

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

HIDRODINÂMICA DO ESCOAMENTO DO SANGUE EM  
MICROVASOS

JONAS ANTONIO ALBUQUERQUE DE CARVALHO

ORIENTADOR

FRANCISCO RICARDO DA CUNHA, Ph.D., UnB

PUBLICAÇÃO: DM-122

BRASÍLIA, 06 DE JUNHO DE 2008

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

HIDRODINÂMICA DO ESCOAMENTO DO SANGUE EM  
MICROVASOS

JONAS ANTONIO ALBUQUERQUE DE CARVALHO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR

---

FRANCISCO RICARDO DA CUNHA, Ph. D., UnB  
(ORIENTADOR)

---

TITO DIAS Jr., Dr., UnB  
(EXAMINADOR INTERNO)

---

PAULO CÉSAR DE MORAIS, Dr., IF-UnB  
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA, 06 DE JUNHO DE 2008

## FICHA CATALOGRÁFICA

CARVALHO, JONAS ANTONIO ALBUQUERQUE

Hidrodinâmica do escoamento do sangue em microvasos [Distrito Federal] 2008  
xxii, 196 f. : il ; 297mm.(ENM/FT/UnB, Mestre, Engenharia Mecânica, 2008)

Dissertação de mestrado - Universidade de Brasília,

Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia mecânica

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. Microcirculação         | 2. Reologia do Sangue     |
| 3. Fluidos não-newtonianos | 4. Microvaso              |
| 5. Hidrodinâmica           | 6. Viscosidade intrínseca |

I.ENM/FT/UnB

Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CARVALHO, J. A. A. (2008) Hidrodinâmica do escoamento do sangue em microvasos. Dissertação de mestrado, Publicação DM-122 Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 152p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Jonas Antonio Albuquerque de Carvalho

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Hidrodinâmica do escoamento do sangue em microvasos

GRAU/ANO: Mestre / 2008

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

-----  
Jonas Antonio Albuquerque de Carvalho

SMPW Quadra 1 Conjunto 5 Chácara Liberdade T57

71735-105, Brasília, DF - Brasil

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a meu falecido avô Antônio exemplo de humildade, força e carinho incomparável que me motiva e me guia durante minha vida.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente as pessoas responsáveis principais pela minha formação como pessoa e cidadão, meus pais, Maria José Albuquerque de Carvalho e José Porfírio Fontenele de Carvalho. Meus irmãos, pelo apoio, compreensão, paciência, carinho, confiança e fé delegadas a minha pessoa. Agradeço especialmente a minha irmã Maria José pelo carinho incondicional que ela tem por mim e pela paciência e pela colaboração intensa para meu bem estar e atividades que desenvolvo, sou eternamente grato.

Em segundo dedico a meu orientador e amigo Francisco Ricardo da Cunha pela paciência e competência em orientar e auxiliar na pesquisa e ensino além de educar sobre aspectos sociais importantes como a ética acadêmica e o papel do indivíduo na sociedade. Ressalvo que de longas conversas carregarei para sempre a incrível força de vontade que Francisco Ricardo tem em contribuir para a comunidade de forma responsável, bem intencionada e principalmente impactante.

Agradeço a meu Co-orientador de graduação e amigo Taygoara por todo o conhecimento transferido durante esses anos de vida acadêmica e pela postura amigável e colaboradora em todos os trabalhos em que pude pedir auxílio.

Agradeço em especial meus eternos colegas do grupo Vortex Hugo Couto, Ailson Farias, Douglas Ramos, Gustavo Abade, Yuri Dumaresq, Marcelo Andreotti, Paulo Garcia, Vinícius, Natália, Daniel Albernaz, Rafael Paulino.

A todos os profissionais técnicos do Departamento de Engenharia Mecânica que colaboraram de forma essencial para a conclusão de meus estudos. Em especial agradeço a meu colega e amigo Edson Lucas pelo empenho em ajudar e apoio durante a pesquisa agradeço também ao Artur, ao Marcos, ao José Felipe, ao Tarsis, ao Carlos e ao Xavier pelo apoio constante em tudo que precisei de apoio técnico.

A meus amigos novos e de longa data fica reservado aqui meu reconhecimento e gratidão pelos momentos de alegria e tristeza durante o tempo de meus estudos.

Agradeço a todos que de alguma forma me foram simpáticos e contribuíram de alguma maneira para minha saúde, podendo assim concluir com sucesso mais uma etapa de minha vida acadêmica e pessoal.

## Resumo

# HIDRODINÂMICA DO ESCOAMENTO DO SANGUE EM MICROVASOS

Neste trabalho estuda-se o escoamento e a reologia de fluidos não-newtonianos com propriedades mecânicas semelhantes as do sangue. Os cálculos e as análises apresentados são direcionados ao entendimento do escoamento em microvasos. Em regime de microcirculação avalia-se as propriedades mecânicas predominantes a serem usadas em diferentes modelos constitutivos do sangue. Usaram-se desde modelos de fluidos generalizados até um modelo protótipo do sangue usando emulsões para descrever o comportamento do sangue em escoamento em microvasos. Com os resultados avaliam-se a influência das propriedades do sangue como, por exemplo, a presença da camada de plasma livre de células, fração volumétrica de glóbulos vermelhos, da tensão crítica de escoamento na viscosidade intrínseca do sangue. É obtida a solução por similaridade da equação da distribuição de gotas em um escoamento cisalhante na presença de uma parede rígida. O referido cálculo é uma primeira investigação da distribuição de células e dos mecanismos físicos envolvidos na formação da camada de plasma livre de células no regime da microcirculação. Uma emulsão diluída de gotas de alta razão de viscosidade com o meio líquido é usada como protótipo do fluido sangue na microcirculação. Acredita-se que a camada de plasma, livre de células, é o resultado do balanço entre dois mecanismos de fluxo de células protótipos; um associado à migração de partículas devido a presença da parede e outro associado à difusão hidrodinâmica de células. Como principal resultado determina-se a distribuição de gotas no espaço em função do tempo, a formação dessa camada livre de células e a espessura da camada em função dos parâmetros físicos envolvidos. Na etapa experimental, investiga-se o escoamento de emulsões e soluções poliméricas em tubos com objetivo de determinar a viscosidade intrínseca. Um tanque de estagnação permite controlar a pressão de entrada do escoamento. Propõe-se uma metodologia para medida da viscosidade intrínseca de fluidos complexos, como o sangue, em cisalhamento parabólico.

# Abstract

## HYDRODYNAMICS OF BLOOD FLOW IN MICROVESSELS

In this work, non-newtonian fluids with approximated blood behavior flow and rheology are investigated. Some scaling analysis and calculations results are presented with the intent to understand the blood flow in microvessels. The main mechanical properties in microcirculation regime are determined to be used with different constitutive models of the blood. Generalized non-newtonian fluids and an emulsion prototype of blood are the different constitutive models used to describe blood behavior. With the results, the cell-depleted layer, the red blood cells volume fraction, the yield stress, are examples of the investigated parameters. The similarity solution of the distribution differential equation of droplets is calculated in a shear flow with a rigid wall. This solution is a first approach to understand the cells distribution and the mechanisms that affect the cell-depleted layer formation in microcirculation. A dilute emulsion of drops with high viscosity ratio is the prototype of blood in microvessels. Here, the cell depleted layer is a balance result of two different flux mechanisms: the cell migration due the presence of a rigid wall and the hydrodynamic diffusion of cells. The main results is the volume fraction in function of time and space of drops prototypes of red blood cells, the thickness of cell-depleted layer calculation and associated development time. In tube flow experiments are investigated polymeric solutions and different emulsions with the objective to calculate its intrinsic viscosities. A stagnation reservoir tank is used to control the intake pressure of the tube flow. A procedure to measure the intrinsic viscosity of complex fluids is proposed.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Análise dimensional do escoamento do sangue na microcirculação . . .	6
1.2	Objetivos . . . . .	9
1.2.1	Objetivos Específicos . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Equações de balanço e equações constitutivas</b>	<b>14</b>
2.1	Equações de balanço para um meio contínuo . . . . .	14
2.2	Equações constitutivas . . . . .	15
2.3	Modelos constitutivos de fluidos não-newtonianos puramente viscosos, Reiner-Rivlin . . . . .	18
2.4	Fluidos dependentes do tempo . . . . .	24
2.4.1	Modelo com viscosidade extensional . . . . .	26
2.5	Escoamentos em tubos . . . . .	27
2.5.1	Escoamento axissimétrico em tubo . . . . .	27
2.5.2	Escoamento em tubo com parede senoidal . . . . .	29
2.5.3	Escoamento de fluidos imiscíveis em um tubo (“Core Flow”) . .	30
<b>3</b>	<b>Modelo contínuo do escoamento do sangue</b>	<b>31</b>
3.1	Escoamento do sangue em microvasos . . . . .	32
3.1.1	Perfil de velocidade . . . . .	32
3.1.2	Taxa volumétrica do escoamento - Vazão . . . . .	36
3.1.3	Viscosidade intrínseca do sangue em escoamento em artérias . .	37
3.2	Determinação da viscosidade intrínseca para diferentes condições de es- coamentos . . . . .	37
3.2.1	Caso de fluido newtoniano efetivo . . . . .	38
3.2.2	Modelo de fluido newtoniano generalizado (fluido de Casson) . .	38

3.3	Resultados da viscosidade intrínseca do sangue em arteríolas . . . . .	40
3.4	Escoamento do sangue em capilares . . . . .	44
3.4.1	Descrição do modelo matemático do escoamento em capilar . . . . .	45
3.4.2	Cálculo da viscosidade intrínseca . . . . .	47
3.4.3	Protótipo de Célula com formato de parabolóide . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Modelos constitutivos de emulsões e suspensões</b>	<b>53</b>
4.1	Característica de emulsões . . . . .	53
4.2	Fluidos complexos homogêneos . . . . .	56
4.2.1	Um modelo microestrutural de emulsão diluída . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Modelo constitutivo microestrutural de emulsões de alta razão de viscosidade</b>	<b>62</b>
5.1	Descrição das equações constitutivas . . . . .	62
5.2	Solução da equação do movimento da emulsão . . . . .	65
5.2.1	Solução assintótica . . . . .	65
5.2.2	Viscosidade intrínseca do modelo de emulsão protótipo de sangue	69
5.2.3	Método de solução assintótica . . . . .	70
5.2.4	Solução numérica . . . . .	71
5.2.5	Investigação do hematócrito e da razão de viscosidade na viscosidade intrínseca do sangue . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Fundamentos da Difusão</b>	<b>80</b>
6.1	Problemas de difusão . . . . .	80
6.1.1	Fluxo Difusivo . . . . .	82
6.2	Difusividade . . . . .	82
6.3	Difusão hidrodinâmica . . . . .	84
6.4	Difusão hidrodinâmica no escoamento do sangue em microvasos . . . . .	86
6.4.1	Interação de partículas em cisalhamento simples . . . . .	87
6.5	Velocidade de migração de partículas em cisalhamento simples . . . . .	90
6.6	Formação da camada livre de partículas . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Formação da camada livre de células</b>	<b>95</b>
7.1	Difusão hidrodinâmica de células na microcirculação . . . . .	96

7.1.1	Difusividade hidrodinâmica na microcirculação . . . . .	97
7.1.2	Análise de trajetórias de partículas sujeitas a cisalhamento . . . .	98
7.1.3	Resultados do cálculo das difusividades . . . . .	102
7.2	Estimativa da camada livre de células . . . . .	104
7.3	Modelo para evolução temporal da camada livre de células . . . . .	107
7.3.1	Adimensionalização da equação governante . . . . .	108
7.3.2	Solução pelo método de similaridade . . . . .	109
7.3.3	Solução numérica da equação transiente de distribuição de partículas	112
<b>8</b>	<b>Investigações experimentais preliminares do escoamento de fluidos</b>	
	<b>não-newtonianos em tubos</b>	<b>118</b>
8.1	Metodologia de cálculo . . . . .	119
8.1.1	Cálculo generalizado da viscosidade de fluidos não-newtonianos.	119
8.2	Escoamento em tubo capilar alimentado por um esvaziamento de tanque	123
8.3	Procedimentos e materiais usados para coletas de dados . . . . .	125
8.3.1	Aparato Experimental . . . . .	125
8.3.2	Procedimentos experimentais . . . . .	128
8.4	Resultados . . . . .	130
8.4.1	Escoamento em tubo com água filtrada . . . . .	130
8.4.2	Escoamento em tubo com solução de poliacrilamida (PAMA) . . . .	135
8.4.3	Escoamento de emulsão óleo-água e água-óleo 20% em tubo . . . .	144
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>155</b>
9.0.4	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	160
<b>A</b>	<b>Argumento de escala para a solução do escoamento de fluido em tubo</b>	
	<b>de paredes senoidais</b>	<b>168</b>
<b>B</b>	<b>Determinação das equações diferenciais que governam o movimento</b>	
	<b>de duas partículas em escoamento do tipo cisalhamento simples</b>	<b>170</b>
<b>C</b>	<b>Equações de Mobilidades</b>	<b>173</b>
<b>D</b>	<b>Incerteza de medição experimental</b>	<b>178</b>
D.1	Incerteza . . . . .	178

D.2	Incerteza para grandezas indiretas . . . . .	179
D.2.1	Massa específica . . . . .	180
D.2.2	Vazão . . . . .	181
D.2.3	Pressão estimada na entrada do tubo durante esvaziamento . . .	182
D.2.4	Taxa de cisalhamento na parede de tubo . . . . .	182
D.2.5	Viscosidade obtida pelo escoamento em tubo . . . . .	183
<b>E</b>	<b>Produção da solução e emulsão para experimentos</b>	<b>184</b>
E.1	Solução de poliacrilamida . . . . .	184
E.2	Emulsão . . . . .	184
<b>F</b>	<b>Tabelas dos dados experimentais</b>	<b>186</b>

# Lista de Tabelas

1.1	Parâmetros físicos adimensionais relevantes para caracterização do movimento de cápsulas ou células em capilares . . . . .	7
7.1	Valores de $y = y_\infty$ em que $\phi = constante$ e $\tilde{\delta}$ em que $\phi = 0$ . . . . .	114
8.1	Viscosidade da emulsão antes, durante e depois do ensaio. . . . .	149
D.1	Instrumentos usados para as medições de grandezas básicas e incertezas associadas . . . . .	179
D.2	Tabela de fator de abrangência $\kappa$ para diferentes graus de liberdade $v_{eff}$ da distribuição t-Student considerando-se um intervalo com probabilidade de 95%. . . . .	180
F.1	Dados da água filtrada do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	186
F.2	Dados da água com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	187
F.3	Dados da solução de poliacrilamida 100ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	187
F.4	Dados da solução de poliacrilamida 100ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro. . . . .	188
F.5	Dados da solução de poliacrilamida 200ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	188
F.6	Dados da solução de poliacrilamida 200ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro. . . . .	189
F.7	Dados da solução de poliacrilamida 200ppm do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro. . . . .	189
F.8	Dados da solução de poliacrilamida 300ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	190

F.9	Dados da solução de poliacrilamida 300ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro. . . . .	190
F.10	Dados da solução de poliacrilamida 300ppm do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro. . . . .	191
F.11	Dados da solução de poliacrilamida 400ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	191
F.12	Dados da solução de poliacrilamida 400ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro. . . . .	192
F.13	Dados da solução de poliacrilamida 400ppm do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro. . . . .	192
F.14	Dados da emulsão 20% óleo/água do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro. . . . .	193
F.15	Dados da emulsão 20% óleo/água do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	193
F.16	Dados da emulsão 20% óleo/água do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro. . . . .	194
F.17	Dados da emulsão 20% água/óleo do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro. . . . .	194
F.18	Dados da emulsão 20% água/óleo do esvaziamento de tanque com tubo de 5mm de diâmetro. . . . .	195
F.19	Dados obtidos para medição da densidade dos fluidos . . . . .	196
F.20	Medidas de tempo em viscosímetro de Ostwald SIZE 50 com água mineral.	196

# Lista de Figuras

1.1	Micrografia de glóbulos vermelhos do sangue agregadas na disposição conhecida como <i>roleaux</i> (Lipowsky, 2005). . . . .	2
1.2	Sessão de um modelo de célula em deformação na microcirculação para diferentes gradientes pressão. . . . .	3
1.3	Micrografias de microvasos . . . . .	4
1.4	Geometria de glóbulos vermelhos em estado não-deformado. . . . .	7
2.1	Ilustração de um cisalhamento simples entre placas paralelas. . . . .	19
2.2	Comportamento de um fluido não Newtoniano viscoso . . . . .	21
2.3	Esboço da relação $\tau$ em função da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ de um fluido de Bingham. . . . .	22
2.4	Esquema estrutural do modelo de fluido visco-elástico de Maxwell. . . . .	24
2.5	Ilustração de tubos considerados para escoamento unidirecional . . . . .	28
2.6	Ilustração do comprimento de desenvolvimento do escoamento em tubo. . . . .	29
3.1	Regiões do escoamento do sangue no interior do microvaso. . . . .	36
3.2	Viscosidade intrínseca do sangue em função do raio adimensional do microvaso, $R/\delta$ . . . . .	40
3.3	Viscosidade intrínseca do sangue em função do parâmetro de não uniformidade da secção do microvaso $\alpha$ . . . . .	41
3.4	Viscosidade intrínseca do sangue em função da tensão de escoamento adimensional, considerando-se $R/\delta = 300$ . . . . .	41
3.5	Variação relativa da Viscosidade intrínseca do sangue em relação a viscosidade efetiva adimensional do sangue $\tilde{\mu}_{eff} = \mu_{eff}/\mu_p$ . . . . .	43
3.6	Ilustração do escoamento em capilares . . . . .	45
3.7	Viscosidade intrínseca do sangue no regime capilar. . . . .	49

3.8	Viscosidade intrínseca do sangue no regime capilar para diferentes velocidades de célula. . . . .	50
3.9	Viscosidade intrínseca do sangue no regime capilar para diferentes da concentração na microcirculação . . . . .	51
4.1	Fotos mostrando a distribuição de gotas em emulsões polidispersa e monodispersa . . . . .	54
4.2	Ilustração das moléculas de um surfactante e da estrutura em micelas .	55
4.3	Ilustração de uma gota de emulsão deformada pelo escoamento com formato de elipsóide. . . . .	60
5.1	Ilustração do modelo adotado para descrever o escoamento no interior de um microvaso.(a) Micrografia de um microvaso real, (b) modelo . .	63
5.2	Comportamento da função $f(du/dr)$ . . . . .	72
5.3	Viscosidade intrínseca em função da taxa de cisalhamento adimensional, o número de capilaridade . . . . .	74
5.4	Viscosidade intrínseca do sangue em função do raio do micro-vaso para o modelo micro-estrutural . . . . .	76
5.5	Viscosidade intrínseca em função da concentração da emulsão . . . . .	77
5.6	Viscosidade intrínseca em função da razão de viscosidades da emulsão.	79
6.1	Esquema de uma superfície hipotética no espaço por onde passa um fluxo de matéria ou energia . . . . .	81
6.2	Ilustração da trajetória de uma partícula que descreve um movimento Browniano. . . . .	83
6.3	Ilustração de duas partículas de tamanho arbitrário em movimento sob a ação de um campo de cisalhamento simples. . . . .	85
6.4	Ilustração das trajetórias relativas de colisão de gotas em escoamento cisalhante simples. . . . .	85
6.5	Comportamento da função $h(\lambda)$ com a razão de viscosidade $\lambda$ . Esta função é usada para o calculo da velocidade de migração na Eq. 6.23 .	92
7.1	Trajetoárias relativas de duas partículas interagindo em um escoamento cisalhante simples. . . . .	100

7.2	Trajетórias relativas de $y(t)$ e $z(t)$ para uma partícula partindo de uma posição relativa $x = -10.0$ , $y = 0.001$ e $z = 1.1$ . . . . .	101
7.3	Coordenadas finais de partículas partindo de um grid de 2x2, colidindo com uma segunda partícula que parte inicialmente da origem . . . . .	102
7.4	Resultado do coeficiente de auto difusão hidrodinâmico adimensional em função de $\lambda$ . . . . .	103
7.5	Resultado numérico de $f^c$ em função de $\lambda$ , para uma emulsão diluída monodispersa, $i = j$ . . . . .	104
7.6	Resultado da difusão hidrodinâmica adimensional em função de $\lambda$ , para uma emulsão monodispersa . . . . .	105
7.7	Solução numérica de $\psi(\eta)$ obtida. . . . .	113
7.8	Perfil de concentração em função $y/a$ em diferentes tempos. . . . .	113
7.9	Fração volumétrica em função de distância adimensional $y/a$ em diferentes valores do número de capilaridade da emulsão . . . . .	115
7.10	Fração volumétrica em função da distância adimensional $y/a$ para diferentes valores do número de Peclet da emulsão . . . . .	116
7.11	Espessura adimensional de camada livre de células em função do tempo adimensional . . . . .	117
7.12	Comprimento de desenvolvimento em função da espessura adimensional da camada livre de células $\tilde{\delta}$ , para uma velocidade de escoamento de $14.0\text{mm/s}$ em vasos de $60\mu\text{m}$ (Bishop <i>et al.</i> , 2001). . . . .	117
8.1	Ilustração do aparato experimental construído durante o desenvolvimento do presente trabalho . . . . .	124
8.2	Foto do tanque e suporte de acrílico em (a) e dos tubos de aço inoxidável usados com as tomadas de pressão em (b). . . . .	126
8.3	Manômetro de coluna de água usado para as medições de pressão realizadas. No detalhe tem-se a escala milimétrica usada para medir as colunas. . . . .	127
8.4	Bomba usada para realimentar o tanque reservatório. . . . .	127
8.5	Viscosímetros usados para as medições das viscosidades durante os experimentos. . . . .	128

8.6	Vazão em função da diferença de pressão medida na tomada de pressão 2 com água filtrada. . . . .	132
8.7	Viscosidade em função da taxa de cisalhamento para água filtrada para a $25^{\circ}C$ . . . . .	133
8.8	Comparação da vazão em função do gradiente de pressão $\Delta p/L$ para os dados obtidos com a tomada de pressão 2 (representado pelos pontos (•)) e com resultados obtidos com o esvaziamento de reservatório (representado pelos pontos ♦). . . . .	134
8.9	Viscosidade em função da taxa de cisalhamento com água filtrada. . . . .	134
8.10	Vazão em função da diferença de pressão ao longo do tubo para diferentes concentrações da solução polimérica, usando tubo de 2mm de diâmetro	136
8.11	Vazão em função da diferença de pressão ao longo do tubo para diferentes concentrações da solução polimérica, usando tubo de 5mm de diâmetro	137
8.12	Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para solução a 100ppm . . . . .	139
8.13	Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para solução a 200ppm . . . . .	139
8.14	Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para solução de 300ppm . . . . .	140
8.15	Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para solução de 400ppm . . . . .	141
8.16	Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento para o esvaziamento em tanque com solução polimérica, escoando em tubo capilar de 2mm de diâmetro . . . . .	143
8.17	Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento para o esvaziamento em tanque com solução polimérica escoando em tubo capilar de 2mm de diâmetro . . . . .	143
8.18	Vazão volumétrica em função da diferença de pressão ao longo do tubo para uma emulsão óleo/água com fração volumétrica de 20% escoando em um tubo de 2mm. . . . .	145

8.19	Vazão volumétrica em função da diferença de pressão ao longo do tubo para uma emulsão óleo/água com fração volumétrica de 20% escoando em um tubo de 5mm. . . . .	146
8.20	Viscosidade aparente da emulsão em função da taxa de cisalhamento na parede do tubo para a emulsão óleo/água a 20% . . . . .	147
8.21	Viscosidade intrínseca adimensional da emulsão em função do número de Capilaridade da emulsão óleo/água a 20%. . . . .	148
8.22	Micrografias da emulsão óleo/água 20% tiradas (a) antes e (b) depois de ser submetido ao escoamento em tubo capilar . . . . .	150
8.23	Vazão em função da diferença de pressão ao longo do tubo para emulsão água/óleo 20%. . . . .	152
8.24	Viscosidade intrínseca adimensional em função do número de capilaridade da emulsão água/óleo a 20%. . . . .	152
8.25	Micrografias da emulsão diluída água/óleo 20% tiradas (a) Antes ( $\beta_p = 5$ ), (b) Depois do experimento da emulsão ter sido submetida ao escoamento em tubo capilar ( $\beta = 4$ ). . . . .	154
C.1	Intersecção da função $A(r)$ , para o domínio distante e de interação para $\beta = 1$ . . . . .	174
C.2	Intersecção da função $A(r)$ , para a configuração de longo alcance e interação de curto Alcance, para $\beta = 1$ . . . . .	175
C.3	Intersecção da função $A(r)$ , para longo alcance e curto alcance, para $\beta = 0.5$ . . . . .	176
C.4	Intersecção da função $B(r)$ , para longo e curto alcance, com $\beta = 0.5$ . . . . .	177

# Lista de Símbolos

## Símbolos latinos

- $a$  - Constante material, diâmetro de partícula ou gotas;
- $\mathbf{a}$  - Vetor dual;
- $\mathbf{A}$  - Tensor de distorção de gotas, tensor de segunda ordem genérico;
- $A$  e  $B$  - Funções mobilidade;
- $\mathbf{B}$  - Vetor força de campo por unidade de massa;
- $c$  - Constante material,  $c = 20/19$ , ou constante de ajuste;
- $C$  - Constante de integração;
- $C_S$  - Parâmetro elástico de cisalhamento;
- $C_B$  - Parâmetro de flexão;
- $C_D$  - Parâmetro de dilatação;
- $Ca$  - Número de Capilaridade;
- $D$  - Diâmetro, Difusividade hidrodinâmica ou constante de integração;
- $\mathbf{D}$  - Tensor simétrico do gradiente de velocidade;
- $\mathbf{D}'$  - Tensor simétrico do gradiente de velocidade transformado;
- $D^s$  - Auto-difusividade;
- $D_{xy}$  - Componente do tensor taxa de deformação;
- $De$  - Número de Deborah;
- $\varepsilon$  - Rugosidade;
- $E_D$  - Módulo elástico de dilatação;
- $E_S$  - Módulo elástico de cisalhamento;
- $K$  - Constante;
- $M_B$  - Momento de flexão;
- $f$  - função; funcional genérico;
- $f^s$  - Auto-difusividade adimensional;
- $F(t - t')$  - Módulo de relaxação do modelo generalizado de fluidos visco-elásticos;
- $\mathcal{F}_n$  - Funcionais genéricos;
- $\mathcal{F}$  - Funcional genérico;
- $\mathfrak{S}$  - Função distribuição de partículas;

$G$  - Gradiente de pressão em tubo, Constante de Young, Função difusividade hidrodinâmica adimensional;

$\tilde{G}$  - Gradiente de pressão adimensional;

$h$  - Altura genérica;

$h(\lambda)$  - Função adimensional da migração de gotas;

$H(\lambda, y, Ca)$  - Função adimensional característica da migração de gotas;

$\mathbf{I}$  - Tensor identidade;

$I_1, I_1, I_1$  - Invariantes do tensor simétrico de gradiente de velocidade;

$k$  - Constante material;

$L$  - Comprimento de tubo;

$\ell$  - Comprimento de microvaso;

$m - m = R_c/\tau_0$ ;

$n$  - Constante material;

$\mathbf{n}$  - Vetor normal;

$p, P$  - Pressão;

$\mathbf{p}$  - Vetor direcional;

$\mathbf{Q}$  - Tensor transformação ortogonal;

$Q$  - Vazão;

$P_0$  - Pressão na entrada;

$P_L$  - Pressão saída de tubo, respectivamente;

$r$  - Variável raio;

$R$  - Raio e raio médio;

$R_0$  - Raio da célula;

$R_c$  - Raio de Casson;

$R_\delta$  - Raio do escoamento de núcleo;

$Re$  - Número de Reynolds;

$t$  - Variável tempo;

$t_\infty$  - Tempo necessário para se alcançar o regime permanente;

$t'$  - Tempo de referencia;

$\mathbf{u}$  - Velocidade;

$u_c$  - Velocidade característica do escoamento;

$U$  - Velocidade média;

$U_0$  - Velocidade de célula;  
 $V$  - Volume;  
 $V_c$  - Volume de célula;  
 $\tilde{\mathbf{x}}$  - Vetor posição após transformação de referencial;  
 $y_\infty$  - Distância de parede rígida em que a concentração de emulsão é constante;  
 $\mathbf{W}$  - Tensor vorticidade;

## Símbolos gregos

$\alpha$  - Intensidade de não uniformidade;  
 $\beta$  - quadrado do gradiente de pressão adimensional em escoamento em tubo;  
 $\dot{\gamma}$  - Taxa de cisalhamento;  
 $\dot{\gamma}_0$  - Taxa de cisalhamento médio;  
 $\dot{\gamma}_e$  e  $\dot{\gamma}_v$  - Taxa de cisalhamento elástico e viscoso;  
 $\delta$  - Espessura dimensional da camada livre de células ou espessura genérica;  
 $\delta_{ij}$  - Operador de Kronecker;  
 $\tilde{\delta}$  - Espessura da camada livre de células adimensional;  
 $\kappa$  - Fator de abrangência ou segundo coeficiente de viscosidade ou curvatura;  
 $\epsilon$  - Parâmetro pequeno usado em solução assintótica;  
 $\eta$  - Variável de solução similar;  
 $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\eta_{ijkl}$  - Tensor material de quarta ordem;  
 $\bar{\eta}_{ijkl}$  - Tensor material de quarta ordem transformado;  
 $\lambda$  - Razão de viscosidades;  
 $\lambda_S$  - Viscosidade relativa da membrana;  
 $\mu$  - Viscosidade;  
 $\mu_s$  - Viscosidade intrínseca do sangue;  
 $\mu_C$  - Viscosidade cisalhante da células;  
 $\mu_e$  - Viscosidade extensional;  
 $\mu_{eff}$  - Viscosidade efetiva;  
 $\mu_g$  - Viscosidade da gota de uma emulsão;  
 $\mu_p$  - Viscosidade do plasma;  
 $\mu_0$  - Viscosidade a taxa de cisalhamento nula;  
 $\mu_B$  - Viscosidade de blob;

- $\mu_i$  - Viscosidade do citoplasma;  
 $\mu_T$  - Viscosidade de Taylor;  
 $\mu_\infty$  - Viscosidade a taxa de cisalhamento infinita;  
 $\tilde{\mu}$  - Viscosidade adimensional;  
 $\xi$  - Vorticidade ou razão  $R - \delta/R$ ;  
 $\omega$  - Velocidade angular;  
 $\rho$  - Massa específica;  
 $\varrho$  - Razão de aspecto entre o raio da gota de uma emulsão e do escoamento em tubo  $a/R$ ;  $\sigma$  - Tensor tensão;  
 $\sigma_0$  - Tensão superficial  $\tau$  - Tensor de tensão;  
 $\tau$  - Valor absoluto do tensor de tensão;  
 $\tau_0$  - Tensão crítica de escoamento ((yield stress));  
 $\tau_w$  - Tensão de parede;  
 $\tau_\delta$  - Tensão cisalhante no contorno do escoamento de núcleo;  
 $\tau_e, \tau_v$  - Tensão elástica e tensão viscosa;  
 $\theta$  - variável angular, constante de tempo do material no modelo Carreau-Yatsuda;  
 $\vartheta$  - Razão entre o raio do microvaso e o raio característico da célula;  
 $\phi$  - Fração volumétrica, hematócrito;  
 $\phi_m$  - Fração volumétrica média;  
 $\varphi_s$  - Viscosidade aparente sob altas taxas de cisalhamento do fluido de Casson;  
 $v_{eff}$  - Graus de liberdade para a distribuição t-Student;  
 $v$  - Função de transformação da solução similar;

## Símbolos matemáticos

- $\Delta$  - Diferença;  
 $\nabla$  - Operador diferencial;  
 $\partial$  - Diferencial parcial  
 $\frac{D}{Dt}$  - Operador diferencial material;  
 $\frac{D}{Dt}$  - Operador diferencial para um observador que rotaciona e translada com a partícula;  
 $()^T$  - Transposição de tensor;  
 $() : ()$  - Produto escalar de tensores;  
 $tr()$  - Traço de um tensor.

# Capítulo 1

## Introdução

Do ponto de vista reológico o sangue é composto basicamente de plasma e glóbulos vermelhos (hemácias) (40-45%) as demais células têm pouca influência na reologia do sangue. O sangue aproxima-se de uma emulsão polidispersa com uma fase fluida composta por plasma, um fluido newtoniano (Lipowsky, 2005); e uma fase dispersa composta por três elementos. Os glóbulos vermelhos, responsáveis pelo transporte de oxigênio aos tecidos do corpo, plaquetas, responsáveis pela coagulação do sangue e os leucócitos que agem no sistema imunológico do organismo. O sangue é um fluido não-newtoniano no qual suas propriedades reológicas dependem principalmente da temperatura, da taxa de cisalhamento, do formato das células, da fração volumétrica de glóbulos vermelhos (hematócrito), da concentração de proteínas no plasma, da orientação das células e das propriedades mecânicas dos glóbulos vermelhos. Em adição o sangue pode apresentar também comportamento não-newtoniano conhecido como tensão de escoamento, típico de fluidos não-newtonianos que obedecem a equação constitutiva de Bingham, associado à agregação de células (Chandran, 2003), ver Fig. 1.1. O comportamento do sangue é pseudo-plástico em relação à variação da viscosidade aparente com a taxa de cisalhamento do escoamento (Lipowsky, 2005), característica esta típica de emulsões viscosas e soluções poliméricas. A variação da viscosidade aparente com o hematócrito também é um fator importante que tem sido explorado. Além disso, no sistema circulatório, composto por vasos sanguíneos que variam desde tamanhos micrométricos a vasos de diâmetro da ordem do milímetro, o sangue pode apresentar propriedades diferentes, dependendo da escala do escoamento. Em vasos capilares, por exemplo, as células chegam a se deformar e adquirir um comprimento muito menor que aquele correspondente a condição da célula não-deformada,

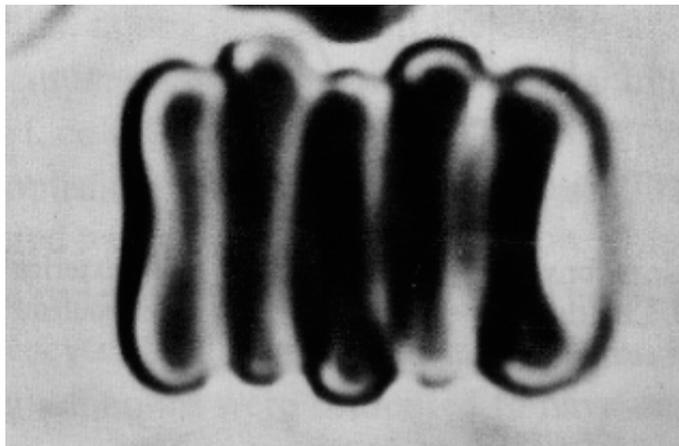


Figura 1.1: Micrografia de glóbulos vermelhos do sangue agregadas na disposição conhecida como *rodeaux* (Lipowsky, 2005).

como ilustra a Fig. 1.2; com um formato característico estudado por Secomb *et al.*, 1986. A microcirculação em particular possui uma importância relevante para a circulação do sangue no corpo humano uma vez que, aproximadamente, 80% do gradiente de pressão total do sistema circulatório é utilizado para vencer o escoamento em microvasos (arteríolas, vênulas e capilares) (Popel & Johnson, 2005). Não somente, é na microcirculação que ocorrem as principais trocas gasosas e de nutrientes necessários aos tecidos do corpo.

