



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
ELETRÔNICOS E DE AUTOMAÇÃO

**CAPACIDADE DE REDES
AD HOC DENSAS CONSIDERANDO DESVANECIMENTO
E A LEI DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA**

Lucas Rodrigues de Paula

Brasília, Julho de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CAPACIDADE DE REDES *AD HOC* DENSAS CONSIDERANDO DESVANECIMENTO
E A LEI DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA**

LUCAS RODRIGUES DE PAULA

ORIENTADOR: RENATO MARIZ DE MORAES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
ENGENHARIA DE SISTEMAS ELETRÔNICOS E DE AUTOMAÇÃO**

PUBLICAÇÃO: PGEA.DM - 534/13

BRASÍLIA/DF: JULHO - 2013.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
ELETRÔNICOS E DE AUTOMAÇÃO

**CAPACIDADE DE REDES
AD HOC DENSAS CONSIDERANDO DESVANECIMENTO
E A LEI DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA**

Lucas Rodrigues de Paula

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Elétrica como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Engenharia Elétrica*

Banca Examinadora

Prof. Renato Mariz de Moraes, ENE/UnB
Orientador

Prof. Marcelo Menezes de Carvalho, ENE/UnB
Examinador interno

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, UFSC
Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

PAULA, LUCAS RODRIGUES

Capacidade de Redes *Ad Hoc* Densas Considerando Desvanecimento e a Lei de Conservação da Energia. [Distrito Federal] 2013.

vi, 54 pp, 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação, 2013).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Elétrica.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1. Capacidade | 2. SINR |
| 3. Desvanecimento | 4. Ganho do Canal |
| I. ENE/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Paula, Lucas R. (2013). Capacidade de Redes *Ad Hoc* Densas Considerando Desvanecimento e a Lei de Conservação da Energia. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação, Publicação PGEA.DM 534/13, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 54 pp.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Lucas Rodrigues de Paula.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Capacidade de Redes *Ad Hoc* Densas Considerando Desvanecimento e a Lei de Conservação da Energia.

GRAU / ANO: Mestre / 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste documento pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Lucas Rodrigues de Paula

Rua Zacharias Elias, Qd. 54, Lt. 07, Bairro São Carlos, Anápolis

75.084-460 Anápolis - GO - Brasil.

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais que, durante todos os anos de minha vida, fizeram o possível para me dar a oportunidade de estudar.

Lucas Rodrigues de Paula

RESUMO

O presente trabalho faz a análise do comportamento da capacidade do canal de comunicação de uma rede *ad hoc* móvel, em função do número de nós presentes na mesma. Em um modelo de propagação que considera a atenuação da potência recebida com o inverso da distância, e desvanecimento Rayleigh, foi proposta uma alteração para torná-lo mais próximo à realidade, obedecendo à Lei de Conservação da Energia. Mais especificamente, quando o transmissor aproxima-se arbitrariamente do receptor, a alteração no modelo de propagação permite que o ganho do canal dependa apenas do desvanecimento, para que a potência recebida seja igual à efetivamente transmitida, contabilizando apenas os efeitos do desvanecimento. Com a alteração no modelo, foi mostrado, analiticamente, e por simulação Monte-Carlo, que a capacidade do canal cai a zero à medida que a densidade de nós na rede cresce.

Este resultado é contrário ao comportamento previsto em trabalhos importantes na literatura [1], [2], [3], [4], e, portanto, possui grande importância no projeto de redes *ad hoc* móveis.

ABSTRACT

The present work analyses the behavior of the communication channel capacity of a mobile ad hoc network, as a function of the number of nodes. In a propagation model that considers attenuation of the received power with the inverse of the distance, and Rayleigh fading, a modification was proposed to make the model more realistic, obeying the Law of Conservation of Energy. More specifically, as the transmitter arbitrarily approaches to the receiver, the proposed alteration in the propagation model allows the communication channel gain to depend only on the fading, such that the received power is equal to the transmitted power, implying that only the fading effects are taken into account in such case. With the change in the model it was shown analytically and by Monte-Carlo simulation that the channel capacity goes to zero as the node density grows.

This result is contrary to others found on important works in the literature [1], [2], [3], [4], and, therefore has a great importance in the design of mobile ad hoc networks.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.1.1	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES	4
1.1.2	APRESENTAÇÃO DO TRABALHO	5
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1	INTRODUÇÃO	6
2.2	ATENUAÇÃO NO CAMINHO.....	6
2.3	SOMBREAMENTO (<i>shadowing</i>)	7
2.4	MULTIPERCURSO	8
2.5	POTÊNCIA MÉDIA RECEBIDA, CONSIDERANDO A DISTRIBUIÇÃO DE SUZUKI	9
2.6	MODELOS DE MOBILIDADE	9
3	MODELO CONTÍNUO DE REDE	11
3.1	INTRODUÇÃO	11
3.2	FUNDAMENTOS DO MODELO	12
3.2.1	O RAIO DA CÉLULA	13
3.2.2	A DISTRIBUIÇÃO DOS NÓS NA ÁREA	14
3.3	PADRÃO CONTÍNUO DE NÓS	15
4	O MODELO DE PROPAGAÇÃO TRADICIONAL E SUAS CONSEQUÊNCIAS NO COMPORTAMENTO DA CAPACIDADE DO CANAL	17
4.1	CURVAS PARA A CAPACIDADE DO CANAL.....	18
4.1.1	CAPACIDADE PARA O RECEPTOR EM DIFERENTES PONTOS, CONSIDERANDO $\alpha = 3$	19
4.1.2	INFLUÊNCIA DA FRAÇÃO DE NÓS TRANSMISSORES (θ) NA CAPACIDADE	19
4.1.3	POTÊNCIA DO RÚIDO (N_0)	20
4.2	CONSIDERAÇÕES	20
5	ESTUDO DA CAPACIDADE DO CANAL UTILIZANDO UM NOVO MODELO DE PROPAGAÇÃO	21
5.1	UMA NOVA FORMA PARA O GANHO DO CANAL	21
5.2	DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO	22
5.2.1	O CASO $\alpha > 2$	22
5.2.2	O CASO $\alpha = 2$	26
5.3	CONSIDERAÇÕES.....	28
6	UMA COTA SUPERIOR PARA A CAPACIDADE	29
6.1	UMA LIMITAÇÃO DO MODELO CONTÍNUO.....	29

6.2	O MODELO EXATO	30
6.3	UM LIMITE SUPERIOR PARA A \overline{SINR}	30
6.4	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE $\overline{SINR_s}$	33
6.5	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA CAPACIDADE	34
7	SIMULAÇÃO E RESULTADOS NUMÉRICOS.....	35
7.1	SIMULAÇÃO.....	35
7.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	37
7.2.1	TRANSMISSOR EM DIFERENTES PONTOS	38
7.2.2	INFLUÊNCIA DA POTÊNCIA MÉDIA DO RUÍDO (N_0)	39
7.2.3	INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO θ	40
7.2.4	INFLUÊNCIA DA CONSTANTE DE ATENUAÇÃO α	41
7.2.5	TRANSMISSOR EM DIFERENTES PONTOS ($\alpha = 2$)	42
8	CONCLUSÕES.....	43
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	44
	ANEXOS.....	46
I	CÁLCULO DOS LIMITES.....	47
I.0.6	EQUAÇÃO (5.23)	47
I.0.7	EQUAÇÃO (5.33)	47
II	CASO PARTICULAR: PDF DA FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA.....	49
III	CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES	51
III.1	INDEPENDÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS: CASO PARTICULAR	51
III.2	SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES	52
III.3	ADICIONANDO UMA CONSTANTE	54

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação típica de um sistema celular.	1
1.2	Representação da conexão entre a CCC e a ERB.	1
1.3	Representação de uma MANET.	2
2.1	Representação dos efeitos de propagação em larga e pequena escala, apresentados de forma individual e conjunta.	6
2.2	Gráficos da FDP de uma distribuição Rayleigh, para diferentes valores do parâmetro σ_r	8
3.1	Representação do esquema de repasse de pacotes, onde o nó 1 encaminha uma mensagem ao nó 3 em duas fases.	11
3.2	Gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição dos nós em relação à área da rede.	14
3.3	Gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição dos nós em relação à distância ao centro (r_c) da rede.	14
3.4	Representação da localização de um elemento diferencial de área no modelo. Nota-se que ele dista r_c unidades do centro da rede e r unidades do receptor que, por sua vez, está a r' unidades de distância do centro da rede.	15
4.1	Capacidade para o receptor em três pontos distintos, com $P = 1mW, N_0 = 5mW, \sigma_s = 1dB, \theta = 1/3$ e $\alpha = 3$. Observa-se que a Capacidade aumenta à medida que o receptor se desloca em direção à borda da rede.	19
4.2	Capacidade para dois valores distintos de θ , com $P = 1mW, N_0 = 5mW, \sigma_s = 1dB, r' = 0$ e $\alpha = 3$. Observa-se que a Capacidade diminui com o aumento de θ	19
4.3	Capacidade para três valores distintos de N_0 , com $P = 1mW, \theta = 1/3, \sigma_s = 1dB, r' = 0$ e $\alpha = 3$. Observa-se que a Capacidade diminui com o aumento de N_0	20
7.1	Ilustração da distribuição dos nós na rede em um dado instante de tempo t , na situação onde $n = 1000$ e a fração de transmissores é $\theta = \frac{1}{3}$. A figura ilustra algumas células de raio r_0 , com um transmissor e dois receptores. Os transmissores estão indicados por um asterisco dentro das células, e os receptores, por um ponto.	37
7.2	Cota superior para a capacidade em função de n , dados $P = 1mW, N_0 = 1mW, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para duas posições diferentes do receptor: no centro ($r' = 0$) e na borda ($r' = 1/\sqrt{\pi} - r_0$).	38
7.3	Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, N_0 = 1mW, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para duas posições diferentes do receptor: no centro ($r' = 0$) e na borda ($r' = 1/\sqrt{\pi} - r_0$).	38
7.4	Cota superior para a capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de N_0	39
7.5	Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de N_0	39

7.6	Cota superior para a capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, N_0 = 1mW$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de θ	40
7.7	Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, N_0 = 1mW$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de θ	40
7.8	Cota superior para a Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, N_0 = 1mW, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de α	41
7.9	Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, N_0 = 1mW, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores da constante de atenuação (α).	41
7.10	Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 2, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para duas posições diferentes do receptor: centro e borda.	42
III.1	Trecho do espaço amostral da variável aleatória W , dividido em eventos disjuntos $w_{i-1} < W \leq w_i$. A divisão tem início em $-\infty$ e termina em $W = w$	52

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A era das comunicações sem fio teve início no ano de 1893, quando Nikola Tesla fez a primeira transmissão sem fio [5]. Apesar de tal feito datar do final do século XIX, foi a partir das últimas décadas do século XX que a transmissão sem fio se tornou ubíqua. O avanço da tecnologia sem fio nessa época foi representado, principalmente, pelo sistema de telefonia celular. Este último é organizado de forma que o espectro de frequências disponível para a comunicação é repetido em diversas sub-áreas, denominadas de células (reaproveitamento de espectro). Estas últimas são servidas por Estações Rádio Base (ERB), conectadas, por sua vez, à Central de Comutação e Controle (CCC), ou *Mobile Telephone Switching Office* (MTSO), responsável por coordenar e sincronizar os nós. Toda e qualquer comunicação entre os nós deve passar, necessariamente, pela ERB. A estrutura geral do sistema móvel celular está representada nas Figuras 1.1 e 1.2.

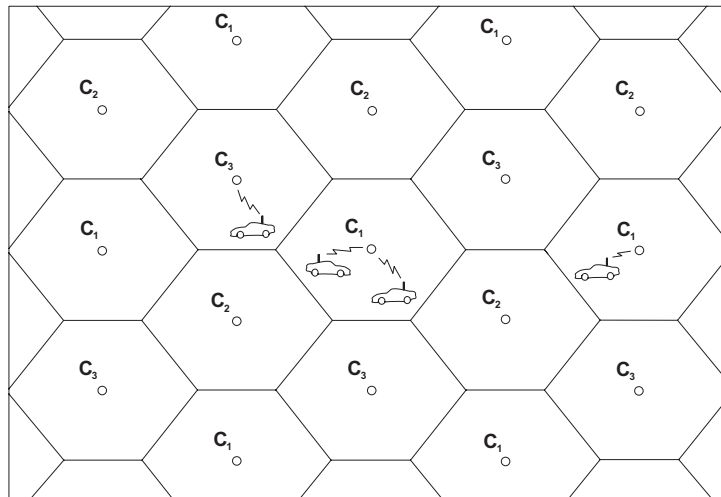


Figura 1.1: Representação típica de um sistema celular.

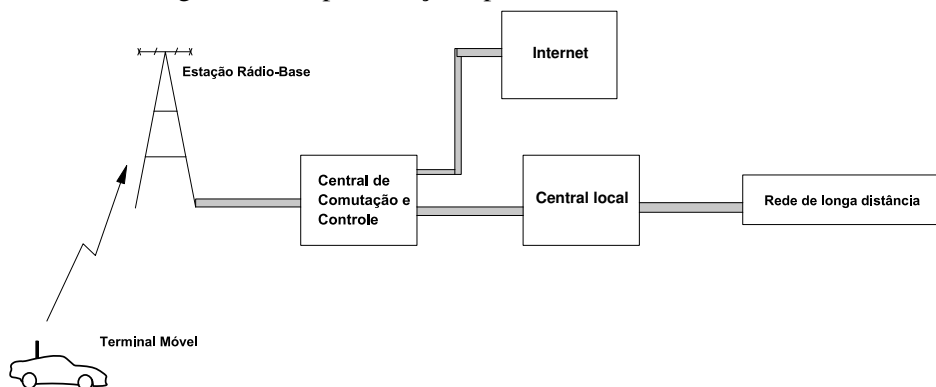


Figura 1.2: Representação da conexão entre a CCC e a ERB.

Dentre as vantagens do sistema celular em relação às redes cabeadas está a redução da infra-estrutura da rede. Tentativas rumo a esse objetivo têm constituído objeto de pesquisa de muitos estudiosos.

Passou-se a buscar, então, o desenvolvimento de tecnologias que permitissem implantar redes sem fio, mas na ausência da infra-estrutura do sistema celular, ou seja, sem a presença das Estações Rádio Base e Centrais de Comutação e Controle, e com nós móveis. Tais redes passaram a se chamar redes *ad hoc* móveis (MANETs, do inglês *mobile ad hoc networks*)[5].

Uma MANET é um sistema de nós móveis com capacidade de roteamento, conectados através de um enlace de rádio, formando uma rede, que pode ser isolada (sem conexão com outras redes), ou a extensão de uma rede cabeada tradicional. Enfim, é um sistema sem fio onde cada nó pode atuar como terminal ou como roteador, de modo a dispensar a presença de elementos centrais como Estação Rádio Base e CCC, sendo que os próprios nós passam a fornecer os serviços necessários ao funcionamento da rede. A Figura 1.3 ilustra o esquema de uma rede *ad hoc* móvel:

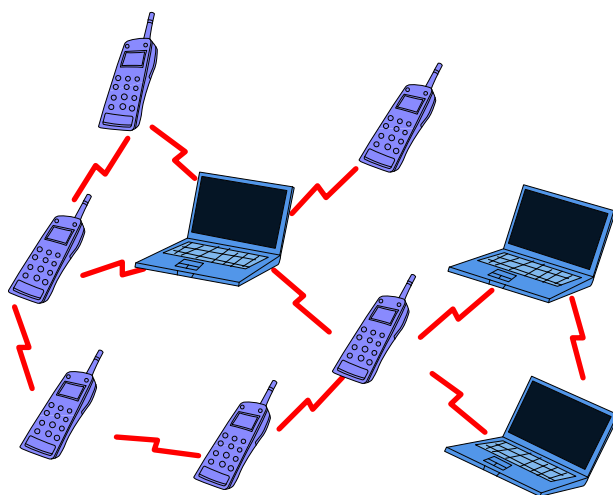


Figura 1.3: Representação de uma MANET.

Algumas aplicações das MANETs são:

- Operações militares táticas: possibilidade de estabelecer comunicações entre militares em ambiente hostil;
- Operações de busca e resgate: MANETs possibilitam a comunicação em áreas com pouca ou nenhuma infra-estrutura de comunicação;
- Operações de socorro em desastres: redes *ad hoc* móveis são úteis quando a estrutura do sistema de comunicação local tenha sido destruída;
- Utilização comercial: Estabelecimento de comunicação em exposições, conferências e outros eventos que envolvam aglomerados de pessoas;
- Operações policiais: Comunicação rápida e segura em operações policiais;

Muitas vezes se acredita, erroneamente, que as redes *ad hoc* sejam semelhantes às cabeadas, pois é possível traçar um paralelo entre os elementos de ambos os tipos de rede[5]. As MANETs têm características

próprias que as identificam e as tornam de tal maneira diferentes das redes cabeadas, que as ferramentas utilizadas na modelagem e implementação destas são significativamente distintas das usadas naquelas para o mesmo fim. Algumas dessas características são:

- Canal físico não confiável e sempre *Half-Duplex*;
- Topologia, muitas vezes, dinâmica (variante no tempo);
- Limitação em recursos como energia e largura de banda, pois, em geral, utilizam baterias.

Isso quer dizer que o conhecimento da estrutura e do funcionamento de outros tipos de rede não é suficiente para descrever as redes *ad hoc*. No desenvolvimento de protocolos para estas redes, deve-se considerar, por exemplo, o dinamismo de sua topologia, bem como as possibilidades de constantes quebras de enlace devido ao movimento dos nós. Além disso, a natureza do canal de comunicação sem fio implica em altas taxas de erro de bits e constantes perdas de pacotes, devendo-se estabelecer mecanismos diferentes para garantir a entrega confiável de dados.

É por apresentarem características tão singulares que as MANETs necessitam de modelos matemáticos próprios que as descrevam, bem como de protocolos de comunicação específicos, que levem em consideração as particularidades citadas acima.

