

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

**SOLUÇÕES HOMOGÊNEAS DE BIANCHI NA  
TEORIA QUADRÁTICA DA GRAVIDADE**

JULIANO ALVES DE DEUS

Brasília - DF, 20 de Agosto de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**SOLUÇÕES HOMOGÊNEAS DE BIANCHI NA  
TEORIA QUADRÁTICA DA GRAVIDADE**

JULIANO ALVES DE DEUS

ORIENTADOR:

DANIEL MÜLLER

Brasília - DF, 20 de Agosto de 2013

*Dedico,*

*A meus pais,  
Moacir e Zenilde,*

*a meus irmãos,  
Fabiano e Camila,*

*e à minha amada,  
Verinha.*

# Agradecimentos

Meus agradecimentos...

À minha família, pelo apoio e compreensão diante da empreitada... e ao meu amor, Verinha, pelo incentivo e paciência desmedidos.

Ao professor Daniel Müller, pela dedicada orientação e amizade.

Aos professores da pós-graduação, Ademir, Anníbal, Geraldo Magela, Marcos Maia, Vanessa e Viktor Dodonov, com os quais tive a satisfação de cursar disciplinas.

Aos meus amigos conterrâneos e colegas de pós-graduação, Anailde, Clever, Dieime, Eliane, Priscilla e Queila, pela amizade confortadora.

Aos meus amigo e parceiros de discussões, Leandro e Ednardo, com os quais desenvolvi vários trabalhos e parcerias futuras.

Aos muitos amigos que adquiri na pós-graduação e nesta cidade, André, Andrezza, Andrei, Camila, Carlos, Disrael, Elias, Fernando, Fábio e Deise, Franciscarlos, Gabriela, José Antônio, Juliana, o outro Leandro, Luis, Márcio, Marcos, Mirian, Nádia, Paula, Pedro, Pedro Henrique, Regina, Sávio, Sérgio, Thiago, Willian e aos muitos outros que indesculpavelmente não me recordo neste momento.

Aos professores Ademir, Tarcísio Marciano e Vanessa, coordenadores da pós-graduação em Física durante a minha permanência na UnB, e a Célia, Márcia e Thales, secretários da pós-graduação em física.

Ao Instituto de Física da UNB, à CAPES e ao CNPq.

# Resumo

Neste trabalho de Tese de Doutorado, estudamos os modelos cosmológicos de Bianchi no âmbito da teoria quadrática da gravidade, e analisamos numericamente as soluções de vácuo das equações de campo, com ênfase na busca de interpretações cosmológicas.

O interesse deste trabalho reside nos modelos espacialmente homogêneos de Bianchi. Os tipos I, VII<sub>A</sub> e IX de Bianchi são muito importantes do ponto de vista cosmológico, pois constituem generalizações anisotrópicas dos modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plano, aberto e fechado, respectivamente. Modelos homogêneos isotrópicos, tais como FRW, constituem o foco das atenções na descrição do universo atual. Porém, nas condições do universo primordial, modelos anisotrópicos, como os de Bianchi, adquirem maior importância. Neste trabalho, resolvemos as soluções de vácuo, caracterizadas por um cenário onde a geometria do universo é dominante sobre matéria e energia, tal como o universo próximo ao seu surgimento.

As soluções obtidas mostram, de acordo com a análise assintótica discutida nos resultados, que para os universos de Bianchi I e VII<sub>A</sub>, os espaços de Minkowski e de Sitter devem ser estruturalmente estáveis no contexto da gravidade quadrática. Do mesmo modo, as soluções de Minkowski e de Sitter devem ser estruturalmente estáveis para os universos FRW na mesma gravidade quadrática. No entanto, mostramos a existência de singularidades, o que demonstra que certamente a teoria não está completa, pois nem todo conjunto de condições iniciais evolui para universos razoáveis.

# Abstract

In this Thesis work, we study Bianchi cosmological models in the context of quadratic theory of gravity, and we numerically analyze the vacuum solutions of field equations, emphasizing the search of cosmological interpretations.

The interest of this work is on the spacially homogeneous models of Bianchi. Types I, VII<sub>A</sub> and IX of Bianchi are very importante in the cosmological view, because they perform anisotropic generalizations of Friedmann-Robertson-Walker (FRW) flat, open and closed models, respectively. Isotropic homogeneous models, as FRW, represent the focus in the description of current universe. However, over conditions of primordial universe, anisotropic models, as Bianchi, become more important. In this work, we solve the vacuum solutions, characterized by a scenario where universe geometry is dominant over matter and energy, such as the universe close to his emergence.

Obtained solutions show, according to the asymptotical analysis discussed in the results, that for Bianchi I and VII<sub>A</sub> universes, Minkowski and de Sitter spaces must be structurally stable in the context of quadratic gravity. Similarly, Minkowski and de Sitter solutions must be structurally stable for FRW universes in same context. However, we show the existence of singularities, what means the theory certainly is not complete, because not all sets of initial conditions evolve to reasonable universes.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>4</b>
<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2 Modelos Cosmológicos Homogêneos</b>	<b>15</b>
2.1 Grupo e Álgebra de Lie . . . . .	15
2.2 Classificação de Bianchi . . . . .	16
2.3 Espaços Homogêneos e Obtenção das Bases de Bianchi . . . . .	18
2.4 Conexão e Tensor de Riemann . . . . .	20
<b>3 Equações de Campo e Soluções</b>	<b>22</b>
3.1 Equações de Campo de Einstein . . . . .	22
3.2 Equações de campo da Teoria Quadrática . . . . .	23
3.3 Soluções de Vácuo . . . . .	24
3.4 Métrica Homogênea . . . . .	24
3.5 Casos Anisotrópicos . . . . .	26
3.5.1 Caracterização Invariante das Soluções . . . . .	27
3.6 Casos Isotrópicos . . . . .	29
3.6.1 Caso Plano . . . . .	31
3.6.2 Caso Hiperbólico . . . . .	31
3.6.3 Caso Esférico . . . . .	32
3.6.4 Aproximação em Primeira Ordem . . . . .	33
<b>4 Resultados Numéricos e Discussão</b>	<b>34</b>
4.1 Condição Inicial e Evolução dos Vínculos . . . . .	34

4.2 Casos Anisotrópicos . . . . .	35
4.2.1 Bianchi I . . . . .	35
4.2.2 Bianchi VII <sub>A</sub> . . . . .	42
4.2.3 Discussão Geral sobre Casos Anisotrópicos . . . . .	50
4.3 Casos Isotrópicos . . . . .	51
4.3.1 Caso Plano . . . . .	51
4.3.2 Caso Hiperbólico . . . . .	55
4.3.3 Caso Esférico . . . . .	57
4.3.4 Discussão geral sobre os casos isotrópicos . . . . .	59
<b>5 Conclusão</b>	<b>60</b>
<b>Apêndice</b>	<b>62</b>
<b>A Obtenção dos Vetores Tetrádicos Nulos</b>	<b>63</b>
<b>B Classificação de Petrov</b>	<b>65</b>
<b>C Códigos em Maple</b>	<b>67</b>
<b>D Códigos em C</b>	<b>77</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>84</b>



# Lista de Tabelas

2.1	Constantes de estrutura do grupo de Lie para $G_3$ . . . . .	17
2.3	Tipos de Bianchi para a álgebra de Lie. . . . .	17
2.5	Constantes de estrutura para Bianchi I, VII <sub>A</sub> e IX. . . . .	19
2.7	Bases de $G_3$ para Bianchi I, VII <sub>A</sub> e IX. . . . .	20
B.1	Tipos de Petrov . . . . .	66

# Lista de Figuras

3.1	Vetor deslocamento e função lapso numa folheação de hipersuperfícies homogêneas $\Sigma_t$ . . . . .	25
4.1	Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37). . . . .	37
4.2	Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35). O tensor de Ricci é assintoticamente proporcional ao tensor métrico (3.36). . . . .	38
4.3	Evolução numérica do vínculo $E_{44}$ , que deve ser nulo. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 300. . . . .	38
4.4	Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37). . . . .	40
4.5	Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35). . . . .	41
4.6	Evolução numérica do vínculo $E_{44}$ , que deve ser nulo. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 200. . . . .	41
4.7	a) Evolução numérica dos escalares $R$ , $R^{ab}R_{ab}$ e $R^{abcd}R_{abcd}$ . b) Evolução numérica do vínculo $E_{44}$ . . . . .	42
4.8	Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37). . . . .	44
4.9	Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35). O tensor de Ricci é assintoticamente proporcional ao tensor métrico (3.36). . . . .	45
4.10	Evolução numérica dos vínculos $E_{44}$ e $E_{41}$ , que devem ser nulos. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 200. . . . .	46
4.11	Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37). . . . .	47
4.12	Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35). . . . .	48
4.13	Evolução numérica dos vínculos $E_{44}$ e $E_{41}$ , que devem ser nulos. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 200. . . . .	49

4.14 a) Evolução numérica dos escalares $R^{ab}R_{ab}$ e $R^{abcd}R_{abcd}$ . b) Evolução numérica dos vínculos $E_{44}$ e $E_{41}$ . . . . .	50
4.15 Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano com $\Lambda = 1, 0$ . . . . .	52
4.16 Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano com $\Lambda = 0, 1$ . . . . .	53
4.17 Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano próximo a Minkowski. O cálculo foi realizado até um tempo próprio muito maior que o mostrado na figura. . . . .	55
4.18 Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci para o caso isotrópico hiperbólico com $\Lambda = 0, 0001$ . . . . .	56
4.19 Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano próximo a Minkowski. O cálculo foi realizado até um tempo próprio muito maior que o mostrado na figura. . . . .	57
4.20 Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico esférico com $\Lambda = 0, 001$ . . . . .	58

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho de tese de doutorado, estudamos os modelos cosmológicos de Bianchi no contexto da teoria quadrática da gravidade, e analisamos numericamente as soluções de vácuo das equações de campo, com ênfase na busca de interpretações cosmológicas.

Teorias quadráticas da gravidade são aquelas que possuem termos escalares e/ou tensoriais até a ordem quadrática no lagrangiano. Especificamente neste trabalho, chamamos de teoria quadrática aquela com lagrangiano gravitacional

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\Lambda + R + \alpha \left( R_{ab}R^{ab} - \frac{1}{3}R^2 \right) + \beta R^2 \right]. \quad (1.1)$$

Este é o mais geral dentre os lagrangianos quadráticos, pois inclui termos quadráticos no escalar de Ricci e no tensor de Ricci, enquanto termos quadráticos no tensor de Riemann e no tensor de Weyl podem ser reescritos na forma acima, exceto por termos de superfície.

O estudo de lagrangianos quadráticos na curvatura começou com o trabalho de H. Weyl, em 1918, como uma primeira tentativa de generalização da teoria da Relatividade Geral. Esta generalização visou, entre outros objetivos, a obtenção de uma teoria unificada, que inicialmente foi pensada para a Relatividade Geral e para o Eletromagnetismo [1, 2]. Posteriormente descobriu-se que para essas teorias quadráticas, qualquer espaço de Einstein ( $R_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}\Lambda$ ) é uma solução exata.

Entretanto, essa nova teoria apresentou algumas dificuldades, entre elas a arbitrariedade na escolha de um lagrangiano quadrático (uma vez que os escalares quadráticos podiam ser escritos uns como combinações lineares dos outros, devido a termos de superfície), o que se opunha ao princípio da unificação; complicações matemáticas na solução do sistema de quarta ordem; interpretação da existência de muitas soluções; problemas na interpretação de graus de liberdade adicionais; perda da estabilidade do espaço plano e concordância com o limite de campo fraco newtoniano. Estas dificuldades fizeram a teoria ficar desacreditada por algum tempo, porém muitas delas foram resolvidos posteriormente [1].

A partir do início da década de 60 um novo interesse surgiu em torno da teoria qua-

drática devido à vários motivos. Um deles foi a descrição semi-clássica [3], que considera campos quânticos se propagando num campo gravitacional clássico de fundo. Para tornar essa teoria consistente do ponto de vista da renormalização é necessário adicionar no lagrangiano relativístico (3.5) dois contra-termos quadráticos na curvatura (3.7) [4, 5]. Descobriu-se também que teorias quadráticas poderiam ser renormalizáveis, mas com consequente perda de unitariedade [6]. As dificuldades matemáticas na resolução das equações de quarta ordem e na interpretação das soluções foram em parte solucionadas pela utilização de métodos computacionais.

Assim, o estudo da teoria quadrática continua sendo alvo de investigações no sentido de caminhar na direção da generalização das teorias conhecidas e na descrição de uma teoria fundamental. De acordo com Starobinski, os termos de ordem maior podem reproduzir a constante cosmológica [7, 8, 9]. Muitos trabalhos abordaram espaços homogêneos e isotrópicos [10, 11, 12, 13], teorias inflacionárias [14], aproximação de singularidades [15] e outros conceitos [16]. Posteriormente, a teoria foi estudada para o espaço geral de Bianchi I [17, 18], e foi mostrado que a presença de anisotropias contribui para a formação de singularidades. A esses estudos, Barrow and Hervik adicionaram os casos anisotrópicos Bianchi I e II [19]. Outros resultados muito interessantes tem sido produzidos recentemente [20, 21, 22, 23, 24, 25].

O interesse cosmológico deste trabalho reside nos modelos espacialmente homogêneos de Bianchi. Os tipos I, VII<sub>A</sub> e IX de Bianchi são muito importantes do ponto de vista cosmológico, pois constituem generalizações anisotrópicas dos modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plano, aberto e fechado, respectivamente. Modelos homogêneos isotrópicos, tais como FRW, constituem o foco das atenções na descrição do universo atual. Porém, nas condições do universo próximo a seu surgimento, modelos anisotrópicos, como os de Bianchi, adquirem maior importância [26], uma vez que este é um período um pouco menos restritivo quanto a condições de isotropia, e a princípio não existe uma forte razão para acreditar que o universo tenha surgido totalmente isotrópico. Além disso, é possível que as soluções espacialmente homogêneas sejam atratores dentro do espaço de soluções mais gerais [26].

Os modelos de Bianchi resultam da classificação das possíveis álgebras de Lie de três dimensões e sua utilização na descrição de espaço homogêneos, que foi feita pela primeira vez por Luigi Bianchi, em 1898 [27]. Bianchi descobriu que se tratam de nove espaços homogêneos de três dimensões. Um espaço-tempo com seção espacial homogênea, ou seja, uma cosmologia homogênea, pode ser obtido de um produto direto de um desses 3-espaços  $M$  numa variedade pseudo-Riemanniana  $R \times M$ . O tensor de Riemann apresentará necessariamente apenas derivadas temporais na base conveniente da seção homogênea. Neste caso, as equações de campo se reduzem a um sistema de equações diferenciais ordinárias e a métrica é uma função do tempo apenas. Atualmente, sabe-se que os possíveis 3-espaços homogêneos são descritos completamente por Bianchi e Kantowski-Sachs [28, 29].

Neste trabalho, resolvemos as soluções de vácuo, caracterizadas pela ausência de fontes de matéria e energia, sendo a constante cosmológica  $\Lambda$  o único termo de fonte considerado. Nosso interesse é o estudo do universo próximo ao seu surgimento, onde a geometria é dominante sobre matéria e energia; as soluções de vácuo de uma teoria gravitacional são as mais naturais para descrever tal cenário.

Os trabalhos de pesquisa da tese resultaram na publicação de dois artigos [30, 31], cujos resultados estão demonstrados nas seções 4.2.1 e 4.2.2. Outros dois trabalhos permanecem para publicação.

## Notação de Índices e Convenções

Como convenção de notação, usamos algarismos latinos da primeira metade do alfabeto ( $a, b, \dots, g, h$ ) para representar índices de tensores em bases gerais. Para representação em bases coordenadas, usamos algarismos latinos da segunda metade do alfabeto ( $i, j, \dots, n, o$ ). Nas notações acima, os índices correm de 1 a  $n$ , onde  $n$  é a dimensão do espaço. Para índices varrendo apenas a parte espacial do tensor, usamos algarismos gregos ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) como índices.

Tensores e bases são representados em negrito:  $\mathbf{T}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\partial}_i, \mathbf{d}x^j, \mathbf{e}_a, \boldsymbol{\omega}^b$ . Componentes de tensores e bases são representados em formato regular:  $T_i, T^a, T_b^a, e_a^i, \omega_j^b$ .

As derivadas parciais são representadas pela usual vírgula para derivação na base coordenada,  $\frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv f_{,i}$ ; derivadas parciais em relação a outras bases (*derivadas projetadas*) utilizam uma barra como convenção de notação,  $f_{|a}$ . Derivadas covariantes são representadas pelo usual ponto-e-vírgula, diferenciando base coordenada e base geral pelos índices e pela vírgula ou barra na parte parcial da derivada,  $T_{j;k}^i = T_{j,k}^i + \dots$ ,  $T_{b;c}^a = T_{b|c}^a + \dots$

A métrica do espaço-tempo é definida pela assinatura  $(+++-)$ , onde o sinal negativo está associado à parte temporal. Similarmente, na notação de tensores do espaço-tempo, o último valor do índice expressa o termo temporal, como em  $\mathbf{v} = (v^\alpha, v^4)$ , em que  $v^\alpha = (v^1, v^2, v^3)$  é a componente espacial e  $v^4$  é a componente relacionada ao tempo.

Utilizamos o sistema de unidades geometrizadas ( $c = G = 1$ ), onde o tempo tem unidade de medida de comprimento, que será omitido no texto. O fator de expansão  $a(t)$  é adimensional.

A convenção de Einstein está implícita:  $U_a V^a = \sum_{a=1}^n U_a V^a = U_1 V^1 + U_2 V^2 + \dots + U_n V^n$ .

# Capítulo 2

## Modelos Cosmológicos Homogêneos

O grupo e a álgebra de Lie permite-nos formar a representação das bases de Killing e, no contexto deste formalismo, Bianchi classificou as possíveis álgebras de Lie para grupos de três dimensões. Neste capítulo, mostramos a classificação de Bianchi como preparação para a obtenção das equações de campo a serem obtidas e resolvidas mais adiante.

### 2.1 Grupo e Álgebra de Lie

Um grupo  $g$  de dimensão  $n$  é determinado pelos seus elementos  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ , existindo um elemento  $g_I$  chamado *elemento identidade*, e pelo mapeamento (*operação* ou *regra de multiplicação*)  $g \times g \rightarrow g$  tal que i)  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ , ii)  $g_I g_i = g_i g_I = g_i$  para qualquer  $g_i \in g$ , e iii) para cada  $g_j \in g$  existe um  $g_k (\in g) = g_j^{-1}$  chamado *elemento inverso* de  $g_j$ , tal que  $g_j g_j^{-1} = g_j^{-1} g_j = g_I$ .

Determinaremos o *grupo de Lie*  $G$   $n$ -dimensional pela relação de comutação (mapeamento  $G \times G \rightarrow G$ ) da base vetorial  $\{\xi_a\}$ ,

$$[\xi_a, \xi_b] = C_{ab}^c \xi_c, \quad (2.1)$$

onde

$$C_{ab}^c = -C_{ba}^c. \quad (2.2)$$

$C_{ab}^c$  é chamado *constante de estrutura* do grupo de Lie. Conhecidamente, da identidade de Jacobi,

$$C_{[ab}^d C_{cd]}^f = 0. \quad (2.3)$$

O espaço vetorial obedecendo (2.3) e a operação de comutação  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$  define uma *Álgebra de Lie*.

A base vetorial  $\{\xi_a\}$  define vetores *invariantes à direita*. Analogamente, podemos construir uma álgebra de Lie com uma base vetorial  $\{\eta_a\}$  satisfazendo a operação de comutação

$$[\eta_a, \eta_b] = D_{ab}^c \eta_c, \quad (2.4)$$

definindo vetores *invariantes à esquerda*, onde  $D_{ab}^c$  é a constante de estrutura relacionada a esta base vetorial.

Da definição de invariância das bases vetoriais acima implica que as constantes de estrutura  $C_{ab}^c$  e  $D_{ab}^c$  diferem apenas por um sinal (ver demonstração em [32], p. 169-171),

$$C_{ab}^c = -D_{ab}^c, \quad (2.5)$$

e que a derivada de Lie da base  $\{\eta_a\}$  é nula,

$$0 = \mathcal{L}_{\xi_a} \eta_b = [\xi_a, \eta_b]. \quad (2.6)$$

Calculando  $\mathcal{L}_{\xi_a}(\eta_b \cdot \omega^c) = (\mathcal{L}_{\xi_a} \eta_b) \cdot \omega^c + \eta_b \cdot (\mathcal{L}_{\xi_a} \omega^c) = \mathcal{L}_{\xi_a}(\delta_b^c) = 0$ , podemos obter a derivada de Lie da base de 1-forma  $\omega^a$  (dual de  $\eta_a$ ):

$$\mathcal{L}_{\xi_a} \omega^b = 0. \quad (2.7)$$

## 2.2 Classificação de Bianchi

A obtenção de álgebras de Lie para grupos de três dimensões  $G_3$  foi originalmente mostrada por Bianchi [27]. Podemos relacionar a constante de estrutura do grupo com uma parte simétrica e outra anti-simétrica, tal como

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{cdb} C_{cd}^a = N^{ab} + \varepsilon^{abc} A_c, \quad (2.8)$$

onde  $\varepsilon^{abc}$  é um tensor totalmente anti-simétrico e  $\varepsilon^{123} = 1$ . Multiplicando (2.8) por  $\varepsilon_{hlab}$  e usando  $\varepsilon_{abf} \varepsilon^{cdf} = \delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c$  e  $\frac{1}{2} \varepsilon_{abd} \varepsilon^{fgd} C_{fg}^c = \frac{1}{2} (C_{ab}^c - C_{ba}^c) = C_{ab}^c$ , temos

$$C_{bc}^a = \varepsilon_{bcd} N^{ad} + \delta_c^a A_b - \delta_b^a A_c, \quad (2.9)$$

que relaciona a constante de estrutura com o tensor simétrico  $N^{ab}$  e com a 1-forma  $A_a$ . Substituindo (2.9) na identidade de Jacobi (2.3) temos a condição entre  $N^{ab}$  e  $A_a$ :

$$N^{ab} A_b = 0. \quad (2.10)$$

Para  $A_b = 0$  a equação (2.10) é sempre satisfeita, e essa álgebra de Lie é referida como classe  $G_3A$ . Para  $A_b \neq 0$  temos a classe  $G_3B$ . Em ambos os casos é sempre possível escrever

$$A_b = (A, 0, 0) \quad (2.11)$$

e

$$N^{ab} = \text{diag}(N_1, N_2, N_3), \quad (2.12)$$



de modo que a condição (2.10) se reduz a

$$N_1 A = 0. \quad (2.13)$$

Assim, usando (2.9) podemos determinar as constantes de estrutura do grupo em relação ao parâmetro do grupo  $A$  e aos coeficientes diagonais  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$ , conforme mostrados na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Constantes de estrutura do grupo de Lie para  $G_3$ .

$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = N_1$	$C_{12}^2 = -C_{21}^2 = A$	$C_{13}^2 = -C_{31}^2 = -N_2$
$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = N_3$	$C_{13}^3 = -C_{31}^3 = A$	$C_{bc}^a = 0$ (outros)

A relação de comutação (2.1) do grupo de Lie para a base vetorial  $\{\xi_a\}$  é então obtida:

$$[\xi_1, \xi_2] = A\xi_2 + N_3\xi_3, \quad (2.14)$$

$$[\xi_2, \xi_3] = N_1\xi_1 \quad (2.15)$$

e

$$[\xi_1, \xi_3] = A\xi_3 - N_2\xi_2; \quad (2.16)$$

e na tabela 2.3 temos a enumeração completa dos nove tipos de Bianchi.

Tabela 2.3: Tipos de Bianchi para a álgebra de Lie.

Classe	Tipo	$A$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
$G_3A$	I	0	0	0	0
	II	0	1	0	0
	VI <sub>0</sub>	0	0	-1	1
	VII <sub>0</sub>	0	0	1	1
	VIII	0	-1	1	1
	IX	0	1	1	1
$G_3B$	III	1	0	-1	1
	IV	1	0	0	1
	V	1	0	0	0
	VI <sub>A</sub>	A	0	-1	1
	VII <sub>A</sub>	A	0	1	1

Observar que o tipo  $VII_0$  é um particular caso do tipo  $VII_A$ , e que os tipos III e  $VI_0$  são particulares casos do tipo  $VI_A$ .

### 2.3 Espaços Homogêneos e Obtenção das Bases de Bianchi

Um espaço *homogêneo* é definido como uma variedade cujo grupo de transformação é *isométrico*, ou seja, mantém a métrica invariante [15]. A base  $\{\xi_a\}$  forma os geradores do grupo;  $\xi_a$  são os *vetores de Killing* cuja atuação mantém a invariância da métrica,

$$\mathcal{L}_{\xi_a} g = 0, \quad (2.17)$$

que resolvida, usando a condição de metricidade, resulta na *Equação de Killing*:

$$\xi_{ab;c} + \xi_{ac;b} = 0. \quad (2.18)$$

O espaço definido pela base invariante à esquerda  $\{\eta_a\}$  (satisfazendo (2.6) com os campos de Killing  $\xi_a$ , geradores de movimentos do grupo) e sua base dual  $\{\omega^a\}$  tem definido o tensor métrico

$$g = g_{ab} \omega^a \otimes \omega^b. \quad (2.19)$$

Em termos do grupo de Lie de três dimensões  $G_3$ , um espaço-tempo (especialmente) homogêneo é definido pela base  $\{\xi_a\}$  da álgebra de Lie. A invariância da métrica (2.19) pela transformação do grupo  $G_3$  determina que  $g_{ab} = g_{ab}(t)$ , ou seja, não tem dependência nas coordenadas espaciais. Os modelos de Bianchi são espacialmente homogêneos, e conforme mostraremos mais à frente, contêm os modelos homogêneos isotrópicos FRW plano, hiperbólico e esférico.

Vamos primeiramente obter as constantes de estrutura e as bases para Bianchi. Relacionando as informações das tabelas 2.1 e 2.3 obtemos as constantes de estrutura para os tipos Bianchi I,  $VII_A$  e IX (tabela 2.5):

Tabela 2.5: Constantes de estrutura para Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX.