Dado a importância da microcirculação, a presente dissertação foca seus estudos na análise de escoamentos do sangue na escala de microvasos. Os microvasos são vasos sanguíneos de diâmetro da ordem de microns, alguns chegam a possuir menos de  $8\mu\text{m}$  (ver detalhe na Fig.1.3). Esses vasos são distribuídos na região periférica do organismo humano e no interior de tecidos. Nessa região do escoamento, a deformação dos glóbulos vermelhos e a presença de uma camada de plasma anular adjacente à parede do vaso funciona como agente lubrificante para o escoamento da microcirculação. Esse efeito da camada de plasma livre de células na região de altas taxas de cisalhamento atenua o esforço do sistema circulatório para vencer as altas quedas de pressão existentes no escoamento de microvaso. A Fig. 1.3 mostra uma micrografia do movimento de glóbulos vermelhos em microvasos pela qual que é possível identificar a deformação dos glóbulos vermelhos e a camada de plasma livre de células adjacente à parede do vaso. A referida camada é formada devido à migração transversal dos glóbulos vermelhos conforme será explicado em capítulo subsequente pelo estudo do balanço entre dois mecanismos de fluxo, um na direção do centro do microvaso causado pelas interações célula-parede produzindo uma migração de células e o outro devido a

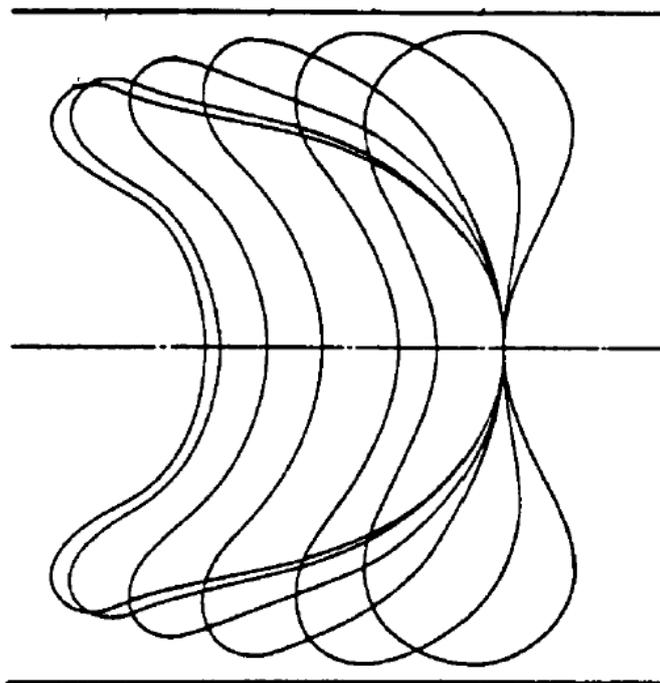


Figura 1.2: Sessão de um modelo de célula em deformação na microcirculação para diferentes pressões. Resultado obtido de uma simulação computacional que assume a membrana com propriedades elásticas. O formato de sino é obtido em gradientes de pressão elevados e o formato simétrico em baixos gradientes de pressão (Skalak & Tözeren, 1979).

interações célula-célula na direção radial no sentido da parede.

O sangue em condições fisiológicas normais é composto de 55% de plasma e 45% em volume de células sangüíneas. As células são compostas de 95% de glóbulos vermelhos (eritrócitos), 0.1% glóbulos brancos e 4,9% plaquetas (Chandran, 2003). No entanto, do ponto de vista reológico o sangue é ,basicamente, uma emulsão de alta razão de viscosidade composta de 40 a 45% de glóbulos vermelhos suspensos no plasma; um fluido newtoniano com propriedades termofísicas próximas a da água. O hematócrito é definido como sendo a fração volumétrica de glóbulos vermelhos. Os valores de concentração anteriores indicam que a reologia do sangue é determinada, principalmente, pelos glóbulos vermelhos (Skalak & Ozkaya, 1989), e conseqüentemente o hematócrito afeta significativamente a reologia do sangue. O que pode ser observado por Picart *et al.*, 1998, que constataram que o aumento do hematócrito aumenta a influência de estruturas tridimensionais de agregados de glóbulos vermelhos na reologia do sangue. Não somente, o estudo afirma que a tensão crítica de escoamento do sangue

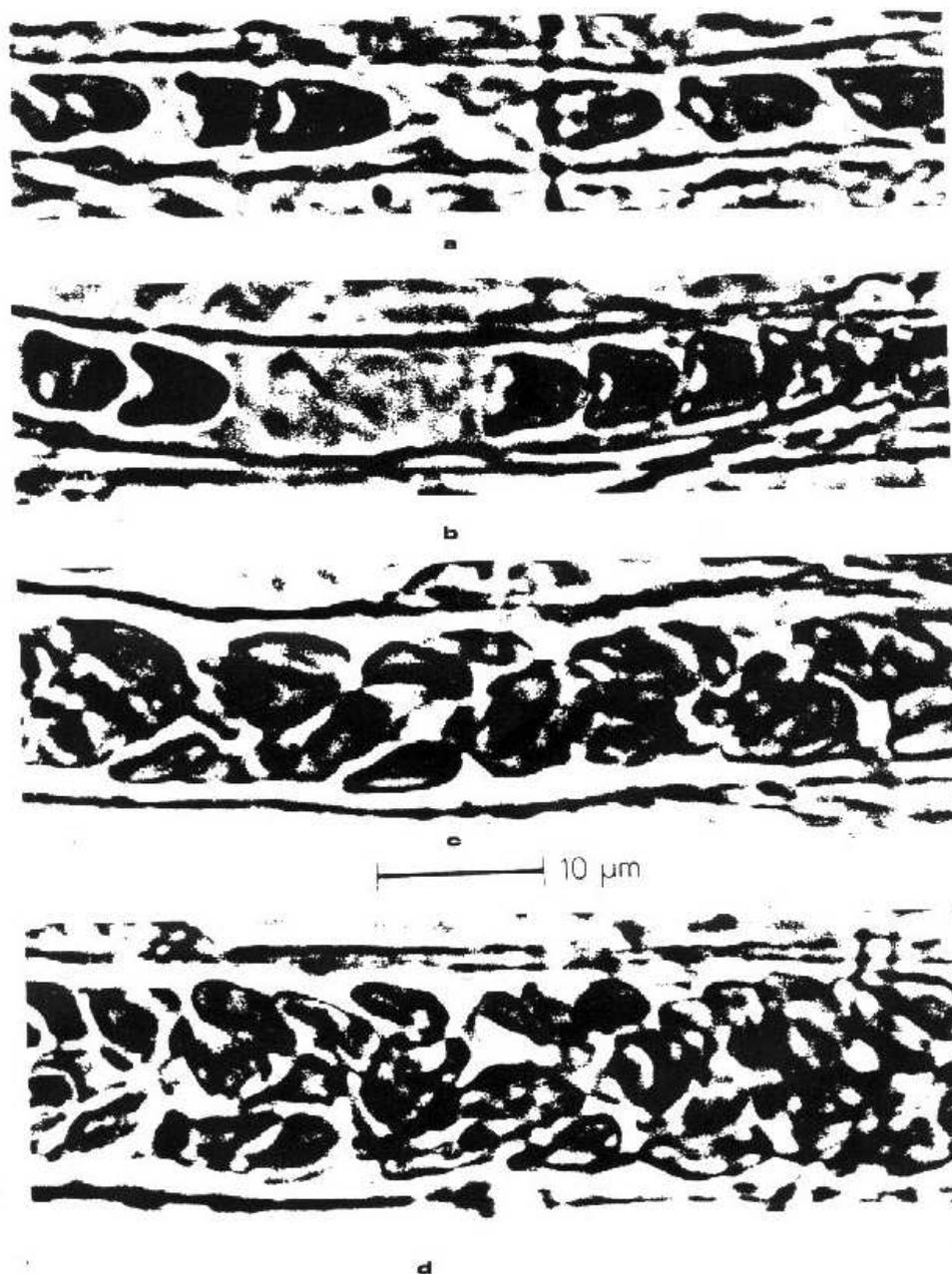


Figura 1.3: Micrografia do escoamento do sangue em microvasos. As figuras (a e b), mostram os glóbulos vermelhos do sangue com disposição em fila. Nota-se a deformação das células, devido o diâmetro reduzido do vaso. As outras duas figuras (c e d), mostram o sangue em microvasos de  $12\text{-}20\mu\text{m}$  de diâmetro. Neste caso a região livre de células (região branca na micrografia), adjacente à parede do vaso é aparente e corresponde a uma camada de plasma que ocupa a região entre as células e as paredes do vaso (Cunha, 2003). As configurações em (c) e (d) representam uma configuração do tipo "zipper-célula". O escoamento perde a axissimetria e passa a ser tridimensional. A interação entre células é relevante e não pode ser desprezada.

é relevante em regiões de baixa taxa de cisalhamento e altas concentrações de glóbulos vermelhos. Por meio de experimentos em tubos de vidro Pries *et al.*, 1992, constatou que em tubos  $> 9\mu m$  a relação viscosidade-hematócrito não é linear como ocorre em tubos  $< 6\mu m$ . Essa transição é atribuída à mudança do regime de múltiplas células para o escoamento com glóbulos vermelhos enfileirados que o ocorre em capilares. Nessa região têm-se estudos de Secomb *et al.*, 1986, que analisam a influência do formato da célula em capilares na reologia do sangue. Em adição a membrana do glóbulo vermelho suporta tensões de flexão sem alteração de suas propriedades, mas tem limitações a tensões cisalhantes (Rand & Burton, 1964).

Em regimes de escoamento em microvasos maiores que o diâmetro do glóbulo vermelho não-deformado (diâmetros aproximadamente entre 10 e  $40\mu m$ ), a interação célula-célula é significativa e a deformação e orientação dos glóbulos vermelhos devem ser determinadas. Na pesquisa de Cristini, 2003, analisa-se a deformação e orientação sofrida pelos glóbulos vermelhos em microvasos por meio de uma simulação numérica de múltiplas escalas de modelos de células em microvasos. Em microvasos de diâmetro da ordem de  $100\mu m$  a deformação e orientação das células não são os principais parâmetros determinantes da reologia do sangue. Nessa escala Pries *et al.*, 1994, fizeram medições do perfil de velocidade da microcirculação *in vivo* e puderam perceber que a resistência do escoamento em microvasos é maior que o mensurado anteriormente em tubos de vidro. Essa diferença possivelmente é causada pela interação entre o sangue e a superfície interna do microvaso, não observada em experimentos *in vitro*. A redução da viscosidade do sangue em função do diâmetro do vaso em microvasos menores que  $300\mu m$  é um fenômeno estudado por Fahraeus & Lindqvist, 1931, e Fahraeus, 1929. Sabe-se que esse efeito é uma manifestação clássica da camada de plasma livre de células adjacente à parede do microvaso. Bishop *et al.*, 2001, determinaram por meio da análise do escoamento em vênulas da musculatura óssea que a formação da camada de plasma livre de célula em escoamento do sangue *in vivo* ocorre a baixas taxas de cisalhamento  $< 5.0s^{-1}$ .

O estudo reológico do sangue é de extrema relevância para a bio engenharia. Isso porque alterações causadas na reologia do sangue podem originar algumas doenças conhecidas (Baskurt, 2003). Como exemplo, observa-se, em uma variedade de estudos sobre doenças cardiovasculares e diabetes, o aumento da viscosidade do sangue

e aumento da agregação de glóbulos vermelhos (Chien *et al.*, 1987; Barnes & Willars, 1987). Tem-se também que doenças podem afetar a reologia do sangue criando altos níveis de turbulência, perda de carga, condições de escoamento bloqueado em que o microvaso pode ser danificado (Ku, 1997). Não somente, de acordo com Savina *et al.*, 2005, estudos em ratos mostraram que ratos com hemorragia cerebral severa possuíam uma viscosidade aparente do sangue 29% maior em relação a viscosidade aparente do sangue de ratos que não sofreram derrame.

## 1.1 Análise dimensional do escoamento do sangue na microcirculação

Nesta sessão é apresentada uma análise dimensional para identificar os principais parâmetros físicos do movimento de células em microvasos e mostrar que a microcirculação possui regime de baixos números de Reynolds sendo o escoamento dominado por efeitos viscosos. Usa-se um gradiente de pressão fisiológico típico de  $\Delta p = 60 \text{ mmHg}$  (Chandran, 2003) em um comprimento de  $\ell = 10 \text{ mm}$  na microcirculação. O plasma tem uma massa específica de aproximadamente  $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade  $\mu \approx 0.001 \text{ Ns/m}$ . Os glóbulos vermelhos têm aproximadamente  $90 \mu\text{m}^3$  de volume  $135 \mu\text{m}^2$  de área superficial. Na ausência de deformação, os glóbulos vermelhos assumem um formato de um disco bicôncavo de aproximadamente  $8$  e  $2 \mu\text{m}$ , veja Fig. 1.4.

Pode-se usar a lei de Poiseuille para estimar a taxa de cisalhamento em microvasos de tamanho típico igual a  $100 \mu\text{m}$  (Cunha, 2002). Portanto,

$$\dot{\gamma} = \frac{R\Delta P}{8\mu\ell} \sim 10^3 \text{ s}^{-1}. \quad (1.1)$$

Para uma escala típica de um glóbulo vermelho da ordem de  $10 \mu\text{m}$ , o número de Reynolds que caracteriza o escoamento do plasma é

$$Re = \frac{\rho\dot{\gamma}a^2}{\mu} \sim 0.1. \quad (1.2)$$

O resultado mostra que em geral as tensões viscosas dominam tensões inerciais no plasma e o escoamento na microcirculação pode ser tratado em baixos números de Reynolds.

A caracterização das propriedades mecânicas do sangue na microcirculação é realizada por meio da análise dos parâmetros adimensionais vinculados às tensões de superfície que atuam na camada dupla de fosfolípídeos da membrana plasmática da célula. As propriedades visco-elásticas da membrana têm sido exaustivamente estudadas por Skalak, 1976; Hochmuth & Waghgh, 1987; e são caracterizadas por quatro parâmetros materiais. São estes: módulo elástico de dilatação  $E_D \sim 0.5N/m$ , um módulo elástico de cisalhamento,  $E_S \sim 6 \times 10^{-6}N/m$ , um momento de flexão  $M_B \sim 2 \times 10^{-19}Nm$ , uma viscosidade cisalhante  $\mu_C \sim 10^{-6}Ns/m$ .

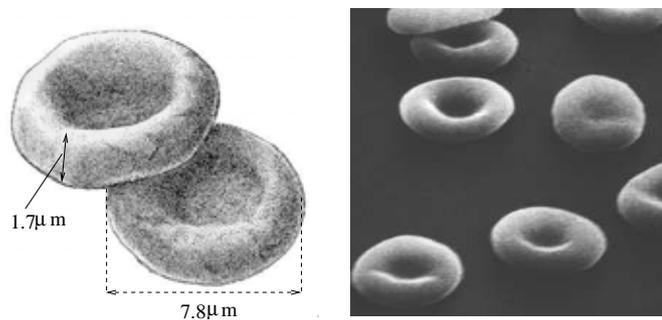


Figura 1.4: Geometria de glóbulos vermelhos em estado não-deformado.

Tabela 1.1: Parâmetros físicos adimensionais relevantes para caracterização do movimento de cápsulas ou células em capilares. Os valores numéricos apresentados na tabela correspondem a valores típicos do movimento de glóbulos vermelhos em micro-vasos, para um sangue em condições fisiológicas normais.

Parâmetro Dimensional	Significado Físico	Valor Típico
razão de viscosidade de membrana: $\lambda_S = \frac{\mu_c}{\mu}$	viscosidade relativa de membrana	$\lambda_S \sim 300$
razão de viscosidade citoplasmática: $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu}$	escoamento citoplasmático relativo	$\lambda_i \sim 10$
parâmetro elástico de cisalhamento: $C_S = \frac{\mu\dot{\gamma}a}{E_S}$	razão entre tensões viscosas e elásticas	$C_S \sim 0.5$
parâmetro de flexão: $C_B = \frac{\mu\dot{\gamma}a^3}{M_B}$	razão entre tensões viscosas e de flexão	$C_B \sim 100$
parâmetro de dilatação: $C_D = \frac{\mu\dot{\gamma}a}{E_D}$	razão entre tensões viscosas e de dilatação	$C_D \sim 10^{-5}$

Na Tab.1.1 a pequena magnitude de  $C_D$  indica que as tensões viscosas são muito pequenas para causar um efeito de dilatação na membrana dos glóbulos vermelhos. Esse resultado indica que a área superficial de um glóbulo vermelho permanece

invariante durante o escoamento. O fato de  $\lambda_S \gg \lambda_i$  indica que a viscosidade de membrana domina a viscosidade citoplasmática. Isto implica que a circulação interna do citoplasma é inibida pela viscosidade de membrana, tendo um pequeno efeito dinâmico no movimento do glóbulo vermelho e conseqüentemente na reologia do sangue. Esta conclusão tem o suporte dos resultados numéricos de Barthes-Biesel & Sgaier, 1985; Secomb & Hsu, 1996. A estimativa de  $C_S = O(1)$  indica que as tensões elásticas de cisalhamento são significantes. O parâmetro de flexão é alto, sugerindo tensões de flexão desprezíveis. Por outro lado, o caminho mais correto de se estimar esta tensão deveria ser por meio do raio de curvatura da membrana do glóbulo vermelho (Cunha, 2002, Carvalho *et al.*, 2007). Com esta observação, faz-se necessário definir um outro parâmetro alternativo para o efeito de flexão em termos do raio de curvatura,  $1/\kappa$ , ao invés da dimensão característica da célula. No presente contexto  $\kappa$  é uma curvatura característica, então  $C_B$  pode ser re-escrito na forma

$$C_B = \frac{\mu\dot{\gamma}}{M_B\kappa^3}.$$

Para um glóbulo vermelho deformado,  $\kappa$  pode ser muitas vezes maior do que  $1/a$ , implicando em  $C_B = O(1)$ . Este resultado indica que as tensões de flexão tornam-se importantes em regiões de alta curvatura. Conforme pode ser observado, está de acordo com as predições de Secomb *et al.*, 1986.

Em suma, o movimento de glóbulos vermelhos em microvasos poderia ser estudado considerando-se uma área de membrana constante e três parâmetros adimensionais: a razão de viscosidade de membrana  $\lambda_S$ , o parâmetro elástico de cisalhamento  $C_S$  e o parâmetro de flexão  $C_B$ .

É importante comentar que no capítulo 5 será apresentado um modelo microestrutural protótipo de uma emulsão com gotas de alta razão de viscosidade. As propriedades mecânicas como a capilaridade da célula, e a razão de viscosidades da membrana são consideradas nesse modelo e os valores adotados serão os mesmos discutidos nesta sessão para as propriedades mecânicas da célula. No caso do parâmetro de flexão o mesmo será desprezível considerando que a teoria usada envolve pequenas deformações.

## 1.2 Objetivos

Em vista do que foi apresentado, o objetivo da presente dissertação é focado no entendimento do escoamento do sangue na microcirculação. Para tanto, desenvolve-se o estudo do escoamento em tubos usando-se diferentes equações constitutivas de fluidos não-newtonianos para descrever a relação tensão-taxa de deformação no escoamento do sangue. Define-se a viscosidade intrínseca do sangue em função do diâmetro do microvaso em diferentes regimes da microcirculação. No caso do regime em capilares com célula em fila avalia-se a influência da agregação de células, do hematócrito na viscosidade intrínseca do sangue e variação da viscosidade intrínseca em função do raio adimensional do microvaso. A distribuição de células em microvasos, com a presença da camada livre de células, é investigada por meio do balanço de dois fluxos de células avaliados em um escoamento protótipo de sangue como sendo uma emulsão sujeita a cisalhamento simples com a presença de uma parede rígida. Considera-se nessa análise gotas aproximadamente esféricas de alta razão de viscosidade com a fase fluida (i. e. sofrem pequena deformação) que funcionam como protótipos de glóbulos vermelhos. Por fim, medidas experimentais da viscosidade intrínseca do sangue são relevantes para consolidar as teorias apresentadas e portanto um método de medição é proposto no trabalho levando-se em conta experimentos em tubos e usando-se diferentes fluidos não-newtonianos como solução poliméricas e emulsões.

Em regimes de escoamento da microcirculação para vasos de ordem de  $100\mu m$  considera-se que o sangue comporta-se aproximadamente como uma emulsão de gotas em baixa deformação devido às altas razões de viscosidade entre a membrana do glóbulo vermelho e o plasma. É importante adiantar que o modelo de uma emulsão de alta razão de viscosidade gota-fluido como protótipo do escoamento do sangue em vaso  $\leq 100\mu m$  foi suficiente para investigar os mecanismos que ocorrem na microcirculação, como a formação da camada de plasma livre de células adjacente à parede e a dependência da viscosidade intrínseca do sangue de parâmetros do escoamento em microvaso. Essa aproximação deveria ser interpretada como uma primeira tentativa de se estudar num contexto da mecânica dos fluidos os mecanismos relevantes que ocorrem no escoamento do sangue em microvasos. O problema é simplificado pelo fato de o escoamento ser tipicamente viscoso sem forças inerciais uma vez que o número de Reynolds calculado é baixo ( $Re < 1$ ). O resultado da análise de escala é aplicado nos demais estudos

desenvolvidos ao longo da dissertação, para adequar os cálculos à escala do escoamento na microcirculação que está sendo examinada.

Sabe-se que em microvasos de diâmetro maior que  $30\mu m$  um modelo contínuo já é capaz de reproduzir resultados que concordam com observações experimentais do escoamento do sangue em microtubos de vidro (Popel & Johnson, 2005). Portanto como uma primeira abordagem ao estudo do escoamento do sangue em microvaso no capítulo 3 usa-se modelo de fluido não-newtoniano contínuo, sem memória e sem diferenças de tensões normais para a descrição do movimento do sangue em microvasos. O microvaso é aproximado por um tubo de espessura infinitesimal de seção circular constante ou com seção cujo raio é função da coordenada longitudinal  $z$  no sentido de representar as irregularidades existentes no microvaso real. Tem-se um número considerável de estudos (e.g. Thomas, 1962, Gupta *et al.*, 1982) que exploram aspectos reológicos do sangue, considerando modelos contínuos que incluem efeitos da região livre de células próxima à parede do vaso e determinam a viscosidade intrínseca do sangue em função do diâmetro do vaso. Nesses estudos um ou mais parâmetros são envolvidos e devem ser obtidos por ajustes de dados experimentais.

De uma abordagem microhidrodinâmica, no capítulo 5, usa-se um modelo protótipo para o sangue baseado em duas equações constitutivas que descrevem uma emulsão diluída de alta razão de viscosidade de gota em relação ao meio fluido. O escoamento é resolvido para dois fluidos imiscíveis escoando em microvaso de seção transversal circular. O número de capilaridade é o principal parâmetro do estudo e pode-se observar que para baixos valores desse parâmetro a viscosidade intrínseca do protótipo do sangue é constante com a taxa de cisalhamento como um comportamento típico de um fluido newtoniano equivalente. Valores moderados do número de capilaridade da ordem da unidade ( $Ca \sim 1$ ) resultam em um decréscimo da viscosidade intrínseca, caracterizando o comportamento de um fluido pseudo-plástico, típico do sangue mesmo em regimes de pequenas deformações de células. Esse fenômeno ocorre porque para uma certa taxa de cisalhamento, as gotas da emulsão de alta razão de viscosidade deformam-se e orientam-se na direção do escoamento reduzindo a difusão de quantidade de movimento entre as camadas adjacentes do fluido. Esse comportamento também é observado no sangue em condições fisiológicas normais.

Para o estudo da formação da camada livre de células em microvaso, no

capítulo 7 avalia-se o balanço dos fluxos migratório e difusivo de células que dá origem à migração transversal líquida de células na direção do centro do microvaso e a consequente formação da camada de plasma livre de células. Determina-se a solução da equação de distribuição de partículas em regime permanente e transiente usando-se um método de similaridade. No caso, o sangue é descrito novamente como uma emulsão diluída (protótipo do sangue) em que os glóbulos vermelhos são modelados por gotas, aproximadamente esféricas, de alta razão de viscosidade com relação ao plasma. Para o cálculo do fluxo de gotas, protótipos de células, na direção do centro do tubo, determina-se a velocidade de migração de uma gota devido a sua interação com uma parede rígida em um escoamento do tipo cisalhante simples. O fluxo difusivo de células na direção radial é calculado pela difusão hidrodinâmica de gotas causada por colisões aleatórias irreversíveis de pares de gotas. Como resultado principal propõe-se uma teoria para o cálculo da espessura da camada livre de células, bem como o tempo de evolução da respectiva camada, o comprimento de desenvolvimento da camada livre e a distribuição de células em relação à distância da parede do microvaso.

Para consolidar o conhecimento envolvido na descrição do movimento do sangue na microcirculação, no capítulo 8, um procedimento experimental de escoamentos em tubos de 2 e 5mm de diâmetro interno com diferentes fluidos complexos como solução polimérica e emulsões foi proposto. Essa investigação forneceu informações práticas relevantes e a familiarização com uma metodologia experimental para medições da viscosidade aparente do sangue na microcirculação. Os experimentos foram realizados em escala milimétrica com emulsão, soluções poliméricas e água e as viscosidades desses fluidos foram determinadas segundo três diferentes abordagens. No aparato experimental são usados tubos de aço com os diâmetros internos já citados que permitem explorar diferentes regimes de escoamento. Dessa forma, apresenta-se uma proposta preliminar experimental para a medição da viscosidade intrínseca do sangue em escoamento com gradiente de pressão (escoamento em tubo).

O objetivo geral da pesquisa trata do entendimento do escoamento do sangue, principalmente de alguns fatores e propriedades mecânico-reológicas na microcirculação. Portanto a contribuição relevante do trabalho é a proposta de um estudo fenomenológico sistemático que permite prever e entender o comportamento do sangue em diferentes condições de escoamento em regime de microcirculação. Dessa maneira

determina-se o comportamento de quantidades como o hematócrito, o número de capilaridade e a distribuição de células do sangue além de sua relação com doenças que afetam a fisiologia e características mecânicas do sangue como a anemia, a hipoglicemia, a trombose, o câncer de células, entre outras doenças.

Para se atingir tais resultados, procurou-se realizar um estudo criterioso, com base no desenvolvimento dos objetivos específicos descritos a seguir

### 1.2.1 Objetivos Específicos

A seguir são apresentados os objetivos específicos da presente dissertação de mestrado

- Estudar as propriedades mecânicas de glóbulos vermelhos predominantes no escoamento do sangue na microcirculação por meio de uma análise de escala.
- Determinar por meios analíticos a viscosidade intrínseca do sangue considerando o sangue um fluido newtoniano generalizado do tipo Casson. A dependência da viscosidade intrínseca do sangue com o raio do microvaso e o efeito de irregularidades na parede do microvaso são também examinados.
- Calcular a viscosidade intrínseca do sangue escoando em capilares por meio de um modelo que considera o escoamento periódico e axissimétrico em fila de células com formato parabolóide e usando a teoria da lubrificação. Estimar o valor da viscosidade intrínseca considerando-se a velocidade média das células no tubo, distância entre as mesmas e diâmetro do tubo. Examinar o efeito da agregação de glóbulos vermelhos na reologia do sangue e da variação do raio do microvaso.
- Calcular a viscosidade intrínseca do sangue por meio de modelo constitutivo protótipo de sangue correspondendo a uma emulsão diluída de gotas aproximadamente esféricas de alta razão de viscosidade, que sofrem pequenas deformações em função do diâmetro do microvaso, da fração volumétrica dos glóbulos vermelhos e do número de capilaridade.
- Avaliar a espessura da camada livre de células para um escoamento permanente levando em conta à migração transversal de protótipos de células para o centro do tubo devido a presença da parede do microvaso e o fluxo difusivo de células para

as regiões externas do tubo, causado pela difusividade hidrodinâmica das gotas. Calcular a distribuição das gotas protótipos de glóbulos vermelhos em regime transiente por meio de uma solução similar da equação diferencial não-linear de distribuição de gotas em escoamento cisalhante na presença de uma parede rígida. Estimar a evolução temporal da camada livre de células para diferentes valores das propriedades mecânicas do sangue e parâmetros físicos como o número de Peclet do processo difusivo.

- Apresentar uma metodologia experimental para medição da viscosidade intrínseca do sangue em escoamentos em tubo. A execução de ensaios preliminares de escoamentos em tubo usando fluidos como água, emulsão, solução polimérica.

## Capítulo 2

# Equações de balanço e equações constitutivas

Neste capítulo será introduzida a fundamentação teórica para a construção de modelos contínuos do sangue em tubos. Apresentam-se as equações básicas que governam a dinâmica do escoamento, as equações constitutivas e peculiaridades dos modelos de fluidos não-newtonianos puramente viscosos.

### 2.1 Equações de balanço para um meio contínuo

Nesta seção serão apresentadas as equações de balanço de massa e balanço de quantidade de movimento que governam o movimento de um meio contínuo.

Para um meio contínuo a conservação da massa na forma diferencial é dada por Batchelor, 1967:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

reescrevendo-se a mesma equação em termos da taxa de variação da massa específica, tem-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

em que  $\mathbf{u}$  é o campo de velocidade Euleriano do movimento e  $\rho$  é massa específica do fluido.

Assumindo que o fluido é incompressível a Eq. 2.1, reduz-se a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.3)$$

A equação geral da quantidade de movimento para um meio contínuo postulada segundo Cauchy (Batchelor, 1967), é dada por:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{B} \quad (2.4)$$

em que  $\frac{D}{Dt}$  é a derivada material que corresponde a uma taxa de variação vista por um observador que translada com a partícula fluida,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões e  $\mathbf{B}$  é um vetor força de campo por unidade de massa. O termo  $\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ , representa a força de inércia por unidade de volume e  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  denota o termo de forças superficiais por unidade de volume.

## 2.2 Equações constitutivas

Para o fechamento da descrição do movimento de um fluido é necessário estabelecer também a caracterização do material em termos de uma equação constitutiva. Essa equação relaciona o tensor de tensões com o estado de configuração do fluido, podendo ser, não somente, função das propriedades materiais do fluido mas também função do gradiente de velocidade do escoamento.

Toda equação constitutiva deve obedecer ao princípio de invariância material ao referencial do observador. Dada uma translação ou rotação do referencial (transformação homogênea), a equação constitutiva deve conservar sua forma funcional. Em outras palavras, seja  $\mathbf{Q}(t)$  um tensor ortogonal então  $\boldsymbol{\tau}$  é objetivo quando

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (2.5)$$

em que  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  é o valor de  $\boldsymbol{\tau}$  em outro referencial. A equação constitutiva para o tensor de tensão de um fluido de uma forma geral é escrita como a equação a seguir

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

em que  $p$  é a pressão estática do fluido,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  é a parte do tensor de tensões associada com o movimento ou desvio do equilíbrio. Para fluidos newtonianos a tensão  $\boldsymbol{\tau}$  pode ser interpretada como a contribuição viscosa do tensor de tensões associada tanto ao cisalhamento quanto à expansão volumétrica. Em geral  $\boldsymbol{\tau}$  é calculado pela equação a seguir

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}^2, \dots)_{t' \leq t}. \quad (2.7)$$

A Eq. 2.7 possui as seguintes propriedades:

1. A tensão  $\boldsymbol{\tau}$  não depende apenas dos valores calculados em um instante de tempo  $t$ , mas pode depender de toda a história de deformação do fluido desde um instante inicial  $t'$  ao instante atual  $t$ . Nesse caso,  $\boldsymbol{\tau}$  se anularia se e somente se  $\langle \nabla \mathbf{u} \rangle$  tiver valor nulo em um período anterior maior ou igual a  $(t - t')$ , característica de fluidos lineares.
2. Na ausência de torques induzidos por forças magnéticas  $\boldsymbol{\tau}$  é simétrico.

No caso de um fluido instantâneo e sem torques magnéticos internos, tem-se a equação constitutiva

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} \mathbf{D} \text{ ou } \tau_{ij} = \eta_{ijkl} D_{kl}, \quad (2.8)$$

em que  $\boldsymbol{\eta}$  é um tensor de quarta ordem e  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação que corresponde à parte simétrica do gradiente de velocidade. O tensor  $\nabla \mathbf{u}$  pode ser decomposto em uma parte simétrica e anti-simétrica, como qualquer tensor de segunda ordem.

Desta maneira

$$\nabla \mathbf{u} = \underbrace{\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T]}_{\mathbf{W}} \quad (2.9)$$

Mostra-se, em cursos de Mecânica dos Meios Contínuos (Cunha, 2004), que o tensor  $\mathbf{W}$  está associado com a taxa de rotação das partículas fluidas no escoamento (vorticidade).

Da relação de um tensor anti-simétrico com seu vetor dual

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{a}, \quad (2.10)$$

em que  $\boldsymbol{\xi} = 2\boldsymbol{\omega}$  é a vorticidade do escoamento associada ao vetor dual de  $\mathbf{W}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular. O tensor  $\mathbf{W}$  não obedece ao princípio da invariância a mudança de referencial

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(t) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{b}(t)$  representa uma translação e  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$  uma rotação de corpo rígido, respectivamente;  $\mathbf{x}$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$  denotam o sistema de referência inicial e o novo sistema de referencial respectivamente,  $\mathbf{Q}$  é um tensor ortogonal. O tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , em contraste ao tensor  $\mathbf{W}$  é uma quantidade objetiva do escoamento, ou seja,

$$\mathbf{D}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (2.12)$$

em que  $\tilde{\mathbf{D}}$  é o tensor taxa de deformação expresso no novo sistema de referencial.

Para o caso em que o fluido é um material isotrópico, as componentes do tensor viscosidade, no caso  $\boldsymbol{\eta}$  são completamente invariantes com a rotação de eixo ou mudança de direção, portanto:

$$\eta_{ijkl} = \bar{\eta}_{ijkl}. \quad (2.13)$$

Agora,  $\eta_{ijkl}$  pode ser escrito por um tensor isotrópico na forma mais geral

$$\eta_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (2.14)$$

em que  $\lambda, \beta, \gamma$  são constantes materiais do fluido. Assim a Eq. 2.8 pode ser reescrita como

$$\tau_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}) D_{km} = \lambda \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu D_{ij}, \quad (2.15)$$

em que  $2\mu = \beta + \gamma$ , ou na forma compacta

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (2.16)$$

Portanto

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (2.17)$$

Tomando-se o traço de  $\boldsymbol{\sigma}$  da Eq. 2.17, tem-se

$$\sigma_{kk} = -3p + 3\lambda D_{kk} + 2\mu D_{kk}, \quad (2.18)$$

portanto

$$p_m = -\frac{\sigma_{kk}}{3} = p - \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.19)$$

em que  $p_m$  é a pressão mecânica. Define-se  $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  tal que a Eq. 2.17 pode ser reescrita na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{-p_m \mathbf{I}}_{\text{Isotrópico}} + 2\mu \underbrace{\left( \mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right)}_{\text{Deviatório}}. \quad (2.20)$$

Denomina-se  $\kappa$  como o segundo coeficiente de viscosidade de um fluido instantâneo e isotrópico. Essa constante material é considerada nula ( $\lambda = -2/3\mu$ ), salvo em escoamentos compressíveis de altas frequências. Para o caso de fluido incompressível,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  obtém-se como equação constitutiva de um fluido linear incompressível

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (2.21)$$

e na ausência de movimento ou no caso de escoamentos de fluidos invíscidos tem-se simplesmente

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I}. \quad (2.22)$$

### 2.3 Modelos constitutivos de fluidos não-newtonianos puramente viscosos, Reiner-Rivlin

A seguir apresentam-se modelos de fluidos conhecidos como fluidos de Reiner-Rivlin aplicáveis em condições de taxas de cisalhamento moderadas. Um fluido puramente viscoso é um fluido em que a tensão é função do gradiente de velocidade instantâneo e portanto não dependem do histórico de deformação do fluido. Pelo princípio da objetividade pode-se concluir que o tensor que descreve a relação entre o tensor de tensões e o gradiente de velocidade de um fluido escoando  $\boldsymbol{\tau}$ , deve ser função apenas da parte simétrica do tensor gradiente de velocidade, portanto

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{F}(\mathbf{D}). \quad (2.23)$$

Para uma  $\mathcal{F}$  monotônica e considerando o teorema de Cauchy-Hamilton que diz que para qualquer tensor de segunda ordem  $\mathbf{A}$  satisfaz a equação característica a seguir

$$\mathbf{A}^3 - I_1 \mathbf{A}^2 + I_2 \mathbf{A} - I_3 \mathbf{I} = 0, \quad (2.24)$$

tem-se que  $\mathbf{A}^n$ , em que  $n > 2$  pode ser expresso como uma função de  $\mathbf{A}^2$ . Portanto  $\boldsymbol{\tau}$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}^2$  na seguinte forma

$$\boldsymbol{\tau} = c_0(I_1, I_2, I_3)\mathbf{I} + c_1(I_1, I_2, I_3)\mathbf{D} + c_2(I_1, I_2, I_3)\mathbf{D}^2. \quad (2.25)$$

Aqui  $c_n$  são funções chamadas de constantes materiais ou coeficientes materiais,  $I_n$  são invariantes principais do tensor  $\mathbf{D}$ , calculados por

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{D}) \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{D})^2 - \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}) \\ I_3 &= \det(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para o caso de fluidos lineares ou newtonianos o modelo generalizado de fluido puramente viscoso reduz-se a

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \\ c_1 &= 2\mu \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para o caso de cisalhamento simples  $\mathbf{u} = (\dot{\gamma}x_2)$

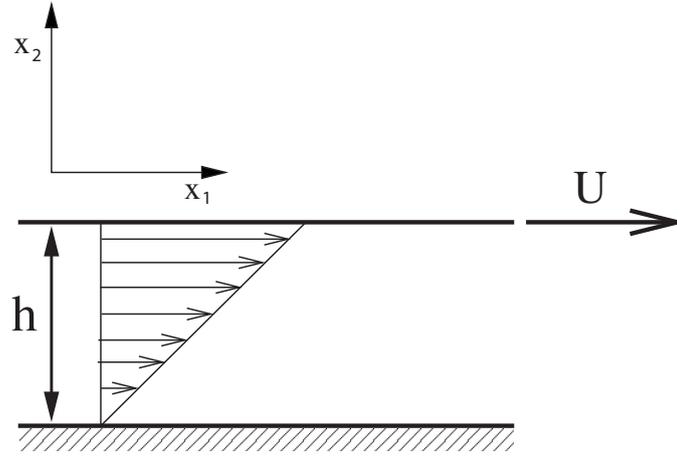


Figura 2.1: Ilustração de um cisalhamento simples entre placas paralelas.

$$\tau_{12} = \mu \dot{\gamma} = 2\mu D_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad (2.28)$$

em que  $\tau_{12}$  é a tensão cisalhante,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido,  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento  $\sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}}$ ,  $D_{12}$  é a componente do tensor taxa de deformação e  $u_1$  é a velocidade do escoamento na direção  $x_1$ . Para o esquema do cisalhamento simples, mostrado na Fig.2.1,  $\dot{\gamma} = U/h$ . A Eq. 2.28 é conhecida como lei da viscosidade de Newton e o fluido que obedece a essa relação linear entre tensão e taxa de deformação é chamado newtoniano.