Um protocolo desenvolvido para MANETs deve, por exemplo, adotar mecanismos para que as seguintes métricas se ajustem adequadamente às necessidades do sistema em questão:

- *Vazão (Throughput)*: No contexto das comunicações, *Throughput* é definido como a fração da máxima taxa de bits disponível exclusivamente para a transmissão de dados (há uma porcentagem dessa taxa que é utilizada para a sobrecarga (*overhead*) dos pacotes). Um protocolo para MANETs deve minimizar a sobrecarga dos pacotes, visto que a taxa de bits é um recurso precioso e escasso no contexto dessas redes;
- *QoS*: O conceito de QoS (Qualidade de Serviço) varia muito de acordo com a aplicação, mas, em geral, refere-se aos atrasos de propagação, que devem ser mínimos, e às taxas de entrega de pacotes, que devem ser as maiores possíveis. Em MANETs, um alto valor dessa métrica é ainda mais difícil de se alcançar;
- *Eficiência energética*: Esta é uma métrica de crucial importância para MANETs, pois os dispositivos constituintes dessas redes são, em geral, alimentados por baterias. Muitas vezes torna-se inviável fazer a recarga dos nós, de modo que o consumo demasiado de energia elétrica deve ser evitado. De todos os elementos que constituem um nó de uma rede de sensores, por exemplo, o rádio é o que consome a maior parte da potência disponível. Uma estratégia que deve ser utilizada pelos protocolos de comunicação, tendo em vista a redução do gasto energético, é alterar, por alguns intervalos de tempo, o estado do rádio para o de gasto energético mínimo (*sleep mode*). Esses slots devem ser, contudo, cuidadosamente selecionados de modo a não reduzir o *Throughput* da rede;
- *Justiça (Fairness)*: Esta métrica pode ser traduzida como equidade, porém o seu significado é um pouco diferente. *Fairness* refere-se à alocação de banda para cada um dos nós da rede, de forma

que as necessidades desses nós sejam corretamente atendidas. Não significa, por exemplo, que, em uma rede com N nós, compartilhando um espectro de B Hertz (Hz), aloque-se B/NHz para cada nó, mas, sim, que a maior quantidade da banda será utilizada pelos nós que mais necessitem da mesma. Protocolos para MANETs devem garantir o acesso dos nós ao meio de maneira justa, em um padrão dinâmico;

- Estabilidade/Robustez: Como as MANETs têm natureza dinâmica, a quantidade de acessos ao meio é bem superior à das redes fixas. Os protocolos para MANETs devem permanecer estáveis, mesmo que o número de acessos seja consideravelmente grande. As MANETs, mais do que qualquer outro tipo de rede, enfrentam problemas que podem causar instabilidade. Primeiro, como já citado anteriormente, o canal de comunicação é pouco confiável, havendo uma quantidade maior de pacotes perdidos. Segundo, o controle da rede é desempenhado por nós coordenadores, cuja carga pode se esgotar e levar a rede à instabilidade. É necessário que as MANETs tenham protocolos robustos para evitar tais situações.

Em função de algumas das razões citadas, bem como de outras características, é importante a construção de modelos para a camada física dessas redes, pois ela é o pilar de sustentação de todas as outras. É útil se conhecer os mecanismos utilizados pelos protocolos para maximizar a taxa de dados na rede, mas também é importante que se tenha uma noção de como se comporta essa transferência de dados em níveis mais baixos, de camada física. É necessário saber, por exemplo, a quantidade máxima de bits que é possível se transmitir pelo canal, de forma que o receptor ainda consiga decodificá-los em informação.

Há uma série de elementos que afetam a taxa de bits, como o desvanecimento, a atenuação da potência recebida, as zonas de Fresnel, a distância de separação entre os nós, e a quantidade de elementos transmissores e receptores.

As métricas de camada física, como capacidade, são essenciais para a descrição das redes *ad hoc*, bem como para a previsão do seu comportamento como um todo em função de alterações nos parâmetros citados acima, característicos da rede.

Para fazer essas previsões é necessário, contudo, o estabelecimento de modelos específicos para as MANETs, que levem em consideração o maior número possível de variáveis associadas à transmissão de bits entre os nós.

1.1.1 Principais Contribuições

Os resultados obtidos com este trabalho - publicado e apresentado no *IEEE WCNC 2012*[6], e no *SBrT 2011*[7] - sugerem que a capacidade do canal em MANETs tem um comportamento que não permite a comunicação em redes densas, e, por isso, as conclusões têm impacto no projeto de redes, para situações que admitem um grande número de usuários, como shows, jogos esportivos, feiras e shoppings lotados.

1.1.2 Apresentação do Trabalho

O presente manuscrito está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre o tema em estudo. O Capítulo 3 apresenta um modelo de rede, onde os nós se distribuem de forma contínua pela área, sendo representados por elementos diferenciais. O Capítulo 4 mostra o comportamento da capacidade do canal, quando o modelo apresentado no Capítulo 3 não leva em consideração o Princípio de Conservação da Energia. O Capítulo 5 sugere uma expressão para o ganho do canal, de forma que o referido princípio seja respeitado, e ainda faz uma análise do comportamento assintótico da capacidade. O Capítulo 6 ratifica os resultados obtidos no Capítulo 5, através de uma cota superior para a capacidade. O Capítulo 7 apresenta a simulação Monte-Carlo, realizada para comparar a simulação com os resultados analíticos, além de apresentar os gráficos comparativos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa à análise da capacidade do canal em uma rede *ad hoc* móvel. Alguns dos fatores que podem afetar nossa análise são os efeitos de propagação em larga escala e pequena escala. Os primeiros são responsáveis por ocasionar variações lentas no nível da potência do sinal recebido, ou seja, estas se tornam mais perceptíveis a distâncias maiores do receptor. Eles são resultantes de fatores como a atenuação no caminho (*path loss*) e o sombreamento (*shadowing*). Aquela está relacionada à redução do nível da potência do sinal recebido P_r com o aumento da distância d à fonte. O *shadowing* diz respeito a oscilações lentas em P_r , e ocorre devido a obstáculos, presentes entre o transmissor e o receptor, que atenuam o nível do sinal, através de fenômenos como a absorção, a reflexão, a difração e o espalhamento. Os efeitos de propagação em pequena escala, perceptíveis a distâncias curtas entre transmissor e receptor, são resultantes do chamado desvanecimento rápido, e são provenientes da interferência entre as componentes de multipercurso do sinal [8]. A Figura seguinte [8] ilustra os efeitos de propagação citados:

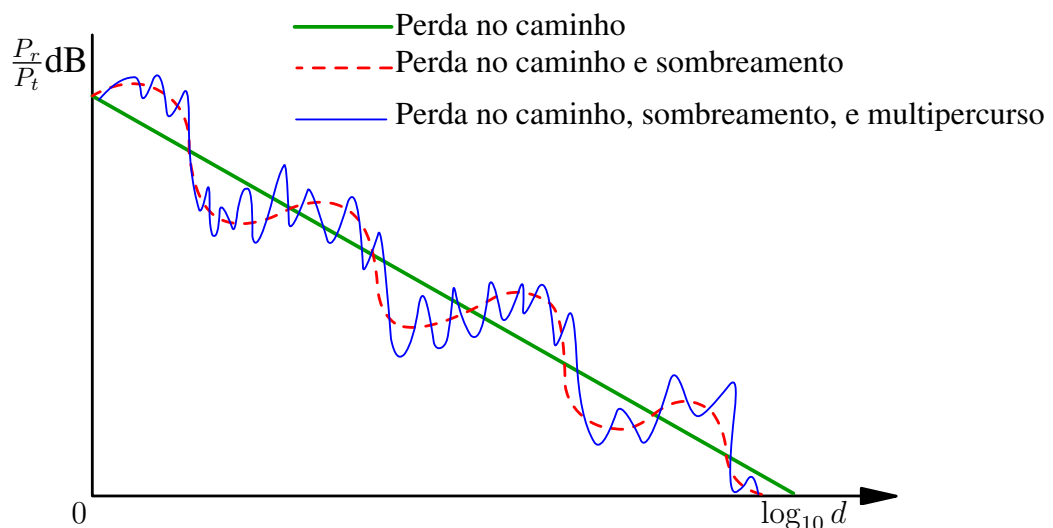


Figura 2.1: Representação dos efeitos de propagação em larga e pequena escala, apresentados de forma individual e conjunta.

Outro fator importante em nossa análise é o padrão de mobilidade dos nós, relacionado à disposição dos mesmos na rede, em função de grandezas físicas associadas ao movimento, como posição e velocidade. Nas Seções seguintes, comentaremos, brevemente, sobre os fatores citados.

2.2 ATENUAÇÃO NO CAMINHO

Suponha que um sinal $s(t)$, com potência média P_t seja transmitido por um canal de comunicação, sendo recebido na forma de outro sinal $r(t)$, com potência média P_r . A atenuação linear no caminho

(*Linear Path loss*) é definida pela relação [8]:

$$P_L = \frac{P_t}{P_r}. \quad (2.1)$$

Se expressarmos P_L em dB, teremos a atenuação no caminho (*path loss*), dada por : $P_L \text{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_t}{P_r}$. Observe que, se o canal não tiver elementos ativos, a atenuação no caminho é sempre positiva, já que a potência do sinal recebido é sempre menor que a do sinal transmitido. Isso quer dizer que, nesse caso, o canal tende a atenuar o nível do sinal.

O ganho no caminho (*path gain*) em dB é definido por $P_G \text{dB} = -P_L \text{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_r}{P_t} \right)$. Ou seja, ele é sempre negativo, na ausência de elementos ativos no canal.

Existem diferentes modelos de canal, com os quais é possível determinar a perda no caminho. Alguns desses modelos são analíticos e buscam, na medida do possível, aproximar a solução dada pelas equações de Maxwell: Modelo de propagação no espaço livre e modelos de traçados de raios. Outros são empíricos, baseados em dados obtidos para ambientes específicos, como macrocélulas urbanas, microcélulas urbanas e o interior de edifícios. Exemplos: Modelos de Okumura e Hata [8].

Um modelo de particular interesse, para a obtenção da perda linear no caminho, P_L , é o Modelo Simplificado, elaborado para descrever a propagação em uma variedade maior de ambientes. Apesar de ser uma solução mais aproximada, ele é comumente utilizado pela sua simplicidade. De acordo com este modelo, a perda linear no caminho é dada por [8]:

$$P_L = \frac{P_t}{P_r} = \frac{1}{K} \left[\frac{d}{d_0} \right]^\alpha, \quad (2.2)$$

sendo K uma constante, que depende das características da antena e da atenuação média do canal, d_0 é a distância de referência para o campo-distante, e α é a constante de atenuação¹.

2.3 SOMBREAMENTO (*SHADOWING*)

Além da atenuação no caminho (*path loss*), o sinal sofre a influência de obstáculos presentes em seu trajeto. Quando encontra algum objeto, o sinal é refletido, difratado ou espalhado. Esses fenômenos provocam oscilações no nível da potência do sinal recebido, e, devido à natureza diversa e desconhecida das propriedades dielétricas dos objetos, bem como das suas posições no ambiente, essas oscilações possuem natureza aleatória. A distribuição que modela o efeito do sombreamento na potência do sinal recebido é a log-normal². Se $\psi = \frac{P_t}{P_r}$ é a relação entre a potência transmitida e a recebida, segundo o modelo log-normal, sua FDP (função densidade de probabilidade) é dada pela seguinte expressão [8]:

$$p(\psi) = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}\sigma_s\psi} \exp \left[-\frac{(10 \log_{10} \psi - \mu_{\psi_{dB}})^2}{2\sigma_s^2} \right], \psi > 0, \quad (2.3)$$

sendo , $\xi = \frac{10}{\ln 10}$, μ_{dB} a média de $\psi_{dB} = 10 \log \psi$ em dB, e σ_s o desvio padrão de ψ_{dB} .

¹Neste trabalho, não consideraremos essa distância de referência no modelo de propagação, e nem a constante K .

²Dizemos que uma variável aleatória X possui distribuição log-normal se $Y = \ln X$ possuir distribuição normal.

2.4 MULTIPERCURSO

O canal também introduz o efeito do multipercurso (*multipath*), que ocorre devido ao espalhamento do sinal, quando este incide sobre obstáculos presentes no ambiente de propagação. O multipercurso se traduz no surgimento de diferentes versões do sinal transmitido, cada uma com um atraso temporal diferente. Como resultado, tem-se interferências construtivas e destrutivas entre as diferentes versões do sinal. O efeito resultante são as oscilações rápidas no nível da potência do sinal recebido. Novamente, como essas variações são imprevisíveis, recorre-se a um modelo estatístico para descrevê-las. Pode-se utilizar, para modelar o comportamento do multipercurso, a distribuição Rayleigh.

Dadas duas variáveis aleatórias X e Y , ambas com distribuição Gaussiana de média zero e desvio padrão σ_r , a variável aleatória $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ possui distribuição Rayleigh [8], com FDP dada por:

$$p_Z(z) = \frac{2z}{P_r} \exp\left(-\frac{z^2}{P_r}\right) = \frac{z}{\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_r^2}\right), z > 0, \quad (2.4)$$

sendo $E[Z^2] = 2\sigma_r^2$ o valor quadrático médio de Z . É importante considerar que, em modelos que adotam essa distribuição para descrever o efeito do multipercurso, esta refere-se ao envelope do sinal, e não à potência recebida. A Figura 2.2 ilustra o gráfico da função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição Rayleigh, para diferentes valores de σ_r .

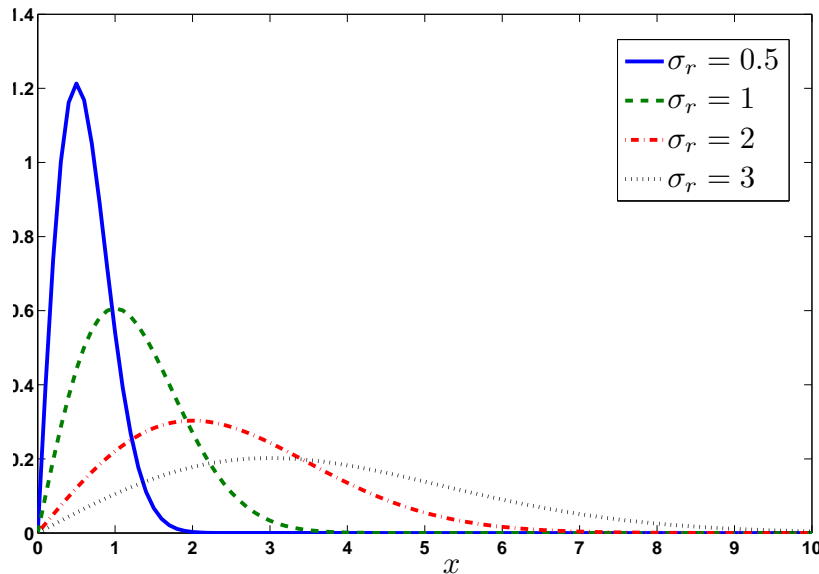


Figura 2.2: Gráficos da FDP de uma distribuição Rayleigh, para diferentes valores do parâmetro σ_r .

Como o nosso objetivo exige o conhecimento da distribuição da potência recebida, vamos mostrar que ela possui distribuição exponencial negativa quando o envelope apresenta distribuição Rayleigh.

Seja $W = Z^2$ a variável que descreve a potência do sinal recebido. Temos que $F_W(w) = P(W \leq w) = P(Z^2 \leq w) = P(-\sqrt{w} \leq Z \leq \sqrt{w}) = \int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}} f_Z(z) dz$. Como $f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w)$, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} \int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}} f_Z(z) dz = \frac{1}{2\sqrt{w}} f_Z(\sqrt{w}) + \frac{1}{2\sqrt{w}} f_Z(-\sqrt{w}). \quad (2.5)$$

Como $\sqrt{w} > 0$, e a FDP $f_Z(z)$ é sempre nula para $z < 0$, temos que a FDP de W da Equação (2.5) reduz-se a:

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} f_Z(\sqrt{w}) = \frac{1}{2\sigma_r^2} e^{\frac{-w}{2\sigma_r^2}}, \quad (2.6)$$

que é a FDP de uma variável aleatória exponencialmente distribuída.

2.5 POTÊNCIA MÉDIA RECEBIDA, CONSIDERANDO A DISTRIBUIÇÃO DE SUZUKI

Para modelar canais sujeitos ao sombreamento log-normal e ao desvanecimento Rayleigh, pode-se utilizar a distribuição de Suzuki [9]. Esta contempla os efeitos de ambas as distribuições, estabelecendo que a potência média associada ao desvanecimento Rayleigh é uma variável aleatória com distribuição log-normal. Suponha, então, que Z tenha, condicionalmente, uma distribuição Rayleigh, com valor quadrático médio $E[Z^2 | \zeta] = 10^{\frac{-\zeta}{10}}$, em que ζ possui distribuição Gaussiana, com média zero e desvio padrão σ_s . Então, $E[Z^2] = E_\zeta [E_Z [Z^2 | \zeta]] = E_\zeta [10^{\frac{-\zeta}{10}}]$. Para facilitar o cálculo da esperança, é conveniente escrever $10^{\frac{-\zeta}{10}}$ como uma exponencial de base e . Então, se $x = -\zeta \Rightarrow 10^{\frac{-\zeta}{10}} = 10^{\frac{x}{10}} = e^{\ln 10^{x/10}} = e^{\delta x}$, com $\delta = \frac{\ln 10}{10}$. Logo, $E [10^{\frac{-\zeta}{10}}] = E[e^{(\delta x)}]$. Desenvolvendo $E[e^{(\delta x)}]$, temos:

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= E[e^{(\delta x)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\delta x)} e^{-x^2/2\sigma_s^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x^2 - 2\sigma_s^2 \delta x)}{2\sigma_s^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x^2 - 2\sigma_s^2 \delta x + (\sigma_s^2 \delta)^2) + (\sigma_s^2 \delta)^2}{2\sigma_s^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x - (\sigma_s \delta))^2}{2\sigma_s^2}} e^{\frac{(\delta \sigma_s^2)^2}{2\sigma_s^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} dx \\ &= e^{\frac{(\delta \sigma_s^2)^2}{2\sigma_s^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-(x - (\sigma_s \delta))^2}{2\sigma_s^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} dx \\ &= e^{\frac{(\delta \sigma_s^2)^2}{2\sigma_s^2}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.6 MODELOS DE MOBILIDADE

Outro fator que afeta a capacidade do canal é o padrão de mobilidade dos nós. Para descrevê-lo, recorreremos a modelos de mobilidade, que descrevem o comportamento dinâmico dos nós na rede. Alguns

exemplos de modelos de mobilidade são: o modelo Browniano, o *Random Waypoint*(RWP), o *Random Walk*, o *Random Gauss-Markov*, e o modelo de mobilidade uniforme (*uniform mobility model*). Este último é de particular interesse para o nosso estudo, e será agora detalhado [10].