Tipo de Bianchi	I	VII <sub>A</sub>	IX
$C_{23}^1 = -C_{32}^1$	0	0	1
$C_{12}^2 = -C_{21}^2$	0	A	0
$C_{13}^2 = -C_{31}^2$	0	-1	-1
$C_{12}^3 = -C_{21}^3$	0	1	1
$C_{13}^3 = -C_{31}^3$	0	A	0

A base  $\{\omega^a\}$  pode ser obtida pela relação  $d\omega^a = \frac{1}{2}C_{bc}^a\omega^b\wedge\omega^c$  (equação de *Maurer-Cartan*), que expandida na base coordenada como

$$d(\omega_i^a dx^i) = \frac{1}{2}C_{bc}^a(\omega_i^b dx^i) \wedge (\omega_j^c dx^j), \quad (2.20)$$

$$\omega_{i,j}^a dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2}C_{bc}^a\omega_i^b\omega_j^c dx^i \wedge dx^j, \quad (2.21)$$

resulta no sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\omega_{i,j}^a + \frac{1}{2}C_{bc}^a\omega_i^b\omega_j^c = 0, \quad (2.22)$$

que pode ser analiticamente resolvido.

A obtenção da base  $\{\eta_a\}$  é feita usando a relação de dualidade  $\omega^b \cdot \eta_a = \delta_a^b$ :

$$(\omega_j^b dx^j) \cdot (\eta_a^i \partial_i) = \eta_a^i \omega_j^b \delta_i^j = \delta_a^b, \quad (2.23)$$

resultando no sistema de equações

$$\eta_a^i \omega_i^b - \delta_a^b = 0, \quad (2.24)$$

que também pode ser analiticamente resolvido.

Por fim, os geradores do grupo  $\{\xi_a\}$  são obtidos por meio da relação (2.7),  $\mathcal{L}_{\xi_a}\omega^b = 0$ :

$$\mathcal{L}_{\xi_a}(\omega_i^b dx^i) = (\mathcal{L}_{\xi_a}\omega_i^b)dx^i = 0, \quad (2.25)$$

que resulta no sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\omega_{i,j}^b \xi_a^j + \omega_j^b \xi_{a,i}^j = 0, \quad (2.26)$$

cuja solução analítica resulta nos vetores  $\xi_a$ . Relembramos por último que a álgebra do grupo é 3-dimensional, e portanto no cálculo das constantes de estrutura e das bases os índices  $(a, b, c, \dots, i, j, k, \dots)$  correm de 1 a 3 apenas.

Na tabela 2.7 mostramos o resultado do cálculo de bases descrito acima para os três tipos de Bianchi já mencionados (I, VII<sub>A</sub> e IX):

 Tabela 2.7: Bases de  $G_3$  para Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX.

	I	VII <sub>A</sub>	IX
$\xi_1$	$\partial_x$	$\partial_x + (z - Ay)\partial_y - (y + Az)\partial_z$	$\sec y \cos z \partial_x + \sin z \partial_y - \tan y \cos z \partial_z$
$\xi_2$	$\partial_y$	$\partial_y$	$-\sec y \sin z \partial_x + \cos z \partial_y + \tan y \sin z \partial_z$
$\xi_3$	$\partial_z$	$\partial_z$	$\partial_z$
$\eta_1$	$\partial_x$	$\partial_x$	$\partial_x$
$\eta_2$	$\partial_y$	$e^{-Ax}(\cos x \partial_y - \sin x \partial_z)$	$\sin x \tan y \partial_x + \cos x \partial_y - \sin x \sec y \partial_z$
$\eta_3$	$\partial_z$	$e^{-Ax}(\sin x \partial_y + \cos x \partial_z)$	$-\cos x \tan y \partial_x + \sin x \partial_y + \cos x \sec y \partial_z$
$\omega^1$	$dx$	$dx$	$dx + \sin y dz$
$\omega^2$	$dy$	$e^{Ax}(\cos x dy - \sin x dz)$	$\cos x dy - \sin x \cos y dz$
$\omega^3$	$dz$	$e^{Ax}(\sin x dy + \cos x dz)$	$\sin x dy + \cos x \cos y dz$

Uma tabela de bases completa para os nove tipos de Bianchi pode ser encontrada em [33]. Essas bases compõem o grupo  $G_3$ . Para completar a representação do espaço-tempo  $(3 + 1)$ -dimensional, adicionamos os vetores  $\xi_4 = \eta_4 = \partial_t$  e a 1-forma  $\omega^4 = dt$ .

## 2.4 Conexão e Tensor de Riemann

As constantes de estruturas para os tipos de Bianchi são mostradas na tabela 2.1. Vamos mostrar a conexão e tensor de Riemann que incluem tais constantes de estrutura.

A conexão  $\Gamma_{ab}^c$  é definida em

$$\begin{aligned} \nabla_b \eta_a &= \Gamma_{ab}^c \eta_c, \\ \nabla_b \omega^a &= -\Gamma_{cb}^a \omega^c. \end{aligned} \quad (2.27)$$

de modo que, para um vetor  $A = A^a \eta_a$  e uma 1-forma  $B = B_a \omega^a$  quaisquer,

$$\begin{aligned} \nabla_a A^b &= A^b_{|a} + \Gamma_{ca}^b A^c, \\ \nabla_a B_b &= B_{b|a} - \Gamma_{ba}^c B_c. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Então, com torção nula, temos que

$$\nabla_a \eta_b - \nabla_b \eta_a = \eta_c (\Gamma_{ba}^c - \Gamma_{ab}^c) = [\eta_a, \eta_b] = D_{ab}^c \eta_c = -C_{ab}^c \eta_c. \quad (2.29)$$

onde  $[\boldsymbol{\eta}_a, \boldsymbol{\eta}_b] = \eta_a^i \partial_i \boldsymbol{\eta}_b - \eta_b^i \partial_i \boldsymbol{\eta}_a$ .

Da relação de metricidade,  $g_{ab;c} = g_{ab|c} - \Gamma_{ac}^f g_{fb} - \Gamma_{bc}^h g_{ah} = 0$ , temos

$$g_{ab|c} = \Gamma_{ac}^f g_{fb} + \Gamma_{bc}^h g_{ah}. \quad (2.30)$$

E juntando (2.29) e (2.30), temos que:

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2} [g_{ab|c} + g_{ac|b} - g_{bc|a} + C_{abc} - C_{cab} - C_{bac}]. \quad (2.31)$$

O tensor de Riemann é obtido do modo usual:

$$[\nabla_c, \nabla_d] T^a = R^a_{bcd} T^b, \quad (2.32)$$

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{bd|c} - \Gamma^a_{bc|d} + \Gamma^a_{fc} \Gamma^f_{bd} - \Gamma^a_{fd} \Gamma^f_{bc} - C^f_{cd} \Gamma^a_{bf}. \quad (2.33)$$

# Capítulo 3

## Equações de Campo e Soluções

Neste capítulo, apresentamos as equações de campo que serão alvo de nossos estudos. Mostramos também os sistemas de equações diferenciais que resolveremos para cada caso (anisotrópico e isotrópico) e para cada tipo de Bianchi. Soluções exatas particulares são mostradas como preparação para o estudo numérico mais geral do capítulo 4.

### 3.1 Equações de Campo de Einstein

Como colocamos anteriormente, o espaço-tempo é descrito em termos de uma variedade Riemanniana diferenciável de quatro dimensões, onde são definidos uma métrica  $g_{ab}$  e um tensor curvatura  $R^a_{bcd}$ .

O *tensor de Ricci*  $\mathbf{R} = R_{ab}\omega^a \otimes \omega^b$  é dado pela contração do tensor curvatura,

$$R_{ab} = R^c_{acb}, \quad (3.1)$$

e possui com ele a seguinte relação de simetria:

$$R^a_{bcd;a} = -2R_{b[c;d]}. \quad (3.2)$$

O *escalar de Ricci* ou *escalar de curvatura*  $R$  é dado pelo traço do tensor de Ricci,

$$R = g^{ab}R_{ab} = R^a_a. \quad (3.3)$$

Podemos agora definir o *tensor de Einstein*  $\mathbf{G} = G_{ab}\omega^a \otimes \omega^b$  como:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (3.4)$$

que é obtido pelo princípio de mínima ação aplicado ao lagrangiano relativístico

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R. \quad (3.5)$$

O tensor de Einstein guarda informação sobre o conteúdo geométrico do espaço-tempo.

A distribuição de matéria e campos no espaço-tempo é dada pelo *tensor Momento-Energia*  $\mathbf{T} = T_{ab}\omega^a \otimes \omega^b$ . Segundo a Relatividade Geral, a conexão entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria é relatada pela *equação de campo de Einstein*:

$$G_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}\Lambda = 8\pi T_{ab}. \quad (3.6)$$

onde o termo  $\Lambda$  é chamado *Constante Cosmológica*. Sua interpretação pode ser geométrica, complementando o tensor de Einstein no lado esquerdo da equação de campo (é o caso deste trabalho); ou ainda pode ser interpretado como um componente físico de matéria e energia, complementando o tensor momento-energia no lado direito da equação.

A geometria do espaço-tempo, conectada à distribuição de matéria e energia pelas equações de Einstein, determina a dinâmica do universo (*gravitação*).

## 3.2 Equações de campo da Teoria Quadrática

Variações da métrica no lagrangiano gravitacional [34]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\Lambda + R + \alpha \left( R_{ab}R^{ab} - \frac{1}{3}R^2 \right) + \beta R^2 \right] + \mathcal{L}_c, \quad (3.7)$$

(onde  $\mathcal{L}_c$  é a parte clássica do Lagrangiano e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes) resultam nas equações de campo

$$E_{ab} = 0, \quad (3.8)$$

descritas pelo tensor  $\mathbf{E} = E_{ab}\omega^a \otimes \omega^b$ :

$$\begin{aligned} E_{ab} &\equiv G_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}\Lambda - \left(\beta - \frac{1}{3}\alpha\right) H_{ab}^{(1)} - \alpha H_{ab}^{(2)} - T_{ab}, \\ G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \\ H_{ab}^{(1)} &= \frac{1}{2}g_{ab}R^2 - 2RR_{ab} - 2g_{ab}\square R + 2R_{;ab}, \\ H_{ab}^{(2)} &= \frac{1}{2}g_{ab}R^{cd}R_{cd} - \square R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\square R + R_{;ab} - 2R^{cd}R_{cbda} \end{aligned} \quad (3.9)$$

e  $\square = \nabla_a \nabla^a$  é o operador D'alembertiano. O tensor  $T_{ab}$  corresponde à fonte de momento-energia relacionada à parte clássica do Lagrangiano  $\mathcal{L}_c$ . Neste trabalho são consideradas apenas soluções de vácuo,  $T_{ab} = \mathcal{L}_c = 0$  (seção 3.3), que parece ser a condição mais natural para a descrição do universo primordial. Assim como em outras teorias métricas, o divergente do tensor de campo  $E_{ab}$  deve ser zero:

$$\nabla_a E^{ab} = 0. \quad (3.10)$$

### 3.3 Soluções de Vácuo

A ausência de fontes ( $T_{ab} = 0$ ) caracteriza as soluções de vácuo, que podem ser entendidas como um cenário onde a geometria do universo é dominante, tal como o universo próximo ao seu surgimento. As soluções de vácuo de uma teoria gravitacional são as mais naturais para descrever tal cenário.

Para a equação de Einstein (3.6), temos

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \frac{1}{2}g_{ab}\Lambda = 0, \quad (3.11)$$

cujo traço resulta em

$$R = 2\Lambda \quad (3.12)$$

e

$$R_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}\Lambda. \quad (3.13)$$

Soluções que obedecem tais condições são chamadas *Espaços de Einstein*. Vemos que, no caso particular de  $\Lambda = 0$ , as equações (3.12) e (3.13) devem se anular ( $R_{ab} = 0$  e  $R = 0$ ); assim a equação (3.11) se reduz a:

$$R_{ab} = 0, \quad (3.14)$$

que assume o papel da real equação dinâmica da solução de vácuo para espaços de Einstein.

A equação de campo quadrática (3.8), com  $T_{ab} = 0$ , é identicamente satisfeita quando assumimos os espaços de Einstein, uma vez que os tensores  $H_{ab}^{(1)}$  e  $H_{ab}^{(2)}$  em (3.8) se anulam com as substituições (3.12) e (3.13), e os termos das equações de Einstein também. Daí concluímos que *"qualquer espaço de Einstein é também uma solução de vácuo particular da teoria quadrática."*

### 3.4 Métrica Homogênea

A *homogeneidade* (e *isotropia*) do nosso universo são conceitos amplamente aceitos e usados como caminho natural na construção das teorias padrão. Fortes evidências observacionais (distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias, radiação de raios-X e raios- $\gamma$ , radiação cósmica de fundo) e teóricas (coerência entre teorias e observações) justificam a consideração de tais características [32].

Pensem em uma família de hipersuperfícies tridimensionais tipo-espaço  $\Sigma_t$  parametrizadas pela família de curvas tipo-tempo (observadores, linhas-mundo) de parâmetro  $t$ . A homogeneidade é formalizada em termos da isometria da métrica transformando pontos



em  $\Sigma_t$ . Seja  $\mathbf{n}$  um vetor tipo-tempo unitário e normal à hipersuperfície  $\Sigma_t$ ,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_a n^a = -1. \quad (3.15)$$

geodésico e com vorticidade zero, para os casos espacialmente homogêneos. Definimos um sistema de coordenadas em que  $x^4$  é constante na hipersuperfície  $\Sigma_t$ :

$$n_a = (0, 0, 0, -N); \quad (3.16)$$

então

$$n^a = (-N^\alpha/N, 1/N). \quad (3.17)$$

Assim  $x^4$  parametriza a separação na direção normal à  $\Sigma_t$  entre as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t+dt}$ . A *função lapso*  $N$  especifica o tempo próprio de separação entre as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t+dt}$  na direção normal à  $\Sigma_t$ ,

$$d\tau = N dt. \quad (3.18)$$

O *vetor deslocamento*  $N^\alpha$  determina a distância entre o ponto  $x^\alpha$  na hipersuperfície  $\Sigma_{t+dt}$  e a sua interseção em  $\Sigma_{t+dt}$  na direção normal à  $\Sigma_t$  (figura 3.1).

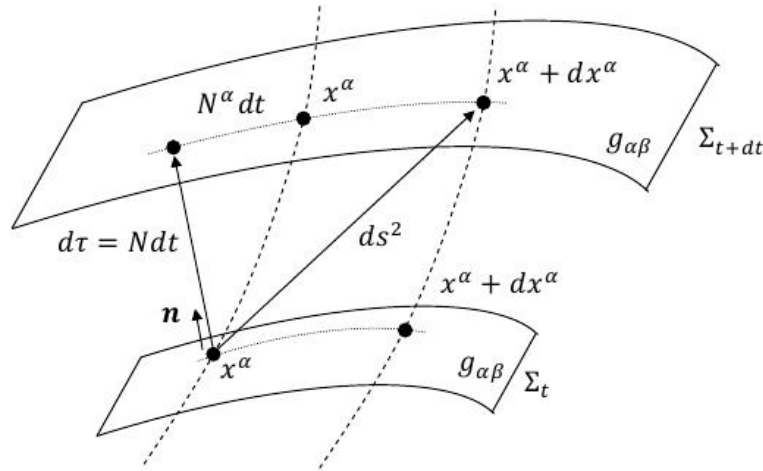


Figura 3.1: Vetor deslocamento e função lapso numa folheação de hipersuperfícies homogêneas  $\Sigma_t$ .

O formalismo descrito acima é conhecido como *formalismo ADM*, devido à Arnowitt, Deser e Misner [35]. O elemento de linha que mede a separação entre os pontos  $x^a$  ( $x^\alpha$  em  $t$ ) e  $x^a + dx^a$  ( $x^\alpha + dx^\alpha$  em  $t + dt$ ) é dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(N^\alpha dt + dx^\alpha)(N^\beta dt + dx^\beta) - N^2 dt^2 \quad (3.19)$$

[15, 36].

Em termos das bases  $\omega^\alpha$ , podemos expressar o elemento de linha acima como o tensor

métrico

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}(N^\alpha \mathbf{dt} + \boldsymbol{\omega}^\alpha) \otimes (N^\beta \mathbf{dt} + \boldsymbol{\omega}^\beta) - N^2 \mathbf{dt}^2 \quad (3.20)$$

[33, 37]. Podemos agora supor que as linhas-mundo cruzam perpendicularmente as hiper-superfícies. Disso resulta a nulidade do vetor deslocamento,  $N^\alpha = 0$ , e

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta - N^2 \mathbf{dt}^2. \quad (3.21)$$

Temos assim definida uma métrica homogênea

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(t) & 0 \\ 0 & -N^2(t) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

para  $\mathbf{g} = g_{ab} \boldsymbol{\omega}^a \otimes \boldsymbol{\omega}^b$  (2.19), onde  $g_{\alpha\beta}(t)$  é constante em  $\Sigma_t$ . Esta métrica é a mais geral possível para representar o universo espacialmente homogêneo.

Um sistema de coordenadas especial em que o elemento de linha segue

$$g_{44} = -1 \quad (3.23)$$

e

$$g_{\alpha 4} = 0 \quad (3.24)$$

é chamado de sistema de referência *síncrono* [38, 15]. Nesse sistema o parâmetro tempo  $t$  coincide com o tempo próprio  $\tau$ .

### 3.5 Casos Anisotrópicos

Para o estudo do universo não-isotrópico, supõe-se uma métrica homogênea e anisotrópica dada por

$$g_{\alpha\beta}(t) = \begin{pmatrix} a_1^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2(t) & a_4(t) \\ 0 & a_4(t) & a_3^2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$d\mathbf{s}^2 = -\mathbf{dt}^2 + g_{\alpha\beta}(t) \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta, \quad (3.26)$$

onde as bases Bianchi são dadas na tabela (2.7). A substituição do elemento de linha acima em (3.8), levando em conta a Conexão (2.31) e a Derivada covariante (2.28), resulta no sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares de quarta-ordem abaixo<sup>1</sup>, onde  $a_i(t)$ , para  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , são os componentes da métrica:

<sup>1</sup>As equações são muito extensas para serem escritas analiticamente, e sua manipulação e cálculo podem ser feitos apenas computacionalmente.

$$E_{\alpha\beta} = 0 \rightarrow \frac{d^4}{dt^4} a_i(t) = f_i \left( \frac{d^3}{dt^3} a_j(t), \ddot{a}_j(t), \dot{a}_j(t), a_j(t) \right); \quad (3.27)$$

$$E_{\alpha 4} = 0 \rightarrow g_i \left( \frac{d^3}{dt^3} a_j(t), \ddot{a}_j(t), \dot{a}_j(t), a_j(t) \right) = 0. \quad (3.28)$$

As equações de terceira ordem (3.28) constituem os vínculos de energia do sistema de equações. As soluções numéricas desses sistemas de equações para Bianchi I e VII<sub>A</sub>, são mostradas nas seções 4.2.1 e 4.2.2, respectivamente.

### 3.5.1 Caracterização Invariante das Soluções

A fim de caracterizar as soluções anisotrópicas obtidas, vamos nos basear no formalismo tetrádico invariante descrito por Stephani, p. 39, [36]. Podemos projetar uma métrica  $g_{ab}$  num espaço de Minkowski, por exemplo, utilizando o formalismo tetrádico

$$h^a_{(r)} h^b_{(s)} g_{ab} = \eta_{(r)(s)} = \text{diag}(1, 1, 1, -1), \quad (3.29)$$

onde  $h^a_{(r)}$  é a base tetrada e  $\eta_{(r)(s)}$  é a métrica do espaço de Minkowski. Podemos escrever quatro vetores tetrádicos  $v^a = h^a_{(1)}$ ,  $w^a = h^a_{(2)}$ ,  $z^a = h^a_{(3)}$ ,  $\frac{u^a}{c} = h^a_{(4)}$ , ortonormais  $v^a v_a = w^a w_a = z^a z_a = 1$  (tipo-espaço) e  $\frac{u^a}{c} \frac{u_a}{c} = -1$  (tipo-tempo) de modo que

$$g_{ab} = h^a_{(r)} h^b_{(s)} \eta_{(r)(s)} = v_a v_b + w_a w_b + z_a z_b - \frac{u_a u_b}{c^2}. \quad (3.30)$$

Podemos ainda projetar na *base tetrádica de vetores nulos* ( $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}$ ) dados pelas combinações lineares (e normalizadas) reais

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{u_a}{c} + v_a \right), \\ l_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{u_a}{c} - v_a \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

e imaginárias

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (z_a - i w_a), \\ \bar{t}_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (z_a + i w_a), \end{aligned} \quad (3.32)$$

de ( $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ ). Assim, os vetores nulos obedecem

$$\begin{aligned} t^a \bar{t}_a &= -k^a l_a = 1, \\ \text{outros} &= 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

e a métrica nula pode ser escrita como:

$$g'_{UV} = g_{ab}U^aV^b = U^aV_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

$$g_{ab} = -k_a l_b - l_a k_b + t_a \bar{t}_b + \bar{t}_a t_b.$$

onde  $U^a$  e  $V^b$  são os vetores nulos, genericamente. No apêndice A mostramos o cálculo dos vetores  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$  que projetam a métrica (3.25-3.26) na métrica nula (3.34).

A projeção do tensor de Ricci na base tetrádica nula resulta em 10 escalares independentes

$$R_{UV} = R_{ab}U^aV^b, \quad (3.35)$$

onde  $U^a$  e  $V^b$  são os vetores nulos ( $R_{UV}$  é um escalar, não um tensor). Para soluções do tipo Espaço de Einstein, onde  $R_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}\Lambda$  (equação 3.13), temos que  $R_{UV} = \frac{1}{2}\Lambda g_{ab}U^aV^b = \frac{1}{2}\Lambda U^aV_b$ , e assim os únicos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula são

$$\begin{aligned} R_{kl} &= -\frac{1}{2}\Lambda, \\ R_{t\bar{t}} &= \frac{1}{2}\Lambda, \\ R_{outros} &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Veremos nos resultados que soluções que convergem para espaços de Einstein têm escalares projetados do tensor de Ricci tendendo para os valores acima.

Ainda podemos analisar os *coeficientes complexos de Newman-Penrose*,

$$\begin{aligned} \psi_0 &= C_{abcd}k^a t^b k^c t^d, \\ \psi_1 &= C_{abcd}k^a l^b k^c t^d, \\ \psi_2 &= C_{abcd}k^a t^b \bar{t}^c l^d, \\ \psi_3 &= C_{abcd}k^a l^b \bar{t}^c l^d, \\ \psi_4 &= C_{abcd}\bar{t}^a l^b \bar{t}^c l^d, \end{aligned} \quad (3.37)$$

definidos pela projeção tetrádica do Tensor de Weyl ([39]):

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ca}R_{bd} + g_{db}R_{ca} - g_{cb}R_{da} - g_{da}R_{cb}) + \frac{1}{6}R(g_{ca}g_{bd} - g_{cb}g_{da}). \quad (3.38)$$

Os coeficientes de Newman-Penrose estão relacionados com a *classificação de Petrov* (apêndice B) conforme explicado em [33, 36]. Quando todos os  $\psi$ 's são zero, por exemplo, temos um Petrov tipo O, o tensor de Weyl é nulo, e fica caracterizado um espaço conforme de Minkowski. Este é o caso das soluções isotrópicas da próxima seção.

É importante mencionar que, conforme afirmação de [40], "não existe um conjunto completo de condições para assegurar que um modelo cosmológico é suficientemente pró-

ximo de Friedmann-Lamaitre". Este livro é baseado em [41], onde duas condições são impostas: i) as equações de Einstein devem ser satisfeitas, e ii) a fonte deve ser uma mistura de radiação e poeira. Nesta tese, não nos preocupamos em satisfazer as condições acima, e obviamente não esperamos que os resultados obtidos no contexto aqui discutido sejam compatíveis com [40, 41].

### 3.6 Casos Isotrópicos

Um espaço-tempo homogêneo e isotrópico pode ser *plano* (aberto),

$$ds^2 = a^2(t)\{dx^2 + dy^2 + dz^2\} - dt^2, \quad (3.39)$$

*esférico* (fechado),

$$ds^2 = a^2(t)\{d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} - dt^2, \quad (3.40)$$

ou *hiperbólico* (aberto)

$$ds^2 = a^2(t)\{d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} - dt^2; \quad (3.41)$$

$ds^2$  denota o elemento de linha (métrica) e  $a(t)$  é o *fator de expansão*. Podemos transladar a métrica do espaço plano para coordenadas esféricas e escrever (3.39), (3.40) e (3.41) como

$$ds^2 = a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right\} - dt^2, \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} k = 0, & r = \chi \\ k = 1, & r = \sin\chi \\ k = -1, & r = \sinh\chi \end{cases} \quad (3.43)$$

onde ( $k = 0$ ) para o espaço plano, ( $k = 1$ ) para o espaço esférico e ( $k = -1$ ) para o espaço hiperbólico. O modelo cosmológico homogêneo e isotrópico descrito por (3.42) é conhecido como modelo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Tal modelo descreve um universo de 3-curvatura constante e nula (plano), positiva (esférico) ou negativa (hiperbólico) [42].

Os casos isotrópicos são obtidos supondo

$$\mathbf{g} = a^2(t)[(\boldsymbol{\omega}^1)^2 + (\boldsymbol{\omega}^2)^2 + (\boldsymbol{\omega}^3)^2] - dt^2. \quad (3.44)$$

A substituição da base de Bianchi I (tabela 2.7) em (3.44) gera diretamente o espaço homogêneo e isotrópico plano (3.39).

Substituindo a base de Bianchi VII<sub>A</sub> (tabela 2.7) em (3.44) obtemos o elemento de

linha

$$ds^2 = a^2(t)[dx^2 + e^{2Ax}(dy^2 + dz^2)] - dt^2, \quad (3.45)$$

que mediante a transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{A} \ln(\cosh\chi - \sinh\chi \cos\theta), \\ y &= \frac{1}{A} \sin\theta \cos\varphi / (\cotanh\chi - \cos\theta), \\ z &= \frac{1}{A} \sin\theta \sin\varphi / (\cotanh\chi - \cos\theta) \end{aligned} \quad (3.46)$$

e  $a(t)/A \rightarrow a(t)$  resulta no espaço homogêneo e isotrópico hiperbólico (3.41).

