degradação da rigidez elástica. As relações constitutivas para respostas elástoplásticas são dissociadas das respostas de danos de degradação. A função de força da tensão efetiva é usada para controlar a evolução da superfície de escoamento, de modo que a calibração com os resultados experimentais é conveniente (Lee, 1998). Partindo da teoria da plasticidade clássica, o tensor de deformação  $\varepsilon$  é decomposto em parte elástica  $\varepsilon^{el}$  e parte plástica  $\varepsilon^{pl}$  como se segue:

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon^{el} = E^{-1} : \sigma \quad (3.2)$$

Onde:

$E$  = Módulo de elasticidade

$\sigma$  = O tensor de tensões de Cauchy

Na teoria do dano plástico empregada nesse modelo, as deformações plásticas incluem as micro fissuras geradas no concreto. A relação tensão-deformação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma = E : (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (3.3)$$

Na mecânica do dano contínuo as tensões efetivas se relacionam com o tensor de tensões de Cauchy através de um tensor que representa o estado danificado do material, como se segue:

$$\bar{\sigma} = D: \sigma \quad (3.4)$$

Onde:

$\bar{\sigma}$  =Tensor de tensões efetivas

$D$  =Tensor representando o estado danificado

As tensões efetivas também podem ser representadas da seguinte forma:

$$\bar{\sigma} = E_0: (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (3.5)$$

Onde:

$E_0$  =É a rigidez elástica do material intacto

Danos associados com os mecanismos de falha do concreto (fissuração e esmagamento) resultam na redução da rigidez elástica, dentro do contexto da teoria do dano contínuo, a degradação da rigidez é isotrópica e caracteriza-se por uma variável de degradação individual “ $d$ ”, variando de 0 a 1, assim a representação do tensor  $D$  é:

$$D = \frac{1}{(1 - d)I} \quad (3.6)$$

Onde:

$d$  =Variável de dano

$I$  = Matriz identidade

Assim a eq. 3.3 toma a seguinte forma:

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (3.7)$$

$$\bar{\sigma} = (1 - d)E_0: (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (3.8)$$

Comparando eq.3.3 e eq.3.4, segue:

$$E = (1 - d)E_0 \quad (3.9)$$

A velocidade de deformação plástica é avaliada por uma regra de fluxo, que assume ser gerado a partir de uma função escalar potencial plástico  $\Phi$ . Para um potencial plástico definido no espaço das tensões efetivas, o fluxo de deformação plástica é dado por:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \nabla_{\sigma} \Phi(\bar{\sigma}) \quad (3.10)$$

Onde:

$\dot{\lambda}$  = Não é derivado das constantes de Lamé, mas uma função não negativa referida como o parâmetro de consistência plástica.

Além da deformação plástica, é necessária para representar os estados de danos, outro parâmetro, a variável interna  $k$  expressa como:

$$\dot{k} = \dot{\lambda} \dot{F}(r(\bar{\sigma}), \bar{\sigma}, k) \quad (3.11)$$

Onde:

$r$  = função homogênea de grau zero da tensão.

$F$  = função de escoamento

A chamada superfície de escoamento evolui com a variável de dano, ou a variável de endurecimento no contexto da plasticidade clássica, e limita as atuais tensões admissíveis. As respostas de dano à tração e compressão para materiais quase-frágeis são bastante diferentes, não é realista representar todos os estados de dano por um único parâmetro. Para representar as diferentes respostas de danos no concreto, uma função de escoamento multiendurecimento ou multiamolecimento que tem mais do que uma variável para descrever a evolução da superfície de escoamento é usada. Se as variáveis dos dois estados  $f_t$  e  $f_c$ , que representa a resistência à tração e à compressão uniaxial do material, respectivamente, descrevem a função de escoamento, os estados de tensão admissíveis são limitados pela seguinte condição:

$$\tilde{F}(\sigma, f_t, f_c) \leq 0 \quad (3.12)$$

Onde  $\tilde{F}$  é a uma função homogênea de primeiro grau dependente de três variáveis. No modelo, as funções de força uniaxial da eq. 3.12 são expressos em termos de dois parâmetros de danos  $k_t$  e  $k_c$ .

$$f_t = f_t(k_t) \quad (3.13)$$

$$f_c = f_c(k_c) \quad (3.14)$$

Supondo-se que as eq. 3.13 e 3.14 podem ser relacionadas com os danos de degradação e as repostas das tensões efetivas da mesma forma que se faz na eq. 3.8, segue:

$$f_t = [1 - d_t(k_t)]\bar{f}_t(k_t) \quad (3.15)$$

$$f_c = [1 - d_c(k_c)]\bar{f}_c(k_c) \quad (3.16)$$

Onde:

$0 \leq d_t < 1$  e  $0 \leq d_c < 1$  = Respostas dos danos de degradação de Tração e Compressão respectivamente.

$\bar{f}_t$  e  $\bar{f}_c$  = funções que representam as repostas das tensões efetivas de tração uniaxial e compressão, respectivamente.

De modo geral a variável de dano  $d$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$d = d(k) = 1 - (1 - d_t)(1 - d_c) \quad (3.17)$$

Note que  $d$  satisfaz a condição  $0 \leq d < 1$  e torna-se  $d_t$  se  $d_c = 0$  (caso de tração uniaxial) e  $d_c$  se  $d_t = 0$  (caso de compressão uniaxial). Por conseguinte, sem perder os resultados para as repostas uniaxial, das eq. 3.13 e 3.14, pode ser substituído por:

$$f_t = [1 - d]\bar{f}_t \quad (3.18)$$

$$f_c = [1 - d]\bar{f}_c \quad (3.19)$$

Usando as relações das eq. 3.7, 3.8, 3.17, 3.18, 3.19 a condição expressa na equação 3.11 fica da seguinte forma:

$$\tilde{F}(\bar{\sigma}, \bar{f}_t, \bar{f}_c) \leq 0 \quad (3.20)$$

Considerando que  $\bar{f}_t$  e  $\bar{f}_c$  são funções da variável  $k$  a eq.3.20 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F(\bar{\sigma}, k) \leq 0 \quad (3.21)$$

Vale ressaltar que  $\dot{\lambda}$  e  $F$  obedecem às condições de Kuhn-Tucker como se segue:

$$\dot{\lambda}F = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F \leq 0 \quad (3.22)$$

A tensão total é determinada através da avaliação dos danos de degradação:

$$\sigma = [1 - d(k)]\bar{\sigma} \quad (3.23)$$

Considerando os estados de tensão uniaxial para tração e compressão, a variável  $\chi \in \{t, c\}$  é introduzida, assim  $\chi = t$  para o estado uniaxial de tração e  $\chi = c$  para o estado uniaxial de compressão. De forma geral esse método representa o estado de tensão uniaxial assim:

$$\sigma_\chi = f_{\chi 0} [(1 + a_\chi)e^{(-b_\chi \varepsilon^p)} - a_\chi e^{(-2b_\chi \varepsilon^p)}] \quad (3.24)$$

Onde  $f_{\chi 0}$  é tensão inicial de escoamento, definida com a tensão máxima sem danos e  $a_\chi$  e  $b_\chi$  são constantes. Conforme equação 3.24 as equações 3.18 e 3.19 é assumido que degradação apresenta uma forma exponencial conforme equação a seguir:

$$1 - D_\chi = e^{(-d_\chi \varepsilon^p)} \quad (3.25)$$

Onde  $d_\chi$  é uma constante. Assim a tensão efetiva é dada como:

$$\bar{\sigma}_\chi = f_{\chi 0} \left[ (1 + a_\chi)e^{(-b_\chi \varepsilon^p)^{1-(d_\chi/b_\chi)}} - a_\chi e^{(-2b_\chi \varepsilon^p)^{2-(d_\chi/b_\chi)}} \right] \quad (3.26)$$

A versão uniaxial da variável interna de dano, denotada por  $0 \leq k_\chi \leq 1$  é definida como:

$$k_\chi = \frac{1}{g_\chi} \int_0^{\varepsilon^p} \sigma_\chi(\varepsilon^p) d\varepsilon^p \quad (3.27)$$

Onde:

$$g_\chi = \int_0^\infty \sigma_\chi(\varepsilon^p) d\varepsilon^p \quad (3.28)$$

A quantidade  $g_\chi$  representa a densidade de energia dissipada no processo de micro fissuração do concreto. Substituindo a equação 3.24 na 3.28 gera a seguinte relação:



$$g_{\chi} = \frac{f_{\chi 0}}{b_{\chi}} \left(1 + \frac{a_{\chi}}{2}\right) \quad (3.29)$$

Segundo Lubliner et al. (1989)  $g_{\chi}$  também pode ser representado da seguinte forma:

$$g_{\chi} = \frac{G_{\chi}}{l_{\chi}} \quad (3.30)$$

Onde  $G_{\chi}$  é a energia de fratura e  $l_{\chi}$  comprimento do elemento.

Combinando a equação 3.24 com a 3.27 a tensão uniaxial em termos de  $k_{\chi}$ :

$$\sigma_{\chi} = f_{\chi}(k_{\chi}) \quad (3.31)$$

$$\sigma_{\chi} = \frac{f_{\chi 0}}{a_{\chi}} \left[ (1 + a_{\chi}) \sqrt{\Phi_{\chi}(k_{\chi})} - \Phi_{\chi}(k_{\chi}) \right] \quad (3.32)$$

Onde:

$$\Phi_{\chi} = 1 + a_{\chi}(2 + a_{\chi})k_{\chi} \quad (3.33)$$

Similarmente a tensão efetiva e a variável de degradação podem ser rescritas em termos de  $k_{\chi}$  assim:

$$\bar{\sigma}_{\chi} = \bar{f}_{\chi}(k_{\chi}) \quad (3.34)$$

$$\bar{\sigma}_{\chi} = f_{\chi 0} \left[ \left( \frac{1}{a_{\chi}} \right) (1 + a_{\chi} - \sqrt{\Phi_{\chi}(k_{\chi})}) \right]^{1-(d_{\chi}/b_{\chi})} \sqrt{\Phi_{\chi}(k_{\chi})} \quad (3.35)$$

$$D_{\chi} = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a_{\chi}} \right) (1 + a_{\chi} - \sqrt{\Phi_{\chi}(k_{\chi})}) \right]^{(d_{\chi}/b_{\chi})} \quad (3.36)$$

As figuras seguir mostra o desenvolvimento das relações tensão deformação do concreto para os estados uniaxiais de tração e compressão.

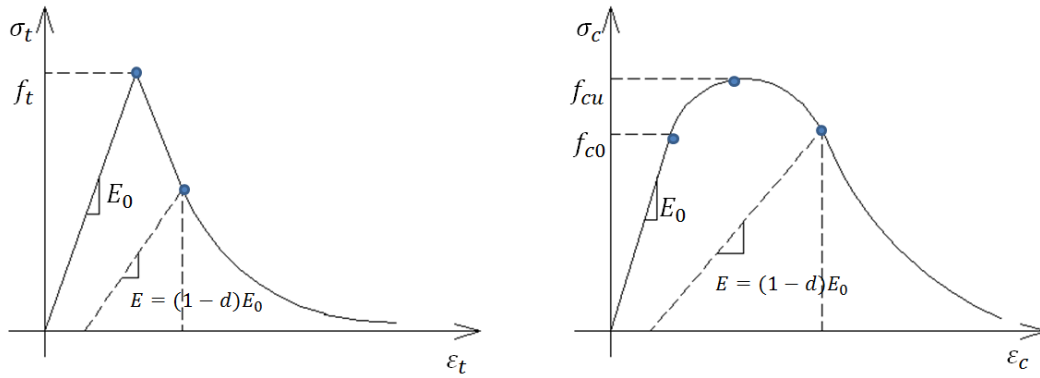


Figura 3.1 - Gráficos tensão deformação do concreto.

### 3.2. MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO

Para o modelo numérico do aço a relação constitutiva adota foi o modelo bi-linear com endurecimento do material, onde os dados de entrada para análise se restringem a ao modulo de elasticidade ( $E$ ), tensão de escoamento ( $f_y$ ) e tensão de ruptura ( $f_u$ ) com suas respectivas deformações, conforme Figura 3.2.

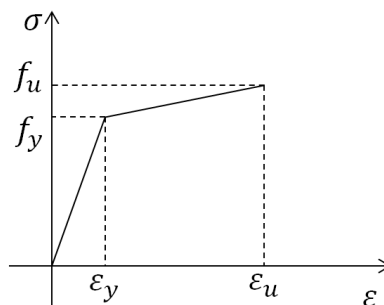


Figura 3.2 - Gráfico tensão deformação do aço.

## **4. PROGRAMA COMPUTACIONAL**

### **4.1. GERAÇÃO DA MALHA COM USO DE TEMPLATES**

O algoritmo de geração de malha aplicado nesse trabalho foi apresentado por Miranda e Martha (2012) e consiste na geração de malhas quadrilateriais de boa qualidade de forma hierárquica e com uso de templates. Essa abordagem é ideal para a transição malhas em subdomínios no contexto de modelos 2D. A geração de malhas estruturais, usualmente usadas, tem a limitação do número de segmentos de contorno de curva de subdomínio. Para subdomínios quadrilateriais, o número de segmentos em curvas de contorno opostas deve ser igual, e, para os subdomínios triangulares, as três curvas de fronteira devem ter o mesmo número de segmentos. Neste ambiente é difícil de implementar refinamento local de malha. A proposta de modelo hierárquico baseado em malha produz malhas de transição sem qualquer restrição sobre o número de segmentos de fronteira. O único requisito é que o número total de segmentos tem de ser par, que é regra geral, por uma malha quadrilateral.

Os dados de entrada para o algoritmo de geração de malha quadrilateral proposto em um subdomínio com representação discreta de curvas de contorno. Essa forma discreta permite representar geometrias com fronteira genéricas. Essa forma de representação é bastante simples, e pode ser implementado em qualquer linguagem de programação como um vector de números reais, que é uma lista sequencial de pontos de contorno (ou nós) e o número de segmentos (ou bordas) em cada curva limite:  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ . Um subdomínio pode ser composto de quatro, três ou duas curvas na fronteira que não se interceptam.

Nesse trabalho são considerados seis templates de alto nível para os subdomínios, que depende do número de curvas de contorno e o número de segmentos em cada curva, três modelos têm quatro curvas, dois tem três curvas, e um possui duas curvas. Na Figura 4.1 os templates T1 e T2 consistem de dois modelos com quatro curvas, os T3 e T4 com três curvas e T5 um template com duas curvas. As letras A, B, C e D na Figura 4.1 correspondem ao número de arestas em cada curva limite. Note-se que o modelo T0 não se decompõe em outros subdomínios, é utilizado apenas para gerar os elementos quadrilateriais.

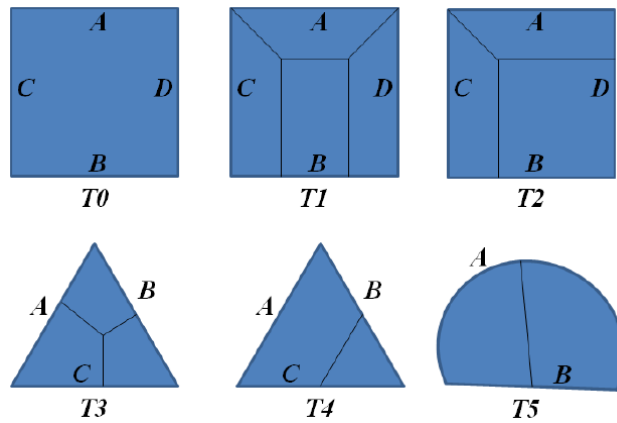


Figura 4.1 - Tipos dos subdomínios(Miranda e Martha, 2012).

A seleção prévia (primeiro nível) de um dos moldes da depende do número de arestas de cada curva. Se o número de arestas em lados opostos é igual, então o template T0 é selecionado e elementos quadriláteros são gerados através do método de mapeamento convencional. Se não for possível à utilização do template T0 no primeiro nível, um dos outros cinco templates é selecionado. Cada um destes templates decompõe o primeiro nível em subdomínios (segundo nível), e um novo template é selecionado para cada região. Este processo é repetido para cada região de forma recursiva até que a sub-região pode ser malhada utilizando o template T0. Devido a este processo recursivo, a geração de malha de quadrilateral proposta pode ser entendida como uma decomposição hierárquica. O sistema inteiro foi concebido de tal forma que a profundidade hierárquica de recurção, ou seja, o número de nívesi seja no máximo três. Por exemplo, a Figura 4.2 mostra um subdomínio composto por três curvas de contorno. No primeiro nível, o template T3 é selecionado. No segundo nível, três templates diferentes são selecionados para cada sub-região (T2, T0 e T1). No terceiro e último nível, o template T0 é selecionado para todas as sub-regiões, que são as folhas na decomposição hierárquica.

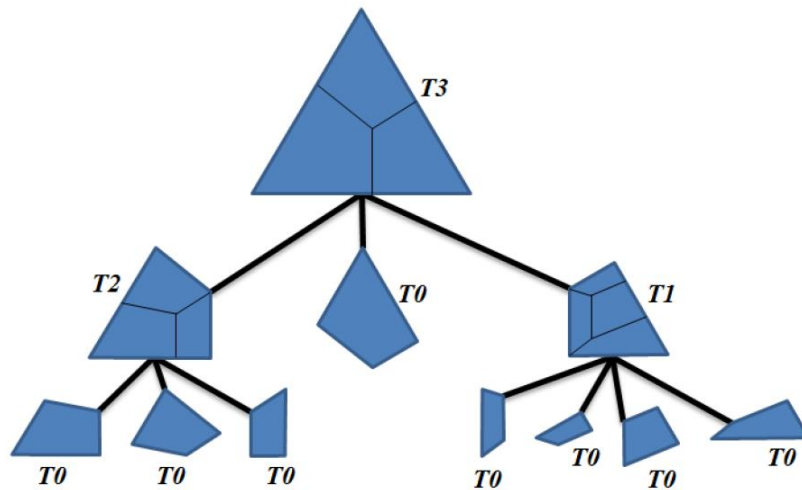


Figura 4.2- Esquema de decomposição hierárquica para geração de elemento quadriláteros(Miranda e Martha, 2012).

A Figura 4.3 mostra exemplos de geração de malhas de quadrilateral utilizando o algoritmo descrito. As linhas internas mais espessas representam a decomposição do domínio no nível 0. Observar que para uma mesma geometria é possível gerar diferentes configurações de malhas apenas mudando o número de arestas nas curvas de contorno. Observar também que diferentes templates são usados para nos vários níveis até atingir o template T0, onde o algoritmo de mapeamento é usado para gerar malha.

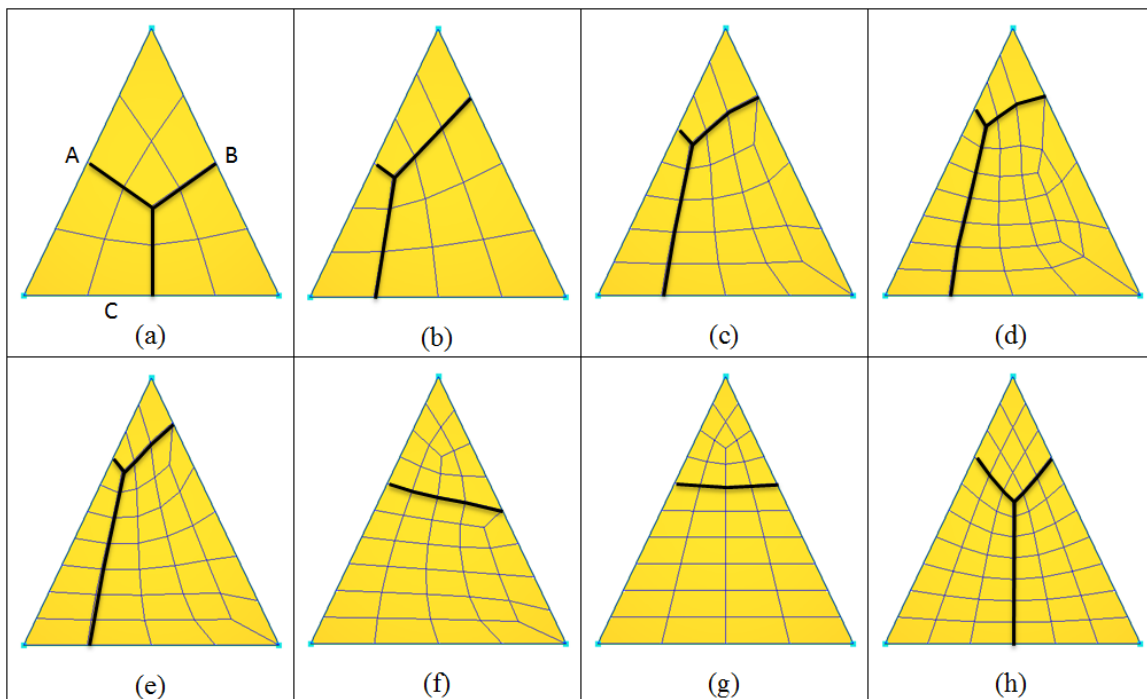


Figura 4.3 - Exemplo de decomposição de domínio e geração de malha (Miranda e Martha, 2012)

## 4.2. MICRO-TRUSS ANALYZER

O programa Micro-Truss Analyzer (MTA) teve sua origem no programa Quebra2D, esse é um programa gráfico interativo para simulação de processos de fratura em duas dimensões com base numérica do Método dos Elementos Finitos (MEF), foi desenvolvido em linguagem C e utiliza bibliotecas gráficas como Iup, Lua e CD, desenvolvidas pela TecGraf-PUC-Rio.