Neste modelo, n nós são alocados em uma rede circular de área normalizada. No instante $t = 0$, suas posições são distribuídas uniformemente, e as direções de movimento individual são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. A partir dessa disposição inicial, cada nó, movendo-se à mesma velocidade constante v , escolhe uma direção de movimento, uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi)$, e uma distância d , exponencialmente distribuída, para percorrer. Se o nó encontrar a borda da rede, ele é refletido, e mantém a mesma velocidade. Quando um nó percorre a distância estipulada, o processo é repetido, ou seja, novos parâmetros (direção e distância) são atribuídos ao seu movimento.

Pode-se mostrar que [10], para o modelo de mobilidade uniforme:

- As posições dos nós são independentes umas das outras em qualquer instante de tempo t ;
- A distribuição estacionária dos nós sobre o disco é uniforme;
- A direção do movimento de cada nó é uniforme, condicionada à posição ocupada pelo mesmo.

3 MODELO CONTÍNUO DE REDE

3.1 INTRODUÇÃO

O modelo tratado neste capítulo foi proposto por Lima et al [11], em uma tentativa de fazer uma descrição matemática do comportamento da eficiência espectral em uma MANET. A motivação para isso veio de resultados obtidos por outros pesquisadores, como Gupta e Kumar [1], e Grossglauser e Tse [2]. Os dois primeiros mostraram que a capacidade de uma rede *ad hoc* estática diminui com \sqrt{n} , sendo n o número de nós na rede. Grossglauser e Tse propuseram um esquema de repasse de pacotes para MANETs em duas fases, em que cada nó sempre se utiliza de seu vizinho mais próximo para encaminhar a mensagem ao receptor. O esquema mostrou que a capacidade de redes *ad hoc* móveis converge para uma constante com o aumento do número de nós. Isso se deve ao fato de que a comunicação se dá, sempre, entre os vizinhos mais próximos, fazendo com que a potência do sinal recebido supere a interferência dos outros nós. A Figura 3.1 ilustra o esquema de repasse proposto.

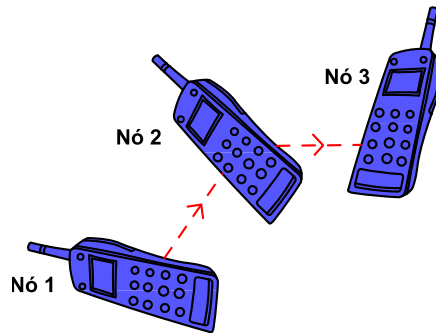


Figura 3.1: Representação do esquema de repasse de pacotes, onde o nó 1 encaminha uma mensagem ao nó 3 em duas fases.

As características essenciais deste modelo são [11]:

- Os nós se movem na rede segundo o modelo de mobilidade uniforme, isto é: eles estão uniformemente distribuídos na área; a direção do movimento individual é uniforme no intervalo $[0, 2\pi)$, mas condicionada à posição atual do nó; as posições dos nós $X_i(t)$ são independentes em qualquer instante de tempo t ;
- Assume-se uma rede circular de área unitária;
- A cada intervalo de transmissão, uma fração dos nós são escolhidos para atuar como nós transmissores, ficando o restante como receptores;
- Cada nó transmite, sempre, para um vizinho próximo, localizado dentro de uma célula de raio r_0 .
- Consideram-se parâmetros como:

- Distância euclidiana: Dada por $r_{ij}(t) = \|X_i(t) - X_j(t)\|$, sendo $X_i(t)$ a posição do nó i no instante t . Por questão de notação, a dependência temporal ficará implícita, e a distância será designada apenas por r_{ij} ;
- Desvanecimento do sinal: Representado pela variável aleatória χ , que tem distribuição Rayleigh;
- Constante de atenuação: Está relacionada ao decaimento da potência do sinal recebido com a distância. Sendo α a constante de atenuação, e r_{ij} a distância de separação entre transmissor e receptor, a potência recebida P_r relaciona-se com a potência transmitida P por uma equação do tipo $P_r = P/\text{dec}(r_{ij}^\alpha)$, onde $\text{dec}(r_{ij}^\alpha)$ é uma função crescente de α e da distância r_{ij} . Assim, quanto maior a constante de atenuação α , mais expressiva é a queda da potência do sinal com a distância;
- Número de nós n ;
- Densidade do número de nós por unidade de área, designada por ρ ;
- Fração de transmissores: Representada pela letra grega θ , expressa a fração do número de nós que atuam como transmissores;
- Potência de transmissão P_{ij} : Assumimos uma potência de transmissão constante para todos os nós;
- Canal Gaussiano: A capacidade do canal pode ser dada pela equação de Shannon.

3.2 FUNDAMENTOS DO MODELO

Para que a comunicação seja possível, é necessário que a capacidade do canal seja superior a um certo limiar, implicando em dizer que a relação sinal-ruído-interferência (SINR, do inglês *Signal to Interference plus Noise Ratio*) também deva estar acima de um limite mínimo de tolerância. Matematicamente, isso significa que [11]:

$$SINR = \frac{P_{ij}(t)}{N_0 + \sum_{k \neq i} P_k(t)g_{kj}(t)} = \frac{P_i(t)g_{ij}(t)}{N_0 + I} \geq \beta, \quad (3.1)$$

onde:

- $P_i(t)$ é a potência de transmissão do nó i ;
- $g_{ij}(t)$ é o ganho do canal, na transmissão do nó i para o nó j . Ele é função da distância euclidiana (r_{ij}) entre os nós, da constante de atenuação do meio (α), e da variável aleatória χ , referente ao desvanecimento Rayleigh;
- N_0 é a potência média do ruído Gaussiano;
- I é a interferência devida aos demais nós transmissores;
- β é o menor valor da $SINR$ para o qual a comunicação é possível.

Desejamos encontrar uma expressão que relacione a *SINR* ao número de nós n , para que possamos estudar o comportamento da relação sinal-ruído-interferência com o aumento de n . Com esse objetivo, explicitaremos, em função de n , o raio r_0 de uma célula que contenha, em média, um transmissor.

3.2.1 O Raio da Célula

Considerando uma fração de transmissores θ , onde $\theta \in (0, 1)$, e uma densidade de nós igual a ρ , o número médio de transmissores situados em uma célula de raio r é:

$$n_T(r) = \pi r^2 \theta \rho. \quad (3.2)$$

Como a área da rede é unitária, o número de nós é numericamente igual à densidade ρ , pois $\rho = \frac{n}{1}$. Então, a expressão (3.2) pode ser reescrita como:

$$n_T(r) = \pi r^2 \theta n, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} - r', \quad (3.3)$$

sendo r' a distância que separa o receptor do centro da rede, como ilustra a Figura 3.4.

O raio r , em função dos demais elementos, pode ser obtido isolando-se o mesmo na expressão (3.3):

$$r(\theta, n) = \sqrt{\frac{n_T(r)}{\theta n \pi}}. \quad (3.4)$$

Fazendo-se $n_T(r)$ igual a 1, obtém-se o raio de uma célula contendo, em média, um transmissor. Logo:

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\theta n \pi}}. \quad (3.5)$$

É interessante observar que o raio médio da célula depende apenas da fração de transmissores e do número de nós na rede, de forma que r_0 é inversamente proporcional à raiz quadrada de n e de θ . Segundo o modelo, em situações onde a quantidade de transmissores aumenta (pela variação positiva de θ ou pelo aumento de ρ) e, portanto, a interferência, os receptores se aproximam do transmissor presente em suas células, de modo a aumentar o valor da potência recebida, e, assim, compensar os efeitos da interferência.

A quantidade média de receptores presentes em cada célula de raio r_0 depende apenas da fração θ de transmissores. A prova disso é bem simples. Seja \bar{K} o número médio de receptores na célula. Como eles representam uma fração $(1 - \theta)$ de todos os nós presentes na mesma, temos que:

$$\bar{K} = n(1 - \theta)\pi r^2 = n(1 - \theta)\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\theta n \pi}} \right)^2 = \frac{1}{\theta} - 1. \quad (3.6)$$

Por exemplo, se $\theta = \frac{1}{3}$ cada célula terá, em média, dois receptores, pois o terceiro nó será um transmissor.

Agora que descrevemos matematicamente as grandezas relacionadas à célula (raio e número de receptores), precisamos analisar a disposição dos nós na rede como um todo, para, assim, obtermos o valor

médio da interferência gerada pelos transmissores localizados no exterior da célula. O tópico seguinte trata da distribuição dos nós pela rede circular.

3.2.2 A distribuição dos nós na área

É importante entender como os nós se distribuem em relação à área e à distância ao centro da rede (raio). Em decorrência do modelo de mobilidade adotado (uniforme), considera-se que eles estejam uniformemente distribuídos em relação à área, e linearmente distribuídos em relação ao raio. A Figura 3.2 mostra, em um gráfico, a função densidade de probabilidade da distribuição dos nós em relação à área.

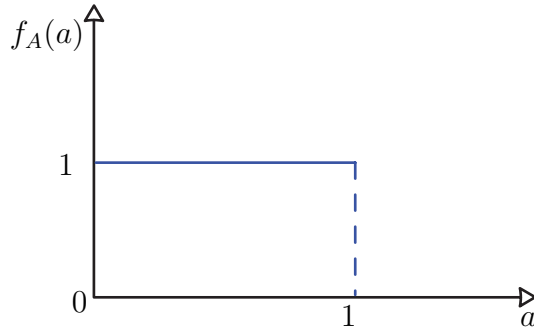


Figura 3.2: Gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição dos nós em relação à área da rede.

Note que $A = \pi R_c^2 \Rightarrow R_c = \sqrt{\frac{A}{\pi}} > 0$, pois se trata de um raio. Logo, $F_{R_c}(r_c) = P\{R_c \leq r_c\} = P\left\{\sqrt{\frac{A}{\pi}} \leq r_c\right\} = P\{A \leq \pi r_c^2\} = F_A(\pi r_c^2)$. Mas, $f_{R_c}(r_c) = \frac{d}{dr_c} F_{R_c}(r_c) = \frac{d}{dr_c} F_A(\pi r_c^2) = 2\pi r_c f_A(\pi r_c^2)$. Como $f_A(a) = 1$ se $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow$

$$f_R(r_c) = \begin{cases} 2\pi r_c & 0 \leq r_c \leq 1/\sqrt{\pi} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.7)$$

O resultado acima faz sentido, pois, como os nós estão uniformemente distribuídos na área, a probabilidade de se encontrar um nó é maior à medida que se distancia do centro. Isso porque, para manter a mesma densidade de nós, é necessário que mais deles se concentrem em áreas maiores, que ocorrem em regiões mais distantes do centro. A seguir, na Figura 3.3, o comportamento gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição dos nós em relação ao raio r_c (distância de um nó qualquer ao centro da rede).

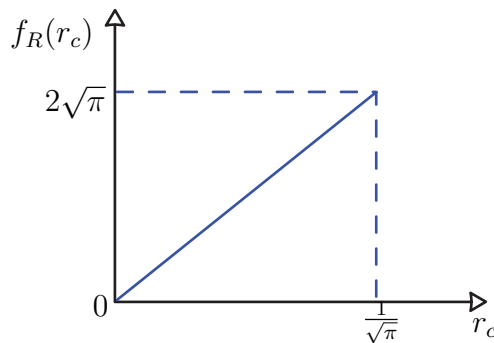


Figura 3.3: Gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição dos nós em relação à distância ao centro (r_c) da rede.

Então, a disposição geográfica dos nós no modelo, resultante da distribuição das posições X_i em relação à área ou ao raio, é uniforme, ou seja, a densidade de nós ρ é constante ao longo da área da rede circular. Esse fato, aliado ao nosso foco de pesquisa (redes densas), permite-nos aproximar o conjunto de nós por um esquema homogêneo e contínuo. Na próxima Seção, detalharemos essa aproximação.

3.3 PADRÃO CONTÍNUO DE NÓS

Como vimos, este modelo focaliza situações onde n é grande e, devido ao modelo de mobilidade adotado, os nós se distribuem de maneira uniforme pela área da rede. Esses fatos permitem aproximar a disposição dos nós por uma nuvem contínua de interferência, de forma a substituir o somatório das potências recebidas dos interferentes por uma integral. O motivo de tal aproximação reside em facilitar o desenvolvimento das expressões matemáticas.

Como a rede é circular, a divisão da área em elementos diferenciais é feita de acordo com o esquema polar, com as coordenadas de cada elemento dadas pelo par (r, γ) . A Figura 3.4 representa a localização de um elemento diferencial de área na rede. Ele contém uma quantidade de nós $dn = \rho r dr d\gamma$ e gera uma interferência dI no receptor localizado no centro da célula de raio r_0 , dada por:

$$\begin{aligned} dI &= \theta P g(\alpha, r, \chi^2) dn \\ &= \rho \theta P g(\alpha, r, \chi^2) r dr d\gamma, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $g(\alpha, r, \chi^2)$ é o ganho do canal. Este fator constitui a principal diferença entre o modelo de rede mostrado no Capítulo 4 e o desenvolvido no Capítulo 5.

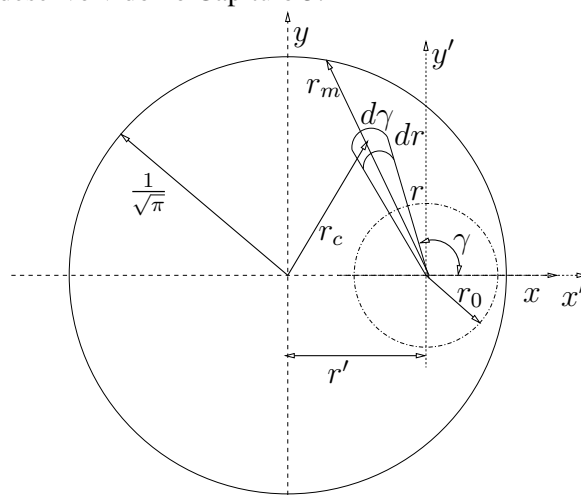


Figura 3.4: Representação da localização de um elemento diferencial de área no modelo. Nota-se que ele dista r_c unidades do centro da rede e r unidades do receptor que, por sua vez, está a r' unidades de distância do centro da rede.

Na Figura 3.4, dI representa a contribuição de cada elemento diferencial que está de fora da célula de raio r_0 e no interior da rede circular, na interferência sofrida pelo receptor localizado no centro da célula. Assim, para obtermos a interferência total, necessitamos integrar dI com respeito a r e a γ , de modo a "var-

remos "toda a área entre a célula e a borda da rede. No próximo capítulo, apresentaremos as expressões obtidas a partir dessa integração [12], para uma situação onde é empregado o modelo de propagação tradicional, que viola o Princípio de Conservação da Energia. No Capítulo 5, faremos o desenvolvimento da integral, mas utilizando um modelo de canal que não viola o referido princípio.

4 O MODELO DE PROPAGAÇÃO TRADICIONAL E SUAS CONSEQUÊNCIAS NO COMPORTAMENTO DA CAPACIDADE DO CANAL

As características fundamentais do modelo de rede foram traçadas no Capítulo 3. Porém, ainda não apresentamos as equações do ganho do canal $g(\alpha, r_{ij}, \chi_{ij}^2)$. Isso porque, sendo a alteração desta grandeza a responsável pelos nossos principais resultados, optamos por apresentá-las nos capítulos correspondentes. Neste Capítulo, apresentaremos equações para a capacidade, provenientes do desenvolvimento da Equação (3.8) em trabalhos¹ [11] que utilizaram o modelo de propagação tradicional, com ganho do canal dado pela Equação (4.2).

De acordo com o modelo de propagação considerado neste capítulo, a potência recebida por um nó j , distando r_{ij} unidades do seu transmissor i , é dada [11] por:

$$P_{ij} = \frac{P\chi_{ij}^2}{r_{ij}^\alpha}, \quad (4.1)$$

sendo:

- P a potência de transmissão, comum a todos os nós;
- χ_{ij} a variável aleatória que modela o desvanecimento do sinal. Ressalta-se que [11] considerou o sombreamento e, por isso, χ_{ij} possui uma distribuição de Suzuki [9], que leva em conta o desvanecimento rápido (Rayleigh) e o sombreamento (log-normal);
- r_{ij} a distância de separação entre o transmissor i e o receptor j ;
- α a constante de atenuação.

Desta maneira, a equação do ganho do canal, para este modelo de propagação, é dada por:

$$g_{ij} = \frac{\chi_{ij}^2}{r_{ij}^\alpha}. \quad (4.2)$$

Note que, quando a distância entre o transmissor e a fonte é menor que um, a potência recebida se torna maior que a efetivamente transmitida. E, quando a distância entre ambos se aproxima arbitrariamente de zero, a potência recebida diverge. Esse comportamento contraria a Lei de Conservação da Energia², pela qual não se pode receber uma potência maior que a transmitida.

¹As equações apresentadas neste capítulo são parte do trabalho citado, e, por isso, não foram aqui desenvolvidas, mas apenas exibidas com a finalidade de comparar o seu comportamento assintótico com o das nossas equações, desenvolvidas no Capítulo 5.

²No capítulo seguinte, sugerimos uma alteração no ganho do canal para solucionar o problema.

A interferência diferencial dI é obtida substituindo-se (4.2) em (3.8). Para a interferência total média, realiza-se a integração da função resultante. Esta é, então, utilizada para expressar a $SINR$ média (\overline{SINR}) e a capacidade do canal em função do número de nós n .