O elemento de linha obtido pela substituição da base Bianchi IX (tabela 2.7) na parte espacial de (3.44),

$$dl^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2, \quad (3.47)$$

é dado por

$$ds^2 = a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\sin y dy dz] - dt^2, \quad (3.48)$$

que coincide com o elemento de linha espacial esférico  $dl^2 = d\chi_1^2 + d\chi_2^2 + d\chi_3^2 + d\chi_4^2$ , mediante a troca de variáveis

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \cos\left(\frac{x+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \chi_2 &= \sin\left(\frac{x+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \chi_3 &= -\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \chi_4 &= \cos\left(\frac{x-z}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

e  $2a(t) \rightarrow a(t)$ . Portanto, o elemento de linha espacial de Bianchi IX (3.47) descreve uma 3-esfera de raio igual a  $\frac{1}{2}$ .

Assim, fica demonstrado que os espaços homogêneos Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX contêm os modelos isotrópicos FRW plano, hiperbólico e esférico, respectivamente.

Para o estudo das equações de campo de universo homogêneo e isotrópico vamos supor a métrica espacial

$$g_{\alpha\beta}(t) = \begin{pmatrix} a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$ds^2 = -dt^2 + g_{\alpha\beta}(t)\omega^\alpha \otimes \omega^\beta \quad (3.51)$$

obtida com a escolha particular  $a_4(t) = 0$  e  $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = a(t)$  do caso mais geral (3.25 e 3.26). As equações de campo (3.8), considerando a Conexão (2.31) e a Derivada covariante (2.28), resultam em uma única equação dinâmica não-linear de quarta-ordem, mais simples do que o sistema de equações obtido para o caso mais geral (não-isotrópico).

Convém observar que a constante  $\alpha$  das equações (3.7-3.8) desaparece das equações de

campo isotrópicas (equações 3.52-3.53, 3.55-3.56 e 3.61-3.62). Isto ocorre porque o termo  $R_{ab}R^{ab} - \frac{1}{3}R^2$  em (3.7) difere de  $\frac{1}{2}C_{abcd}C^{abcd}$  por uma derivada total, e o tensor de Weyl  $C_{abcd}$  (3.38) é identicamente nulo para soluções isotrópicas.

### 3.6.1 Caso Plano

As equações de campo (3.8) para o caso plano, considerando (2.31) e (2.28), são dadas por

$$\frac{d^4}{dt^4}a(t) = -2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\frac{d^3}{dt^3}a(t) - \frac{3\ddot{a}^2(t)}{2a(t)} + 6\ddot{a}(t)\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{1}{6\beta}\ddot{a}(t) - \frac{3\dot{a}^4(t)}{2a^3(t)} - \frac{1}{12\beta}\frac{\dot{a}^2(t)}{a(t)} + \frac{\Lambda}{24\beta}a(t), \quad (3.52)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}a(t) - \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}^2(t)}{\dot{a}(t)} + \ddot{a}(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3\dot{a}^3(t)}{2a^2(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{12\beta} - \frac{\Lambda}{72\beta}\frac{a^2(t)}{\dot{a}(t)} = 0, \quad (3.53)$$

onde (3.53) é o vínculo  $E_{44} = 0$ . Conforme já mencionado, qualquer solução de vácuo dos espaços de Einstein é também uma solução de vácuo particular da teoria quadrática; então a solução exata de de Sitter

$$a(t) = Ce^{\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}(t-t_0)} \quad (3.54)$$

(onde  $C$  é uma constante) é também uma solução da equação dinâmica (3.52). Se  $\Lambda \rightarrow 0$ , então trata-se de um espaço de Minkowski.

As soluções numéricas para o sistema de equações do caso plano são mostradas na seção 4.3.1.

### 3.6.2 Caso Hiperbólico

Para o caso hiperbólico, as equações de campo (3.8), considerando (2.31) e (2.28), são

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dt^4}a(t) = & -2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\frac{d^3}{dt^3}a(t) - \frac{3\ddot{a}^2(t)}{2a(t)} + 6\ddot{a}(t)\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{1}{6\beta}\ddot{a}(t) - \frac{3\dot{a}^4(t)}{2a^3(t)} \\ & - \frac{1}{12\beta}\frac{\dot{a}^2(t)}{a(t)} + \frac{\Lambda}{24\beta}a(t) + \frac{1}{12\beta}\frac{A^2}{a(t)} + \frac{1}{2}\frac{A^4}{a^3(t)} - 2A^2\frac{\ddot{a}(t)}{a^2(t)} + A^2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^3(t)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3}a(t) - \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}^2(t)}{\dot{a}(t)} + \ddot{a}(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3\dot{a}^3(t)}{2a^2(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{12\beta} \\ - \frac{\Lambda}{72\beta}\frac{a^2(t)}{\dot{a}(t)} - \frac{1}{12\beta}\frac{A^2}{\dot{a}(t)} + A^2\frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} + \frac{1}{2}\frac{A^4}{\dot{a}(t)a^2(t)} = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

A solução exata abaixo do espaço de Einstein

$$a(t) = A\sqrt{\frac{6}{\Lambda}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}(t-t_0)\right) \quad (3.57)$$

[31] é também uma solução dos sistema de equações acima. Esta solução é de fato a solução de de Sitter mediante uma transformação de coordenadas.

É importante mencionar que o caso hiperbólico possui uma solução exata (do tipo espaço de Einstein) mais geral do que (3.57) para uma métrica homogênea  $g_{ab}(t) = \text{diag}(a_1(t), a_2(t), a_3(t), -1)$ :

$$\begin{aligned} a_1(t) &= A\sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}(t-t_0)\right), \\ a_2(t) &= C_1 A\sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}(t-t_0)\right), \\ a_3(t) &= C_1 A\sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}(t-t_0)\right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

[30] onde  $C_1$  é uma constante. Neste caso, obviamente, o sistema de equações de campo<sup>2</sup> é mais geral do que (3.55-3.56). Para  $\Lambda \rightarrow 0$ , a solução é dada por [43]

$$\begin{aligned} a_1(t) &= At + C_1, \\ a_2(t) &= C_2(At + C_1), \\ a_3(t) &= C_2(At + C_1), \end{aligned} \quad (3.59)$$

( $C_1, C_2$  são constantes) que equivale a um espaço de Minkowski, uma vez que o tensor de Riemann é nulo,  $R^a_{bcd} = 0$ . De fato, tal solução equivale, sob uma transformação de coordenadas, a um espaço de Milne:

$$ds^2 = t^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] - dt^2. \quad (3.60)$$

As soluções numéricas para o sistema de equações do caso hiperbólico são mostradas na seção 4.3.2.

### 3.6.3 Caso Esférico

Finalmente, para o caso esférico, temos as seguintes equações de campo (3.8), com (2.31) e (2.28):

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dt^4} a(t) &= -2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{d^3}{dt^3} a(t) - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}^2(t)}{a(t)} + 6\ddot{a}(t) \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{1}{6\beta} \ddot{a}(t) - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}^4(t)}{a^3(t)} \\ &\quad - \frac{1}{12\beta} \frac{\dot{a}^2(t)}{a(t)} + \frac{\Lambda}{24\beta} a(t) - \frac{1}{4} \frac{\dot{a}^2(t)}{a^3(t)} + \frac{1}{32a^3(t)} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{a^2(t)} - \frac{1}{48\beta a(t)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} a(t) &- \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}^2(t)}{\dot{a}(t)} + \ddot{a}(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}^3(t)}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{12\beta} \\ &- \frac{\Lambda}{72\beta} \frac{a^2(t)}{\dot{a}(t)} + \frac{1}{48\beta \dot{a}(t)} - \frac{1}{4} \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} + \frac{1}{32\dot{a}(t)a^2(t)} = 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

que é também resolvida pela solução exata de de Sitter

$$a(t) = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}(t-t_0)\right). \quad (3.63)$$

As soluções numéricas para o sistema de equações do caso esférico são mostradas na seção 4.3.3.

<sup>2</sup>O sistema de equações é muito extenso para ser mostrado explicitamente.



### 3.6.4 Aproximação em Primeira Ordem

Para os casos isotrópicos, sendo o tensor de Weyl (3.38) identicamente nulo, resulta que os coeficientes de Newman-Penrose (3.37) também o são. Tampouco se faz necessária a projeção do tensor de Ricci nos vetores nulos, uma vez que a análise do mesmo permite caracterizar a solução, como veremos nos resultados. Assim, a análise das soluções isotrópicas não necessita da caracterização invariante, e utilizaremos uma aproximação perturbativa.

Vamos analisar a convergência das soluções isotrópicas por meio de uma aproximação perturbativa em primeira ordem,

$$a(t) = a'(t) + \delta e^{i\omega(t-t_0)}, \quad (3.64)$$

onde  $a'$  são as soluções exatas (3.54), (3.57) e (3.63),  $\delta$  é um termo constante muito pequeno ( $\delta \ll 1$ ) e  $\omega$  é a frequência. Substituímos a solução perturbada  $a(t)$  acima em (3.52), (3.55) e (3.61), respectivamente, e expandimos em  $\delta$ . A parte independente de  $\delta$  é automaticamente anulada, uma vez que  $a'$  é uma solução exata do sistema. Os termos de segunda ou maior ordem são desprezíveis. Resolvemos a equação em  $\omega$  para um grande tempo de evolução ( $\lim t \rightarrow \infty$ ), e como o sistema é de quarta-ordem, encontramos quatro possíveis soluções:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{i}{12}\sqrt{6\Lambda} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{24}{\beta} - 54\Lambda}, \\ \omega_2 &= \frac{i}{12}\sqrt{6\Lambda} - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{24}{\beta} - 54\Lambda}, \\ \omega_3 &= i\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)\sqrt{6\Lambda}, \\ \omega_4 &= i\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)\sqrt{6\Lambda}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Termos perturbativos com frequência  $\omega_3$  são desprezíveis para  $t \rightarrow \infty$ . Igual análise se aplica a termos com os primeiros fatores de  $\omega_{1,2}$ . Termos com frequência  $\omega_4$  se acoplam com  $a' = Ce^{i\omega(t-t_0)}$  e representam apenas um reescalonamento da constante  $C$  para  $C + \delta$ . Já os termos com frequências

$$\pm \frac{1}{12}\sqrt{\frac{24}{\beta} - 54\Lambda} \quad (3.66)$$

representam componentes oscilatórios que serão analisados no capítulo de resultados.

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos e Discussão

Neste capítulo apresentamos e discutimos as soluções numéricas das equações de campo apresentadas no capítulo anterior. Um estudo numérico se faz apropriado para verificar as soluções de sistemas de equações diferenciais altamente não-lineares, tais como estes obtidos por neste trabalho.

No desenvolvimento deste trabalho, utilizamos o manipulador algébrico *Maple* (versão 12) [44], o compilador *GCC* (GNU Compiler Collection, versão 4.4.1) [45], a biblioteca de cálculo científico *GSL* (GNU Scientific Library, versão 1.14) [46], e o software *GNUPlot* (versão 4.2), ambos pertencentes ao projeto *GNU* [47]. O método numérico utilizado foi o Runge-Kutta-Fehlberg, de passo variável. Exemplos dos códigos em *Maple* e em linguagem C são mostrados nos apêndices C e D.

### 4.1 Condição Inicial e Evolução dos Vínculos

A solução de vácuo do espaço homogêneo (3.8) resulta num sistema de equações diferenciais ordinárias que podem ser separadas em duas partes:  $E_{4a} = 0$  e  $E_{\alpha\beta} = 0$ .

Pode-se demonstrar que, uma vez satisfeita a condição  $E_{4a} = 0$  inicialmente (nas condições iniciais), ela será satisfeita por toda a evolução do sistema ([36], p. 165). Para isso partimos da identidade de Bianchi e obtemos a equação

$$E_{b;a}^a = 0, \quad (4.1)$$

onde já assumimos as condições (3.12-3.13) da solução de vácuo. Podemos agora escrever sua forma projetada por

$$E_{b;a}^a = [(h_c^a - n^a n_c)E_b^c]_{;a} = 0, \quad (4.2)$$

onde  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  é o tensor projeção e  $n_a$  é o vetor unitário definido em (3.16). Resolvendo (4.2) temos

$$h_c^a E_{b;a}^c - n_{;a}^a n_c E_b^c - n^a (n_c E_b^c)_{;a} = 0, \quad (4.3)$$

que implica em

$$\frac{1}{N}(NE_b^4)_{;4} = -n^a_{;a}NE_b^4 - E_{b;\gamma}^\gamma. \quad (4.4)$$

Supondo que inicialmente  $E_b^4 = 0$ , temos para a parte espacial ( $b = \delta$ ) que  $E_{\delta;\gamma}^\gamma = 0$ , e para a parte temporal ( $b = 4$ ) que  $E_{4;\gamma}^\gamma = 0$ . Ou seja, supondo inicialmente  $E_b^4 = 0$ , implica que  $E_{b;\gamma}^\gamma = 0$ . Mas como devemos ter  $E_\beta^\alpha = 0$  por toda a evolução (é a solução), temos que

$$\frac{1}{N}(NE_b^4)_{;4} = -n^a_{;a}NE_b^4, \quad (4.5)$$

e como  $E_b^4 = 0$  é zero inicialmente, sua derivada acima será zero também, e ele permanecerá constante (nulo) por toda a evolução.

As equações  $E_{\alpha\beta} = 0$  determinam a evolução temporal do sistema,  $g_{\alpha\beta}(t)$ , sendo portanto as *reais equações dinâmicas de campo* [36], enquanto  $E_{4b} = 0$  servem como *vínculos* a serem checados durante toda a evolução numérica do sistema de equações.

Quando necessário, monitoraremos ao longo do cálculo numérico o *escalar quadrático de Ricci* ( $R^{ab}R_{ab}$ ) e o *escalar quadrático de Riemann* ( $R^{abcd}R_{abcd}$ ). Tratam-se de escalares da teoria, que independem do sistema de coordenadas utilizado. Constituem assim um bom parâmetro para determinar se certos efeitos observados são de fato relacionados à geometria do espaço-tempo ou apenas efeitos ocasionados por uma escolha não conveniente de coordenadas. Assim, se um efeito tal como a aproximação de uma singularidade é acompanhado de uma variação atípica do escalar de Riemann, é provável que essa singularidade realmente esteja presente na geometria. Caso contrário, pode refletir uma deficiência das coordenadas em questão em modelar aquele ponto da geometria. Para modelos homogêneos, singularidades estão associadas a evolução temporal. Isto significa que estamos interessados na verificação de divergências no parâmetro  $t$ , e não nas coordenadas espaciais.

## 4.2 Casos Anisotrópicos

Nesta seção vamos apresentar as soluções numéricas da equação de campo (3.27) mostrada na seção (4.2) para os casos anisotrópicos de Bianchi I e VII<sub>A</sub>.

### 4.2.1 Bianchi I

#### De Sitter Assintótico

Vamos verificar a evolução temporal do sistema de equações (3.27). Para os parâmetros  $\alpha = 1, 0$ ,  $\beta = -5, 0$ ,  $\Lambda = 0, 06$ ,  $C = 1, 0$ ,  $t_0 = 0, 0$  e tempo inicial de evolução numérica  $t_i = 0, 0$ , escolhemos uma condição inicial próxima à solução exata de de Sitter (3.54),

consistente com os vínculos  $E_{41} \equiv 0$  e  $E_{44} \equiv 0$  (3.28):

$$\begin{aligned}
a_1(t_i) &= 1,1000000000000; \\
a_2(t_i) &= 1,0000000000000; \\
a_3(t_i) &= 1,0000000000000; \\
a_4(t_i) &= 0,2000000000000; \\
\dot{a}_1(t_i) &= 0,1000000000000; \\
\dot{a}_2(t_i) &= 0,1000000000000; \\
\dot{a}_3(t_i) &= 0,1000000000000; \\
\ddot{a}_1(t_i) &= 0,0100000000000; \\
\ddot{a}_2(t_i) &= 0,0100000000000; \\
\ddot{a}_3(t_i) &= 0,0100000000000; \\
\frac{d^3}{dt^3}a_1(t_i) &= 0,0010000000000; \\
\frac{d^3}{dt^3}a_2(t_i) &= 0,0010000000000; \\
\frac{d^3}{dt^3}a_3(t_i) &= 0,000831792283.
\end{aligned}$$

Nos resultados mostrados nesta tese, nos referimos à solução próxima de uma solução exata àquela em que um valor da condição inicial é escolhido até aproximadamente 0,1 distante do valor exato conhecido. As outras condições iniciais são ajustadas de modo que os vínculos  $E_{4b} = 0$  permaneçam válidos.

A evolução dos coeficientes de Newman-Penrose,  $\psi_0 - \psi_4$  (3.37), é mostrada na figura 4.1. Os coeficientes  $\psi_1$  e  $\psi_3$  já são identicamente nulos para a métrica escolhida. Os outros evoluem assintoticamente para zero. Daí, resulta que o tensor de Weyl (3.38) também se anula assintoticamente, por causa de (3.37).

A evolução dos componentes não identicamente nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35) é mostrada na figura 4.2. Todos evoluem assintoticamente para zero, exceto  $R_{kk} \rightarrow -\frac{1}{2}\Lambda = -0,03$  e  $R_{t\bar{t}} \rightarrow \frac{1}{2}\Lambda = 0,03$ ; assim o tensor de Ricci é proporcional a métrica, caracterizando um espaço de Einstein, conforme demonstrado pela equação (3.36).

A análise dos resultados mostra que esta solução evolui assintoticamente para de Sitter, uma vez que o tensor de Weyl se anula e o tensor de Ricci se torna proporcional à métrica. Na figura 4.3 vemos a evolução do vínculo  $E_{44}$ , que deve ser nulo. O vínculo se mantém dentro de uma precisão menor que  $10^{-12}$ , o que atesta a confiabilidade do cálculo numérico.

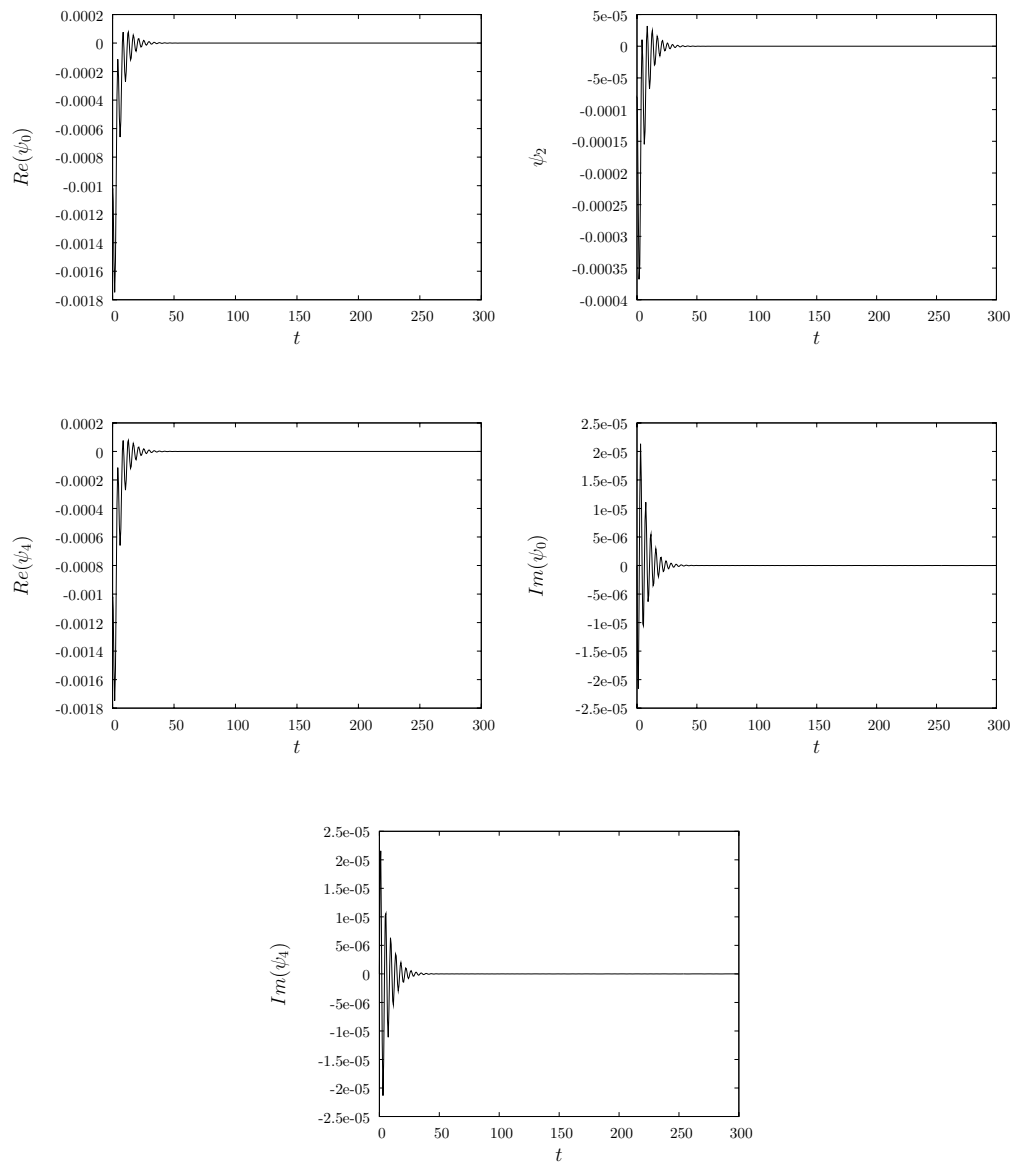


Figura 4.1: Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37).

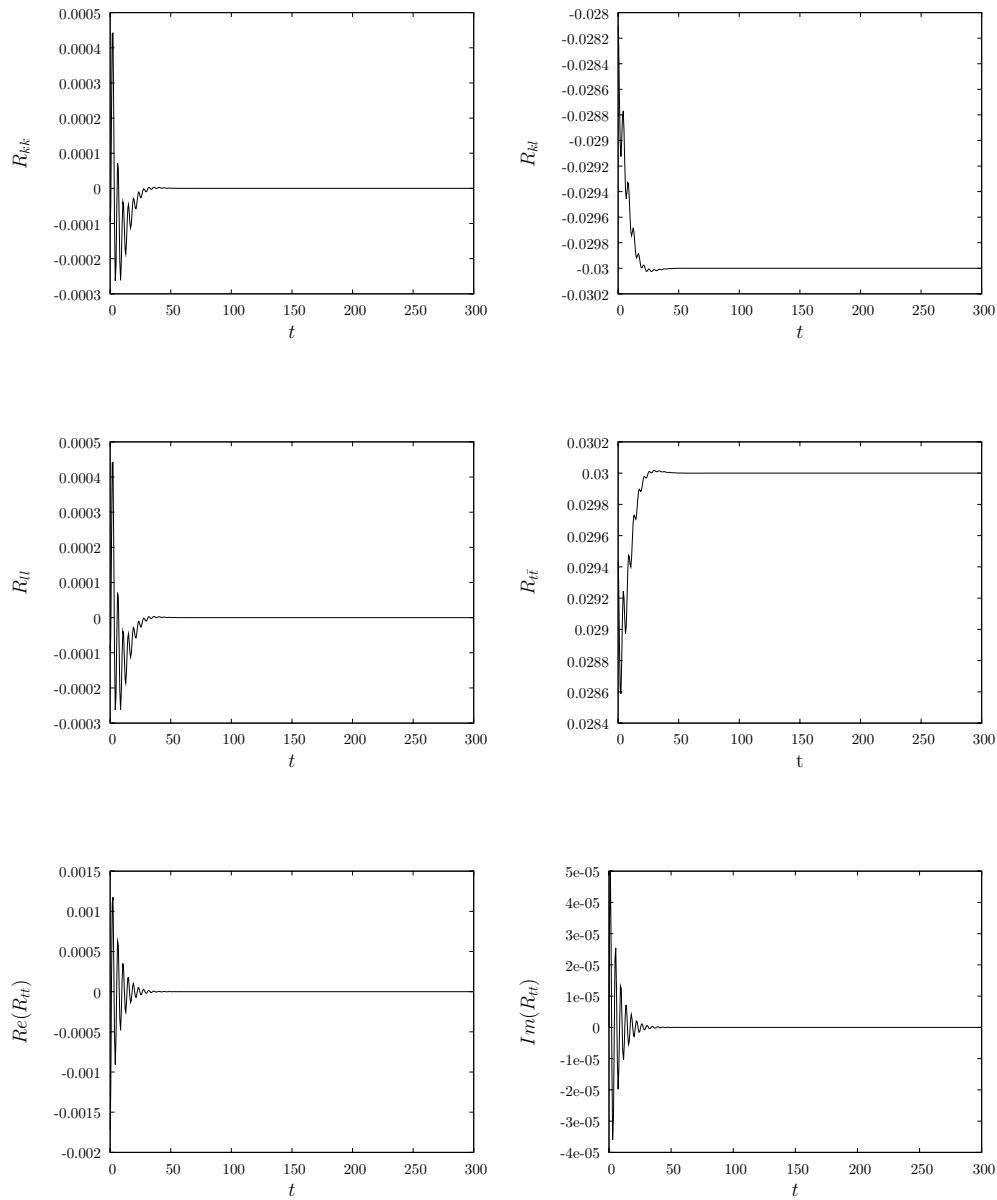


Figura 4.2: Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35). O tensor de Ricci é assintoticamente proporcional ao tensor métrico (3.36).

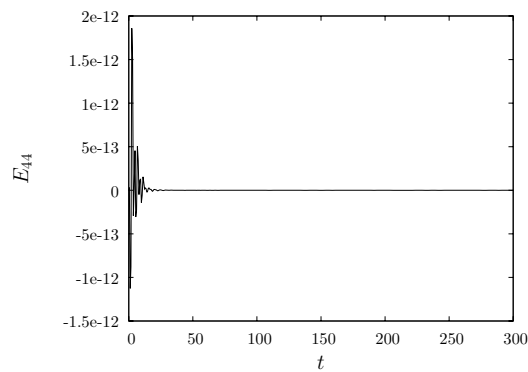


Figura 4.3: Evolução numérica do vínculo  $E_{44}$ , que deve ser nulo. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 300.