A Figura 4.4 mostra uma estrutura simplificada do programa Quebra2D. Ele é composto por diversos módulos controlados por um “Manager”, que comunica com o módulo API que faz interface gráfica do programa. Estes módulos são: o “Mesh Structure”, que armazena a malha e os resultados MEF, o “Geometric Structure”, que armazena a geometria da trinca e da peça, o “Mesh Structure” responsável pela geração automática do MEF, incluindo o entrosamento e re-malha, a “Rosette Shapes” responsáveis por gerar os elementos finitos especiais em torno da ponta da trinca, os “Attributes”, onde o modelo de atributos, tais como restrições nodais, cargas e propriedades dos materiais são armazenados, o “Solve”, módulo responsável pela análise numérica, o “SIF Calculator”, que calcula o KI e KII os fatores de intensidade de tensão utilizando os resultados do MEF, o “Crack Growth Direction”, que calcula o ângulo de incremento da trinca em cada etapa de cálculo e, finalmente, o "Jobs", que é o módulo responsável por determinar o tipo de propagação de fissuras e a análise adaptativa da malha (Miranda et al., 2012).

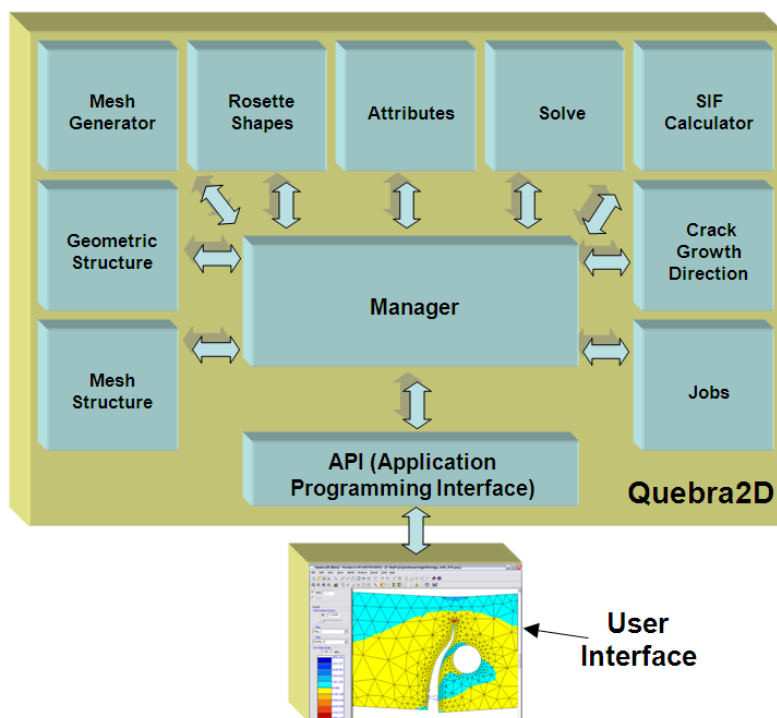


Figura 4.4- Estrutura interna do Quebra2d (Miranda et al., 2012).

A adaptação do programa Quebra2D para o MTA foi realizada em alguns módulos. No módulo “Mesh Generator”, o algoritmo de geração de malha de triângulos foi trocado pelo algoritmo de geração de malhas quadrilaterais. No módulo “Mesh Structure” foi adicionado o elemento de treliça já que o programa Quebra2D trabalha apenas com elementos 2D. Nesse mesmo módulo foi adicionado dados para o material de concreto. No módulo “Attributes” também foi adicionado dados para o concreto. No módulo “Solve” foi adicionado a chamada para o programa Abaqus para realização das análises. Finalmente, o módulo “User Interface” foi modificado para poder entrar com dados de concreto e para representar graficamente os resultados de treliças.

O MTA foi criado no trabalho de Nepomuceno (2012) a malha de treliças era obtida de uma malha de triângulos. No entanto para atender o modelo proposto para esse trabalho foi realizado algumas modificações. A geração de malha de barras de treliças é obtida da malha de elementos quadrilaterais. O módulo “Mesh Generator” gera elementos quadrilaterais. Uma pequena rotina no módulo “Manager” transforma as arestas dos elementos quadrilaterais em barras de treliça e, para completar o padrão de treliça como na Figura 4.6, também adiciona duas novas barras nas diagonais do elemento quadrilateral, pois as micro treliças hiperestáticas fornecem melhores resultados. Finalmente, o módulo “Manager” passa para o módulo “Mesh Structure” os elementos de treliça. A Figura 4.5 apresenta o esquema para geração de barras de treliça.

Diferente dos trabalhos encontrados na literatura em que os quadriláteros são regulares, ou seja, todos os ângulos internos são de  $90^\circ$  (quadrados e retângulos), a proposta aqui é apresentar uma formulação que possua certa liberdade na geração da malha, ou seja, não necessariamente os quadriláteros precisam ser regulares, assim é possível criar uma conformação melhor para peças que apresentam geometrias diferenciadas.

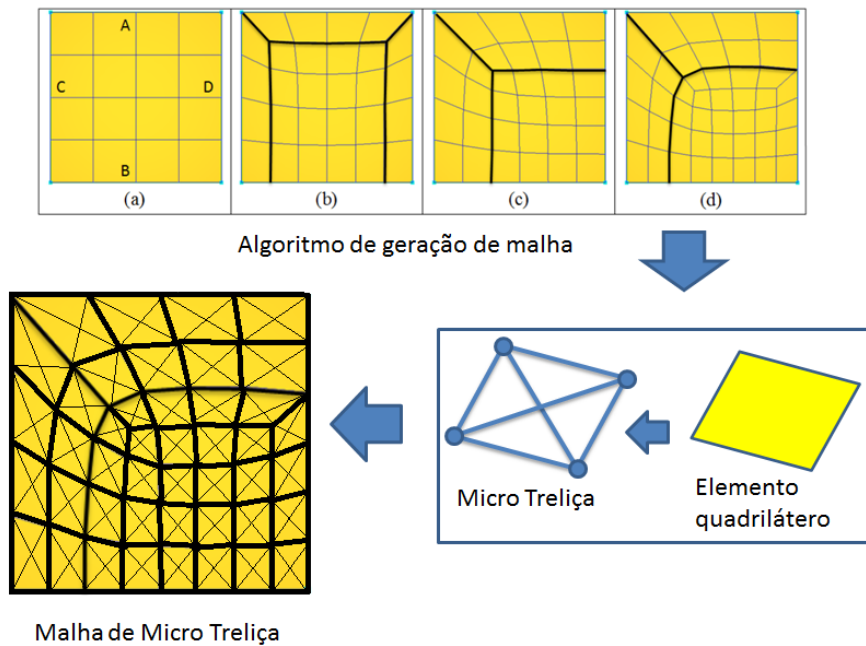


Figura 4.5 - Esquema de geração das Micro Trilizas.

Para dimensionar as áreas transversais das barras da triliza foram utilizados alguns conceitos apresentados por (Kiousis et al., 2010) onde esses comparam a rigidez de um elemento no estado plano de tensões com uma Triliza Plana, conforme Figura 4.6.

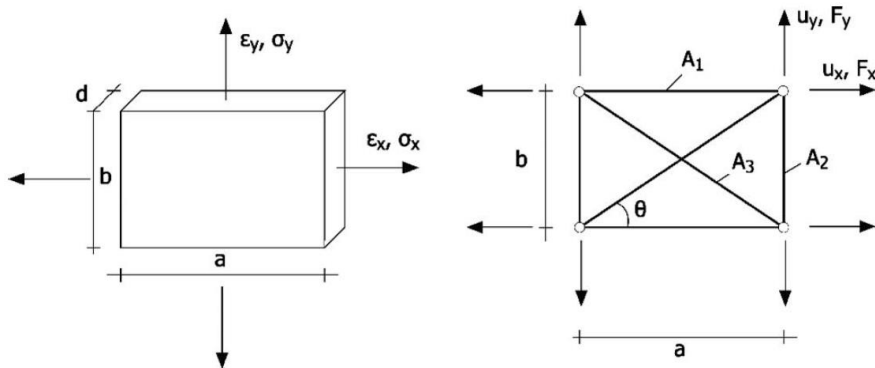


Figura 4.6 - Modelo de triliza para um elemento no estado tensão (Kiousis et al., 2010).

Diante dessa analogia é preciso partir de princípios básicos, no caso a representação das relações no estado plano de tensões conforme equação a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

As deformações do elemento 2d apresentado na Figura 4.6 podem ser expressos da seguinte forma:



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Onde a e b são as dimensões do elemento 2d da Figura 4.6. As relações de força e tensão nodais são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{2}{d} \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \frac{d}{2} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Onde d = espessura do elemento 2d da Figura 4.6. Substituindo as equações 4.2 e 4.3 na equação 4.1 resulta em:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \frac{d}{2} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \frac{Ed}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} & \nu \\ \nu & \frac{a}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Onde E é modulo de elasticidade do material e  $\nu$  é coeficiente de Poisson.

A relação nodal força-deslocamento para a treliça da Figura 4.6 pode ser facilmente desenvolvida utilizando o método da rigidez.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = 2E \begin{bmatrix} \frac{A_1}{a} + A_3 \frac{c^3}{a} & A_3 \frac{sc^2}{a} \\ A_3 \frac{s^2c}{b} & \frac{A_2}{b} + A_3 \frac{s^3}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Onde s = seno e c = cosseno, A1, A2 e A3 são as áreas transversais horizontais, verticais e diagonais dos elementos da treliça, respectivamente, como mostrado na Figura 4.6. Igualando os termos da segunda linha primeira coluna das equações 4.4 e 4.5, resulta na seguinte relação:

$$\frac{dv}{1-v^2} = 2A_3 \frac{sc^2}{a} \Rightarrow A_3 = \frac{v}{1-v^2} \frac{ad}{2sc^2} = \frac{v}{1-v^2} \frac{ld}{2sc} \Rightarrow$$

$$A_3 = \frac{v}{1-v^2} \frac{ld}{\sin 2\theta}$$
(4.6)

Onde  $l = a / c = b / s =$  comprimento do elemento diagonal da treliça. Da mesma forma podem ser avaliados os outros termos para encontrar as relações das áreas restantes.

$$2\left(\frac{A_1}{a} + A_3 \frac{c^3}{a}\right) = \frac{d}{1-v^2} \frac{b}{a} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \frac{db}{1-v^2} - A_3 c^3 \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{db}{1-v^2} - \frac{v}{1-v^2} \frac{ldc^2}{s} \right)$$
(4.7)

$$2\left(\frac{A_2}{b} + A_3 \frac{s^3}{b}\right) = \frac{d}{1-v^2} \frac{a}{b} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \frac{da}{1-v^2} - A_3 s^3 \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{da}{1-v^2} - \frac{v}{1-v^2} \frac{lds^2}{c} \right)$$
(4.8)

Para uma discretização baseada em regiões cujo sua forma condiz com quadrados e retângulos as dimensões dos elementos das Micro Treliça e as propriedades dos materiais serão suficientes na implementação do modelo. Porém a proposta desse trabalho é a discretização de elementos quadriláteros de formas irregulares, para isso foi desenvolvido uma formulação para contorna essas diferenças.

A formulação aqui proposta é bastante simples e procede da seguinte forma. Logo após a geração da malha de elementos quadrilaterais, é calculado um retângulo equivalente de cada elemento, com suas dimensões e de posse das relações descritas nas equações 4.6, 4.7 e 4.8 são geradas as áreas transversais das barras de uma Micro Treliça Regular, através de relações de proporção são avaliadas as áreas transversais das barras da Micro Treliça Irregular proveniente dos elementos quadrilaterais gerados no começo da discretização do modelo. A Figura 4.7 mostra o esquema de geração das Micro Treliças.

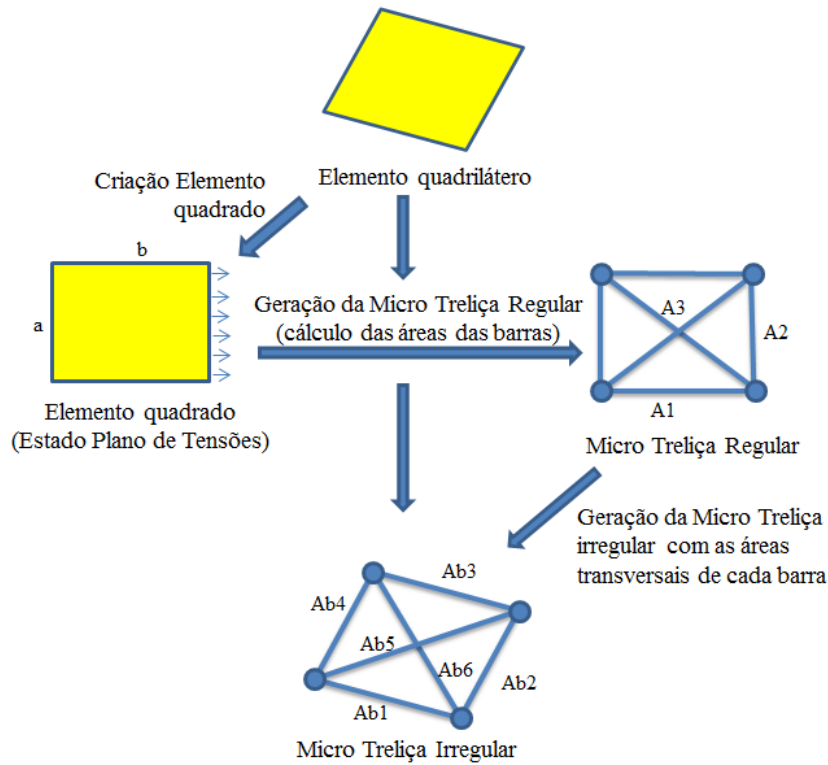


Figura 4.7 - Esquema de geração das Micro Treliças.

As equações a seguir calculam as áreas das barras das Micro Treliças Irregulares:

$$Ab_1 = \frac{A_1 l_1}{a} \quad (4.9)$$

$$Ab_2 = \frac{A_2 l_2}{b} \quad (4.10)$$

$$Ab_3 = \frac{A_1 l_3}{a} \quad (4.11)$$

$$Ab_4 = \frac{A_2 l_4}{b} \quad (4.12)$$

$$Ab_5 = \frac{A_3 l_5}{l} \quad (4.13)$$

$$Ab_6 = \frac{A_3 l_6}{l} \quad (4.14)$$

Onde  $Ab_1, Ab_2, Ab_3, Ab_4, Ab_5$  e  $Ab_6$  são as áreas transversais das barras das Micro Treliças irregulares e  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  e  $l_6$  são os comprimentos de cada barra. A ordem de discretização das barras obedece à sequência colocada na geração dos nós do elemento quadrilateral.

Após a geração das Micro Treliças do modelo que representa o concreto da peça a ser analisada, na sequência é preciso a inserção das barras de aço que representaram a armadura da estrutura de concreto armado. A princípio é feita uma análise prévia do modelo, somente com concreto, de posse dos resultados, são inseridas as barras de aço nas regiões onde houve colapso dos elementos de concreto. Não se considera a aderência entre o concreto e a armadura, considera-se somente o acoplamento nodal entre os elementos de treliça plana.

## 5. EXEMPLOS

### 5.1. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO

Para validar o método proposto no capítulo anterior, foi analisada uma placa de concreto com dimensões de 1 metro por 1 metro com espessura unitária submetida a um carregamento de tração de 100 kN/m, as condições de apoio da placa são dispostas de tal forma que a placa tenha liberdade para deforma na direção x e y. Na Figura 5.1 são apresentadas suas dimensões e condições de contorno. Tal análise possui o objetivo de demonstrar a capacidade do MMT em reproduzir as deformações da placa.

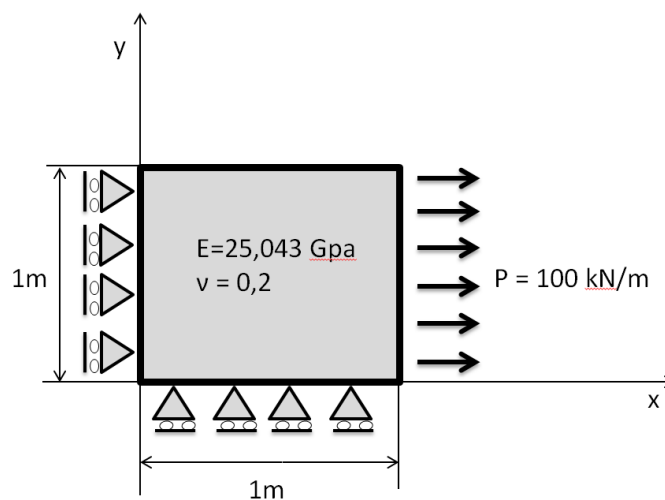


Figura 5.1 - Placa de concreto.

Nas equações 4.1 e 4.2 são calculadas as deformações elásticas no sentido longitudinal e transversal do corpo de prova, valores os quais serão comparados com os modelos numéricos.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} = 3.9931 \times 10^{-6} \quad \text{eq.4.1}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x \nu = 7.98626 \times 10^{-7} \quad \text{eq.4.2}$$

A partir dos dados anteriores foram criados quatro modelos de MMT. O primeiro modelo foi designado como Microtre1 e consiste na discretização de nove nós com vinte elementos, sendo que os nós 6 e 9 a condição de contorno imposta é apoios de primeiro gênero restringindo o deslocamento na direção x. No nó 1 foi colocado um apoio de segundo gênero restringindo deslocamento na direção x e y. Nos nós 2 e 3 foi aplicado apoios de primeiro gênero que impede deslocamento na direção y, a carga de 100kN/m foi distribuída nos nós 4, 5 e 6, conforme Figura 5.2. O modelo Microtre1 também teve duas abordagens, uma

considerando apenas os efeitos lineares e a outra considerando efeitos não lineares da treliça, tantos os de ordem geométrica como os de ordem física.

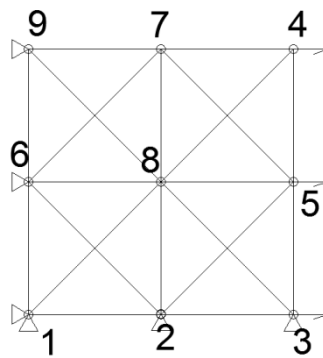


Figura 5.2– Microtre1

O segundo modelo é o Microtre2, que consiste num refinamento da malha apresentada no Microtre1. Ele é composto de 15 nós com 38 barras, da mesma forma que ocorreu no modelo anterior às condições de contorno se apresentam em regiões equivalentes. Também foi realizadas as abordagens linear e não linear. Na Figura 5.3 são apresentados as características do Microtre2.

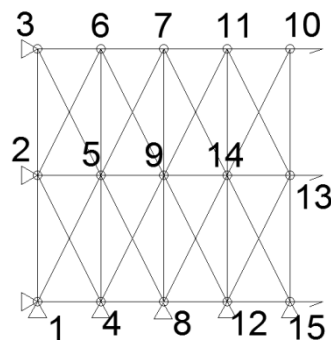


Figura 5.3 - Microtre2.

O terceiro modelo é o Microtre3. Nele os elementos são dispostos de forma não regular. O intuito é apresentar a eficiência da utilização do método em malhas não regulares. O modelo é composto de 19 nós e 54 barras e as condições de contorno e as análises realizadas também são as mesmas dos modelos anteriores. Na Figura 5.4 são apresentadas suas características.

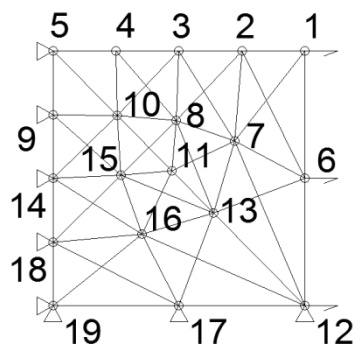


Figura 5.4 - Microtre3.

O quarto modelo foi o Microtre4, ele teve uma discretização mais refinada, porém apresentou uma série de micro treliças de forma irregular. Aqui o intuito é demonstra que o grau de refinamento pode superar algumas imprecisões que por ventura ocorra pelo fato da não homogeneidade da malha. O modelo possui 52 nós e 171 barras. Como nos modelos anteriores, as condições de contorno e as análises são similares. A Figura 5.5 são apresentadas suas características.

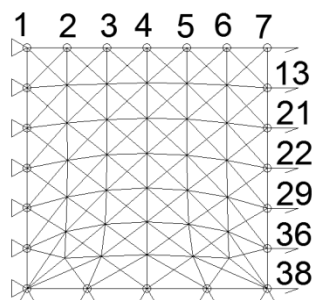


Figura 5.5 - Microtre4.

Através dos deslocamentos dos nós adjacentes dos modelos foram calculadas as deformações longitudinais e transversais. Os modelos Microtre3 e Microtre4 apresentaram pequenas distorções nos deslocamentos. Assim para o cálculo das deformações, foram extraídos deslocamentos médios de cada eixo. Outro aspecto importante é que na análise não linear nenhum dos modelos apresentaram escoamento do material, ou seja, a análise não linear ficou somente no âmbito geométrico. Na Tabela 5.1 são apresentados os valores extraídos das análises.

Tabela 5.1 - Deformação dos modelos Microtre1, Microtre2, Microtre3 e Microtre4.