Não será detalhado nesta Seção o procedimento matemático para a obtenção da capacidade (em bits/s/Hz), pois um desenvolvimento semelhante será feito no Capítulo 5, relativo à nossa abordagem do problema, considerando a conservação da energia. Mas foi mostrado em [11] que, para $\alpha > 2$, a capacidade é dada por:

$$\text{Capacidade} = \log_2 \left[1 + \frac{Pe^{\frac{(\delta\sigma_s)^2}{2}}}{\frac{N_0}{(\theta n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{2Pe^{\frac{(\delta\sigma_s)^2}{2}}}{\alpha-2} q_{r',\alpha,\theta,n}} \right], \quad (4.3)$$

onde σ_s é o desvio padrão da variável aleatória log-normal associada ao sombreamento *shadowing*, $\delta = \frac{\ln 10}{10}$, e a função $q_{r',\alpha,\theta,n}$ é dada por [11]:

$$q_{r',\alpha,\theta,n} = 1 - \frac{\int_0^\pi \left[\sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right]^{2-\alpha} d\gamma}{\pi^{\frac{\alpha}{2}} \theta n^{\frac{\alpha-2}{2}}}. \quad (4.4)$$

É possível mostrar que a capacidade converge para um valor limite diferente de zero quando n tende a infinito, e que este limite cresce quando o receptor se afasta do centro da rede, atingindo um valor máximo na borda da mesma. Isso ocorre porque, no centro da rede, o receptor está sujeito à interferência de todos os nós transmissores à sua volta. Já na borda, parte dos interferentes ficam situados a uma distância maior, reduzindo a interferência total (não se considera a interferência de nós fora da rede).

Para $\alpha = 2$, a expressão da Capacidade, em unidades de bits/s/Hz, assume a seguinte forma [11]:

$$\text{Capacidade} = \log_2 \left[1 + \frac{Pe^{\frac{(\delta\sigma_s)^2}{2}}}{\frac{N_0}{\theta n\pi} + \frac{2Pe^{\frac{(\delta\sigma_s)^2}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \left[(\sqrt{\theta n\pi}) \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right] d\gamma} \right]. \quad (4.5)$$

O limite da expressão acima, quando n tende a infinito, é zero. Porém o decaimento é tão lento que, mesmo para um número muito grande de nós na rede, o valor da capacidade ainda pode permitir uma comunicação confiável.

Em [11], realizaram-se simulações deste modelo utilizando o método Monte Carlo [13]. A seguir, apresentamos as curvas obtidas a partir das Equações (4.3) e (4.5).

4.1 CURVAS PARA A CAPACIDADE DO CANAL

Nesta seção, serão reproduzidos os resultados obtidos em trabalhos anteriores [11], relativos a este modelo. Porém, não executamos a simulação relativa ao mesmo, pois seus resultados podem ser encontrados em [11].

4.1.1 Capacidade para o receptor em diferentes pontos, considerando $\alpha = 3$

A Figura 4.1 revela o comportamento da Capacidade do canal em função da posição do nó receptor. Como citado no primeiro tópico deste capítulo, o valor da Capacidade aumenta à medida que o receptor se distancia do centro da rede. Isso ocorre porque a interferência dos demais transmissores decresce do centro para a borda. Na Figura 4.1 consideram-se três situações: na primeira delas, o receptor está exatamente no centro da rede ($r' = 0$). Na segunda, ele se situa em um ponto muito próximo à borda ($r' = \frac{0.9}{\sqrt{\pi}} - r_0$). E na terceira situação, ele está exatamente na borda da rede circular ($r' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - r_0$).

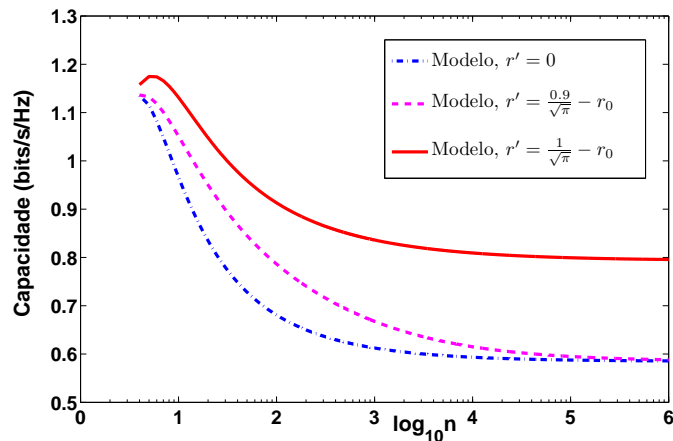


Figura 4.1: Capacidade para o receptor em três pontos distintos, com $P = 1mW$, $N_0 = 5mW$, $\sigma_s = 1dB$, $\theta = 1/3$ e $\alpha = 3$. Observa-se que a Capacidade aumenta à medida que o receptor se desloca em direção à borda da rede.

4.1.2 Influência da fração de nós transmissores (θ) na capacidade

Na Figura 4.2, a capacidade do canal diminui com o aumento do parâmetro θ (fração de transmissores), pois a quantidade de transmissores, e, portanto, a interferência total, aumenta com θ . A diferença comportamental é evidente quando a rede não é densa. Porém, à medida que o número de nós aumenta, a fração de transmissores não altera o valor limite da Capacidade.

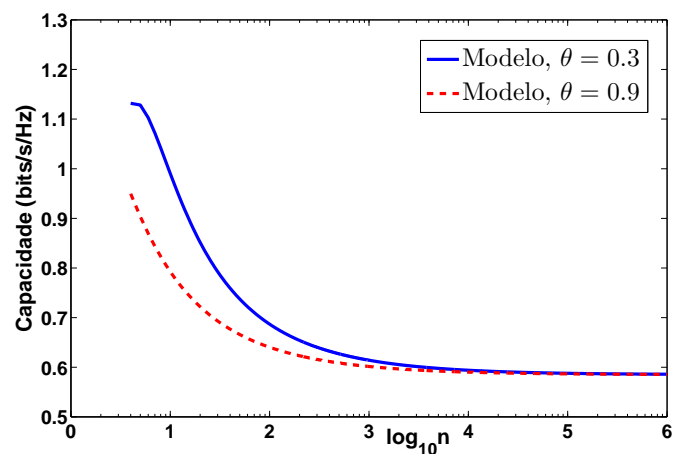


Figura 4.2: Capacidade para dois valores distintos de θ , com $P = 1mW$, $N_0 = 5mW$, $\sigma_s = 1dB$, $r' = 0$ e $\alpha = 3$. Observa-se que a Capacidade diminui com o aumento de θ .

4.1.3 Potência do ruído (N_0)

Com mais ruído, espera-se uma redução da eficiência espectral, pois a relação sinal-ruído-interferência diminui com o aumento de N_0 , ainda que o valor limite da Capacidade independa de N_0 . Os resultados apresentados na Figura 4.3 mostram isso:

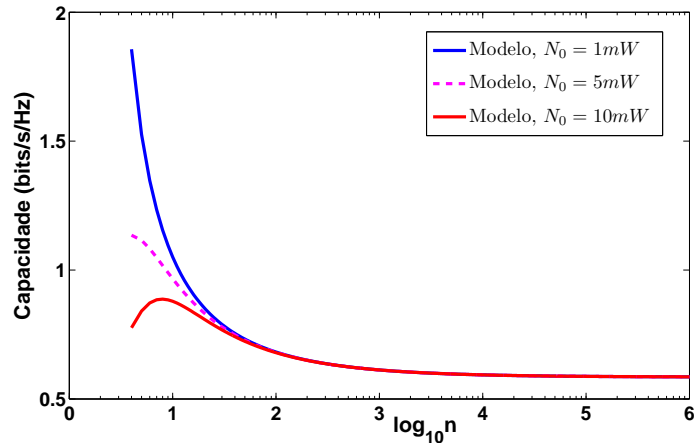


Figura 4.3: Capacidade para três valores distintos de N_0 , com $P = 1mW$, $\theta = 1/3$, $\sigma_s = 1dB$, $r' = 0$ e $\alpha = 3$. Observa-se que a Capacidade diminui com o aumento de N_0 .

4.2 CONSIDERAÇÕES

O modelo de propagação aqui abordado, e aplicado ao modelo de rede descrito no Capítulo 3, possui sérias limitações, pois não descreve a realidade e pode levar a limitações no projeto de redes *ad hoc*. É importante ressaltar que vários trabalhos na literatura vêm empregando modelos de propagação que não consideram a Lei de Conservação da Energia [1], [2], [3], [4]. Logo, é importante considerar um modelo mais realista para o ganho do canal, que considere a referida lei e suas consequências em redes *ad hoc*.

5 ESTUDO DA CAPACIDADE DO CANAL UTILIZANDO UM NOVO MODELO DE PROPAGAÇÃO

O modelo de propagação apresentado no Capítulo 4 é limitado para descrever a potência recebida nas situações onde transmissor e receptor estão arbitrariamente próximos. O ganho $g(r_{ij}, \alpha, \chi_{ij})$, da forma como foi definido na Equação (4.2), é o grande responsável por isso, já que:

$$\lim_{r_{ij} \rightarrow 0} g(r_{ij}, \alpha, \chi_{ij}) = \lim_{r_{ij} \rightarrow 0} \frac{P\chi_{ij}^2}{r_{ij}^\alpha} = \infty. \quad (5.1)$$

Neste capítulo, será efetuada uma mudança nessa função, conduzindo-nos a novas equações para a capacidade do canal. Os resultados, obtidos de uma nova relação entre eficiência espectral e número de nós na rede, serão apresentados e discutidos.

5.1 UMA NOVA FORMA PARA O GANHO DO CANAL

Devemos buscar uma expressão matemática que descreva o decaimento do ganho do canal, como a Equação (4.2), em situações onde o transmissor e o receptor estejam distantes, e que tenha outro comportamento, mais realista, quando o transmissor estiver arbitrariamente próximo do receptor.

Seja então $g'(r_{ij}, \alpha, \chi_{ij})$ a função que descreve o novo comportamento do ganho do canal. Espera-se que esta tenha as seguintes propriedades:

$$\lim_{r_{ij} \rightarrow \infty} g'(r_{ij}, \alpha, \chi) = \lim_{r_{ij} \rightarrow \infty} g(r_{ij}, \alpha, \chi_{ij}) = 0, \quad (5.2)$$

$$\lim_{r_{ij} \rightarrow 0} g'(r_{ij}, \alpha, \chi_{ij}) = \chi_{ij}^2. \quad (5.3)$$

Ou seja, quando as distâncias entre transmissor e receptor são infinitamente grandes, o ganho deve ser nulo para que a potência recebida seja igual a zero. Idealmente, quando o transmissor se aproximar arbitrariamente do receptor, o ganho deve ser unitário, a fim de que a potência recebida seja igual à efetivamente transmitida, para garantir a inviolabilidade da Lei de Conservação da Energia e, porque, neste último caso, não há desvanecimento. Por isso, reconhecemos uma limitação - Equação (5.3) - no modelo de propagação aqui proposto, relativa ao desvanecimento, pois, quando transmissor e receptor estão arbitrariamente próximos, o efeito resultante do multipercurso deve ser mínimo, pois o sinal em linha de visada está claramente presente, e o canal é praticamente AWGN. Tal limitação também ocorre no modelo de propagação do capítulo 4, e a solução para o problema pode vir a ser objeto de trabalhos futuros. Ainda que com essa limitação, as propriedades (5.2) e (5.3) devem ser satisfeitas para que o modelo de propagação descreva com mais realismo o que acontece na prática.

Existem várias expressões que satisfazem às propriedades desejadas, mas aqui adotou-se uma escolha particular, que tem o mesmo comportamento da Equação (4.2) em situações onde transmissor e receptor estão afastados. A relação adotada foi a seguinte:

$$g'(r_{ij}, \alpha, \chi_{ij}) = \frac{\chi_{ij}^2}{(1 + r_{ij})^\alpha}. \quad (5.4)$$

É fácil verificar que a expressão acima satisfaz às propriedades (5.2) e (5.3), e portanto obedece à Lei de Conservação da Energia. Essa alteração na variável aleatória ganho terá um efeito significativo nos resultados finais, conforme será mostrado a seguir.

5.2 DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

Como anteriormente mencionado, não foi feito o desenvolvimento analítico no capítulo 4 devido às semelhanças com o que será feito nesta seção, onde será feito o desenvolvimento matemático do modelo do Capítulo 3 para a obtenção da relação existente entre o número de nós e a capacidade do canal.

Inicialmente, devemos lembrar que, para que seja possível utilizar o canal confiavelmente, a Equação (3.1) deve ser satisfeita. Ela é o ponto de partida para o desenvolvimento de uma expressão matemática que relacione a *SINR* média (\overline{SINR}) e a capacidade do canal ao número de nós presentes na rede.

Durante o desenvolvimento matemático, surge a necessidade de se considerar duas situações particulares: $\alpha > 2$ e $\alpha = 2$. Isso porque, em uma dada etapa do trabalho, a integração do elemento diferencial de interferência da Equação (3.8) segue caminhos diferentes para cada uma das situações.

5.2.1 O caso $\alpha > 2$

É necessário obter a relação matemática existente entre os elementos da Equação (3.1) e o número de nós n . O primeiro deles é a potência média recebida do transmissor da informação, que aparece no numerador, e o segundo é a interferência média total no receptor. Como o primeiro elemento é mais simples, ele será analisado primeiro.

5.2.1.1 Comportamento da potência média recebida

Da Equação (3.1), a potência P_{ij} que o nó j recebe do nó i é dada por $P_i(t)g'_{ij}(t)$. Como estamos admitindo que todos os transmissores enviam informação pelo canal a uma mesma potência P , e considerando a Equação (5.4), P_{ij} é dada pela seguinte expressão:

$$P_{ij} = \frac{P\chi_{ij}^2}{(1 + r_{ij})^\alpha}. \quad (5.5)$$

Para o cálculo da *SINR* média, precisamos encontrar o valor médio da potência recebida P_{ij} . Neste momento, mencionamos que foi desconsiderado o sombreamento log-normal presente no modelo de propa-

gação do Capítulo anterior, para que possamos comparar os resultados obtidos com um limitante superior para a capacidade do canal, descrito mais adiante. Dessa forma, $E(\chi_{ij}^2)$ não mais será $e^{\frac{(\delta\sigma)^2}{2}}$ [9], mas sim $2\sigma_r^2$, sendo σ_r o parâmetro da distribuição Rayleigh. Então, a esperança de P_{ij} é dada por:

$$E [P_{ij}] = \frac{2P\sigma_r^2}{(1 + r_{ij})^\alpha}. \quad (5.6)$$

Seja P_{ij}^{in} a potência recebida do transmissor da informação. O seu menor valor (P_0) pode ser obtido pela substituição de r_{ij} por r_0 na expressão (5.6). Procedendo assim e considerando a Equação (3.5), concluímos que o valor médio de P_0 relaciona-se com o número de nós n da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E [P_0] &= \frac{2P\sigma_r^2}{(1 + r_0)^\alpha} = \frac{2P\sigma_r^2}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta n\pi}}\right)^\alpha} \\ &= \frac{P(\theta n\pi)^{\frac{\alpha}{2}} 2P\sigma_r^2}{(\sqrt{\theta n\pi} + 1)^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Assim, a expressão acima limita a potência média recebida do transmissor da informação, ou seja:

$$\frac{2P\sigma_r^2}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta n\pi}}\right)^\alpha} \leq E[P_{ij}^{in}] \leq 2P\sigma_r^2, \quad (5.8)$$

sendo $P_{ij}^{in} = P_{ij}$, $0 \leq r_{ij} \leq r_0$.

Agora resta obter o valor médio da interferência total como função do número de nós n .

5.2.1.2 Expressão matemática para a interferência total

Devido ao modelo de mobilidade adotado, que faz com que os nós se disponham uniformemente pela área de uma rede densa, vamos aproximar a distribuição geográfica dos mesmos pelo modelo contínuo do Capítulo 3, que envolve elementos diferenciais que geram, cada um, uma contribuição dI , de acordo com a Equação (3.8), para a interferência. Esta última pode ser calculada da seguinte forma:

$$I = \int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \int_0^{2\pi} \theta P g'(\alpha, r, \chi) \rho r \, dr d\gamma, \quad (5.9)$$

onde $r_m(\gamma, r')$ é a distância do receptor à borda da rede (ver Figura 3.4). Substituindo a Equação (5.4) em (5.9), e desenvolvendo a expressão resultante, obtemos:

$$I = \theta P \chi^2 \rho \int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + r)^\alpha} r \, dr d\gamma. \quad (5.10)$$

Fazendo $\rho = n$, já que a área é unitária, temos que:

$$I = \theta n P \chi^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \left(\frac{r}{(1+r)^\alpha} dr \right) \right] d\gamma. \quad (5.11)$$

Resolvendo a integral em relação a r , pelo processo de integração por partes, vem:

$$\begin{aligned} \int \frac{r}{(1+r)^\alpha} dr &= \frac{r(1+r)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int \frac{(1+r)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dr \\ &= \frac{r(1+r)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{(1+r)^{2-\alpha}}{2-\alpha} \\ &= \frac{(1+r)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(r - \frac{1+r}{2-\alpha} \right) \\ &= \frac{(1+r)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(\frac{r(2-\alpha) - (1+r)}{2-\alpha} \right) \\ &= \frac{r(1-\alpha) - 1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} (1+r)^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Basta, agora, aplicar os limites de integração e, depois, integrar em relação à variável γ . Aplicando os limites, vem:

$$\int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \left(\frac{r}{(1+r)^\alpha} dr \right) = \frac{r(1-\alpha) - 1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} (1+r)^{1-\alpha} \Big|_{r=r_0}^{r=r_m}. \quad (5.13)$$

É necessário encontrar a relação existente entre as variáveis γ , r' e r_m , sendo que r_m é função do ângulo γ . Pode-se verificar, olhando para a Figura 3.4, e considerando x e y como dois pontos genéricos da circunferência delimitadora da rede, que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \\ &= (r_m \cos \gamma + r')^2 + (r_m \sin \gamma)^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Isolando-se r_m , tem-se a relação procurada:

$$r_m(\gamma, r') = \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma. \quad (5.15)$$

Basta, agora, substituir a Equação (5.15) no limite de integração da expressão (5.13). O desenvolvimento, bem como o resultado dessa substituição é dado a seguir:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \left(\frac{r}{(1+r)^\alpha} \right) dr &= \left[1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right]^{1-\alpha} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right) (1-\alpha) - 1 \right] \\ &\quad - [(1+r_0)^{1-\alpha} (r_0(1-\alpha) - 1)]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Realizada a integração em relação a r , resta resolver a integral da Equação (5.11) em relação a γ e, depois, multiplicar o resultado por $\theta n P \chi^2$, a fim de resolver a Equação (5.9) e encontrar a interferência. Então, considerando (5.16), resolvemos (5.11) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \left(\frac{r}{(1+r)^\alpha} \right) dr \right] = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right)^{1-\alpha} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right) (1-\alpha) - 1 \right] d\gamma \\ & \quad - 2\pi(1+r_0)^{1-\alpha}(r_0(1-\alpha)-1). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Por conveniência, a integral da expressão (5.17) será designada por $f_\alpha(r')$, ou seja:

$$f_\alpha(r') = \int_0^{2\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right)^{1-\alpha} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right) (1-\alpha) - 1 \right] d\gamma. \quad (5.18)$$