**Minkowski Assintótico**

Vamos agora escolher uma condição inicial próxima à solução de Minkowski (3.54 com  $\Lambda = 0$ ). Com os parâmetros  $\alpha = 2, 0$ ,  $\beta = -5, 0$ ,  $C = 1, 0$ ,  $t_i = 0, 0$  e  $t_0 = 0, 0$ , os únicos termos não nulos nas condições iniciais são:

$$\begin{aligned} a_1(t_i) &= 3,0000000000; \\ a_2(t_i) &= 1,0000000000; \\ a_3(t_i) &= 1,0000000000; \\ a_4(t_i) &= 2,0000000000; \\ \dot{a}_1(t_i) &= 1,0000000000; \\ \dot{a}_3(t_i) &= 0,2000000000; \\ \frac{d^3}{dt^3}a_3(t_i) &= -0,0245214348. \end{aligned}$$

Na figura 4.4 vemos a evolução temporal dos coeficientes não nulos de Newman-Penrose. Todos evoluem assintoticamente para zero. Na figura 4.5 vemos a evolução dos componentes do tensor de Ricci projetado na base nula. Todos se anulam assintoticamente.

Uma vez que os todos os coeficientes se anulam, ( $\psi \rightarrow 0$ ), também o tensor de Weyl se anula ( $C^a_{bcd} \rightarrow 0$ ); e como o tensor de Ricci também se anula ( $R_{ab} \rightarrow 0$ ), vem da equação (3.38) que também o tensor de Riemann se anula:  $R^a_{bcd} \rightarrow 0$ . Assim, neste sentido, esta solução é entendida como aproximando-se assintoticamente de Minkowski.

O vínculo é mostrado na figura 4.6, e permanece nulo com uma precisão de  $10^{-11}$  casas decimais.

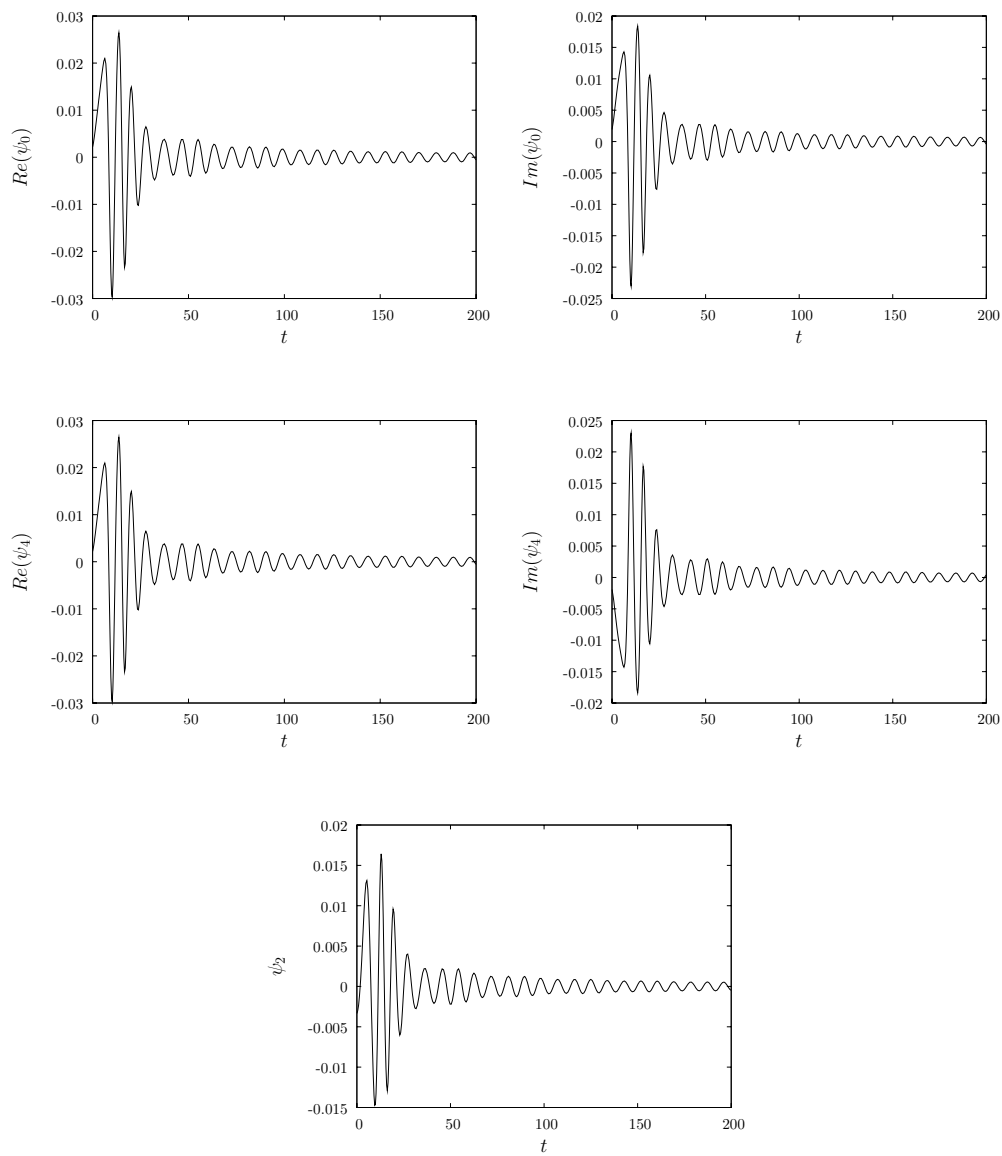


Figura 4.4: Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37).



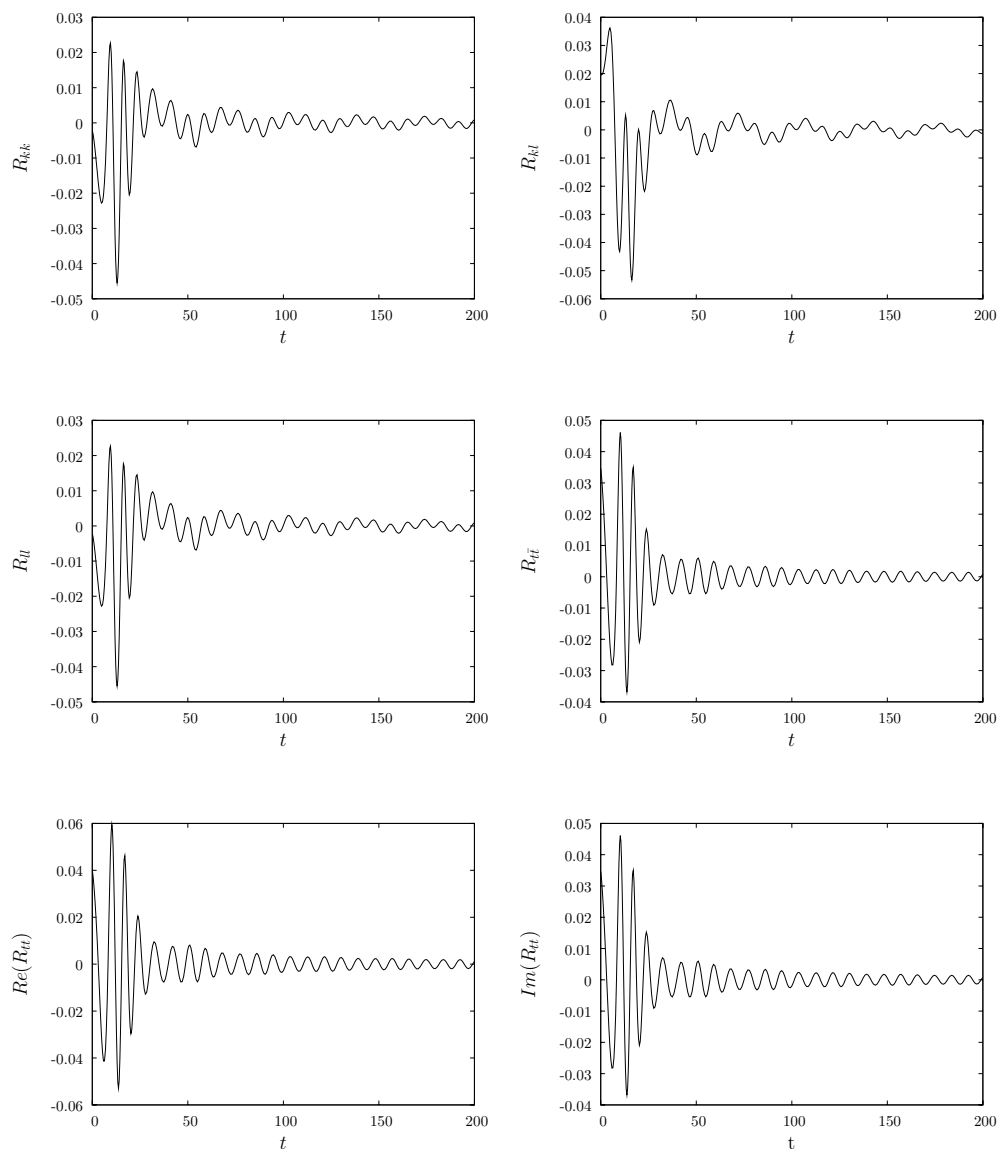


Figura 4.5: Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35).

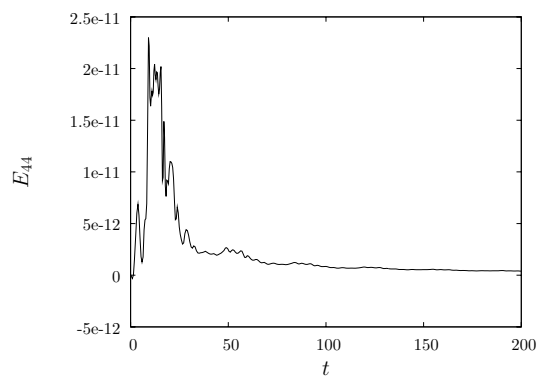


Figura 4.6: Evolução numérica do vínculo  $E_{44}$ , que deve ser nulo. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 200.

### Singularidade

Vamos agora escolher uma condição inicial ligeiramente distante da solução de Minkowski (3.54 com  $\Lambda = 0$ ). Com os parâmetros  $\alpha = 2, 0$ ,  $\beta = -5, 0$ ,  $C = 1, 0$ ,  $t_i = 0, 0$  e  $t_0 = 0, 0$ , os únicos termos não nulos nas condições iniciais são:

$$\begin{aligned} a_1(t_i) &= 3, 0000000000; \\ a_2(t_i) &= 1, 0000000000; \\ a_3(t_i) &= 1, 0000000000; \\ a_4(t_i) &= 2, 0000000000; \\ \dot{a}_3(t_i) &= 2, 0000000000; \\ \frac{d^3}{dt^3} a_3(t_i) &= -7, 111111000. \end{aligned}$$

Entendemos como ligeiramente distante aquela solução cuja condição inicial difere por um valor maior do que 0,1 da solução exata conhecida. Ainda assim, os vínculos devem ser preservado na condição inicial.

Na figura 4.7a vemos a evolução dos escalares  $R$ ,  $R^{ab}R_{ab}$  e  $R^{abcd}R_{abcd}$ , cujo crescimento indicam a aproximação de uma singularidade. A evolução do vínculo  $E_{44}$  na figura 4.7b, inicialmente nulo, mostrando a acurácia do cálculo, e apresentando crescimento repentino na aproximação da singularidade, confirma a validade do resultado. A perda de acurácia na aproximação de uma singularidade é esperada numericamente, pois o modelo perde a capacidade de modelar essa situação física.

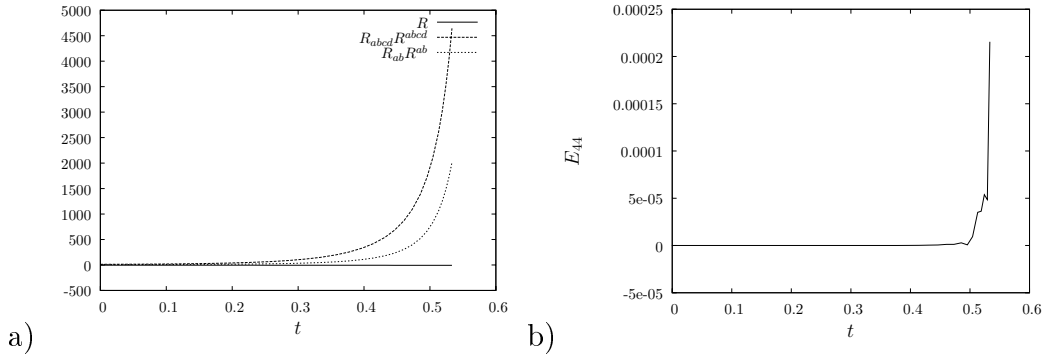


Figura 4.7: a) Evolução numérica dos escalares  $R$ ,  $R^{ab}R_{ab}$  e  $R^{abcd}R_{abcd}$ . b) Evolução numérica do vínculo  $E_{44}$ .

### 4.2.2 Bianchi VII<sub>A</sub>

#### De Sitter Assintótico

Vamos escolher uma condição inicial próxima à solução exata de de Sitter (3.58). Para  $A = 0, 1$ ,  $\alpha = 1, 0$ ,  $\beta = -5, 0$ ,  $\Lambda = 0, 02$ ,  $C_1 = 20, 0$ ,  $t_i = 1, 0$  e  $t_0 = 0, 0$ , os únicos termos

não nulos consistentes com os vínculos  $E_{41} \equiv 0$  e  $E_{44} \equiv 0$  são:

$$\begin{aligned}
a_1(t_i) &= 0,09725556480; \\
a_2(t_i) &= 2,001111297; \\
a_3(t_i) &= 2,001111297; \\
\dot{a}_1(t_i) &= 0,1001667130; \\
\dot{a}_2(t_i) &= 2,003334259; \\
\dot{a}_3(t_i) &= 2,003334259; \\
\ddot{a}_1(t_i) &= 0,0003335185491; \\
\ddot{a}_2(t_i) &= 0,006670370984; \\
\ddot{a}_3(t_i) &= 0,006670370984; \\
\frac{d^3}{dt^3}a_1(t_i) &= -0,0114153106; \\
\frac{d^3}{dt^3}a_2(t_i) &= 0,006677780858; \\
\frac{d^3}{dt^3}a_3(t_i) &= -0,465026064.
\end{aligned}$$

O componente  $a_4(t_i) = 0$  rapidamente evolui para valores não nulos, e a métrica não permanece diagonal.

Na figura 4.8 temos a evolução temporal dos coeficientes de Newman-Penrose,  $\psi_0 - \psi_4$  (3.37). Todos evoluem para zero assintoticamente ( $\psi_1$  e  $\psi_3$  já são identicamente nulos), e o tensor de Weyl assintoticamente se anula. A evolução dos componentes não identicamente nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35) são mostrados na figura 4.9. Todos evoluem assintoticamente para zero, exceto  $R_{kk} \rightarrow -\frac{1}{2}\Lambda = -0,01$  e  $R_{\bar{t}\bar{t}} \rightarrow \frac{1}{2}\Lambda = 0,01$ ; assim, o tensor de Ricci evolui para ser proporcional a métrica (espaço de Einstein, equação 3.36).

Esta condição inicial evolui assintoticamente para de Sitter, uma vez que o tensor de Weyl se anula e o tensor de Ricci se torna proporcional à métrica. Na figura 4.10 vemos a evolução dos vínculos  $E_{44}$  e  $E_{41}$ . Os vínculos sem mantêm nulos dentro de uma precisão menor que  $10^{-9}$ , o que atesta a confiabilidade do cálculo numérico.

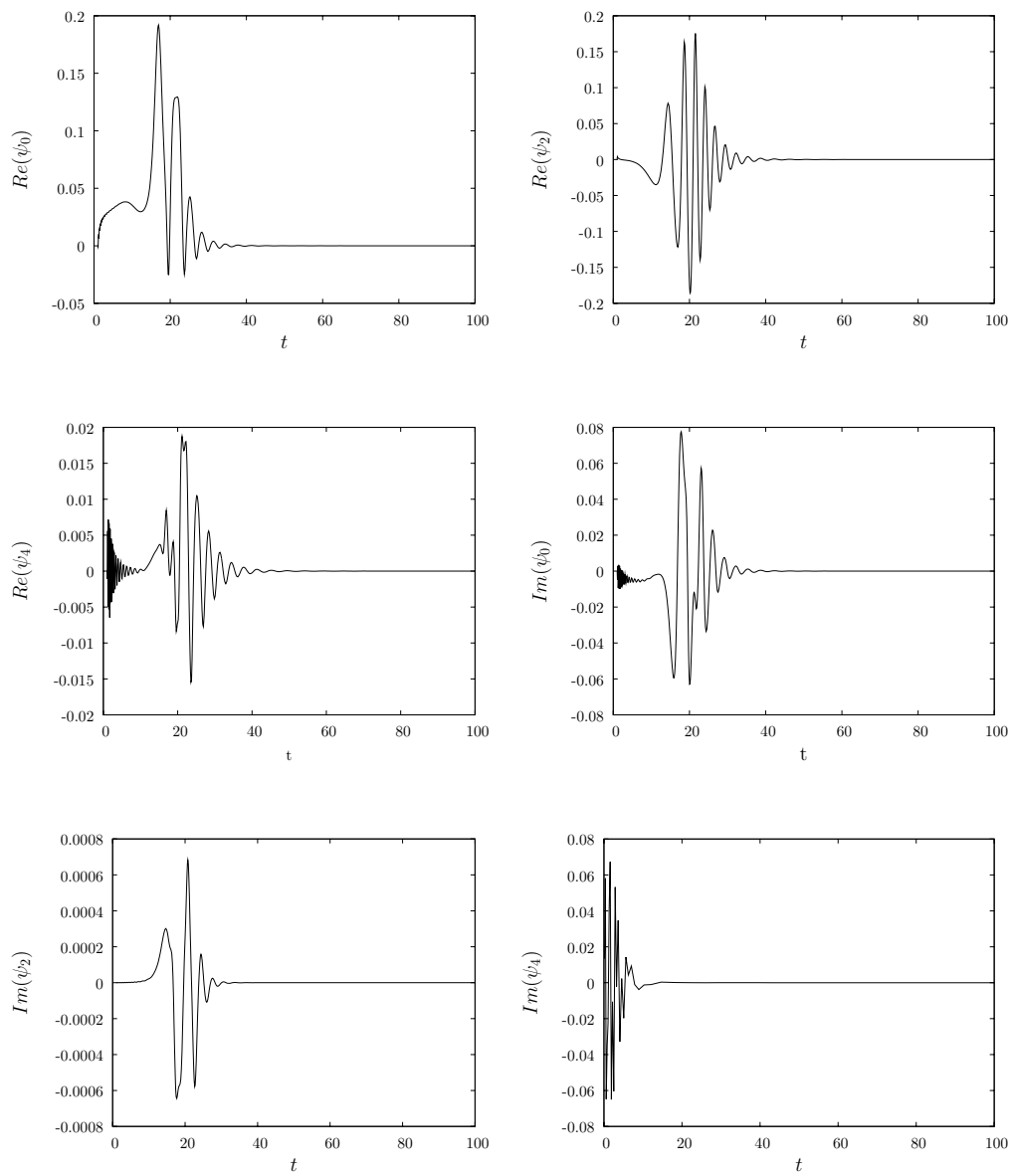


Figura 4.8: Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37).

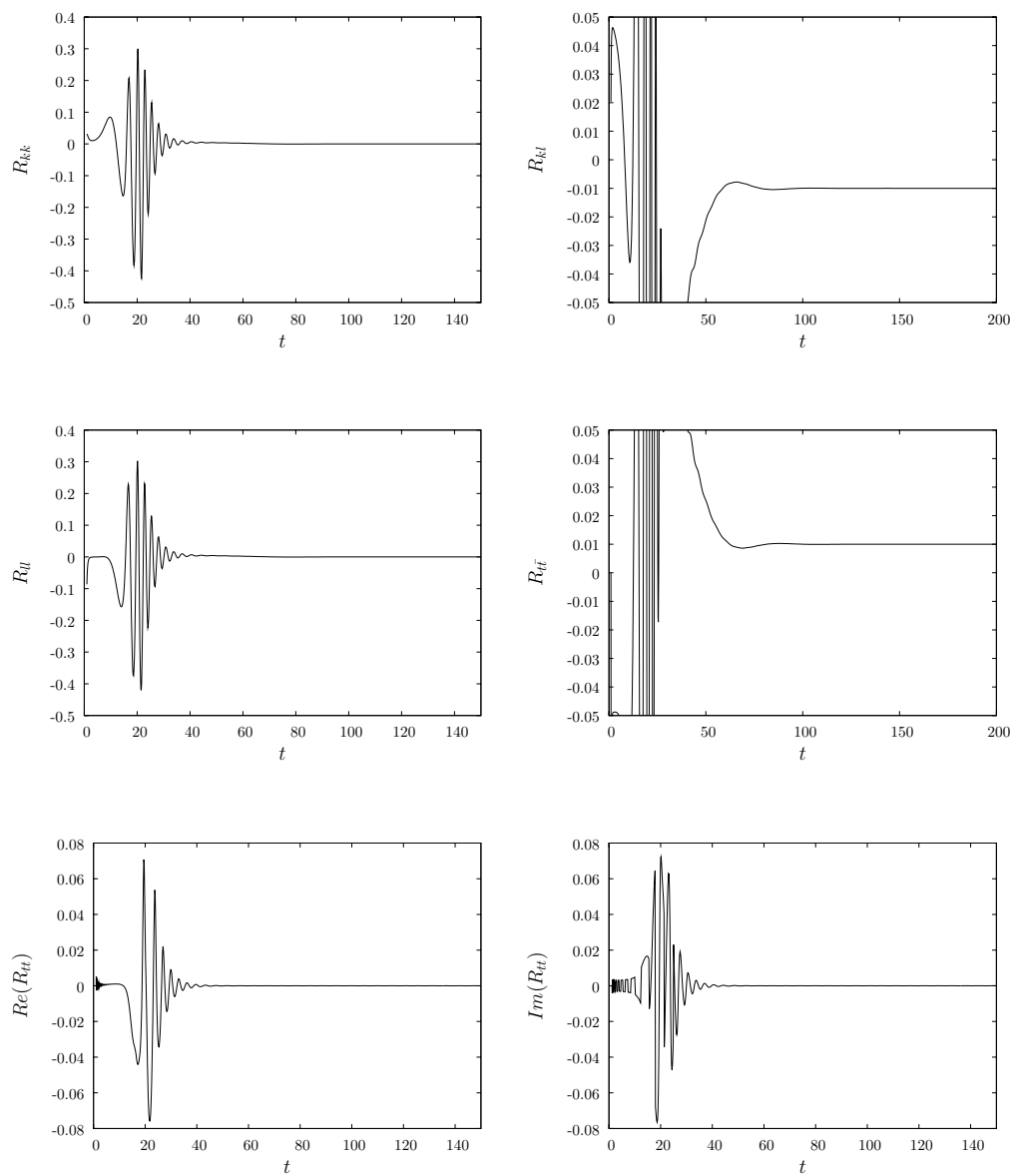


Figura 4.9: Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35). O tensor de Ricci é assintoticamente proporcional ao tensor métrico (3.36).

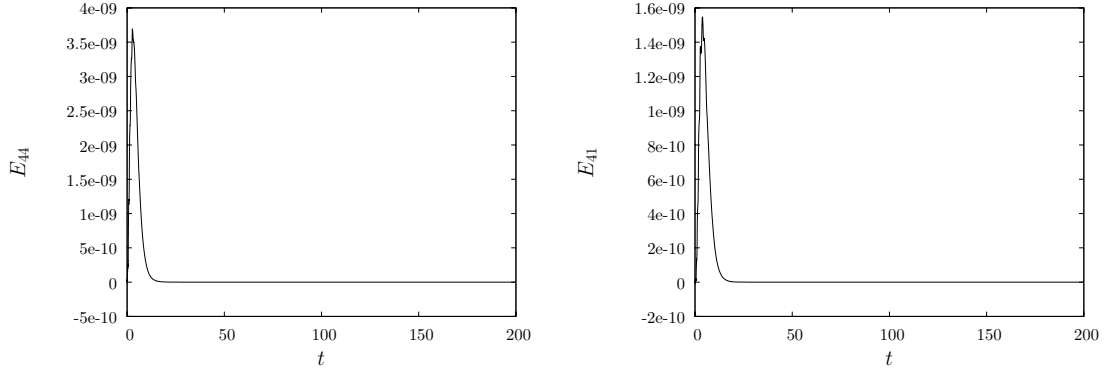


Figura 4.10: Evolução numérica dos vínculos  $E_{44}$  e  $E_{41}$ , que devem ser nulos. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 200.

### Minkowski Assintótico

Vamos agora escolher uma condição inicial próxima da solução exata de Minkowski (3.59). Fazemos  $A = 0, 1$ ,  $\alpha = 1.000, 0$ ,  $\beta = -5, 0$ ,  $\Lambda = 0, 0$ ,  $C_1 = 0, 3$ ,  $C_2 = 2, 0$  e  $t_i = 0, 0$ , e os termos não nulos para a condição inicial são:

$$\begin{aligned}
 a_1(t_i) &= 0, 3000000000; \\
 a_2(t_i) &= 0, 5985000000; \\
 a_3(t_i) &= 0, 6004000000; \\
 \dot{a}_1(t_i) &= 0, 1000000000; \\
 \dot{a}_2(t_i) &= 0, 2000000000; \\
 \dot{a}_3(t_i) &= 0, 2000000000; \\
 \frac{d^3}{dt^3} a_1(t_i) &= 0, 0245037249; \\
 \frac{d^3}{dt^3} a_3(t_i) &= 0, 0982173813.
 \end{aligned}$$

O componente  $a_4(t)$ , escolhido inicialmente nulo, rapidamente se afasta de zero, e a métrica se torna não-diagonal.

Vemos na figura 4.11 que todos os coeficientes de Newman-Penrose convergem assintoticamente para zero ( $\psi_1$  e  $\psi_3$  são identicamente nulos). A evolução dos componentes não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula segue assintoticamente para zero (figura 4.12). Os vínculos são mostrados na figura 4.13, e permanecem dentro de uma precisão numérica de  $10^{-9}$ . Uma vez que os todos os coeficientes  $\psi \rightarrow 0$ , também o tensor de Weyl  $C^a_{bcd} \rightarrow 0$ ; e como o tensor de Ricci  $R_{ab} \rightarrow 0$ , o tensor de Riemann  $R^a_{bcd} \rightarrow 0$ . Ou seja, esta solução é entendida como aproximando-se de um espaço de Riemann assintoticamente plano.