Modelos	Nós	Deslocamento nodal eixo x (m)	Deslocamento nodal eixo y (m)	Deformação no eixo x	Deformação no eixo y	Relação de deformação
Microtre1 (linear)	1	2,50E-32	0	3,99E-06	-7,99E-07	-0,20
	2	2,00E-06	-8,53E-13			
	3	3,99E-06	8,59E-13			
	4	3,99E-06	-7,99E-07			
	5	3,99E-06	-3,99E-07			
	6	5,00E-32	-3,99E-07			
	7	2,00E-06	-7,99E-07			
	8	2,00E-06	-3,99E-07			
	9	2,50E-32	-7,99E-07			
Microtre1 (não linear)	1	3,28E-32	0	5,24E-06	-1,05E-06	-0,20
	2	2,62E-06	-1,12E-12			
	3	5,24E-06	1,13E-12			
	4	5,24E-06	-1,05E-06			
	5	5,24E-06	-5,24E-07			
	6	6,56E-32	-5,24E-07			
	7	2,62E-06	-1,05E-06			
	8	2,62E-06	-5,24E-07			
	9	3,28E-32	-1,05E-06			
Microtre2 (linear)	1	2,50E-32	0	3,99E-06	-7,99E-07	-0,20
	2	5,00E-32	-3,99E-07			
	3	2,50E-32	-7,99E-07			
	4	9,98E-07	1,57E-12			
	5	9,98E-07	-3,99E-07			
	6	9,98E-07	-7,99E-07			
	7	2,00E-06	-7,99E-07			
	8	2,00E-06	1,61E-12			
	9	2,00E-06	-3,99E-07			
	10	3,99E-06	-7,99E-07			
	11	2,99E-06	-7,99E-07			
	12	2,99E-06	1,58E-12			
	13	3,99E-06	-3,99E-07			
	14	2,99E-06	-3,99E-07			
	15	3,99E-06	-2,10E-13			
Microtre2 (não linear)	1	3,55E-32	0	5,67E-06	-1,13E-06	-0,20
	2	7,09E-32	-5,67E-07			
	3	3,55E-32	-1,13E-06			
	4	1,42E-06	2,22E-12			
	5	1,42E-06	-5,67E-07			
	6	1,42E-06	-1,13E-06			
	7	2,83E-06	-1,13E-06			



	8	2,83E-06	2,28E-12			
	9	2,83E-06	-5,67E-07			
	10	5,67E-06	-1,13E-06			
	11	4,25E-06	-1,13E-06			
	12	4,25E-06	2,25E-12			
	13	5,67E-06	-5,67E-07			
	14	4,25E-06	-5,67E-07			
	15	5,67E-06	-2,98E-13			
Microtre3 (linear)	1	4,80E-06	-1,15E-06	4,59E-06	-1,21E-06	-0,26
	2	3,72E-06	-1,34E-06			
	3	2,58E-06	-1,43E-06			
	4	1,32E-06	-1,15E-06			
	5	1,65E-32	-9,91E-07			
	6	5,37E-06	4,42E-08			
	7	3,27E-06	-1,14E-06			
	8	2,12E-06	-1,23E-06			
	9	2,68E-32	-7,41E-07			
	10	1,09E-06	-9,15E-07			
	11	1,44E-06	-1,03E-06			
	12	3,60E-06	4,62E-33			
	13	2,21E-06	-6,12E-07			
	14	2,16E-32	-4,85E-07			
	15	8,87E-07	-7,59E-07			
	16	1,33E-06	-4,98E-07			
	17	1,99E-06	-2,64E-33			
	18	2,38E-32	-2,45E-07			
	19	1,14E-32	-1,98E-33			
Microtre3 (não linear)	1	7,53E-05	-1,30E-05	7,73E-05	-1,95E-05	-0,25
	2	5,96E-05	-2,33E-05			
	3	4,32E-05	-2,63E-05			
	4	2,42E-05	-1,94E-05			
	5	4,66E-32	-1,57E-05			
	6	1,02E-04	8,30E-06			
	7	5,92E-05	-2,17E-05			
	8	3,78E-05	-2,28E-05			
	9	4,51E-31	-1,12E-05			
	10	1,86E-05	-1,51E-05			
	11	2,00E-05	-1,84E-05			
	12	5,43E-05	4,01E-32			
	13	2,99E-05	-1,19E-05			
	14	3,08E-31	-7,29E-06			
	15	1,25E-05	-1,24E-05			
	16	1,80E-05	-8,94E-06			
	17	2,98E-05	-7,45E-32			
	18	3,28E-31	-3,86E-06			

	19	4,24E-32	-4,28E-32			
Microtre4 (linear)	1	8,97E-33	-7,56E-07	4,09E-06	-8,67E-07	-0,21
	2	7,07E-07	-8,87E-07			
	3	1,38E-06	-1,01E-06			
	4	2,02E-06	-1,05E-06			
	5	2,66E-06	-9,82E-07			
	6	3,30E-06	-8,08E-07			
	7	3,96E-06	-5,77E-07			
	13	4,11E-06	-4,17E-07			
	21	4,20E-06	-2,44E-07			
	22	4,27E-06	-7,85E-08			
	29	4,31E-06	5,74E-08			
	36	4,26E-06	1,27E-07			
	38	3,53E-06	3,02E-33			
Microtre4 (não linear)	1	3,66E-32	-1,43E-05	7,77E-05	-1,63E-05	-0,21
	2	1,31E-05	-1,68E-05			
	3	2,56E-05	-1,92E-05			
	4	3,75E-05	-1,98E-05			
	5	4,92E-05	-1,86E-05			
	6	6,09E-05	-1,51E-05			
	7	7,30E-05	-1,02E-05			
	13	7,63E-05	-7,15E-06			
	21	7,84E-05	-3,70E-06			
	22	8,04E-05	-5,96E-08			
	29	8,37E-05	3,53E-06			
	36	8,73E-05	5,25E-06			
	38	6,48E-05	2,23E-32			

Quando comparados os resultados da análise linear dos modelos Microtre1 e Microtre2 com o resultado analítico, é verificada a precisão do método, demonstrando o potencial da metodologia. As barras do modelo não apresentaram escoamento, logo, os resultados da análise não linear se restringiram apenas a não linearidade geométrica dos elementos. As respostas obtidas foram diferentes do analítico, porém a relação das deformações longitudinais e transversais se manteve.

No modelo Microtre3 os resultados se diferenciaram do analítico, no entanto não houve grandes distorções nas deformações já que a relação de proporcionalidade se manteve na mesma ordem de grandeza. O Microtre4 obteve valores próximos do analítico e uma resposta mais eficiente que o Microtre3, isso porque mesmo com uma malha não homogênea o refinamento desta foi maior.

De modo geral os resultados entre as deformações nas duas direções deve dar o valor de Poisson de 0,2. Observa-se que para malhas regulares e até pouco refinadas, os resultados foram exatos. Para malhas irregulares, o resultado de pouco refinamento, Microtre3, diverge 30% do esperado. Entretanto, com um malha mais refinada a divergência baixa para 5%. Pode-se concluir desses exemplos que é recomendável que as malhas nos modelos sejam refinadas a fim de evitar erros nas deformações.

## 5.2. EXEMPLOS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Agora será analisado o comportamento do algoritmo para situação de uma peça submetida a um esforço de flexão comparando os resultados numéricos com os experimentais. Para essa análise foi utilizado um exemplo de uma viga parede biapoiada ensaiada por Guimarães (1980), os resultados obtidos foram objetos de estudos dos trabalhos de Fernandes (2010) e Nepomuceno (2012). A viga foi armada com quatro barras de aço de 8mm de diâmetro cada. A Figura 5.6 mostra suas características geométricas e nas Tabelas 6.2 e 6.3 são apresentadas as propriedades mecânicas dos materiais empregados.

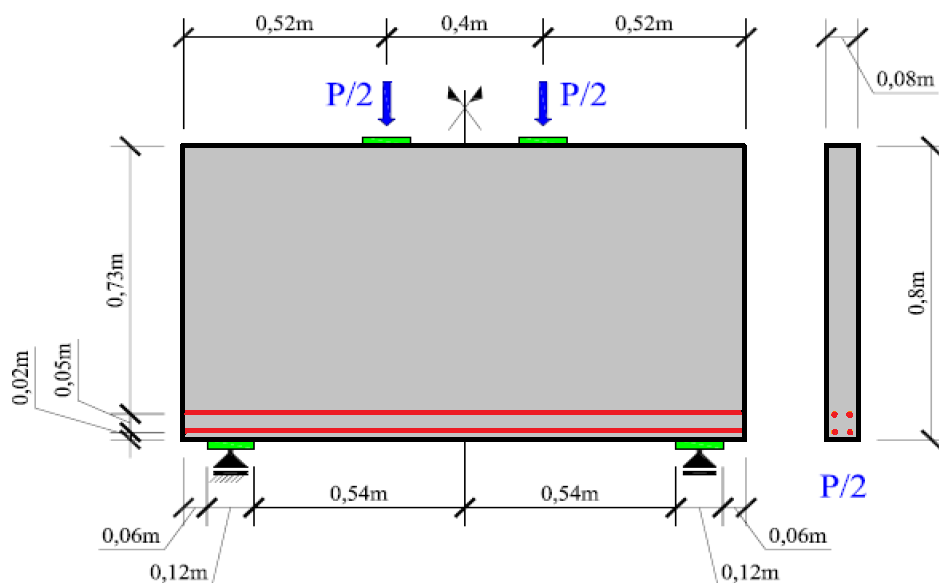


Figura 5.6- Viga parede A1 adaptado de Guimarães (1980).

Tabela 5.2 - Propriedades Mecânicas do Concreto (Guimarães, 1980).

Resistência à Compressão (Mpa)	Resistência à Tração (Mpa)	Módulo de Elasticidade (GPa)	$G_F$ (N/m)
24,80	2,40	23,704	150

Tabela 5.3 - Propriedades Mecânicas do Aço (Guimarães 1980).

Módulo de Elasticidade (GPa)	Tensão de Escoamento $f_y$ (Mpa)
212,50	534

Guimarães (1980) nomeou essa viga por A1 e em seus ensaios obteve uma carga última de 480KN com modo de ruptura por flexão.

Para análise do primeiro exemplo foi realizado um modelo MMT com 2253 nós e 8862 elementos, onde as linhas na cor magenta representam as armadura utilizadas conforme Figura 5.7.

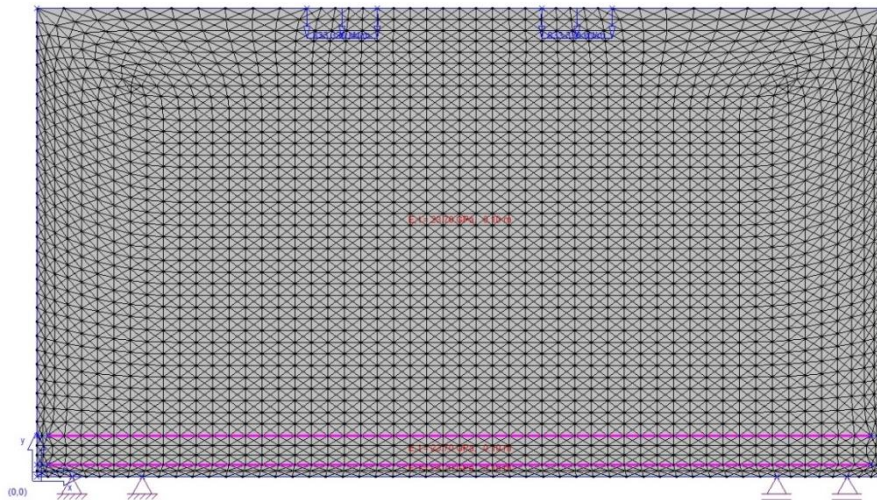


Figura 5.7 - Malha MMT da viga A1.

Após análise do modelo, foi encontrado uma carga última de 442 KN, obtendo aproximadamente 92% do valor experimental, a Figura 5.8 mostra o gráfico com a curva de carga versus deslocamento, referente a extremidade inferior no meio do vão da viga.

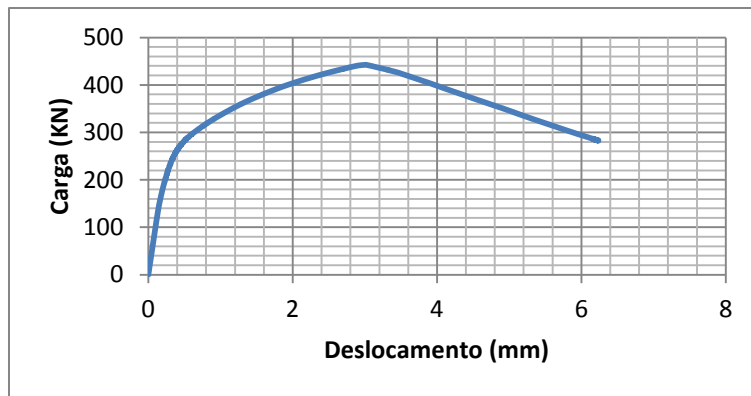


Figura 5.8 - Gráfico Carga x Deslocamento viga A1.

As Figuras 5.12, 5.13 e 5.14 mostram o pós processamento do modelo, onde na lateral esquerda está uma legenda indicando os intervalos de tensões em Pa dos elementos. Na Figura 5.9 está disposto tanto as barras tracionadas como as comprimidas, já nas Figuras 5.13 e 5.14 estão somente as barras tracionadas e as comprimidas respectivamente. É notado o acumulo de tensões nos elementos que representam a armadura da viga, também é verificado que os primeiros elementos que entram em colapso são os da parte inferior no meio do vão da viga, esses entram e ruptura por tração, tal processo condiz com verificado experimentalmente. Outro fato importante é o modo de ruptura da viga que se dá por flexão onde há uma deformação excessiva da armadura.

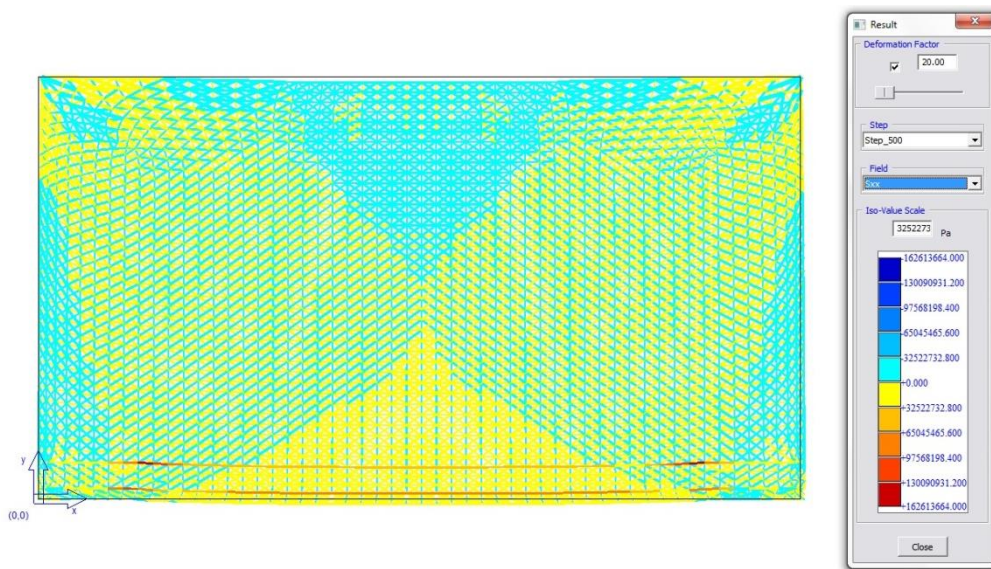


Figura 5.9 - Tensões da viga A1.

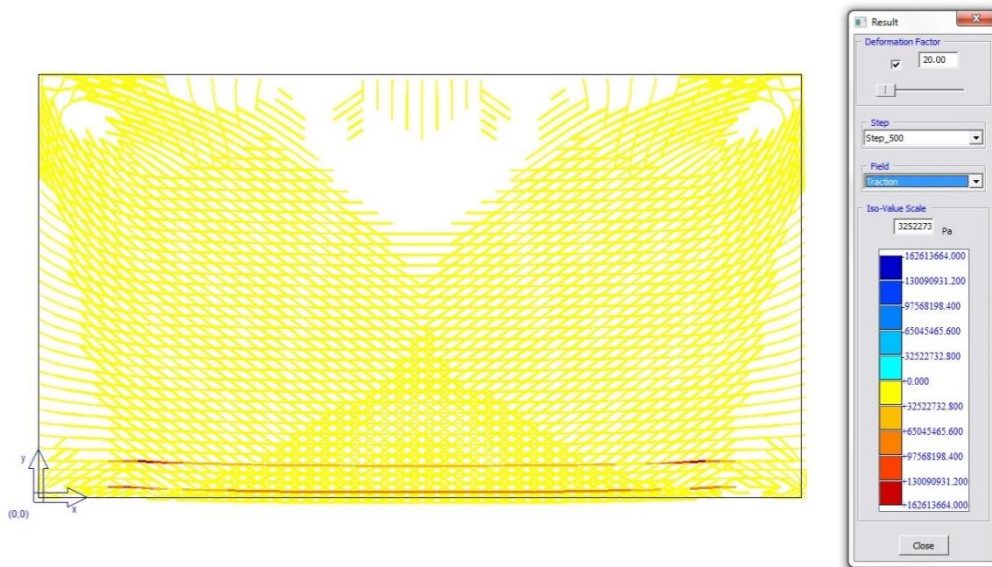


Figura 5.10 - Tensões de Tração viga A1.

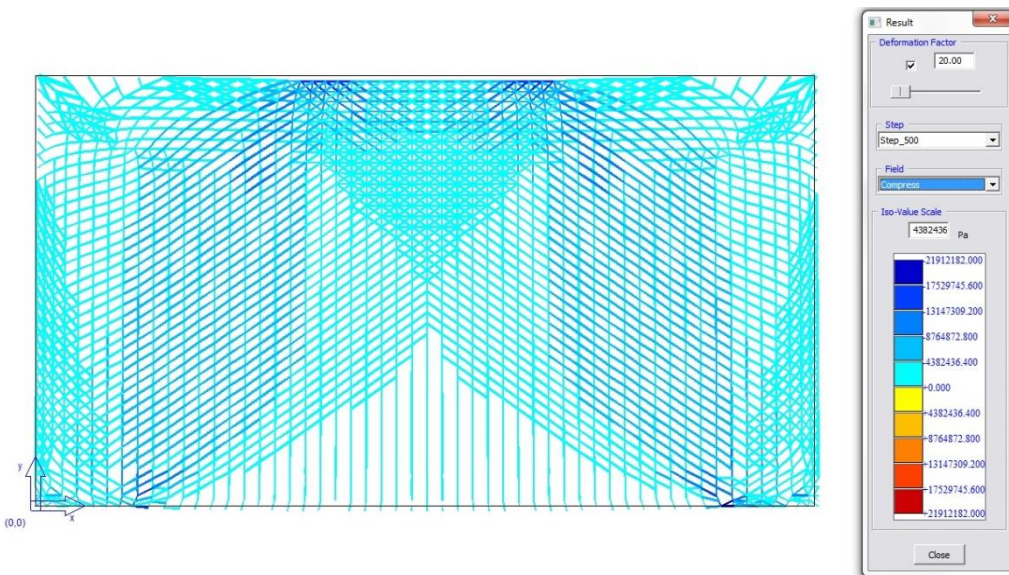


Figura 5.11 - Tensões de Compressão viga A1.

O segundo exemplo que será analisado foi utilizado por Macedo (2011), onde ele fez uma comparação de dados experimentais extraídos dos ensaios realizados por Filho (1995) apud Macedo (2011) no Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico de Lisboa, com o modelo de MBT implementado no programa comercial de Elementos Finitos Ansys 11.0. O exemplo consiste numa parede resistente engastada numa viga rígida de concreto armado, existindo uma abertura na zona de ligação, sujeita a um carregamento horizontal na extremidade superior esquerda conforme Figura 5.12.

A Figura 5.13 descreve as dimensões do exemplo. As Tabelas 5.4 e 5.5 são apresentadas as propriedades mecânicas dos materiais empregados.

Tabela 5.4 - Propriedades Mecânicas do Concreto (Macedo, 2011).

Resistência à Compressão (Mpa)	Resistência à Tração (Mpa)	Módulo de Elasticidade (GPa)	$G_F$ (N/m)
42	3	31	150

Tabela 5.5 - Propriedades Mecânicas do Aço (Macedo, 2011).

Módulo de Elasticidade (GPa)	Tensão de Escoamento $f_y$ (Mpa)
200	480

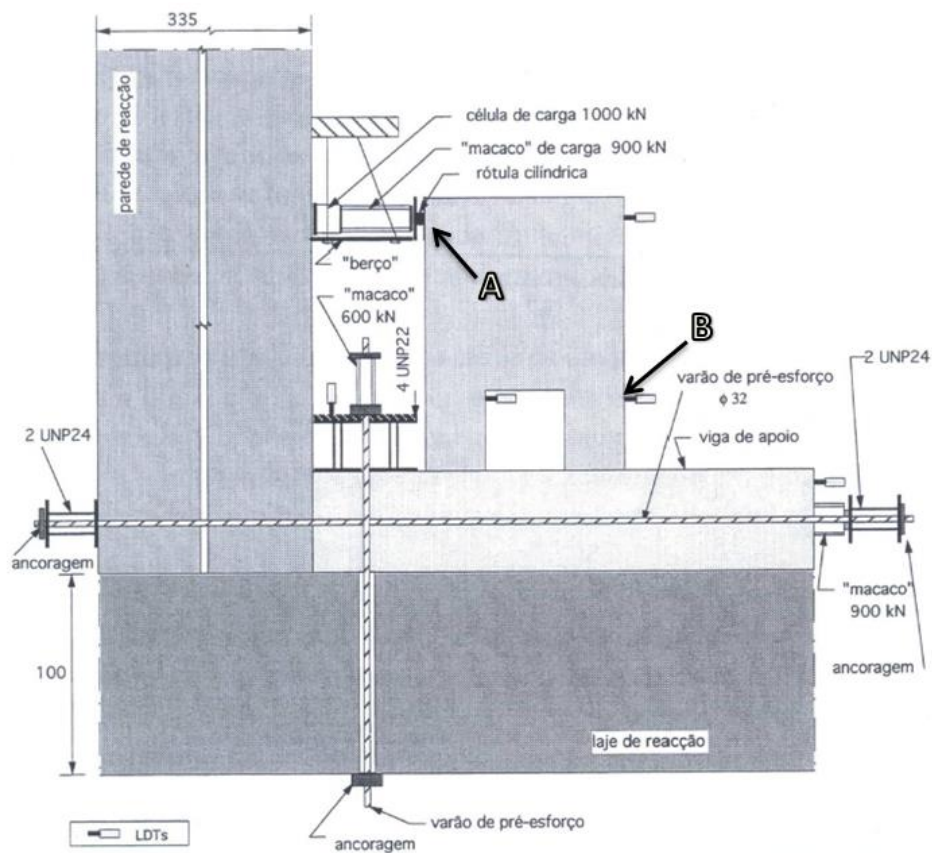


Figura 5.12- Esquema geral de ensaio Filho (1995) apud Macedo (2011).