A interferência, obtida pelo desenvolvimento de (5.11) é, portanto:

$$I = \frac{\theta n P \chi^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} [f_\alpha(r') - 2\pi(1+r_0)^{1-\alpha}(r_0(1-\alpha)-1)], \quad (5.19)$$

tendo como valor médio a seguinte expressão:

$$E[I] = \frac{\theta n 2 P \sigma_r^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} [f_\alpha(r') - 2\pi(1+r_0)^{1-\alpha}(r_0(1-\alpha)-1)]. \quad (5.20)$$

5.2.1.3 Obtenção da SINR e da Capacidade

Agora que analisamos o comportamento do valor médio da potência P_{ij}^{in} e encontramos uma expressão para a interferência média no receptor, torna-se simples obtermos as relações desejadas. Substituindo as Equações (5.7) e (5.20) em (3.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{SINR} &= \frac{E[P_0]}{N_0 + E[I]} \\ &= \frac{\frac{2P\sigma_r^2}{(1+r_0)^\alpha}}{N_0 + \frac{\theta n 2 P \sigma_r^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} [f_\alpha(r') - 2\pi(1+r_0)^{1-\alpha}(r_0(1-\alpha)-1)]} \\ &= \frac{2P\sigma_r^2}{N_0(1+r_0)^\alpha + \frac{\theta n 2 P \sigma_r^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} [f_\alpha(r')(1+r_0)^\alpha - 2\pi(1+r_0)(r_0(1-\alpha)-1)]} \\ &= \frac{2P\sigma_r^2}{N_0 \frac{(1+\sqrt{\theta n \pi})^\alpha}{(\theta n \pi)^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{\theta n 2 P \sigma_r^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left[f_\alpha(r') \frac{(1+\sqrt{\theta n \pi})^\alpha}{(\theta n \pi)^{\frac{\alpha}{2}}} - 2\pi \frac{1+\sqrt{\theta n \pi}}{\sqrt{\theta n \pi}} \left(\frac{1-\alpha}{\sqrt{\theta n \pi}} - 1 \right) \right]}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

A capacidade do canal relaciona-se com a $SINR$ média de acordo com a equação de Shannon:

$$\text{Capacidade} = \log_2(1 + \overline{SINR}) \text{ bits/s/Hz.} \quad (5.22)$$

Substituindo a expressão do valor médio da SINR agora obtido, tem-se que:

$$\text{Capacidade} = \log_2 \left(1 + \frac{2P\sigma_r^2}{N_0 \frac{(1+\sqrt{\theta n\pi})^\alpha}{(\theta n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{\theta n 2P\sigma_r^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left[f_\alpha(r') \frac{(1+\sqrt{\theta n\pi})^\alpha}{(\theta n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}} - 2\pi \frac{1+\sqrt{\theta n\pi}}{\sqrt{\theta n\pi}} \left(\frac{1-\alpha}{\sqrt{\theta n\pi}} - 1 \right) \right]} \right) \text{ bits/s/Hz.} \quad (5.23)$$

Mostra-se (Anexo I) que essa expressão decai a zero quando n vai para infinito. Esse é um resultado surpreendente, pois tem um significado diferente do que apresenta o modelo do capítulo 4. Ou seja, de acordo com as expressões matemáticas aqui desenvolvidas, a transferência confiável de dados em uma MANET pode não ser possível dependendo do número de nós presentes.

5.2.2 O caso $\alpha = 2$

5.2.2.1 Expressão matemática da potência recebida

De maneira idêntica à situação onde $\alpha > 2$, a mínima potência média recebida do transmissor da informação é dada por

$$E[P_0] = \frac{2P\sigma_r^2}{(1+r_0)^2}, \quad (5.24)$$

e a potência média $E[P_{ij}^{in}]$ é limitada.

5.2.2.2 Expressão matemática para a interferência total

Para este caso, basta substituírmos o valor de α na Equação (5.10). Assim:

$$I = \theta P \chi^2 \rho \int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \int_0^{2\pi} \frac{r}{(1+r)^2} dr d\gamma. \quad (5.25)$$

Reordenando a integral múltipla acima, e levando em conta que $\rho = n$, uma vez que a área é unitária, obtemos:

$$I = \theta P \chi^2 n \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \left(\frac{r}{(1+r)^2} \right) dr \right] d\gamma. \quad (5.26)$$

O passo seguinte é resolver a integral simples com respeito a r , por um processo de integração por partes:

$$\begin{aligned}\int \frac{r}{(1+r)^2} dr &= \frac{-r}{1+r} + \int \frac{1}{(1+r)} dr \\ &= \ln(1+r) - \frac{r}{(1+r)}.\end{aligned}\quad (5.27)$$

Aplicando os limites de integração à Equação (5.27), temos que:

$$\begin{aligned}\ln(1+r) - \frac{r}{(1+r)} \Big|_{r_0}^{r_m} &= \ln \left[\left(\frac{1+r_m}{1+r_0} \right) + \frac{r_0}{1+r_0} - \frac{r_m}{1+r_m} \right] \\ &= \ln \left[\left(\frac{1+r_m}{1+r_0} \right) + \frac{r_0 - r_m}{(1+r_0)(1+r_m)} \right].\end{aligned}\quad (5.28)$$

Para completar o desenvolvimento da Equação (5.26), é necessário integrarmos a Equação (5.28) em relação à variável γ . A expressão para a interferência pode ser dada, então, por:

$$I = \theta P \chi^2 n \int_0^{2\pi} \ln \left[\left(\frac{1+r_m}{1+r_0} \right) + \frac{r_0 - r_m}{(1+r_0)(1+r_m)} \right] d\gamma. \quad (5.29)$$

Das Equações (3.5) e (5.15), a última relação fica da seguinte forma:

$$I = P \theta n \chi^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left[(\sqrt{\theta n \pi}) \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma}{1 + \sqrt{\theta n \pi}} \right) \right] + \frac{\frac{1}{\sqrt{\theta n \pi}} - \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma}{\left(\frac{\sqrt{\theta n \pi + 1}}{\sqrt{\theta n \pi}} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right)} \right\} d\gamma, \quad (5.30)$$

que não possui forma fechada. Para obtermos a interferência total média, basta que calculemos o valor esperado da equação (5.30):

$$\begin{aligned}E[I] &= \\ &= P \theta n 2 P \sigma_r^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left[(\sqrt{\theta n \pi}) \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma}{1 + \sqrt{\theta n \pi}} \right) \right] + \frac{\frac{1}{\sqrt{\theta n \pi}} - \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma}{\left(\frac{\sqrt{\theta n \pi + 1}}{\sqrt{\theta n \pi}} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right)} \right\} d\gamma.\end{aligned}\quad (5.31)$$

5.2.2.3 Obtenção da SINR e da Capacidade para $\alpha = 2$

Exatamente como foi feito na Seção 5.2.1, a expressão da *SINR* média é obtida pela substituição das Equações (5.24) e (5.31) na Equação (3.1). Então:

$$\overline{SINR} = \frac{P \theta n \pi 2 P \sigma_r^2}{\left(1 + \sqrt{\theta n \pi} \right)^2 (N_0 + E[I])}. \quad (5.32)$$

A Capacidade pode ser expressa pela relação de Shannon:

$$\text{Capacidade} = \log_2 \left[1 + \frac{P\theta n\pi 2P\sigma_r^2}{\left((1 + \sqrt{\theta n\pi})^2 (N_0 + E[I]) \right)} \right]. \quad (5.33)$$

Verifica-se no Anexo I que o limite da Equação (5.33), quando n tende a infinito, é zero. Nesse caso, há concordância com a Equação (4.5) apresentada no Capítulo 4, pois, para $\alpha = 2$, a *SINR* média e a capacidade também convergem para zero. Porém, essa convergência é muito lenta, tornando possível a comunicação para um número muito grande de nós. Mas, segundo o modelo apresentado neste Capítulo, a convergência é rápida, de forma que, para um número relativamente pequeno de nós na rede, a capacidade já se aproxima de zero.

5.3 CONSIDERAÇÕES

Apesar das limitações decorrentes das aproximações feitas no modelo contínuo, os resultados obtidos neste Capítulo são muito importantes, pois estabelecem que, para um modelo de canal que obedece à Lei de Conservação da Energia, a capacidade de redes *ad hoc* densas decai a zero, sendo este o primeiro resultado na literatura a mostrar tal comportamento. E, em decorrência de tais limitações, no próximo Capítulo, desenvolvemos uma cota superior para a capacidade do canal, sem adotarmos a aproximação feita pelo modelo contínuo do Capítulo 3. Verificaremos que o resultado da análise dessa cota ratifica os resultados obtidos no presente Capítulo.

6 UMA COTA SUPERIOR PARA A CAPACIDADE

No Capítulo 3 apresentamos uma alternativa para descrever a interferência em uma rede *ad hoc* móvel. Essa alternativa consiste na aproximação de uma realidade formada por nós móveis, em quantidades inteiras, por uma distribuição contínua de nós em uma rede circular de área unitária. E nos dois últimos capítulos, mostramos que, utilizando esse modelo contínuo, o valor limite da capacidade conduz a conclusões opostas ao se adotar dois modelos de propagação distintos: o modelo tradicionalmente utilizado nas redes *ad hoc*, que é o mesmo empregado em redes celulares, onde a potência do sinal recebido varia com o inverso da distância elevada a uma constante de atenuação α ; e um modelo que leva em conta a conservação da energia. Vimos que, ao se adotar o primeiro modelo de propagação, representado pela Equação (4.2), o princípio de conservação da energia é violado quando dois nós comunicantes se aproximam arbitrariamente, o que não acontece quando se utiliza o modelo proposto na Equação (5.4). Porém, verificamos que o modelo contínuo possui uma limitação, discutida na Seção a seguir.

6.1 UMA LIMITAÇÃO DO MODELO CONTÍNUO

A limitação surge quando tentamos introduzir o desvanecimento. Sabemos que este se manifesta por variações lentas e rápidas no nível da potência do sinal recebido. Para tentar simular tal característica, havíamos introduzido uma variável aleatória no ganho do canal, de acordo com as Equações (4.2) e (5.4). O problema ocorre na modelagem da interferência total, pois a variável aleatória χ^2 , por ser independente da localização individual de cada nó (parâmetros r e γ), fica de fora da integral. Como consequência, o modelo diferencia as potências recebidas de cada transmissor apenas pela atenuação por caminho (*pathloss*). Observando a Equação (5.10), percebemos que:

$$E[I|\chi^2] = \theta P \chi^2 \rho \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_m(\gamma, r')} \frac{1}{(1+r)^\alpha} r \, dr d\gamma. \quad (6.1)$$

Ou seja, a distribuição da interferência da rede inteira será da mesma natureza da distribuição da potência recebida de cada transmissor individual. Por exemplo, se não considerarmos o sombreamento (*shadowing*), mas apenas o desvanecimento Rayleigh, a distribuição do valor médio da interferência será uma exponencial negativa [8].

Entretanto, mostraremos nas próximas seções que o comportamento limite sugerido pelo modelo detalhado no Capítulo 5 está correto. Através de um limitante superior (*upper bound*) para o caso real, mostraremos que a capacidade do canal tende a zero quando n tende a infinito.

6.2 O MODELO EXATO

A melhor solução para os problemas relatados na Seção 6.1 é a construção de um modelo discreto, em que cada nó seja tratado de forma individual. Dessa maneira, a interferência não se distribui de modo contínuo e seu valor médio, dado o desvanecimento, depende de um vetor de variáveis aleatórias, e não de uma VA apenas, ou seja, a potência recebida de cada nó transmissor aparece como um dos elementos do vetor aleatório na expressão da interferência média, dado o desvanecimento. Na Seção seguinte, encontraremos uma cota superior para a capacidade do canal, considerando o modelo discreto (semelhante ao apresentado no Capítulo 3, mas com o número de nós sempre inteiro, e sem a substituição destes últimos por elementos diferenciais).

6.3 UM LIMITE SUPERIOR PARA A \overline{SINR}

Como nosso modelo considera que as potências recebidas de cada nó transmissor sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, podemos tirar algumas conclusões a respeito da Equação (3.1):

- A potência recebida de um transmissor é independente da soma das de outros transmissores, ou seja, ela é independente da interferência total (Anexo III.2).
- Como a potência média do ruído é uma constante, o denominador da Equação (3.1) é independente de seu numerador (Anexo III.3).
- Por fim, o inverso do denominador da referida Equação é independente do numerador (Anexo III.1).

Sabendo-se que $\frac{1}{N_0 + P \sum_{i=1}^k \frac{\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha}}$ é uma função convexa de $\left(N_0 + P \sum_{i=1}^k \frac{\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha} \right)$, a desigualdade de Jensen [14] garante que:

$$E \left[\frac{1}{N_0 + P \sum_{i=1}^k \frac{\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha}} \right] \geq \frac{1}{E \left[N_0 + P \sum_{i=1}^k \frac{\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha} \right]} \quad (6.2)$$

Considerando um número de transmissores igual a $k + 1$, onde $k = \theta n - 1$ é necessariamente inteiro, levando em conta as conclusões do primeiro parágrafo desta Seção, bem como a desigualdade (6.2), podemos dizer que a seguinte expressão é uma cota superior para a $SINR$ média:

$$\overline{SINR}_{up} = E[SINR_{up}] = E[P_{ij}^{in}] E \left[\frac{1}{N_0 + P \sum_{i=1}^k \frac{\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha}} \right]. \quad (6.3)$$

Para encontrar uma expressão fechada para a \overline{SINR}_{up} , precisaríamos obter a função densidade de probabilidade (pdf, do inglês *probability density function*) da variável aleatória que representa o somatório

$\sum_{i=1}^k \frac{\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha}$. Mas isso exigiria o cálculo das pdfs individuais dos termos $\frac{\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha}$, e uma posterior convolução entre os mesmos. Por isso, optamos por simplificar o problema e obter um *upper bound* mais frouxo, maximizando \overline{SINR}_{up} .

A situação onde \overline{SINR}_{up} é máximo ocorre quando a interferência é a menor possível, ou seja, quando todos os interferentes estiverem à máxima distância r_{MAX} do receptor. Note que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{P\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha} &\geq \sum_{i=1}^k \frac{P\chi_{ij}^2}{(1+r_{MAX})^\alpha} \\ &= \frac{P}{(1+r_{MAX})^\alpha} \sum_{i=1}^k \chi_{ij}^2 \\ &= \frac{P}{(1+r_{MAX})^\alpha} Y_k, \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde $Y_k = \sum_{i=1}^k \chi_{ij}^2$.

O resultado acima permite-nos concluir que:

$$\overline{SINR}_{up} \leq E[P_{ij}^{in}] E \left[\frac{1}{N_0 + \frac{P}{(1+r_{MAX})^\alpha} Y_k} \right] = \overline{SINR}_s, \quad (6.5)$$

sendo \overline{SINR}_s a cota superior que utilizaremos para a $SINR$ média.

Como estamos desconsiderando o *shadowing* log-normal, a variável aleatória χ_{ij}^2 passa a ter distribuição exponencial [8] com parâmetro $\frac{1}{2\sigma_r^2}$, de forma que $E[\chi_{ij}^2] = 2\sigma_r^2 = 1$ é a potência média recebida normalizada. A VA Y_k tem distribuição Erlang, pois é a soma de k variáveis aleatórias exponenciais [15]. Logo, a expressão geral para a pdf de Y_k é dada por:

$$f_{Y_k}(y_k) = \begin{cases} \frac{y_k^{k-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_r^2} y_k}}{(2\sigma_r^2)^k (k-1)!} & y_k \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.6)$$

Poderíamos calcular o valor médio de $SINR_s$ a partir da pdf Y_k , mas optamos por encontrar a pdf do denominador $Z_k = N_0 + \frac{P}{(1+r_{MAX})^\alpha} Y_k$ para, então, efetuar o cálculo do valor esperado.