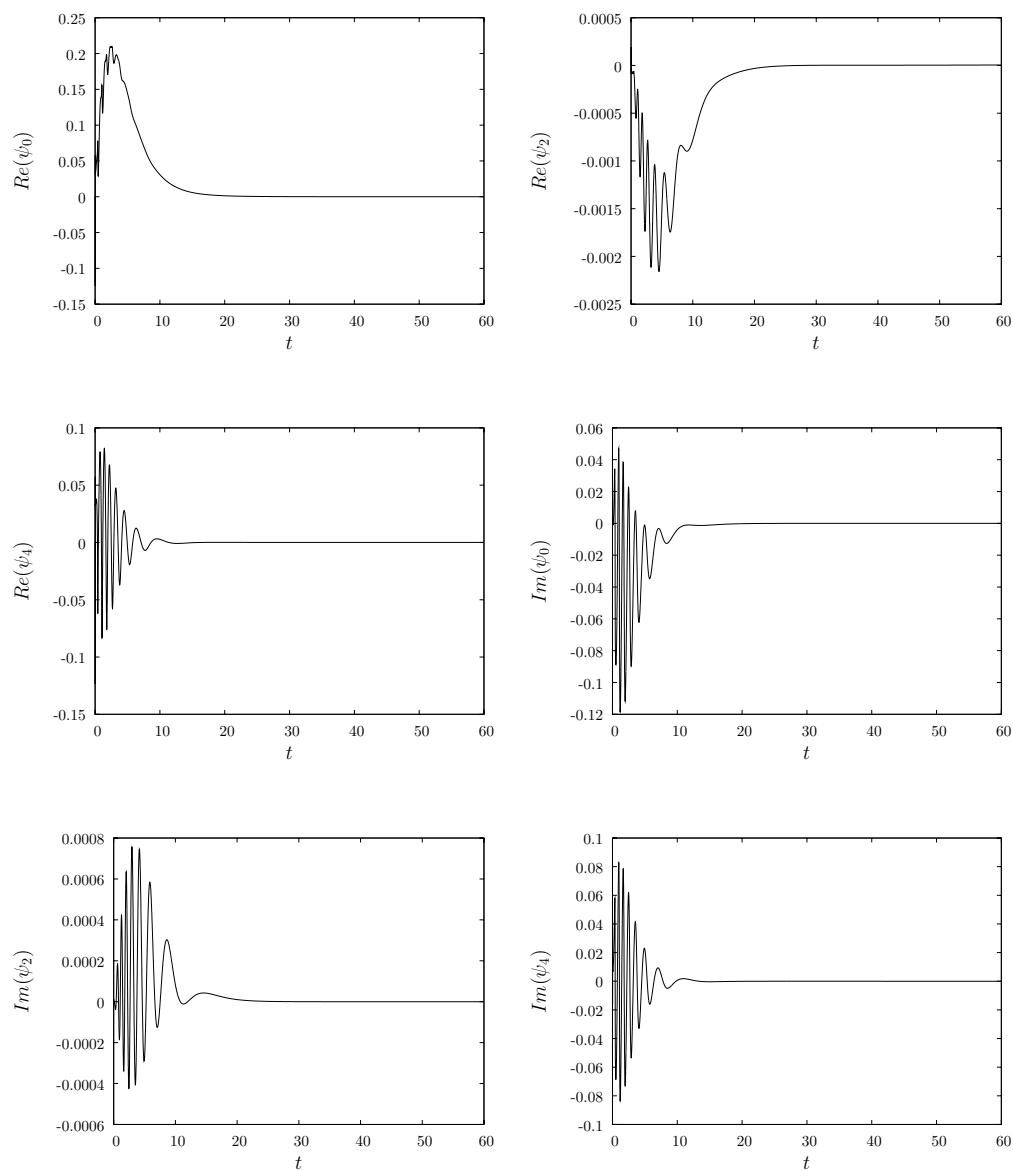


Figura 4.11: Evolução numérica das partes reais e imaginárias dos coeficientes de Newman-Penrose (3.37).

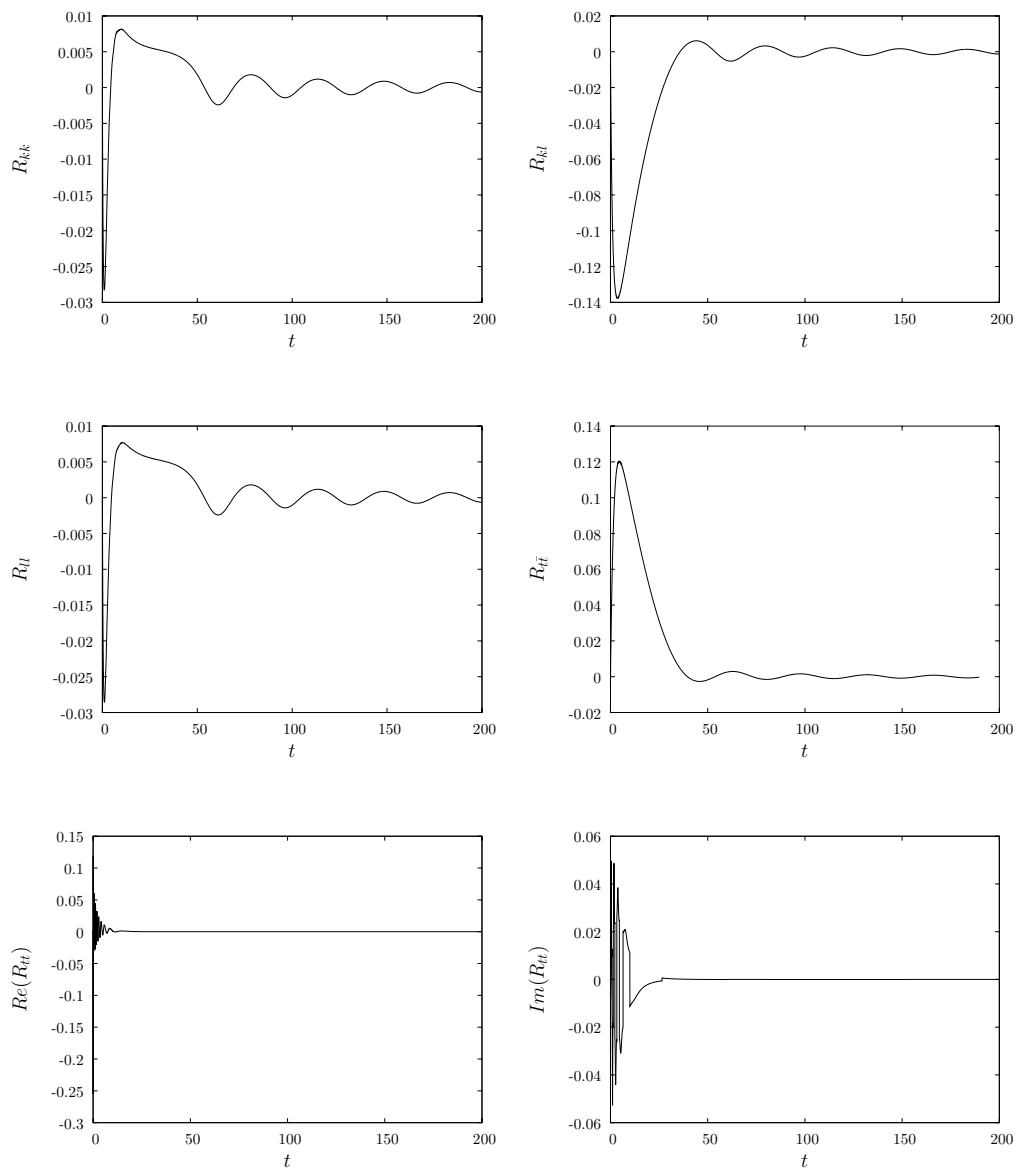


Figura 4.12: Evolução numérica dos termos não nulos do tensor de Ricci projetado na base nula (3.35).



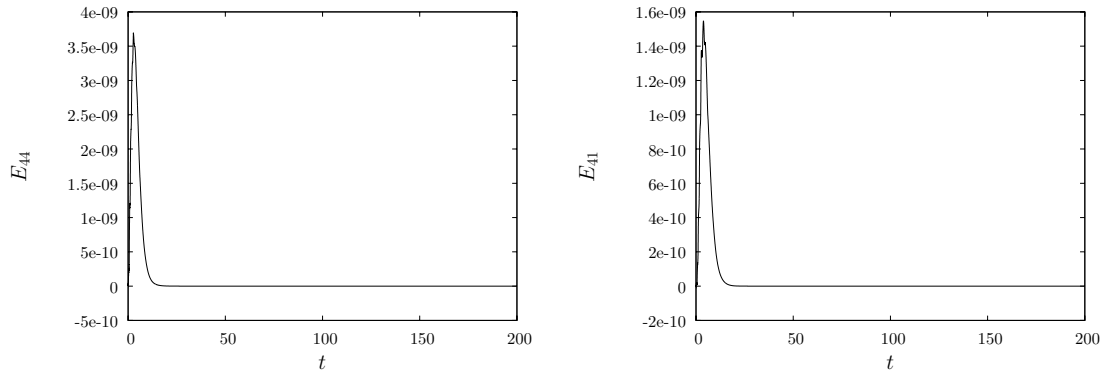


Figura 4.13: Evolução numérica dos vínculos  $E_{44}$  e  $E_{41}$ , que devem ser nulos. A evolução numérica foi feita até o tempo próprio 200.

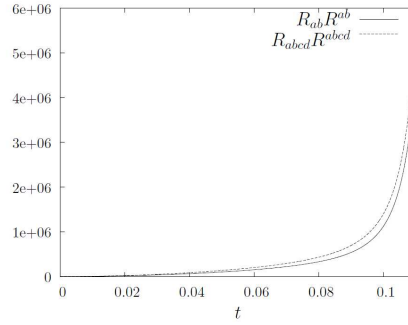
### Singularidade

Usando exatamente o mesmos parâmetros anteriores ( $A = 0, 1$ ,  $\alpha = 1.000, 0$ ,  $\beta = -5, 0$ ,  $\Lambda = 0, 0$ ,  $C_1 = 0, 3$ ,  $C_2 = 2, 0$  e  $t_i = 0, 0$ ), vamos escolher uma condição inicial ligeiramente distante de (3.59):

$$\begin{aligned}
 a_1(t_i) &= 0, 30000000000; \\
 a_2(t_i) &= 0, 80000000000; \\
 a_3(t_i) &= 0, 60040000000; \\
 \dot{a}_1(t_i) &= 0, 10000000000; \\
 \dot{a}_2(t_i) &= 0, 20000000000; \\
 \dot{a}_3(t_i) &= 0, 20000000000; \\
 \frac{d^3}{dt^3} a_1(t_i) &= -503, 31218500000; \\
 \frac{d^3}{dt^3} a_3(t_i) &= -2013, 11859000000.
 \end{aligned}$$

Novamente, a métrica não permanece diagonal, uma vez que  $a_4(t)$ , inicialmente escolhido nulo, rapidamente evolui para longe de zero. A condição inicial rapidamente evolui para a singularidade caracterizada pelo crescimento dos escalares  $R^{ab}R_{ab}$  e  $R^{abcd}R_{abcd}$  (figura 4.14a). Os vínculos inicialmente próximos de zero com muitas casas decimais, mostrando que o cálculo é preciso, aumentam rapidamente com a aproximação da singularidade (figura 4.14b), conforme esperado.

a)



b)

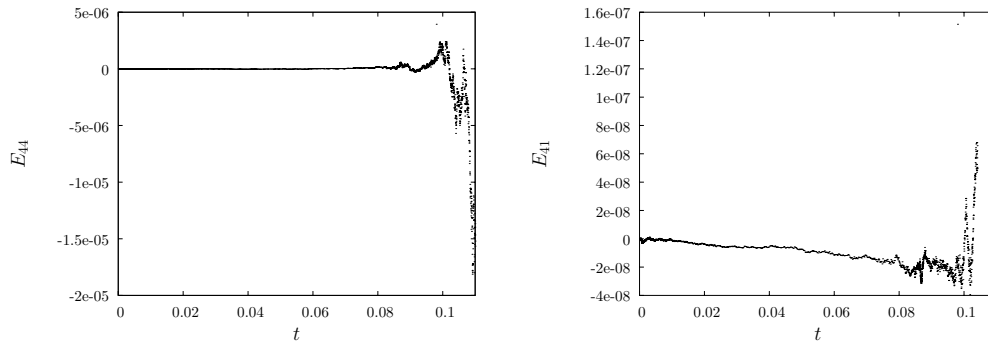


Figura 4.14: a) Evolução numérica dos escalares  $R^{ab}R_{ab}$  e  $R^{abcd}R_{abcd}$ . b) Evolução numérica dos vínculos  $E_{44}$  e  $E_{41}$ .

### 4.2.3 Discussão Geral sobre Casos Anisotrópicos

Nesta seção discutimos a evolução de diferentes condições iniciais do sistema de equações de campo (3.27) para Bianchi I e VII<sub>A</sub>, utilizando a métrica geral (3.25), no contexto da teoria quadrática.

Condições iniciais próximas da solução exata de de Sitter evoluíram assintoticamente para a mesma. Essa evolução foi caracterizada pela nulidade assintótica do tensor de Weyl e pela evolução assintótica dos componentes do tensor de Ricci projetados na base nula:  $R_{kk} \rightarrow -\frac{1}{2}\Lambda$  e  $R_{t\bar{t}} \rightarrow \frac{1}{2}\Lambda$ . Tal evolução dos tensores de Ricci projetados mostra que o tensor de Ricci é proporcional à métrica (conforme explicação próxima da equação 3.36), o que é característico dos espaços de Einstein (ver equação 3.13), como de Sitter. O tensor de Ricci representa a real equação dinâmica para espaços de Einstein.

Condições iniciais próximas da solução exata do espaço de Minkowski aproximaram-se assintoticamente de Minkowski. Tal evolução foi caracterizada pela nulidade assintótica do tensor de Weyl e dos componentes do tensor de Ricci, o que, devido a equação (3.38), implica que também o tensor de Riemann se anula.

Uma vez que existem condições iniciais próximas de de Sitter e Minkowski que se aproximam assintoticamente de tais soluções, podemos conjecturar que há uma bacia de

atração para essas soluções e que, no sentido assintótico analisado, Bianchi I e VII<sub>A</sub> devem ser estruturalmente estáveis no contexto da gravidade quadrática discutida.

No entanto, soluções do tipo singularidade foram encontradas, o que indica fortemente que a estabilidade da teoria deve valer num limite de condições. Neste sentido, é importante mencionar que as soluções de de Sitter e Minkowski são casos particulares de soluções de (3.27), que admitem soluções mais gerais, como as singularidades encontradas, por exemplo.

## 4.3 Casos Isotrópicos

Nesta seção vamos apresentar as soluções numéricas das equações de campo (3.52), (3.55) e (3.61), mostradas, respectivamente, nas seções (3.6.1), (3.6.2) e (3.6.3) para os casos isotrópicos plano, hiperbólico e esférico.

### 4.3.1 Caso Plano

#### De Sitter Assintótico

Para o estudo do caso isotrópico plano (seção 3.6.1), vamos considerar a seguinte condição inicial não nula, próxima à solução exata de de Sitter (3.54), consistente com o vínculo  $E_{44} \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \beta &= 0, 1; \Lambda = 1, 0; C = 1, 0; t_i = 1, 0; t_0 = 0, 0; \\ a(t_i) &= 1, 604180588505023985491; \\ \dot{a}(t_i) &= 0, 661109881901699614204; \\ \ddot{a}(t_i) &= 0, 250696764750837353120; \\ \frac{d^3}{dt^3}a(t_i) &= 0, 102346525634350579703. \end{aligned}$$

Os gráficos da evolução temporal do sistema (3.52) são mostrados na figura 4.15:

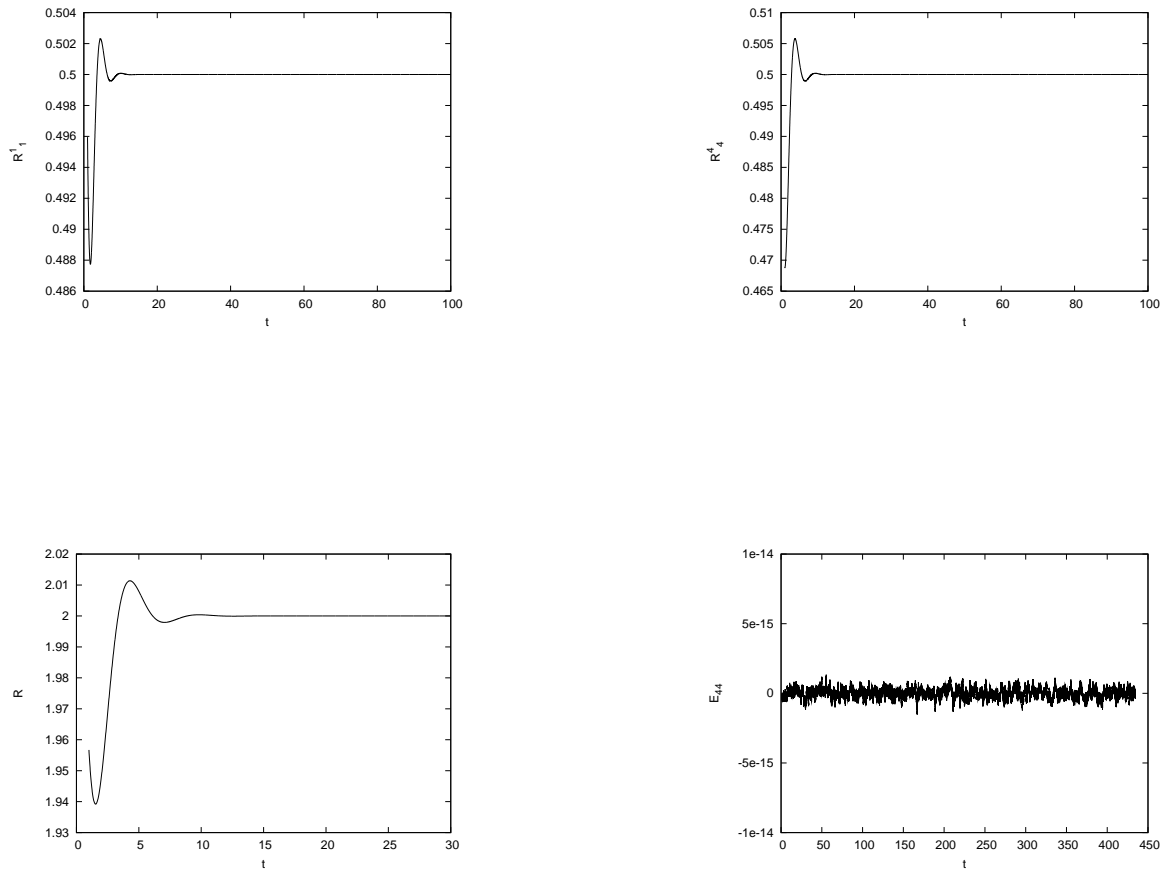


Figura 4.15: Evolução temporal do componente espacial ( $R^1_1$ ) e temporal ( $R^4_4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano com  $\Lambda = 1, 0$ .

Podemos verificar que os componentes espacial ( $R^1_1$ ) e temporal ( $R^4_4$ ) do tensor de Ricci rapidamente atingem o valor  $\frac{1}{2}\Lambda = 0,5$ . O escalar de Ricci  $R$  evolui rapidamente para  $2\Lambda = 2,0$ . O vínculo  $E_{44} = 0$  é preservado com precisão  $10^{-15}$  durante toda a evolução, o que atesta a confiabilidade do cálculo. Ou seja, a solução converge muito rapidamente para a solução de de Sitter.

A escolha de valores menores para a constante cosmológica  $\Lambda$  produz convergência mais lenta e oscilatória (maior frequência) para de Sitter. Isto ocorre porque menores valores de  $\Lambda$  produzem maiores valores de  $\omega$  em (3.66). Vamos escolher a condição inicial abaixo, próxima a solução exata (3.54):

$$\begin{aligned}\beta &= 0, 1; \Lambda = 0, 1; C = 1, 0; t_i = 1, 0; t_0 = 0, 0; \\ a(t_i) &= 1, 237803267241959215283; \\ \dot{a}(t_i) &= 0, 918469073122095136519; \\ \ddot{a}(t_i) &= 0, 018963387787365990067; \\ \frac{d^3}{dt^3}a(t_i) &= 0, 002448162836271386162.\end{aligned}$$

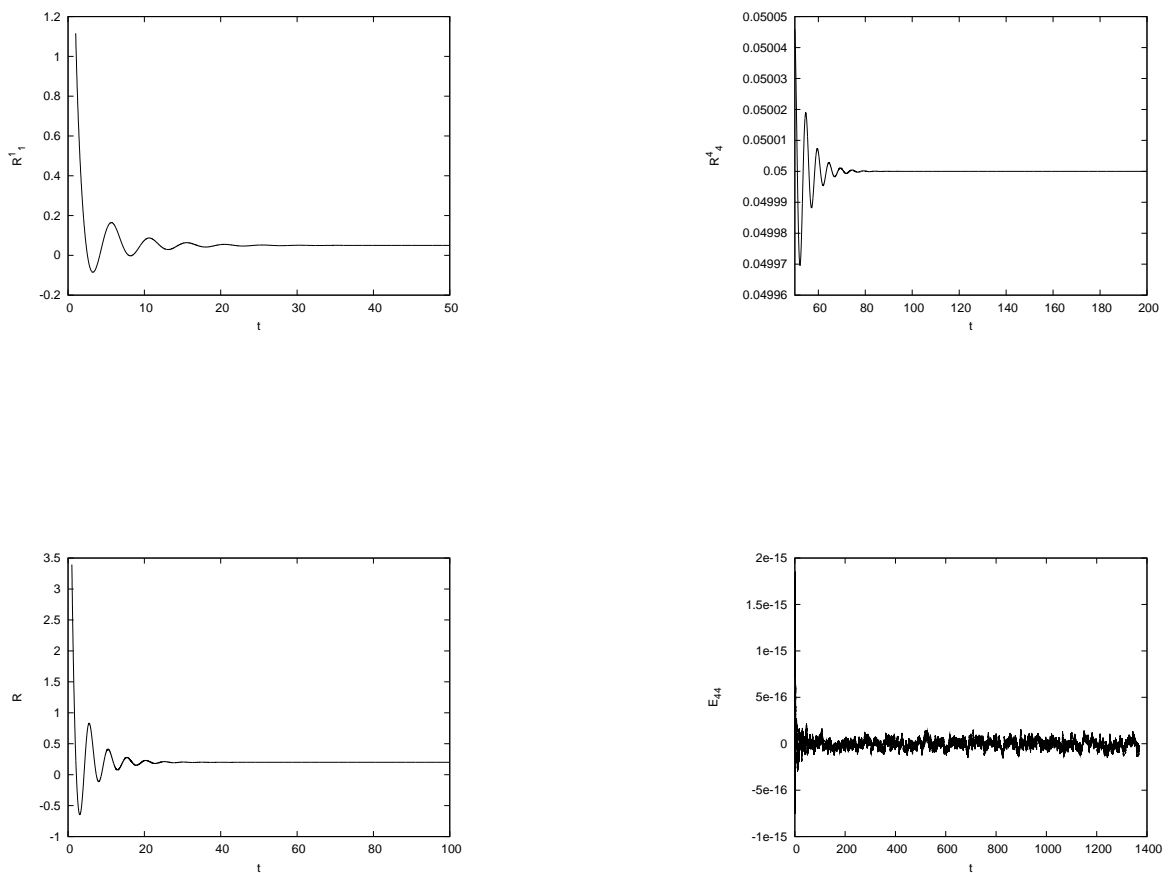


Figura 4.16: Evolução temporal do componente espacial ( $R^1_1$ ) e temporal ( $R^4_4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano com  $\Lambda = 0, 1$ .

Os componentes do tensor de Ricci na solução mostrada na figura 4.16 evoluem para  $\frac{1}{2}\Lambda = 0, 05$  e o escalar de Ricci para  $2\Lambda = 0, 2$  por um padrão oscilatório de maior frequência do que aquele apresentado quando  $\Lambda$  tinha um valor maior. O vínculo  $E_{44}$  é preservado com precisão de  $10^{-16}$ .

**Minkowski Assintótico**

Escolhendo uma condição inicial próxima a solução exata de Minkowski (3.54 com  $\Lambda = 0$ ),

$$\begin{aligned}\beta &= 1, 0; \Lambda = 0, 0; C = 1, 0; t_i = 0, 0; t_0 = 0, 0; \\ a(t_i) &= 1, 01000000000000000000; \\ \dot{a}(t_i) &= 0, 238059282999470989139,\end{aligned}$$

temos que os componentes espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci evoluem para zero, assim como o escalar de Ricci  $R$  (figura 4.17). Uma vez que o tensor de Ricci vai para zero, e o tensor de Weyl é zero, vem de (3.38) que o tensor de Riemann deve ser zero. Assim, esta solução é entendida como aproximando-se assintoticamente de Minkowski. O vínculo permanece zero dentro de uma precisão de  $10^{-17}$ , atestando a confiabilidade do cálculo.