Para fluidos conhecidos como newtonianos generalizados tem-se que

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= \mu(I_1, I_2) = \mu(\dot{\gamma}) \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que  $\mu(\dot{\gamma})$  descreve o comportamento da viscosidade dinâmica do fluido em função da taxa de cisalhamento do escoamento calculada por

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2(I_1^2 - 2I_2)} = \sqrt{2\text{tr}(\mathbf{D}^2)} = \sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}} \quad (2.30)$$

A equação constitutiva para escoamentos unidirecionais de fluidos newtonianos generalizados é dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (2.31)$$

em que  $\mu(\dot{\gamma})$  é muitas vezes denotada como sendo a viscosidade aparente do fluido. No caso de escoamentos tridimensionais

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \quad (2.32)$$

A seguir serão apresentados alguns modelos de fluidos não newtonianos generalizados bastante conhecidos na mecânica dos fluidos, que serão usados no presente trabalho.

- **Fluidos de Ostwald (Fluido “Power Law”)**

Este modelo é um dos mais comumente usados na engenharia para simulação de escoamentos de soluções poliméricas entre outros fluidos elásticos. O uso contínuo desse modelo na indústria se justifica pela facilidade matemática de se obter soluções de escoamentos de fluidos pseudo-plásticos que atendem a uma série de aplicações práticas. A relação tensão-taxa de cisalhamento é descrita por (Bird *et al.*, 1987)

$$\tau = c\dot{\gamma}^n = c\dot{\gamma}^{n-1} \cdot (\dot{\gamma}). \quad (2.33)$$

Vale notar que a viscosidade aparente de cisalhamento é definida por

$$\mu(\dot{\gamma}) = c\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.34)$$

As constantes materiais  $c$  e  $n$ , são obtidas de observações experimentais, respectivamente associadas a um coeficiente de difusão (viscosidade) e um grau de desvio do comportamento linear do fluido. Para  $n = 1$  e  $c = \mu$ , o modelo reduz-se a lei da viscosidade de Newton, para valores de  $n > 1$  o modelo descreve um fluido “dilatante” ou “shear thickening”, enquanto para  $n < 1$  o fluido descrito possui um comportamento próximo ao de um pseudo-plástico ou “shear thinning” (comportamento mais comum). A Fig. 2.2 mostra o esboço do comportamento de fluidos não-newtonianos segundo a lei de potência de Ostwald.

- **Fluido de Carreau - Yasuda**

O modelo de fluido Carreau-Yasuda é mais completo que o de fluido *Power Law*, porém as soluções de escoamentos usando esse modelo são na maioria obtidas por simulações numéricas. Uma das vantagens desse modelo é que o mesmo recupera os dois limites assintóticos de fluido newtoniano em regimes de  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  (baixo cisalhamento) e  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$  (altas taxas de cisalhamento). A equação constitutiva que descreve a viscosidade aparente desse fluido é expressa na forma

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)[1 + (\theta\dot{\gamma})^a]^{n-1/a}, \quad (2.35)$$

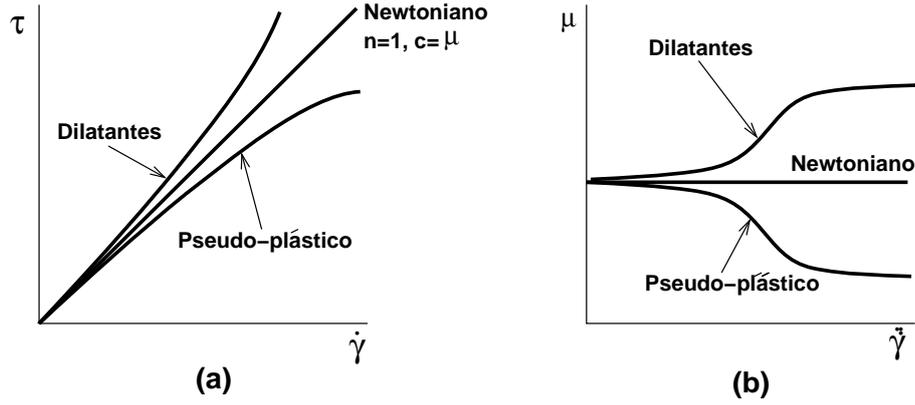


Figura 2.2: Comportamento de um fluido não-newtoniano viscoso com comportamento *Power Law*. (a) Tensão de cisalhamento em função da taxa de cisalhamento, (b) Viscosidade aparente em função da taxa de cisalhamento.

em que o parâmetro  $\mu_0$  é a viscosidade newtoniana a baixas taxas de cisalhamento,  $\mu_\infty$  é a viscosidade newtoniana a altas taxas de cisalhamento,  $\theta$  é uma constante de tempo do material,  $n$  é o expoente power law do fluido e  $a$  é um parâmetro adimensional que descreve a região de transição entre a taxa de cisalhamento nula e a região descrita pelo modelo power law, na curva experimental de  $\mu$  em função de  $\dot{\gamma}$  (Bird *et al.*, 1987).

É importante notar que no limite  $\mu(\dot{\gamma}) \gg \mu_\infty$ ,  $\mu_0 \gg \mu_\infty$  e para pequenos valores de  $\theta$ , a Eq. 2.35 reduz-se, após uma expansão em série binomial a

$$\mu(\dot{\gamma}) \sim \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ 1 + \frac{n-1}{a} \theta^a \dot{\gamma}^a \right] = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + k \dot{\gamma}^a], \quad (2.36)$$

em que  $k = (n-1)\theta^a/a$ . Em adição, considerando-se que  $\mu_0 \gg \mu_\infty$  e  $\mu \ll \mu_\infty$ , conforme mencionado, tem-se que

$$\mu(\dot{\gamma}) \sim \mu_0 + \mu_0 k \dot{\gamma}^a = \mu_0 + C \dot{\gamma}^a \Rightarrow \eta(\dot{\gamma}) = C \dot{\gamma}^a \quad (2.37)$$

em que  $C = \mu_0 k$ . A Eq. 2.37 corresponde exatamente a expressão da Eq. 2.34, para  $a = n-1$  e  $\mu(\dot{\gamma}) = \eta(\dot{\gamma}) - \mu_0$

### • Fluido de Bingham

Materiais modelados como sendo fluidos de Bingham comportam-se como sólidos quando submetidos a tensões de cisalhamento inferiores à tensão de aplicação  $\tau_0$ . Tensão esta que corresponde a tensão mínima necessária para vencer a estrutura de agregação interna do fluido e produzir escoamento. Pomadas em geral, pastas

de dentes, tintas e certas lamas são exemplos de fluidos Bingham. Nesse contexto define-se  $\tau_0$  como sendo uma tensão crítica de escoamento. A equação constitutiva que descreve o comportamento de fluido não-newtoniano com essas características é dada por

$$\begin{aligned} \tau &= \mu\dot{\gamma} + \tau_0 & \text{para } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{para } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que  $\tau$  é a tensão de cisalhamento do escoamento. Em termos da viscosidade aparente, o modelo constitutivo pode ser também expresso na forma:

$$\begin{aligned} \mu(\dot{\gamma}) &= \mu + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{para } \tau > \tau_0 \\ \mu(\dot{\gamma}) &= \infty & \text{para } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

A Fig. 2.3 mostra um esboço típico da relação  $\tau$  em função da taxa de cisalhamento  $\dot{\gamma}$  para fluidos de Bingham.

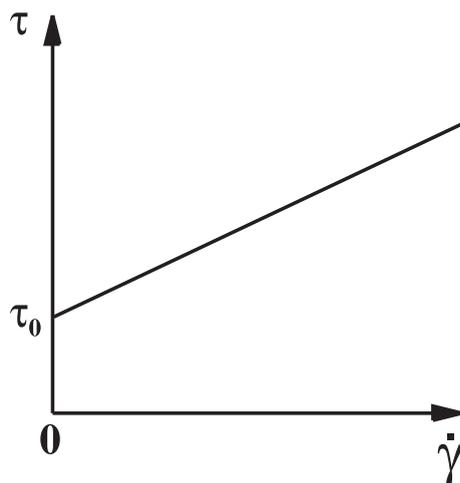


Figura 2.3: Esboço da relação  $\tau$  em função da taxa de cisalhamento  $\dot{\gamma}$  de um fluido de Bingham.

- **Fluido de Casson**

O modelo de fluido de Casson também descreve um fluido que escoar se e somente se a tensão cisalhante é superior à tensão de aplicação  $\tau_0$ . Este modelo na verdade é uma extensão do modelo de Bingham com uma contribuição “power law” particular  $c\dot{\gamma}^{1/2}$  definida como uma média geométrica das duas contribuições limites,  $\dot{\gamma} \ll 1$  e  $\dot{\gamma} \gg 1$ . A proposta de equação constitutiva para esse modelo é dada por

$$\begin{aligned} \tau &= \mu\dot{\gamma} + 2\sqrt{\mu\tau_0}\sqrt{\dot{\gamma}} + \tau_0 & \text{para } \tau > \tau_0 \\ \tau &= 0 & \text{para } \tau < \tau_0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Vale mencionar que esse é um dos modelos heurísticos mais usados para descrever o comportamento do sangue. As constantes envolvidas estão relacionadas com a estrutura do sangue no escoamento (e.g. formação de agregados). Com base na Eq. 2.40 pode-se escrever o modelo em termos da viscosidade aparente

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu(\phi) + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \frac{\varphi_s}{\sqrt{\dot{\gamma}}}, \quad (2.41)$$

em que  $\mu(\dot{\gamma})$  é a viscosidade aparente,  $\mu(\phi)$  denota a viscosidade do sangue em altas taxas de cisalhamento medida em um viscosímetro de Couette como função do hematócrito  $\phi$ , em geral, possui um valor de pequena ordem de magnitude para o sangue livre de patologia. O termo  $\varphi_s = 2\sqrt{\mu}\sqrt{\tau_0}$  é a contribuição que domina a viscosidade aparente em moderadas taxas de cisalhamento a exemplo do que ocorreu na microcirculação onde o escoamento possui taxas de cisalhamento intensas nas regiões da parede dos microvaso.

A equação de Casson também tem sido utilizada para a descrição do comportamento de suspensões de partículas esféricas em soluções de polímeros (Bird *et al.*, 1987). Um modelo de fluido newtoniano generalizado como uma extensão do modelo de Casson pode ser descrito pela seguinte equação constitutiva, a  $\tau > \tau_0$

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu(\phi) + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + C\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.42)$$

- **Herchel-Buckley**

O modelo de fluido Herchel-Buckley consiste também em uma das variações do modelo de Bingham. A diferença básica é que o termo newtoniano  $\mu\dot{\gamma}$  é substituído por uma descrição mais geral de fluido “power law”. Portanto

$$\begin{aligned} \tau &= c\dot{\gamma}^n + \tau_0 & \text{para } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{para } \tau < \tau_0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

ou em termos da viscosidade aparente

$$\begin{aligned} \mu(\dot{\gamma}) &= c\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{para } \tau > \tau_0 \\ \mu(\dot{\gamma}) &= \infty & \text{para } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

O referido modelo tem sido largamente usado para descrever o comportamento de lamas de perfuração da indústria petroquímica.

## 2.4 Fluidos dependentes do tempo

No caso de fluidos dependentes do tempo, a tensão no instante  $t$  pode depender da história de deformação desde o instante  $t' \leq t$ . Fluidos que seguem modelos do tipo Maxwell, conhecidos como visco-elásticos, dependem da história do escoamento. Sendo assim, além da dependência da viscosidade ao cisalhamento são caracterizados também por uma constante de tempo ou tempo de relaxação como uma constante material que mede a memória desses fluidos. Do ponto de vista da visco-elasticidade linear, um fluido de Maxwell pode ser caracterizado por meio de uma contribuição viscosa em série com uma contribuição elástica, conforme mostrado na Fig. 2.4. A associação dessas duas contribuições resulta na descrição geral do modelo de Maxwell, expresso por

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_v \Rightarrow \mu \dot{\gamma} = \frac{d\tau}{dt} \theta + \tau, \quad (2.45)$$

em que  $\theta = \mu/G$  é uma constante definida como o tempo de relaxação do fluido (ou tempo intrínseco do material). Aqui  $G$  é a constante de Young. Além do número de

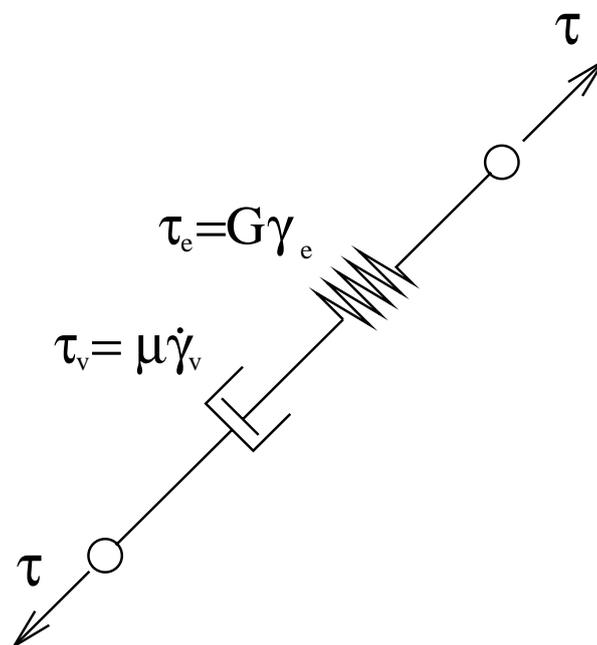


Figura 2.4: Esquema estrutural do modelo de fluido visco-elástico de Maxwell.

Reynolds, o número de Deborah ( $De$ ), definido como

$$De = \dot{\gamma}_0 \theta \quad (2.46)$$

é o novo parâmetro que surge no estudo de escoamentos de líquidos elásticos. Esse parâmetro envolve a razão entre o tempo de relaxação do fluido  $\theta$  e o tempo carac-

terístico do escoamento  $1/\dot{\gamma}_0$ , em que  $\dot{\gamma}_0$  é a taxa de cisalhamento do escoamento. Esse parâmetro pode ser interpretado como uma medida da memória do material ou de efeitos elásticos do escoamento. Uma adimensionalização da Eq. 2.45 leva a:

$$\dot{\gamma}^* = \tau^* + De \frac{d\tau^*}{dt^*}, \quad (2.47)$$

em que  $\tau^* = \tau/\mu\dot{\gamma}_0$ ,  $t^* = t\dot{\gamma}_0$  e  $\dot{\gamma}^* = \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0$ . No limite em que  $De \ll 1$  o material se comporta como um fluido newtoniano, para valores de  $De \rightarrow \infty$ , o material se comporta como sólido elástico enquanto que para regimes de  $De \sim 1$  são característicos de fluidos visco-elásticos. Em se tratando de aplicações práticas, um valor de  $De \sim 10$  já seria muito elevado. Esta condição poderia levar a uma completa degradação de macromoléculas no caso de soluções poliméricas.

A Eq. 2.45 pode ser resolvida como uma equação diferencial ordinária com um fator integrante igual a  $e^{t\mu/De}$ . A solução de  $\tau^*$  é calculada pela integral a seguir

$$\tau^*(t^*) = \frac{2}{De} \int_{-\infty}^{t^*} e^{-(t^*-t')/De} \dot{\gamma}(t') dt' \quad (2.48)$$

que no caso tridimensional possui a seguinte forma

$$\boldsymbol{\tau}^*(t^*) = \frac{2}{De} \int_{-\infty}^{t^*} e^{-(t^*-t')/De} \mathbf{D}(t') dt'. \quad (2.49)$$

Note na integral acima que se  $t^* \gg t'$  o valor da taxa de cisalhamento no tempo  $t'$  não é relevante para o valor de  $\tau^*(t^*)$ . Sendo assim, o termo exponencial contido na integral da Eq. 2.49 e transcrito a seguir

$$\int_{-\infty}^{t^*} e^{-(t^*-t')/De} dt' \quad (2.50)$$

é denominado módulo de relaxação do fluido de Maxwell e pode ser interpretado como um peso que é menor quanto maior a distância do tempo presente  $t^*$  em relação ao tempo passado  $t'$ . Dessa forma o fluido apresenta uma espécie de memória em que a tensão cisalhante depende de toda a história do escoamento desde  $t'$  a  $t^*$ .

Com base na Eq. 2.49 os modelos visco-elásticos podem ser generalizados em termos do tensor taxa de deformação pela equação a seguir

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \int_{-\infty}^t F(t-t') \mathbf{D}(t') dt'. \quad (2.51)$$

em que  $F(t-t')$  é o módulo de relaxação do fluido.

### 2.4.1 Modelo com viscosidade extensional

Soluções poliméricas possuem em geral um comportamento não-newtoniano. As macro-moléculas do polímero quando estiradas pelo escoamento alteram completamente o tensor de tensões do fluido devido à anisotropia micro-estrutural e deformação produzida pela elongação imposta pelo escoamento. As moléculas tendem a se estirar sob a influência da parte extensional de um escoamento. Devido à configuração estendida das macro-moléculas longas, o tensor de tensões se torna anisotrópico. A contribuição da configuração de macro-moléculas estiradas para o tensor de tensões depende da orientação dessas partículas com as linhas de corrente do escoamento. Tem-se mostrado que poucos ppm de um polímero de alto peso molecular pode causar mudanças drásticas em escoamentos com  $De \sim 1$ , em que as macromoléculas são estiradas praticamente como partículas anisotrópicas (Absi *et al.*, 2006; Cunha & Andreotti, 2007).

Um modelo constitutivo que considera os efeitos de partículas anisotrópicas num escoamento, pode ser descrito como a seguir

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}), \quad (2.52)$$

em que

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) = \mu_e(\mathbf{p} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}\mathbf{p}, \quad (2.53)$$

em que  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p})$  é a contribuição ao tensor de tensões devido à presença das partículas anisotrópicas. Aqui  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{p}$  representa a taxa de deformação das macromoléculas ao longo da direção  $\mathbf{p}$ ,  $\mu_e$  é a viscosidade extensional relacionada a extensibilidade de aditivos (Cunha & Andreotti, 2007), como moléculas poliméricas,  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação e  $\mathbf{p}$  é o vetor direcional que coincide com a direção de extensão da molécula. Este modelo é de grande interesse para o estudo de redução de arrasto de escoamento do sangue usando macromoléculas de DNA como agentes redutores.

No capítulo 3 da presente dissertação, apresentaremos soluções de escoamentos no contexto do sangue usando modelos de fluidos viscosos.

## 2.5 Escoamentos em tubos

Nesta sessão serão apresentadas algumas variedades de escoamentos na presença de gradiente de pressão explorados nesta dissertação.

### 2.5.1 Escoamento axissimétrico em tubo

Seja um escoamento unidirecional em regime permanente no interior de um tubo de seção circular. O fluido é considerado incompressível e está sujeito a um gradiente de pressão constante ao longo do comprimento  $L$  do tubo. A Fig. 2.5(a) ilustra o esquema da geometria envolvida no escoamento em tubo de raio interno  $R$  e  $L \gg R$ .

Considera-se no escoamento de fluidos newtonianos em tubos um comprimento de desenvolvimento da camada limite viscosa (Conforme ilustrado na Fig. 2.6). Após esse comprimento de tubo o escoamento apresenta um perfil de velocidade desenvolvido ao longo em tubo. Para fluidos não-newtonianos como emulsões e soluções poliméricas, além do desenvolvimento da camada limite viscosa existe um comprimento de desenvolvimento da microestrutura do fluido. No caso de emulsões tem-se um comprimento necessário para que as gotas da emulsão se deformem e se orientem na direção do escoamento e também para que a distribuição de concentração na seção transversal do tubo atinja um regime permanente. Em termos práticos esses mecanismos de migração de partículas associada com gradientes de tensões de cisalhamento em tubo e deformação e orientação de partículas podem levar a comprimentos de desenvolvimentos bem distintos aqueles estimados para fluidos newtonianos.

O comprimento de desenvolvimento de fluidos newtonianos em escoamento laminar ( $0 < Re < 2000$ ) pode ser calculado pela equação empírica a seguir (Blevins, 1984)

$$L/D = 0.061Re + \frac{0.72}{0.04Re + 1} \quad (2.54)$$

Em escoamentos em tubos curvos, dependendo do regime, pode haver componentes tanto axial quanto radial de velocidade. Como resultado do balanço entre

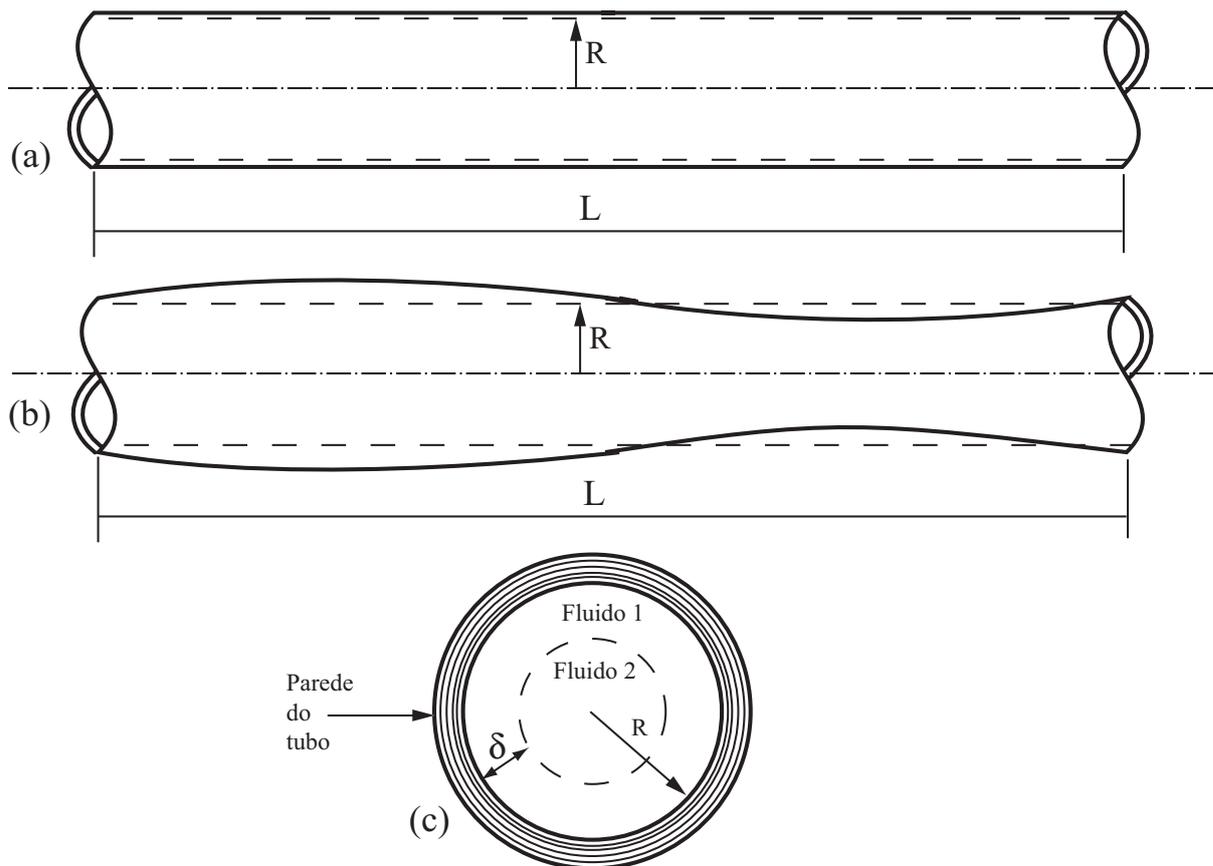


Figura 2.5: Ilustração das quantidades geométricas envolvidas na descrição do escoamento unidirecional no interior de um tubo (a) com sessão transversal constante, (b) com raio com dependência  $\sin(z)$  e (c) disposição de dois fluidos em um escoamento de núcleo (*Core flow*) em tubo.

a tendência da quantidade de movimento do fluido em se manter em movimento retilíneo e a força centrípeta exercida pelas paredes do tubo no fluido, o escoamento pode apresentar um perfil de velocidade helicoidal (Blevins, 1984).

O escoamento radial proeminente da curvatura do tubo é função do número de Dean ( $Dn$ , calculado pela equação abaixo

$$Dn = Re \left( \frac{D}{d} \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

em que  $D$  é o diâmetro do tubo e  $d$  o diâmetro de curvatura do tubo. Para números de Dean menores que 10, a componente radial é desprezível e pode-se considerar que o escoamento é puramente axial (Blevins, 1984). Para experimentos em que há mudança de direção de escoamento, como no caso do experimento de escoamento em tubo com esvaziamento de tanque, o número de Dean é relevante para garantir o regime que se está estudando. Mesmo a baixos números de Reynolds, escoamentos com valores do

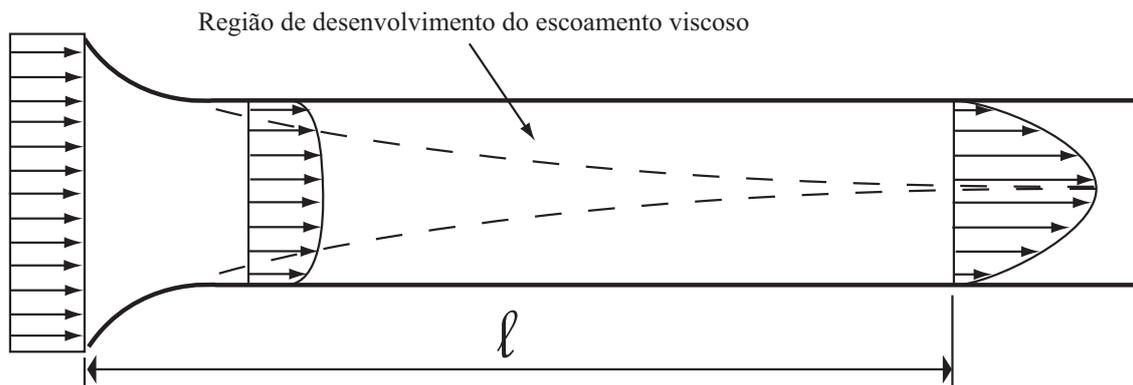


Figura 2.6: Ilustração do escoamento em tubo de fluido newtoniano com o comprimento  $\ell$  de desenvolvimento do escoamento viscoso.

número de Dean elevados não necessariamente são unidirecionais. Condição essa muito importante para o estudo de escoamentos em tubos.

### 2.5.2 Escoamento em tubo com parede senoidal

A descrição da parede de um tubo com um distúrbio harmônico de pequena amplitude  $\alpha$  serve como um modelo preliminar que considera efeitos de possíveis irregularidades existentes nas paredes de micro-vasos da corrente sanguínea. A função  $R(z)$  que descreve a parede do tubo é dada por:

$$R(z) = R_0 \left[ 1 + \alpha \sin \frac{2\pi z}{L} \right], \quad (2.56)$$

em que  $R_0$  é o raio médio do vaso,  $\alpha$  é a amplitude das oscilações na parede,  $L$  é o comprimento total do vaso, e  $z$  é a coordenada axial ao longo do tubo. Na Fig. 2.5(b) mostra-se a ilustração da geometria do escoamento em questão em tubo com parede não-uniforme.

É importante notar que uma componente radial poderia se tornar significativa dependendo da amplitude de variação  $\alpha$ . No entanto, conforme pode ser mostrado por análise de escala<sup>1</sup>, é possível usar uma aproximação de lubrificação e a aproximação de um escoamento unidirecional desde que  $\alpha \ll 1$ . Um fator que dificulta a solução do escoamento em tubos com paredes não-uniformes em comparação ao caso do escoamento em tubo com raio constante é a presença de um gradiente de pressão  $dp/dz$  que não é constante.

<sup>1</sup>A análise de escala é apresentada no anexo F.

### 2.5.3 Escoamento de fluidos imiscíveis em um tubo (“Core Flow”)

No escoamento descrito a seguir considera-se a presença de dois fluidos imiscíveis adjacentes escoando no interior de um tubo, conforme mostra a Fig. 2.5(c). A área de seção transversal do tubo pode ser constante ou variável. A Fig. 2.5(c) mostra um esquema de dois fluidos no interior de um tubo, em que  $\delta$  representa a espessura da camada de plasma adjacente à parede do microvaso (região do fluido 1). No esquema da figura em questão, o sangue escoava no núcleo do tubo, região delimitada pela linha tracejada e ocupada pelo fluido 2. Na indústria petrolífera, o bombeamento de óleos pesados é também um exemplo prático desse tipo de escoamento. Nesse caso, o fluido externo é a água, imiscível ao óleo, funcionando como uma camada lubrificante para diminuir o fator de atrito do escoamento quando o óleo pesado encontra-se em contato direto com a parede do tubo. No escoamento do sangue a camada de plasma livre de células adjacente a parede, facilita o bombeamento da suspensão sangue (plasma + células). Fenômeno esse observado principalmente em regimes de microcirculação no qual os efeitos das paredes sobre os glóbulos vermelhos é muito intenso, provocando alta deformação e diminuição da velocidade dos mesmos.

## Capítulo 3

# Modelo contínuo do escoamento do sangue

Neste capítulo investiga-se o escoamento do sangue em microvasos de diâmetro da ordem de  $100\mu m$  usando-se uma descrição contínua. Nesse sentido, resolve-se o problema de dois fluidos imiscíveis escoando no interior de um tubo como uma primeira aproximação para o escoamento do sangue na microcirculação.

O sangue é composto basicamente de plasma e glóbulos vermelhos que escoam na região central de um microvaso. A região anular do interior do microvaso é ocupada por plasma livre de células. Essa configuração típica de escoamento na microcirculação é ilustrada na Fig. 2.5(c). No modelo contínuo proposto neste capítulo o escoamento nuclear na microcirculação é calculado com o uso de uma equação constitutiva de um fluido contínuo não-newtoniano viscoso do tipo Casson, que apresenta um comportamento pseudo-plástico e fluido-sólido como o sangue. Para o cálculo do escoamento da camada de plasma livre de células na região anular, usa-se a equação constitutiva de um fluido newtoniano. O microvaso é aproximado por um tubo de seção circular variável. Com isto o modelo busca também captar a influência de irregularidades da parede de um microvaso, da tensão crítica de escoamento e da presença da camada livre de células sobre a viscosidade intrínseca. Explora-se também um modelo que considera células enfileiradas com configuração periódica de formato parabolóide, escoando em microvaso da ordem de  $10\mu m$  com raio em função da variável azimutal do problema. O escoamento entre células e entre a célula e a parede é aproximado por um escoamento unidirecional de fluido newtoniano, considerando a aproximação de lubrificação. O modelo permite examinar o efeito de agregação de células, a variação da velocidade de células e a variação do hematócrito no microvaso na viscosidade intrínseca do escoamento.

Verifica-se também a correspondência dos valores da viscosidade intrínseca com fenômenos já conhecidos nesse ramo de estudo como o efeito observado por Fahraeus & Lindqvist, 1931, e a inversão desse efeito para microvasos da ordem de  $10\mu m$ .

### 3.1 Escoamento do sangue em microvasos

Nesta sessão será apresentado o cálculo da viscosidade intrínseca do sangue em vasos de diâmetro da ordem de  $100\mu m$  em que o escoamento do sangue apresenta dois domínios, o núcleo onde predominam os glóbulos vermelhos e a região anular entre o núcleo e a parede da microvaso, que contém plasma livre de células.

Para descrever o escoamento predominante de glóbulos vermelhos usa-se um modelo para o sangue de fluido não-newtoniano viscoso do tipo Casson. Nesse modelo consideram-se a tensão crítica de escoamento  $\tau_0$  e o comportamento pseudo-plástico (*shear thinning*). Além disso, em artigos científicos ou mesmo em cálculos mais práticos no ramo da medicina, o modelo de Casson é aplicado em cálculos envolvendo o sangue. Para o cálculo do escoamento anular ocupado principalmente pelo plasma puro usa-se a equação constitutiva de fluido newtoniano com viscosidade constante ( $\mu_p$ ). O microvaso é aproximado por um tubo com parede de espessura infinitesimal e com seção variável conforme descreve a Fig. 2.5(b). O raio do tubo é descrito pela seguinte função de  $z$

$$R(z) = R \left[ 1 + \alpha \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi z}{L} \right) \right]. \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Perfil de velocidade

A equação governante do problema mostrada a seguir é a equação do movimento em coordenadas cilíndricas para o escoamento anular do sangue no interior de um tubo, considerando-se a região central com raio  $R_\delta = R - \delta$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_s) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad 0 \leq r < R_\delta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_p) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad R_\delta \leq r < R \end{array} \right., \quad (3.2)$$

em que os índices  $s$  e  $p$  são usados para identificar variáveis e propriedades do escoamento respectivos ao domínio nuclear preenchido com plasma e células e o domínio

anular preenchido apenas com plasma. Por integração direta da Eq. (3.2), tem-se

$$\begin{cases} \tau_s = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{r} & 0 \leq r < R_\delta \\ \tau_p = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{D_1}{r} & R_\delta \leq r < R \end{cases} \quad (3.3)$$

$C_1$  é determinado pela condição de contorno  $\tau_s(0) = 0$ , obtendo-se  $C_1 = 0$ ;  $D_1$  é calculado da condição de contorno de continuidade de tensões na interface entre o escoamento nuclear e anular, ou seja,  $\tau_s(R_\delta) = \tau_p(R_\delta)$ , obtendo-se

$$D_1 = 0 \quad (3.4)$$

Quando os valores de  $C_1$  e  $D_1$  são levados em consideração a Eq. 3.3 reduz-se a:

$$\begin{cases} \tau_s = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} & 0 \leq r < R_\delta \\ \tau_p = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} & R_\delta \leq r < R \end{cases} \quad (3.5)$$

Para se calcular o campo de velocidade assume-se para a região nuclear a equação constitutiva de um fluido Casson dada por

$$\tau_s = \left( \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_{eff} \left( -\frac{\partial u_s}{\partial r} \right)} \right)^2. \quad (3.6)$$

Conforme já mencionado o escoamento anular do plasma é calculado usando-se uma equação de fluido newtoniano linear. Assim a Eq.3.5 é reescrita como a seguir

$$\begin{cases} \left( \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_{eff} \left( -\frac{\partial u_s}{\partial r} \right)} \right)^2 = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} & 0 \leq r < R_\delta \\ \mu_p \frac{\partial u_p}{\partial r} = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} & R_\delta \leq r < R \end{cases}. \quad (3.7)$$

Com algumas manipulações algébricas na primeira equação do sistema 3.7 mostra-se que

$$\begin{cases} -\frac{\partial u_s}{\partial r} = \frac{1}{\mu_{eff}} \left[ \left( -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} - \sqrt{\tau_0} \right]^2 & 0 \leq r < R_\delta \\ \frac{\partial u_p}{\partial r} = \frac{r}{2\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z} & R_\delta \leq r < R \end{cases} \quad (3.8)$$

e portanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_s}{\partial r} = \frac{r}{2\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\sqrt{2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} r \tau_0 \right)^{1/2} - \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} \quad 0 \leq r < R_\delta \\ \\ \frac{\partial u_p}{\partial r} = \frac{r}{2\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z} \quad R_\delta \leq r < R \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Integrando-se as equações acima, na variável  $r$ , obtém-se o seguinte perfil de velocidade, nas duas regiões do escoamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_s = \frac{r^2}{4\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} r^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} - \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} r + C_2 \quad 0 \leq r < R - \delta \\ \\ u_p = \frac{r^2}{4\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z} + D_2 \quad R - \delta \leq r < R \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Com a condição de contorno de não deslizamento na parede,  $u_p(R(z)) = 0$ , em que  $R(z)$  foi definida na Eq. 2.56, determina-se

$$D_2 = -\frac{R^2(z)}{4\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Na interface do plasma com o sangue, tem-se a condição de continuidade de velocidade  $u_s(R_\delta) = u_p(R_\delta)$ , em que  $R_\delta = R - \delta$  portanto

$$\frac{R_\delta^2}{4\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} R_\delta^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} - \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_\delta + C_2 = \frac{R_\delta^2}{4\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{R^2(z)}{4\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3.12)$$

e isso leva a determinação da constante de integração  $C_2$  como sendo

$$C_2 = \frac{1}{4} \left[ R_\delta^2 \left( \frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_{eff}} \right) - \frac{R^2(z)}{\mu_p} \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} R_\delta^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} + \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_\delta. \quad (3.13)$$

Substituindo os valores das constantes  $C_2$  e  $D_2$  na Eq. 3.10, determina-se o campo de velocidade descrito a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_s = \frac{r^2}{4\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} r^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} - \frac{\tau_0}{\mu_s} r + \\ \\ \frac{1}{4} \left[ R_\delta^2 \left( \frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_{eff}} \right) - \frac{R^2(z)}{\mu_p} \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} R_\delta^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} + \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_\delta \quad R_c \leq r < R_\delta \\ \\ u_p = \frac{r^2}{4\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{R^2(z)}{4\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z} \quad R_\delta \leq r < R \end{array} \right. \quad (3.14)$$

É importante notar que considera-se na solução a região de raio  $R_c$  do microvaso em que o sangue pode apresentar um movimento de corpo rígido com velocidade constante  $U_c$ . O valor da velocidade  $U_c$  deve satisfazer a condição de contorno em  $r = R_c$ ;  $u = U_c$ . Portanto,

$$u_s(R_c) = U_c = \frac{1}{4\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial z} R_c^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3\mu_{eff}} \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial z}} \sqrt{\tau_0} R_c^{3/2} - \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_c + \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{4} \left[ R_\delta^2 \left( \frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_{eff}} \right) - \frac{R^2(z)}{\mu_p} \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} R_\delta^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} + \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_\delta.$$

Portanto o perfil de velocidade completo do escoamento do sangue em todas as regiões do microvaso é dado por

$$u(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial z} R_c^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} (\tau_0)^{1/2} R_c^{3/2} - \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_c + \\ \frac{1}{4} \left[ R_\delta^2 \left( \frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_{eff}} \right) - \frac{R^2(z)}{\mu_p} \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} R_\delta^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} + \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_\delta, & 0 \leq r < R_c, \\ \frac{1}{4\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} (\tau_0)^{1/2} r^{3/2} - \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} r + \\ \frac{1}{4} \left[ R_\delta^2 \left( \frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_{eff}} \right) - \frac{R^2(z)}{\mu_p} \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tau_0^{1/2} R_\delta^{3/2}}{\mu_{eff}} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} + \frac{\tau_0}{\mu_{eff}} R_\delta, & R_c \leq r < R_\delta, \\ \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{4\mu_p} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{R^2(z)}{4\mu_p}, & R_\delta \leq r < R. \end{cases} \quad (3.16)$$

Uma representação das regiões do escoamento mencionadas são apresentadas na Fig. 3.1. Observa-se na figura citada que o escoamento é dividido em três regiões bem definidas. Nessas regiões o escoamento possui perfis de velocidade diferentes. Na Eq. 3.16 o perfil de velocidade no microvaso em  $R_\delta < r < R$  apresenta uma dependência quadrática como em escoamento de Poiseuille em tubos. Na região  $R_c < r < R_\delta$  o perfil de velocidade tem uma dependência que não é quadrática do raio (e.g.  $r^{3/2}$  e  $r$ ). No domínio  $0 < r < R_c$  o fluido desenvolve uma translação de corpo rígido com  $u = U_c$ , nessa região a tensão cisalhante não supera a tensão crítica de escoamento do sangue  $\tau_0$  e a velocidade do escoamento independe do raio  $r$ .