Mostra-se (ver Anexo II) que a pdf de Z_k é dada por:

$$f_{Z_k}(z_k) = \begin{cases} \frac{a^k e^{ab}}{(k-1)!} (z_k - b)^{k-1} e^{-az_k} & z_k \geq b \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.7)$$

sendo $a = \frac{(1+r_{MAX})^\alpha}{2P\sigma_r^2}$ e $b = N_0$. O cálculo de \overline{SINR}_s se resume a encontrar $E \left[\frac{1}{N_0 + \frac{P}{(1+r_{MAX})^\alpha} Y_k} \right]$. Isso pode ser feito aplicando a definição de valor esperado à pdf de Z_k , ou seja:

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{1}{Z_k} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_k} f_{Z_k}(z_k) dz_k \\
&= \frac{a^k e^{ab}}{(k-1)!} \int_b^{\infty} \frac{1}{z_k} (z_k - b)^{k-1} e^{-az_k} dz_k.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Para resolver a integral $H = \int_b^{\infty} \frac{1}{z_k} (z_k - b)^{k-1} e^{-az_k} dz_k$, usamos o método de substituição de variáveis. Fazendo $\ln(z_k - b) = u$, nós temos que $z_k = e^u + b$, e $du = \frac{1}{z_k - b} dz_k$. Como resultado, temos que:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^u)^k}{e^u + b} e^{-a(e^u + b)} du. \tag{6.9}$$

Fazendo outra mudança de variáveis, com $e^u = s$, e $du = \frac{ds}{s}$, a integral se torna:

$$H = e^{-ab} \int_0^{\infty} \frac{e^{-as}}{s^{1-k}(s+b)} ds. \tag{6.10}$$

Se fizermos $as = w$, e $ds = adw$, a integral será dada por:

$$H = e^{-ab} \left(\frac{1}{a} \right)^{k-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-w}}{w^{1-k}(w+ab)} dw. \tag{6.11}$$

Agora usaremos a relação entre a função gamma incompleta $\Gamma(\omega, \delta)$ e a Função confluyente hipergeométrica de Tricomi $U(\zeta, \eta, \psi)$. De acordo com essa relação [16]:

$$\Gamma(\omega, \delta) = e^{-\delta} U(1 - \omega, 1 - \omega, \delta). \tag{6.12}$$

Mas, sendo $U(\zeta, \eta, \psi) = \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \int_0^{\infty} e^{-\psi t} t^{\zeta-1} (1+t)^{\eta-\zeta-1} dt$ [17] para $\text{Re}[\zeta] > 0$, segue diretamente que:

$$U(1 - \omega, 1 - \omega, \delta) = \frac{1}{\Gamma(1 - \omega)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\delta t}}{t^{\omega}(1+t)} dt. \tag{6.13}$$

Fazendo $\beta = \delta t$, e $d\beta = \delta dt$ na Equação (6.13), temos que:

$$U(1 - \omega, 1 - \omega, \delta) = \frac{\delta^{\omega}}{\Gamma(1 - \omega)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta}}{\beta^{\omega}(\delta + \beta)} d\beta. \tag{6.14}$$

A partir das Equações (6.12) e (6.14), a função gamma incompleta $\Gamma(\omega, \delta)$ pode ser expressa por:

$$\Gamma(\omega, \delta) = \frac{e^{-\delta} \delta^{\omega}}{\Gamma(1 - \omega)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta}}{\beta^{\omega}(\delta + \beta)} d\beta. \tag{6.15}$$

Observamos que as integrais nas Equações (6.15) e (6.11) são da mesma forma. Se fizermos $\omega = 1 - k$, e $\delta = ab$, podemos ver que as integrais são exatamente as mesmas. Então, mudando os parâmetros, isolando a integral na Equação (6.15) e substituindo na Equação (6.11), nós temos que:

$$H = \Gamma(1 - k, ab) \Gamma(k) b^{k-1}. \quad (6.16)$$

A partir dos resultados expressos na Equação (6.16), podemos obter uma forma fechada para a Equação (6.8). Lembrando que k é um número natural e que, então, $\Gamma(k) = (k - 1)!$, se substituirmos os resultados na Equação (6.8), teremos:

$$E \left[\frac{1}{Z_k} \right] = \Gamma(1 - k, ab) (ab)^k e^{ab} b^{-1}. \quad (6.17)$$

Uma forma fechada para o fator $E \left[\frac{1}{N_0 + \frac{P}{(1+r_{MAX})^\alpha} Y_k} \right]$ da \overline{SINR}_s - Equação (6.5)- pode ser, então, encontrada expressando a e b em função dos parâmetros de rede. Multiplicando a expressão resultante por $E[P_{ij}^{in}]$, obtém-se a cota superior \overline{SINR}_s para a \overline{SINR} :

$$\overline{SINR}_s = \frac{E[P_{ij}^{in}] \Gamma \left(1 - k, \frac{N_0(1+r_{MAX})^\alpha}{2P\sigma_r^2} \right)}{N_0 \left(\frac{N_0(1+r_{MAX})^\alpha}{2P\sigma_r^2} \right)^{-k} e^{-\frac{N_0(1+r_{MAX})^\alpha}{2P\sigma_r^2}}}. \quad (6.18)$$

Na próxima seção, estudaremos o comportamento de \overline{SINR}_s quando o número de nós n tende a infinito.

6.4 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE \overline{SINR}_s

Para a análise do comportamento assintótico da Equação (6.18), desenvolvemos o seguinte Teorema:

Teorema 6.4.1 $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}, z \in \mathbb{R}_+$ tal que $z \neq 0$ ou $k > 1$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^k \Gamma(1 - k, z) = 0. \quad (6.19)$$

Prova Pela definição da função gama incompleta, temos que:

$$z^k \Gamma(1 - k, z) = z^k \int_z^\infty t^{-k} e^{-t} dt. \quad (6.20)$$

Sabemos que para todo $t \geq 0$ e $k \geq 0$, é verdade que $t^{-k} e^{-t} \leq t^{-k}$, já que $e^{-t} \leq 1 \forall t \geq 0$. Então:

$$\int_z^\infty t^{-k} e^{-t} dt \leq \int_z^\infty t^{-k} dt. \quad (6.21)$$

Mas, $\int_z^\infty t^{-k} dt = \frac{z^{1-k}}{k-1}$. Com base nesse fato e na inequação (6.21), é verdade que:

$$\int_z^\infty t^{-k} e^{-t} dt \leq \frac{z^{1-k}}{k-1},$$

e, como resultado,

$$z^k \int_z^\infty t^{-k} e^{-t} dt \leq \frac{z}{k-1}. \quad (6.22)$$

Já que $t^{-k} e^{-t} \geq 0$ para todo $t \geq 0$, e $z^k \geq 0$, o produto $z^k \int_z^\infty t^{-k} e^{-t} dt$ é sempre maior ou igual a zero. Então, a partir deste fato e da inequação (6.22):

$$\begin{aligned} 0 \leq z^k \int_z^\infty t^{-k} e^{-t} dt &\leq \frac{z}{k-1}, \text{ ou seja:} \\ 0 \leq z^k \Gamma(1-k, z) &\leq \frac{z}{k-1}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Aplicando o limite nas desigualdades superior e inferior de (6.23), a prova se completa, ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^k \Gamma(1-k, z) = 0. \quad (6.24)$$

Se olharmos com cuidado para a Equação (6.18), podemos ver que ela tem a forma $CE[P_{ij}]z^k \Gamma(1-k, z)$, onde $C = \frac{1}{N_0} e^{-z}$ e $z = \frac{N_0(1+r_{MAX})^\alpha}{2P\sigma_r^2}$. Lembrando que $k = \theta n - 1$, com θ constante, temos que n tende a infinito se e somente se k tender a infinito. Então, o comportamento assintótico é exatamente o mesmo em relação a n e a k . A partir da inequação (5.8) e do Teorema 6.4.1, temos um resultado importante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{SINR}_s = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{SINR}_s = 0. \quad (6.25)$$

6.5 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA CAPACIDADE

Da Equação de Shannon, sabemos que a Capacidade do canal está relacionada com a $SINR$ média pela equação $\text{Capacidade} = \log_2(1 + \overline{SINR})$. A mesma relação é válida para as cotas superiores, ou seja:

$$\text{Capacidade}_s = \log_2(1 + \overline{SINR}_s), \quad (6.26)$$

sendo Capacidade_s uma cota superior para a Capacidade.

Sabendo que $0 \leq \text{Capacidade} \leq \text{Capacidade}_s$ e, a partir das Equações (6.25) e (6.26), temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Capacidade} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Capacidade}_s = \log_2\left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{SINR}_s\right) = 0. \quad (6.27)$$

7 SIMULAÇÃO E RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos por simulação, bem como a sua comparação com os valores numéricos das Equações (5.23) e (5.33). Apresentaremos, também, as curvas das cotas superiores para o modelo discreto, comparando-as com os resultados da simulação em cada caso.

7.1 SIMULAÇÃO

Nesta seção, nós detalhamos o algoritmo Monte Carlo [13] usado para obter os resultados da simulação. Esta consiste basicamente em:

- Alocar os nós na rede circular, de acordo com o modelo de mobilidade uniforme;
- Calcular a potência recebida $P_{ij} = \frac{P\chi_{ij}^2}{(1+r_{ij})^\alpha}$;
- Obter a interferência I através da soma das potências recebidas de cada nó interferente;
- Repetir o processo um número de vezes n_{it} e obter as médias \bar{I} e $\overline{P_{ij}}$;
- Encontrar a $SINR$ média, isto é, \overline{SINR} , pela relação $\overline{SINR} = \frac{\overline{P_{ij}}}{N_0 + \bar{I}}$;
- Obter a Capacidade pela Equação (5.22).

Em nossas simulações, utilizamos $n_{it} = 1000$, $P = 1mW$ e $\mathbf{n}[] = [6 \ 9 \ 30 \ 100 \ 1000 \ 10000 \ 100000 \ 1000000]$ para $\theta = 1/3$, ou $\mathbf{n}[] = [10 \ 30 \ 50 \ 100 \ 1000 \ 10000 \ 100000 \ 1000000]$ para $\theta = 0.3$ e $\theta = 0.9$.

Na linha 3 do Algoritmo 1, r_0 é computado para cada elemento do vetor $\mathbf{n}[]$. Nas linhas 6 a 10, cada um dos $n(k) - 2$ nós é alocado na rede, sendo que r_c (distância entre o nó e o centro da rede) é escolhido a partir de uma distribuição linear (utilizamos uma distribuição beta com parâmetros 2 e 1), e γ a partir de uma uniforme na faixa $[0, 2\pi)$. O motivo de alocarmos $n(k) - 2$ nós ao invés de $n(k)$ é que 2 nós já são previamente alocados (o receptor e o transmissor).

Na linha 12, cada nó que está de fora da célula, ou seja, a uma distância superior a r_0 do receptor, é alocado no vetor R . Nas linhas 16 a 19, θn nós são selecionados aleatoriamente e armazenados no vetor S .

Nas linhas 20 a 24, calcula-se a potência do sinal recebido P_0 , bem como a interferência I , para cada configuração da rede. Em seguida, nas linhas 27 a 30, obtém-se as médias aritméticas dos n_{it} valores de P_0 e I , utilizadas nas linhas 28 e 29 para o cálculo da \overline{SINR} e da Capacidade.

Algorithm 1 Simulação Monte Carlo para o cômputo da Capacidade

Entradas: $\theta, \alpha, n_{it}, \mathbf{n}$ [], P e r'

Saídas: \overline{SINR} [], C []

```
1: for  $l = 1$  to  $n_{it}$  do
2:   for  $k = 1$  to  $length_n$  do
3:      $r_0 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{\theta n(k)\pi}}$ 
4:      $j \leftarrow 1$ 
5:     for  $i = 1$  to  $n(k) - 2$  do
6:        $r_c \leftarrow \text{gsl\_ran\_beta}[gen*, [0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}]]$ 
7:        $\gamma \leftarrow \text{gsl\_ran\_flat}[gen*, [0, 2\pi]]$ 
8:        $x \leftarrow r_c \cos(\gamma)$ 
9:        $y \leftarrow r_c \sin(\gamma)$ 
10:       $r(i) \leftarrow \sqrt{(x - r')^2 + y^2}$ 
11:      if  $r(i) > r_0$  then
12:         $R(j) \leftarrow r(i)$ 
13:         $j \leftarrow j + 1$ 
14:      end if
15:    end for
16:    for  $i = 1$  to  $\theta n(k)$  do
17:       $q =$  Número aleatório na faixa de 1 a  $\theta n(k)$ 
18:       $S(i) \leftarrow R(q)$ 
19:    end for
20:     $P_0(k, l) \leftarrow \frac{P\chi_0^2}{(1+r_0)^\alpha}$ 
21:    for  $i = 1$  to  $length_S$  do
22:       $P_r(i) \leftarrow \frac{P\chi_i^2}{(1+R(i))^\alpha}$ 
23:    end for
24:     $I(k, l) \leftarrow \sum P_r(i)$ 
25:  end for
26: end for
27: for  $k = 1$  to  $length_n$  do
28:    $\overline{SINR}(k) \leftarrow \frac{\text{mean of}(P_0(k, l))}{N_0 + \text{mean of}(I(k, l))}$ 
29:    $C(k) = \log_2(1 + \overline{SINR}(k))$ 
30: end for
```

Esse algoritmo aloca os nós na rede de forma que os mesmos estejam distribuídos uniformemente na área, de acordo com o modelo de mobilidade uniforme. A figura seguinte ilustra a disposição dos nós na rede em um instante de tempo t da simulação em regime estacionário.

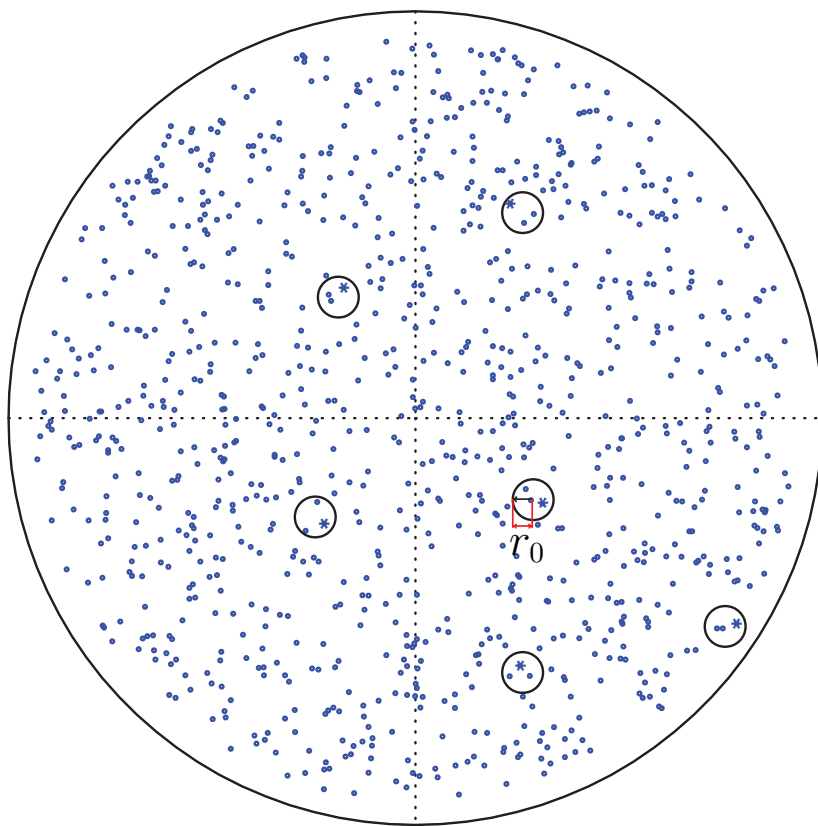


Figura 7.1: Ilustração da distribuição dos nós na rede em um dado instante de tempo t , na situação onde $n = 1000$ e a fração de transmissores é $\theta = \frac{1}{3}$. A figura ilustra algumas células de raio r_0 , com um transmissor e dois receptores. Os transmissores estão indicados por um asterisco dentro das células, e os receptores, por um ponto.

7.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção mostra as curvas para as cotas superiores da capacidade como função do número de nós n na rede (até 1 milhão de nós), considerando o receptor na borda da célula de raio r_0 , além das curvas teóricas para o modelo apresentado no Capítulo 5. Também mostramos as curvas da simulação Monte Carlo [13], realizada com base no modelo discutido no Capítulo 3. Os resultados da simulação¹ foram obtidos a partir de 1000 realizações, para os nós uniformemente distribuídos na área da rede, de acordo com o modelo de mobilidade uniforme. Os resultados foram obtidos para $n = 6, 9, 30, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000$. As curvas das cotas superiores referem-se à Equação (6.26), enquanto as do modelo são relativas às Equações (5.33), quando $\alpha = 2$, ou (5.23), quando $\alpha = 3$.

¹Ver [12] para uma explicação mais detalhada sobre como realizar a Simulação Monte-Carlo para o cômputo da Capacidade.

7.2.1 Transmissor em diferentes pontos

A cota superior da capacidade, para o receptor localizado em diferentes posições, tomando $P = 1mW, N_0 = 1mW, \alpha = 3, \theta = 1/3$, bem como os resultados da simulação, são mostrados na Figura 7.2. Apresentamos, também, na Figura 7.3, as curvas correspondentes para a Equação (5.23). Em todas as curvas, a capacidade tende a zero com o aumento do número de nós (n), como esperado.

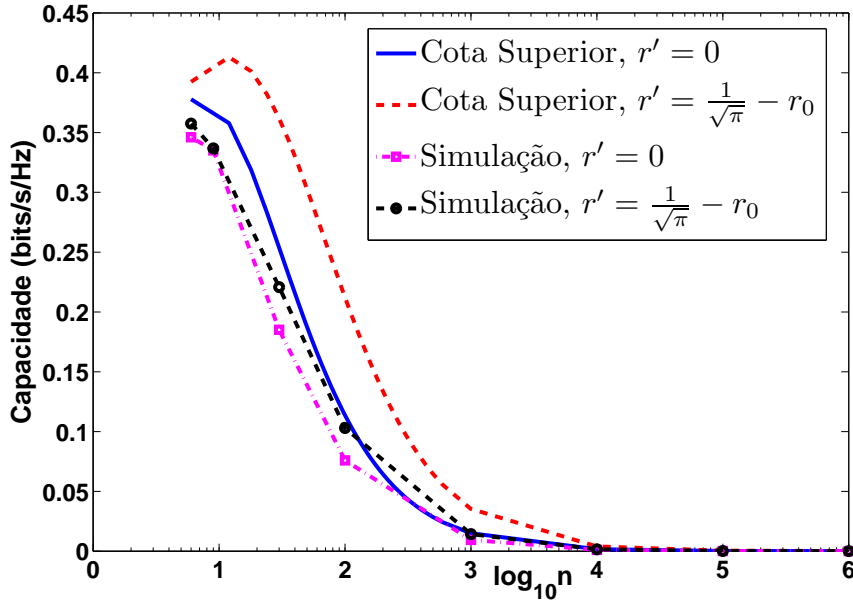


Figura 7.2: Cota superior para a capacidade em função de n , dados $P = 1mW, N_0 = 1mW, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para duas posições diferentes do receptor: no centro ($r' = 0$) e na borda ($r' = 1/\sqrt{\pi} - r_0$).

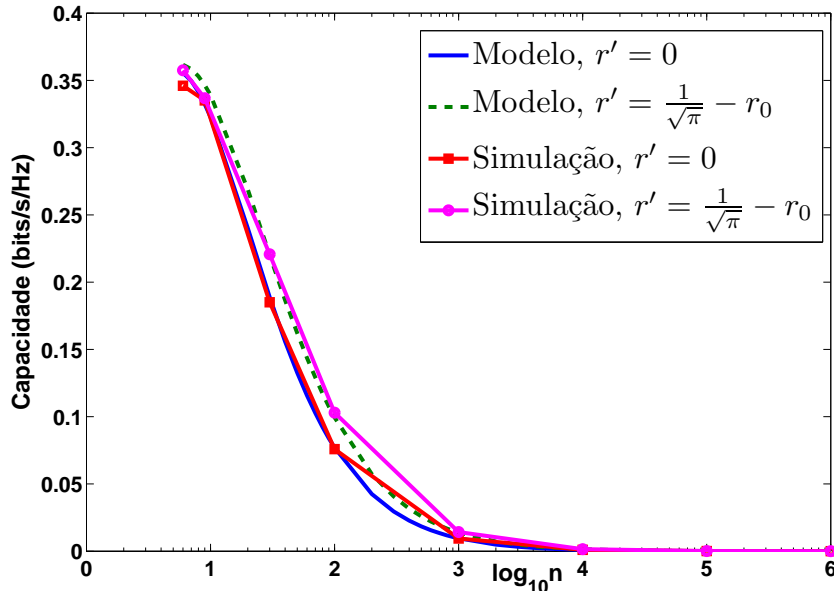


Figura 7.3: Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, N_0 = 1mW, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para duas posições diferentes do receptor: no centro ($r' = 0$) e na borda ($r' = 1/\sqrt{\pi} - r_0$).