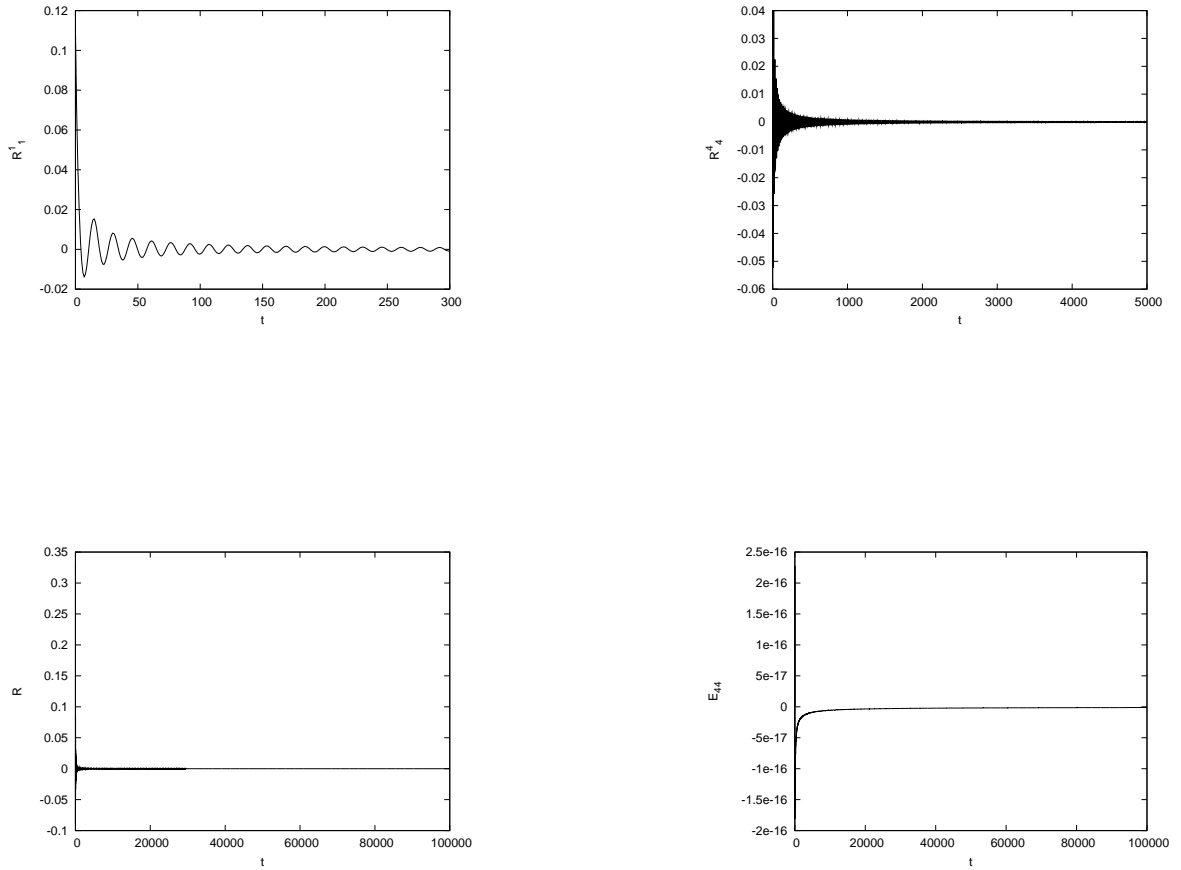


Figura 4.17: Evolução temporal do componente espacial ( $R^1_1$ ) e temporal ( $R^4_4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano próximo a Minkowski. O cálculo foi realizado até um tempo próprio muito maior que o mostrado na figura.

### 4.3.2 Caso Hiperbólico

#### De Sitter Assintótico

Uma escolha de condição inicial próxima à solução de de Sitter hiperbólica (3.57) converge para o caso hiperbólico (seção 3.6.2) pelos mesmos padrões observados para o caso plano. Vamos considerar um caso com pequeno valor para a constante cosmológica:

$$\begin{aligned}
 A &= 0, 1; \beta = 0, 1; \Lambda = 0, 0001; t_i = 1, 0; t_0 = 0, 0; \\
 a(t_i) &= 0, 200000277778009272200; \\
 \dot{a}(t_i) &= 0, 137435233141675300361; \\
 \ddot{a}(t_i) &= 0, 000001666671296300154; \\
 \frac{d^3}{dt^3}a(t_i) &= 0, 000001666680555574846,
 \end{aligned}$$

para o sistema de equações (3.55).

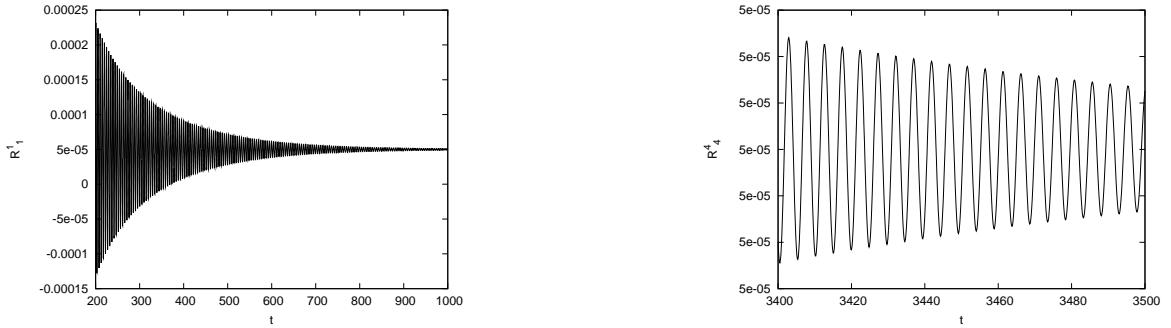


Figura 4.18: Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci para o caso isotrópico hiperbólico com  $\Lambda = 0, 0001$ .

Os componentes do tensor de Ricci ( $R_1^1$  e  $R_4^4$ ) convergem oscilatoriamente para  $\frac{1}{2}\Lambda = 0, 00005$  (figura 4.18). Calculando a frequência no gráfico de  $R_4^4$  temos  $\frac{20}{100} = 0, 2$ . A frequência de oscilação em primeira ordem é  $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{24\pi} \sqrt{\frac{24}{0,1} - 54 \cdot 0, 0001} = 0, 2055658364\dots$ , o que confere com o valor do gráfico. Não há dependência da frequência de oscilação com o valor do parâmetro  $A$ , uma vez que o mesmo não aparece no limite de convergência em primeira ordem (3.66).

### Minkowski Assintótico

Escolhendo uma condição inicial próxima a solução exata de Minkowski (3.59),

$$\begin{aligned}
 A &= 1, 0; \beta = 1, 0; \Lambda = 0, 0; C_1 = C_2 = 0, 0; t_i = 0, 0; \\
 a(t_i) &= 1, 1000000000000000000000; \\
 \dot{a}(t_i) &= 1, 1000000000000000000000; \\
 \ddot{a}(t_i) &= 0, 435585760995645498994,
 \end{aligned}$$

vemos na figura 4.19 que os componentes espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci evoluem para zero, assim como o escalar de Ricci  $R$ . Como o tensor de Ricci vai



para zero, e o tensor de Weyl é zero, o tensor de Riemann também é zero (conforme 3.38). Assim, esta solução é entendida como aproximando-se assintoticamente espaço plano de Riemann. O vínculo  $E_{44} = 0$  se mantém com uma precisão de  $10^{-15}$ , atestando a confiabilidade do cálculo.

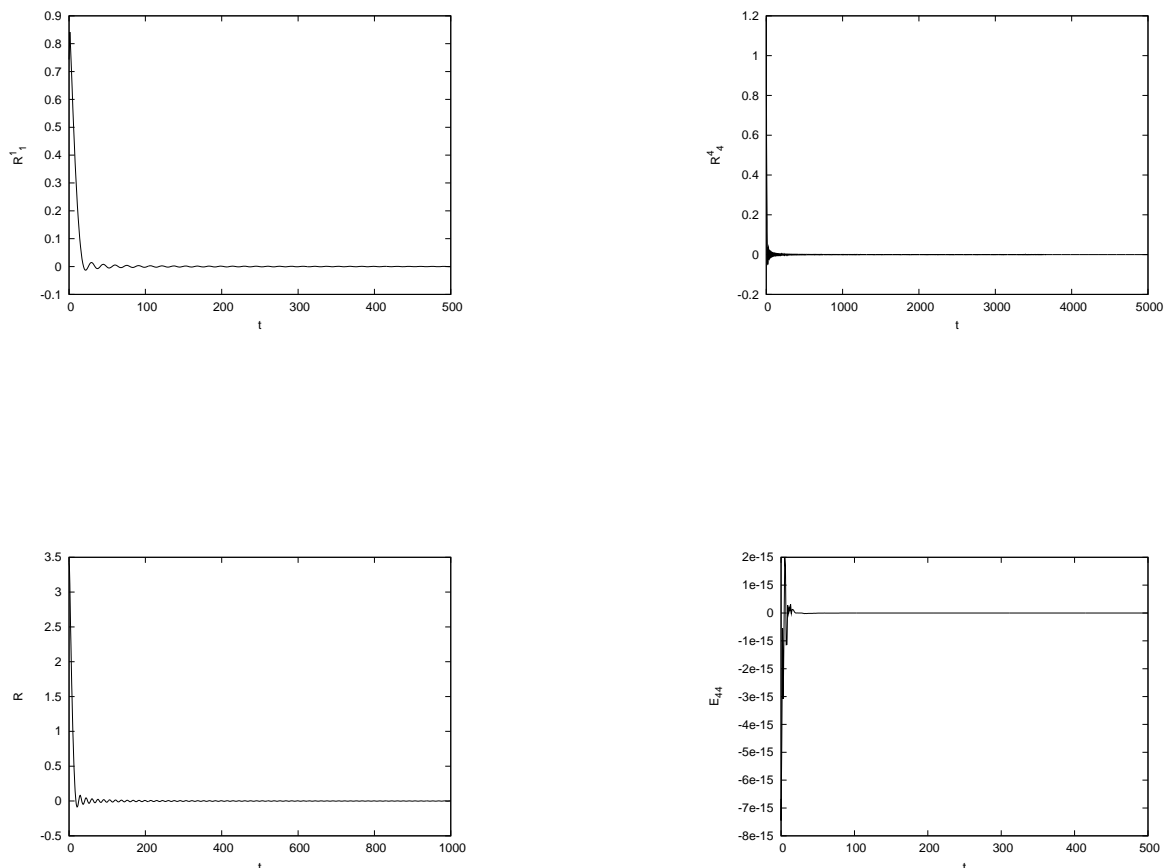


Figura 4.19: Evolução temporal do componente espacial ( $R_1^1$ ) e temporal ( $R_4^4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico plano próximo a Minkowski. O cálculo foi realizado até um tempo próprio muito maior que o mostrado na figura.

### 4.3.3 Caso Esférico

#### De Sitter Assintótico

O caso isotrópico esférico (seção 3.6.3) converge igualmente para a solução de de Sitter (3.63) pelo mesmo padrão observado para o caso plano e hiperbólico, tanto com maior frequência quanto menor o valor da constante cosmológica  $\Lambda$ . Supondo um valor pequeno para a constante cosmológica,  $\Lambda = 0,001$ , e uma condição inicial próxima de (3.63), temos

a condição inicial:

$$\begin{aligned} \beta &= 1, 0; \Lambda = 0, 001; t_i = 1, 0; t_0 = 0, 0; \\ a(t_i) &= 39, 233060993022455420487; \\ \dot{a}(t_i) &= 0, 080898388734006482226; \\ \ddot{a}(t_i) &= 0, 006455510165503742029; \\ \frac{d^3}{dt^3}a(t_i) &= 0, 000001075858591659631, \end{aligned}$$

para o sistema de equações (3.61).

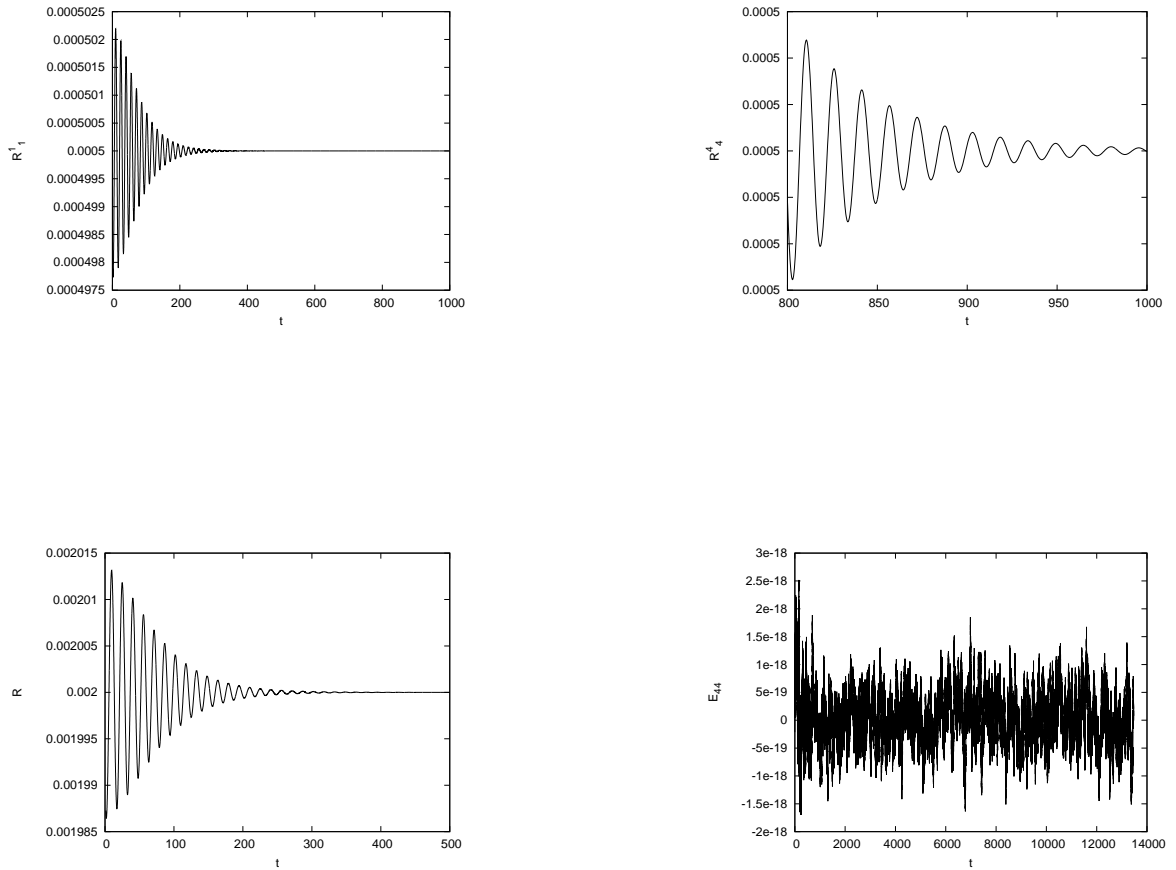


Figura 4.20: Evolução temporal do componente espacial ( $R^1_1$ ) e temporal ( $R^4_4$ ) do tensor de Ricci, do escalar de Ricci ( $R$ ) e do vínculo ( $E_{44}$ ) para o caso isotrópico esférico com  $\Lambda = 0, 001$ .

Observamos por meio dos gráficos da figura 4.20 a convergência muito lenta para de Sitter ( $R^1_1 = R^4_4 = \frac{1}{2}\Lambda = 0, 0005$  e  $R = 2\Lambda = 0, 002$ ) por um padrão altamente oscilatório. O vínculo  $E_{44}$  é mantido dentro da precisão de  $10^{-18}$ .

Podemos verificar pelo gráfico de  $R^4_4$  que a frequência de oscilação é  $\frac{13}{200} = 0, 065$ . A

frequência de oscilação da aproximação em primeira ordem (3.66) é  $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{24\pi} \sqrt{\frac{24}{1,0} - 54,0,001} = 0,0649015956\dots$ , e portanto condizente com o resultado observado.

#### 4.3.4 Discussão geral sobre os casos isotrópicos

Nesta seção, mostramos as evoluções numéricas de diferentes condições iniciais para os sistemas de equações de campo plano (3.52), hiperbólico (3.55) e esférico (3.61), utilizando a métrica homogênea e isotrópica (3.50), no contexto da teoria quadrática.

A análise aplicada se baseou no comportamento assintótico do tensor de Ricci (real equação dinâmica para os espaços de Einstein) e do escalar de Ricci. Neste sentido, condições iniciais próximas de de Sitter evoluíram assintoticamente para a solução de de Sitter ( $R_1^1, R_4^4 \rightarrow \frac{1}{2}\Lambda$  e  $R \rightarrow 2\Lambda$ ), enquanto condições iniciais próximas de Minkowski evoluíram assintoticamente para ( $R_1^1, R_4^4, R \rightarrow 0$ ), e uma vez que  $R_{bcd}^a \rightarrow 0$ , foram entendidas como aproximando-se do mesmo. Esta última convergência para Minkowski não foi realizada para o caso esférico.

O regime de convergência para de Sitter foi analisado perturbativamente em primeira ordem. A frequência (3.66),  $\frac{1}{12} \sqrt{\frac{24}{\beta} - 54\Lambda}$ , mostrou-se acurada para descrever o regime oscilatório de convergência. Para valores pequenos de  $\Lambda$ , o termo positivo de (3.66) predomina, e a frequência é maior. Para valores maiores de  $\Lambda$ , o termo negativo predomina, a raiz imaginária interage com o número imaginário no termo  $e^{i\omega t}$ , e a convergência é mais rápida e de menor frequência. Perturbações de maior ordem não produziram efeitos consideráveis.

Soluções do tipo singularidade não foram encontradas conclusivamente no estudo do caso isotrópico, embora algumas condições iniciais mostraram certas tendências a colapsar. Tal análise não é conclusiva e será alvo de investigações futuras, uma vez que possivelmente existem singularidades neste caso.

Assim, devido a existência de condições iniciais próximas de de Sitter e Minkowski que se aproximam assintoticamente de tais soluções, podemos usar argumentos semelhantes àqueles do final da seção 4.2.3 para conjecturar que há uma bacia de atração para essas soluções e que, no contexto analisado, o caso plano, hiperbólico e esféricos devem ser estruturalmente estáveis no contexto da gravidade quadrática.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho de tese de doutorado, resolvemos as soluções e vácuo das equações de campo (3.8) referentes ao contexto da teoria quadrática da gravidade para os universos homogêneos de Bianchi.

Os contra-termos extras  $\alpha (R_{ab}R^{ab} - \frac{1}{3}R^2) + \beta R^2$  no Lagrangiano (3.7) resultam nos termos de até quarta-ordem no tensor de campo  $E_{ab}$ , que não aparecem no tensor de Einstein. Os universos de Bianchi são homogêneos, e as equações de campo (3.8) resultam em sistemas de equações diferenciais ordinárias altamente não-lineares (3.27-3.28). Soluções gerais desses sistemas só podem ser obtidas numericamente, e são exatas no sentido que dependem apenas da precisão do equipamento computacional utilizado no cálculo.

Discutimos soluções de Bianchi I, VII<sub>A</sub> e IX. Esses tipos são importantes pois constituem generalizações anisotrópicas dos modelos homogêneos FRW plano, aberto (hiperbólico) e fechado (esférico), respectivamente. Neste sentido, é importante mencionar que, no contexto cosmológico, o estudo da isotropização é de grande interesse, e diz que um universo inicialmente irregular (anisotrópico) evolui por processos físicos para um universo menos irregular. Afinal, a suposição de um universo inicialmente isotrópico é bastante impositiva, e a escolha de condições iniciais anisotrópicas é menos restritiva. Embora não discutida diretamente neste trabalho, a isotropização pode acontecer no sentido de que as anisotropias iniciais desaparecem ou pelo menos não aumentam indefinidamente, o que verificamos nos resultados ( $C_{abcd} \rightarrow 0$ ); obviamente, isto depende das condições iniciais, que como vimos, levam a um grupo de soluções bastante diferentes.

Em trabalhos anteriores [34, 48], foi demonstrado que, para uma escolha particular de métrica para Bianchi I, há uma bacia de atração para os espaços de Minkowski ( $\Lambda = 0$ ) e de Sitter ( $\Lambda > 0$ ). Assim, Minkowski e de Sitter são estáveis no contexto da gravidade quadrática, para a caso analisado. No entanto, foi encontrada bacia de atração para singularidade, mostrando que no contexto da gravidade quadrática, nem todas as condições iniciais evoluem para universos razoáveis.

Em artigo publicado recentemente [31], estendemos a análise anterior de Bianchi I para uma métrica geral. Em outro artigo [30], estendemos a análise para Bianchi VII<sub>A</sub>. Os

resultados mostrados nos artigos são discutidos nesta tese (seção 4.2). Casos isotrópicos também foram contemplados na discussão (seção 4.3), e estão em fase de publicação.

Na seção 4.2 discutimos os casos anisotrópicos gerais de Bianchi I e VII<sub>A</sub> (métrica 3.25). Condições iniciais próximas da solução de de Sitter ( $\Lambda > 0$ ) evoluíram para tal solução, no contexto assintótico discutido no texto. O mesmo foi verificado para Minkowski ( $\Lambda = 0$ ). Assim, podemos conjecturar que há um bacia de atração para tais soluções, e que Bianchi I e VII<sub>A</sub> são estruturalmente estáveis no contexto da gravidade quadrática discutida. No entanto, a existência de condições iniciais que evoluem para singularidades indica fortemente que a teoria deve ter limites de aplicabilidade, pois nem todas as condições iniciais evoluem para um universo estável.

Na seção 4.3 mostramos os casos isotrópicos dos universos plano, hiperbólico e esférico (métrica 3.50). Condições iniciais próximas de de Sitter ( $\Lambda > 0$ ) convergiram para de Sitter (conforme análise discutida) para os três casos. Condições iniciais próximas de Minkowski ( $\Lambda = 0$ ) evoluíram assintoticamente para o espaço de Minkowski (no caso plano) e para um espaço de Riemann plano (no caso hiperbólico); o caso esférico não foi verificado assintoticamente para Minkowski. Soluções do tipo singularidade não foram encontradas. Assim, devido aos mesmos argumentos do parágrafo anterior, podemos conjecturar que existem bacias de atração para condições iniciais de Minkowski e de Sitter, e que neste sentido tais soluções são estáveis no contexto da gravidade quadrática.

Todos os cálculos numéricos apresentados foram checados para um tempo de evolução grande em relação ao mostrado nos gráficos, na ordem de  $10^6$ , e os vínculos foram verificados para atestar a validade dos resultados. Deste modo, acreditamos que a interpretação assintótica é válida para as conclusões apresentadas.

## Perspectivas

Dois artigos foram produzidos no decorrer deste trabalho de tese [30, 31]; um terceiro está em preparação para publicação (casos isotrópicos), e pretendemos desenvolver um quarto artigo englobando Bianchi IX.

Várias questões permanecem para investigações futuras: estudo do espaço de condições iniciais e caracterização dos limites de estabilidade, a velocidade de convergência, a determinação de atratores e bacias, e a verificação de estrutura fractal nas condições iniciais, o comportamento de outros tipos de Bianchi, entre outras.

# Apêndice

# Apêndice A

## Obtenção dos Vetores Tetrádicos Nulos

Para a obtenção dos vetores  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$  que projetam a métrica (3.25-3.26) na métrica nula (3.34), vamos utilizar apenas os componente da matriz independente

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a_1^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

da métrica (3.25), pois representam os vetores independentes tipo-espaco ( $v^a$ ) e tipo-tempo ( $u^a$ ) em (3.31). Os autovalores e autovetores não-nulos da matriz acima são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1^2(t) \\ \lambda_4 &= -1 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\begin{aligned} v_1^a &= (1, 0, 0, 0) \\ v_4^a &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Normalizando os vetores por meio de uma constante de normalização  $N$ ,  $v_1^a = (N_1, 0, 0, 0)$  e  $v_4^a = (0, 0, 0, N_2)$ , e impondo as condições

$$\begin{aligned} g_{ab}v_1^av_1^b &= 1 \Rightarrow N_1 = \frac{1}{a_1(t)} \\ g_{ab}v_4^av_4^b &= -1 \Rightarrow N_2 = 1 \\ g_{ab}v_1^av_2^b &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

e portanto  $v_1^a = (\frac{1}{a_1(t)}, 0, 0, 0)$  e  $v_4^a = (0, 0, 0, 1)$ . Usando a combinação linear normalizada (3.31) temos os vetores nulos reais:

$$\begin{aligned} k^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{a_1(t)}, 0, 0, 1 \right) \\ l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{a_1(t)}, 0, 0, 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Procedimento similar com os termos da matriz independente

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2(t) & a_4(t) & 0 \\ 0 & a_4(t) & a_3^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

de (3.25) para os vetores tipo-espaço  $z^a$  e  $w^a$  em (3.32) resulta nos vetores nulos imaginários:

$$\begin{aligned} t^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, v_2^+ + iv_2^-, v_3^+ + iv_3^-, 0) \\ \bar{t}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, v_2^+ - iv_2^-, v_3^+ - iv_3^-, 0) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\begin{aligned} v_2^+ &= \frac{-a_4(t)}{\sqrt{a_2^2(t)a_4^2(t)-a_4^2(t)(a_2^2(t)-a_3^2(t)-\sqrt{\Delta})+\frac{a_3^2(t)}{4}(a_2^2(t)-a_3^2(t)-\sqrt{\Delta})^2}}, \\ v_2^- &= \frac{-a_4(t)}{\sqrt{a_2^2(t)a_4^2(t)-a_4^2(t)(a_2^2(t)-a_3^2(t)+\sqrt{\Delta})+\frac{a_3^2(t)}{4}(a_2^2(t)+a_3^2(t)-\sqrt{\Delta})^2}}, \\ v_3^+ &= \frac{\frac{1}{2}(a_2^2(t)-a_3^2(t)-\sqrt{\Delta})}{\sqrt{a_2^2(t)a_4^2(t)-a_4^2(t)(a_2^2(t)-a_3^2(t)-\sqrt{\Delta})+\frac{a_3^2(t)}{4}(a_2^2(t)-a_3^2(t)-\sqrt{\Delta})^2}}, \\ v_3^- &= \frac{\frac{1}{2}(a_2^2(t)-a_3^2(t)+\sqrt{\Delta})}{\sqrt{a_2^2(t)a_4^2(t)-a_4^2(t)(a_2^2(t)-a_3^2(t)+\sqrt{\Delta})+\frac{a_3^2(t)}{4}(a_2^2(t)+a_3^2(t)-\sqrt{\Delta})^2}}, \end{aligned}$$

$$\Delta = (a_2^2(t) - a_3^2(t))^2 + 4a_4^2(t).$$

Fica óbvio dos resultados (A.5) e (A.7) a relação de ortogonalidade  $k^a t_a = k^a \bar{t}_a = l^a t_a = k^a \bar{t}_a = 0$ , pois  $k^a$  e  $l^a$  tem apenas os componentes 1 e 4 enquanto  $t^a$  e  $\bar{t}^a$  tem apenas os componentes 2 e 3.