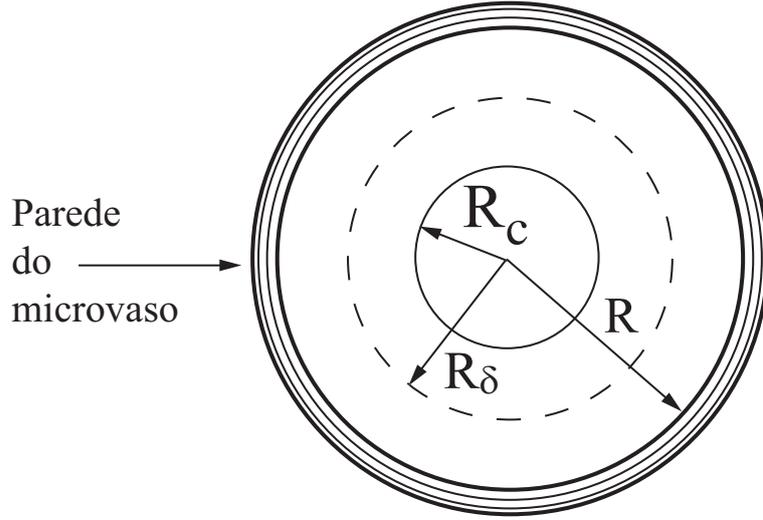


Figura 3.1: Regiões do escoamento do sangue no interior do microvaso.

### 3.1.2 Taxa volumétrica do escoamento - Vazão

A vazão total para o escoamento no microvaso é calculado pela integral

$$Q = 2\pi \left( \int_0^{R_c} r U_c dr + \int_{R_c}^{R_\delta} r u(r) dr + \int_{R_\delta}^{R(z)} u(r) r dr \right) \quad (3.17)$$

após integração determina-se que

$$Q = -\frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{\mu_{eff}} (R_\delta^4 - R_c^4) + \frac{1}{\mu_p} (R(z)^4 - R_\delta^4) \right) \frac{\partial p}{\partial z} + \quad (3.18)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{7} \frac{\pi \tau_0^{1/2}}{\mu_{eff}} \left( R_\delta^{7/2} - R_c^{7/2} \right) \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/2} + \frac{1}{3} \frac{\pi \tau_0}{\mu_{eff}} (R_\delta^3 - R_c^3).$$

Usando a seguinte adimensionalização  $\tilde{R}_c = R_c/\delta, \tilde{R}_\delta = R_\delta/\delta, \tilde{\tau}_0 = \tau_0/\tau_\delta$  e  $G = -dp/dz/G_0$  em que  $G_0$  é o gradiente de pressão típica para um experimento de escoamento do sangue em um capilar cilíndrico com comprimento  $L$  e diferença de pressão  $p_0 - p_L$ ,  $\tau_\delta = G_0\delta/2$  e  $\tilde{Q} = Q\mu_p/(G_0\delta^4)$ , reescreve-se a Eq. 3.18 como a seguir

$$\tilde{Q} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_{eff}} (\tilde{R}_\delta^4 - \tilde{R}_c^4) + (\tilde{R}(z)^4 - \tilde{R}_\delta^4) \right) G + \quad (3.19)$$

$$\frac{2}{7} \frac{\tilde{\tau}_0^{1/2}}{\tilde{\mu}_{eff}} \left( \tilde{R}_\delta^{7/2} - \tilde{R}_c^{7/2} \right) (G)^{1/2} + \frac{1}{6} \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\mu}_{eff}} (\tilde{R}_\delta^3 - \tilde{R}_c^3).$$

pode-se reescrever a Eq. 3.19, da seguinte forma

$$\tilde{Q} = \mathcal{A}G + \mathcal{B}G^{1/2} + \mathcal{C} \quad (3.20)$$

em que

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_{eff}} (\tilde{R}_\delta^4 - \tilde{R}_c^4) + (\tilde{R}(z)^4 - \tilde{R}_\delta^4) \right)$$

$$\mathcal{B} = \frac{2 \pi \tilde{\tau}_0^{1/2}}{7 \tilde{\mu}_{eff}} \left( \tilde{R}_\delta^{7/2} - \tilde{R}_c^{7/2} \right)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{6} \frac{\pi \tilde{\tau}_0}{\tilde{\mu}_{eff}} (\tilde{R}_\delta^3 - \tilde{R}_c^3)$$

Da equação 3.20, com uma simples mudança de variável  $\beta = G^{1/2}$  pode-se calcular a equação algébrica quadrática em  $\beta$

$$\mathcal{A}\beta^2 + \mathcal{B}\beta + (\mathcal{C} - \tilde{Q}) = 0. \quad (3.21)$$

Aplicando-se na solução a relação  $G = \beta^2$ , determina-se

$$G = \frac{\left( -\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} + 4\mathcal{A}\tilde{Q}} \right)}{2\mathcal{A}^2} \mathcal{B} + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} - \frac{\tilde{Q}}{\mathcal{A}} \quad (3.22)$$

### 3.1.3 Viscosidade intrínseca do sangue em escoamento em artérias

Na seção a seguir será apresentado o cálculo da viscosidade intrínseca do escoamento do sangue em um microvaso baseado no modelo contínuo proposto neste capítulo. Para microvasos a viscosidade intrínseca pode ser calculada pela lei de Poiseuille dada por

$$\mu_s = \frac{1}{8} \frac{\pi R^4}{Q} \frac{\Delta p}{L} \quad (3.23)$$

Da Eq. 3.23 a viscosidade intrínseca adimensional do sangue é calculada por

$$\tilde{\mu}_s = \frac{\mu_s}{\mu_p} = \frac{1}{8} \frac{\pi \tilde{G}}{\tilde{Q}} \tilde{R}^4 \quad (3.24)$$

em que  $\tilde{G} = (\Delta p/L)/G_0$ ,  $\tilde{Q} = Q\mu_p/(\delta^4 G_0)$ ,  $\tilde{R} = R/\delta$  e  $G_0$  é um gradiente de pressão de referência. O cálculo de  $\tilde{G}$  é feito pela integral da Eq. (3.25) de 0 a 1.

$$\tilde{G} = \int_0^1 G d\tilde{z} = \int_0^1 \left[ \frac{-\mathcal{B} + (\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} + 4\mathcal{A}\tilde{Q})^{1/2}}{2\mathcal{A}^2} \mathcal{B} + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} - \frac{\tilde{Q}}{\mathcal{A}} \right] d\tilde{z} \quad (3.25)$$

em que  $\tilde{z} = z/L$

## 3.2 Determinação da viscosidade intrínseca para diferentes condições de escoamentos

Nesta seção será determinada a viscosidade intrínseca para diferentes condições do escoamento do sangue em microvaso. Primeiramente será obtido um resultado mais

simples de viscosidade intrínseca do sangue e em seguida serão adicionados outros parâmetros que aumentam o grau de complexidade do modelo para a determinação da viscosidade intrínseca em questão.

### 3.2.1 Caso de fluido newtoniano efetivo

Para o caso em que  $\tau_0 = 0$  e, conseqüentemente,  $R_c = 0$ , desprezando ainda quaisquer irregularidades nas paredes do microvaso (i. e.  $\alpha = 0$ ), os parâmetros  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  do escoamento para estas condições são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{\pi}{8} \left( \frac{\tilde{R}_\delta^4}{\tilde{\mu}_{eff}} - \tilde{R}_\delta^4 + \tilde{R}^4 \right) \\ \mathcal{B} &= 0 \\ \mathcal{C} &= 0.\end{aligned}$$

Portanto a Eq. (3.24) se reduz a

$$\tilde{\mu}_s = \frac{\tilde{R}^4}{\tilde{R}_\delta^4 / \tilde{\mu}_{eff} - \tilde{R}_\delta^4 + \tilde{R}^4} \quad (3.26)$$

que corresponde a expressão para o cálculo da viscosidade intrínseca do sangue em um microvaso cilíndrico sem irregularidades (i. e.  $R(z) = R$ ) para um modelo constitutivo de sangue newtoniano com viscosidade constante efetiva equivalente  $\mu_{eff}$  escoando no núcleo do microvaso.

### 3.2.2 Modelo de fluido newtoniano generalizado (fluido de Casson)

Explora-se o caso em que um fluido newtoniano generalizado (fluido de Casson) que escoar na região central de um microvaso cilíndrico (i. e.  $R(z) = R$ ). Para este caso, pode-se assumir que

$$\tilde{R}_c = m\tilde{\tau}_0 \quad (3.27)$$

em que  $m$  é uma constante de proporcionalidade determinada de observações experimentais. Nestas condições os parâmetros  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  são dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{\pi}{8} \left( \frac{1}{\tilde{\mu}_{eff}} (\tilde{R}_\delta^4 - (m\tilde{\tau}_0)^4) + (\tilde{R}(z)^4 - \tilde{R}_\delta^4) \right) \\ \mathcal{B} &= \frac{2\pi\tilde{\tau}_0^{1/2}}{7\tilde{\mu}_{eff}} \left( \tilde{R}_\delta^{7/2} - (m\tilde{\tau}_0)^{7/2} \right)\end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{6} \frac{\pi \tilde{\tau}_0}{\tilde{\mu}_{eff}} (\tilde{R}_\delta^3 - (m\tau_0)^3)$$

e a vazão pode ser reescrita como:

$$\tilde{Q} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{\tilde{R}_\delta^4}{\tilde{\mu}_{eff}} - \tilde{R}_\delta^4 + \frac{R^4}{\delta^4} \right) \tilde{G} + \frac{\pi \tilde{R}_\delta^4}{8 \tilde{\mu}_{eff}} \left[ \left( -m^4 \tilde{G} + \frac{16m^{7/2}}{7} \tilde{G}^{1/2} - \frac{4m^3}{3} \right) \frac{\tilde{\tau}_0^4}{\tilde{R}_\delta^4} - \frac{2G^{1/2}}{7} \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\tilde{R}_\delta}} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{R}_\delta} \right] \quad (3.28)$$

Para cada valor de  $\tilde{G}$  e  $\tilde{\tau}_0$  é possível calcular a vazão do escoamento adimensional  $\tilde{Q}$ . Da Eq. 3.28 pode-se prever como as variações de pressão e de tensões críticas do escoamento  $\tau_0$  afetam a vazão do sangue na microcirculação. Desta teoria verifica-se também uma contribuição permanente newtoniana com dependência típica de  $R_\delta^4$  e proporcional ao gradiente de pressão  $\tilde{G}$  somada a uma contribuição não-newtoniana com termos contendo dependência do tipo  $G^{1/2}$ ,  $R_\delta^{1/2}$  e  $R_\delta^3$ . Estes efeitos estão associados com o comportamento pseudo-plástico do sangue e a dependência de agregação dos glóbulos vermelhos (Hogenauer, 2003).

Para este caso a queda de pressão do escoamento adimensionalizada  $\tilde{G}$  depende de  $\tilde{z}$  sendo avaliada pela equação a seguir

$$\tilde{G} = \frac{-\mathcal{B} + (\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} + 4\mathcal{A}\tilde{Q})^{1/2}}{2\mathcal{A}^2} \mathcal{B} + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} - \frac{\tilde{Q}}{\mathcal{A}}. \quad (3.29)$$

Usando Eqs. 3.24 e 3.29 determina-se a seguinte expressão para a viscosidade intrínseca

$$\tilde{\mu}_s = \frac{1}{8} \frac{\pi R^4}{\tilde{Q} \delta^4} \left( \mathcal{B} \frac{-\mathcal{B} + (\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} + 4\mathcal{A}\tilde{Q})^{1/2}}{2\mathcal{A}^2} + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} - \frac{\tilde{Q}}{\mathcal{A}} \right) \quad (3.30)$$

Uma expressão analítica mais simples pode ser obtida para o caso particular em que  $\tilde{G} = 1$  e  $m = 1$ , tem-se

$$\tilde{Q} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{\tilde{R}_\delta^4}{\tilde{\mu}_{eff}} - \tilde{R}_\delta^4 + \frac{R^4}{\delta^4} \right) + \frac{\pi R_\delta^4}{8 \tilde{\mu}_{eff}} \left[ -\frac{1}{21} \frac{\tilde{\tau}_0^4}{\tilde{R}_\delta^4} - \frac{16}{7} \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\tilde{R}_\delta}} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{R}_\delta} \right] \quad (3.31)$$

Substituindo a Eq.(3.31) na Eq. (3.24) tem-se que

$$\tilde{\mu}_s = \frac{1}{\left( \frac{\tilde{R}_\delta^4}{\tilde{\mu}_{eff}} - \tilde{R}_\delta^4 + \frac{R^4}{\delta^4} \right) + \frac{\tilde{R}_\delta^4}{\tilde{\mu}_{eff}} \left[ -\frac{1}{21} \frac{\tilde{\tau}_0^4}{\tilde{R}_\delta^4} - \frac{16}{7} \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\tilde{R}_\delta}} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{R}_\delta} \right]} \frac{R^4}{\delta^4} \quad (3.32)$$

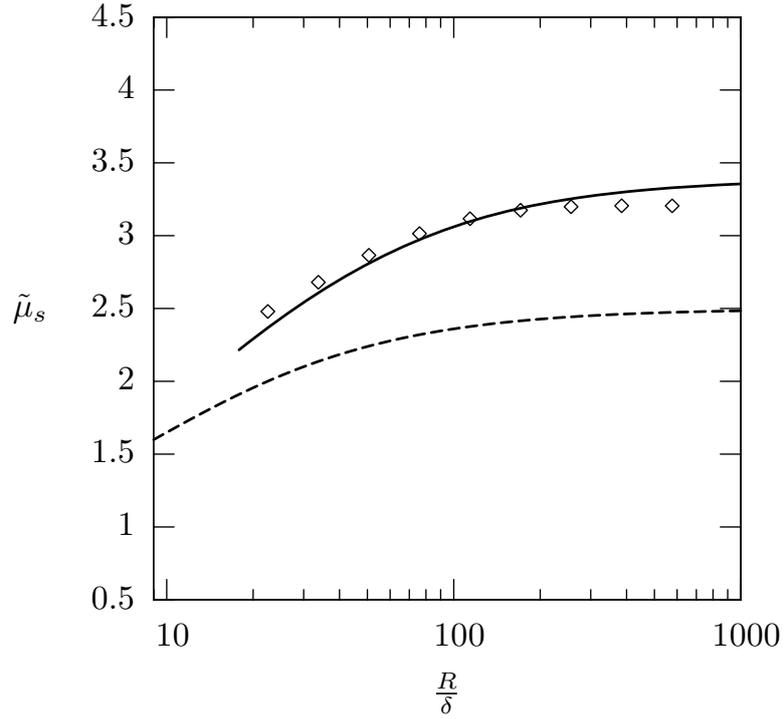


Figura 3.2: Viscosidade intrínseca do sangue em função do raio adimensional do microvaso,  $R/\delta$ . A linha cheia denota o modelo de fluido newtoniano generalizado do tipo Casson em um microvaso com parede não uniforme  $\alpha = 0.05$  e  $\tilde{\tau}_0 = 10^{-6}$  (por meio das Eqs. 3.24 e 3.25); a linha tracejada grande denota um microvaso cilíndrico com  $\tilde{\tau}_0 = 0$  (newtoniano equivalente, Eq. 3.26); os pontos são resultados de experimento *in vivo* obtidos por Pries *et al.*, 1994.

### 3.3 Resultados da viscosidade intrínseca do sangue em arteríolas

Os estudos de casos apresentados na seção 3.2 são mostrados na Fig. 3.2. A linha cheia corresponde aos valores obtidos da viscosidade intrínseca adimensional para o modelo completo, que considera uma não uniformidade da parede do microvaso (i. e.  $\alpha \neq 0$ ) e a tensão crítica de escoamento  $\tau_0 = O(10^{-3} Pa)$  (Picart *et al.*, 1998). Os pontos mostrados na Fig. 3.2 denotam os valores de viscosidade intrínseca adimensional obtidos de um ajuste baseado nos experimentos de escoamento na microcirculação *in vivo* de Pries *et al.*, 1994, para um hematócrito de 45%. Percebe-se que a presença de uma parede de microvaso não uniforme influencia de forma significativa os valo-

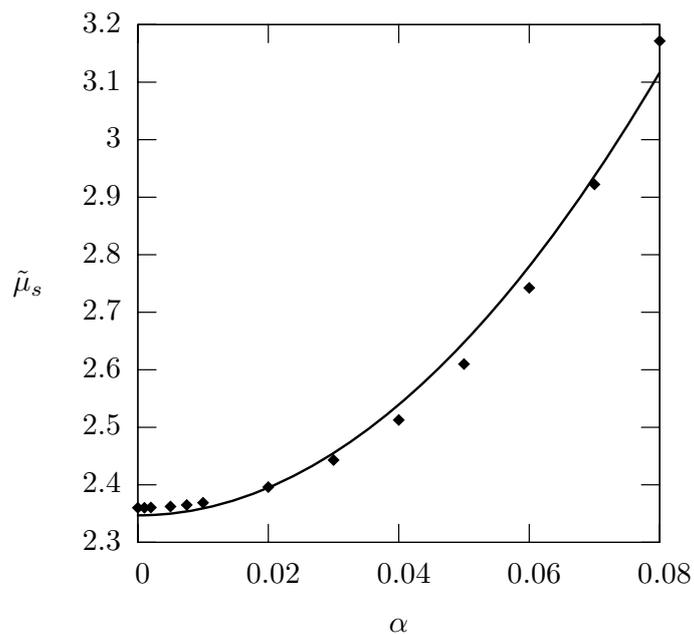


Figura 3.3: Viscosidade intrínseca do sangue em função do parâmetro de não uniformidade da secção do microvaso  $\alpha$ , para um vaso de raio adimensional de  $R/\delta = 100$  e  $\tilde{\tau}_0 = 0$ . Os pontos são valores numéricos e a linha cheia é uma curva da função  $f(x) = 2,35 + 120\alpha^2$  obtida por ajuste aos valores numéricos.

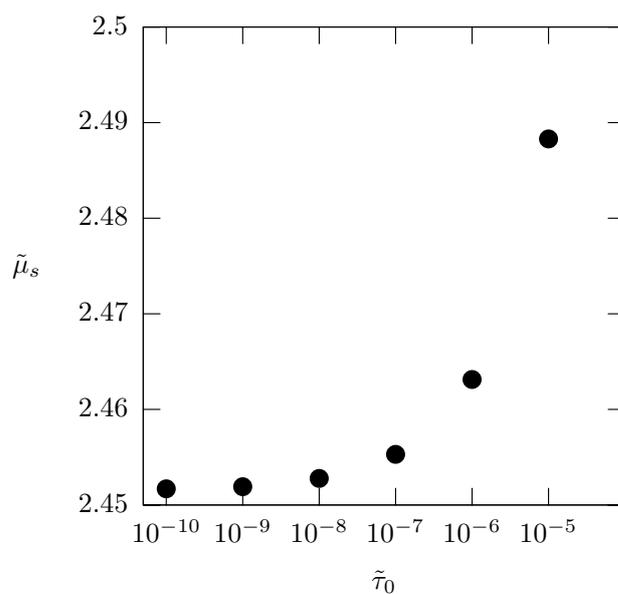


Figura 3.4: Viscosidade intrínseca do sangue em função da tensão de escoamento adimensional, considerando-se  $R/\delta = 300$ .

res da viscosidade intrínseca do sangue. Os valores de viscosidade teóricos concorda satisfatoriamente com os medidos experimentalmente da viscosidade intrínseca *in vivo*.

Na Fig. 3.3 observa-se que a viscosidade intrínseca do sangue é aproximadamente função de  $\alpha^2$ . O referido gráfico permite verificar que mesmo não uniformidades menores que 10% do raio do microvaso provocam uma variação crescente de até 40% no valor da viscosidade intrínseca adimensional. Esse resultado permite afirmar que não uniformidades provocadas por acúmulos de células nas paredes de microvasos, ou provocadas por ferimentos, podem afetar significativamente a viscosidade intrínseca do sangue. Em adição, essa influência sobre a viscosidade intrínseca do sangue é função de  $a + b\alpha^n$ , em que as constantes  $a, b$  e  $n$  devem ser determinadas. A dependência parabólica da viscosidade intrínseca ao parâmetro de não uniformidade  $\alpha$  pode ser entendida se levado em conta o problema de um fluido newtoniano escoando em um tubo com secção transversal como função senoide. No referido problema usa-se uma expansão binomial para se determinar a vazão pela seguinte equação (Carvalho, 2006):

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{\mu L (1 + 5\alpha^2)}. \quad (3.33)$$

Igualando-se a Eq. 3.33 a lei Poiseuille, determina-se que

$$\frac{\mu_s}{\mu} = (1 + 5\alpha^2). \quad (3.34)$$

A Eq. 3.34 mostra que a viscosidade intrínseca de um fluido newtoniano escoando em um tubo com raio em função de  $R(z) = R(1 + \alpha \sin(2\pi z/L))$  é função de  $\alpha^2$ . Dessa forma, a diferença entre os valores numéricos e a curva de linha cheia na Fig. 3.3 se deve à presença da camada livre de células no escoamento da microcirculação.

Na Fig. 3.4 vê-se que no respectivo intervalo de valores da tensão crítica de escoamento, obtém-se uma variação de menos de 10% no valor da viscosidade intrínseca adimensional. Para o sangue humano fisiologicamente normal, tem-se que  $\tilde{\tau}_0 = 10^{-7}$  Lipowsky, 2005. O referido gráfico permite concluir que esse parâmetro é de pouca relevância na reologia do sangue. Sabe-se que a agregação de glóbulos vermelhos é responsável pelo aumento da tensão de crítica de escoamento  $\tau_0$  (Chandran, 2003). Isto indica que no caso de doenças ou estados de saúde que levam a um aumento da agregação de glóbulos vermelhos e o conseqüente aumento da tensão de escoamento do sangue, o coração necessita de um maior esforço para bombear o sangue na rede de microvasos do sistema circulatório por conta do aumento na viscosidade intrínseca do

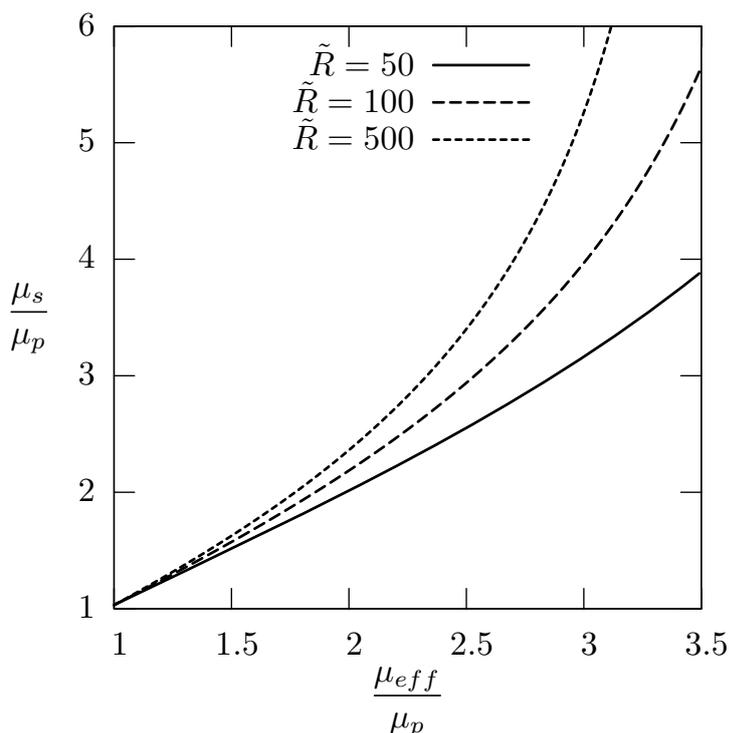


Figura 3.5: Variação relativa da Viscosidade intrínseca do sangue em relação a viscosidade efetiva adimensional do sangue  $\tilde{\mu}_{eff} = \mu_{eff}/\mu_p$ .

sangue, mesmo que esse aumento seja pequeno. Alguns estudos têm sugerido que a agregação de células está relacionada à composição do plasma (Chien & Jan, 1973). No entanto, outros mecanismos como o formato dos glóbulos vermelhos, como ocorre em anemia falciforme, precisam ser melhor investigados para um maior entendimento das causas dos mecanismos de agregação. Quando existe agregação de glóbulos vermelhos tem-se blocos rígidos organizados em estruturas chamadas *rouleux* ou também em forma de *clunks*, resultando em um aumento na tensão de escoamento.

A Fig. 3.5 mostra que em vasos com raios maiores a viscosidade intrínseca do sangue é mais sensível ao aumento da viscosidade efetiva  $\mu_{eff}$  do sangue no núcleo do escoamento. Nota-se que para um microvaso de raio adimensional de 500 a viscosidade intrínseca é cerca do dobro do valor da viscosidade efetiva adimensional  $\mu_{eff}/\mu_p = 3$  enquanto para o raio de 50 a viscosidade intrínseca corresponde aproximadamente o mesmo valor da viscosidade efetiva do sangue. Resultado este sendo uma consequência direta da diminuição da viscosidade do sangue com o tamanho do microvaso (Efeito Fahraeus-Lindqvist).

Quando uma pessoa permanece longos períodos de tempo em lugares rarefeitos

o organismo aumenta a produção de glóbulos vermelhos para compensar a redução de oxigênio, o que significa um aumento do hematócrito em torno de 10% (Napier & West, 1996) e, conseqüentemente, o aumento da viscosidade efetiva. O resultado mostrado na Fig. 3.5 ajuda a entender essa situação uma vez que nesse caso, a viscosidade intrínseca do sangue aumenta poderia afetar o esforço demandado pelo coração para bombear o sangue na microcirculação. Um aumento da viscosidade intrínseca está também associado com a diminuição da velocidade dos glóbulos vermelhos, dificultando o processo de oxigenação periférica do corpo. Esses aspectos também serão discutidos usando um modelo local em capilares (microvasos com diâmetro  $\sim 10\mu m$ ) apresentado na seção subseqüente.

### 3.4 Escoamento do sangue em capilares

No regime de microcirculação descrito a seguir não é possível usar modelos contínuos. Conforme será visto um modelo local na escala da célula é requerido para a solução do escoamento nessa dimensão de microvasos.

Nesta sessão será abordado o estudo do escoamento do sangue em capilares com diâmetro da ordem do tamanho característico de um glóbulo vermelho. O escoamento do sangue em capilares pode ser dividido em dois escoamentos básicos. O escoamento do plasma que ocupa as regiões entre os glóbulos vermelhos e o escoamento entre as células e as paredes do microvaso. Vale observar que o presente modelo é uma aproximação do escoamento real; pois além da presença de glóbulos vermelhos no sangue tem-se outros componentes em menor fração volumétrica como as plaquetas e os glóbulos brancos (ou leucócitos). Desde que os glóbulos vermelhos correspondem a 95% da fração de células (Popel & Jonhson, 2005) do volume total celular do sangue, essa aproximação torna-se coerente.

Assume-se também que as células possuem o mesmo tamanho, são axissimétricas e se distribuem periodicamente na direção longitudinal do microvaso. Dessa forma, as células têm espaçamentos iguais entre si  $\Delta s$  e seus centros de massa são co-lineares com o eixo de centro do microvaso. Portanto, tem-se um movimento periódico dessas células, na direção da vazão do escoamento. A Fig. (3.6) ilustra o escoamento idealizado.

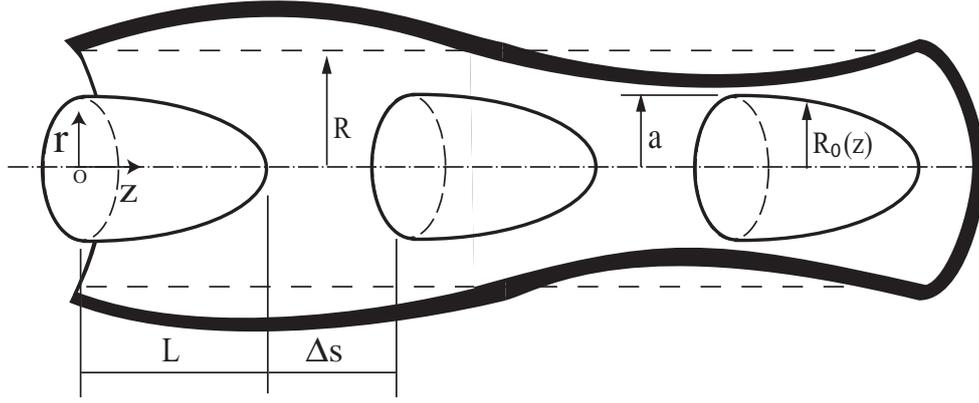


Figura 3.6: Ilustração de um modelo idealizado para o escoamento do sangue em capilares com diâmetro da ordem do tamanho característico do glóbulo vermelho célula vermelha. No modelo, o referencial coincide com a base do protótipo de célula.

### 3.4.1 Descrição do modelo matemático do escoamento em capilar

A equação governante do escoamento segue a aproximação de lubrificação (Batchelor, 1967) de problemas unidimensionais

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) = -\frac{dp}{dz}, \quad (3.35)$$

Integrando-se a equação 3.35, obtém-se

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dz} + \frac{C_1}{r} \quad (3.36)$$

No escoamento entre as células, o escoamento do plasma é descrito como sendo um escoamento de Poiseuille em tubo. As condições de contorno são aquelas padrão de não deslizamento na parede do capilar e a tensão cisalhante é nula na linha de simetria do vaso (condição de simetria). Aplicando-se essa condição de contorno a Eq. 3.36, isto é  $\tau(0) = 0$ , tem-se  $C_1 = 0$ . . Portanto a equação 3.36 reduz a

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \quad (3.37)$$

Para o escoamento do plasma usa-se a equação constitutiva de um fluido newtoniano como expressa por

$$\tau = \mu_p \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.38)$$

e o campo de velocidade do movimento do plasma é calculado pela equação resultante da substituição da Eq. (3.38) na Eq. (3.37), equação típica da aproximação da

lubrificação em filmes delgados dada por

$$\mu_p \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dz}. \quad (3.39)$$

Após integração da Eq. 3.39, obtém-se

$$u(r) = -\frac{r^2}{4\mu_p} \frac{\partial p}{\partial z} + C_2. \quad (3.40)$$

No espaçamento entre as células a constante de integração  $C_2$  é determinada pela condição de contorno de não deslizamento na parede do vaso capilar  $u(R(z))$ . Portanto,

$$C_2 = \frac{R^2(z)}{4\mu_p} \frac{dp}{dz}. \quad (3.41)$$

A vazão nesta região é calculada pela definição

$$Q_p = 2\pi \int_0^{R(z)} ru(r)dr, \quad (3.42)$$

que após integração em  $r$  resulta em

$$Q_p = \frac{\pi}{8\mu_p} R(z)^4 \frac{dp}{dz}. \quad (3.43)$$

Para se determinar a queda de pressão,  $\Delta p$ , ao longo do comprimento  $\Delta s$  integra-se como a seguir

$$\Delta P_p = \int_L^{L+\Delta s} \frac{8Q_p \mu_p}{\pi R^4(z)} dz \quad (3.44)$$

Agora, considera-se o escoamento entre a célula e a parede do vaso capilar. Neste caso, têm-se duas condições de contorno de não deslizamento, dada por  $u(R(z)) = 0$  e  $u(R_0(z)) = U_0$ , em que  $R_0(z)$  é o raio da célula descrito por uma função da variável  $z$  e  $U_0$  é a velocidade uniforme da célula na direção  $z$ . Substituindo-se essas condições na solução geral do campo de escoamento em tubos

$$u(z) = -\frac{dp}{dz} \frac{r^2}{4\mu_p} + C_1 \ln r + C_2, \quad (3.45)$$

após algumas manipulações algébricas determina-se o seguinte campo de velocidade  $u(r)$

$$u(r) = \frac{1}{4\mu_p} \left\{ \frac{R(z)^2 - R_0(z)^2 - (4\mu_p/(dp/dz))U_0}{\ln R(z)/R_0(z)} \ln \left( \frac{r}{R(z)} \right) + R(z)^2 - r^2 \right\} \frac{dp}{dz}. \quad (3.46)$$

A vazão dessa região de lubrificação célula-parede é calculada pela integração

$$Q_u = 2\pi \int_{R_0(z)}^{R(z)} ru(r)dr, \quad (3.47)$$

é determinada como sendo

$$Q_u = \frac{\pi}{8\mu_p} \left[ R(z)^4 - R_0(z)^4 - \frac{(R(z)^2 - R_0(z)^2)^2}{\ln(R(z)/R_0(z))} \right] \frac{dp}{dz} + \pi U_0 \left[ R_0(z)^2 - \frac{R(z)^2 - R_0(z)^2}{2\ln(R(z)/R_0(z))} \right]. \quad (3.48)$$

É importante notar que segundo termo do lado direito da equação é a contribuição da vazão no canal célula-parede associada com o movimento da célula. Com algumas manipulações algébricas a Eq. (3.48) pode ser reescrita de uma forma mais apropriada

$$Q_u = \frac{dp}{dz} \frac{\pi}{8\mu_p} F(z) - \pi U_0 F_u(z), \quad (3.49)$$

em que  $F(z) = \left[ R(z)^4 - R_0(z)^4 - \frac{(R(z)^2 - R_0(z)^2)^2}{\ln(R(z)/R_0(z))} \right]$  e

$$F_u(z) = \left[ R_0(z)^2 - \frac{R(z)^2 - R_0(z)^2}{2\ln(R(z)/R_0(z))} \right].$$

A vazão total do escoamento inclui a vazão do volume da célula ( $Q_c = V_c U_0 / L$ ), portanto em  $0 < z < L$  a vazão relativa a região ocupada pela célula é calculada por

$$Q_L = \frac{dp}{dz} \frac{\pi}{8\mu_p} F(z) - \pi U_0 F_u(z) + \frac{V_c U_0}{L}, \quad (3.50)$$

Para se calcular a diferença de pressão  $\Delta P$  relativa a região ocupada pela célula no microvaso, calcula-se a partir da Eq. 3.50 a integral

$$\Delta P_L = \frac{8\mu_p}{\pi} \int_0^L \frac{Q_L + \pi U_0 F_u(z) - V_c U_0 / L}{F(z)} dz. \quad (3.51)$$

### 3.4.2 Cálculo da viscosidade intrínseca

A seguir será apresentado o cálculo da viscosidade intrínseca para escoamento do sangue em capilares, pelo modelo proposto na seção anterior.