7.2.2 Influência da potência média do ruído (N_0)

As Figuras 7.4 e 7.5 ilustram, respectivamente, as cotas superiores e as curvas obtidas a partir de valores numéricos da Equação (5.23). Em todos os casos, a capacidade decai a zero quando n tende a infinito, independente do valor da potência média do ruído (N_0).

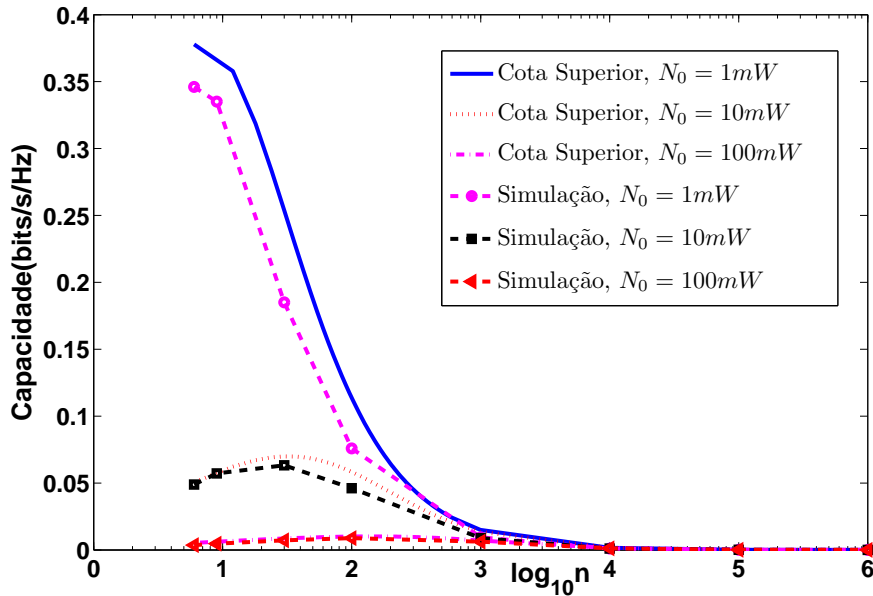


Figura 7.4: Cota superior para a capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de N_0 .

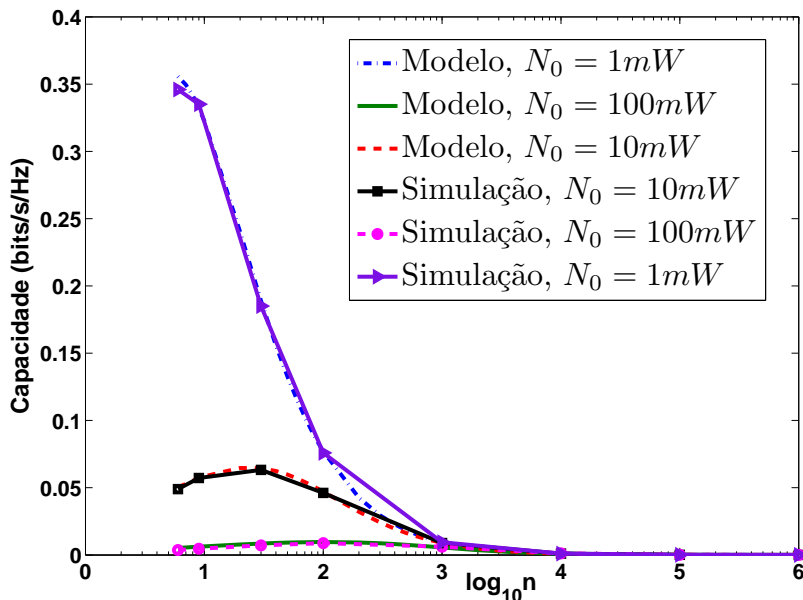


Figura 7.5: Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de N_0 .

Note que, para n fixo, a capacidade do canal aumenta com a redução da potência média do ruído, e que as cotas superiores seguem o mesmo comportamento. Percebe-se que, para n pequeno, a distância entre as curvas para os diferentes casos é relativamente grande, porém, no limite, todas convergem para zero.

7.2.3 Influência do parâmetro θ

Agora, analisamos a influência da fração de transmissores (θ) na capacidade. As Figuras 7.6 e 7.7 ilustram, respectivamente, as cotas superiores e as curvas geradas a partir de valores numéricos da Equação (5.23). Em todos os casos, a capacidade decai a zero quando n tende a infinito, independentemente de θ .

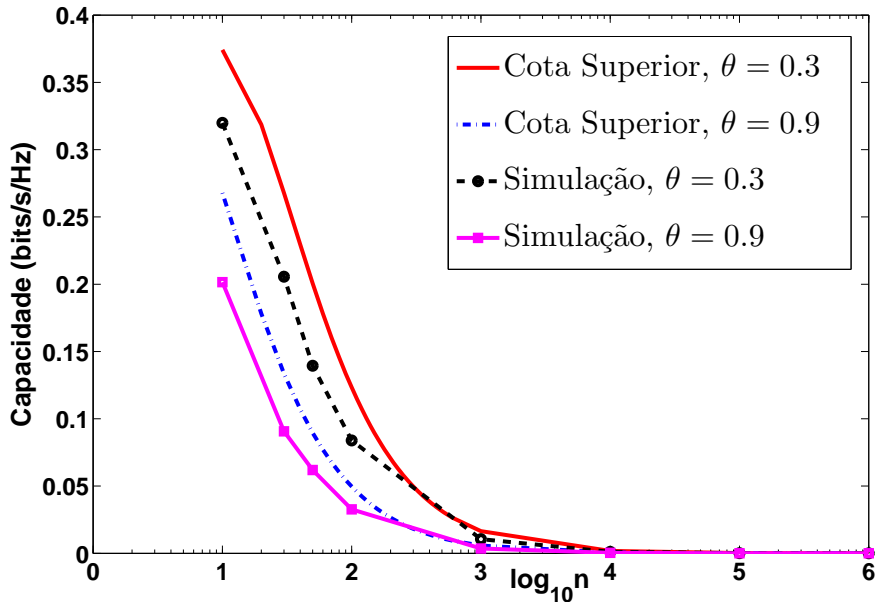


Figura 7.6: Cota superior para a capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, N_0 = 1mW$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de θ .

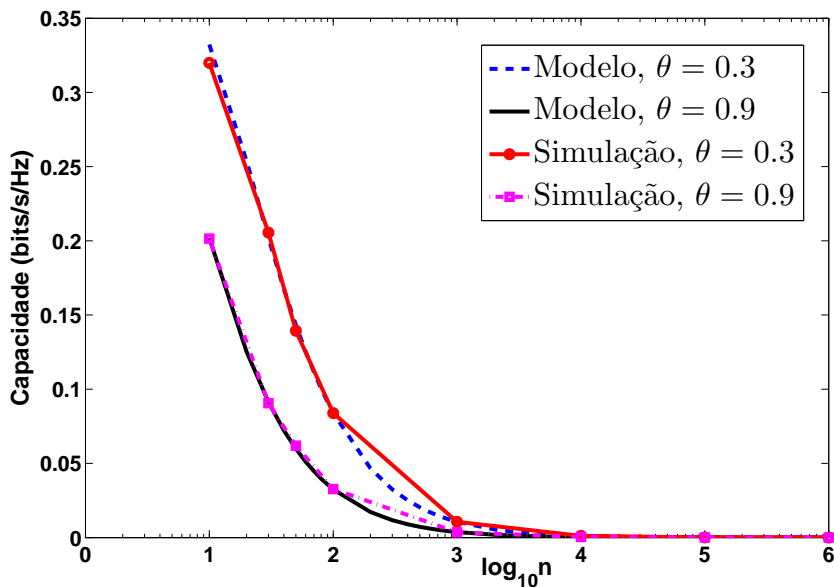


Figura 7.7: Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, \alpha = 3, N_0 = 1mW$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de θ .

Observe que, se θ aumenta, também o faz o número de transmissores e, por conseguinte, a interferência no receptor. Isso faz com que, para n fixo, a capacidade seja maior para θ menor.

7.2.4 Influência da Constante de Atenuação α

Na Figura 7.8, mostramos os resultados das simulações para diferentes valores de α , bem como as cotas superiores correspondentes. Em seguida, na Figura 7.9, mostramos a comparação entre os resultados da simulação Monte Carlo e os valores numéricos da Equação (5.23).

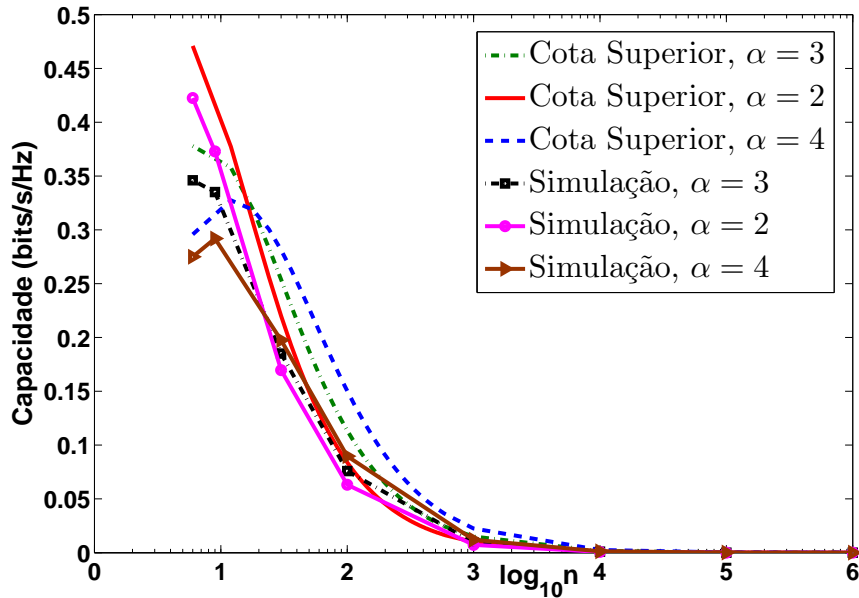


Figura 7.8: Cota superior para a Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, N_0 = 1mW, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores de α .

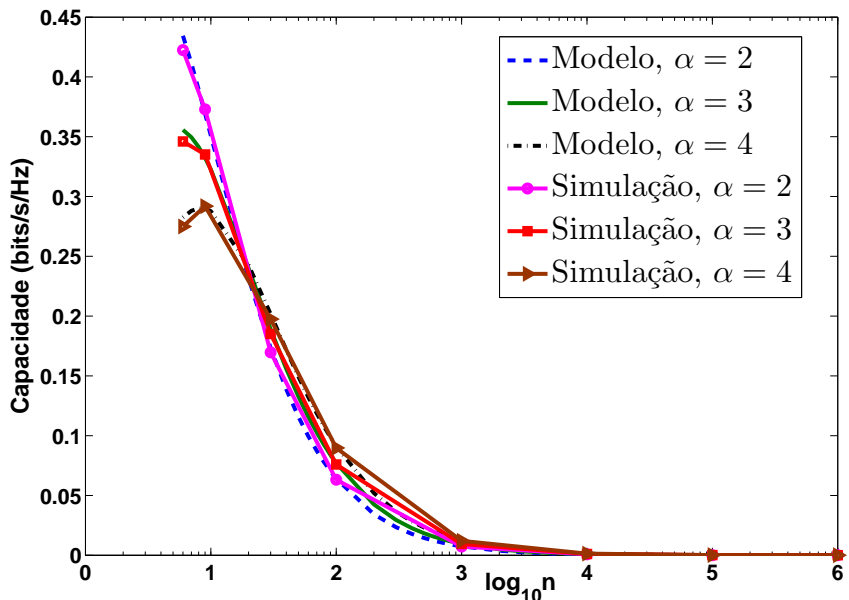


Figura 7.9: Capacidade em função de n , dados $P = 1mW, r' = 0, N_0 = 1mW, \theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para diferentes valores da constante de atenuação (α).

Observa-se, da Figura 7.8, que, para valores baixos de n (próximos de 10), a capacidade, no caso em que $\alpha = 2$, é maior que no caso $\alpha = 3$, que, por sua vez, é maior que quando $\alpha = 4$. Porém, quando n aumenta, a capacidade fica maior para valores maiores de α . Isso ocorre porque, para valores pequenos de

n , a interferência é baixa em comparação com a potência recebida, logo, aumentando a Capacidade para α menor. Entretanto, quando n cresce, aumenta a interferência, mas esse efeito é reduzido para os casos de maior α , resultando maior Capacidade.

7.2.5 Transmissor em diferentes pontos ($\alpha = 2$)

Apresentamos, agora, na Figura 7.10, as curvas para a capacidade do canal, referentes aos valores numéricos obtidos a partir da Equação (5.33). Observa-se que, apesar de o decaimento ser diferente do caso já apresentado, onde $\alpha = 3$, o comportamento assintótico é o mesmo.

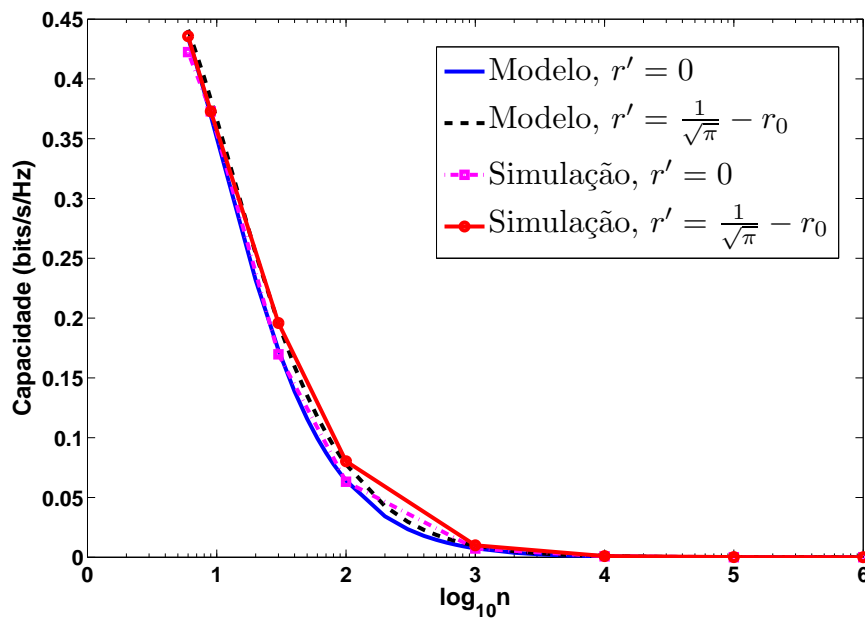


Figura 7.10: Capacidade em função de n , dados $P = 1mW$, $r' = 0$, $\alpha = 2$, $\theta = 1/3$. Os resultados foram obtidos para duas posições diferentes do receptor: centro e borda.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho, introduzimos um modelo de propagação que leva em consideração o Princípio de Conservação da Energia, a partir de uma modelagem contínua para um sistema constituído por nós móveis. Sugerimos que o modelo tradicional de propagação não é apropriado para a análise em sistemas como MANETs densas, já que nestas os nós podem se aproximar muito, o que faz com que a potência do sinal recebido se comporte de forma diferente da que sugere o modelo tradicional. Verificamos, através de análise matemática, que a Capacidade do canal vai a zero quando o número de nós tende a infinito, se utilizarmos o modelo de propagação que consideramos mais realista, em contraste com os resultados estabelecidos na literatura que encontram Capacidade tendendo a uma constante com o aumento do número total de nós na rede.

Apresentamos também algumas limitações do modelo de rede adotado, e percebemos que elas se devem justamente à simplificação que fizemos para o mesmo, ou seja, a adoção de uma rede contínua.

Foi nesse ponto que percebemos a necessidade de partir para o desenvolvimento de um novo modelo de rede, que não adotasse a simplificação pela continuidade. Contudo, a modelagem discreta era complicada, e não necessária para obtermos o resultado de necessidade mais imediata: o comportamento limite da Capacidade. Então, decidimos verificar o limite de uma cota superior para a capacidade, e, conforme esperávamos, concluímos que esta tende a zero quando a rede se torna infinitamente densa.