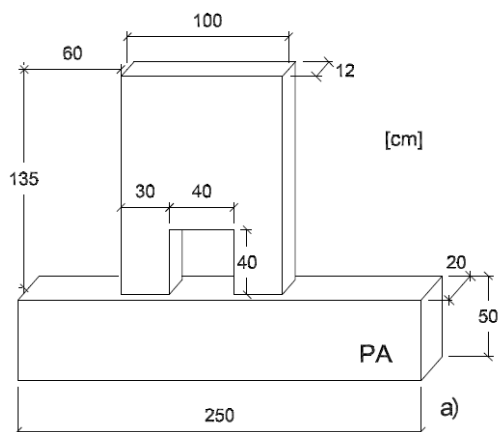


Figura 5.13 - Dimensões da Parede Filho (1995) apud Macedo (2011).

Inicialmente Filho (1995) apud Macedo (2011) fez o dimensionamento da parede através do MBT para resistir uma carga de 350KN e com as taxas de armaduras encontradas, fez diversos modelos experimentais com várias disposições de armadura, o intuito era validar o método para utilizar em situações onde as regiões D são dominantes na estrutura. Para esse trabalho utilizaremos o modelo MB 1ee com disposição da armadura conforme a Figura 5.14.

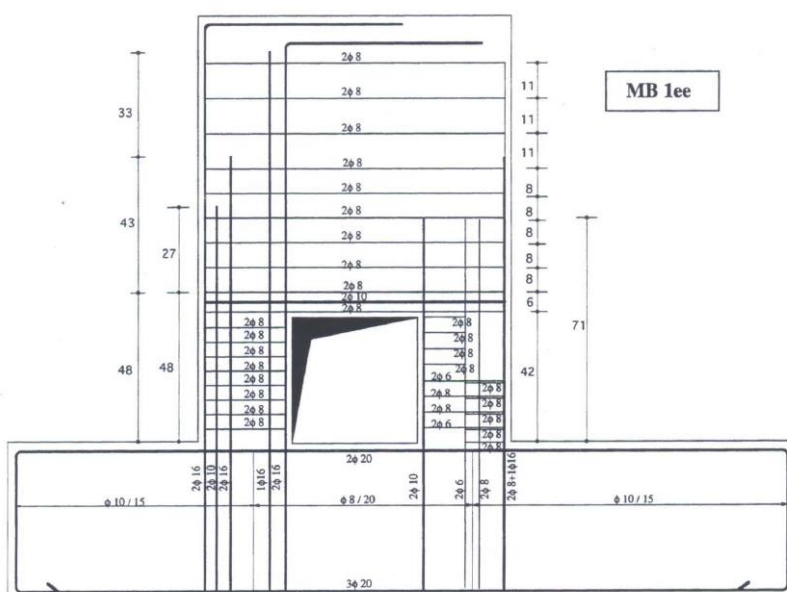


Figura 5.14 - Disposição da Armadura da Parede MB1ee Filho (1995) apud Macedo (2011).

Para esse exemplo foi executado um modelo com 1626 nós e 6778 elementos, onde se procurou modelar as armaduras principais conforme a Figura 5.14, outro aspecto relevante foi a modelagem da viga de apoio o intuito era representar a ancoragem da armadura da parede, para isso os elementos de concreto que compunham a viga tiveram sua rigidez ampliada a fim



de aproximar as características do modelo numérico com o experimental. A Figura 5.15 mostra a discretização do modelo onde as linhas da cor magenta representam as barras de aço empregadas na parede.

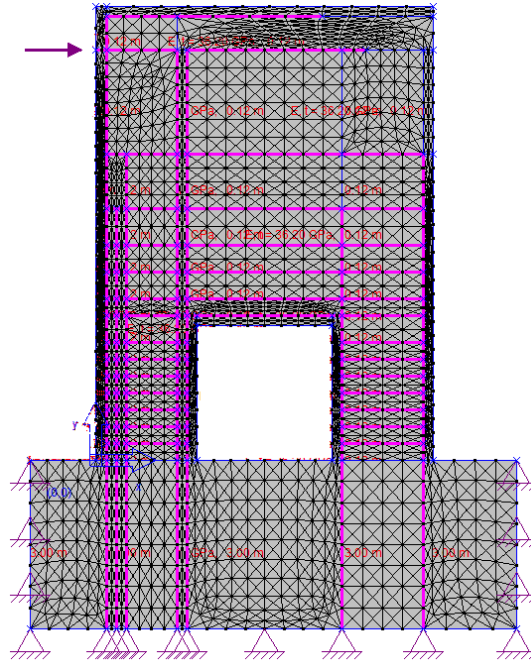


Figura 5.15 - Malha MMT do MB 1ee.

O modelo atingiu a carga última de 334KN, cerca de 95% da carga de projeto estimado por Filho (1995) apud Macedo (2011). No entanto, a carga última experimental foi de 413KN o que leva o MMT a um valor aproximado de 81% do real. Os valores abaixo do experimental obtidos pelo MMT se deve em parte pela simplificação da armadura. No entanto vale ressaltar a eficiência do método como ferramenta de projeto, pois fornece resultados próximos do real porém a favor da segurança. A Figura 5.16 apresenta um gráfico carga deslocamento comparando os resultado dos modelos, os deslocamentos analisados foram extraídos de dois pontos, onde houve instrumentação da parede, o ponto A e B conforme Figura 5.12.

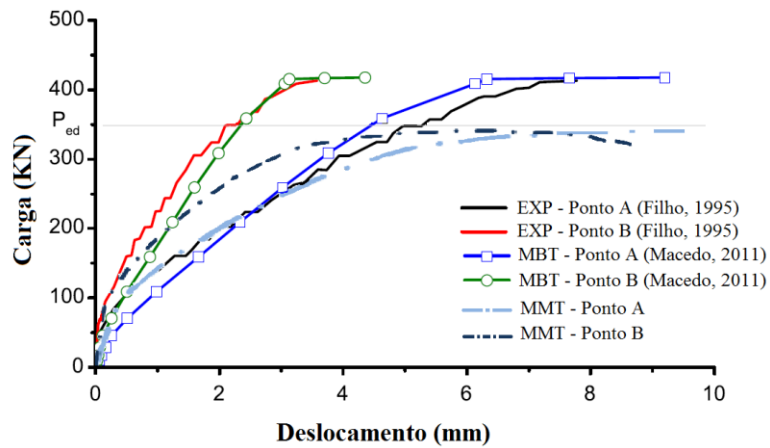


Figura 5.16 - Gráfico Carga x Deslocamento MB 1ee.

As Figuras 5.17, 5.18 e 5.19 mostram o pós processamento do modelo. Na Figura 5.17 são apresentados todas as tensões já nas Figuras 5.18 e 5.19 são mostrados apenas as barras tracionadas e comprimidas respectivamente. Fica claro o acúmulo de tensões nas barras que representam a armadura, onde em sua maioria entram no processo de escoamento.

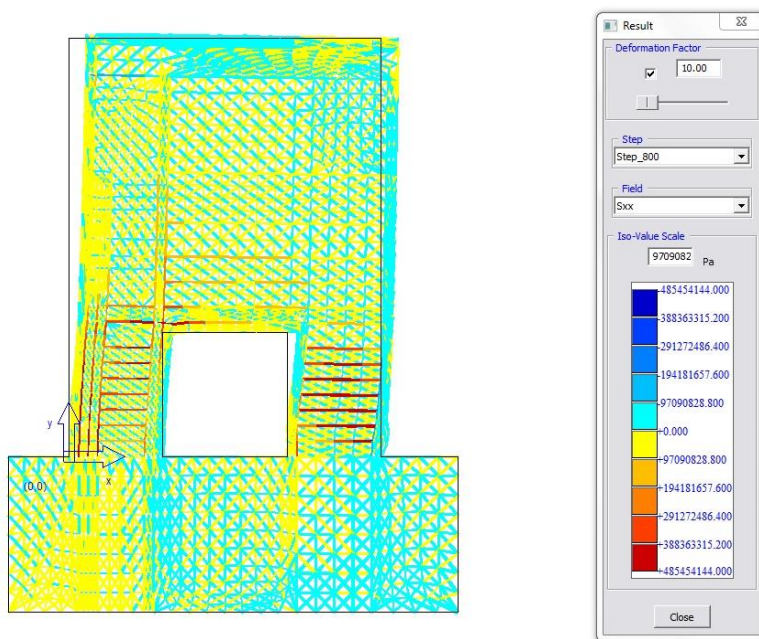


Figura 5.17 - Tensões MB 1ee.

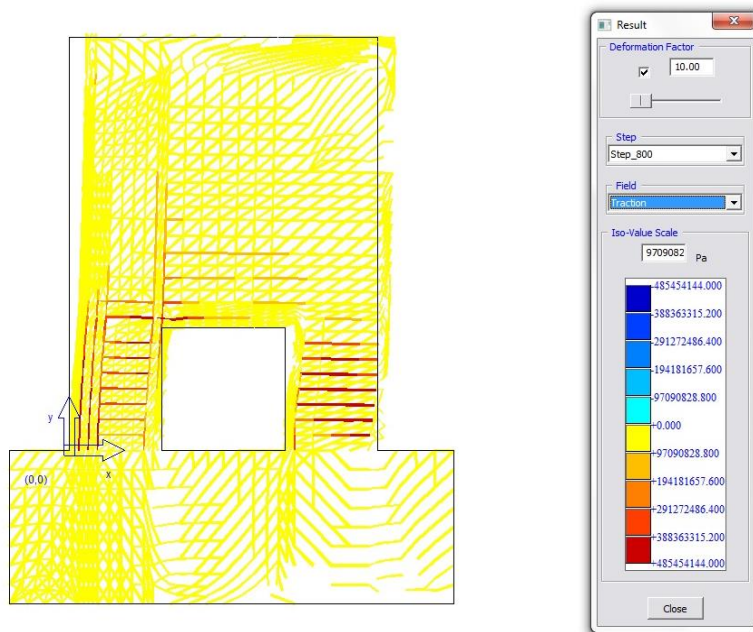


Figura 5.18 - Tensões de Tração MB 1ee.

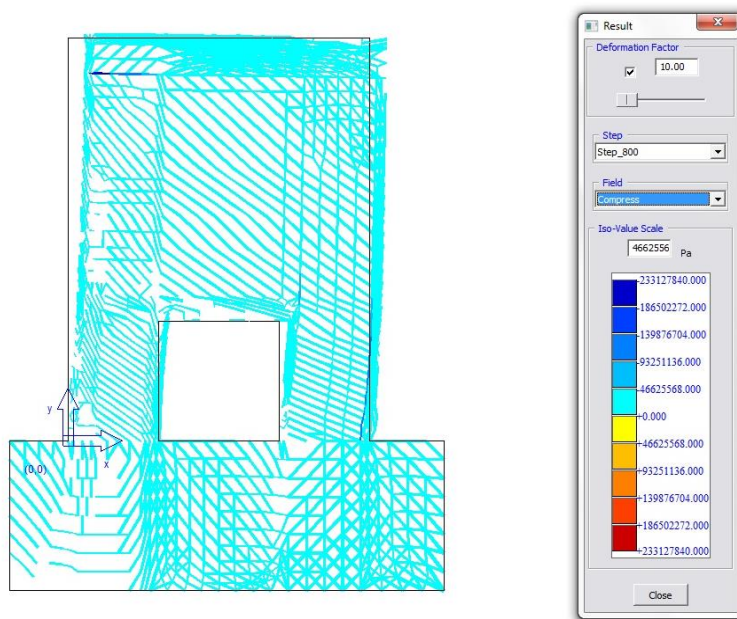


Figura 5.19 - Tensões de Compressão MB 1ee.

Nos dois exemplos mostrados, a análise conseguiu representar cargas e deslocamentos compatíveis com os resultados experimentais. Nos dois casos, os resultados de carga última foram ligeiramente menores que os resultados experimentais, mas a favor da segurança. Entretanto, a razão dessa diferença pode estar na simplificação no modelo numérico, pois foram modeladas apenas as armaduras principais das experimentais (armaduras secundárias ou de distribuição foram suprimidas).

### 5.3. EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO

Para o exemplo da parede MB 1ee será feito agora uma proposta de dimensionamento das armaduras utilizando o MMT. O intuito agora é apresentar o método como ferramenta de dimensionamento. A princípio o dimensionamento será feito para que a parede resista à carga última de 340KN, a questão dos deslocamentos vai ser abordada no decorrer do processo. As dimensões e as características mecânicas do exemplo continuam as mesmas.

O início do processo consiste na análise do modelo sem armadura, para isso foi executado a modelagem apenas do concreto na qual se gerou um modelo com 1288 nós e 4882 elementos, com essa análise pretende-se encontrar as regiões e áreas de aço que a parede necessita para suportar o carregamento proposto. A Figura 5.20 apresenta a discretização do modelo.

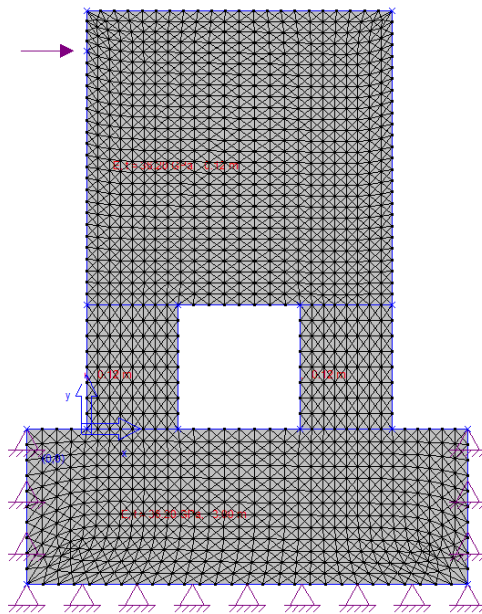


Figura 5.20 - Modelo parede MB 1ee sem armadura.

Após análise o modelo alcançou a carga última de 98.7 KN, valor bem abaixo do solicitado. As Figuras 5.21, 5.22 e 5.23 mostram o pós processamento do modelo. Na Figura 5.21 são apresentadas todas as tensões. Já nas Figuras 5.22 e 5.23 são mostrados apenas as barras tracionadas e comprimidas respectivamente. É verificado um grande acúmulo de tensões de tração na parte inferior da parede próximo da base, tanto no primeiro apoio como no segundo apoio, houve elementos esmagados no apoio direito devido ao excesso de tensões de compressão alcançando a resistência última do concreto.

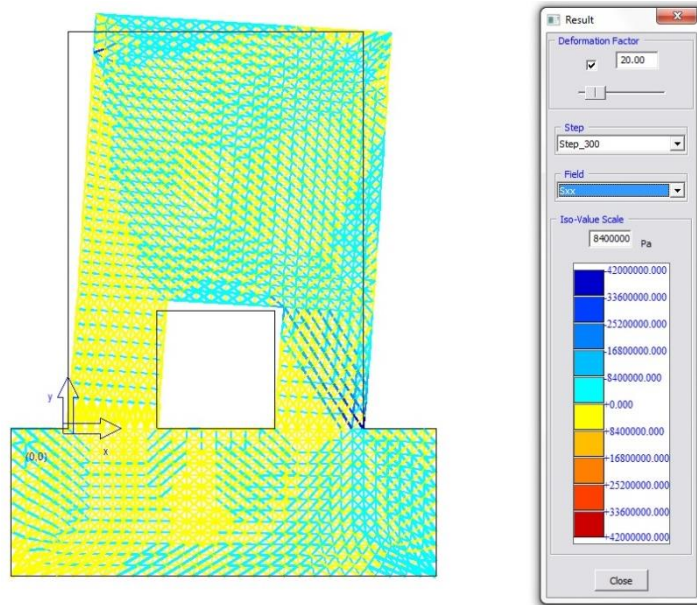


Figura 5.21 - Tensões MB 1ee sem armadura.

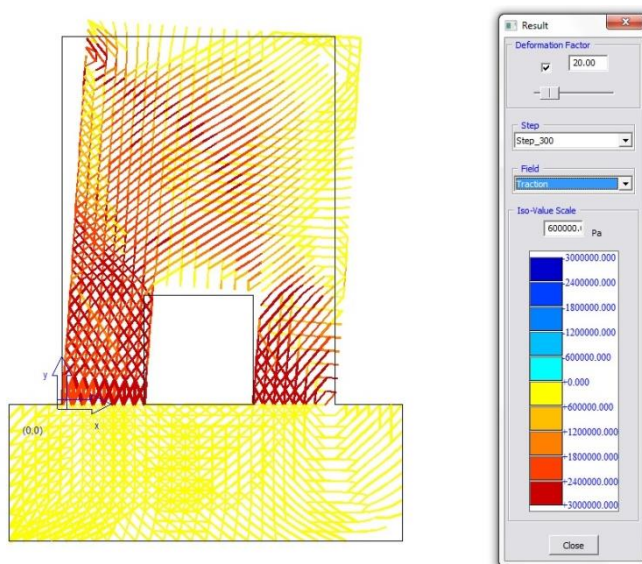


Figura 5.22 - Tensões de Tração MB 1ee sem armadura.

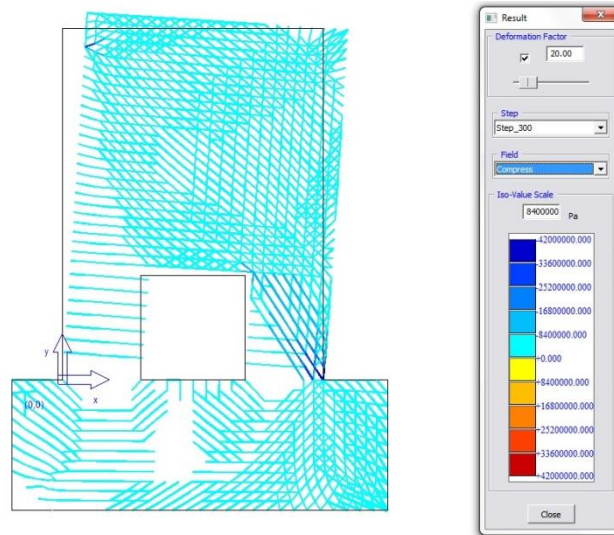


Figura 5.23 - Tensões de Compressão MB 1ee sem armadura.

Com esses resultados foi proposto uma armadura inicial baseado nos elementos de concreto que entraram em colapso, selecionando apenas os elementos verticais. A proposta agora é observar o comportamento das tensões com essa armadura. Ressaltando que o método visa uma concepção de otimização dos materiais, assim o dimensionamento será feito gradualmente de forma interativa. Selecionando as primeiras barras a entrarem em colapso, chega-se a uma solicitação de 81,567 KN de tração o que leva as seguintes equações:

$$A_s = \frac{f_t}{f_y} \quad (6.1)$$

$$A_s = \frac{81,567}{48} \cong 1.7 \text{ cm}^2 \quad (6.2)$$

Onde  $A_s$  é área de aço necessária,  $f_t$  força de tração solicitante e  $f_y$  tensão de escoamento do aço. Adotou-se um espaçamento de 5 cm para primeira base, que resulta em cinco linhas de barra de aço, ou seja, cada barra precisa ter no mínimo  $0,34 \text{ cm}^2$  de área transversal, logo foi adotado barras com diâmetro de 8mm o que resulta em uma área transversal de  $0,5 \text{ cm}^2$  para cada linha de armadura. Assim as barras foram dispostas nas regiões com maiores tensões de tração, conforme a Figura 5.24.

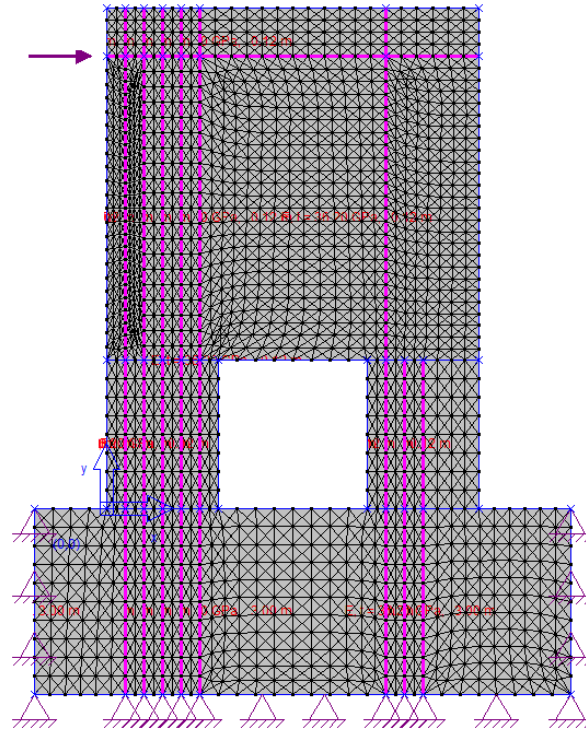


Figura 5.24 - Modelo parede MB 1ee com armadura 1.

Com essa armadura a parede obteve a carga última de 176.8 KN valor ainda abaixo do necessário. Lembrando que a taxa de aço empregado baseou-se somente nos elementos verticais de concreto, porém com emprego dessa armadura houve uma reestruturação dos carregamentos internos como mostrados nas Figuras 5.25, 5.26 e 5.27.

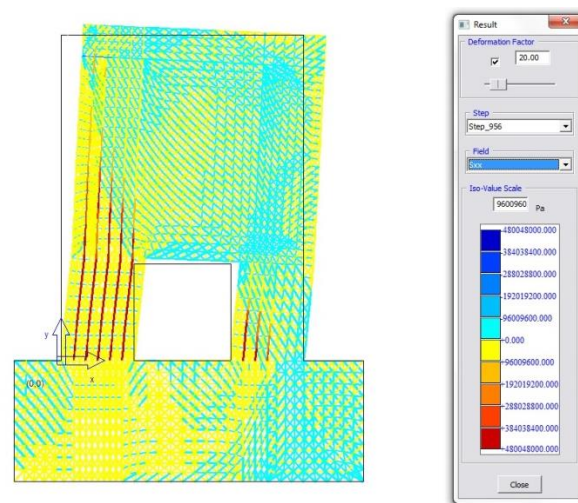


Figura 5.25 - Tensões MB 1ee armadura inicial.