# Apêndice B

## Classificação de Petrov

A classificação de Petrov é a classificação dos espaços de Riemann de acordo com as propriedades algébricas do tensor de Weyl:

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ca}R_{bd} + g_{db}R_{ca} - g_{cb}R_{da} - g_{da}R_{cb}) + \frac{1}{6}R(g_{ca}g_{bd} - g_{cb}g_{da}). \quad (\text{B.1})$$

Para soluções de vácuo de Einstein, o tensor de Weyl coincide com o tensor de Riemann (pois  $R = 0$  e  $R_{ab} = 0$ ), e a classificação de Petrov é obtida diretamente das propriedades algébricas do tensor de Riemann [36].

Os coeficientes de Newmann-Penrose são definidos em (3.37),

$$\begin{aligned} \psi_0 &= C_{abcd}k^a t^b \bar{k}^c t^d, \\ \psi_1 &= C_{abcd}k^a l^b \bar{k}^c t^d, \\ \psi_2 &= C_{abcd}k^a t^b \bar{l}^c l^d, \\ \psi_3 &= C_{abcd}k^a l^b \bar{l}^c l^d, \\ \psi_4 &= C_{abcd}\bar{l}^a l^b \bar{t}^c l^d, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e os vetores nulos  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$  em (3.33),

$$\begin{aligned} t^a \bar{t}_a &= -k^a l_a = 1, \\ \text{outros} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Os *tipos de Petrov* são classificados de acordo com o número de  $\psi$ 's nulos: eles estão relacionados com as propriedades satisfeitas pelo tensor de Weyl projetado nas direções de  $\mathbf{k}$ , conforme tabela B.1 [36]:

Tabela B.1: Tipos de Petrov .

Tipo	Coeficientes de Newman-Penrose nulos	Critério satisfeito por $C_{abcd}$
I	$\psi_0$	$k_{[e}C_{a]bc[d}k_{f]}k^bk^c = 0$
II	$\psi_0, \psi_1$	$k_{[e}C_{a]bcd}k^bk^c = 0$
D	$\psi_0, \psi_1$	$k_{[e}C_{a]bcd}k^bk^c = 0$
III	$\psi_0, \psi_1, \psi_2$	$k_{[e}C_{a]bcd}k^b = 0$
N	$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$	$C_{abcd}k^a = 0$
O	Todos os $\psi$ 's	$C_{abcd} = 0$

Quando todos os  $\psi$ 's são zero temos um Petrov tipo O, o tensor de Weyl é nulo, e fica caracterizado um espaço conforme de Minkowski. Uma solução exata conformalmente plana de fluido é também uma solução Friedmann generalizada ou uma solução interior de Schwarzschild (ver Stephani, H.; *et al.* p. 413, [33]; Stephani, H., p. 194 [36]). Soluções de onda plana gravitacional são do tipo N.

# Apêndice C

## Códigos em Maple

Neste apêndice mostramos um exemplo de código em Maple que utilizamos para a manipulação algébrica das equações demonstradas na tese:

```
#
#Obtenção das Equações de Campo para Lagrangiano Quadrático
#
restart;
with(linalg): with(tensor): with(CodeGeneration): with(DETools):
#inclusão das coordenadas
coordinates:=[x,y,z,t]:
#a_(t):=a0*exp(sqrt(Lambda/6)*(t-t0)); #Solução exata de Sitter
#inclusão da metrica
N(t):=1: g_dd:=array(sparse,1..4,1..4): g_dd[1,1] := a_(t)**2: g_dd[2,2] := a_(t)**2:
g_dd[3,3] := a_(t)**2: g_dd[4,4] := -N(t)**2: #print(g_dd); #tensor metrico covariante
g_dd_tensor := create([-1,-1],eval(g_dd)): g_uu_tensor := invert(g_dd_tensor, 'detg
_dd_tensor'): #tensor para a matriz contravariante
g_uu:=array(sparse,1..4,1..4): g_uu:=get_compts(g_uu_tensor): # print(g_uu); #ten
sor metrico contra-variante
#inclusão das constantes de estrutura
A:=0: N1:=0: N2:=0: N3:=0: C_udd:=array(sparse, 1..4, 1..4, 1..4): C_udd[1,2,3]:=
N1: C_udd[1,3,2]:=-N1: C_udd[2,1,2]:=A: C_udd[2,1,3]:=-N2: C_udd[2,2,1]:=-A: C_
udd[2,3,1]:=N2: C_udd[3,1,2]:=N3: C_udd[3,1,3]:=A: C_udd[3,2,1]:=-N3: C_udd[3,3,1]
:=-A: #print(C_udd); #constantes de estrutura
C_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c','d'): for a from 1 to 4 do for b
from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do C_ddd[a,b,c]:=sum(g_dd[a,d]*C_udd[d,b,c],d=1..4):
od: od: od: #print(C_ddd);
#inclusão das bases
```

```

omega_ud := array(sparse,1..4,1..4): omega_ud[1,1] := 1: omega_ud[2,2] := 1: omega_
ud[3,3] := 1: omega_ud[4,4] := 1: #print(omega_ud);
eta_du:=array(sparse,1..4,1..4): eta_du[1,1]:=1: eta_du[2,2]:=1: eta_du[3,3]:=1: eta_
du[4,4]:=1: #print(eta_du);
xi_du:=array(sparse,1..4,1..4): xi_du[1,1] := 1: xi_du[2,2] := 1: xi_du[3,3] := 1: xi_
du[4,4] := 1: #print(xi_du);
#cálculo das conexões
derMetCov_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','i'): for a from 1 to 4 do for
b from 1 to 4 do for i from 1 to 4 do derMetCov_ddd[a,b,i]:=diff(g_dd[a,b],coordinates[i]):
od: od: od: #print(derMetCov_ddd); #derivada da metrica covariante
derProjMetCov_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign ('a','b','c','i'): for a from 1
to 4 do for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do derProjMetCov_ddd[a,b,c]:=sum(
derMetCov_ddd[a,b,i]*eta_du[c,i],i=1..4): od: od: od: #print(derProjMetCov_ddd);
#derivada projetada da metrica covariante
Gamma_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c'): for a from 1 to 4 do for b
from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do Gamma_ddd[a,b,c]:=1/2*expand(derProjMetCov_
ddd[a,b,c]+derProjMetCov_ddd[a,c,b]-derProjMetCov_ddd[ b, c, a]+C_ddd[ a, b, c]-
C_ddd[ c, a, b]-C_ddd[ b, a, c]): od: od: od: #print(Gamma_ddd); #Conexão covari-
ante
Gamma_udd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c','d'): for a from 1 to 4 do
for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do Gamma_udd[a,b,c]:=expand(sum(g_uu[a,d]*
Gamma_ddd[d,b,c],d=1..4)): od: od: od: #print(Gamma_udd); #conexão contravari-
ante
#cálculo da curvatura
derGamma_uddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c','i'): for a from 1 to
4 do for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do for i from 1 to 4 do derGamma_uddd[ a, b, c, i]
:= diff(Gamma_udd[ a, b, c],coordinates[ i]): od: od: od: od: #print(derGamma_uddd);
#derivada da conexão
derProjGamma_uddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c','d','i'): for a
from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do for d from 1 to 4 do derProj-
Gamma_uddd[a,b,c,d]:=sum(derGamma_uddd[a,b,c,i]*eta_du[d,i],i=1..4): od: od: od:
od: #print(derProjGamma_uddd); #derivada projetada da conexão
R_uddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c','d','e','f','g'): for a from 1
to 4 do for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do for d from 1 to 4 do R_uddd[a,b,c,d]
:= simplify(expand(derProjGamma_uddd[ a, b, d, c]-derProjGamma_uddd[ a, b, c,
d]+sum(Gamma_udd[ a, e, c]*Gamma_udd[ e, b, d], e = 1..4)-sum(Gamma_udd[ a,
f, d]*Gamma_udd[ f, b, c], f = 1..4)+ sum(Gamma_udd[ a, b, g]*C_udd[ g, c, d], g =
1..4))): od: od: od: od: #print(R_uddd); #tensor curvatura de Riemann
#cálculo do tensor de Ricci

```

```

R_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign('a','b','c'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to
4 do R_dd[a,b]:=simplify(expand(sum(R_uddd[c,a,c,b],c=1..4))): od: od: #print (ex-
pand(R_dd)); #tensor de Ricci
#cálculo dos componentes covariantes/contravariantes do tensor de Ricci
unassign('a','b','c'): R_ud:=array(sparse,1..4,1..4): for a from 1 to 4 do for b from 1 to 4
do R_ud[a,b]:=sum(g_uu[a,c]*R_dd[c,b],c=1..4): od: od: #print((R_ud));
#cálculo do escalar de Ricci
unassign('a','b'): R:=simplify(expand(sum(sum(g_uu[a,b]*R_dd[a,b],b=1..4),a=1..4))):
#print((R));
#cálculo do escalar quadrático de Ricci
unassign('a','b','c','d'): Ricquad:=simplify(expand(sum(sum(sum(sum(g_uu[ a, c]*g_uu[
b, d]* R_dd[ c, d]*R_dd[ a, b], d = 1..4), c = 1..4), b = 1..4), a = 1..4))): #print( sim-
plify( expand( Ricquad )));
#cálculo do escalar quadrático de Riemann
unassign( 'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g', 'h'): Riemquad := simplify( sum( sum( sum( sum(
sum( sum( sum( sum( sum(g_uu[ e, b]*g_uu[ f, c]*g_uu[ g, d]*g_dd[ a, h]*R_uddd[ a, e,
f, g]*R_uddd[h,b,c,d], h=1..4), g=1..4),f=1..4),e=1..4),d=1..4),c=1..4),b=1..4),a=1..4)):
#print(simplify (expand( Riemquad )));
#cálculo do tensor de Weyl
C_dddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c','d','f'): for a from 1 to 4 do
for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do for d from 1 to 4 do C_dddd[a,b,c,d]:=simplify
(sum(g_dd[a,f]*R_uddd[f,b,c,d],f=1..4)-1/2*(g_dd[ c, a]*R_dd[b,d]+ g_dd[d,b]*R_dd[
c, a]-g_dd[ c, b]*R_dd[ d, a]-g_dd[ d, a]*R_dd[ c, b])+1/6*R*(g_dd[ c, a]*g_dd[ d,
b]-g_dd[ c, b]*g_dd[ d, a])): od: od: od: od: #print(simplify(expand(C_dddd)));
#testando o traço nulo do tensor de Weyl:
Weyl_trace:=array(sparse,1..4,1..4): unassign( 'a', 'b', 'c', 'd', 'f'): for a from 1 to 4 do
for c from 1 to 4 do Weyl_trace[a,c] := simplify(sum(sum(sum(g_uu[ a, d]*g_uu[ b,
f]*C_dddd[ d, f, b, c],f = 1..4), d = 1..4), b = 1..4)): od: od: #print(simplify(expand(
Weyl_trace)));
#cálculo do escalar quadrático de Weyl
unassign( 'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g', 'h'): Weylquad := simplify (sum (sum (sum (sum
(sum (sum (sum (sum (sum (g_uu[ a, e]*g_uu[ b, f]*g_uu[ c, g]*g_uu[ d, h]*C_dddd[ e, f, g,
h]*C_dddd[ a, b, c, d], h = 1..4), g = 1..4), f = 1..4), e = 1..4), d = 1..4), c = 1..4), b =
1..4), a = 1..4)): #print(simplify(expand(Weylquad)));
#Determinando os Coeficientes de Newman-Penrose
#base nula (k,l,t,t_): , kl=-1, tt_=1, outros=0. #Esta base nula só serve para a métrica
não-diagonal anisotrópica em questão, para outra métrica, tem que recalculá-la e redigitar
a base nula.
k_u := array([1/(sqrt(2))*a_(t),0,0,1/sqrt(2)]): l_u := array([-1/(sqrt(2))*a_(t),0,0,1/

```

```

sqrt(2)): t_u := array([0,1/(sqrt(2)*a_(t)),I/(sqrt(2)*a_(t)),0]): t__u := array([0,1/
(sqrt(2)*a_(t)), -I/(sqrt(2)*a_(t)),0]): #print( k_u, l_u, t_u, t__u);
unassign('a', 'b'): kk := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*k_u[a]*k_u[b], a = 1..4), b =
1..4)): unassign('a', 'b'): kl := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*k_u[a]*l_u[b], a = 1..4), b
= 1..4)): unassign('a', 'b'): kt := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*k_u[a]*t_u[b], a = 1..4), b
= 1..4)): unassign('a', 'b'): kt_ := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*k_u[a]*t__u[b], a=1..4),
b = 1..4)): unassign('a', 'b'): ll := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*l_u[a]*l_u[b], a=1..4), b
= 1..4)): unassign('a', 'b'): lt := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*l_u[a]*t_u[b], a=1..4), b
= 1..4)): unassign('a', 'b'): lt_ := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*l_u[a]*t__u[b], a=1..4),
b = 1..4)): unassign('a', 'b'): tt := simplify(sum(sum(g_dd[a, b]*t_u[a]*t_u[b], a=1..4), b
= 1..4)): unassign('a', 'b'): tt_ := simplify (sum(sum(g_dd[a, b]*t_u[a]*t__u[b], a=1..4),
b = 1..4)): unassign('a', 'b'): t_t_ := simplify (sum(sum(g_dd[a, b]*t__u[a]*t__u[b], a =
1..4), b = 1..4)): #print(kk, kl, kt, kt_, ll, lt, lt_, tt, tt_, t_t_);
#Psi's
unassign('a', 'b', 'c', 'd'): psi_0 := simplify (sum (sum (sum (sum (C_dddd[a, b, c, d]*k_u[
a]* t_u[ b]*k_u[ c]*t_u[ d], d = 1..4), c = 1..4), b = 1..4), a = 1..4)): unassign('a',
'b', 'c', 'd'): psi_1 := simplify(sum(sum(sum(sum(C_dddd[ a, b, c, d]*k_u[ a]*l_u[
b]*k_u[ c]*t_u[ d], d = 1..4), c = 1..4), b = 1..4), a = 1..4)): unassign('a', 'b', 'c', 'd'):
psi_2 := simplify(sum(sum(sum(sum(C_dddd [ a, b, c, d]*k_u[ a]*t_u[ b]*t__u[ c]*l_u[
d], d = 1..4), c = 1..4), b = 1..4), a = 1..4)): unassign('a', 'b', 'c', 'd'): psi_3
:= simplify(sum(sum(sum(sum(C_dddd[a, b, c, d]*k_u[a]* l_u[b]*t__u[c]*l_u[d], d=1..4),
c=1..4), b=1..4), a=1..4)): unassign('a', 'b', 'c', 'd'): psi_4 := simplify(sum (sum (sum (sum(
C_dddd[a, b, c, d]*t__u[a]* l_u[b]*t__u[c]*l_u[d], d = 1..4), c = 1..4), b = 1..4), a =
1..4)): #print( psi_0, psi_1, psi_2, psi_3, psi_4);
#coletando as partes reais e imaginárias dos psi's:
psi_0_re := coeff(psi_0, I, 0): psi_0_im := coeff(psi_0, I, 1): psi_1_re := coeff(psi_1, I, 0):
psi_1_im := coeff(psi_1, I, 1): psi_2_re := coeff(psi_2, I, 0): psi_2_im := coeff(psi_2, I, 1):
psi_3_re := coeff(psi_3, I, 0): psi_3_im := coeff(psi_3, I, 1): psi_4_re := coeff(psi_4, I, 0):
psi_4_im := coeff(psi_4, I, 1): #print( psi_0_re, psi_0_im);
#guardando os psi no vetor psi:
psi := array(sparse, 1..10): psi[1] := simplify(psi_0_re): psi[2] := simplify(psi_0_im):
psi[3] := simplify(psi_1_re): psi[4] := simplify(psi_1_im): psi[5] := simplify(psi_2_re):
psi[6] := simplify(psi_2_im): psi[7] := simplify(psi_3_re): psi[8] := simplify(psi_3_im):
psi[9] := simplify(psi_4_re): psi[10] := simplify(psi_4_im): #print( psi);
#Calculando os componentes do tensor de Ricci projetado na base nula:
unassign('a', 'b'): R_kk := simplify(sum(sum(R_dd[a, b]*k_u[a]*k_u[b], b=1..4), a=1..4)):
unassign('a', 'b'): R_kl := simplify(sum(sum(R_dd[a, b]*k_u[a]*l_u[b], b = 1..4), a=1..4)):
unassign('a', 'b'): R_kt := simplify(sum(sum(R_dd[a, b]*k_u[a]*t_u[b], b = 1..4), a =
1..4)): unassign('a', 'b'): R_kt_ := simplify(sum(sum(R_dd[a, b]*k_u[a]*t__u[b], b=1..4),

```

```

a=1..4)): unassign('a','b'): R_ll:=simplify(sum(sum(R_dd[a,b]*1_u[a]*1_u[b], b = 1..4),
a = 1..4)): unassign('a','b'): R_lt:=simplify(sum(sum(R_dd[a,b]*1_u[a]*t_u[b],b=1..4),
a=1..4)): unassign('a','b'): R_lt_:=simplify(sum(sum(R_dd[a,b]*1_u[a]*t__u[b], b =
1..4), a = 1..4)): unassign('a','b'): R_tt:=simplify(sum(sum(R_dd[a,b]*t_u[a]*t_u[b], b =
=1..4),a=1..4)): unassign('a','b'): R_tt_:=simplify(sum(sum(R_dd[a,b]*t_u[a]*t__u[
b], b = 1..4), a = 1..4)): unassign('a','b'): R_t_t_:=simplify(sum(sum(R_dd[a,b]*t__u[
a]*t__u[b],b=1..4),a=1..4)): #print( R_kk, R_kl, R_kt, R_kt_, R_ll, R_lt, R_lt_,
R_tt, R_tt_, R_t_t_);
#coletando os componentes projetados na base nula de Ricci (tem imaginários e reais):
Ricci_proj_nul:=array(sparse,1..20): Ricci_proj_nul[1] := coeff(R_kk,I,0): Ricci_proj_
nul[2] := coeff(R_kk,I,1): Ricci_proj_nul[3] := coeff(R_kl,I,0): Ricci_proj_nul[4] := coe
ff(R_kl,I,1): Ricci_proj_nul[5] := coeff(R_kt,I,0): Ricci_proj_nul[6]:=coeff(R_kt,I,1):
Ricci_proj_nul[7]:=coeff(R_kt_,I,0): Ricci_proj_nul[8]:=coeff(R_kt_,I,1): Ricci_proj_
nul[9] := coeff(R_ll,I,0): Ricci_proj_nul[10] := coeff(R_ll,I,1): Ricci_proj_nul[11]
:= coeff(R_lt,I,0): Ricci_proj_nul[12] := coeff(R_lt,I,1): Ricci_proj_nul[13] := coe
ff(R_lt_,I,0): Ricci_proj_nul[14] := coeff(R_lt_,I,1): Ricci_proj_nul[15] := coeff(
R_tt, I, 0): Ricci_proj_nul[16] := coeff(R_tt,I,1): Ricci_proj_nul[17] := coeff( R_tt_,
I, 0): Ricci_proj_nul[18] := coeff(R_tt_,I,1): Ricci_proj_nul[19] := coeff(R_t_t_,I,0):
Ricci_proj_nul[20] := coeff(R_t_t_,I,1): #print( Ricci_proj_nul);
#Determinando as Equações de Campo
#cálculo do tensor de Einstein com constante cosmológica
G_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign('a','b'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do
G_dd[a,b]:=simplify(expand(R_dd[ a, b]-1/2*g_dd[ a, b]*R+1/2*g_dd[ a, b]*Lambda)):
od; od; #print(G_dd);
#Calculando os termos de derivadas e derivadas projetadas necessário para descrever
H(1) e H(2);
derEta_dud:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','i','j'): for a from 1 to 4 do for i
from 1 to 4 do for j from 1 to 4 do derEta_dud[a,i,j]:=simplify(expand(diff(eta_du[a,i],
cordinates[j]))): od: od: od: #print(derEta_dud);
derR_d:=array(sparse,1..4): unassign('i'): for i from 1 to 4 do derR_d[i]:=simplify( ex
pand (diff(R,cordinates[i]))): od: #print(derR_d);
derSecR_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign('i','j'): for i from 1 to 4 do for j from 1 to
4 do derSecR_dd[i,j]:=simplify(expand(diff(derR_d[i],cordinates[j]))): od: od: #print(
derSecR_dd);
derRicci_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','i'): for a from 1 to 4 do for b
from 1 to 4 do for i from 1 to 4 do derRicci_ddd[a,b,i]:=simplify(expand(diff(R_dd[a,b],
cordinates[i]))): od: od: od: #print(derRicci_ddd);
derSecRicci_dddd := array(sparse, 1..4, 1..4, 1..4, 1..4): unassign( 'a', 'b', 'i', 'j'): for
a from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do for i from 1 to 4 do for j from 1 to 4 do derSe

```

```

cRicci_ddd[a,b,i,j] := simplify(expand(diff(derRicci_ddd[a,b,i],coordinates[j]))): od: od:
od: od: #print(derSecRicci_ddd);
derProjRicci_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','c','i'): for a from 1 to
4 do for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do derProjRicci_ddd[a,b,c]:=simplify(
expand(sum(eta_du[c,i]*derRicci_ddd[a,b,i],i=1..4))): od: od: od: #print( derProj-
Ricci_ddd);
derSecProjRicci_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4,1..4): unassign( 'a', 'b', 'c', 'd', 'i', 'j',
'm', 'n'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do for d from 1 to 4
do derSecProjRicci_ddd[a,b,c,d]:=simplify(expand(sum(sum(eta_du[d,j]*derEta_dud[
c, i, j]* derRicci_ddd[a,b,i],i=1..4),j=1..4)+sum(sum(eta_du[d,m]*eta_du[c,n]* derSe-
cRicci_ddd[ a, b, n, m], n=1..4),m=1..4))): od: od: od: od: #print( derSecProj-
Ricci_ddd);
derSecCovR_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign('a','b','c','i','j','k','m','n'): for a from
1 to 4 do for b from 1 to 4 do derSecCovR_dd[a,b]:=simplify(expand(sum(sum(eta_du[ b,
i]*derEta_dud[ a, j, i]*derR_d[j], j = 1..4), i = 1..4)+sum(sum(eta_du[ b, m]*eta_du[ a,
n]*derSecR_dd[n,m], n=1..4),m=1..4)-sum(sum(Gamma_udd[c,a,b]*eta_du[c,k]*derR_
d[k],k=1..4),c= 1..4))): od: od: #print(derSecCovR_dd);
unassign('a','b'): DAlmbrtR:=simplify(expand(sum(sum(g_uu[a,b]*derSecCovR_dd[a,b],
b=1..4),a=1..4))):
DAlmbrtRicci_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign( 'a', 'b', 'c', 'd'): for a from 1 to
4 do for b from 1 to 4 do DAlmbrtRicci_dd[a,b]:=simplify( expand(sum(sum( g_uu[ c,
d]*(derSecProjRicci_ddd[ a, b, c, d]-sum(Gamma_udd[ f1, a, d]* derProjRicci_ddd[ f1,
b, c], f1=1..4)-sum(Gamma_udd[f2,b,d]*derProjRicci_ddd[a,f2,c],f2=1..4)-sum(Gamma_
udd[ f3, c, d]*derProjRicci_ddd[ a, b, f3],f3= 1..4)-sum(Gamma_udd[ f4, a, c]* derProj-
Ricci_ddd[ f4, b, d],f4=1..4)-sum(Gamma_udd[ f5, b, c]*derProjRicci_ddd[ a, f5, d],f5=
1..4)-sum(derProjGamma_udd[ g1, a, c, d]*R_dd[ g1, b],g1=1..4)-sum(derProjGamma_
udd[ g2, b, c, d]* R_dd[ a, g2], g2 = 1..4)+sum( sum( Gamma_udd[ m1, a, d]*Gamma_
udd[ n1, m1, c]*R_dd[ n1, b], n1 = 1..4), m1 = 1..4)+sum(sum(Gamma_udd[ m2, c,
d]*Gamma_udd[ n2, a, m2]*R_dd[ n2, b], n2 = 1..4), m2 = 1..4)+sum(sum(Gamma_udd[
m3, b, d]*Gamma_udd[ n3, a, c]*R_dd[ n3, m3], n3 = 1..4), m3 = 1..4)+ sum(sum(Gamma
_udd[ m4, b, d]*Gamma_udd[ n4, m4, c]*R_dd[ a, n4], n4 = 1..4), m4 = 1..4)+
sum(sum(Gamma_udd[ m5, c, d]*Gamma_udd[ n5, b, m5]*R_dd[ a, n5], n5 = 1..4),
m5 = 1..4)+ sum(sum(Gamma_udd[ m6, a, d]*Gamma_udd[ n6, b, c]*R_dd[ m6,
n6],n6=1..4),m6=1..4)), d = 1..4, c = 1..4)): od: od: #print( DAlmbrtRicci_dd);
#cálculo de H(1) e H(2):
H1_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign('a','b'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to
4 do H1_dd[a,b]:=simplify(expand(1/2*g_dd[a,b]*(R**2)-2*R*R_dd[a,b]-2*g_dd[a,b]*
DAlmbrtR+2*derSecCovR_dd[a,b])): od: od: #print(H1_dd);
H2_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign('a','b','c','d','e','f','p','q','r'): for a from 1 to 4