Como anteriormente, a viscosidade intrínseca do sangue em um vaso capilar é também definida usando a lei de Poiseuille capilar, portanto

$$Q = - \frac{R^4(z) \pi}{8\mu_s} \frac{dp}{dz} \quad (3.52)$$

em que  $\mu_s$  é a já definida viscosidade intrínseca do sangue e  $Q$  é a vazão do escoamento no capilar.

Para a diferença de pressão  $\Delta P_{pL} = \Delta P_p + \Delta P_L$  tem-se que

$$\Delta P_{pL} = \frac{8\mu_s Q}{\pi} \int_0^{L+\Delta s} \frac{dz}{R^4(z)}. \quad (3.53)$$

Agora, usando Eq. 3.44 e 3.51, pode-se expressar a Eq. 3.53 da seguinte forma

$$\frac{8\mu_s Q}{\pi} \int_0^{L+\Delta s} \frac{dz}{R^4(z)} = \frac{8\mu_p}{\pi} \left[ \int_0^L \frac{Q + \pi U_0 F_u(z) - V_c U_0 / L}{F(z)} dz + \int_L^{L+\Delta s} \frac{Q}{R^4(z)} dz \right]. \quad (3.54)$$

Determina-se para a viscosidade intrínseca  $\mu_s$  adimensionalizada pela viscosidade do plasma a seguinte expressão matemática geral para escoamento em capilares com modelo de célula em movimento

$$\frac{\mu_s}{\mu_p} = \left[ \int_0^L \frac{Q + \pi U_0 F_u(z) - V_c U_0 / L}{F(z)} dz + \int_L^{L+\Delta s} \frac{Q}{R(z)^4} dz \right] \left[ Q \int_0^{L+\Delta s} \frac{dz}{R(z)^4} \right]^{-1}. \quad (3.55)$$

Para obter os valores da viscosidade intrínseca em função do raio do vaso nessa região da microcirculação capilar as integrais definidas na Eq. 3.55 devem ser resolvidas por meios analíticos ou numéricos, dependendo da complexidade da geometria da célula e da parede do microvaso.

No presente modelo, propõe-se uma dependência senoidal do raio do microvaso, conforme já estabelecido anteriormente na descrição de modelos contínuos na seção . Portanto

$$R(z) = R \left[ 1 + \alpha \text{sen} \left( \frac{2\pi z}{L + \Delta s} \right) \right], \quad (3.56)$$

novamente,  $R(z)$  é o raio do microvaso em função da variável  $z$  e  $\alpha$  é um amplitude adimensional das variações do raio do microvaso.

Substituindo-se  $Q = \pi \bar{U} R^2$  em que  $\bar{U}$  é a velocidade média do escoamento na Eq. (3.55) obtém-se

$$\frac{\mu_s}{\mu_p} = \left[ \int_0^L \frac{1 + (U_0 / \bar{U}) R^{-2} [F_u(z) - V_c / (\pi L)]}{F(z)} dz + \int_L^{L+\Delta s} \frac{1}{R(z)^4} dz \right] \left[ \int_0^{L+\Delta s} \frac{dz}{R(z)^4} \right]^{-1}. \quad (3.57)$$

Ao definir-se um formato de célula, ou seja, a função  $R_0(z)$  a Eq. (3.57) é calculada por um método padrão numérico. Na presente dissertação usa-se a regra de trapézio simples para os cálculos das integrais definidas na Eq. 3.57. Os resultados são apresentados na próxima seção.

### 3.4.3 Protótipo de Célula com formato de parabolóide

Nesta seção será descrito o escoamento do sangue em capilares em que as células protótipos possuem um formato axissimétrico de um parabolóide, conforme ilustrado na Fig. 3.6. É importante mencionar que outros formatos de célula protótipo,

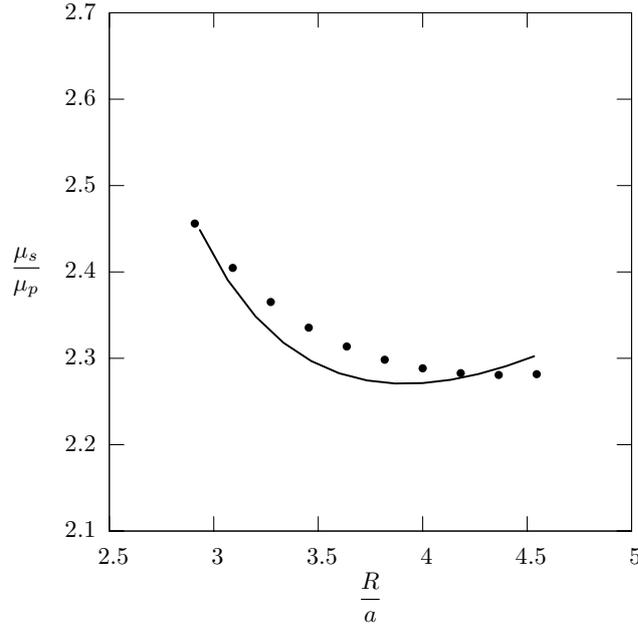


Figura 3.7: Viscosidade intrínseca adimensional em função da razão entre o raio do vaso e o raio característico da célula  $a$ . A linha cheia representa a curva para o modelo de escoamento do sangue em capilares com protótipos de glóbulos vermelhos com formato parabolóide movimentando-se em capilares com parede descrita por uma função senoidal considerando:  $U_0/\bar{U} = 1.3$ ,  $\Delta_s/(L + \Delta_s) = 0.8$ ,  $\alpha = 0.06$ . Os pontos são valores experimentais *in vivo* obtidos por Pries *et al.*, 1994.

como por exemplo, células cilíndricas e tronco de cone foram analisados por Tolentino & Cunha, 2005. O formato parabolóide de células protótipos foi o que se mostrou mais promissor como modelo do sangue no escoamento em capilares.

Da geometria de célula parabolóide o raio da célula  $R_0(z)$  é expresso em termos do raio do vaso como a seguir

$$R_0(z) = \vartheta R \sqrt{1 - \frac{z}{L}} \quad (3.58)$$

em que  $\vartheta = a/R$ ,  $a$  é o raio da célula calculado por  $R_0(0) = a$ .

O volume para um corpo de revolução arbitrário é dado por

$$V_c = \int_0^L \pi R_0^2(z) dz \quad (3.59)$$

Para o caso de um parabolóide o volume da célula reduz-se a

$$V_c = \frac{\pi \vartheta^2 R^2 L}{2}. \quad (3.60)$$

O raio do microvaso é calculado pela Eq. 3.56 e o volume compreendido entre  $0 < z <$

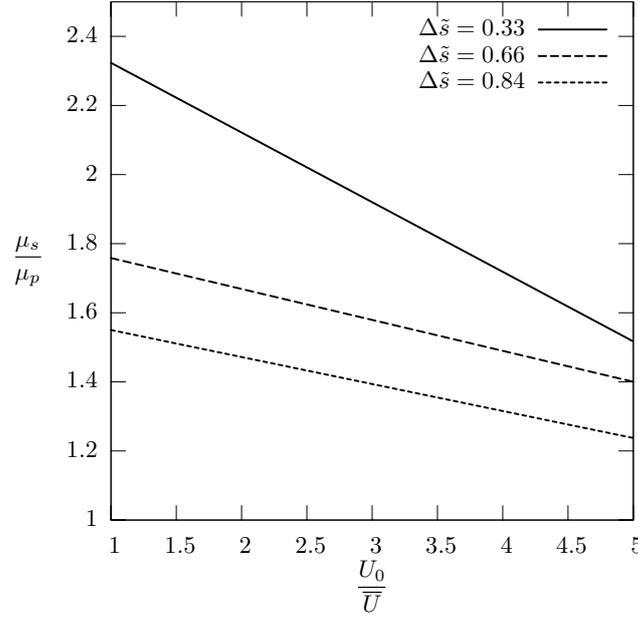


Figura 3.8: Viscosidade intrínseca adimensional versus a razão de velocidade da célula com a velocidade média do escoamento. Os valores são mostrados com diferentes valores do parâmetro de agregamento  $\Delta\tilde{s} = \Delta s / (L + \Delta s)$ .

$L + \Delta s$  é calculado pela equação a seguir,

$$V = \pi R^2 (L + \Delta s) \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (3.61)$$

Da Fig. (3.7) observa-se que o modelo prevê de forma qualitativa o valor da viscosidade intrínseca adimensional em que ocorre o ponto de mínimo ( $\mu_s/\mu_p \approx 2,3$ ). Contudo o valor do raio adimensional ( $R/a$ ) do ponto de mínimo de  $\mu_s/\mu_p$  desvia-se em torno de 20% dos valores experimentais *in vivo* apresentados. Para valores de  $R/a < 3$  o modelo diverge dos valores experimentais devido ao estado de deformação intenso que o glóbulo vermelho apresenta nessa região. No caso, não se pode assumir um escoamento axisimétrico e o formato da célula deformada não se assemelha a um parabolóide. Para valores de  $R/a > 4,25$ , o escoamento em microvaso deixa de ser enfileirado e deve-se levar em conta as interações entre células, bem como a tridimensionalidade do escoamento. O modelo de células protótipos enfileiradas na região citada é inadequado, portanto. Assim, no intervalo  $3 < R/a < 4,25$  o modelo se aproxima satisfatoriamente do escoamento em capilares reais. Vale ressaltar que no intervalo mencionado, o modelo também reproduz o efeito Fahraeus-Lindqvist inverso. Nesse caso a viscosidade intrínseca aumenta com a diminuição do diâmetro do microvaso tendo em vista o intenso efeito de parede sobre as células nesse regime capilar.

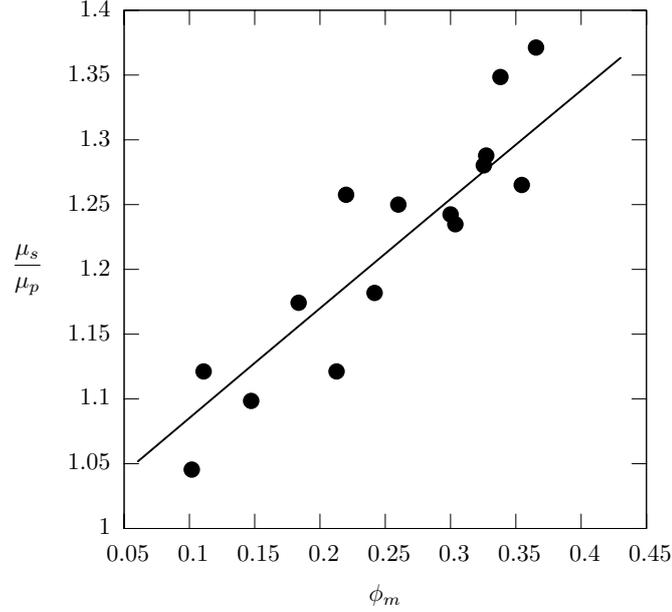


Figura 3.9: Viscosidade intrínseca adimensional em função do hematócrito  $\phi_m$ . Os pontos no gráfico representam medidas observadas experimentalmente por Pries *et al.*, 1992, em tubos de vidro de diâmetro de  $6\mu m$ .

Na Fig. 3.8 vê-se que velocidades dos protótipos de glóbulos vermelhos acima da velocidade média do escoamento provocam a redução da viscosidade intrínseca do sangue. As diferentes curvas mostram que quanto menor a distância entre células ( $\Delta s$ ), relacionada a agregação de células, maior é a viscosidade intrínseca do sangue, resultado que concorda com citações encontradas em referências de trabalhos específicos sobre efeitos agregativos de glóbulos vermelhos (Bishop *et al.*, 2001). A Fig. 3.8 indica ainda que para  $U_0/\bar{U} \rightarrow 1$  os valores das viscosidades intrínsecas  $\mu_s/\mu_p$  são aproximadamente 2,3; 1,7 e 1,5 correspondendo, respectivamente a  $\Delta \tilde{s} = 0,33$ ; 0,66 e 0,84. Resultado este que mostra um aumento de 50% para uma variação de mais de 0,51 de  $\Delta s$ .

Com o presente modelo também é possível estimar a dependência da viscosidade intrínseca para diferentes valores de hematócrito  $\phi_m$ , calculada pela equação a seguir,

$$\phi_m = \frac{V_c}{V} = \frac{v^2 L}{2(L + \Delta s) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}. \quad (3.62)$$

A Fig. 3.9 mostra o comportamento da viscosidade intrínseca adimensional do sangue em função do hematócrito. Vê-se que o modelo se ajusta com proximidade de valores obtidos de dados experimentais. O resultado também indica que nesse regime

da microcirculação a viscosidade intrínseca se aproxima do valor da viscosidade do plasma e é proporcional ao hematócrito.

É importante considerar que no presente estudo há um salto de vasos da ordem de  $100\mu m$  para ordem de  $10\mu m$ . O problema envolvendo vasos da ordem de  $20-50\mu m$  é muito complexo devido a tridimensionalidade do escoamento, interações célula-célula e um número insuficiente de glóbulos vermelhos tal que um modelo contínuo possa ser aplicado. Estes regimes de microcirculação começam a ser explorados apenas agora usando-se método de integração de contorno (e.g. Cristini, 2003).

## Capítulo 4

# Modelos constitutivos de emulsões e suspensões

Neste capítulo serão apresentados modelos constitutivos de emulsões e suspensões. Também serão abordados aspectos físicos das emulsões importantes para a produção das mesmas.

### 4.1 Característica de emulsões

Uma das características importantes presente em emulsões é sua estabilidade, pela ausência de movimento relativo entre fases. Dessa forma, uma emulsão pode preservar sua estrutura interna por um determinado tempo. Em emulsões óleo/água, por exemplo, em que o óleo é menos denso que a água, a sedimentação de gotas e a migração das gotas de óleo podem ser retardadas pela ação de tensoativos. Esses mecanismos de desestabilização levam a um fenômeno chamado de cremação. Além desse fenômeno físico, a tensão superficial que controla a capacidade de deformação das gotas pode induzir a floculação por coalescência, levando a formação de gotas maiores na emulsão. Isso representa uma quebra da homogeneidade da emulsão e uma mudança microestrutural da mesma que afeta diretamente as propriedades reológicas do fluido. Agentes emulsificantes tendem a reduzir a tensão superficial das gotas de uma emulsão e reduzir a tendência da coalescência de gotas e conseqüentemente a precipitação das mesmas (Paraíso *et al.*, 2005).

Em relação a distribuição física do tamanho de gotas, as emulsões podem ser caracterizadas como sendo polidispersas, contendo gotas de diferentes tamanhos (ver

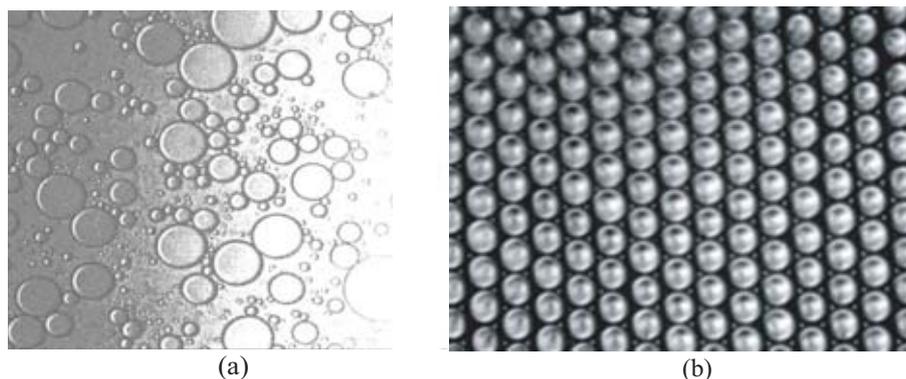


Figura 4.1: Fotos mostrando a distribuição de gotas (a) emulsão polidispersa (foto tirada no laboratório de metalografia da UnB) e (b) emulsão monodispersa (Weitz, 2008).

Fig. 4.1(a)) ou monodispersas (ver Fig. 4.1(b)), em que as gotas possuem aproximadamente a mesma forma e dimensão.

Os surfactantes são emulsificantes tensoativos na água. Esses agentes químicos caracterizam-se por possuírem moléculas anfipáticas, ou seja, possuem uma parte hidrofílica, solúvel em água, e uma parte hidrofóbica, insolúvel em água. As moléculas de surfactantes tendem a formar estruturas chamadas micelas, em que a parte hidrofílica da molécula fica voltada para a água e a parte hidrofóbica se direciona para o centro da estrutura (Paraíso *et al.*, 2005). A presença de surfactantes distribuídos nas superfícies das gotas produzem intensas forças de repulsão entre as gotas de óleo, estabilizando a emulsão contra a coalescência. Na Fig. 4.2(a) mostra-se a ilustração da molécula típica de uma substância anfipática como os surfactantes. Em adição a Fig. 4.2(b) apresenta a estrutura de micela formada por essas moléculas quando imersas em água. Em emulsões com gotas de óleo distribuídas em água as moléculas envolvem as gotas. Por conta disso, no processo de produção de emulsões leva-se em conta a superfície total das gotas da fase dispersa para se determinar a massa necessária de surfactante a ser usada em uma emulsão Prista *et al.*, 1991. Maiores detalhes da produção de uma emulsão durante os ensaios desenvolvidos neste trabalho são apresentados no anexo E.

Em relação a fase dispersa de uma emulsão de óleo com água, vale dizer que é possível ter configurações como gotas de água dispersas em óleo (configuração A/O), gotas de óleo dispersas em água (O/A) e gotas de água dispersas em gotas de óleo dispersas em água (A/O/A).

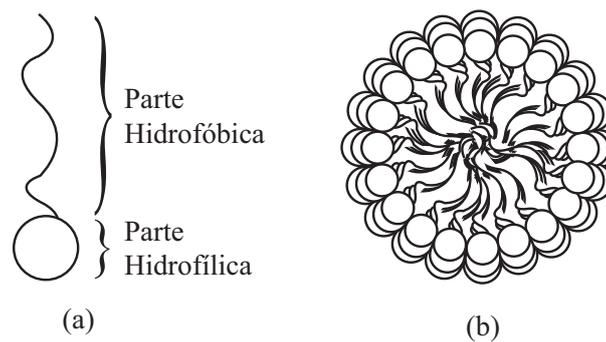


Figura 4.2: Ilustração da molécula de surfactante em (a) e em (b) tem-se a estrutura de micela formada por essas moléculas quando imersas em água.

Por analogia o sangue pode ser descrito numa primeira aproximação como sendo uma emulsão polidispersa estável. Os glóbulos vermelhos são partículas na forma de cápsulas ou vesículas bem mais complexas que as gotas de uma emulsão óleo/água, por exemplo. Sua membrana dessa cápsula ou célula é composta por uma dupla camada de fosfolípidos (moléculas anfipáticas), proteínas (e. g. glicoproteínas, proteína globular), carboidratos, colesterol. A membrana de um glóbulo vermelho, possui uma estrutura visco-elástica comentadas em mais detalhes no cap. 1 do presente trabalho. Diferente das gotas, as hemácias não sofrem coalescência, mas podem flocular, em forma de agregados conhecidos como *roleaux* ou mesmo *clunks*. A diversidade de componentes na membrana de uma hemácia atribui a essa uma certa rugosidade superficial que deve ser levada em conta em uma análise de difusão hidrodinâmica devido interações célula-célula. Em microvasos menores que  $7\mu m$  a grande proximidade das células com a parede do vaso (regiões de altos números de capilaridade) faz com que as células sofram deformações consideráveis, mesmo com razões de viscosidade célula-plasma acima da unidade e em número de capilaridade baixos. Mesmo deformada a membrana preserva sua área, por sua incompressibilidade. O movimento do citoplasma, interno a uma hemácia é inibido pela alta razão de viscosidade membrana-citoplasma. Por conseqüência esse movimento citoplasmático interno não influencia na reologia do sangue, como já mencionado na análise de escala do capítulo 3. Quando a célula encontra-se isolada e em distâncias consideráveis da parede, a membrana desenvolve um movimento de rotação em torno do citoplasma, semelhante ao movimento de uma esteira de tanque de guerra, o que leva ao nome do fenômeno de "Tank Threading" (Pozrikidis, 2003).

## 4.2 Fluidos complexos homogêneos

Suspensões ou emulsões são descritos como sendo um fluido homogêneo equivalente com uma fase contínua e uma fase dispersa sem movimento relativo. No caso de suspensões a fase dispersa é formada por partículas sólidas e a fase contínua um fluido. Em se tratando de emulsões as duas fases são fluidas, em geral líquidos viscosos. A fase dispersa de uma emulsão é composta por gotas.

O tensor de tensões médio ou efetivo da emulsão equivalente é descrito pela seguinte equação constitutiva

$$\bar{\Sigma} = -\bar{p}\mathbf{I} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} + n\bar{\mathbf{S}}, \quad (4.1)$$

que corresponde a uma média volumétrica do tensor de tensões tomada em um meio contínuo contendo um número grande suficiente de gotas. Aqui define-se  $n = N/V$  é o número de densidade da fase dispersa em que  $N$  é o número total de gotas,  $V$  o volume na escala do contínuo,  $\bar{\mathbf{S}}$  é o tensor de tensões médio devido a presença das partículas dispersas no fluido ambiente,

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \mathbf{S}^p \quad (4.2)$$

em que  $p$  é índice da  $p$ -ésima gota ou partícula,  $\mathbf{S}^p$  é o tensor de tensão superficial de cada gota ou partícula (*stresslet*) exercida no fluido base calculada segundo Batchelor, 1970, pela equação a seguir

$$\mathbf{S}^p = \int_{\mathbf{S}^p} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{u}\mathbf{n} - \mathbf{n}\mathbf{u})] dS. \quad (4.3)$$

Para suspensões o escoamento em contato com a superfície rígida das partículas deve obedecer a condição de não deslizamento na superfície da partícula, portanto  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  e tensor da partícula se reduz a

$$\mathbf{S}^p = \int_{\mathbf{S}^p} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\mathbf{x} dS. \quad (4.4)$$

No caso de uma suspensão diluída de partículas totalmente esféricas em que as interações hidrodinâmicas entre as partículas não são consideradas o tensor de tensões médio da partícula é dado por

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \bar{\mathbf{D}} 5\mu. \quad (4.5)$$

Substituindo a Eq. 4.5 na Eq. 4.1 obtém-se

$$\bar{\Sigma} = -\bar{p}\mathbf{I} + 2\mu \left( 1 + \frac{5}{2}\phi \right) \bar{\mathbf{D}} \quad (4.6)$$

em que  $\phi = 4/3\pi a^3 n$  é a fração volumétrica da fase dispersa. Define-se  $\mu_{eff} = \mu (1 + \frac{5}{2}\phi)$ , considerada viscosidade de Einstein, também denominada viscosidade efetiva para suspensões diluídas. Por isso uma emulsão diluída com concentração menor que aproximadamente ( $\phi = 0,04$ , Roco, 1993) comporta-se como um fluido newtoniano equivalente com uma viscosidade efetiva  $\mu_{eff}$ .

Em suspensões não-diluídas termos  $O(\phi^2)$  são associados à interações hidrodinâmicas viscosas entre partículas quando a suspensão possui frações volumétricas maiores que da ordem de 0,05. Tal contribuição ainda não foi elucidada, pois não somente a fração volumétrica, mas as condições do escoamento influenciam a predição do coeficiente de  $\phi^2$ , tornando a contribuição  $O(\phi^2)$  uma contribuição não universal por ter caráter não-newtoniano.

#### 4.2.1 Um modelo microestrutural de emulsão diluída

Em emulsões diluídas com concentração menor que aproximadamente 0,1, as partículas não interagem hidrodinamicamente entre si, mas supõe-se um número de partículas suficientemente grande para que seja possível estabelecer um volume infinitesimal de fluido contínuo equivalente tal que uma distribuição estatisticamente homogênea de partículas possa ser obtida. Uma emulsão diluída sujeita a baixas taxas de cisalhamento (pequenos números de capilaridade) pode comportar-se como um fluido newtoniano equivalente descrito segundo Taylor, 1932,

$$\frac{\mu_e}{\mu} = 1 + \phi \frac{1 + 5/2\lambda}{1 + \lambda}. \quad (4.7)$$

em que no limite assintótico  $\lambda \rightarrow 0$   $\mu_e/\mu \rightarrow 1 + \phi$ , que corresponde a condição de uma emulsão de bolhas já que  $\mu_g \ll \mu$  ( $\mu_g$  é a viscosidade da gota), enquanto no limite  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\mu_e/\mu \rightarrow 1 + 2,5\phi$ , corresponde a condição de partícula rígida em que  $\mu_g \gg \mu$ .

No caso de emulsões a tensão superficial de partícula (*stresslet*) é função do número de capilaridade e da razão de viscosidade da emulsão. O número de capilaridade é a razão entre o tempo de relaxação da gota e o tempo convectivo do escoamento, portanto

$$Ca = \frac{t_r}{t_e} = \frac{(\mu a / \sigma_0)}{(1/\dot{\gamma})} = \frac{\dot{\gamma} \mu a}{\sigma_0} \quad (4.8)$$

em que  $t_r = \mu a / \sigma_0$  é o tempo de relaxação da gota,  $\sigma_0$  é a tensão superficial da gota e  $t_e = 1/\dot{\gamma}$  é o tempo convectivo do escoamento. Para valores de  $Ca \sim 1$  o tempo de

relaxação da gota é da mesma ordem do tempo convectivo do escoamento. Nesse caso a gota deforma e o fluido equivalente apresenta uma memória similar ao que ocorre com fluidos visco-elásticos. No caso em que  $Ca \ll 1$  a gota preserva seu formato esférico pois o tempo para a gota deformar é muito maior que o tempo de relaxação da tensão de superfície de modo que a tensão superficial o preserva o formato inicial da gota. O tensor médio equivalente da emulsão em três dimensões é expresso por

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_c + n\bar{S}(Ca, \lambda) \quad (4.9)$$

em que  $\bar{\Sigma}_c$  é a média volumétrica do tensor de tensões da fase contínua e  $\bar{S}(Ca, \lambda)$  é a média volumétrica do tensor de tensões das gotas (fase dispersa).

Vale mencionar que o número de capilaridade no contexto de emulsões exerce o mesmo papel que o número de Deborah em líquidos poliméricos (elásticos). Assim, para se determinar o escoamento em um instante dado, deve-se conhecer toda a história de deformação das gotas pelo escoamento. No caso em que o tempo do escoamento é muito maior que o tempo de relaxação da gota, ou seja  $Ca \ll 1$ , o efeito memória da emulsão associado com a deformação das gotas na emulsão pelo escoamento é muito curta. Nessas circunstâncias para se determinar o escoamento em um instante não é necessário conhecer toda a história de deformação do fluido. Nesse caso a emulsão comporta-se como um fluido newtoniano equivalente com viscosidade efetiva  $\mu_e = \mu f(\phi)$ , em que as gotas permanecem praticamente esféricas.

A razão de viscosidade entre a gota e o meio fluido,  $\lambda = \mu_g/\mu$  em que  $\mu_g$  é a viscosidade da gota e  $\mu$  é a viscosidade do meio fluido, é um parâmetro relevante do estudo da deformação de gotas em uma emulsão. Para valores de  $\lambda \ll 1$  a gota pode apresentar grandes deformações mesmo em pequenos números de Capilaridade ( $Ca \sim 1$ ). Baixos valores de  $\lambda$  indicam também um movimento interno intenso do fluido no interior da gota, o que induz um mecanismo que produz maiores deformações na gota. Quando deformadas e orientadas com o escoamento, as gotas criam uma anisotropia no tensor de tensões e conseqüentemente na direção de tensões normais no escoamento da emulsão. No caso em que  $\lambda \gg 1$  as deformações das gotas são pequenas e o formato é aproximadamente esférico (recai em um problema de pequenas deformações em que a gota gira muito mais rápido do que deforma). Para  $\lambda \ll 1$ , a deformação e orientação das gotas resultam em um comportamento de fluido não-newtoniano da emulsão, em que a viscosidade decresce com altas taxas de cisalhamento e existe diferença de tensões

normais, comportamento este típico de um líquidos elásticos (Lowenberg & Hinch, 1997).

No caso de emulsões concentradas (acima de 50%), as interações entre gotas atribuem também à emulsão um comportamento de fluido não-newtoniano independente das características individuais de deformação das gotas. Nesse caso gotas vizinhas induzem deformação em uma gota teste, produzida pelos distúrbios hidrodinâmicos com o movimento de cada gota. A viscosidade aparente e as diferenças de tensões normais  $N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22}$  e  $N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33}$  da emulsão dependem da fração volumétrica e da taxa de cisalhamento, resultando numa resposta reológica não-linear da emulsão. Dessa forma, uma relação exata entre a viscosidade aparente e a fração volumétrica das gotas para emulsões concentradas ainda não foi determinada, sendo as relações disponíveis na literatura de origem empírica ou baseadas em propostas heurísticas. Interações hidrodinâmicas entre gotas são atualmente tratadas em termos de adição de contribuição de pares, mas não se tem um cálculo que permita determinar a distribuição das partículas dada a interação de mais de duas partículas simultaneamente.

O estudo de emulsões diluídas permite o entendimento de conceitos fundamentais da microhidrodinâmica e reologia envolvidos com o comportamento de gotas quando uma emulsão é sujeita a escoamentos cisalhantes prescritos. Para o caso de uma emulsão diluída de altas razões de viscosidade as gotas sofrem pequenas deformações, mantendo um formato aproximadamente esférico. A deformação e orientação das gotas absorvem a quantidade de movimento que seria difundido entre as camadas de fluido e assim observa-se um comportamento de fluido pseudo-plástico.

O movimento do sangue na microcirculação em vasos da ordem de  $100\mu m$  poderia ser descrito em uma primeira aproximação como sendo uma emulsão de alta razão de viscosidade e assim apresenta características pseudo-plásticas. Na presente dissertação propõe-se um modelo protótipo de sangue comportando-se como uma emulsão diluída ( $\phi$  até 0,3) de alta razão em regimes de microcirculação. Cabe destacar aqui que o fator de se usar uma emulsão de altas razões de viscosidade foi motivado pela alta razão de viscosidade da membrana do glóbulo vermelho em relação ao plasma, conforme discutido no capítulo 3.

Geralmente equações constitutivas baseadas em análises micro-estruturais re-

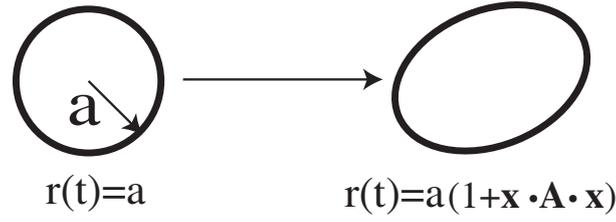


Figura 4.3: Ilustração de uma gota de emulsão deformada pelo escoamento com formato de elipsóide.

caem em modelos de duas equações. Uma das equações estabelece a evolução do formato da gota imposto pelo escoamento e a outra relaciona as deformações da gota com o tensor de tensões que descreve a emulsão do ponto de vista reológico. A superfície de uma gota sujeita a pequenas deformações pode ser representada pela equação a seguir (Oliveira *et al.*, 2005)

$$r(t) = a(1 + \mathfrak{D}), \quad (4.10)$$

em que  $a$  é o raio da gota não deformada (esfera) e  $\mathfrak{D}$ , para pequenas deformações, corresponde à correção da geometria elipsoidal da gota, como mostrado na Fig. 4.3. Para análise de primeira ordem  $\mathfrak{D} = \frac{1}{r^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + O(r^{-4})$  (Oliveira *et al.*, 2005), em que  $\mathbf{x}$  é o vetor posição da superfície da gota e  $\mathbf{A}$  é um tensor de segunda ordem relacionado com a deformação da gota (mais detalhes ver Oliveira *et al.*, 2005).

Para emulsões diluídas e com gotas que sofrem pequenas deformações, o par de equações constitutivas da evolução das distorções da gota e do tensor de tensões são dadas respectivamente por (Barthes-Biesel & Sgaier, 1985)

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}\mathbf{A}}{\mathcal{D}t} = f_1 \mathbf{D} + f_2 \left( \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} - \frac{2}{3} (\mathbf{A} : \mathbf{D}) \mathbf{I} \right) + \dots \\ \dots + \frac{\sigma_0}{a\mu} (f_3 \mathbf{A} + f_4 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \dots), \end{aligned} \quad (4.11)$$

em que

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{A}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} \quad (4.12)$$

é a derivada de Jaumman que translada e gira com as partículas fluidas. É importante observar que  $\frac{\mathcal{D}\mathbf{A}}{\mathcal{D}t}$  é uma quantidade invariante a uma rotação de referencial. Para o tensor de tensões em termos do tensor distorção  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$ , apresenta-se uma variação do tensor de tensões de Frankel & Acrivos, 1970, para emulsões de alta razão de viscosidade

$$\bar{\Sigma} = -\bar{p}\mathbf{I} + \tau \quad (4.13)$$

em que

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} + 2\mu\phi \left[ f_1\mathbf{D} + f_2 \left( \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} - \frac{2}{3}(\mathbf{A} : \mathbf{D})\mathbf{I} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sigma_0}{a\mu}(f_3\mathbf{A} + f_4\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \dots) \right] \quad (4.14)$$

em que  $f_n = f_n(\lambda)$  são coeficientes que dependem da razão de viscosidades gota-fluido base.

A Eq. 4.14, dependendo do escoamento por meio de  $\mathbf{D}$  e sendo função explícita do tensor de distorção das gotas  $\mathbf{A}$ , caracteriza um forte acoplamento geometria-reologia nesse modelo de duas equações.

## Capítulo 5

# Modelo constitutivo microestrutural de emulsões de alta razão de viscosidade

Neste capítulo será apresentada a solução do escoamento de dois fluidos imiscíveis em um microvaso no qual o fluido adjacente à parede representa o plasma do sangue, descrito como sendo um fluido newtoniano, enquanto que o fluido no núcleo do microvaso representa uma emulsão protótipo do sangue. Utiliza-se um modelo microestrutural de emulsões o qual considera regimes diluídos de gotas de altas razões de viscosidade entre o plasma e a gota. A Fig. 5.1 ilustra o escoamento examinado ao lado da micrografia de um microvaso real. O modelo microestrutural resulta em duas equações constitutivas acopladas, uma descrevendo a evolução da geometria e forma da gota enquanto a outra equação constitutiva expressa a contribuição da fase dispersa do tensor de tensões equivalente ou médio da emulsão. Conforme mencionado, a idéia é usar o modelo de emulsão de gotas de altas razões de viscosidade como um modelo protótipo do sangue, baseado em valores dos mesmos parâmetros mecânicos relativos às células reais.

### 5.1 Descrição das equações constitutivas

Na seção a seguir serão apresentadas as equações constitutivas usadas no modelo microestrutural do sangue. A superfície de uma gota sujeita a uma pequena deformação pode ser representada pelo caso particular e adimensional da Eq. 4.10 e dada a seguir por

$$S(t) = r(t) - (1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (5.1)$$

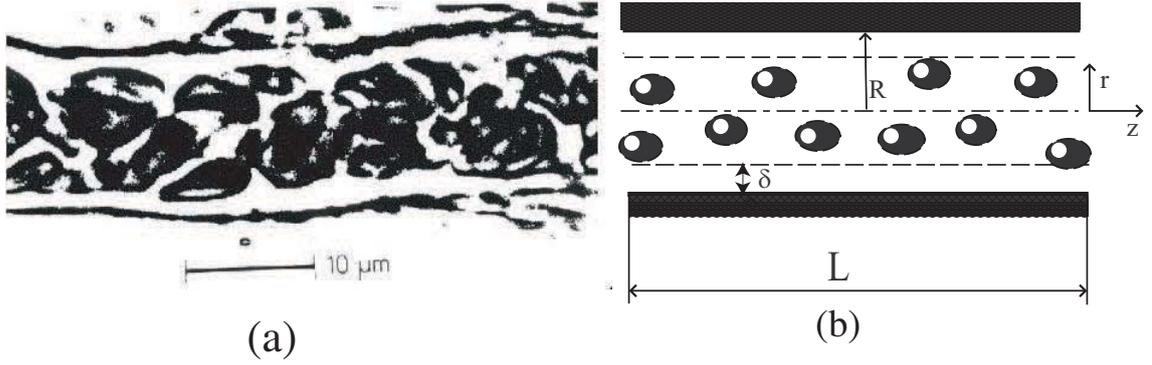


Figura 5.1: Ilustração do modelo adotado para descrever o escoamento no interior de um microvaso. (a) Micrografia de um microvaso real, (b) modelo

em que  $r(t)$  é a posição da superfície da gota em um dado instante  $t$ ,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a superfície  $S(t)$  da gota e  $\mathbf{A}$  é um tensor distorção de segunda ordem relacionado com a deformação e a orientação da gota. O termo  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  representa a primeira correção da deformação que a gota sofre de sua geometria esférica inicial para uma geometria elipsoidal.