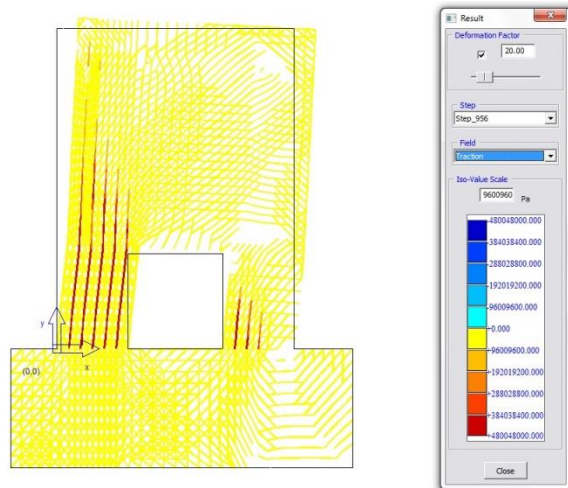


Figura 5.26 – Tensões de Tração MB 1e e armadura inicial.

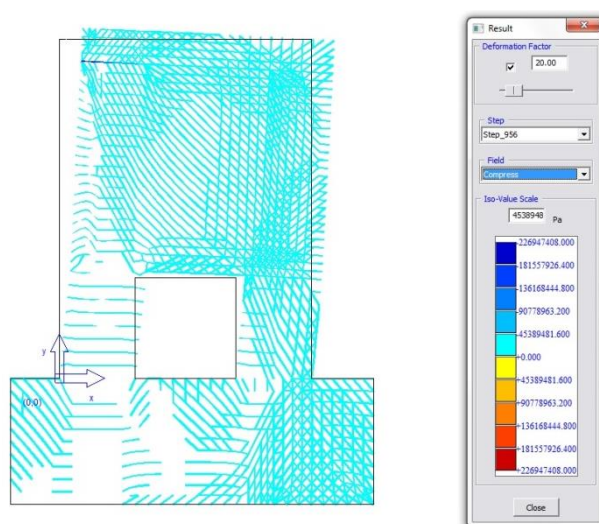


Figura 5.27 - Tensões de Compressão MB 1e e armadura inicial.

Com base na análise anterior foi proposta uma nova configuração de armadura onde cada linha de aço representa agora duas barras de 8mm resultando numa área transversal de  $1\text{cm}^2$  por linha, houve um diminuição no comprimento de 4 barras verticais no lado esquerdo da parede e o acréscimo de uma barra horizontal com área transversal de  $1\text{cm}^2$  e uma barra na diagonal representado duas barras de 16mm o que resulta numa área transversal de  $4\text{cm}^2$ , conforme a Figura 5.28.



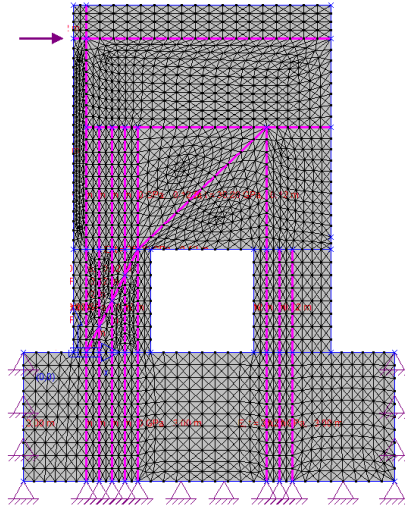


Figura 5.28 - Modelo parede MB 1e armadura 2.

Essa nova configuração alcançou uma carga última de 306.6KN, valor próximo do exigido. Com a configuração anterior foi proposto outra configuração de armadura, agora foi adicionada outra barra diagonal com 4cm<sup>2</sup> de área transversal e a primeira barra vertical ficou também com 4cm<sup>2</sup> área transversal. A Figura 5.29 ilustra esse novo arranjo.

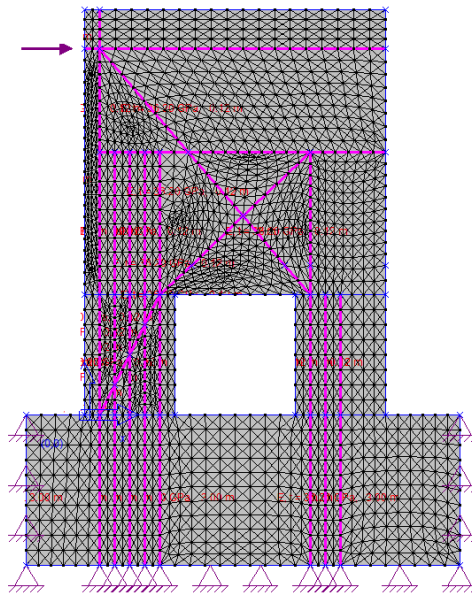


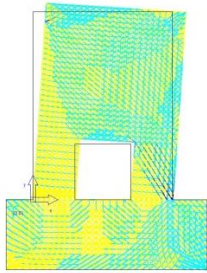
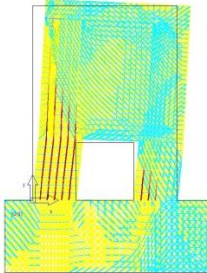
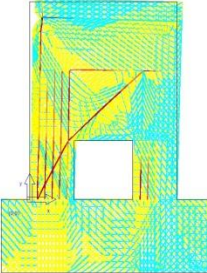
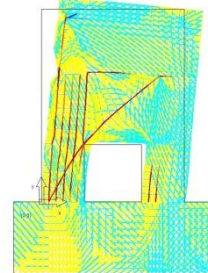
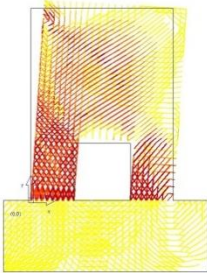
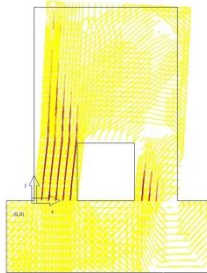
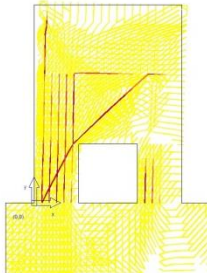
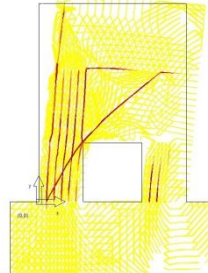
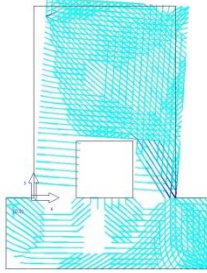
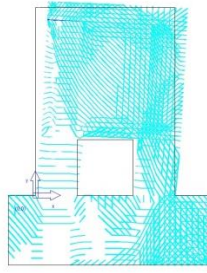
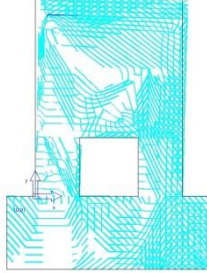
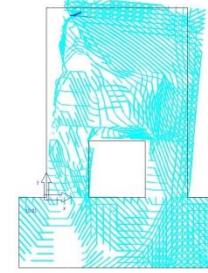
Figura 5.29 - Modelo parede MB 1e armadura 3.

Com esse arranjo a parede alcançou a carga última de 341KN, valor muito próximo do objetivo inicial de 340KN. O processo poderia ser otimizado caso houvesse algum tipo de algoritmo de otimização como algoritmos genéticos, redes neurais entre outros. Outro fator importante é que o arranjo de armadura proposto não se preocupou com questões executivas, salientado que objetivo desse trabalho é somente a demonstração do método.

No entanto com esse exemplo fica claro a capacidade do MMT em fornecer respostas conforme o arranjo de armadura aplicado, na Tabela 5.6 traz as imagens do pós processamento dos modelos utilizados no dimensionamento da parede MB 1e. As imagens

revelam como a presença das barras de aço afetam na distribuição de tensões dentro da peça, evidenciando também a presença de regiões D por toda parede, ou seja, a distribuição de tensões é totalmente irregular. O uso do MMT para o dimensionamento de peças cujo a presença de regiões D é dominante se mostrou bastante satisfatório, pois oferece uma ferramenta interativa, a qual se pode observar os efeitos de diferentes arranjos de armaduras no modelo.

Tabela 5.6 - Tabela com pós processamento dos modelos MB 1ee.

MB 1ee sem armadura	MB 1ee armadura1	MB 1ee armadura2	MB 1ee armadura3	
				Tensões
				Tensões de tração
				Tensões de compressão

A Figura 5.30 traz um gráfico de carga versus deslocamento no ponto de aplicação da força, comparando os diversos modelos utilizados no desenvolvimento do dimensionamento da parede MB 1ee, como relatado anteriormente não se teve uma maior atenção com os deslocamentos sofridos pela peça, porém com uso do gráfico o projetista pode decidir o que fazer diante de exigências de projeto ou normativas.

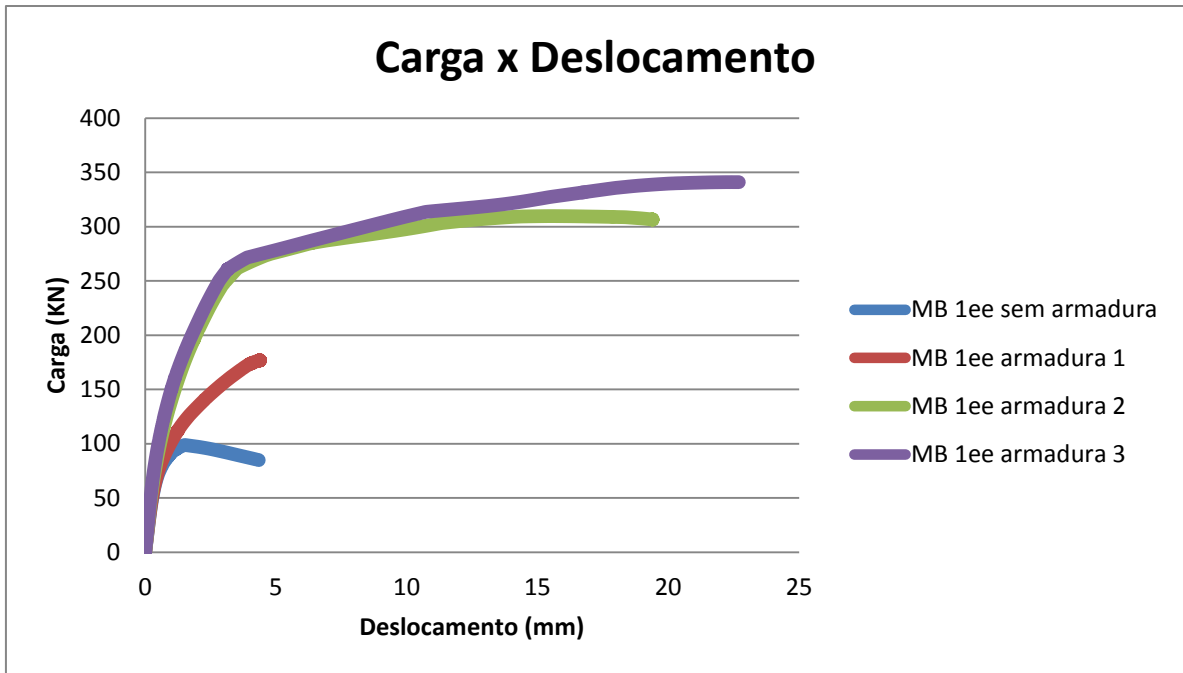


Figura 5.30 - Gráfico Carga x Deslocamento, modelos de dimensionamento MB 1ee.

Esse trabalho não levou em consideração os efeitos reológicos do concreto como retração e fluência, para tal é necessário aplicação de relações constitutivas que considerem também os efeitos do tempo.

## 6. CONCLUSÃO

Esse trabalho apresentou simulações numéricas de estruturas de concreto armado com uso do modelo de Micro Treliças, onde tanto o concreto, como o aço são representados por barras de treliças. As malhas de quadrilaterais são geradas por um algoritmo de geração de malha com uso de templates para domínios de 4, 3 e 2 curvas de contorno. O algoritmo foi incorporado em um modelador gráfico interativo, chamado de MTA (Micro-Truss Analyzer). Também o programa de análise Abaqus foi incorporado ao programa. O MTA permite geração de geometrias complexa e com algoritmo de geração de malha, a malha das treliças são geradas seguindo os elementos. Adicionalmente, as análise de tensões com não-linearidade geométrica e do material são possíveis com o programa Abaqus. Os resultados numéricos apresentados conseguiram reproduzir os resultados experimentais com cerca de 15% de diferença. Essa diferença é atribuída a simplificação do modelo numérico.

Finalmente, com uso do MTA é possível dimensionar estruturas não convencionais de concreto armado seguindo os seguintes passos:

1. Um modelo somente com o concreto deve ser gerado;
2. Faz-se a análise não-linear geométrica e do material de elementos finitos com os elementos de treliça;
3. Obtém-se os resultados onde é possível visualizar as barras sob tração e compressão;
4. Barras de aço são adicionadas no modelo nas regiões de barras sob tração;
5. Volte ao passo (2) ou termine o processo quando o calculista achar que a estrutura esteja suficientemente armada.

### **Sugestões para trabalhos futuros:**

- A extensão natural dos modelos numéricos bidimensionais com Micro Treliças são modelos tridimensionais. Isso envolve a formulação em três dimensões de padrões de distribuição de treliças com a finalidade de representar adequadamente o contínuo 3d com discretização em elementos de treliça. Adicionalmente, será necessário ter uma interface de software similar ao MTA;

- Formulação para considerar a aderência entre o concreto e aço. Pode-se, por exemplo, discretizar os elementos de concreto independente da discretização das barras de aço, entretanto, a interação entre os dois materiais deve seguir uma lei de aderência.
- Preparar o MTA para que ele se torne realmente um software numérico para utilização em projetos e dimensionamento de estruturas não convencionais de concreto armado. Atualmente o MTA é um software somente para fins de pesquisa.
- Usar o software MTA em outras linhas de pesquisa de dimensionamento de estruturas de concreto armado. Por exemplo, adicionar análise de confiabilidade, otimização das estruturas como algoritmos genéticos e redes neurais.
- Melhorar as relações para o cálculo das áreas transversais das barras das Micro Trelças irregulares afim de respostas melhores para as deformações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ali, M. A.; White, R. N. Automatic Generation of Truss Model for Optimal Design of Reinforced Concrete Structures. *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, v. 98, n. No. 4, p. 431-442, July-Agust 2001.

Fernandes, H. H. F. Aplicação de um Modelo de Dano Isotrópico Escalar na Análise de Vigas Parede de Concreto Armado (Dissertação). 2010. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

Guimarães, G. B. Análise experimental de vigas-parede de concreto armado enrijecidas por pilares laterais. 1980. 133 p. (Tese (Mestrado)). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Hrennikoff, A. Solutions of problems of elasticity by the framework method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 12, p. 169-175, 1941.

Ingraffea, A. R. Computational Fracture Mechanics. In: (Ed.). *Encyclopedia of Computational Mechanics*: John Wiley and Sons, 2004.

Kiouis, P.; Papadopoulos, P.; Xenidis, H. Truss Modeling of Concrete Columns in Compression. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 136, n. 8, 2010.

Kwak, H.-G.; Filippou, F. C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, USA, p.120p. 1990

Lee, J., G.L. Fenves. Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 124, n. no. 8, p. 892-900, 1998.

Lubliner, J. et al. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, v. 25, n. 3, p. 299-326, 1989.

Macedo, R. Optimização Estrutural na Análise Não Linear dos Modelos de Escoras e Tirantes. 2011. (Dissertação de Mestrado). Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Miranda, A. C. d. O.; Martha, L. F. Quadrilateral Mesh Generation Using Hierarchical Templates. *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable 2012*.

Miranda, A. C. d. O. et al. Stress intensity factor predictions: Comparison and round-off error. *Computational Materials Science*, v. 53, n. 1, p. 354-358, 2012.

Morsch, E. Der eisenbetonbau, seine anwendung und theorie. (Reinforced Concrete Theory and Application), v. 1 ed., p. 118p., 1902.

Nagarajan, P.; Jayadeep, U. B.; Pillai, T. M. M. Application of micro truss and strut and tie model for analysis and design of reinforced concrete structural elements. Songklanakarin Journal of Science and Technology, v. 31, n. 6, p. 647-653, 2009.

Nepomuceno, C. L. Análise de Vigas-Parede aplicando Modelo de Biela e Tirante e Microtreliça. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-005A/12, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 160p, 2012.

Ritter, W. Die bauweise hennebique (The hennebique construction method). Schweizerische Bauzeitung, v. v.17, 1899.

Salem, H. M. The Micro Truss Model: An Innovative Rational Design Approach for Reinforced Concrete. Journal of Advanced Concrete Technology, v. 2, n. 1, p. 77-87, 2004.

Schlaich, J.; Schafer, K.; Jennewin, M. Toward a consistent design of structural concrete. Journal of the Prestressed Concrete Institute, v. 32, n. n.3, p. 74-150, 1987.

Wang, T. K. Estudo de propagação de fissuras arbitrárias no concreto utilizando o modelo reticulado da mesoestrutura. 2002. 163p (Tese (Doutorado)). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

## APENDICE A – MODELAGEM NO MTA

A Figura 0.1 apresenta as principais ferramentas do programa MTA.

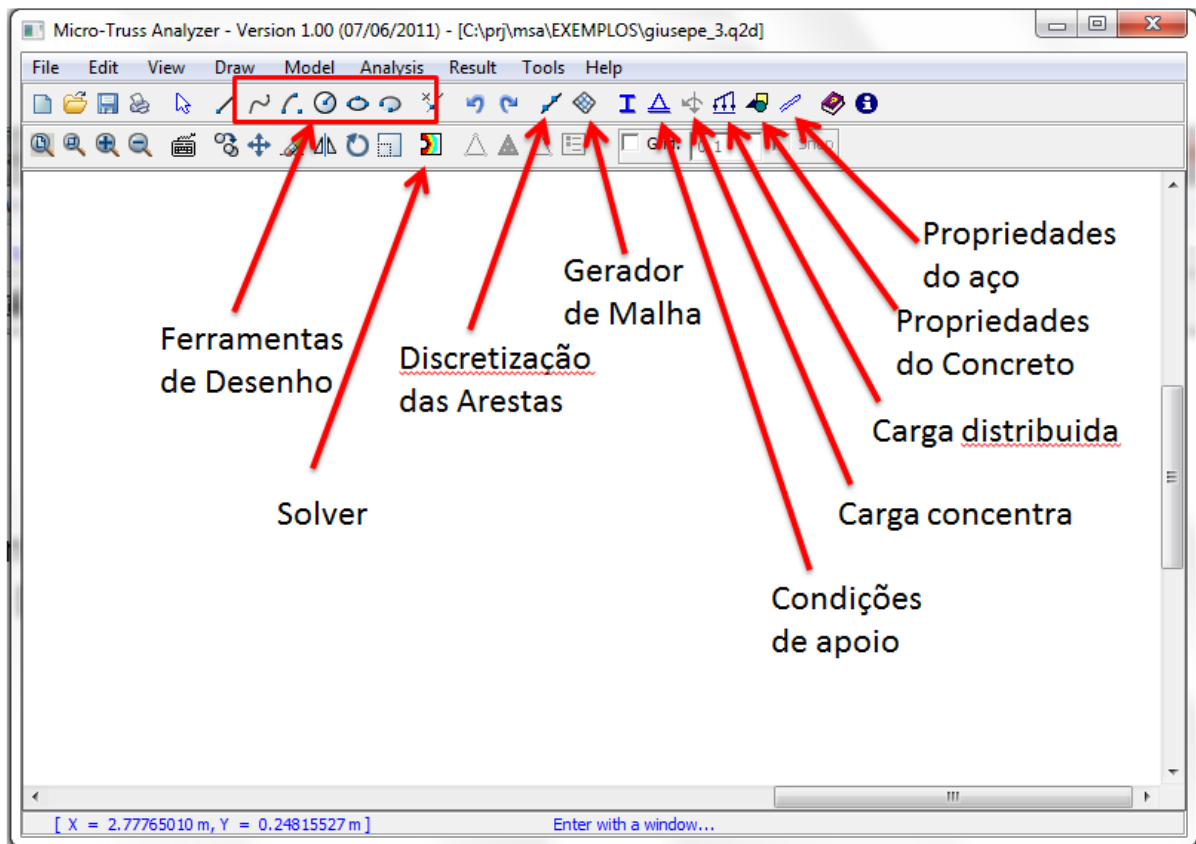


Figura 0.1 – Principais Ferramentas do programa MTA

A seguir será mostrado um exemplo da sequencia de modelagem no MTA, o processo é realizado da seguinte forma:

- Execução da geometria do modelo (Figura 0.2a);
- Discretização das arestas da geometria do modelo (Figura 0.2b);
- Aplicação das condições de contorno, apoios e carregamentos (Figura 0.2c e 0.2d);
- Aplicação das propriedades do Concreto e do Aço (Figura 0.2e e 0.2d);
- Geração da malha de micro treliças (Figura 0.2g);
- Solver (Figura 0.2h).