Como possíveis trabalhos futuros podem ser considerados:

- modelos de visada direta e mais próximos da realidade;
- busca de uma fórmula fechada para a Capacidade;
- estudo da capacidade ergódica;
- generalização do modelo de propagação, considerando a distribuição de Nakagami-m.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GUPTA, P.; KUMAR, P. R. The capacity of wireless networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 46, n. 2, p. 388–404, March 2000.
- [2] GROSSGLAUSER, M.; TSE, D. Mobility increases the capacity of wireless ad hoc networks. *Proc. of IEEE Infocom*, Anchorage, Alaska, p. 477–478, March 2001.
- [3] LI, P.; PAN, M.; FANG, Y. The capacity of three-dimensional wireless ad hoc networks. *In Proc. of IEEE INFOCOM*, Changai, China, p. 1486, 2011.
- [4] LI, P.; PAN, M.; FANG, Y. Capacity bounds of three-dimensional wireless ad hoc networks. *IEEE Transactions on Networking*, v. 20, n. 4, p. 1304–1315, August 2012.
- [5] TAVLI; HEINZELMAN, W. In: *Mobile Ad Hoc Networks Energy-Efficient Real-Time Data Communications*. [S.l.]: Springer, 2006. p. 1–2,10–11.
- [6] PAULA, L. R. de; MORAES, R. de. Channel capacity in dense manets for a propagation model considering the law of conservation of energy and fading. *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, Paris, France, p. 1–5, April 2012.
- [7] PAULA, L. R. de; MORAES, R. de. Capacidade de canal em redes ad hoc densas. *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Curitiba, Brazil, p. 1–5, October 2011.
- [8] GOLDSMITH, A. In: *Wireless Communications*. [S.l.]: Stanford University, 2004. p. 24–27,40–43,74–75.
- [9] Robert G. Akl et al. Multicell CDMA network design. *IEEE Transactions On Vehicular Technology*, v. 1, n. 3, p. 712, May 2001.
- [10] BANSAL, N.; LIU, Z. Capacity, delay and mobility in wireless ad hoc networks. *In Proc. of INFOCOM*, San Francisco, CA, p. 2,11, 2003.
- [11] LIMA, A. V. L. e; PIMENTEL, C. E. C.; MORAES, R. M. de. Interference modeling for wireless ad hoc networks. *Christas I. Bouras (Org), Trends in Telecommunications Technologies*, p. 2–8, 2010.
- [12] MORAES, R. de; PIMENTEL, C. C.; ARAUJO, F. de. Shannon capacity for a simple communication channel model in dense manets. *Proc. of IWCMC*, Crete Island, Greece, p. 1–4, August 2008.
- [13] ROBERT, C. P.; CASELLA, G. In: *Monte Carlo Statistical Methods*. [S.l.]: Springer Verlag, 2004.
- [14] COVER, T. M.; THOMAS, J. A. In: *Elements of Information Theory*. [S.l.]: JohnWiley and Sons, 1991. p. 25.
- [15] KLEINROCK, L. In: *Queueing Systems*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1975. v. 1, p. 119–124.
- [16] NIST Digital Library of Mathematical Functions. Disponível em: <<http://dlmf.nist.gov/8.5>>.

[17] M.ABRAMOWITZ; STEGUN, I. In: *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 10. ed. [S.l.]: Dover Publications, 1972. p. 505.

I. CÁLCULO DOS LIMITES

I.0.6 Equação (5.23)

Vamos mostrar agora que o limite da Eq. (5.23), quando n vai a infinito é zero. Faremos isso aplicando o limite a cada um dos termos que depende de n . Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt{\theta n \pi})^\alpha}{(\theta n \pi)^{\frac{\alpha}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{\theta n \pi}}{\sqrt{\theta n \pi}} \right)^\alpha = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{\theta n \pi}}{\sqrt{\theta n \pi}} \right)^\alpha = 1, \quad (\text{I.1})$$

pois a expressão $\frac{1 + \sqrt{\theta n \pi}}{\sqrt{\theta n \pi}}$ é uma relação entre dois polinômios de grau 1 na variável $\sqrt{\theta n \pi}$. Como consequência:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_\alpha(r') \frac{(1 + \sqrt{\theta n \pi})^\alpha}{(\theta n \pi)^{\frac{\alpha}{2}}} - 2\pi \frac{1 + \sqrt{\theta n \pi}}{\sqrt{\theta n \pi}} \left(\frac{1 - \alpha}{\sqrt{\theta n \pi}} - 1 \right) \right] = f_\alpha(r') + 2\pi. \quad (\text{I.2})$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{2P\sigma_s^2}{N_0 \frac{(1 + \sqrt{\theta n \pi})^\alpha}{(\theta n \pi)^{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{\theta n 2P\sigma_s^2}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \left[f_\alpha(r') \frac{(1 + \sqrt{\theta n \pi})^\alpha}{(\theta n \pi)^{\frac{\alpha}{2}}} - 2\pi \frac{1 + \sqrt{\theta n \pi}}{\sqrt{\theta n \pi}} \left(\frac{1 - \alpha}{\sqrt{\theta n \pi}} - 1 \right) \right]} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{2P\sigma_s^2}{N_0 + \frac{\theta n 2P\sigma_s^2}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} [f_\alpha(r') + 2\pi]} \right) = \log_2 1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

I.0.7 Equação (5.33)

Novamente, para calcularmos o limite da Eq. (5.33) quando n tende a infinito, podemos calcular individualmente os limites dos termos que a compõem. Começaremos pelo termo $E[I]$ que, por ser grande, também será subdividido. De acordo com Eq. (5.31), podemos calcular os limites dos termos componentes de $E[I]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\theta n \pi}}{1 + \sqrt{\theta n \pi}} = 1, \quad (\text{I.4})$$

de acordo com a Eq. (I.1). Tendo por base a mesma equação, calculamos o limite de mais um termo de $E[I]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{\theta n \pi}} - \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma}{\left(\frac{\sqrt{\theta n \pi} + 1}{\sqrt{\theta n \pi}} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right)} = \frac{-\sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma}{\left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right)}. \quad (\text{I.5})$$

Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[I] &= \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta n 2 P \sigma_s^2 \right) \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right) - \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi} + (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma}{\left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi} - (r' \sin \gamma)^2} - r' \cos \gamma \right)} \right\} d\gamma = \infty. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Vamos agora à expressão $\frac{P\theta n\pi 2P\sigma_s^2}{(1+\sqrt{\theta n\pi})^2}$. Se desenvolvermos o denominador, teremos um polinômio em $\theta n\pi$, sendo $\theta n\pi$ o termo de maior grau. Então, estamos diante de um quociente entre polinômios de mesmo grau, na variável $\theta n\pi$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P\theta n\pi 2\sigma_s^2}{(1 + \sqrt{\theta n\pi})^2} = 2P\sigma_s^2. \quad (\text{I.7})$$

A partir dos resultados expressos nas Eqs. (I.6) e (I.7), podemos calcular o limite da Eq. (5.33):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left[1 + \frac{P\theta n\pi 2\sigma_s^2}{\left((1 + \sqrt{\theta n\pi})^2 (N_0 + E[I]) \right)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} = \log_2 \left[1 + \frac{2P\sigma_s^2}{N_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} E[I]} \right] = 0. \quad (\text{I.8})$$

II. CASO PARTICULAR: PDF DA FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Seja X uma variável aleatória e Y uma função afim de X , de forma que $Y = cX + d$, $c > 0$. Sendo $F_X(x)$ e $f_X(x)$ a CDF e a PDF de X , a CDF de Y , $F_Y(y)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= \int_{X:Y \leq y} f_X(x) dx \\
 &= \int_{X \leq \frac{y-d}{c}} f_X(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\frac{y-d}{c}} f_X(x) dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^{\frac{y-d}{c}} f_X(x) dx.
 \end{aligned} \tag{II.1}$$

Derivando-se a Eq.(II.1) em relação a y , obtemos a PDF $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^{\frac{y-d}{c}} f_X(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dy} \int_{-t}^{\frac{y-d}{c}} f_X(x) dx. \tag{II.2}$$

Mas, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\frac{d}{dy} \int_{-t}^{\frac{y-d}{c}} f_X(x) dx = \frac{d}{dy} \left(\frac{y-d}{c} \right) f_X \left(\frac{y-d}{c} \right) + \frac{dt}{dy} f_X(-t)$. Como t não depende de y , temos que $\frac{dt}{dy} = 0$. Então, utilizando o resultado da Eq. (II.2):

$$f_Y(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{c} f_X \left(\frac{y-d}{c} \right) = \frac{1}{c} f_X \left(\frac{y-d}{c} \right). \tag{II.3}$$

Agora estamos prontos para demonstrar aquilo que nos propomos na seção 6.3. Sendo a relação entre Z_k e Y_k linear - $Z_k = cY_k + d$, $c = \frac{P}{(1+r_{MAX})^\alpha}$, $d = N_0$ -, e como temos a PDF de Y_k - dada pela Eq. (6.6) -, podemos utilizar a Eq. (II.3) para encontrar a PDF de Z_k :

$$\begin{aligned}
 f_{Z_k}(z_k) &= \frac{\frac{1}{c} \left(\frac{z_k-d}{c} \right)^{k-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{z_k-d}{c} \right)}}{(k-1)!(2\sigma^2)^k} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2 c} \right)^k e^{\frac{1}{2\sigma^2 c} d}}{(k-1)!} (z_k - d)^{k-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 c} z_k}
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

Basta agora fazermos $a = \frac{1}{2c\sigma^2}$ e $b = d$ para obtermos a PDF de Z_k , com $y_k \geq 0$ e $z_k \geq b$, da forma como explicitamos na seção 6.3:

$$f_{Z_k}(z_k) = \frac{a^k e^{ab}}{(k-1)!} (z_k - b)^{k-1} e^{-az_k}. \quad (\text{II.5})$$

Se $z_k < b$, então $y_k < 0$, o que faz com que $f_{Z_k}(z_k)$ se anule para $z_k < b$.

III. CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES

III.1 INDEPENDÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS: CASO PARTICULAR

Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_k\}$ um espaço amostral constituído por k eventos independentes ω_k , X uma variável aleatória tal que $X(\omega_i) \leq x_i$, e \mathbf{I} um vetor aleatório, de dimensão k , constituído por VAs I_i tais que:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_i \text{ ocorre,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Seja Y uma variável aleatória independente de X , ou seja:

$$P\{Y \leq y, X \leq x_i\} = P\{Y \leq y\}P\{X \leq x_i\}. \quad (\text{III.2})$$

Queremos mostrar que $\frac{1}{X}$ e Y são, também, independentes. Para isso, vamos tentar expressar $P\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\}$ em termos de $P\{Y \leq y\}$ e $P\{\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\}$. Utilizando as probabilidades condicionais, temos que:

$$P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\right\} = P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i} \mid I = 1\right\} P\{I = 1\} + P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i} \mid I = 0\right\} P\{I = 0\}. \quad (\text{III.3})$$

Mas $P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i} \mid I = 1\right\} = 0$, já que $I = 1$ e $\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}$ referem-se a eventos mutuamente exclusivos. Além disso, $I = 0 \Leftrightarrow X \geq x_i \Leftrightarrow \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i} \Rightarrow P\{I = 0\} = P\left\{\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\right\}$. Também é verdade que $P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i} \mid I = 0\right\} = P\{Y \leq y\}$, já que, se $I = 0$, então $P\left\{\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\right\} = 1$. Continuando o desenvolvimento de (III.3), chegamos a:

$$\begin{aligned} P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\right\} &= P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i} \mid I = 0\right\} P\{I = 0\} \Rightarrow \\ P\left\{Y \leq y, \frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\right\} &= P\{Y \leq y\} P\left\{\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x_i}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Então, partindo do princípio de que X e Y são independentes, conclui-se, pela Equação (III.4), que Y e $\frac{1}{X}$ também o são.

III.2 SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

Consideremos um conjunto de variáveis aleatórias contínuas¹ $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$, independentes e identicamente distribuídas. Queremos mostrar que qualquer uma delas é independente da soma das restantes. Começaremos com um caso simples, com apenas duas variáveis, e estenderemos, em seguida, para um número ilimitado de variáveis.

Sejam, então, X , Y e Z três VAs independentes e identicamente distribuídas. Queremos mostrar que, se $W = X + Z$, W é independente de Y . Mostraremos isso utilizando o fato de que a FDA (Função de Distribuição Acumulada) conjunta de duas VAs independentes é o produto das FDAs individuais de cada uma. Para isso, dividiremos o espaço amostral de W em eventos disjuntos, como ilustra a figura (III.1):

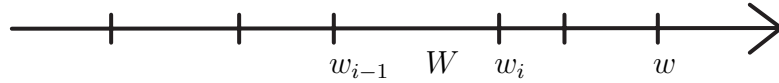


Figura III.1: Trecho do espaço amostral da variável aleatória W , dividido em eventos disjuntos $w_{i-1} < W \leq w_i$. A divisão tem início em $-\infty$ e termina em $W = w$.

Vamos, então, tentar expressar $F_{Y,W}(y, w) = P\{Y \leq y, W \leq w\}$ em termos de $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$ e $F_W(w) = P\{W \leq w\}$:

$$P\{Y \leq y, W \leq w\} = \sum_i P\{Y \leq y, w_{i-1} < W \leq w_i\}. \quad (\text{III.5})$$

Desenvolvendo o termo genérico do somatório da Equação (III.5), temos que:

$$P\{Y \leq y, w_{i-1} < W \leq w_i\} = P\{Y \leq y, W \leq w_i\} - P\{Y \leq y, W \leq w_{i-1}\}. \quad (\text{III.6})$$

As parcelas do segundo membro da Equação (III.6) podem ser desenvolvidas substituindo-se W por $X + Z$ e, em seguida, aplicando probabilidades condicionais. Para isso, precisamos dividir o espaço amostral de Z em eventos disjuntos, exatamente como fizemos com o da variável aleatória W , de acordo com a Figura (III.1). Então, desenvolvendo a primeira parcela, temos que:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, W \leq w_i\} &= P\{Y \leq y, X + Z \leq w_i\} \\ &= \sum_j P\{Y \leq y, X \leq w_i - Z | z_{j-1} < Z \leq z_j\} P\{z_{j-1} < Z \leq z_j\}. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Precisamos agora desenvolver o termo genérico do somatório da Equação (III.7). Para fazê-lo, basta nos lembrarmos de que as variáveis aleatórias Y e Z são independentes e, logo, condicionalmente independentes. Assim:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, X \leq w_i - Z | z_{j-1} < Z \leq z_j\} P\{z_{j-1} < Z \leq z_j\} &= \\ = P\{Y \leq y | z_{j-1} < Z \leq z_j\} P\{X \leq w_i - Z | z_{j-1} < Z \leq z_j\} P\{z_{j-1} < Z \leq z_j\} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$$= P\{Y \leq y\} P\{X \leq w_i - Z, z_{j-1} < Z \leq z_j\} \quad (\text{III.9})$$

¹É possível mostrar que, para o caso discreto, a conclusão é igualmente válida, mas isto foge ao escopo deste trabalho.

Então, podemos expressar o termo genérico $P\{Y \leq y, W \leq w_i\}$ substituindo (III.9) em (III.7). Portanto:

$$P\{Y \leq y, W \leq w_i\} = \sum_j P\{Y \leq y\}P\{X \leq w_i - Z, z_{j-1} < Z \leq z_j\}. \quad (\text{III.10})$$

A segunda parcela de (III.6) pode ser obtida de maneira idêntica, bastando, para isso, substituir i por $i - 1$ em (III.10):

$$P\{Y \leq y, W \leq w_{i-1}\} = \sum_j P\{Y \leq y\}P\{X \leq w_{i-1} - Z, z_{j-1} < Z \leq z_j\}. \quad (\text{III.11})$$

O próximo passo é continuar o desenvolvimento a partir da Equação (III.6), substituindo na mesma os resultados obtidos em (III.10) e (III.11):

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, w_{i-1} < W \leq w_i\} &= \\ &= \sum_j P\{Y \leq y\} (P\{X \leq w_i - Z, z_{j-1} < Z \leq z_j\} - P\{X \leq w_{i-1} - Z, z_{j-1} < Z \leq z_j\}). \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Substituindo (III.12) na Equação (III.5), temos:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, W \leq w\} &= \\ &= P\{Y \leq y\} \sum_i \sum_j (P\{X \leq w_i - Z, z_{j-1} < Z \leq z_j\} - P\{X \leq w_{i-1} - Z, z_{j-1} < Z \leq z_j\}). \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

O resultado da Equação (III.13) é interessante porque expressa $P\{Y \leq y, W \leq w\}$ como um produto de probabilidades, e dentre os fatores está $P\{Y \leq y\}$. Para completar a prova, precisamos provar que o outro fator é justamente $P\{W \leq w\}$.

Aplicando probabilidades condicionais, temos que:

$$P\{W \leq w\} = P\{Y \leq y, W \leq w | Y \leq y\} = \frac{P\{Y \leq y, W \leq w\}}{P\{Y \leq y\}}. \quad (\text{III.14})$$

Comparando o resultado (III.14) com a Equação (III.13), concluímos que:

$$P\{Y \leq y, W \leq w\} = P\{Y \leq y\}P\{W \leq w\}. \quad (\text{III.15})$$

Ou seja:

$$F_{Y,W}(y, w) = F_Y(y)F_W(w), \quad (\text{III.16})$$

o que significa que W e Y são independentes. Vamos agora estender o caso para um número ilimitado de variáveis aleatórias, como propusemos no início desta seção. Seja, então, $Z_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ a soma de k VAs independentes e identicamente distribuídas, com uma outra variável Y independente dos X_i e com a mesma distribuição dos mesmos. A prova segue por indução em k :

- **BASE DE INDUÇÃO:** Acima, provamos que, se $k = 2$, a propriedade é válida. Assim, se X_1, X_2 e Y são independentes, Y é independente de $Z_2 = X_1 + X_2$.
- **PASSO DE INDUÇÃO:** Verificaremos se Y é independente de Z_{k+1} , supondo Y independente de Z_k . Sendo $Z_{k+1} = X_1 + X_2 + \dots + X_k + X_{k+1}$, concluímos que $Z_{k+1} = Z_k + X_{k+1}$. Mas, por hipótese, Y é independente de Z_k . Como ele também é independente de X_{k+1} , voltamos ao caso da soma de duas variáveis aleatórias independentes, que já foi mostrado. Logo, Y é independente de Z_{k+1} e isso conclui a prova.

III.3 ADICIONANDO UMA CONSTANTE

Dadas duas variáveis aleatórias independentes X e Y , queremos mostrar que Y é independente de $Z = X + C$, sendo C uma constante. Da mesma forma que fizemos nos dois tópicos anteriores, devemos expressar a FDA conjunta como um produto das FDAs individuais. Assim:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, Z \leq z\} &= P\{Y \leq y, X + C \leq z\} \\ &= P\{Y \leq y, X \leq z - C\}. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Como X e Y são independentes, a Equação (III.17) permite-nos concluir que $P\{Y \leq y, X \leq z - C\} = P\{Y \leq y\}P\{X \leq z - C\}$. Mas $X \leq z - C \Leftrightarrow Z \leq z$. Então $P\{X \leq z - C\} = P\{Z \leq z\}$, o que nos leva a:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y, X \leq z - C\} &= P\{Y \leq y\}P\{X \leq z - C\} \Rightarrow \\ P\{Y \leq y, Z \leq z\} &= P\{Y \leq y\}P\{Z \leq z\} \Rightarrow \\ F_{Y,Z}(y, z) &= F_Y(y)F_Z(z). \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

A Equação (III.18) conclui a prova.