Para o modelo microestrutural de duas equações explora-se aqui a equação adimensional que descreve a evolução da superfície da gota em cada instante de do movimento. A referida equação é descrita por (Oliveira *et al.*, 2005, Rallison, 1984)

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = Ca\varrho\mathbf{W} \cdot \mathbf{A} - Ca\varrho\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} + \frac{5}{2\lambda}Ca\varrho\mathbf{D} - c\mathbf{A} \quad (5.2)$$

Em adição a equação que descreve o tensor de tensões efetivo da emulsão, em termos do tensor distorção  $\mathbf{A}$  e do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$  é proposta no presente contexto como uma variação do modelo de Frankel & Acrivos, 1970, para a condição de altas taxas de razão de viscosidade. Essa equação, associada à presença das gotas no escoamento, é a tensão  $\boldsymbol{\tau}$  a ser substituída na Eq. 4.13 e é dada por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu_B(\lambda)\mathbf{D} + \frac{4\phi}{Ca\varrho}\mathbf{A} + \frac{15}{7}\phi \left[ \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} - \frac{2}{3}(\mathbf{A} : \mathbf{D})\mathbf{I} \right], \quad (5.3)$$

em que  $Ca = \lambda\mu\dot{\gamma}_c R/\sigma_0$  (Oliveira, 2007) é o número de capilaridade definido de maneira mais apropriada para emulsões de alta razão de viscosidade em escoamento de Poiseuille em tubo,  $\varrho = a/R$  é uma razão de aspecto entre o raio da gota e o raio do tubo do escoamento. O parâmetro  $\varrho$  pode ser interpretado como um número de Knudsen do problema, uma vez que  $a$  representa uma escala intrínseca ao fluido e  $R$  representa

a escala do escoamento (Oliveira, 2007). Nesse caso o termo de relaxação da tensão superficial é  $\lambda\mu R/\sigma_0$ . Em outras palavras, o número de capilaridade nessa abordagem é baseado na viscosidade da gota  $\mu_g \gg \mu$ . Em adição,  $\mathbf{W}$  é a parte anti-simétrica do gradiente de velocidade,  $c = 20/19$  e  $\mu_B = \phi[5/2 + 25/(4\lambda)]$ . Nas equações 5.2, 5.3 usou-se a seguinte adimensionalização das variáveis,  $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{W}}/\dot{\gamma}$ ,  $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}}/\dot{\gamma}$ ,  $t = \tilde{t}/(a/(v_c))$  em que  $v_c = \sigma_0/(\lambda\mu)$  e as variáveis sobrelinhadas são dimensionais.

Como as equações constitutivas estão expressas em termos adimensionais, por conveniência, a equação de balanço de quantidade de movimento será usada também na forma adimensional para a solução do escoamento em questão. Para isso usa-se as seguintes variáveis adimensionais  $r = \tilde{r}/a$ ,  $\tau = \tilde{\tau}/(\mu U/a)$ ,  $\tilde{G} = dp/dz/[U^2\rho/(2a)]$ , em que  $\tilde{G}$  é um gradiente adimensional de pressão e  $U$  a velocidade média do escoamento. As equações que governam o escoamento no microvaso com a presença da camada de plasma adjacente a parede são dadas por

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_s) = -\frac{Re\tilde{G}}{2} & \text{para } 0 < r \leq \xi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_p) = -\frac{Re\tilde{G}}{2} & \text{para } \xi < r \leq 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

em que  $\xi = (R - \delta)/R$  e  $R$  é o raio do microvaso,  $Re = \frac{U\rho a}{\mu_p}$  é o número de Reynolds e as tensões  $\tau_s$  e  $\tau_p$  são as tensões de cisalhamento nas regiões do escoamento. Para diferenciar os domínios do escoamento, usa-se o índice  $s$  para a região de núcleo do microvaso ocupado pelo protótipo de sangue, representado pela emulsão, e o índice  $p$  para a região adjacente à parede do microvaso, ocupado pelo plasma. O escoamento é aproximadamente unidirecional.

Agora, considerando-se o caso permanente em que  $d\mathbf{A}/dt = 0$  e após algumas manipulações algébricas das Eqs. 5.2 e 5.3 de forma a se obter  $\tau_s$  para a Eq. 5.4 (mais detalhes podem ser obtidos em Oliveira, 2007), o movimento unidirecional fica governado pelo sistema de equações adimensionais dado abaixo (Carvalho *et al.*, 2007).

$$\begin{cases} \mu_T \frac{du}{dr} + \epsilon \left[ \mu_B \left( \frac{du}{dr} \right)^3 + \frac{\tilde{G}Re}{2} r \left( \frac{du}{dr} \right)^2 \right] = -\frac{\tilde{G}Re}{2} r & \text{para } 0 < r \leq \xi \\ \frac{du}{dr} = -\frac{\tilde{G}Re}{2} r & \text{para } \xi < r \leq 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

em que  $\mu_T = 1 + \phi[5/2 + 3/(2\lambda)]$  corresponde ao limite assintótico de baixos  $Ca$ , chamado viscosidade de Taylor e o parâmetro  $\epsilon = (Ca/c\rho)^2$ ,  $c = 20/19$ . Aqui  $\epsilon$

pode ser considerado um parâmetro pequeno para o cálculo de soluções assintóticas do escoamento.

Como condições de contorno para as soluções das equações acima, especifica-se que a tensão cisalhante é nula no centro do escoamento axissimétrico; a continuidade de tensão e velocidade na interface sangue-plasma e velocidade nula na parede do microvaso. Em termos adimensionais estas condições são expressas como

$$\tau_s(0) = 0, \quad u_p(1) = 0, \quad \tau_s(\xi) = \tau_p(\xi), \quad u_s(\xi) = u_p(\xi). \quad (5.6)$$

## 5.2 Solução da equação do movimento da emulsão

Na seção a seguir serão mostrados o método de cálculo e a solução para as equações do modelo microestrutural de sangue proposto. Conforme acima mencionado na região do microvaso que contém a emulsão protótipo do sangue, a equação diferencial ordinária não-linear

$$\mu_T \frac{du}{dr} + \epsilon \left[ \mu_B \left( \frac{du}{dr} \right)^3 + \frac{\tilde{G}Re}{2} r \left( \frac{du}{dr} \right)^2 \right] = -\frac{\tilde{G}Re}{2}, \quad (5.7)$$

descreve o movimento fluido contínuo na parte nuclear do escoamento. Um método assintótico regular para pequenos valores de  $\epsilon$  e um método numérico para valores arbitrários de  $\epsilon$  será usado para a determinação da solução da equação diferencial 5.7 seguindo uma metodologia análoga a descrita em Oliveira *et al.*, 2005, e apresentada em Carvalho *et al.*, 2007.

### 5.2.1 Solução assintótica

Nesta sub-seção é apresentada uma solução assintótica do problema para pequenos valores do parâmetro  $\epsilon$ . Investir numa solução assintótica é sempre promissor pois além de fornecer uma forma de validar em condições de  $\epsilon \ll 1$  pode também ser usado para validação de solução numérica necessária quando  $\epsilon \sim 1$  e  $\epsilon \gg 1$ .

O método de perturbação regular permite que uma solução nas vizinhanças de um ponto seja determinada a partir da condição na qual tem-se um parâmetro pequeno,  $\epsilon \ll 1$ . Nestas condições a função,  $f(x)$  pode ser expressa em termos da série de potência em  $\epsilon$  dada por (Hinch, 1991)

$$f(x) \sim f_0(x) + f_1(x)\epsilon + f_2(x)\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (5.8)$$

em que  $f_n(x)$  são os termos de ordem  $n$  da solução assintótica e  $f_0(x)$  é o termo dominante da solução aproximada. Termos  $O(\epsilon^3)$  serão desprezados na presente análise.

Para se obter as equações diferenciais ordinárias lineares que governam cada termo  $f_n$ , substitui-se a série (5.8) na equação diferencial (5.7) a fim de se obter uma equação do tipo

$$\mathcal{F} \left( f(x), \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^n f}{dx^n} \right) = 0 \quad (5.9)$$

Despreza-se os termos  $O(\epsilon^3)$  para se obter as equações diferenciais para cada ordem  $f_n$  com  $n = 0, 1, 2$ . De 5.9 obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\mathcal{F}_0 \left( \frac{df_0}{dx} \right) = 0 \quad (5.10)$$

$$\mathcal{F}_1 \left( \frac{df_0}{dx}, \frac{df_1}{dx} \right) = 0 \quad (5.11)$$

$$\mathcal{F}_2 \left( \frac{df_0}{dx}, \frac{df_1}{dx}, \frac{df_2}{dx} \right) = 0. \quad (5.12)$$

Calcula-se, então, a solução geral de cada uma das equações diferenciais 5.10 a 5.12. Com uma condição de contorno do tipo  $f(c) = f_c$  especificada em  $x = c$ , de 5.8 para que essa condição de contorno seja satisfeita:  $f_0(x) = f_c$ ;  $f_1(c) = 0$  e  $f_2(c) = 0$ .

Para o caso do escoamento de dois fluidos imiscíveis tem-se que, primeiramente, solucionar a equação do movimento 5.4 em função das tensões de cisalhamento  $\tau_s$  e  $\tau_p$ . Assim, integrando 5.4 para as duas regiões do escoamento determina-se que

$$\begin{cases} \tau_s = -\frac{Re\tilde{G}}{2} \left( \frac{r}{2} + \frac{C}{r} \right) & \text{para } 0 \leq r \leq \xi \\ \tau_p = -\frac{Re\tilde{G}}{2} \left( \frac{r}{2} + \frac{D}{r} \right) & \text{para } \xi < r \leq 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

Pela condição de tensão de cisalhamento nula no eixo de simetria do escoamento, ou seja  $r = 0$ , determina-se que  $C = 0$ . Por outro lado,  $D$  é determinada pela condição da continuidade de tensão na interface, obtendo-se  $D = 0$ . Para a região  $\xi < r \leq 1$ , ocupada por um fluido newtoniano, tem-se simplesmente que

$$u_p(r) = -\frac{Re\tilde{G}}{4}r^2 + E. \quad (5.14)$$

Pela condição de contorno de não-deslizamento na parede do microvaso, calcula-se o valor da constante  $E$  como sendo

$$E = \frac{Re\tilde{G}}{4} \quad (5.15)$$

E o campo de velocidade resultante é expresso pela equação parabólica a seguir:

$$u_p(r) = \frac{Re\tilde{G}}{4}(1 - r^2) \quad (5.16)$$

Resta agora aplicar a condição de contorno de continuidade de velocidade na interface entre o sangue e o plasma. Para aplicar essa condição faz-se necessário resolver a equação diferencial não-linear que corresponde a contribuição da emulsão protótipo do sangue para o tensor de tensões do escoamento. Partindo de (5.7) tem-se

$$\mu_T \frac{du}{dr} + \epsilon \left[ \mu_B \left( \frac{du}{dr} \right)^3 + \frac{\tilde{G}Re}{2} r \left( \frac{du}{dr} \right)^2 \right] + \frac{\tilde{G}Re}{2} r = 0 \quad (5.17)$$

Usando-se o método de expansão regular, com  $\epsilon$  como parâmetro pequeno, propõe-se uma expansão em série da velocidade como sendo

$$u(r) = u_0(r) + u_1(r)\epsilon + u_2(r)\epsilon^2 = u^p(r) + u'(r) \quad (5.18)$$

Em que  $u^p(r)$  é o perfil de velocidade parabólico em  $r$ , associado à contribuição newtoniana equivalente da solução e que independe do número de capilaridade da emulsão. Por outro lado o campo de velocidade  $u'(r)$  denota a contribuição dos efeitos não-newtonianos da emulsão para o perfil de velocidade do escoamento devido a deformação e orientação das gotas. Essa contribuição não-linear depende do número de capilaridade, da fração volumétrica das gotas da emulsão e da razão de viscosidades entre gota-plasma. Substituindo-se a expressão de  $u(r)$  dada pela série 5.18 na Eq. 5.17, obtém-se para a ordem zero, a seguinte equação diferencial

$$\mu_T \frac{du_0}{dr} + \frac{Re\tilde{G}}{2} r = 0. \quad (5.19)$$

Para a ordem  $O(\epsilon)$ , determina-se a equação diferencial ordinária

$$\mu_T \frac{du_1}{dr} + \mu_B \left( \frac{du_1}{dr} \right)^3 + \frac{1}{2} \tilde{G}Re \left( \frac{du_0}{dr} \right)^2 = 0 \quad (5.20)$$

e para a segunda ordem,  $O(\epsilon^2)$ , a equação diferencial ordinária é dada por

$$\mu_T \frac{du_2}{dr} + 3\mu_B \left( \frac{du_0}{dr} \right)^2 \left( \frac{du_1}{dr} \right) + \tilde{G}Re \left( \frac{du_0}{dr} \right) \left( \frac{du_1}{dr} \right) = 0 \quad (5.21)$$

Resolvendo-se a Eq. 5.19 a solução de ordem zero é obtida como sendo

$$u_0(r) = -\frac{1}{4} \frac{\tilde{G}Re}{\mu_T} r^2 + A_0 \quad (5.22)$$

Pela condição de contorno de continuidade de velocidade na interface ( $u_0(\xi) = u_p(\xi)$ ), tem-se que:

$$A_0 = \frac{1}{4}\tilde{G}Re \left( 1 - \xi^2 + \frac{\xi^2}{\mu_T} \right). \quad (5.23)$$

Substituindo-se a Eq. 5.23 na Eq. 5.22, obtém-se portanto

$$u_0(r) = \frac{1}{4}\tilde{G}Re \left[ 1 - \xi^2 \left( 1 - \frac{1}{\mu_T} \right) - \frac{r^2}{\mu_T} \right] \quad (5.24)$$

É importante notar que a contribuição de ordem zero, Eq. 5.24, para  $\xi = 1$ , corresponde ao perfil de velocidade parabólico de um fluido newtoniano equivalente com viscosidade de Taylor,  $\mu_T$ . Agora, conhecendo-se  $u_0(r)$  da Eq. 5.22 é possível obter a solução de primeira ordem,  $u_1(r)$ , dada a seguir por

$$u_1(r) = -\frac{\tilde{G}^3 Re^3 (\mu_T - \mu_B)}{32\mu_T} r^4 + A_1 \quad (5.25)$$

Na interface entre os escoamentos de glóbulos vermelhos no núcleo do microvaso e do plasma livre de células adjacente a parede do microvaso deve sempre existir continuidade de velocidade. Assim, a velocidade do sangue na interface deve possuir o mesmo comportamento parabólico de um escoamento de um fluido newtoniano. Portanto, os termos da solução assintótica de ordem superior a  $O(\epsilon^0)$  devem ser nulos na interface, isto é,  $u_1(\xi) = 0$  e  $u_2(\xi) = 0$ , garantindo que o termo parabólico  $u_0(\xi) = u_p(\xi)$ . Com essas equações é possível determinar as constantes da solução geral, como se segue

$$A_1 = \frac{\tilde{G}^3 Re^3 (\mu_T - \mu_B)}{32\mu_T} \xi^4 \quad (5.26)$$

A solução de segunda ordem  $u_2(r)$  pode ser agora determinada uma vez que se conhece tanto  $u_0(r)$  quanto  $u_1(r)$ . Integrando-se a Eq. 5.21, obtém-se que

$$u_2(r) = -\frac{Re^5 \tilde{G}^5 (\mu_T - \mu_B)}{2\mu_T - 3\mu_B} 192\mu_T^7 r^6 + A_2 \quad (5.27)$$

Pela condição de contorno  $u_2(\xi) = 0$ , tem-se que

$$A_2 = \frac{Re^5 \tilde{G}^5 (\mu_T - \mu_B)}{2\mu_T - 3\mu_B} 192\mu_T^7 \xi^6 \quad (5.28)$$

Portanto o perfil de velocidade resulta na seguinte equação

$$u_s(r) = \frac{Re\tilde{G}}{4} \left[ 1 - \xi^2 + \frac{1}{\mu_T} (\xi^2 - r^2) \right] + \frac{(\tilde{G}Re)^3 (\mu_T - \mu_B)}{32\mu_T} (\xi^4 - r^4) \epsilon + \frac{(\tilde{G}Re)^5 (\mu_T - \mu_B)}{2\mu_T - 3\mu_B} 192\mu_T^7 (\xi^6 - r^6) \epsilon^2 \quad (5.29)$$

Note que à medida que a fração volumétrica de células (hematócrito) tende a zero, isto é  $\phi \rightarrow 0$ , o perfil de velocidade do escoamento nuclear se reduz a

$$u(r) = \frac{Re\tilde{G}}{4} (1 - r^2) \quad (5.30)$$

que é a conhecida lei de Poiseuille adimensional para o escoamento laminar unidirecional em tubos, de um fluido com a viscosidade do plasma, expressa em termos adimensionais. Para o caso em que  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $\xi = 1$  o resultado também reduz-se a solução parabólica de Hagen-Poiseuille para um fluido newtoniano equivalente escoando em um tubo com a viscosidade de Taylor adimensional  $\mu_T$ .

### 5.2.2 Viscosidade intrínseca do modelo de emulsão protótipo de sangue

Na seção a seguir mostra-se o cálculo da viscosidade intrínseca para o escoamento examinado. Conforme mencionado anteriormente, a viscosidade intrínseca do escoamento de núcleo equivale a viscosidade baseada na lei de Poiseuille para uma mesma vazão e diferença de pressão do escoamento. A vazão adimensional é determinada pela integral:

$$\tilde{Q} = \int_0^1 2u(r)rdr = \int_0^\xi 2u_s(r)rdr + \int_\xi^1 2u_p(r)rdr = 1 \quad (5.31)$$

em que  $\tilde{Q} = Q/(\pi R^2 \bar{U}) = 1$ . Com algumas manipulações algébricas e auxílio de um software de manipulação simbólica, como o software Maple, obtém-se a seguinte expressão para vazão

$$\frac{Re\tilde{G}}{8} f_1 + \left(\frac{Re\tilde{G}}{8}\right)^3 f_2 \epsilon + \left(\frac{Re\tilde{G}}{8}\right)^5 f_3 \epsilon^2 = 1 \quad (5.32)$$

em que

$$f_1 = 1 + (1 - \mu_T) \frac{\xi^4}{\mu_T} \quad (5.33)$$

$$f_2 = \frac{32}{3\mu_T^3} \left(1 - \frac{\mu_B}{\mu_T}\right) \xi^6 \quad (5.34)$$

$$f_3 = \frac{256}{\mu_T^6} \left(1 - \frac{5\mu_B}{2\mu_T} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_B}{\mu_T}\right)^2\right) \xi^8. \quad (5.35)$$

A lei de Poiseuille é calculada em termos da viscosidade intrínseca dimensional  $\mu_s$  como sendo

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu_s} \frac{\Delta p}{L}. \quad (5.36)$$

Agora, adimensionalizando o gradiente de pressão por  $\rho\bar{U}^2/R$ , tal que  $\tilde{G} = (\Delta p/L)R/(\rho\bar{U}^2)$  e a viscosidade intrínseca por  $\tilde{\mu}_s = \mu_s/\mu_p$  determina-se que

$$\frac{Q}{\pi R^2 \bar{U}} = \frac{Re\tilde{G}}{8\tilde{\mu}_s} = 1 \quad (5.37)$$

Assim, a viscosidade intrínseca pode ser calculada simplesmente por

$$\frac{\mu_s}{\mu_p} = \tilde{G} \frac{\rho R U}{\mu_p 8} = \frac{\tilde{G} Re}{8}. \quad (5.38)$$

Com o resultado da Eq. 5.38, a equação 5.32 pode ser escrita em termos de  $\tilde{\mu}_s = \mu_s/\mu_p$ . Portanto, para se calcular a viscosidade intrínseca aparente deve-se obter a solução da seguinte equação algébrica:

$$\tilde{\mu}_s f_1 + \tilde{\mu}_s^3 f_2 \epsilon + \tilde{\mu}_s^5 f_3 \epsilon^2 = 1 \quad (5.39)$$

### 5.2.3 Método de solução assintótica

Para a solução da equação 5.39 considera-se o método assintótico de substituições sucessivas, usando a seguinte equação de recorrência para o processo iterativo

$$\tilde{\mu}_{i+1} = \frac{1}{f_1} - (\tilde{\mu}_i)^3 \frac{f_2}{f_1} \epsilon - (\tilde{\mu}_i)^5 \frac{f_3}{f_1} \epsilon^2 \quad (5.40)$$

Para a primeira iteração, estipula-se

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{f_1} \quad (5.41)$$

Substituindo-se  $\tilde{\mu}_i$  na Eq.5.40, determina-se o segundo termo da substituição sucessiva, desprezando-se o termo  $O(\epsilon^2)$ .

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{1}{f_1} - \frac{f_2}{f_1^4} \epsilon \quad (5.42)$$

Na seqüência, substituindo-se a Eq. 5.42 na Eq.5.40 obtém-se o terceiro termo da substituição sucessiva

$$\tilde{\mu}_3 = \frac{1}{f_1} - \frac{f_2}{f_1} \left( \frac{1}{f_1} - \frac{f_2 \epsilon}{f_1^4} \right)^4 \epsilon - \frac{f_3}{f_1} \left( \frac{1}{f_1} - \frac{f_2 \epsilon}{f_1^4} \right)^5 \epsilon^2. \quad (5.43)$$

Em seguida, desprezam-se os termos maiores que  $O(\epsilon^2)$ . O que resulta na seguinte expressão que calcula a viscosidade intrínseca do sangue.

$$\tilde{\mu}_s = \frac{\mu_s}{\mu_p} = \frac{1}{f_1} - \frac{f_2}{f_1^4} \epsilon + \left( \frac{3f_2^2}{f_1^7} - \frac{f_3}{f_1^6} \right) \epsilon^2 \quad (5.44)$$

Como a emulsão é considerada diluída termos  $O(\phi^2)$  também são desprezados obtendo-se para a viscosidade intrínseca adimensional a seguinte equação

$$\tilde{\mu}_s = \frac{1}{\xi \left( \frac{1}{\mu_T} - 1 \right) + 1} + \frac{\phi}{\lambda} \left( -\frac{152\epsilon}{3} \xi^6 + 608\epsilon^2 \xi^8 \right) \quad (5.45)$$

A equação 5.45 mostra que a viscosidade intrínseca adimensional é uma função não-linear de  $\phi$  se  $\xi \neq 0$ . Esse resultado está associado a distribuição não heterogênea da emulsão, provocado pela existência da camada livre de células adjacente a parede do microvaso. Vale ressaltar que na Eq. 5.45 se  $\xi = 1$ , a equação reduz-se a seguinte expressão

$$\tilde{\mu}_s = \mu_T + \frac{\phi}{\lambda} \left( -\frac{152\epsilon}{3} + 608\epsilon^2 \right) \quad (5.46)$$

em que fica evidente a dependência linear da viscosidade intrínseca adimensional em relação a  $\phi$ . Percebe-se também que se  $\epsilon = 0$ , ou seja,  $Ca = 0$  (caso estacionário) a viscosidade intrínseca se reduz a viscosidade de Taylor  $\mu_T$ .

#### 5.2.4 Solução numérica

A seguir será apresentada também a solução numérica proposta para a solução do problema.

A solução numérica do escoamento determina os perfis de velocidade  $u = u(r)$  para valores arbitrários do parâmetro  $\epsilon$  na equação governante, Eq. 5.5

A equação diferencial no domínio  $0 < r \leq \xi$  da Eq. 5.5 pode ser escrita na forma  $f(du/dr) = 0$ . A Fig. 5.2 mostra um comportamento típico da variação de  $f$  com  $(du/dr)$  importante para determinar a solução do escoamento para diferentes valores dos parâmetros  $\epsilon$ ,  $Ca$ ,  $\phi$  e  $\lambda$ . Pelo comportamento da curva mostrada na Fig.5.2 nota-se que a função  $f(du/dr)$  possui uma raiz real e duas imaginárias, uma vez que se trata de um polinômio de terceiro grau. Para se calcular a raiz real dessa equação usa-se um método de Newton-Raphson conforme implementado por Oliveira, 2007.

O algoritmo usado no programa computacional para determinação da viscosidade intrínseca segue a lógica de programação apresenta abaixo

#### Início

Passo 1 - Entrada de dados

$$Re_i, \tilde{G}, r, \phi, \lambda, \epsilon \text{ e } \xi$$

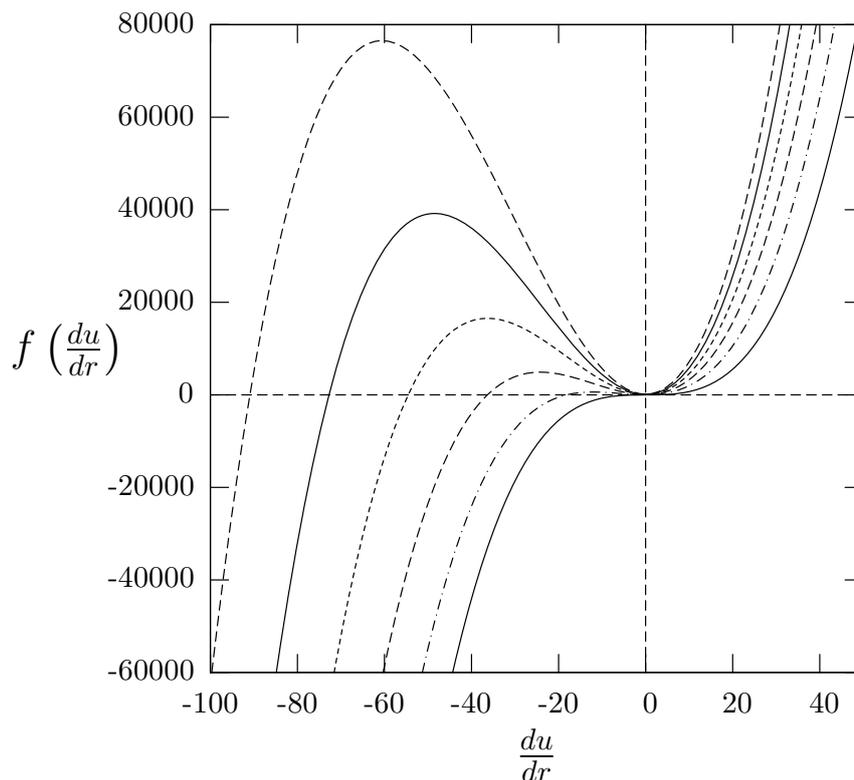


Figura 5.2: Comportamento da função  $f(du/dr)$  para os valores de parâmetros  $\tilde{G} = 1$ ,  $Re=1$ ,  $\epsilon = 0.5$  e para valores de  $r = 100, 200, 300, 400$ , em que a linha cheia que possui raiz próxima a origem representa os valores para  $r = 100$  e a linha tracejada que possui raiz real próxima a  $du/dr = -90$  representa os valores para  $r = 400$ .

Passo 2 - Calcular

$\frac{du}{dr}$  pelo método de Newton-Raphson da Eq. 5.5

Passo 3 - Repetir 2 para diferentes valores de  $r$

Passo 4 - Calcular

$u_i(r)$ , por diferença finita centrada  $\frac{u(r + \Delta r) - u(r)}{2\Delta r} = \frac{du}{dr} \Big|_r$

Passo 5 - Com o perfil de velocidade  $u_i$ , calcular a vazão  $\tilde{Q}_i$

Passo 6 - Calcular

$$\tilde{Q}_i - 1 = f(Re_i)$$

Passo 7 - Calcular

$$Re_{i+1}, \text{ por Newton-Raphson } Re_{i+1} = Re_i - \frac{f(Re_i)}{f'(Re_i)}$$

Passo 8 - Retorna ao passo 2 até que

$$(Re_{i+1} - Re_i)/Re_{i+1} < 10^{-3}$$

Passo 9 - Repetir passos de 1 a 8

para diferentes valores de parâmetros.

Passo 10 - Imprime resultados em arquivo

***Fim.***

A seguir descreve-se detalhes complementares dos principais passos do algoritmo. Conforme mencionado no algoritmo do programa o campo de velocidade  $u(r)$  foi determinado usando-se o método de diferenças finitas centradas. Após aplicar o método de Newton-Rahpson no passo 2, obtém-se os valores de  $du/dr$  para diferentes valores de  $r$ . Uma formulação de diferenças finitas centrada é baseada na expansão de  $u(r)$  em série de Taylor. No caso de uma série com truncamento em segunda ordem, nas vizinhanças de  $r_0$ , significa dizer que se  $\Delta r = r - r_0 \ll 1$  os termos  $(\Delta r)^3$  são infinitésimos de ordem superior e podem ser desprezados. A expansão da velocidade é feita, considerando-se um incremento de  $\pm\Delta r$ , como se segue

$$u(r + \Delta r) = u(r) + \Delta r \frac{du}{dr} + \frac{(\Delta r)^2}{2} \frac{d^2u}{dr^2} + O[(\Delta r)^3] \quad (5.47)$$

$$u(r - \Delta r) = u(r) - \Delta r \frac{du}{dr} + \frac{(\Delta r)^2}{2} \frac{d^2u}{dr^2} + O[(\Delta r)^3] \quad (5.48)$$

Subtraindo-se  $u(r - \Delta r)$  de  $u(r + \Delta r)$ , após algumas manipulações algébricas obtém-se o resultado

$$u(r + \Delta r) - u(r - \Delta r) = 2\Delta r \frac{du}{dr} + O(\Delta r^3) \quad (5.49)$$

Para implementação numérica, escreve-se a Eq. 5.49 como sendo

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta r \frac{du}{dr}(r_i) = f(r_i), \quad (5.50)$$

em que  $f(r_i)$  é determinada pela solução numérica da Eq.5.5 multiplicada por  $2\Delta r$ . Vale notar que a equação 5.50 representa um conjunto de equações algébricas que formam

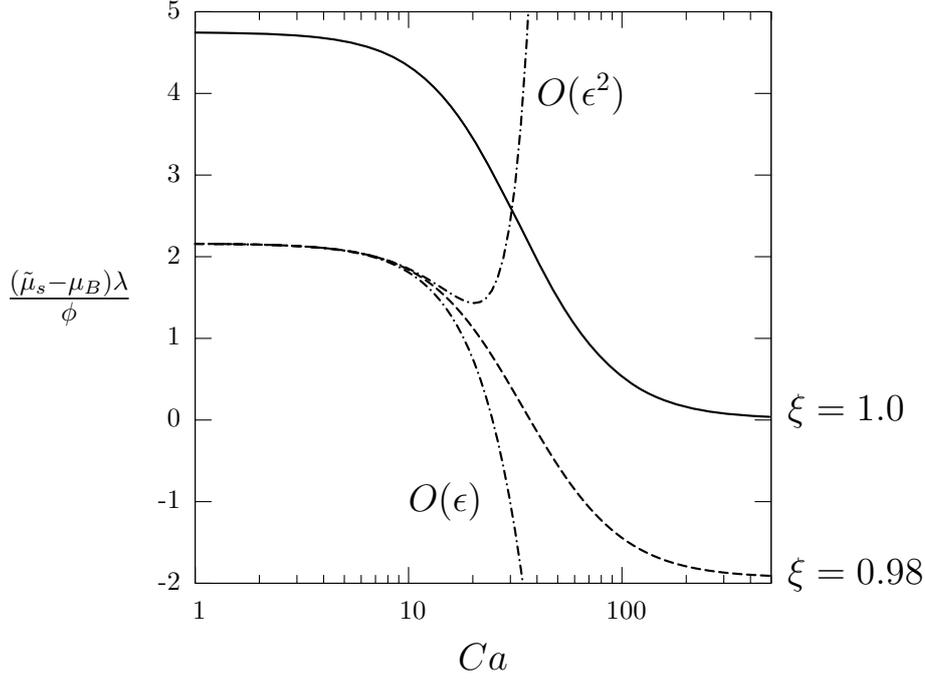


Figura 5.3: Viscosidade intrínseca em função da taxa de cisalhamento adimensional, o número de capilaridade. O gráfico apresenta dois resultados numéricos, linha cheia e tracejada, que correspondem respectivamente a resultados com  $\xi = 1.0$  e  $\xi = 0.98$ . É mostrado também o resultado de previsões assintóticas a  $O(\epsilon)$  e  $O(\epsilon^2)$  para  $\xi = 0.98$  representado por linhas traço-ponto conforme indicado no gráfico.

o sistema representado na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(r_1) \\ f(r_2) \\ f(r_3) \\ \vdots \\ f(r_n) \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

O campo de velocidade é então calculado resolvendo-se o sistema de equações algébricas lineares da Eq. 5.51 por um método de eliminação de Gauss (Press *et al.*, 1992) para solução de matrizes tridiagonais. A rotina usada é pré definida na linguagem Fortran.

Os resultados numéricos calculados são traçados na Fig.5.3 e na Fig.5.4

A Fig. 5.3 mostra que para números de capilaridade  $Ca \sim 10.0$ , a viscosidade intrínseca passa a apresentar um comportamento típico da viscosidade de líquidos elásticos com comportamento pseudo-plástico. O resultado indica que o modelo microestrutural de gotas de alta razão de viscosidade usado como protótipo do sangue captura o efeito “Shear thinning”, bem característico de escoamentos do sangue. O comporta-

mento está associado com a deformação e orientação das gotas protótipos de glóbulos vermelhos, quando sujeitos a influência de um cisalhamento. O efeito da deformação da célula representa aproximadamente 25% da redução total da viscosidade do sangue, enquanto os outros 75% são causados pela ruptura de agregados celulares (Lipowsky, 2005). Percebe-se também que há uma redução da viscosidade intrínseca com a redução a partir do raio adimensional do microvaso  $R/\delta = 50$ . Conforme já mencionado esse efeito é conhecido na literatura de microcirculação como Fahraeus-Lindqvist. Além do trecho pseudo-plástico mostrado pelo modelo de emulsão, verificam-se dois limites de comportamento newtonianos para  $Ca \ll 1$  e  $Ca \gg 1$ . No caso de  $Ca \ll 1$  as gotas são praticamente esféricas (não deformadas) e o fluido comporta-se simplesmente como um fluido newtoniano equivalente com viscosidade de Taylor  $\mu_T$ . Nesse regime o escoamento não é intenso o suficiente para vencer a força de restauração da tensão superficial. No regime  $Ca \gg 1$ , a microestrutura da emulsão (as gotas) não respondem mais ao escoamento tendo em vista que o tempo do escoamento é muito menor do que o tempo de relaxação superficial da gota. Aqui o número de capilaridade faz exatamente o papel do número de Deborah na descrição de líquidos elásticos. É importante também notar a necessidade de ter que se utilizar a solução numérica do problema para  $Ca \gtrsim 10$ . Nesse regime de capilaridade as soluções assintóticas  $O(\epsilon)$  e  $O(\epsilon^2)$  não podem ser aplicadas. Como as soluções assintóticas validam o resultado numérico, para pequenos valores de  $\epsilon$ , pode-se apresentar o comportamento da viscosidade intrínseca em função do raio do microvaso, calculado em termos de  $\xi$  como sendo.

$$R/\delta = \frac{1}{1 - \xi} \quad (5.52)$$

A Fig. 5.4 mostra a viscosidade intrínseca adimensional em função do raio adimensional do microvaso. Os valores experimentais apresentados por pontos e barras de erro foram obtidos por meio de dados experimentais *in vivo*, para hematócrito de 30% (Pries *et al.*, 1994). A linha contínua descreve o comportamento da viscosidade intrínseca do sangue obtida pela solução assintótica do modelo proposto neste capítulo com  $Ca \sim 1$ . A linha tracejada representa a solução numérica para valores de  $\lambda = 100$ ,  $Ca = 50$  e  $\phi = 0.30$ . Vale dizer que o sangue humano normal tem fração volumétrica de glóbulos vermelhos na faixa de 40 a 45%. Observa-se na Fig. 5.4 que os valores preditos pelo modelo de emulsão concordam qualitativamente com medidas experimentais, *in vivo*, capturando de forma satisfatória o comportamento do sangue em microvasos

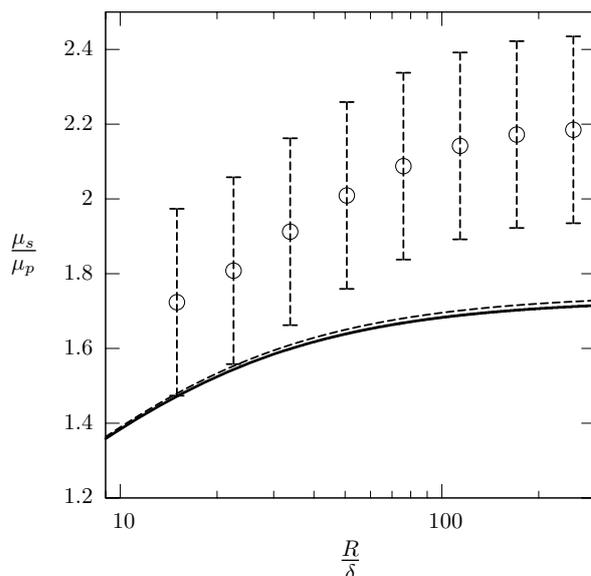


Figura 5.4: Viscosidade intrínseca do sangue em função do raio do micro-vaso. A linha cheia são os valores obtidos para a solução assintótica do modelo em questão com  $\lambda = 100$ ,  $\phi = 30\%$ ,  $Ca = 1$ , a linha tracejada é o resultado calculado pelo método numérico para  $Ca = 50$  e os pontos são valores de ajuste de dados em experimento *in vivo* com hematócrito de 30%.

com raio da ordem de  $100\mu m$ . Na referida figura tem-se também o resultado obtido numericamente para  $Ca = 50$  representado pela linha tracejada. Vê-se que as pequenas deformações das gotas protótipos provocam uma redução pequena na viscosidade intrínseca adimensional do sangue.