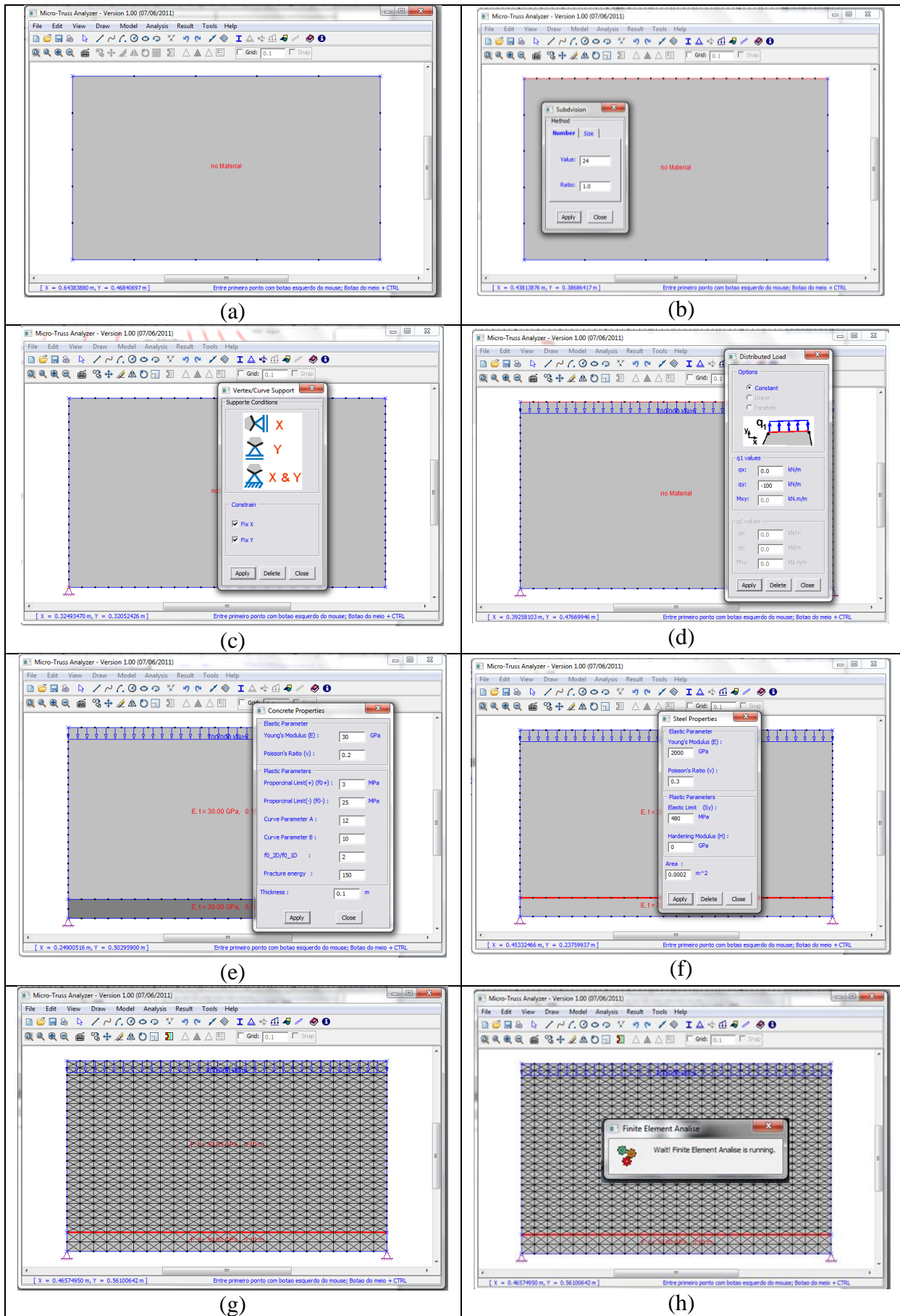


Figura 0.2 - Sequencia do processo de modelagem no MTA.

## **APENDICE B**



## MODELO DE MICRO TRELIÇAS PARA DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

**Agno Alves Vieira**

**Antonio Carlos de O. Miranda**

agnovieira@yahoo.com.br

acmiranda@unb.br

Universidade de Brasília – UnB, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasília, Brasil

**Resumo.** Neste trabalho apresenta simulações numéricas de estruturas de concreto armado pelo modelo de micro treliça. Esse modelo é uma evolução do método das bielas e tirantes, o qual tem por finalidade a discretização do concreto por meio de barras de treliça, as quais mostram o comportamento das forças de compressão e tração no interior da peça. Não se considera a aderência entre o concreto e a armadura. Considera-se somente o acoplamento nodal entre os elementos de treliça plana que discretizam o concreto e as armaduras. Através do software comercial de elementos finitos Abaqus são inseridas modelos constitutivos que mostram com uma grande precisão o desenvolvimento elastoplástico do concreto e do aço. Adicionalmente, é possível determinar os caminhos das fissuras como a carga última da peça. Também é possível estimar e localizar a armadura no concreto de tal forma que essa tenha a melhor eficiência possível, aproveitando ao máximo as propriedades do concreto e do aço. Pesquisas de literatura apresentam modelos discretizados de concreto apenas em geometrias que permitem gerar as micro-treliças através de grids regulares. Nesse trabalho, um algoritmo de geração de malha de elementos finitos quadrilaterais é usado, e posteriormente, essa malha é modificada para elementos de treliças com a finalidade de representar adequadamente o estado de tensões do meio contínuo. Por fim são comparados os resultados obtidos pelo modelo de micro treliças com resultados experimentais.

**Palavras Chaves:** micro treliças, concreto armado, carga última.

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho faz um desenvolvimento do modelo de micro treliças (MMT) através do método dos elementos finitos (MEF), para análise de peças de concreto armado modeladas no estado plano de tensões. Com essa ferramenta são modelados alguns exemplos e extraídos, os modos de rupturas, propagação de fissuras e a taxa de aço necessária.

O Modelo de Micro Treliça (MMT) pode ser considerado como uma generalização do Modelo de Bielas e Tirantes (MBT) e pode ser utilizado para desenvolver modelos otimizados de MBT, além disso, pode ser usado para prever respostas não lineares de elementos estruturais de concreto armado (Nagarajan, Jayadeep et al. 2009).

Segundo pesquisas bibliográficas o primeiro modelo a utilizar elementos reticulados para fazer tais simulações foi o modelo Framework de Hrennikoff (1941), que propôs a discretização de um contínuo em um reticulado de treliça. Entretanto, para se obter uma solução exata de elasticidade, as barras devem ser muito pequenas, o que exige um esforço computacional enorme e havia tornado essa abordagem inadequada.

A discretização em microtreliça aplicada ao modelo de biela e tirante utilizada nos trabalhos de Salem (2004) baseia-se nos trabalhos de Hrennikoff (1941). Niwa, Choi et al. (1995) já havia aplicado o modelo reticulado para explicar o mecanismo resistente do concreto armado ao cisalhamento. No entanto, sob uma abordagem macroscópica, na qual a estrutura é modelada em elementos de concreto sujeitos a tensões normais de tração e compressão, um elemento de arco e a armadura que pode ser modelada como barras verticais ou horizontais.

Por outro lado, o modelo proposto por Salem (2004) possibilita simular o processo de fraturamento no concreto e pode ser considerado uma generalização do modelo de biela e tirante, uma vez que pode capturar as principais bielas e tirantes durante a análise, cuja finalidade é ser útil tanto ao dimensionamento quanto a análise do comportamento não-linear da estrutura.

Nagarajan, Jayadeep et al. (2009) deram continuidade ao estudo das microtreliças e publicaram um artigo em que exemplificaram a aplicação do método a vigas-parede, utilizando, no entanto, um programa comercial para realizar as análises. Nagarajan, Jayadeep et al. (2009) trabalharam o tema de forma semelhante a Salem, porém aplicando a microtreliça também para simular o fraturamento no concreto. A cada passo de carga, os elementos nos quais a deformação excede a deformação última são desativados (rigidez é anulada), obtendo-se o padrão de fissuração do elemento.

Ainda nesta linha de pesquisa, Nagarajan, Jayadeep et al. (2010) apresentaram um modelo de microtreliça modificado onde o elemento de concreto armado é substituído por um elemento de microtreliça e uma estrutura aleatória de distribuição dos agregados é desenvolvida sobre a estrutura de microtreliça.

A Figura 1 mostra um padrão de elementos de treliça empregado nos trabalhos sobre microtreliças descritos anteriormente. A forma padrão de elementos de treliça é bastante restrita para formas regulares de modelos, não permitindo formas com geometrias mais complexas que pode ocorrer em estruturas reais. Nepomuceno (2012) propôs o uso de geração de malha automática de triângulos para a geração de elementos de treliças, empregando um algoritmo 2D para domínios bidimensionais de forma arbitrária (Miranda, Cavalcante-Neto et al. 1999; Miranda, Meggiolaro et al. 2003). Apesar de alguns resultados parecerem promissores, em modelos mais simples os resultados não consegue representar corretamente as deformações devido ao efeito do Poisson.

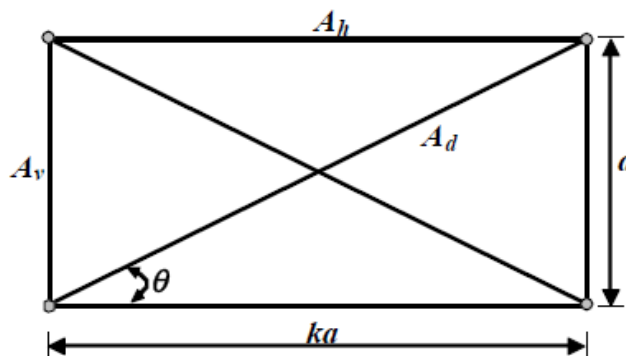


Figura 1 – Elemento de treliça para tensões planas (Nagarajan, Jayadeep et al. 2009).

Esse trabalho tem como finalidade de continuar o trabalho de Neponuceno. Entretanto, a geração de malha é modificada de forma a usar o elemento de treliça da Figura 1 com um novo algoritmo de geração de malha (Miranda and Martha 2013). Esse novo algoritmo permite gerar malhas em domínios com 4, 3 e 2 curvas, e com auxílio de programa **Micro-Truss Analyser (MTA)** permite gerar malhas em geometrias arbitrárias. O **MTA** foi adaptado do programa **Quebra2D** usado para simulação de propagação de trincas (Miranda, Meggiolaro et al. 2002; Miranda, Meggiolaro et al. 2003).

## 2 GERAÇÃO DE MALHA COM USO DE TEMPLATES

Essa seção resume um algoritmo para geração de malhas quadrilaterais de boa qualidade de forma hierárquica e com uso de templates. Essa abordagem é ideal para a transição malhas em subdomínios no contexto de modelos 2D. A geração de malhas estruturas, usualmente usadas, tem a limitação do número de segmentos de contorno de curva de subdomínio. Para subdomínios quadrilaterais, o número de segmentos em curvas de contorno opostas deve ser igual, e, para os subdomínios triangulares, as três curvas de fronteira devem ter o mesmo número de segmentos. Neste ambiente é difícil de implementar refinamento local de malha. A proposta de modelo hierárquico baseado em malha produz malhas de transição sem qualquer restrição sobre o número de segmentos de fronteira. O único requisito é que o número total de segmentos tem de ser par, que é regra geral, por uma malha quadrilateral

Os dados de entrada para o algoritmo de geração de malha quadrilateral proposto em um subdomínio com representação discreta de curvas de contorno. Essa forma discreta permite representar geometrias com fronteira genéricas. Essa forma de representação é bastante simples, e pode ser implementado em qualquer linguagem de programação como um vector de números reais, que é uma lista sequencial de pontos de contorno (ou nós) e o número de segmentos (ou bordas) em cada curva limite:  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ . Um subdomínio pode ser composto de quatro, três ou duas curvas na fronteira que não se interceptam.

Nesse trabalho são considerados seis templates de alto nível para os subdomínios, que depende do número de curvas de contorno e o número de segmentos em cada curva, três modelos têm quatro curvas, dois tem três curvas, e um possui duas curvas. Na Figura 2 os templates T1 e T2 consistem de dois modelos com quatro curvas, os T3 e T4 com três curvas e T5 um template com duas curvas. As letras A, B, C e D na Figura 1 correspondem ao número de arestas em cada curva limite. Note-se que o modelo T0 não se decompõe em outros subdomínios, é utilizado apenas para gerar os elementos quadrilaterais.

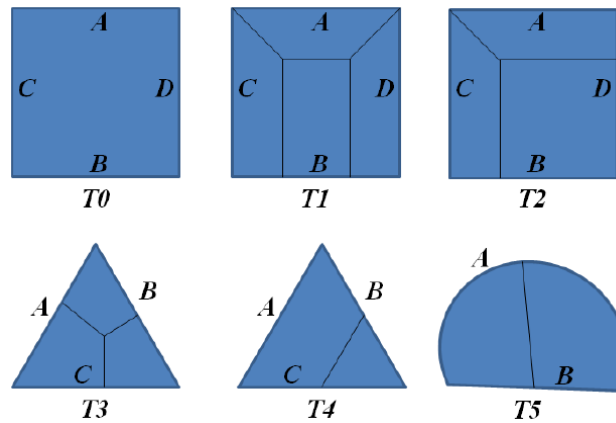


Figura 2 – Tipos dos subdomínios (Miranda and Martha 2013).

A seleção prévia (primeiro nível) de um dos moldes da Figura 2 depende do número de arestas de cada curva. Se o número de arestas em lados opostos é igual, então o template T0 é selecionado e elementos quadrilaterais são gerados através do método de mapeamento convencional. Se não for possível à utilização do template T0 no primeiro nível, um dos outros cinco templates é selecionado. Cada um destes templates decompõe o primeiro nível em subdomínios (segundo nível), e um novo template é selecionado para cada região. Este processo é repetido para cada região de forma recursiva até que a sub-região pode ser malhada utilizando o template T0. Devido a este processo recursivo, a geração de malha de quadrilateral proposta pode ser entendida como uma decomposição hierárquica. O sistema inteiro foi concebido de tal forma que a profundidade hierárquica de recurção, ou seja, o número de níveis seja no máximo três. Por exemplo, a Figura 2 mostra um subdomínio composto por três curvas de contorno. No primeiro nível, o template T3 é selecionado. No segundo nível, três templates diferentes são selecionados para cada sub-região (T2, T0 e T1). No terceiro e último nível, o template T0 é selecionado para todas as sub-regiões, que são as folhas na decomposição hierárquica.

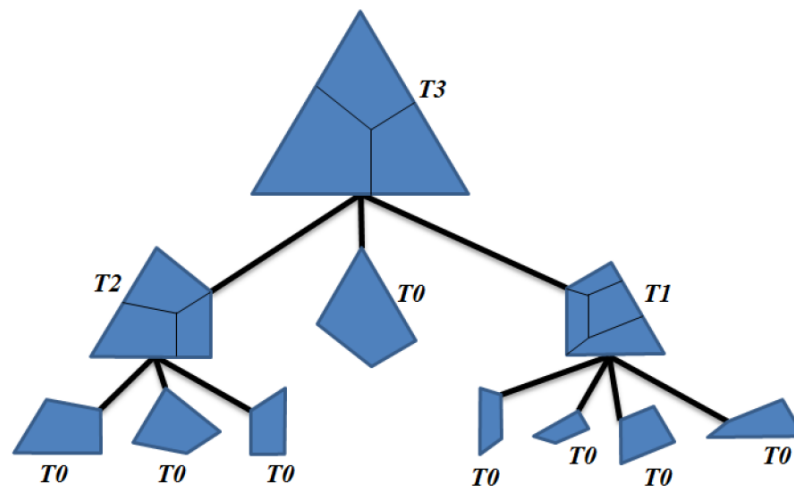


Figura 3 - Esquema de decomposição hierárquica para decomposição do domínio em regiões mapeáveis (Miranda and Martha 2013).

A Figura 4 mostra exemplos de geração de malhas de quadrilateral utilizando o algoritmo descrito. As linhas internas mais espessas representam a decomposição do domínio no nível 0. Observar que para uma mesma geometria é possível gerar diferentes configurações de malhas apenas mudando o número de arestas nas curvas de contorno. Observar também que diferentes templates são usados para nos vários níveis até atingir o template T0, onde o algoritmo de mapeamento é usado para gerar malha.

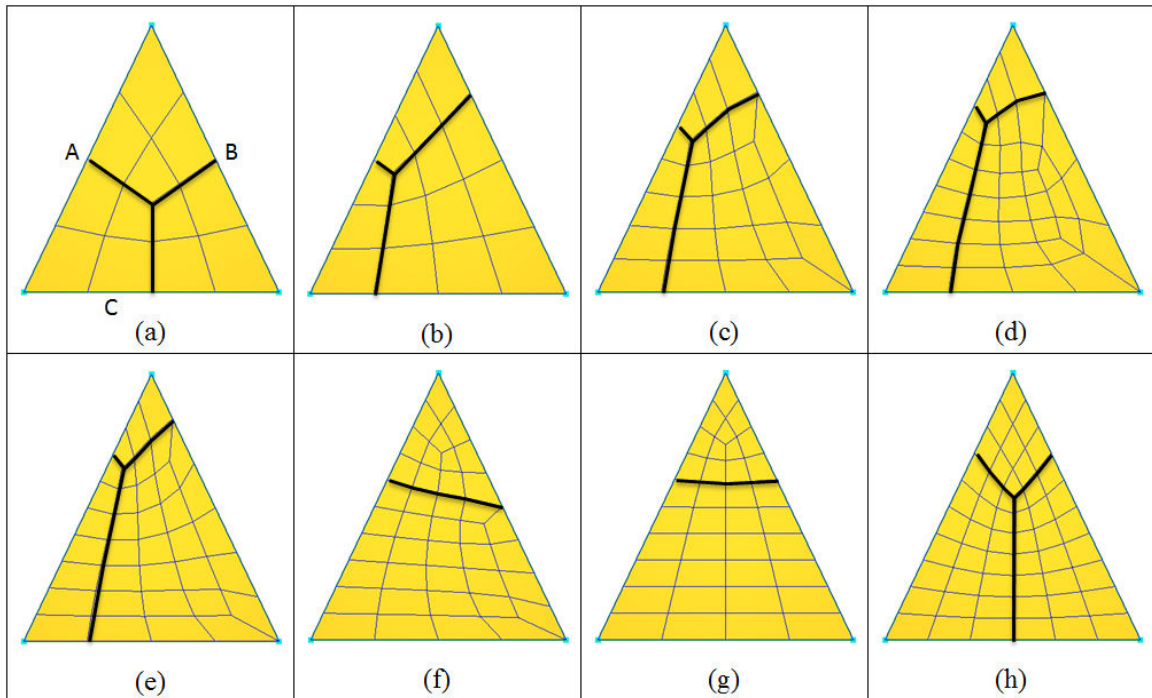


Figura 4 – Exemplo de decomposição de domínio e geração de malha (Miranda and Martha 2013).

### 3 MICRO TRUSS ANALIZER (MTA)

O programa Micro-Truss Analyzer (MTA) teve sua origem no programa Quebra2D, esse é um programa gráfico interativo para simulação de processos de fratura em duas dimensões com base numérica do Método dos Elementos Finitos (MEF), foi desenvolvido em linguagem C e utiliza bibliotecas gráficas como Iup, Lua e CD, desenvolvidas pela TecGraf-PUC-Rio.

A Figura 5 mostra uma estrutura simplificada do programa Quebra2D. Ele é composto por diversos módulos controlados por um “Manager”, que comunica com o módulo API que faz interface gráfica do programa. Estes módulos são: o “Mesh Structure”, que armazena a malha e os resultados, o “Geometric Structure”, que armazena a geometria da trinca e da peça, o “Mesh Structure” responsável pela geração automática do MEF, a “Rosette Shapes” responsáveis por gerar os elementos finitos especiais em torno da ponta da trinca, os “Attributes”, onde o modelo de atributos, tais como restrições nodais, cargas e propriedades dos materiais são armazenados, o “Solve”, módulo responsável pela análise numérica, o “SIF Calculator”, que calcula o KI e KII os fatores de intensidade de tensão utilizando os resultados do MEF, o “Crack Growth Direction”, que calcula o ângulo de incremento da trinca em cada etapa de cálculo e, finalmente, o “Jobs”, que é o módulo responsável por determinar o tipo de propagação de fissuras e a análise adaptativa da malha (Miranda, Meggiolaro et al. 2012).

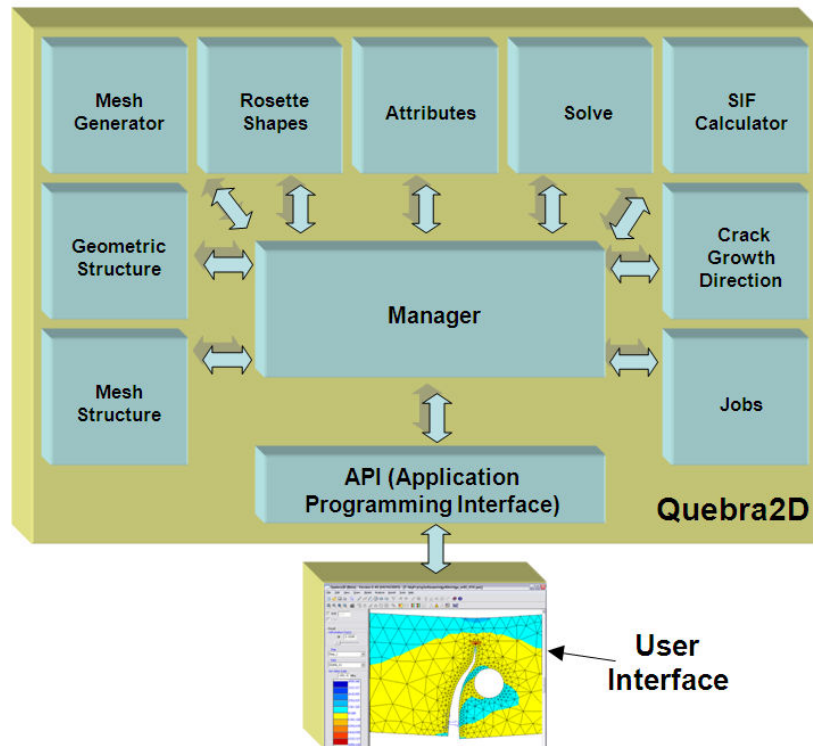


Figura 5 – Estrutura interna do Quebra2d (Miranda, Meggiolaro et al. 2012).