```



```

do for b from 1 to 4 do H2_dd[a,b]:=simplify(expand(1/2*sum(sum(sum(sum( g_dd[a,b]*
R_dd[c,d]*g_uu[c,e]*g_uu[d,f]*R_dd[e,f],e=1..4),f=1..4),c=1..4),d=1..4)-DAlmbrtRicci_
dd[a,b]-1/2*g_dd[ a, b]*DAlmbrtR+derSecCovR_dd[ a, b]-2*sum(sum(sum(g_uu[ r, q]*
R_dd[p,q] *R_uddd[ p, b, r, a],r=1..4),q=1..4),p=1..4))) : od: od: #print(H2_dd);
#Determinando as Equações de Campo
E_dd:=array(sparse,1..4,1..4): unassign('a','b'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do
E_dd[a,b]:=simplify(expand(G_dd[ a, b]-(beta-1/3*alpha)*H1_dd[ a, b]-alpha*H2_dd[
a, b])): od: od: #print(E_dd);
#Testando a divergência nula das equações de campo
V_dd:=E_dd:
derV_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): unassign('a','b','i'): for a from 1 to 4 do for b
from 1 to 4 do for i from 1 to 4 do derV_ddd[a,b,i]:=simplify(expand(diff(V_dd[a,b],
coordinates[i]))): od: od: od: #print( derV_ddd);
unassign('a','b','c','d','e','i'): derCov_ddd:=array(sparse,1..4,1..4,1..4): for a from 1 to
4 do for b from 1 to 4 do for c from 1 to 4 do derCov_ddd[a,b,c]:=sum(eta_du[c,i]*
derV_ddd[a,b,i],i=1..4)-sum(Gamma_udd[d,a,c]*V_dd[d,b],d=1..4)-sum( Gamma_udd[
e, b, c]* V_dd[a,e],e=1..4): od: od: od: #print ( simplify ( derCov_ddd ));
unassign( 'a', 'b', 'c'): divergente_d := array( sparse, 1..4): for b from 1 to 4 do diver-
gente_d[b]:=sum(sum(g_uu[a,c]*(derCov_ddd[a,b,c]),c=1..4),a=1..4): od: #print( sim-
plify ( divergente_d));
#Manipulação do sistema de equações para resolução numérica
Eq11:=E_dd[1,1]:
Eq44:=E_dd[4,4]: V44:=E_dd[4,4]:
#Convertendo a parte dinâmica do sistema para equações de primeira ordem
EqSys:=convertsys({Eq11=0},{},{a_(t)},t,y,dydt):
#Usando os mesmos nomes de variáveis {print(EqSys[2])} para os vínculos e os escalares
V44:=subs(diff(a_(t),t$3)=y[4],diff(a_(t),t$2)=y[3],diff(a_(t),t)=y[2],a_(t)=y[1],V44):
R:=subs(diff(a_(t),t$3)=y[4],diff(a_(t),t$2)=y[3],diff(a_(t),t)=y[2],a_(t)=y[1],R):
Ricquad := subs(diff( a_(t), t$3) = y[4], diff( a_(t), t$2) = y[3], diff( a_(t), t) = y[2],
a_(t) = y[1], Ricquad):
Riemquad:=subs(diff(a_(t),t$3)=y[4],diff(a_(t),t$2)=y[3],diff(a_(t),t)=y[2],a_(t) = y[1],
Riemquad):
Weylquad:=subs(diff(a_(t),t$3)=y[4],diff(a_(t),t$2)=y[3],diff(a_(t),t)=y[2],a_(t) = y[1],
Weylquad):
unassign('a'): for a from 1 to 10 do psi[a]:=subs(diff(a_(t),t$3)=y[4],diff(a_(t),t$2)=y[3],
diff(a_(t),t)=y[2],a_(t)=y[1],psi[a]): od:
unassign('a'): for a from 1 to 20 do Ricci_proj_nul[a] := subs( diff( a_(t), t$3) = y[4],
diff(a_(t), t$2)=y[3],diff(a_(t),t)=y[2],a_(t)=y[1],Ricci_proj_nul[a]): od:

```

```

unassign('a','b'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do R_ud[a,b]:=subs(diff(a_(t),t$3)=
y[4],diff(a_(t),t$2)=y[3],diff(a_(t),t)=y[2],a_(t)=y[1],R_ud[a,b]): od: od:
#Gerando em Arquivos
#O arquivo de equações é gerado no arquivo .eq para que seja calculado o Jacobiano
através do Gerador C. Os outros arquivos são jogados em formato .c e editados para
formar a biblioteca.
#Gere o arquivo Equacoes.eq colocando o display de saída (options) em formato maple
notation. Edite o arquivo para tirar o lixo e colocar os comandos no formato maple (com
:= e : no final).
#writeto("Equacoes.eq"):
#unassign('a'): for a from 1 to 4 do print(EqSys[1,a]); od:
#writeto(terminal):
#Gerando em C
#writeto("Escalares.equ"):
#C(R,resultname="R");
#C(Ricquad,resultname="Ricquad");
#C(Riemquad,resultname="Riemquad");
#C(Weylquad,resultname="Weylquad");
#writeto(terminal):
#writeto("Vinculos.equ"):
#C(V14,resultname="V14");
#C(V44,resultname="V44");
#writeto(terminal):
#writeto("Psi.equ"):
#C(psi,resultname="psi");
#writeto(terminal):
#Ricci_ud:=array(1..2): Ricci_ud[1]:=R_ud[1,1]: Ricci_ud[2]:=R_ud[4,4]:
#writeto("Ricci.equ"):
#C(Ricci_proj_nul,resultname="Ricci");
#C(Ricci_ud,resultname="Ricci_ud");
#writeto(terminal):
#Determinando as condições iniciais:
Digits:=20:
unassign('y','alpha','beta','Lambda','c1','c2'): y:=array(1..4): Vinc44:=V44:
a0:=1.0: t:=1.0: t0:=0.0:
alpha:=0.0: beta:=0.1: Lambda:=0.1:
y[1] := evalf(a0*exp(sqrt(Lambda/6)*(t-t0))): #termos de posição: a_(t).
y[2] := evalf((1/6)*a0*sqrt(6)*sqrt(Lambda)*exp((1/6)*sqrt(6)*sqrt(Lambda) * (t-t0))):
#termos de velocidades: da_(t)/dt.

```

```

y[3] := evalf((1/6)*a0*Lambda*exp((1/6)*sqrt(6)*sqrt(Lambda)*(t-t0)): #termos de
acelerações: d2a_(t)/dt2.
y[4] := evalf((1/36)*a0*Lambda^(3/2)*sqrt(6)*exp((1/6)*sqrt(6)*sqrt(Lambda)*(t-t0)):
#termos de ordem 3: d3a_(t)/dt3.
#print(Vinc44=0):
solve(Vinc44=0,c1):
#
#fim
#
#
Gerador: le o arquivo de equacoes .eq em formato maple e calcula as equações e o jacobiano
para gerar em C.
#Gere o arquivo Equacoes.eq pelo código principal no maple, colocando o display de
saida (options) em formato maple notation. Edite o arquivo para tirar o lixo e colocar os
comandos no formato maple (com := e : no final).
#Geralmente este arquivo deve ser transformado em .bat para se tornar rápido. Exporte
como .txt, mude para .bat e tire todo tipo de formatação, deixando apenas os comandos
puros, sem o ">".
restart;
with(CodeGeneration): with(linalg):
#EQUAÇÕES:
dydt:=array(1..4):
read "Equacoes.eq":
writeto("Equacoes.equ"):
C(dydt,resultname="dydt",declare=[y::float,alpha::float,beta::float,Lambda::float]);
writeto(terminal):
#JACOBIANO:
dydt:=array(1..4): Jac:=array(1..4,1..4):
read "Equacoes.eq":
unassign('a','b'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do Jac[a,b]:=diff(dydt[a],y[b]): od:
od:
#simplificando
unassign('a','b'): for a from 1 to 4 do for b from 1 to 4 do Jac[a,b]:=collect (numer (
Jac[a,b]),[ y[1], y[2], y[3], y[4]],recursive)/denom( Jac[a,b]): od: od: #Simplificação
#tentando jogar o Jacobiano inteiro no arquivo sem quebrar em partes as matrizes (ge-
ralmente não funciona por causa da lentidão):
writeto("Jac.equ"):
C(Jac,resultname="Jac",declare=[y::float,A::float,alpha::float,beta::float,Lambda::float]);
writeto(terminal):

```

```
#  
#fm  
#
```

# Apêndice D

## Códigos em C

Neste apêndice mostramos um exemplo de código em linguagem C utilizado para o cálculo numérico dos sistemas de equações da tese:

```
//
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <gsl/gsl_errno.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_odeiv.h>
//Arquivos de Equações
#include "Equacoes.h"
#include "Jac.h"
#include "Escalares.h"
#include "Vinculos.h"
#include "Psi.h"
#include "Ricci.h"
int main(void)
{
FILE *fp_condini, *fp_eq, *fp_escal, *fp_vinc, *fp_psi, *fp_ricci_proj, *fp_ricci_cc;
//cria ponteiro fp para arquivos
if ((fp_condini=fopen("Condini.dat","w"))==NULL) {
printf("\n\nFalha na abertura do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if ((fp_eq=fopen("Equacoes.dat","w"))==NULL) {
printf("\n\nFalha na abertura do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if ((fp_escal=fopen("Escalares.dat","w"))==NULL) {
```

```

printf("\n\nFalha na abertura do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if ((fp_vinc=fopen("Vinculos.dat","w"))==NULL) {
printf("\n\nFalha na abertura do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if ((fp_psi=fopen("Psi.dat","w"))==NULL) {
printf("\n\nFalha na abertura do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if ((fp_ricci_proj=fopen("Ricci_proj.dat","w"))==NULL) {
printf("\n\nFalha na abertura do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if ((fp_ricci_cc=fopen("Ricci_cc.dat","w"))==NULL) {
printf("\n\nFalha na abertura do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
//double mu = 1.0;
double params[3] = {1.0,1.0,0.0}; //parâmetros (alpha, beta, Lambda)
{//entrando com os parâmetros alpha, beta, Lambda
double alpha, beta, Lambda;
printf("\n\nDigite os valores dos parametros alpha, beta e Lambda ...: ");
scanf("%lf %lf %lf", &alpha, &beta, &Lambda);
params[0]=alpha;
params[1]=beta;
params[2]=Lambda;
printf("\n\nOs valores lidos foram: alpha=%.21lf beta=%.21lf Lambda=%.21lf", pa-
rams[0], params[1], params[2]); //teste para ver se esta lendo corretamente
}
double y[4]; //condição inicial obedecendo o vínculo
{//entrando com as condicoes iniciais
int i,j=999;
for (i=0;i<=3;i++) y[i]=0.0;
while (1) {
double valor_inicial;
printf("\n\nDigite qual condicao inicial nao-nula e qual valor deseja atribuir (99=conti-
nuar) ...: ");

```

```

scanf("%d",&j);
if ((j>4)||j<1) break;
scanf("%lf",&valor_inicial);
y[j-1]=valor_inicial;
printf("\n\nOs valores lidos foram: y[%d]=%.21lf",j,y[j-1]); //teste para ver se esta lendo
corretamente
}
}
double t = 0.0; //tempo inicial
double tf = 1.0e20; //tempo final
double h = 1.0e-12; //passo inicial
double erro_absoluto = 1.0e-12; //erro absoluto
double erro_relativo = 1.0e-12; //erro relativo
//criados apenas para o "BLOCO" abaixo que controla quantos pts são gravados no
arquivo...
double ht = 0.01; //ht=1 (1 pts/s), ht=0.1 (10 pts/s), ht=0.01 (100 pts/s), ht=0.001
(1000 pts/s), ...
double hti = t;
printf("\n\nDeseja alterar os valores iniciais de controle: 1=sim ou outro=nao ...: ");
{
int escolha;
scanf("%d",&escolha);
if (escolha==1) { //entrando com os valores de controle
printf("\n\nDigite o valor do tempo inicial, final e do passo ...: ");
scanf("%lf %lf %lf",&t,&tf,&h);
printf("\n\nOs valores lidos foram: ti=%e, tf=%e e h=%e",t,tf,h); //teste para ver se
esta lendo corretamente
printf("\n\nDigite o valor do erro absoluto e do erro relativo ...: ");
scanf("%lf %lf",&erro_absoluto, &erro_relativo);
printf("\n\nOs valores lidos foram: erro absoluto=%e e erro relativo=%e", erro_absoluto,
erro_relativo); //teste para ver se esta lendo corretamente
printf("\n\nPara imprimir pontos por segundo no arquivo: 1)=1p, 0.1)=10p, 0.01)=100p,
0.001)=1000p, ...: ");
scanf("%lf",&ht);
hti=t;
}
}
int contador=0; //criado apenas para ver se o programa nao esta travando: bloco dentro
de while

```

```

//Instanciando objetos de calculo numérico da biblioteca gsl
const gsl_odeiv_step_type * T = gsl_odeiv_step_rkf45; //Runge-Kutta Felberg (4,5)
method.
gsl_odeiv_step * s = gsl_odeiv_step_alloc (T, 4); //Alocação de Instancia para objeto
T (obj_T, dimensão_4)
gsl_odeiv_control * c = gsl_odeiv_control_y_new ( erro_absoluto, erro_relativo);
//Controle de Erro (erro_absoluto, erro_relativo)
gsl_odeiv_evolve * e = gsl_odeiv_evolve_alloc (4); //Controle de Evolução do Sistema
(dimensão_4)
gsl_odeiv_system sys = {eqdiff, jac, 4, params}; /*cria um objeto sys que guarda fun-
ção=func, matrizjacobiana=jac, dim=4;*/
//esta parte do arquivo calcula os coeficientes de NP psi's e Ricci projetado na base nula
//psi[0,...,9]=[psi_0_re,psi_0_im,psi_1_re,psi_1_im,psi_2_re,...,psi_4_re,psi_4_im]
//Ricci_proj_nul[0,...,19]=[Rkk_re, Rkk_im, Rkl_re, Rkl_im, Rkt_re, Rkt_im, Rkt__re,
Rkt__im, Rll_re, Rll_im, Rlt_re, Rlt_im, Rlt__re, Rlt__im, Rtt_re, Rtt_im, Rtt__re,
Rtt__im, Rt_t__re, Rt_t__im]
//Ricci_cov_cont[]=Ricci_ud[2]=(R_ud[1,1], R_ud[4,4])
double psi[10];
double Ricci[20];
double Ricci_ud[2];
psi_NewPenr(y,params,psi);
Ricci_proj_nul(y,params,Ricci);
Ricci_cov_cont(y,params,Ricci_ud);
//criado apenas para gravar a diferenca proporcional entre a solucao encontrada e a
solucao exata: exp(t-t0).
double t0=0.0;
double diferenca=((y[0]-exp(sqrt(0.6e1) * sqrt(params[2]) * (t - t0) / 0.6e1))/(exp(sqrt(0.6e1)
* sqrt(params[2]) * (t - t0) / 0.6e1)));
printf("\n\n\n P R O C E S S A N D O ... \n\n\n");
//imprimindo as condicoes iniciais
printf("\nt=%0.21lf, a=%0.21lf, da=%0.21lf, d2a=%0.21lf, d3a=%0.21lf, R=%0.21lf, V14 =
%0.21lf, V44=%0.21lf", t, y[0], y[1], y[2], y[3], R(y,params), V14(y,params), V44(y,params));
fprintf(fp_condini,"t_inicial=%0.21f t_final=%0.21f ny = %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f \nV14 =
%0.21f V44=%0.21f\npasso=%0.21f\nerro absoluto=%0.21f erro relativo=%0.21f\nalpha=%0.21f beta=
%0.21f Lambda=%0.21f\n", t, tf, y[0], y[1], y[2], y[3], V14(y,params), V44(y,params), h,
erro_absoluto, erro_relativo, params[0], params[1], params[2]);
if (fclose(fp_condini)!=0) { //fechando arquivo de condicoes iniciais
printf("\n\nFalha no fechamento do arquivo! Programa abortado!\n\n\n");
exit(1);
}

```



```

}
fprintf(fp_eq,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n", t, y[0], y[1], y[2], y[3], diferenca);
fprintf(fp_escal,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n", t, R(y,params), Ricquad(y,params),
Riemquad(y,params), Weylquad(y,params));
fprintf(fp_vinc,"%0.21f %0.21f %0.21f\n", t, V14(y,params), V44(y,params));
fprintf(fp_psi,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n",
t, psi[0], psi[1], psi[2], psi[3], psi[4], psi[5], psi[6], psi[7], psi[8], psi[9]);
fprintf(fp_ricci_proj,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f
%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n", t, Ricci[0],
Ricci[1], Ricci[2], Ricci[3], Ricci[4], Ricci[5], Ricci[6], Ricci[7], Ricci[8], Ricci[9], Ricci[10],
Ricci[11], Ricci[12], Ricci[13], Ricci[14], Ricci[15], Ricci[16], Ricci[17], Ricci[18], Ricci[19]);
fprintf(fp_ricci_cc,"%0.21f %0.21f %0.21f\n", t, Ricci_ud[0], Ricci_ud[1]);
while (t < tf)
{
//mostra mensagens na tela para ver se o programa não esta travado
if (++contador==1000) {
printf("\nt=%0.21lf, a1=%0.21lf, da1=%0.21lf, d2a1=%0.21lf, d3a1=%0.21lf, R=%0.21lf, V14
=%0.21lf, V44=%0.21lf", t, y[0], y[1], y[2], y[3], R(y,params), V14(y,params), V44(y,params));
contador=0;
}
}
int status = gsl_odeiv_evolve_apply ( e, c, s, &sys, &t, tf, &h, y);
/*gsl_odeiv_evolve_apply (e,c,s,sys=sistema{ func, jac, 4, params}, t=tempo_inicial,
tf=tempo_maximo, h=passo,
y=posição_inicial{y_i(0)}) ||| e,c,s são objetos parâmetros do processo gsl.
Esta funcao avança do sistema (e,sys) de um tempo inicial t e posição inicial y{y_i(0)}
por função
de passo h (o passo é alterado pelo objeto de controle de erro c. Os novos tempos e
posição após o
primeiro passo são realocados nas variaveis t e y{y_i(t)}.*
if (status != GSL_SUCCESS) {
printf("\n\n Erro numérico no retorno GSL_SUCCESS da funcao \n\n");
break;
}
//esta parte do arquivo calcula os coeficientes de NP psi's e Ricci projetado na base nula
a cada passo e recalcula a diferenca
psi_NewPenr(y,params,psi);
Ricci_proj_nul(y,params,Ricci);
Ricci_cov_cont(y,params,Ricci_ud);

```

```

diferenca=((y[0]-exp(sqrt(0.6e1) * sqrt(params[2]) * (t - t0) / 0.6e1))/(exp(sqrt(0.6e1) *
sqrt(params[2]) * (t - t0) / 0.6e1))); //grava a diferenca proporcional entre a solucao
encontrada e a solucao exata: exp. Tirar isso em programas para outros casos.
//esta parte do código grava no arquivo apenas um ponto dentro de um intervalo de ht
segundos;
while (t>=hti) {
hti+=ht;
if (t<=hti) {
fprintf(fp_eq,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n", t, y[0], y[1], y[2], y[3], diferenca);
fprintf(fp_escal,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n", t, R(y,params), Ricquad(y,params),
Riemquad(y,params), Weylquad(y,params));
fprintf(fp_vinc,"%0.21f %0.21f %0.21f\n", t, V14(y,params), V44(y,params));
fprintf(fp_psi,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n",
t, psi[0], psi[1], psi[2], psi[3], psi[4], psi[5], psi[6], psi[7], psi[8], psi[9]);
fprintf(fp_ricci_proj,"%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f
%0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f %0.21f\n",t, Ricci[0], Ricci[1],
Ricci[2], Ricci[3], Ricci[4], Ricci[5], Ricci[6], Ricci[7], Ricci[8], Ricci[9], Ricci[10], Ricci[11],
Ricci[12], Ricci[13], Ricci[14], Ricci[15], Ricci[16], Ricci[17], Ricci[18],Ricci[19]);
fprintf(fp_ricci_cc,"%0.21f %0.21f %0.21f\n",t,Ricci_ud[0],Ricci_ud[1]);
}
}
//trunca o código para erro numérico muito grande
if ((fabs(V14(y,params))>1.0)||fabs(V44(y,params))>1.0) {
printf("\n\n Truncamento numérico \n\n");
break;
}
}
printf("\n\nLiberando memória... \n\n");
gsl_odeiv_evolve_free (e); //libera a memória associada ao objeto gsl_odeiv_evolve
(*e)
gsl_odeiv_control_free (c); //libera a memória associada ao objeto gsl_odeiv_control
(*c)
gsl_odeiv_step_free (s); //libera a memória associada ao objeto gsl_odeiv_step (*s)
if (fclose(fp_eq)!=0) {
printf("\n\nFalha no fechamento do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if (fclose(fp_escal)!=0) {
printf("\n\nFalha no fechamento do arquivo! Programa abortado!\n\n");
}
}

```

```
exit(1);
}
if (fclose(fp_vinc)!=0) {
printf("\n\nFalha no fechamento do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if (fclose(fp_psi)!=0) {
printf("\n\nFalha no fechamento do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if (fclose(fp_ricci_proj)!=0) {
printf("\n\nFalha no fechamento do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
if (fclose(fp_ricci_cc)!=0) {
printf("\n\nFalha no fechamento do arquivo! Programa abortado!\n\n");
exit(1);
}
return 0;
} //fim da funcao main
//
//fim
//
```

# Referências Bibliográficas

- [1] H. J. SCHMIDT. *Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.* 4:209-248, 2007, 12, feb 2006.
- [2] H. WEYL. *Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wiss*, 1:465–480, 1918.
- [3] B. S. DE WITT. Gordon and Breach, 1965.
- [4] R. UTIYAMA e B. DeWITT. *J. Math. Phys.*, 3:608, 1962.
- [5] S. M. CHRISTENSEN. *Phys. Rev. D*, 17:946, 1978.
- [6] K. STELLE. *Phys. Rev. D*, 16:953–969, 1977.
- [7] A. A. STAROBINSKY. *Phys. Lett.*, 91B, 1980.
- [8] B. ZELDOVICH e A. A. STAROBINSKY. *Sov.Phys. - JETP(USA)*, 34, 1972.
- [9] V. N. LUKASH e A. A. STAROBINSKY. *Sov.Phys. - JETP(USA)*, 39, 1974.
- [10] A. M. PELINSON e I. L. SHAPIRO e F. I. TAKAKURA. *Nucl. Phys.*, B648, 2003.
- [11] J. C. FABRIS e A. M. PELINSON e I. L. SHAPIRO. *Nucl. Phys.*, B597, 2001.
- [12] J. C. FABRIS e A. M. PELINSON e I. L. SHAPIRO. *Nucl. Phys. Proc. Sup.*, 95, 2001.
- [13] J. C. FABRIS e A. M. PELINSON e I. L. SHAPIRO. *Grav. Cosmol.*, 6, 2000.
- [14] D. H. COULE. *arXiv: 0706.0205*, 2007.
- [15] G. MONTANI e M. V. BATTISTI e R. BENINI e G. IMPONENTE. *Int. J. Mod. Phys. A*, 23(16/17):2353–2503, 2008.
- [16] S. COTSAKIS. *Grav. Cosmol.*, 14(176), 2008.
- [17] K. et all TOMITA. *Prog. of Theor. Phys.*, 60, 1978.
- [18] A. L. BERKIN. *Phys. Rev. D*, 44, 1991.
- [19] J. D. BARROW e S. HERVIK. *Phys. Rev.*, 74, 2006.

- [20] B. L. HU e E. VERDAGUER. *Living Rev. Rel.*, 7(3), 2004.
- [21] J. D. BARROW e S. HERVIK. *Phys. Rev. D*, 73, 2006.
- [22] T. CLIFTON e J. D. BARROW. *Class. Quant. Grav.*, 23, 2006.
- [23] J. D. BARROW e J. D. MIDDLETON. *Phys. Rev.*, 75, 2007.
- [24] J. D. BARROW e J. D. MIDDLETON. *Phys. Rev.*, 77, 2008.
- [25] H. J. SCHMIDT. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 4(209), 2007.
- [26] J. WAINWRIGHT e A. A. COLEY e G. F. R. ELLIS e M. HANCOCK. *Class. Quant. Grav.*, 15:331–350, 1998.
- [27] L. BIANCHI. *Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Sci.*, 11(267), 1898.
- [28] M. LACHIEZE-REY e J. P. LUMINET. *ARXiv:9605010v2 [gr-qc]*, 2003.
- [29] e R. K. SACHS R. KANTOWSKI. *J. Math. Phys.*, 74:443, 1966.
- [30] J. A. de DEUS e D. MULLER. *Gen. Rel. and Grav.*, 2012.
- [31] D. MULLER e J. A. de DEUS. *Int. J. of Mod. Phys. D*, 2012.
- [32] R. M. WALD. The University of Chicago Press, 1984.
- [33] H. STEPHANI e D. KRAMER e M. MACCALLUM e C. HOENSELAERS e E. HERLT. Cambridge University Press, 2 edition, 2003.
- [34] D. MULLER. e S. D. P. VITENTI. *Phys. Rev. D*, 74(063508), 2006.
- [35] R. ARNOWITT e S. DESER e C. W. MISNER. *ARxiv:gr-qc/0405109v1*, 2004. In *Gravitation: An Introduction do Current Research*, WITTEN L., ed. (Wiley, New York, 1962).
- [36] H. STEPHANI. Cambridge University Press, 2 edition, 1993.
- [37] P. A. TERZIS e T. CHRISTODOULAKIS. *arXiv:0803.3710v1 [gr-qc]*, mar 2008.
- [38] C. W. MISNER e K. THORNE e J. A. WHEELER. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [39] J. D. BARROW E S. Hervik. *Phys. Rev. D*, 74:124017, Dec 2006.
- [40] J. WAINWRIGHT e G. F. R. ELLIS. Cambridge University Press, 1997.
- [41] W. R. STOEGER e R. MAARTENS e G. F. R. ELLIS. *APJ*, 443, 1995.

- [42] R. ALDROVANDI e J. G. PEREIRA, apr 2004. Classnotes. Disponível em: <<http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/classnotes.html>>. Último acesso em: 04 mar. 2009.
- [43] J. A. de DEUS. Master's thesis, Universidade de Brasília, Apr 2009.
- [44] Maplesoft, dez 2012. Disponível em: <<http://www.maplesoft.com/>>. Último acesso em: jan. 2013.
- [45] Gcc, the gnu compiler collection, 2010. Disponível em: <<http://gcc.gnu.org/>>. Último acesso em: jan. 2013.
- [46] Gsl - gnu scientific library, 2010. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/gsl/>>. Último acesso em: 13 jul. 2010.
- [47] Gnu operating system, 1984. Disponível em: <<http://www.gnu.org/>>. Último acesso em: jan. 2013.
- [48] D. MULLER e S. D. P. VITENTI. *Phys. Rev. D*, 74:083516, 2006.