Os resultados levam a crer que o modelo pode ser usado para se estimar a viscosidade intrínseca do sangue na microcirculação, considerando-se hematócritos, número de capilaridade e razão de viscosidades que desviam das condições fisiológicas padrões por condições físicas ou patologias diferentes.

Possíveis justificativas para as discrepâncias observadas estão relacionadas com o fato que as células na verdade são cápsulas e não gotas. Existe uma preservação da área superficial da membrana da célula causada pela alta viscosidade de membrana que não está presente no protótipo de célula (gotas). Além disso a interação entre células e o efeito de parede também não é considerado no modelo. Num hematócrito de 30% as interações hidrodinâmicas entre glóbulos vermelhos começam a ser relevantes. O acúmulo de outras células sanguíneas nas paredes do microvaso produz um aumento de  $\mu_s$  maior do que o predito pelo modelo. Esse efeito pode ser visto como uma rugosidade

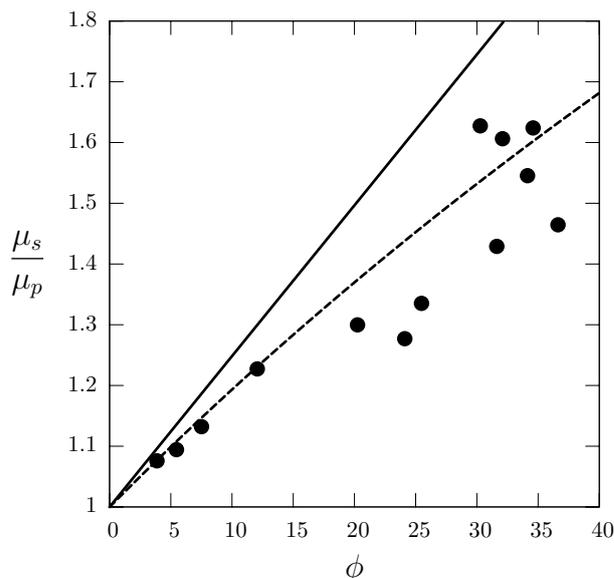


Figura 5.5: Viscosidade intrínseca em função da concentração da emulsão. Os pontos são valores experimentais *in vitro* para tubos de vidro com diâmetro de  $40\mu m$ , a curva sólida são os valores obtidos pelo modelo proposto com  $\xi = 0.95$ .

na parede do vaso e além disso tem-se a própria rugosidade da célula real. Todos esses fatores levam ao modelo prever viscosidades intrínsecas menores do que os valores obtidos em experimentos.

### 5.2.5 Investigação do hematócrito e da razão de viscosidade na viscosidade intrínseca do sangue

Na presente subseção é realizada uma investigação de como a variação de alguns parâmetros do modelo de sangue proposto pode influenciar na reologia do sangue.

Considera-se um valor do número de capilaridade de  $Ca = 50$ ,  $\lambda$  e uma razão de aspecto  $\xi = 0.98$ . Valores estes baseados na análise dimensional apresentada no Capítulo 1. Pode-se examinar por meio do algoritmo numérico desenvolvido para o cálculo da viscosidade intrínseca a influência da fração volumétrica de glóbulos vermelhos (gotas protótipos) e da razão de viscosidades gota-plasma da emulsão. A Fig. 5.5 mostra um comportamento aproximadamente linear da viscosidade intrínseca  $\mu_s/\mu_p$  com a fração volumétrica  $\phi$  em razão dos regimes diluídos explorados no presente trabalho. A curva apresentada na Fig. 5.5 não chega a ser exatamente linear tendo em vista que mesmo sendo um regime diluído, a presença da camada livre de gotas adjacente a parede influencia a viscosidade intrínseca do sangue de forma não-linear. Conseqüência

direta da distribuição heterogênea de glóbulos vermelhos uma vez que se  $r/\delta \geq R/\delta$ ,  $\phi = 0$ . Essa heterogeneidade intrínseca a regimes de microcirculação é responsável pelo pequeno desvio da dependência linear padrão em condições diluídas. Vale observar que a partir de 30% a discrepância entre os valores de viscosidade intrínseca preditas pelo modelo e as medidas experimentais passam a ser significativas. Isto se justifica porque nesse regime de diluição a interação célula-célula não pode ser desprezada como admitido pelo modelo teórico. Conforme pode-se observar essa maior proximidade e interação das células reflete num aumento da viscosidade do sangue que não é previsto pelo modelo. Um aumento no hematócrito nesses valores de fração volumétrica ( $\phi \sim 30\%$ ) influencia diretamente na diminuição da camada lubrificante de plasma adjacente à parede o que intensifica também a interação célula-parede.

Por fim a Fig. 5.6 mostra o comportamento da viscosidade intrínseca em função da razão de viscosidades. Percebe-se que a viscosidade intrínseca tende a saturar para valores de razão de viscosidade maiores que 10. Nesse caso, o escoamento depende exclusivamente da fração volumétrica, número de Capilaridade e do raio do microvaso. Para valores de  $\lambda \sim 1$  as células protótipos se deformam produzindo um efeito pseudo-plástico da viscosidade intrínseca. No caso do sangue real tem-se uma razão de viscosidade do citoplasma e do plasma da ordem de  $\lambda_i \sim 10$  e membrana-plasma de ordem de 300. Espera-se, portanto, que a deformação das células em escoamentos de microvasos de raio de ordem  $R/\delta \approx 100$ , em que as taxas de cisalhamento são menores que em capilares, tenham uma influência muito menor na viscosidade intrínseca do sangue, se comparado ao que ocorre em capilares com diâmetro da ordem do tamanho da célula ( $8\mu m$ ). Nesses microvasos as células se deformam e ficam organizadas em fila conforme mostrado nos Caps. 1 e 3 e estudado por Secomb, 2003.

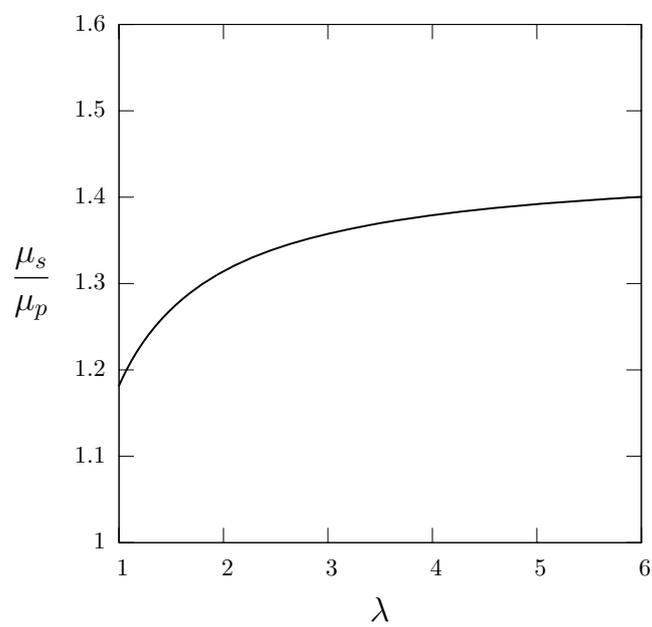


Figura 5.6: Viscosidade intrínseca em função da razão de viscosidades da emulsão.

## Capítulo 6

# Fundamentos da Difusão

Neste capítulo alguns fundamentos do fenômeno da difusão serão apresentados. Descreve-se o mecanismo de difusão hidrodinâmica induzido por cisalhamento em suspensões diluídas, não brownianas. A teoria apresentada neste capítulo é importante para o entendimento dos mecanismos físicos responsáveis pela formação da camada livre de células na microcirculação.

### 6.1 Problemas de difusão

O fenômeno de difusão pode ser interpretado como o resultado estatístico de um movimento randômico (flutuação de velocidade) de partículas ou flutuações térmicas através de uma superfície.

Considere uma superfície no espaço, por onde atravessa um fluxo de partículas, conforme ilustra a Fig. 6.1. O referido fluxo é o resultado de um processo de difusão. Sendo assim, a equação governante do transporte de uma propriedade  $\phi$  qualquer do escoamento possui a forma a seguir (Cunha, 2006):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \phi = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathfrak{S}} \quad (6.1)$$

em que  $\tilde{\mathfrak{S}}$  é um fluxo difusivo,  $\tilde{\mathbf{u}}$  é a velocidade do escoamento,  $\phi$  é a propriedade transportada do escoamento (massa, quantidade de movimento ou energia). Na Eq. 6.1 o termo  $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \phi$  representa o transporte macroscópico convectivo do escoamento enquanto  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathfrak{S}}$  representa o transporte difusivo. O fechamento do problema requer uma equação constitutiva para  $\tilde{\mathfrak{S}}$ . Para a identificação de parâmetros físicos em um

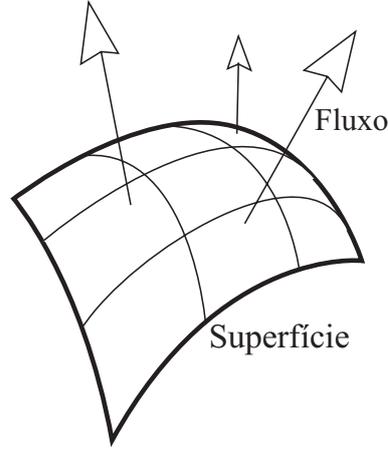


Figura 6.1: Esquema de uma superfície hipotética no espaço por onde passa um fluxo de matéria ou energia, indicado pelas setas.

problema de natureza difusiva propõe-se a seguinte adimensionalização:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}/U \quad (6.2)$$

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}/\ell \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = \tilde{\nabla} \tilde{\mathfrak{S}} \frac{\ell}{U} \quad (6.4)$$

$$\nabla = \tilde{\nabla} \ell, \quad (6.5)$$

em que  $U$  é uma velocidade característica do problema,  $\ell$  é um comprimento característico e  $D$  é uma difusividade característica do transporte difusivo no escoamento. Nestas condições a equação adimensionalizada com todas as variáveis adimensionais pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = -\frac{1}{Pe} \nabla \cdot \mathfrak{S}. \quad (6.6)$$

Aqui  $Pe$  é o número de Péclet que pode ser interpretado como a razão entre duas escalas de tempos, um difusivo  $\tau_D$  e outro convectivo  $\tau_c$  (Batchelor, 1967). Portanto,

$$Pe = \frac{\tau_D}{\tau_c} = \frac{\ell^2/D}{\ell/U} = \frac{U\ell}{D}. \quad (6.7)$$

Para valores de  $Pe \gg 1$  o tempo do transporte difusivo é muito maior que o tempo do transporte convectivo. Nesse caso o problema é predominantemente convectivo, regido pelo próprio escoamento. Por outro lado  $Pe \ll 1$  o mecanismo de difusão domina o fenômeno de transporte no escoamento.

### 6.1.1 Fluxo Difusivo

Conforme mencionado anteriormente, para o fechamento do problema é necessária a especificação de uma equação constitutiva para o fluxo difusivo  $\mathfrak{S}$ .

Em geral o fluxo difusivo depende do gradiente de  $\phi$ , seja esse relacionado a temperatura, a fração volumétrica, ou a velocidade do escoamento. Para problemas de transferência de calor envolvendo a equação de energia uma equação constitutiva muito usada é a Lei de Fourier em que o fluxo  $\mathfrak{S}$  é calculado pela expressão a seguir

$$\mathfrak{S} = -\kappa(\phi)\nabla(\phi), \quad (6.8)$$

neste caso  $\phi$  representa a temperatura de um material contínuo com um coeficiente de difusão térmico  $\kappa$ . Para o caso de transporte de massa tem-se de forma similar a conhecida Lei de Fick, dada por

$$\mathfrak{S} = -D(\phi)\nabla(\phi), \quad (6.9)$$

em que  $D$  é o coeficiente de difusão associado ao fluxo de massa de uma espécie ou a difusão de partículas num meio fluido e  $\phi$  representa a fração volumétrica de partículas ou concentração de uma espécie química.

## 6.2 Difusividade

A difusividade ou coeficiente de difusão de um sistema de partículas está associado com a intensidade das flutuações com que essas partículas se movem através de uma superfície por conta de um movimento randômico. Na difusão de partículas colóides em um meio fluido estacionário, o movimento aleatório das partículas é causado pelo movimento browniano devido a agitação térmica das moléculas do fluido ambiente no qual as partículas coloidais estão dispersas (Batchelor, 1967). A Fig. 6.2 ilustra a trajetória típica de uma partícula coloidal em movimento browniano. O coeficiente de auto-difusão pode ser calculado pela equação a seguir (Helfand, 1961, McQuarrie, 2000)

$$\mathbf{D} = \int_0^{\infty} \langle \tilde{\mathbf{u}}(0)\tilde{\mathbf{u}}(t) \rangle dt \quad (6.10)$$

em que  $\langle \tilde{\mathbf{u}}(0)\tilde{\mathbf{u}}(t) \rangle$  é a função auto-correlação de velocidades  $\tilde{\mathbf{u}}(0)$  e  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  de uma partícula em processo de difusão e  $t$  é um incremento de tempo na escala do movimento aleatório.

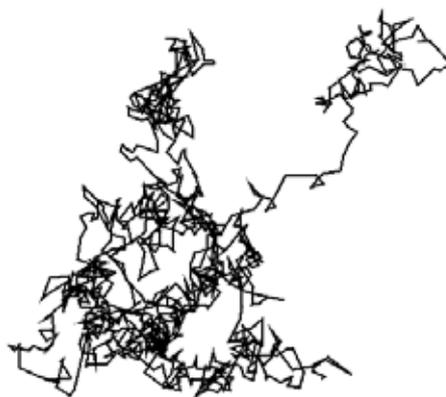


Figura 6.2: Ilustração da trajetória de uma partícula que descreve um movimento Browniano.

No caso do movimento Browniano o coeficiente de difusão é isotrópico pois independe da direção do fluido disperso (McQuarrie, 2000). No entanto, em casos como a difusão hidrodinâmica e em alguns problemas de transferência de calor em materiais anisotrópicos, por exemplo, tem-se um coeficiente de difusão anisotrópico e a solução deve levar em conta todas as direções principais do problema (e.g.  $D_{11}, D_{22}$ ).

Considere uma partícula de referência em uma suspensão estatisticamente homogênea. A referida partícula sofre uma série de deslocamentos aleatórios de média 0 (zero) devido a encontros ocasionais com outras partículas de sua vizinhança. No caso de uma suspensão diluída, esses encontros podem ser considerados estatisticamente independentes. É uma prática comum caracterizar o deslocamento lateral da partícula teste por um processo de auto-difusão com coeficiente dado por (Cunha & Hinch, 1996)

$$D^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (\Delta x^{(k)})^2 \quad (6.11)$$

em que  $\Delta x^{(k)}$  é o deslocamento líquido da  $k$ -ésima partícula após uma colisão.

Uma expressão bem conhecida para o coeficiente de difusão de partículas em dispersão pode ser obtida para o problema de uma partícula que descreve movimento browniano em um fluido viscoso newtoniano. Nesse meio a partícula citada sofre a força hidrodinâmica viscosa de resistência ao seu movimento, dada pela força de Stokes  $\mathbf{F} = 6\pi\mu a\mathbf{u}$  (Batchelor, 1967). Usando o teorema da flutuação ( $KT$ ) e dissipação ( $6\pi\mu a$ ) determina-se que (Einstein, 1956, Kholodenko & Douglas, 1995)

$$D_0 = \frac{KT}{6\pi a\mu}. \quad (6.12)$$

em que  $K$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura do fluido em Kelvin, e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido base. A expressão da Eq. 6.12 é conhecida hoje como coeficiente de difusão ordinária Stokes-Einstein  $D_0$ , o qual independe da fração volumétrica, ou seja independe das interações entre as partículas no fluido.

### 6.3 Difusão hidrodinâmica

Nesta seção será discutido como interações entre partículas sólidas ou gotas com pequenas deformações podem gerar um mecanismo de transporte de difusão hidrodinâmico induzido por cisalhamento. Essa teoria será usada no modelo de difusão proposto no presente trabalho para explicar os mecanismos físicos de formação da camada livre de células adjacente à parede de microvasos.

A difusão em escoamentos cisalhantes teve sua primeira investigação experimental feita por Eckstein *et al.*, 1977, que observou o movimento aleatório de uma partícula marcada radioativamente em um escoamento de Couette (cilindros rotativos). Com um instrumento que media de forma mais acurada as posições das partículas Leighton & Acrivos, 1987, determinaram difusividade  $D \propto \dot{\gamma}a^2$  para frações volumétricas no seguinte intervalo  $0,5 < \phi < 0,4$ . Na pesquisa teórica de Cunha & Hinch, 1996, foi desenvolvida uma teoria para calcular a difusividade de partículas sólidas em suspensão diluída em função da rugosidade superficial,  $\varepsilon$  das partículas, a difusividade foi calculada como sendo  $D = f(\varepsilon)\dot{\gamma}a^2\phi$ , em que  $f(\varepsilon)$  é uma função da rugosidade. Muito recentemente Lac & Barthes-Biesel, 2008, investigaram interações de pares de cápsulas idênticas em cisalhamento simples usando método de integral de contorno. Cada cápsula foi considerada uma gota revestida de uma membrana elástica. Os autores exploram o efeito da natureza da membrana, incorporada nas gotas, sobre as trajetórias relativas de colisões irreversíveis das partículas na mesma linha como foi explorado por Lowenberg & Hinch, 1997 sem membrana elástica

Na presente dissertação considera-se o caso de auto-difusão induzido por cisalhamento, gerado por interação de gotas que novamente funcionam como protótipo de células.

Considere, duas gotas em uma emulsão diluída de alta razão de viscosidade (gota-fluido base) sujeita a cisalhamento simples, conforme ilustrado na Fig. 6.3. Na condição de alta razão de viscosidade as gotas sofrem pequenas deformações uma vez

que em cisalhamento simples giram muito mais rápido que deformam. Em um deter-

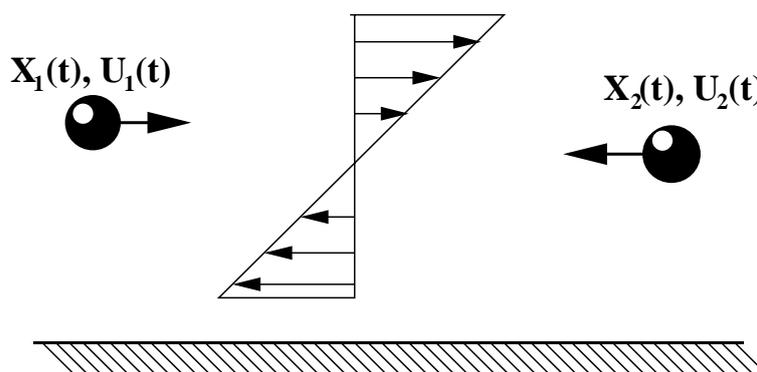


Figura 6.3: Ilustração de duas partículas de tamanho arbitrário em movimento sob a ação de um campo de cisalhamento simples.

minado instante de tempo, o movimento relativo entre as gotas provocará uma colisão. No caso de gotas perfeitamente esféricas sem deformação (alta tensão superficial), a colisão resulta em interações reversíveis e ambas as gotas recuperam suas respectivas linhas de correntes iniciais depois da colisão. As colisões mencionadas também ocorrem no caso de partículas sólidas perfeitamente esféricas sem rugosidade. Resultado este que pode ser entendido como uma consequência direta da reversibilidade no tempo associada com a linearidade das equações de Stokes. Por outro lado, colisões entre gotas com pequenas deformações ou partículas sólidas com determinado grau de rugosidade superficial acarreta um deslocamento transversal líquido das linhas de trajetórias finais em relação às condições iniciais (Cunha & Hinch, 1996)(ver Fig. 6.4). Essa quebra

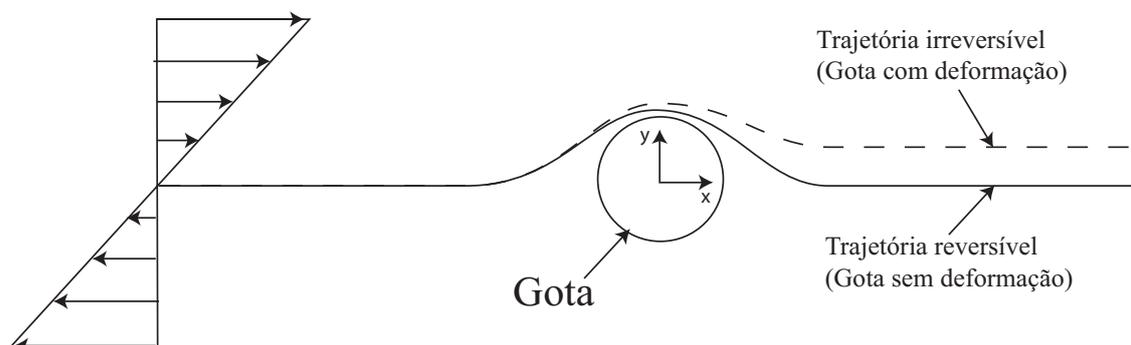


Figura 6.4: Ilustração das trajetórias relativas de colisão de gotas em escoamento cisalhante simples.

de simetria da trajetória no tempo para todos os encontros aleatórios possíveis de partículas caracteriza um movimento aleatório de partículas de natureza diferente do movimento browniano. Portanto, um processo difusivo associado à hidrodinâmica na

escala da gota ou partícula dá origem a um fluxo difusional transversal a direção do escoamento. Vale ressaltar que a principal diferença entre a difusão ordinária browniana e a difusão hidrodinâmica é que a primeira é completamente independente da fração volumétrica de partículas, pois independe de interação de pares. Pode-se interpretar que no caso de uma suspensão diluída de partículas coloidais sujeitas a movimento browniano a difusividade total seria a soma da difusão ordinária browniana e da difusividade hidrodinâmica. Isto implica que

$$D = \frac{KT}{6\pi\mu a} + O(\dot{\gamma}a^2\phi). \quad (6.13)$$

O termo  $O(\phi)$  é a primeira correção da interação hidrodinâmica viscosa entre partículas. Define-se esse fenômeno difusivo dependente de interações de pares de partículas em um meio viscoso de difusão hidrodinâmica, associado às colisões irreversíveis de partículas na fase dispersa de uma emulsão ou suspensão em escoamento cisalhante simples. Um processo difusivo em sedimentação relacionado a interações de partículas foi descrito em Cunha, 2002.

A difusão hidrodinâmica causada pelas inúmeras colisões de gotas ou partículas em cisalhamento possui a característica de ser anisotrópica. Na direção do gradiente de velocidade (no plano de cisalhamento) a difusividade hidrodinâmica pode chegar a ser dez vezes maior que a difusividade hidrodinâmica na direção das linhas de vorticidade do escoamento, para um mesmo valor de rugosidade relativa (Cunha & Hinch, 1996).

#### **6.4 Difusão hidrodinâmica no escoamento do sangue em microvasos**

Nesta seção apresenta-se a teoria envolvida para descrição da distribuição de glóbulos vermelhos em uma seção transversal de um microvaso. A teoria envolvida tem como principal foco o entendimento da formação e determinação da espessura da camada livre de células para microvasos de diâmetros da ordem de  $100\mu m$ .

Os glóbulos vermelhos, abundantes no sangue, se comportam aproximadamente como gotas ou dipolos aproximadamente esféricos ou elipsóides de alta razão de viscosidade, que sofrem pequenas deformações. Dessa forma, consideram-se partículas esféricas como protótipos de células do sangue usadas para a determinação da distribuição do hematócrito na microcirculação, conforme idéia já explorada no capítulo 5

da presente dissertação.

Na região próxima à parede do microvaso existem interações célula-célula bem como interações célula-parede responsáveis pela distribuição heterogênea de células que ocupam o núcleo do microvaso. O escoamento nessa região pode ser aproximado por um cisalhamento simples, conforme considerado na teoria de Cunha & Hinch, 1996. A difusão de células é determinada considerando-se todas as colisões entre células que produzem trajetórias irreversíveis após as colisões somada a um efeito difusivo devido um gradiente de fração volumétrica de células.

#### 6.4.1 Interação de partículas em cisalhamento simples

Como um primeiro modelo de interação de protótipos de células em microvaso considera-se o problema de interação entre duas gotas esféricas induzidas por um campo cisalhante simples, conforme ilustrado na Fig.6.3.

Na presente formulação consideram-se as coordenadas dos centros de massa de duas partículas de tamanhos arbitrários  $\mathbf{X}_1(t)$  e  $\mathbf{X}_2(t)$  e a velocidade relativa entre as mesmas como sendo  $\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1 = \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{X}}_2(t) - \dot{\mathbf{X}}_1(t)$ , sob ação de um escoamento cisalhante simples, conforme ilustrado na Fig. 6.3. De acordo com Batchelor & Green, 1972, a equação da velocidade relativa das partículas é dada por:

$$\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1 = \boldsymbol{\Omega}^\infty \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{D}^\infty \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - [A\mathbf{d}\mathbf{d} + B(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{d}\mathbf{d})] \cdot \mathbf{D}^\infty \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (6.14)$$

em que  $\boldsymbol{\Omega}^\infty = -\dot{\gamma}\mathbf{e}_3$  é a vorticidade do cisalhamento simples,  $\mathbf{D}^\infty = 1/2\dot{\gamma}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)$ ,  $\mathbf{d} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/R$ ,  $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$  (tensor identidade),  $A$  e  $B$  são funções de mobilidade que dependem apenas das configurações das partículas.

Considere duas gotas protótipos partindo, inicialmente, de uma distância relativa grande o suficiente de modo que uma partícula não sofra influência da outra. Nessa condição de longo alcance de interação as trajetórias relativas se aproximam de linhas retas horizontais (Cunha & Hinch, 1996). Por outro lado, a medida que se aproximam as mesmas sofrem deslocamentos transversais em duas direções: no plano da vorticidade e no plano de cisalhamento, definido pelo escoamento e seu gradiente. Durante a colisão do par de partículas o movimento relativo das partículas é separado por uma fina camada de fluido de lubrificação. Esse efeito permite que as superfícies das gotas deslizem, transladando e girando, enquanto ambas as gotas sofrem pequenas deformações

induzidas pelo movimento de uma partícula sobre a outra. As deformações, mesmo que pequenas, constituem-se num efeito irreversível da interação sendo responsáveis pela quebra de simetria na trajetória relativa das gotas. Portanto, diferentes razões de viscosidade entre a gota e o meio podem intensificar ou atenuar a quebra de simetria do movimento relativo das gotas.

Agora, substituindo-se os valores de  $\mathbf{\Omega}^\infty$ ,  $\mathbf{E}^\infty$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{\delta}$  na Eq. 6.14 e explicitando o resultado em termos das derivadas  $\dot{x} = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ ,  $\dot{y} = (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$ ,  $\dot{z} = (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$  adimensionalizadas pelo raio médio das partículas  $(a + b)/2$ , determina-se o seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias que governam as trajetórias relativas das partículas <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{2}{1 + \beta} \left( y + ex - \frac{1}{2}By \right) \\ \dot{y} &= \frac{2}{1 + \beta} \left( ey - \frac{1}{2}Bx \right) \\ \dot{z} &= \frac{2}{1 + \beta} ez\end{aligned}\tag{6.15}$$

em que  $e = xy(B - A)/r^2$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  e  $\beta = b/a$ . Novamente  $A$  e  $B$  são as funções de mobilidades associadas ao movimento paralelo e perpendicular as linhas de centro das partículas, respectivamente. De uma forma geral essas equações são descritas por Kim & Karrila, 1991, de acordo com as seguintes expressões.

$$\begin{aligned}A &= R^{-1}(x_{11}^g + x_{21}^g - x_{12}^g - x_{22}^g) \\ B &= 2R^{-1}(y_{11}^g + y_{21}^g - y_{12}^g - y_{22}^g).\end{aligned}\tag{6.16}$$

No Apêndice desta dissertação faz-se um estudo mais aprofundado das equações de mobilidade  $A$  e  $B$ .

Baseando-se na teoria assintótica desenvolvida por Cunha & Hinch, 1996, e Lowenberg & Hinch, 1997, propõe-se uma aproximação para o valor do deslocamento transversal causado por colisões entre gotas com altos valores de razão de viscosidade  $\lambda \gg 1$ , como sendo

$$\Delta X = \lambda^{N_1} (N_2 \ln(\lambda) + 1.347)^{N_3}\tag{6.17}$$

em que  $N_1 = -0,0729$ ,  $N_2 = 2/3$  e  $N_3 = -0,1753$ . Na condição de  $\lambda \gg 1$  Lowenberg & Hinch, 1997, propuseram uma relação entre a rugosidade relativa e a razão de

---

<sup>1</sup>Desenvolvimento em anexo

viscosidades de uma emulsão, dada por

$$\lambda = \varepsilon^{-3/2}. \quad (6.18)$$

Assim, a proposta de cálculo de difusividade hidrodinâmica apresentada pode ser usada também para o caso de difusividades hidrodinâmicas em emulsões diluídas com gotas de altas razões de viscosidade que conseqüentemente sofrem pequenas deformações.

### Funções Mobilidades

Problemas do tipo mobilidade são problemas de hidrodinâmica de suspensões que determinam a velocidade das partículas como solução do movimento, dado que as forças e torques são pré-definidos (Kim & Karrila, 1991). As soluções desses problemas exigem o conhecimento das funções mobilidade específica para cada tipo de escoamento imposto. Os termos  $x_{ij}^g$  e  $y_{ij}^g$ , da Eq. 6.16 compõem a solução para a interação de duas partículas de tamanho arbitrário, interagindo em um escoamento de cisalhamento simples. Seus valores são determinados para dois regimes de separação de partículas, um de longo alcance, no qual as partículas encontram-se distantes ao ponto que a interação entre as mesmas é pequena e as trajetórias se aproximam de retas horizontais e outro regime de separação em que as interações de curto alcance se aproximam de um problema de lubrificação com a presença de uma fina camada de fluido lubrificante que separa as duas partículas.

Para cada razão de tamanho de partícula  $\beta = b/a$  há um tabelamento diferente das funções  $A$  e  $B$  da Eq. 6.16. A seguir mostram-se as equações  $A$  e  $B$  dos dois domínios, para valores de  $\beta = 1$ .

Os valores de  $x_{ij}$  e  $y_{ij}$  podem ser determinados para diferentes tamanhos de partículas, por meio de tabelas disponíveis em Kim & Karrila, 1991. Para partículas de mesmo tamanho, e  $r \geq 2.5$ , tem-se que

$$\begin{aligned} A &= 5r^{-3} - 8r^{-5} + 25r^{-6} - 35r^{-8} + 125r^{-9} - 102r^{-10} + 12.5r^{-11} + 430r^{-12} \\ B &= \frac{1}{3}(16r^{-5} + 10r^{-8} - 36r^{-10} - 25r^{-11} - 36r^{-12}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Para a região de lubrificação  $2 < r \leq 2.01$ , usam-se as seguintes funções mobilidade

$$\begin{aligned} A &= (16.3096 - 7.1548r)/r \\ B &= 2(0.04056L^2 + 1.49681L - 1.9108)/r(L^2 + 6.0425L + 6.32549) \end{aligned} \quad (6.20)$$

em que  $L = -\ln(r - e)$  (Cunha & Hinch, 1996). Foram usados no cálculo numérico da trajetória os passos de tempo de 0.02 e 0.005 respectivamente para as duas regiões. Esses valores garantem uma convergência menor que 1% na trajetória da partícula.

O ponto de interseção das funções de mobilidade nos diferentes regimes de separação, determinam os limites de cada domínio pela variável  $r$ . Para cada valor de  $\beta$ , que corresponde a razão de raios das partículas interagentes (ou fator de poli-dispersidade da suspensão), deve-se determinar o intervalo de  $r$  no qual o regime de separação de longo alcance ou de lubrificação dominam a interação das partículas. Os estudos sobre o comportamento das equações de mobilidade bem como as trajetórias e pontos finais de partículas para  $\beta = 1$ , serão apresentadas no Capítulo 7 da presente dissertação.

## 6.5 Velocidade de migração de partículas em cisalhamento simples

Uma partícula fluida quando suspensa em um fluido sujeito a um cisalhamento simples sofrerá uma deformação e reorientação pela ação da taxa de deformação e vorticidade do escoamento (Smart & Leighton, 1991). Estudos pioneiros de Taylor sobre microhidrodinâmica de gotas em suspensões sujeitas a escoamentos extensionais e cisalhamentos simples levaram ao desenvolvimento de pesquisa sobre os efeitos da curvatura, deformação e orientação de gotas na reologia do movimento de emulsão.

Em um cisalhamento simples na presença de uma parede, o movimento de uma partícula induz um dipólo hidrodinâmico (tensão) na parede. Na presença de deformação da gota um dipólo assimétrico é refletido pela parede sob a partícula, produzindo um movimento líquido de partículas na direção normal à parede. Esse movimento ou fluxo microhidrodinâmico de partículas é caracterizado pela velocidade de migração que será mais intensa, quanto maior for a deformação da gota próxima à parede (Smart & Leighton, 1991).

A teoria apresentada aqui despreza as interações entre gotas e trata unicamente do movimento da gota induzido pela parede. Em vista disso, a teoria é aplicável a soluções diluídas em que a fração volumétrica é pequena o suficiente para que as gotas não influenciem o movimento umas das outras.