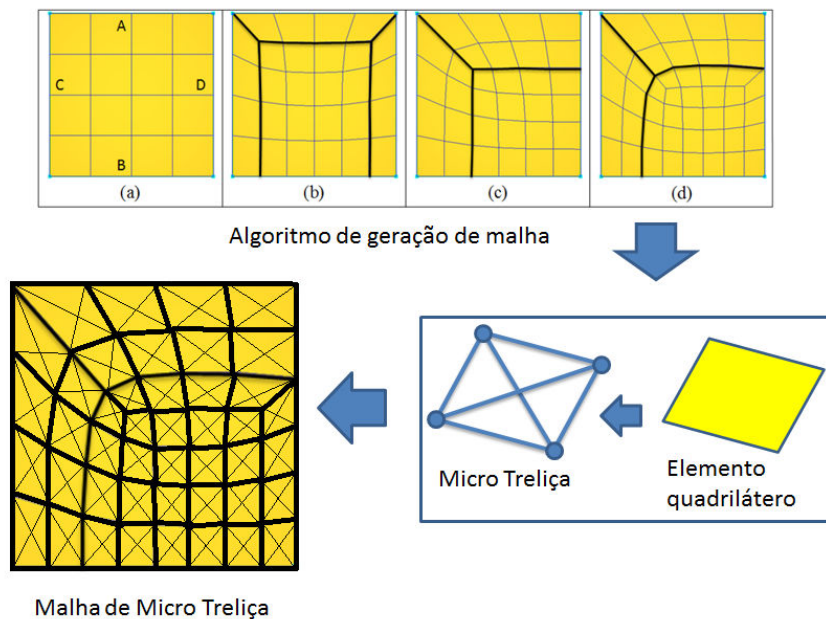


Figura 6 - Esquema de geração das micro treliças.

A adaptação do programa Quebra2D para o MTA foi realizada em alguns módulos. No módulo “Mesh Generator”, o algoritmo de geração de malha de triângulos foi trocado pelo algoritmo de geração de malhas quadrilaterais. No módulo “Mesh Structure” foi adicionado o elemento de treliça já que o programa Quebra2D trabalha apenas com elementos 2D. Nesse mesmo módulo foi adicionado dados para o material de concreto. No módulo “Attributes”



também foi adicionado dados para o concreto. No módulo “Solve” foi adicionado a chamada para o programa Abaqus para realização das análises. Finalmente, o módulo “User Interface” foi modificado para poder entrar com dados de concreto e para representar graficamente os resultados de treliças.

A geração de malha de barras de treliças é obtida da malha de elementos quadrilaterais. O módulo “Mesh Generator” gera elementos quadrilaterais. Uma pequena rotina no módulo “Manager” transforma as arestas dos elementos quadrilaterais em barras de treliça e, para completar o padrão de treliça como na Figura 1, também adiciona duas novas barras nas diagonais do elemento quadrilateral. Finalmente, o módulo “Manager” passa para o módulo “Mesh Structure” os elementos de treliça. A Figura 6 apresenta o esquema para geração de barras de treliça.

#### 4 EXEMPLO DE VALIDAÇÃO

Para validar o método proposto, foi analisada uma placa de concreto com dimensões de 1 metro por 1 metro com espessura unitária submetida a um carregamento de tração de 100 kN/m, as condições de apoio da placa são dispostas de tal forma que a placa tenha liberdade para deforma na direção x e y. Na Figura 7 são apresentadas suas dimensões e condições de contorno. Tal análise possui o objetivo de demonstrar a capacidade do MTA em reproduzir as deformações da placa.

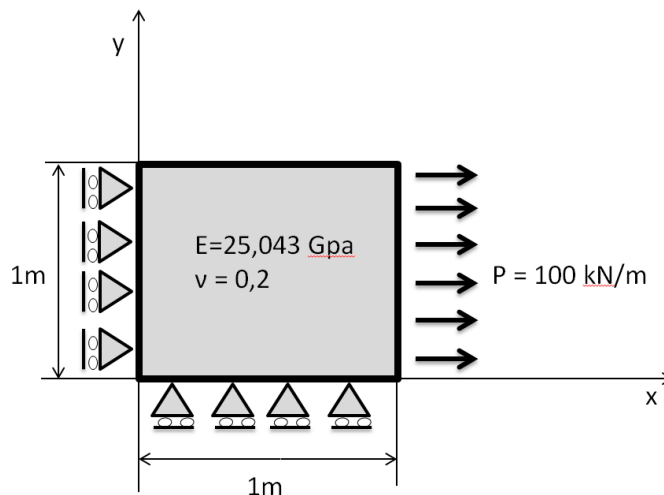


Figura 7 – Placa de concreto.

As deformações elásticas no sentido longitudinal (direção x) e transversal (direção y) do corpo de prova, valores os quais serão comparados com os modelos numéricos, são  $3,9931 \times 10^{-6}$  e  $7,9862 \times 10^{-7}$  respectivamente.

Quatro diferentes disposições de malhas são testadas, como mostra a Figura 8. O primeiro modelo, Figura 8(a), é o mais simples e apresenta apenas 9 nós, com disposição dos elementos em forma de grid com tamanhos iguais nas duas direções. O segundo modelo, Figura 8(b), tem refinamento apenas na direção x. O terceiro modelo, Figura 8(c), já tem uma malha irregular e usa o algoritmo de geração usando templates. O quarto modelo, Figura 8(d), também usa malha irregular mas com maior refinamento da malha comparada com o modelo anterior.

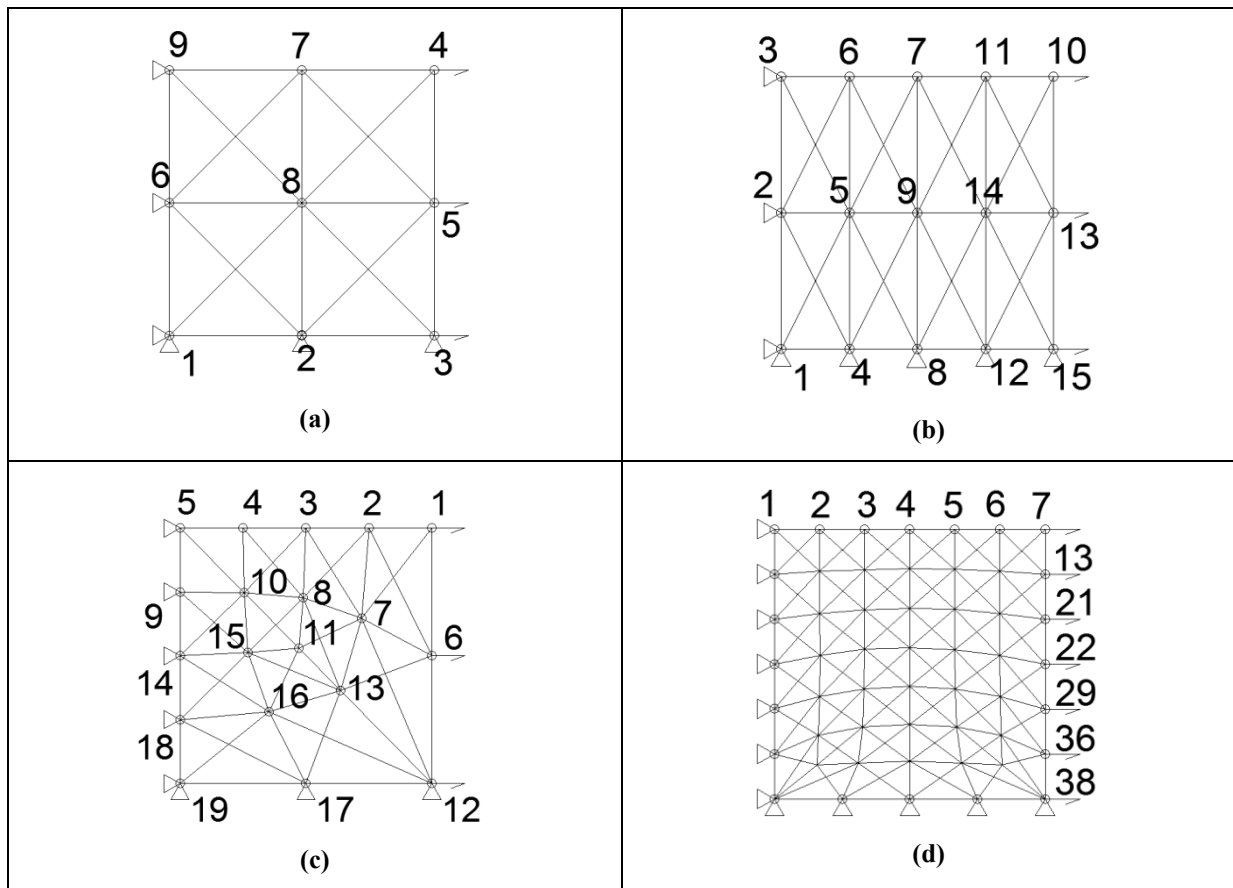


Figura 8 – Modelos para validação de micro treliças.

Os resultados entre as deformações nas duas direções deve dar o valor de poisson de 0,2. Nos modelos apresentados na Figura 8 foram obtidos os seguintes valores, sequencialmente da Figura 8(a) para Figura 8(d): 0,20; 0,20; 0,26; e 0,21. Observar que para malhas regulares e até pouco refinadas, os resultados foram exatos. Para malhas irregulares, o resultado de pouco refinamento, Figura 8(c), diverge 30% do esperado. Entretanto, quando a malha é um pouco mais refinada a divergência baixa para 5%. Pode-se concluir desses exemplos que é recomendável que as malhas nos modelos sejam refinadas a fim de evitar erros nas deformações.

## 5 EXEMPLOS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Agora será analisado o comportamento do algoritmo para situação de uma peça submetida a um esforço de flexão comparando os resultados numéricos com os experimentais. Para essa análise foi utilizado um exemplo de uma viga parede biapoiada ensaiada por Guimarães (1980) os resultados obtidos foram objetos de estudos dos trabalhos de Fernandes (2010) e Nepomuceno (2012). A viga foi armada com quatro barras de aço de 8mm de diâmetro cada. Figura 9 mostra suas características geométricas e nas Tabelas 1 e 2 são apresentadas as propriedades mecânicas dos materiais empregados.

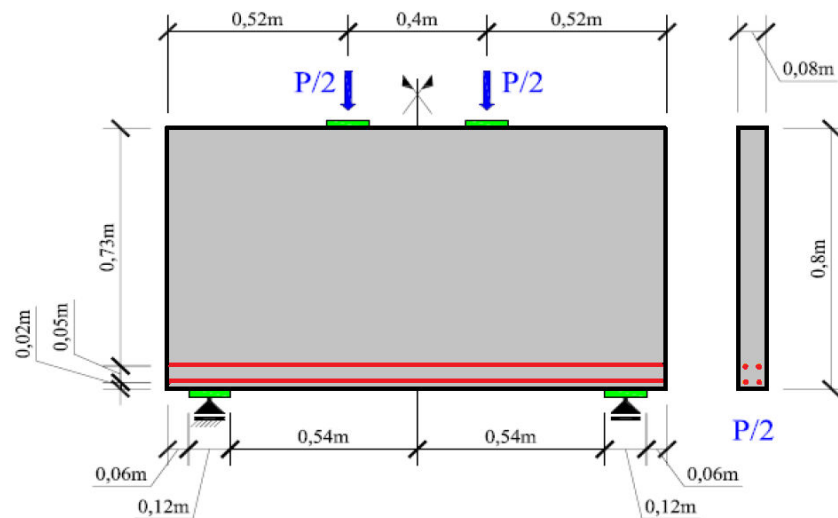


Figura 9 – Viga parede A1 adaptado de Guimarães (1980).

Tabela 1 – Propriedades Mecânicas do Concreto (Guimarães 1980)

Resistência à Compressão (Mpa)	Resistência à Tração (Mpa)	Módulo de Elasticidade (GPa)	$G_F$ (N/m)
24,80	2,40	23,704	150

Tabela 2 – Propriedades Mecânicas do Aço (Guimarães 1980)

Módulo de Elasticidade (GPa)	Tensão de Escoamento $f_y$ (Mpa)
212,50	534

Guimarães (1980) nomeou essa viga por A1 e em seus ensaios obteve uma carga última de 480KN com modo de ruptura por flexão.

O segundo exemplo que será analisado foi utilizado por Macedo (2011), onde ele fez uma comparação de dados experimentais extraídos dos ensaios realizados por Filho (1995) apud Macedo (2011) no Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico, com o modelo de MBT implementado no programa comercial de Elementos Finitos Ansys 11.0. O exemplo consiste numa parede resistente engastada numa viga rígida de concreto armado, existindo uma abertura na zona de ligação, sujeita a um carregamento horizontal na extremidade superior esquerda conforme Figura 11. A Figura 1212 descreve as dimensões do exemplo.

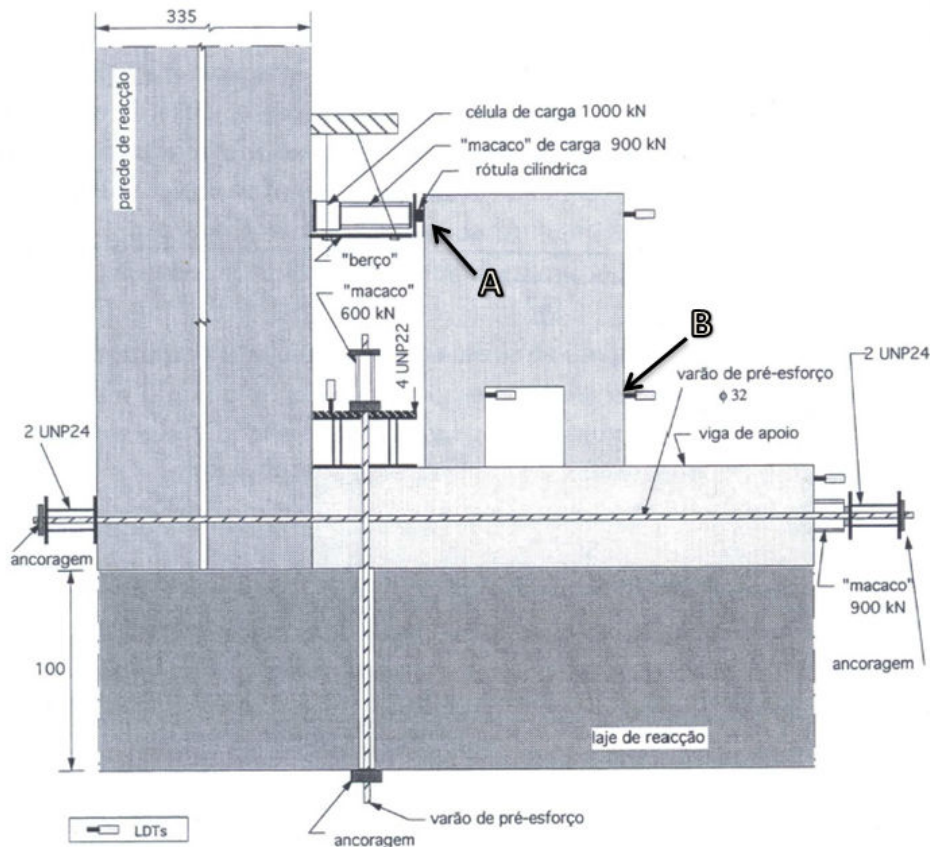


Figura 11 - Esquema geral de ensaio Filho (1995) apud Macedo (2011).

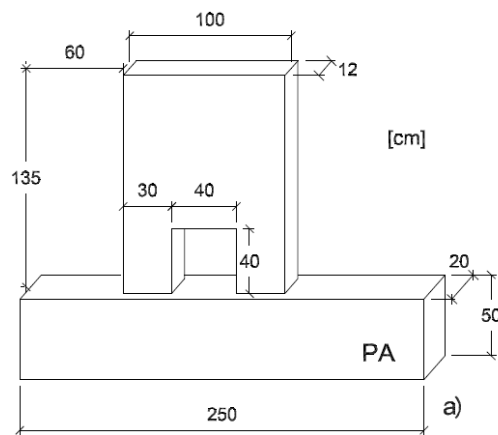
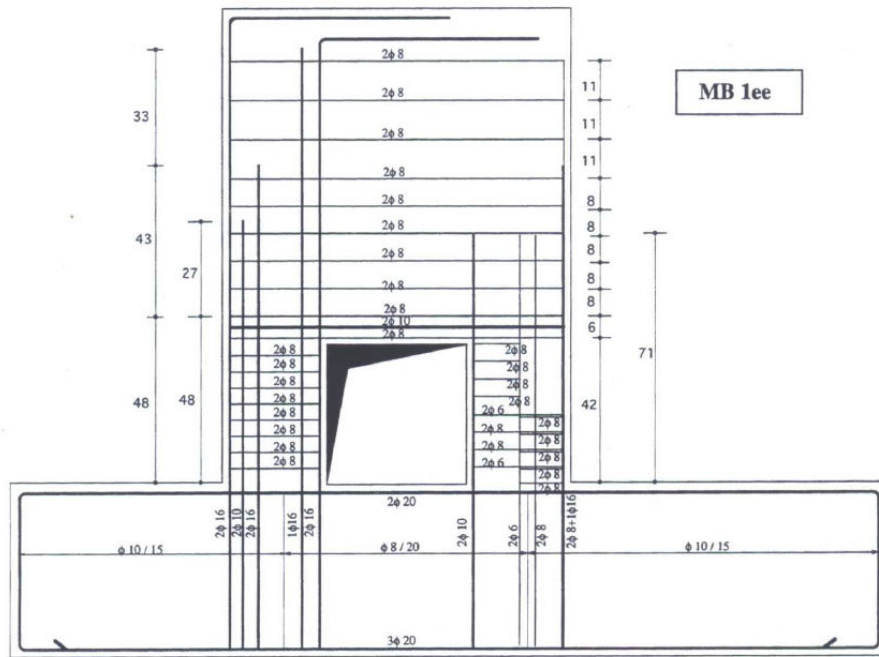


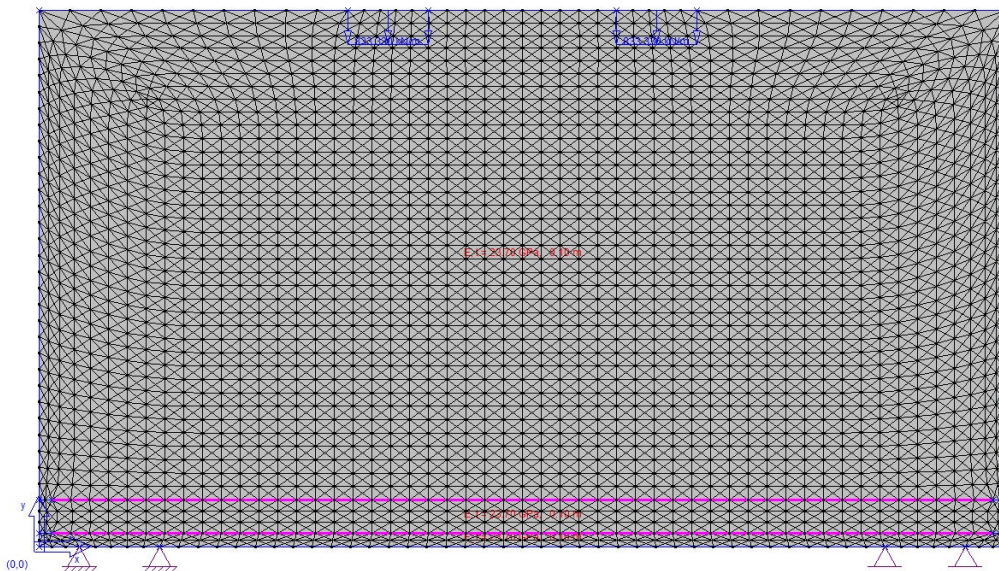
Figura 12 - Dimensões da Parede Filho (1995) apud Macedo (2011)

Inicialmente Filho (1995) apud Macedo (2011) fez o dimensionamento da parede através do MBT para resistir uma carga de 350kN e com as taxas de armaduras encontradas, fez diversos modelos experimentais com várias disposições de armadura, o intuito era validar o método para utilizar em situações onde as regiões D são dominantes na estrutura. Para esse trabalho utilizaremos o modelo MB 1ee com disposição da armadura conforme a Figura13.



**Figura 13 – Disposição da Armadura da Parede MB1ee Filho (1995) apud Macedo (2011)**

Para análise do primeiro exemplo foi realizado um modelo MMT com 2253 nós e 8862 elementos, onde as linhas na cor magenta representam as armadura utilizadas conforme Figura 14.



**Figura 14 – Malha MMT da viga A1.**

Após análise do modelo foi encontrado uma carga última de 442 KN, obtendo aproximadamente 92% do valor experimental, a Figura 15 mostra o gráfico com a curva de carga versus deslocamento, referente inferior no meio do vão da viga.

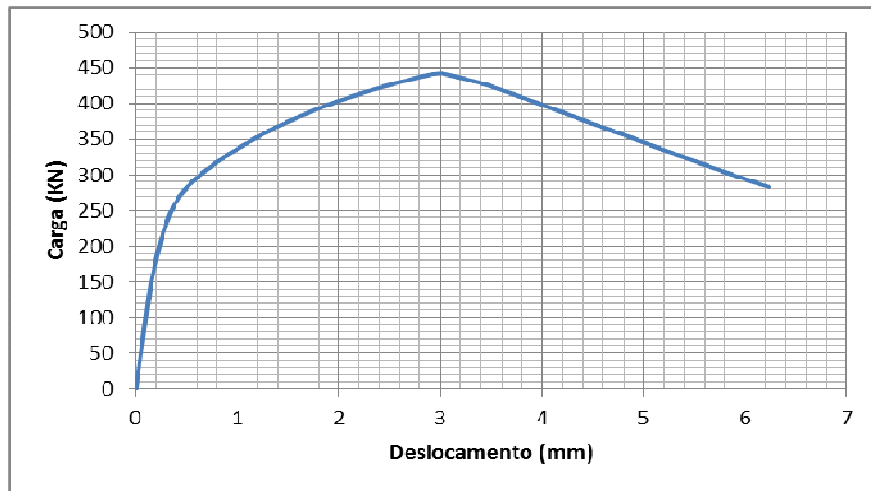


Figura 15 – Gráfica Carga x Deslocamento viga A1.

As Figuras 16, 17 e 18 mostram o pós processamento do modelo, onde na lateral esquerda está uma legenda indicando os intervalos de tensões em Pa dos elementos. Na Figura 16 está disposto tanto as barras tracionadas como as comprimidas, já nas Figuras 17 e 18 estão somente as barras tracionadas e as comprimidas respectivamente. É notado o acúmulo de tensões nos elementos que representam a armadura da viga, também é verificado que os primeiros elementos que entram em colapso são os da parte inferior no meio do vão da viga, esses entram e ruptura por tração, tal processo condiz com verificado experimentalmente, outro fato importante é o modo de ruptura da viga que se dá por flexão onde há uma deformação excessiva da armadura.

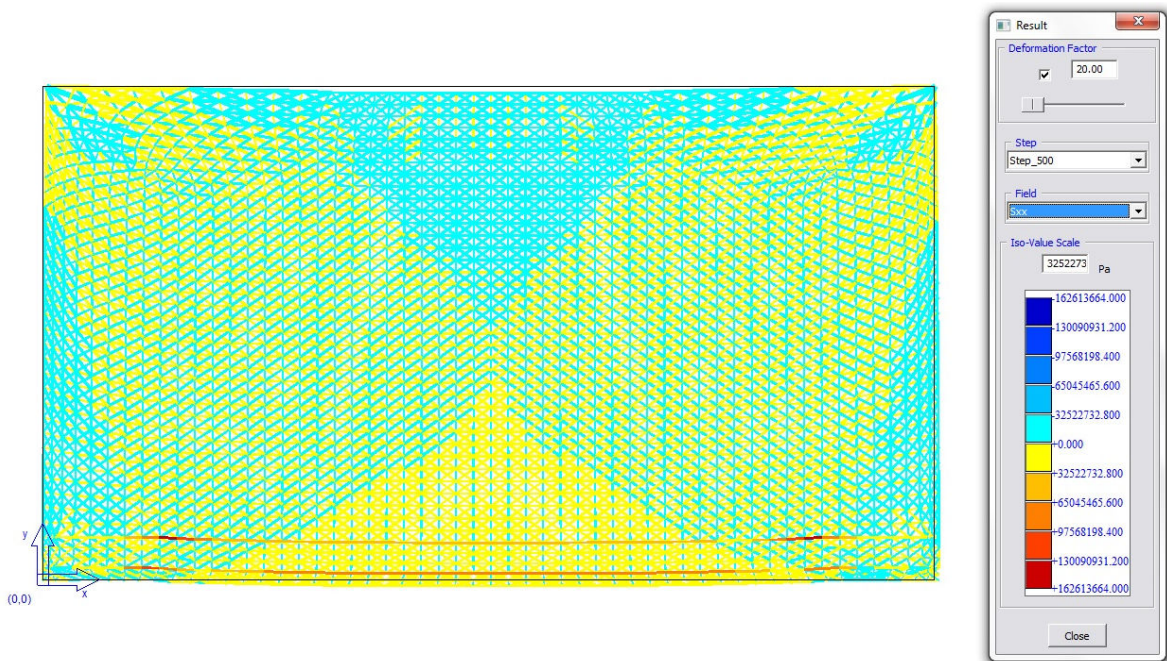


Figura 16 – Tensões da viga A1.

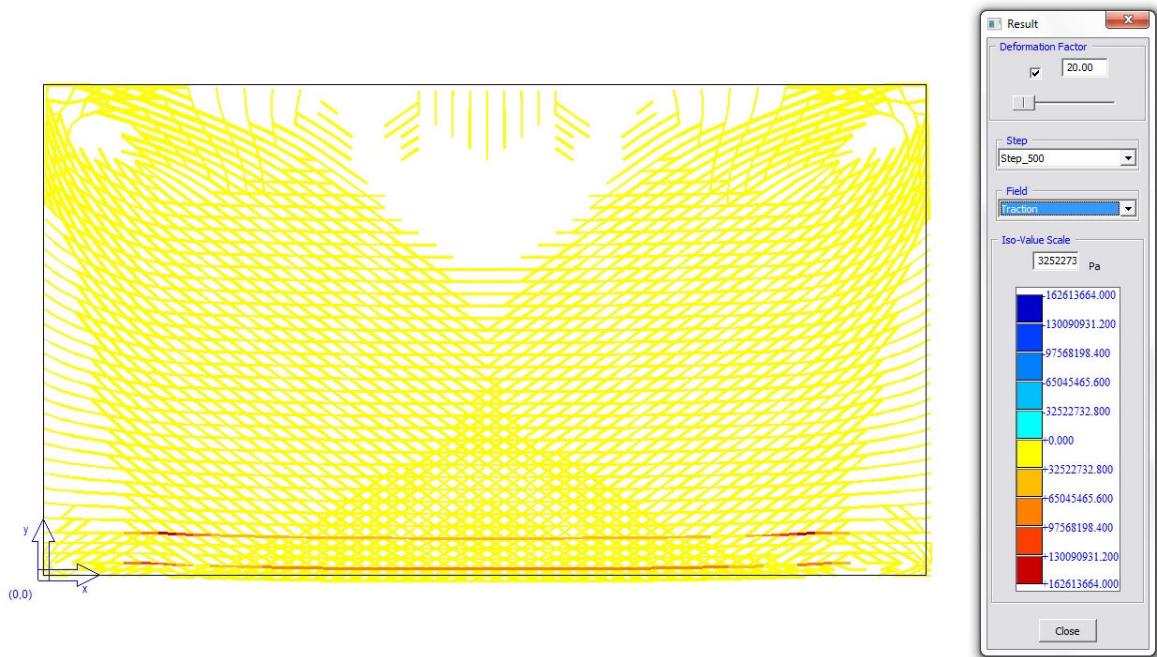


Figura 17 – Tensões de Tração viga A1.

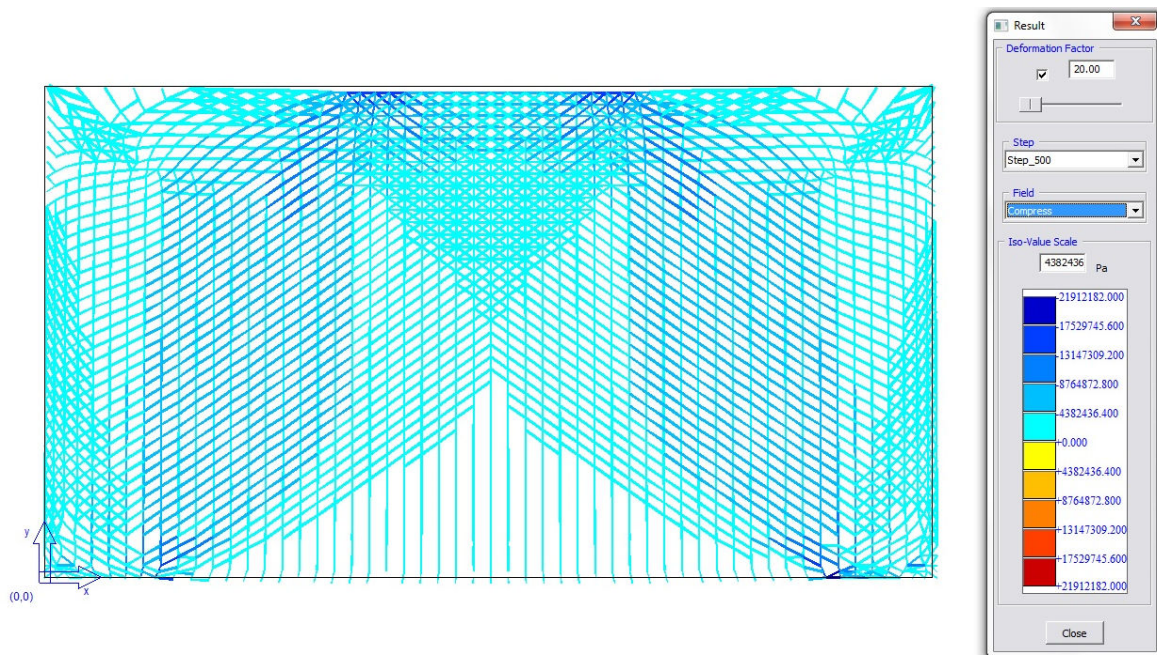


Figura 18 – Tensões de Compressão viga A1.

Para o segundo exemplo foi executado um modelo com 1626 nós e 6778 elementos, onde se procurou modelar as armaduras principais conforme a Figura 13, outro aspecto relevante foi a modelagem da viga de apoio o intuito era representar a ancoragem da armadura da parede, para isso os elementos de concreto que compunham viga tiveram sua rigidez ampliada a fim de aproxima as características do modelo numérico com o experimental. A Figura 19 mostra a discretização do modelo onde as linhas da cor magenta representam as barras de aço empregadas na parede.

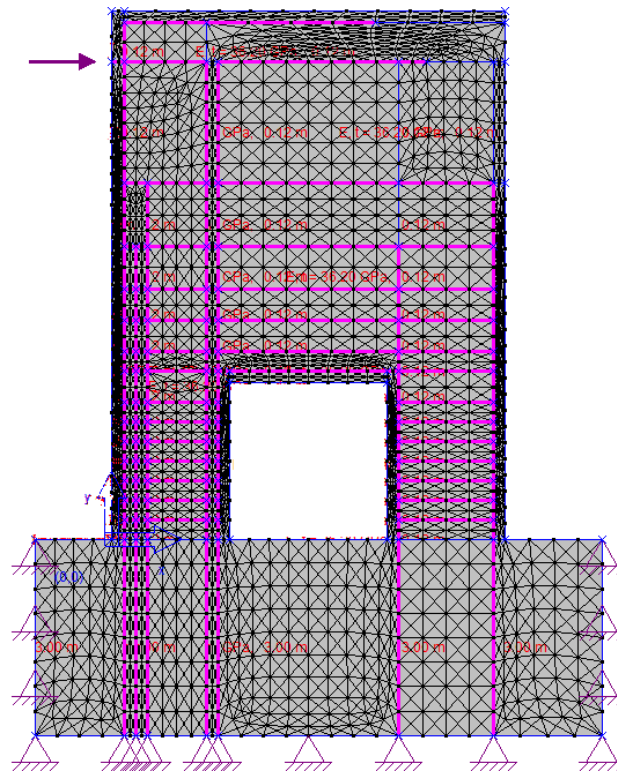


Figura 19 – Malha MMT do MB 1ee.

O modelo atingiu a carga última de 334KN, cerca de 95% da carga de projeto estimado por Filho (1995) apud Macedo (2011). No entanto, a carga última experimental foi de 413KN o que leva o MMT a um valor aproximado de 81% do real. Já o modelo MBT proposto por Macedo (2011) atingiu o valor de 416KN, maior que o experimental. Os valores abaixo do experimental obtidos pelo MMT se deve em parte pela simplificação da armadura no entanto vale ressaltar a eficiência do método como ferramenta de projeto, pois fornece resultados a favor da segurança. A Figura 20 apresenta gráfico carga deslocamento comparando os resultado dos modelos, os deslocamentos analisados foram extraídos de dois pontos, onde houve instrumentação da parede, o ponto A e B conforme Figura 11.

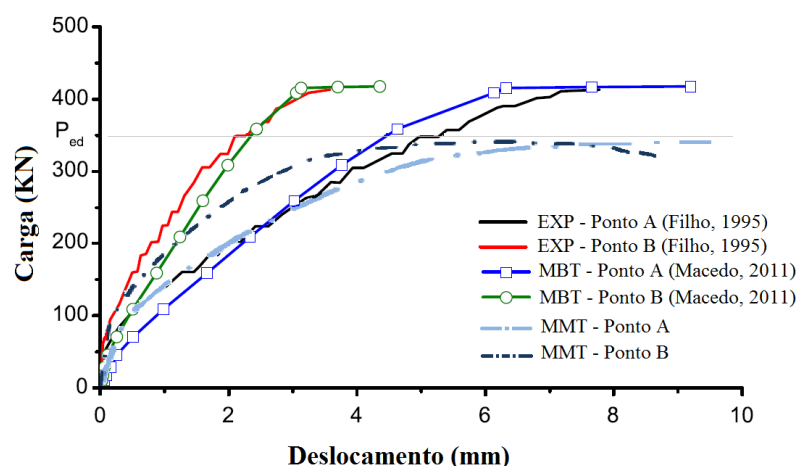


Figura 20 – Gráfico Carga x Deslocamento MB 1ee.



As Figuras 21, 22 e 23 mostram o pós processamento do modelo. Na Figura 21 são apresentados todas as tensões já nas Figuras 22 e 23 são mostrados apenas as barras tracionadas e comprimidas respectivamente. Fica claro o acúmulo de tensões nas barras que representam a armadura, onde em sua maioria entram no processo de escoamento.

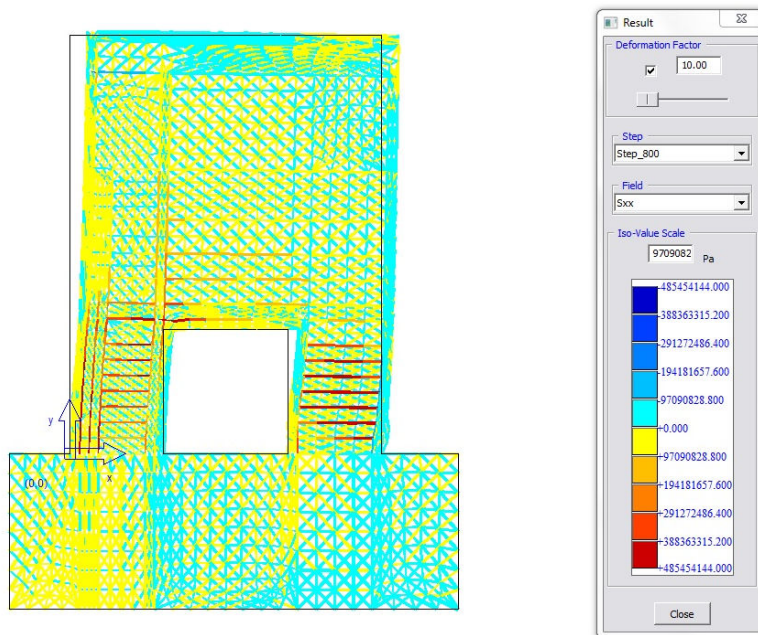


Figura 21 – Tensões MB 1ee.

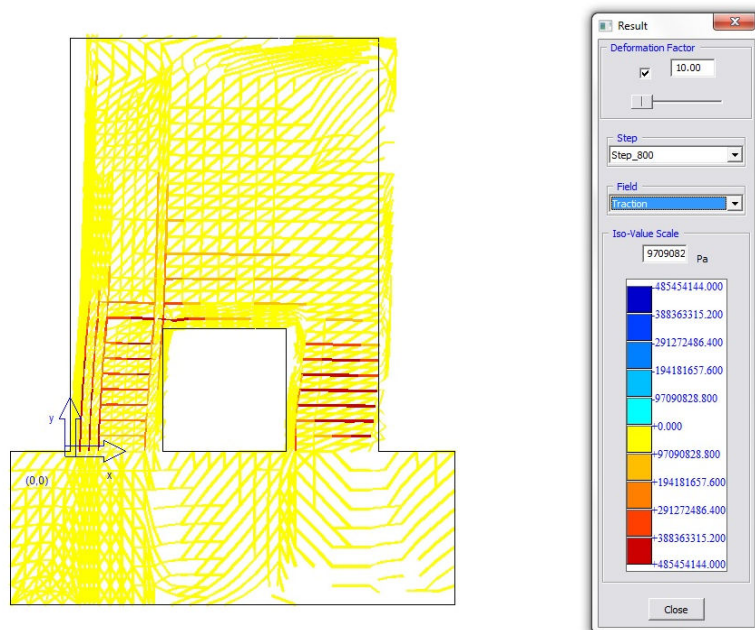


Figura 22 – Tensões de Tração MB 1ee.

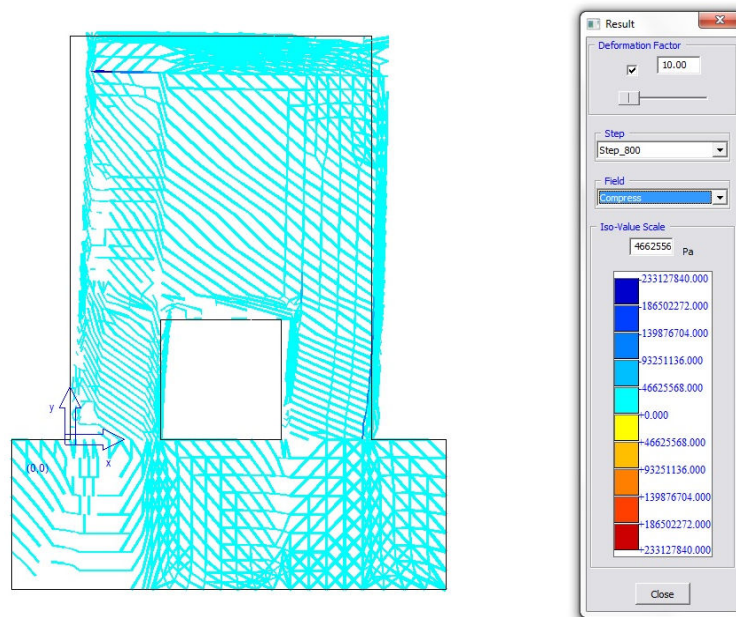


Figura 22 – Tensões de Compressão MB 1cc.

Nos dois exemplos mostrados, a análise conseguiu representar cargas e deslocamentos compatíveis com os resultados experimentais. Nos dois casos, os resultados de carga última foram ligeiramente menores que os resultados experimentais, mas a favor da segurança. Entretanto, a razão dessa diferença pode estar na simplificação no modelo numérico, pois foram modeladas apenas as armaduras principais das experimentais (armaduras secundárias ou de distribuição foram suprimidas).

## 6 CONCLUSÕES

Esse trabalho apresentou simulações numéricas de estruturas de concreto armado com uso do modelo de Micro-Treliças, onde tanto o concreto, como o aço são representados por barras de treliças. As malhas de quadrilaterais são geradas por um algoritmo de geração de malha com uso de templates para domínios de 4, 3 e 2 curvas de contorno. O algoritmo foi incorporado em um modelador gráfico interativo, chamado de MTA (Micro-Truss Analyzer). Também o programa de análise Abaqus foi incorporado ao programa. O MTA permite geração de geometrias complexa e com algoritmo de geração de malha, a malha das treliças são geradas seguindo os elementos. Adicionalmente, as análise de tensões com não-linearidade geométrica e do material são possíveis com o programa Abaqus. Os resultados numéricos apresentados conseguiram reproduzir os resultados experimentais com cerca de 15% de diferença. Essa diferença é atribuída a simplificação do modelo numérico.

Finalmente, com uso do MTA é possível dimensionar estruturas não convencionais de concreto armado seguindo os seguintes passos:

1. Um modelo somente com o concreto deve ser gerado;
2. Faz-se a análise não-linear geométrica e do material de elementos finitos com os elementos de treliça;
3. Obtem-se os resultados onde é possível visualizar as barras sob tração e compressão;
4. Barras de aço são adicionadas no modelo nas regiões de barras sob tração;

5. Volte ao passo (2) ou termine o processo quando o calculista achar que a estrutura esteja suficientemente armada.

## REFERÊNCIAS

Fernandes, H. H. F. (2010). Aplicação de um Modelo de Dano Isotrópico Escalar na Análise de Vigas Parede de Concreto Armado (Dissertação). *Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Brasília, Universidade de Brasília.*

Guimarães, G. B. (1980). Análise experimental de vigas-parede de concreto armado enrijecidas por pilares laterais, *Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro*. Tese (Mestrado): 133 p.

Hrennikoff, A. (1941). "Solutions of problems of elasticity by the framework method." *Journal of Applied Mechanics* **12**: 169-175.

Macedo, R. (2011). Otimização Estrutural na Análise Não Linear dos Modelos de Escoras e Tirantes. *Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa*. Dissertação de Mestrado.

Miranda, A. C. d. O. and L. F. Martha (2013). Quadrilateral Mesh Generation Using Hierarchical Templates. *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*.

Miranda, A. C. d. O., M. A. Meggiolaro, et al. (2012). "Stress intensity factor predictions: Comparison and round-off error." *Computational Materials Science* **53**(1): 354-358.

Miranda, A. C. O., J. B. Cavalcante-Neto, et al. (1999). "An algorithm for two-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks." *XIII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing* (Cat. No.PR00481): 29-38.

Miranda, A. C. O., M. A. Meggiolaro, et al. (2002). Fatigue Crack Propagation under Complex Loading in Arbitrary 2D Geometries. *Applications of Automation Technology in Fatigue and Fracture Testing and Analysis*. M. P. Braun AA, Lohr RD. **ASTM STP 1411**: 120-146.

Miranda, A. C. O., M. A. Meggiolaro, et al. (2003). "Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components." *Engineering Fracture Mechanics* **70**(10): 1259-1279.

Miranda, A. C. O., M. A. Meggiolaro, et al. (2003). "Fatigue life prediction of complex 2D components under mixed-mode variable amplitude loading." *International Journal of Fatigue* **25**(9-11): 1157-1167.

Nagarajan, P., U. B. Jayadeep, et al. (2009). "Application of micro truss and strut and tie model for analysis and design of reinforced concrete structural elements." *Songklanakarin Journal of Science and Technology* **31**(6): 647-653.

Nagarajan, P., U. B. Jayadeep, et al. (2010). "Mesoscopic numerical analysis of reinforced concrete beams using a modified micro truss model." *Interaction and Multiscale Mechanics* **3**: 23-37.

Nepomuceno, C. L. (2012). "Análise de Vigas-Parede aplicando Modelo de Biela e Tirante e Microtreliça." Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-005A/12, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, *Universidade de Brasília, Brasília, DF*, 160p.

Niwa, J., K. Choi, et al. (1995). "Analytical study for shear resisting mechanism using lattice model." *Concrete Library of JSCE* **26**: 95-109.

Salem, H. M. (2004). "The Micro Truss Model: An Innovative Rational Design Approach for Reinforced Concrete." *Journal of Advanced Concrete Technology* **2**(1): 77-87.