De uma maneira geral propõe-se que a velocidade de migração de partículas por efeito de parede é dada na forma adimensional por:

$$u = \dot{\gamma}aH(\lambda, y, Ca), \quad (6.21)$$

em que  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento e  $H(\lambda, y, Ca)$  é uma função que depende da razão de viscosidade e do número de capilaridade e da distância de separação da parede  $y$ . Note que a velocidade de migração é diretamente proporcional a taxa de cisalhamento e ao raio das partículas não deformadas. Isto já mostra que no caso do sangue na microcirculação as plaquetas que são as menores células em comparação com as hemácias tendem a movimentar-se mais próximas à parede por sofrerem menor influência da parede e, ainda, apresentarem menores velocidades de migração (Cunha & Lowenberg, 1999). Como principais parâmetros físicos que governam a microhidrodinâmica da gota, tem-se a razão de viscosidade e o número de capilaridade que influenciam na deformabilidade e orientação das gotas de uma emulsão. Vale mencionar que a presente abordagem despreza efeitos de tensoativos ou surfactantes associados a gradientes de tensão superficial. No caso de uma célula ou cápsula, tem-se propriedades mecânicas de membrana como o módulo de flexão, módulo elástico e razão de viscosidade da membrana com o meio. No modelo protótipo descrito aqui, as gotas não apresentam exatamente essas propriedades, mas de maneira equivalente também possuem uma alta razão de viscosidades gota-plasma. O efeito elástico da membrana é representado pela tensão superficial e as gotas de alta razão de viscosidade comparadas com a viscosidade do meio fluido também praticamente preservam sua área superficial. Condição esta sendo uma das principais características de glóbulos vermelhos reais. Como as deformações das gotas são pequenas não existem grandes valores de curvatura na superfície de contorno, implicando em módulos de flexão muito baixos comparados com o número capilaridade da gota. Segundo Chan & Leal, 1979,  $H$  é dada por

$$H(\lambda, y, Ca) = Cah(\lambda)y^{-2} \quad (6.22)$$

em que

$$h(\lambda) = \frac{9}{2240}(19\lambda + 16)(9\lambda^2 + 17\lambda + 9)(1 + \lambda)^{-3} \quad (6.23)$$

A Fig. 6.5 mostra que a função  $h(\lambda)$  possui duas retas assintóticas horizontais que limitam os valores da função  $h(\lambda)$  entre 0.58 e 0.69. Assim, no caso de interesse  $\lambda \gg 1$

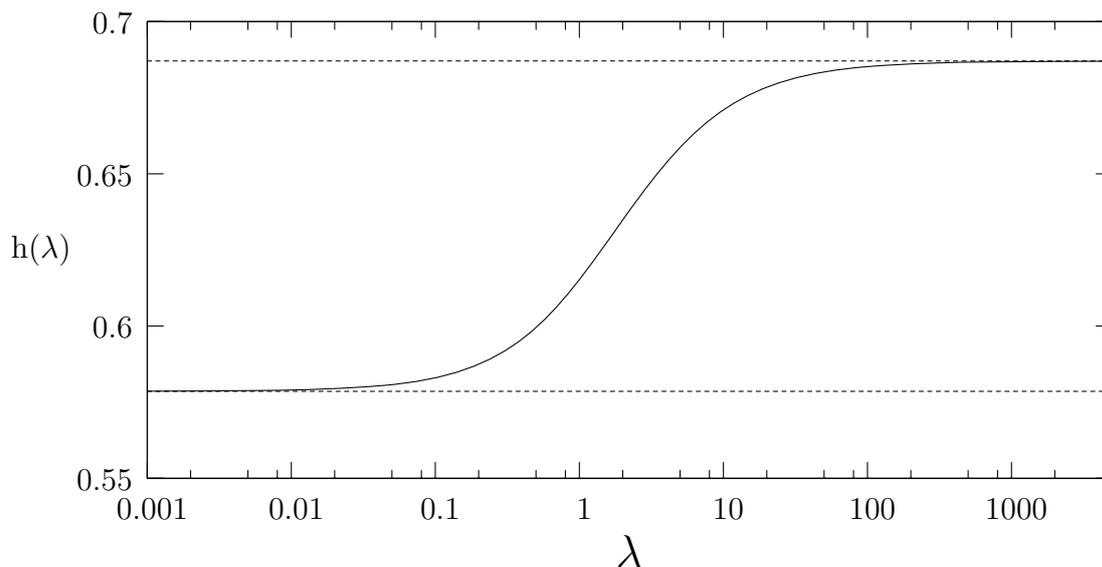


Figura 6.5: Comportamento da função  $h(\lambda)$  com a razão de viscosidade  $\lambda$ . Esta função é usada para o cálculo da velocidade de migração na Eq. 6.23

a expressão para a velocidade de migração depende, apenas, do número de capilaridade, da taxa de cisalhamento do escoamento e da distância do centro da partícula à parede. Para  $\lambda = 100$ , por exemplo, a velocidade de migração dimensional é expressa aproximadamente por

$$u(y) = 7/10 a \dot{\gamma} C a y^{-2}, \quad (6.24)$$

o qual apresenta um decaimento de  $u(z)$  com  $1/y^2$ .

## 6.6 Formação da camada livre de partículas

O balanço entre os mecanismos de difusão hidrodinâmica e a migração de gotas é regido por uma equação do transporte de células, semelhante a Eq. (6.1). Essa equação consiste de um termo de fluxo difusivo associado à difusão hidrodinâmica causado pelas colisões irreversíveis entre gotas e por gradientes de concentração em equilíbrio com um termo de fluxo migracional em virtude das interações gota-parede.

Na microcirculação observa-se que existe um mecanismo em que as células do sangue tendem a ocupar o núcleo do microvaso (conforme mostrado na Fig. 1.3) dando origem uma fina camada livre de células adjacente a parede do microvaso. Essa camada tem um efeito de lubrificação para que o pacote de células sanguíneas no núcleo possa escoar a menor resistência possível em microvasos. Defende-se nesta dissertação que a origem da camada livre de células adjacente a parede em casos da ordem de

micrômetros é um resultado de mecanismos de difusão e migração das células. Os mecanismos competem hidrodinamicamente em escoamentos em baixos números de Reynolds, como ocorre na microcirculação. Nesse regime a teoria de Cunha & Hinch, 1996, pode ser aplicada como uma primeira aproximação para o mecanismo interação entre hemácias no escoamento do microvaso. Dessa forma pode-se estimar o fluxo difusivo devido ao movimento de células em um microvaso produzido pela colisão entre glóbulos vermelhos.

De uma forma simplificada, propõe-se que a espessura da camada livre de células é definida pelo balanço entre a difusão hidrodinâmica causada pelas interações célula-célula (e gradientes de concentração de células) e o fluxo devido a velocidade de migração das células induzido pela parede do microvaso. Enquanto a difusão hidrodinâmica tende a aumentar a concentração de células nas proximidades da parede do microvaso, a migração de células induzida pela parede do microvaso tende a diminuir a concentração de células próximo a parede. O balanço desses dois mecanismos resulta na camada livre de células adjacente a parede do microvaso, que pode também ser entendida como uma camada limite de distribuição transversal do hematócrito.

Primeiro considere que o balanço entre estes dois fluxos, em regime permanente, pode ser expresso pela equação unidirecional que governam a distribuição de partículas na seção transversal do microvaso (Cunha & Lowenberg, 1999):

$$D \frac{d\phi}{dy} - \phi u(y) = 0 \quad (6.25)$$

em que  $y$  é a distância adimensional da célula a parede,  $u(y)$  é a velocidade de migração na direção perpendicular à parede do vaso, expressa pela Eq. 6.21,  $D$  é o coeficiente de difusão hidrodinâmico devido a colisões entre células. O referido coeficiente, para o caso monodisperso e unidirecional, pode ser calculado segundo Cunha & Hinch, 1996, por

$$D = \phi \dot{\gamma} a^2 f(\lambda, y) \quad (6.26)$$

em que  $\phi$  é o hematócrito,  $a$  é o diâmetro característico da célula não deformada,  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento, e  $f$  é uma função que depende da distância  $y$  das células à parede e da razão de viscosidade característica entre o glóbulo vermelho e o plasma  $\lambda = \mu_m/\mu$ . Segundo a teoria de Cunha & Hinch, 1996, no cálculo da difusividade hidrodinâmica deve-se considerar todas as colisões possíveis que produzem trajetórias relativas abertas (irreversíveis) de células somado ao fluxo devido a gradientes de concentração na

suspensão. Assim, para o cálculo da difusividade da emulsão protótipo do sangue em um microvaso tem-se que:

$$D = \frac{3}{4\pi} \phi \dot{\gamma} a^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta Y^2 |y| dy dz + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta Y| y^2 dy dz \right) = 2D^S + F \quad (6.27)$$

em que  $\Delta Y$  é o deslocamento líquido transversal das células após interação com outras células.  $D^S$  é a contribuição da auto-difusividade associada com colisões randômicas das células.  $F$  é a difusividade associada com o fluxo de células devido a gradientes de concentração na suspensão. O coeficiente de difusão hidrodinâmico total,  $D$ , será determinado para diferentes valores da razão de viscosidades  $\lambda$ . No capítulo 7 será apresentada uma generalização da Eq. 6.27 para sistemas polidispersos de células.

## Capítulo 7

### Formação da camada livre de células

Neste capítulo a teoria apresentada no capítulo 6 será aplicada para calcular a distribuição de células em uma seção transversal de um microvaso. A presente análise tem como principal foco o entendimento da formação e determinação da espessura da camada livre de células do sangue adjacente a parede de microvasos.

Os glóbulos vermelhos comportam-se como gotas de alta razão de viscosidade que sofrem pequenas deformações. Assim como no capítulo 5, considera-se na presente análise, partículas esféricas como protótipos de células do sangue usadas para a determinação da distribuição do hematócrito na microcirculação. O problema examinado aqui consiste de uma camada limite de concentração onde busca-se a determinação do perfil ou distribuição do hematócrito.

Na região próxima a parede do microvaso, as interações célula-célula e célula-parede são responsáveis pelos gradientes de concentração de células na microcirculação, conforme já mencionado no capítulo 6. Para se calcular as forças hidrodinâmicas envolvidas nessas interações o escoamento adjacente a parede do microvaso é aproximado por um cisalhamento simples considerando o tamanho das gotas. Assim, pode-se aplicar as teorias de Cunha & Hinch, 1996, e Chan & Leal, 1979, para o cálculo de fluxo difusivo e do fluxo migracional de células, respectivamente. Essas teorias permitem calcular, respectivamente, a difusividade hidrodinâmica das gotas protótipos, considerando-se colisões aleatórias (induzidas por cisalhamento simples) e a velocidade de migração de uma gota próxima a uma parede rígida em escoamento de cisalhamento simples.

A distribuição de células é determinada considerando-se todas as possíveis colisões entre células que produzem trajetórias irreversíveis após as colisões, o gradiente de fração volumétrica de células, e a velocidade de migração induzida pela presença

da parede do microvaso. Esses mecanismos relacionam-se por meio da equação do transporte de células, que consiste de um termo de fluxo difusivo associado a difusão hidrodinâmica das células causado pelas colisões célula-célula e por gradientes de concentração, e um termo de migração de células devido as interações célula-parede.

O caso transiente da equação diferencial de distribuição de glóbulos vermelhos é resolvida por meio de um método de similaridade. Com isso, determina-se o desenvolvimento da camada livre de células com o decorrer do tempo e a espessura da mesma em diferentes condições. Esse estudo é realizado para uma suspensão monodispersa de gotas protótipos com alta razão de viscosidade comparada ao fluido base.

## 7.1 Difusão hidrodinâmica de células na microcirculação

Nesta seção será apresentada a teoria de difusão hidrodinâmica usada para se estimar a espessura da camada livre de células adjacente a parede do microvaso. Será apresentada uma teoria para o cálculo da difusividade hidrodinâmica e examinada a dependência do processo difusivo da razão de viscosidade entre as gotas protótipos de células e o plasma.

Conforme mencionado no capítulo 6, um problema de difusão é governado pela equação de difusão parabólica clássica,

$$-\nabla \cdot \mathfrak{S}_i = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (7.1)$$

em que na presente aplicação  $\phi$  é a fração volumétrica de glóbulos vermelhos,  $\mathfrak{S}_i$  denota o fluxo total de gotas de diferentes espécimes através de uma superfície. O índice  $i$  denota a espécie da gota de um determinado tamanho. No presente trabalho o fluxo de gotas,  $\mathfrak{S}_i$ , é calculado pela seguinte equação a seguir

$$\mathfrak{S}_i = \left( \sum_{j=1}^m D_{ij} \nabla \phi_j \right) - \mathbf{u}_i \phi_i, \quad (7.2)$$

em que  $m$  é o número de gotas protótipos de diferentes espécimes (no caso monodisperso,  $m = 1$ ),  $\mathbf{u}_i$  é a velocidade de migração das gotas de espécie  $i$ ,  $D_{ij}$  é o coeficiente de difusão hidrodinâmica associado com a interação de gotas de espécie  $i$  com a espécie  $j$  e  $\nabla \phi_j$  é o gradiente de concentração de uma dada espécie. É importante mencionar que a primeira contribuição do lado direito da Eq. 7.2 representa um fluxo de gotas sendo resultante das interações/colisões de gotas na presença de um

gradiente de concentração. O segundo termo da Eq. 7.2 denota a taxa de migração de gotas na direção normal à parede do microvaso. Essa migração das gotas é resultado da interação entre as gotas protótipos e a parede do microvaso. Considerando a condição na qual o fluxo líquido é nulo, isto é, o fluxo difusional encontra-se em equilíbrio com o fluxo associado com a migração das gotas, tem-se

$$\sum_j^m D_{ij} \nabla \phi_j - \mathbf{u}_i \phi_i = 0. \quad (7.3)$$

Aproximando o escoamento próximo a parede do microvaso a um cisalhamento simples e em coordenadas cartesianas retangulares a Eq. 7.3 pode ser re-escrita como

$$\sum_j^m D_{ij} \frac{d\phi_j}{dy} - \phi_i u_i = 0 \quad (7.4)$$

em que  $y$  é a distância do centro de uma gota protótipo de célula à parede rígida do microvaso,  $D_{ij}$  é a difusividade hidrodinâmica de gotas protótipos obtida a partir da teoria desenvolvida por Cunha & Hinch, 1996.

### 7.1.1 Difusividade hidrodinâmica na microcirculação

Nesta seção apresenta-se a teoria envolvida no cálculo da difusividade hidrodinâmica de gotas protótipos de célula no escoamento da microcirculação.

Para este fim, considere uma emulsão diluída formada por gotas de alta razão de viscosidade gota-plasma (sofrem pequena deformação) ou equivalentemente uma suspensão diluída de partículas rugosas de diferentes diâmetros (espécime) que colidem de forma aleatória em um escoamento cisalhante simples. Para esse caso a difusividade hidrodinâmica  $D_{ij}$  é calculada de acordo com a recente teoria de Couto & Cunha, 2008, que propõe

$$D_{ij} = D_{ij}^s + F_{ij} + \delta_{ij} \sum_{p=1}^m \left( \frac{n_p}{n_i} \right) D_{ip}^s, \quad (7.5)$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $n_k$  é o número de densidade da  $k$ -ésima espécie de gota. Note que a Eq. 7.5 recupera a Eq. 6.27 no caso monodisperso ( $i = j = 1$  e  $m=1$ ) e considerando-se apenas a difusividade na direção do gradiente de velocidade do escoamento cisalhante. É importante mencionar que a difusividade  $D_{ij}$  é praticamente invariante com o número de capilaridade  $Ca$  e apresenta uma variação relativamente lenta para altos valores de razão de viscosidades  $\lambda > 10$ . Ainda na Eq. 7.5 o termo

$D_{ij}^s$  denota a auto-difusividade de gotas, calculada considerando-se um meio uniformemente distribuído de gotas (i.e. sem gradiente de concentração). A auto-difusividade é calculada em função da metade da variância do deslocamento líquido de uma gota de referência. O coeficiente de auto-difusão é calculado de acordo com a teoria de Cunha & Hinch, 1996.

$$D_{ij}^s = \frac{3}{4\pi} \phi a^2 \dot{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\Delta Y_{ij}^k)^2 |y^{-\infty}| dy^{-\infty} dz^{-\infty} \quad (7.6)$$

em que a nomenclatura com índice  $\infty$  denota condição inicial, antes do encontro das partículas (posição distante da condição de encontro). A Eq. 7.6 é a contribuição para a difusividade devido aos encontros aleatórios das gotas em um escoamento cisalhante (Cunha & Hinch, 1996). A Fig. 7.4 mostra o comportamento de  $D^s/\dot{\gamma}\phi a^2$  para o caso de uma emulsão monodispersa, em função da razão de viscosidades  $\lambda$  da emulsão.

A contribuição para a difusividade associada a um gradiente de concentração,  $F_{ij}$ , é também calculada de acordo com a teoria proposta por Cunha & Hinch, 1996, e desta maneira

$$F_{ij} = \frac{3}{4\pi} \phi a^2 \dot{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta Y_{ij}^k (y^{-\infty})^2] dy^{-\infty} dz^{-\infty}. \quad (7.7)$$

A contribuição para a difusividade total calculada pela Eq. 7.7 está associada com o fluxo de gotas devido a uma distribuição não-uniforme de concentração de partículas. Com o cálculo das referidas difusividades é possível contabilizar o fluxo de partículas através dos planos  $y=0$  e  $z=0$  após colisões aleatórias das gotas protótipos de células.

O valor de  $\Delta Y_{ij}$  corresponde à diferença entre a coordenada inicial e final de uma partícula de espécime  $i$  interagindo com outra partícula de espécime  $j$  em um escoamento cisalhante simples. Vale lembrar que para partículas rígidas rugosas ou partículas fluidas que sofrem pequenas deformações as trajetórias são irreversíveis (Cunha & Hinch, 1996, Lowenberg & Hinch, 1997). Portanto o deslocamento líquido de uma gota após uma colisão caracteriza um mecanismo difusivo na própria escala hidrodinâmica do escoamento. Essa difusão é anisotrópica e depende também do gradiente de concentração das partículas conforme demonstrado por Cunha & Hinch, 1996.

### 7.1.2 Análise de trajetórias de partículas sujeitas a cisalhamento

Conforme mencionado no capítulo 6, o movimento relativo de duas gotas de alta razão de viscosidade em cisalhamento simples é descrito pelo seguinte sistema de

equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2}{1+\beta} \left( y + ex - \frac{1}{2}By \right) \\ \dot{y} &= \frac{2}{1+\beta} \left( ey - \frac{1}{2}Bx \right) \\ \dot{z} &= \frac{2}{1+\beta} (ez) \end{aligned} \quad (7.8)$$

A trajetória relativa adimensional de uma gota partindo de uma condição inicial distante da origem de uma segunda gota de referência, é apresentada na Fig. 7.1. As trajetórias relativas para diferentes valores da razão de viscosidade  $\lambda$  da emulsão protótipo foram obtidas. A Fig. 7.1 indica claramente que a deformação das partículas indica a perda de reversibilidade das trajetórias relativas. Mesmo para altos valores de razão de viscosidade como  $\lambda = 100$  pode-se observar a configuração de trajetórias abertas. Isto significa que após uma interação induzida por cisalhamento a partícula não se desloca mais ao longo da linha de corrente inicial. Rigorosamente falando isto indica que um processo de mistura ou difusivo transversal torna-se presente na emulsão. Após um número suficiente de colisões é possível caracterizar essa auto-difusão por uma difusividade induzida por cisalhamento. É importante ressaltar que a difusividade hidrodinâmica depende da fração volumétrica das partículas tendo em vista que é função do encontro de pares de partículas. Essa é a principal diferença entre a difusão ordinária browniana e a difusão hidrodinâmica induzida por cisalhamento. Finalmente a Fig. 7.1 mostra que para valores de  $\lambda \gg 1$  as trajetórias são fechadas ou reversíveis e nenhum processo difusivo transversal está presente. Na seqüência, o processo difusivo hidrodinâmico examinado nesta dissertação será caracterizado pelo cálculo de duas difusividades em função de  $\lambda$ ,  $\phi$  e do quadrado do raio da partícula.

Nota-se que a deformação da gota é responsável pelo incremento na posição  $y$  do centro de massa da segunda partícula. No caso de gotas permanentemente esféricas a solução da Eq. 7.8 é periódica. A Fig. 7.2 mostra a solução de  $y(t)$  e  $z(t)$  que resulta em trajetórias relativas periódicas ou reversíveis. No cálculo do referido gráfico usa-se as condições iniciais  $x = -10, 0$ ,  $y = 0, 1$  e  $z = 0, 001$ . A periodicidade apresentada no gráfico da Fig. 7.2 é consequência direta da linearidade e reversibilidade das equações de Stokes. O comportamento observado ocorre na ausência de efeitos intrínsecos ao sistema como a rugosidade superficial ou a deformação de gotas durante o encontro das partículas (Cunha & Hinch, 1996). São exatamente esses efeitos que quebram

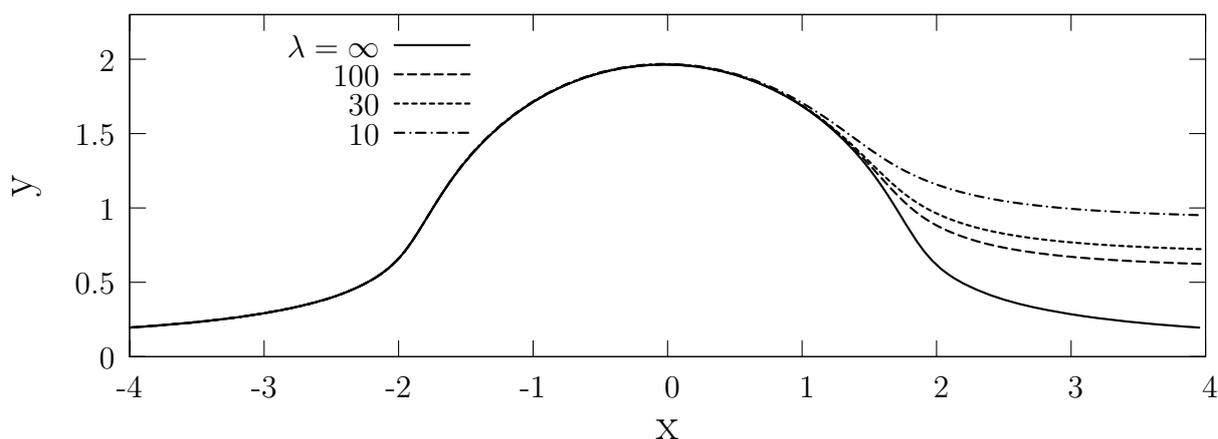


Figura 7.1: Trajetórias relativas de duas partículas interagindo em um escoamento cisalhante simples, com o referencial na partícula teste que parte da origem. As curvas correspondem a diferentes valores da razão de viscosidade gota-plasma  $\lambda$ . Observa-se a quebra de simetria das trajetórias para diferentes valores de  $\lambda$ . Quando  $\lambda \rightarrow \infty$  trajetória é reversível.

a simetria das trajetórias produzindo um deslocamento líquido das partículas após a colisão. A solução das equações diferenciais não-lineares  $\dot{y}(t)$  e  $\dot{z}(t)$  na Eq. 7.8 foram obtidas por um método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem. O resultado mostrado na Fig. 7.2 foi usado para testar o comportamento das trajetórias reversíveis dados pela integração numérica. Teste este que serviu também para avaliar acurácia da integração numérica cujo o erro foi menor que 1%. Observou-se perdas significativas da periodicidade da solução das equações de trajetória após cinco períodos. Este problema não influencia na precisão dos resultados tendo em vista que os cálculos são baseados em um único período.

Considera-se um grande número de gotas protótipos de células partindo de diferentes pontos num plano  $y$ - $z$  em um escoamento cisalhante simples. Nessas condições, calculam-se todas as possíveis colisões com gota de referência que está, inicialmente, na origem. As coordenadas finais dessas gotas, após a colisão e para diferentes valores de  $\lambda$ , podem ser observadas na Fig 7.3. Os planos mostrados na figura são equivalentes as seções de Poincaré comumente usadas na literatura de sistemas dinâmicos.

As integrais das Eqs. 7.6 e 7.7 são calculadas numericamente no domínio de pontos mostrados na Fig. 7.3. A integral dupla resolvida considera os quatro quadrantes para a integração e a posição  $y$ , na direção do gradiente de velocidade do

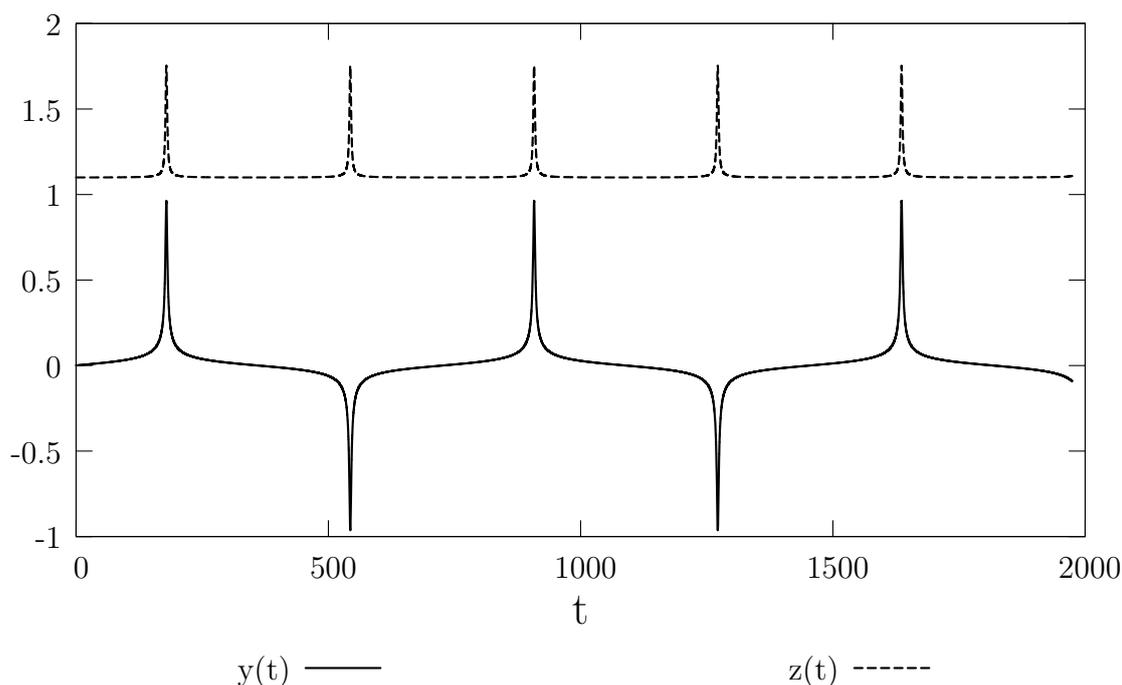


Figura 7.2: Trajetórias relativas de  $y(t)$  e  $z(t)$  para uma partícula partindo de uma posição relativa  $x = -10.0$ ,  $y = 0.001$  e  $z = 1.1$ . Os gráficos mostram os momentos exatos das colisões entre partículas monodispersas.

escoamento. Como os demais quadrantes são equivalentes, integra-se na área de  $2 \times 2$  e quadruplica-se o resultado da integral. Foi usado um método de trapézio para o cálculo das referidas integrais com erro menor que ordem de 1%.

O primeiro quadrado da Fig. 7.3 correspondente a  $\lambda \rightarrow \infty$  mostra uma configuração de trajetórias relativas fechadas ou reversíveis indicando que não houve deslocamentos transversais líquidos ou difusão de partículas. Na seqüência, para menores valores de  $\lambda$ , o efeito da deformação da gota leva à quebra da reversibilidade no tempo das trajetórias relativas. A região de maior concentração de pontos nos gráficos correspondem a trajetórias abertas ou irreversíveis. Nesse caso a posição da partícula não se encontra ao longo da linha de corrente inicial. Existe um processo difusivo que pode ser caracterizado por um coeficiente de difusão hidrodinâmico. Em adição, percebe-se que menores valores de  $\lambda$  produziram um acréscimo da região de trajetórias irreversíveis e conseqüentemente resulta num processo de mistura mais difusivo. De uma maneira geral os resultados anteriores indicam que existe algum efeito intrínseco a suspensão, como rugosidade superficial, deformação superficial, mesmo anisotropia geométrica. Esses fatores são suficientes para um processo de misturas no escoamento.

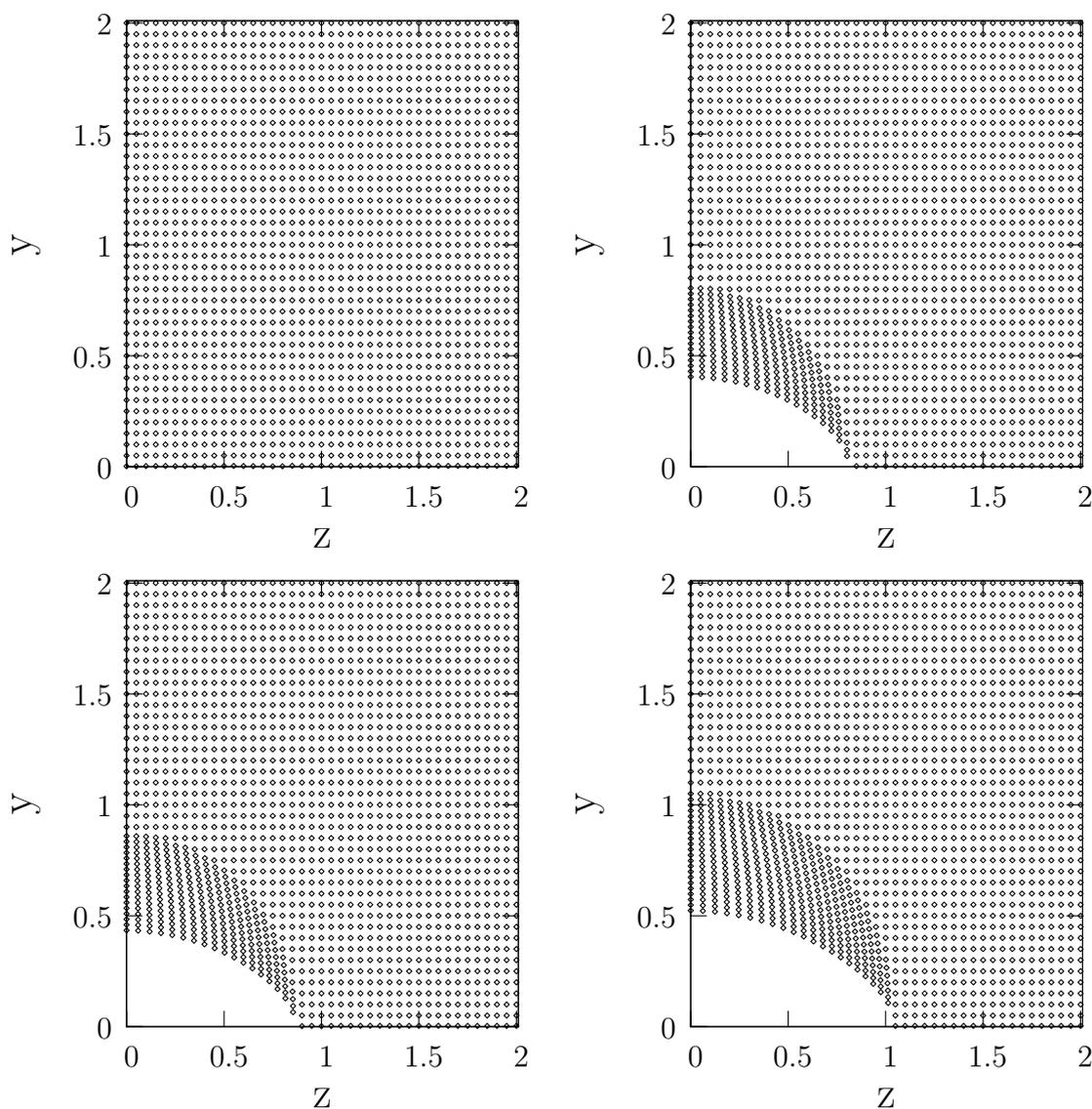


Figura 7.3: Coordenadas finais de partículas partindo de uma grade 2x2 e colidindo com uma segunda partícula inicialmente na origem. Da esquerda para a direita e de cima para baixo tem-se as razões de viscosidade,  $\lambda = \infty, 50, 20, 10$ , usadas nas simulações.

### 7.1.3 Resultados do cálculo das difusividades

As Fig. 7.4 e 7.5<sup>1</sup> mostram o comportamento da difusividade adimensional  $f^s = D^s/\phi\dot{\gamma}a^2$  e  $f^c = F/\phi\dot{\gamma}a^2$  em função da razão de viscosidades de emulsão. É importante notar que para partículas fluidas com alta razão de viscosidade, usadas como protótipos de células, a difusividade associada com colisões aleatórias é menor quanto maior for  $\lambda$ .

<sup>1</sup>No caso monodisperso, para conveniência de escrita adotam-se as igualdades:  $D_{11}^s = D^s$ ,  $F_{11} = F$  e  $D_{11} = D$

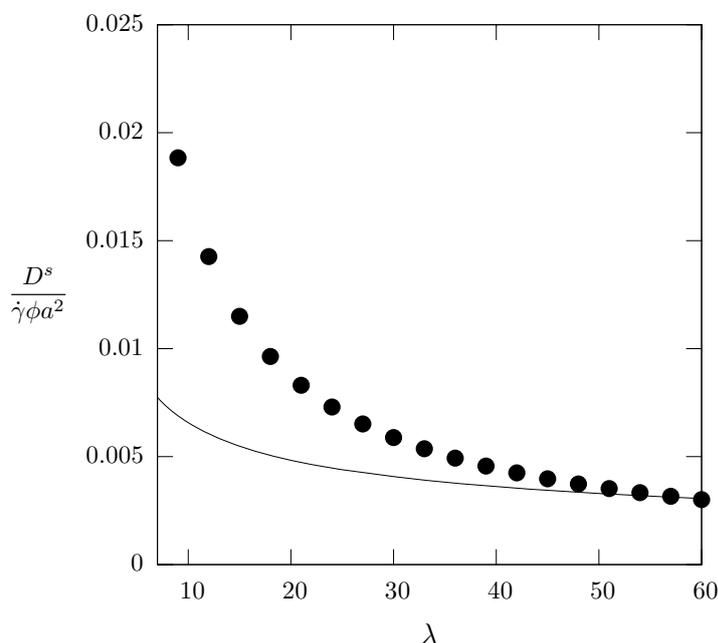


Figura 7.4: Resultado da integração numérica para a determinação do coeficiente de auto difusão hidrodinâmica adimensional em função de  $\lambda$ , para uma emulsão diluída monodispersa. Os pontos representam os resultados numéricos e a linha cheia a função  $f^s(\lambda) = c(\Delta X)^4$ , em que  $\Delta X$  é determinado pela Eq. 6.17 e  $c = 0.01$  é uma constante de ajuste

A Fig 7.4 mostra que o coeficiente de auto-difusão  $D^s = \dot{\gamma}\phi a^2 f^s(\lambda)$  é uma função monotônica decrescente e para valores de  $\lambda \gg 1$  (e.g. 30)  $f^s$  é praticamente independente de  $\lambda$ . Vale observar que  $D^s$  é diretamente proporcional ao quadrado do raio da gota. Na Fig. 7.4 vê-se que a teoria assintótica  $f(\lambda) = c(\Delta X)^4$ , com  $c = 0.01$  se aproxima dos resultados numéricos para valores de  $\lambda > 50$ .

De maneira similar a  $f^s$ , a função  $f^c$  também decresce monotonicamente com  $\lambda$ . Nota-se também que para altos valores de  $\lambda$  (foco da presente dissertação) as variações de  $f^c$  com  $\lambda$  são quase imperceptíveis. Este resultado se justifica pelas pequenas deformações sofridas pelas partículas. Nesse caso as trajetórias relativas são aproximadamente fechadas ou reversíveis e assim observa-se uma pequena difusão transversal.

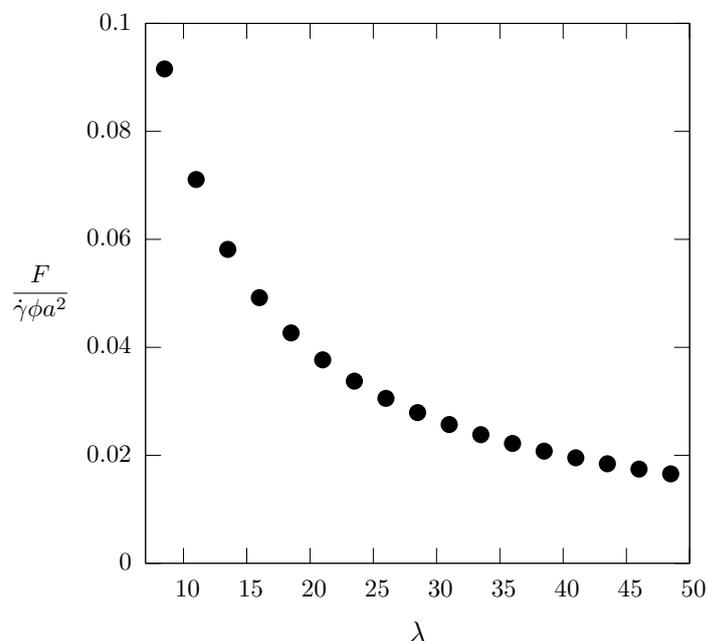


Figura 7.5: Resultado numérico de  $f^c$  em função de  $\lambda$ , para uma emulsão diluída monodispersa,  $i = j$ .

## 7.2 Estimativa da camada livre de células

Nesta seção aplica-se a teoria discutida anteriormente para se estimar uma expressão para o cálculo da espessura da camada livre de células presente na microcirculação.

Acredita-se que a difusividade hidrodinâmica discutida na seção 7.1.1 está diretamente associada com o mecanismo pelo qual as células no interior de um microvaso tendem a ocupar regiões adjacentes as paredes do microvaso. Essa tendência é balanceada pelo fluxo migratório de células para o centro do vaso causado pela interação entre células e a parede do vaso. Dados esses dois mecanismos que regem a distribuição de células no microvaso, o presente estudo é uma primeira tentativa de explicar a formação da camada livre de células adjacente a parede do microvaso, identificando os parâmetros físicos que controlam a evolução da referida camada.

O fluxo migratório de partículas, produzido por uma assimetria do tensor de tensões de partículas devido a deformação das células induzida pela presença de uma

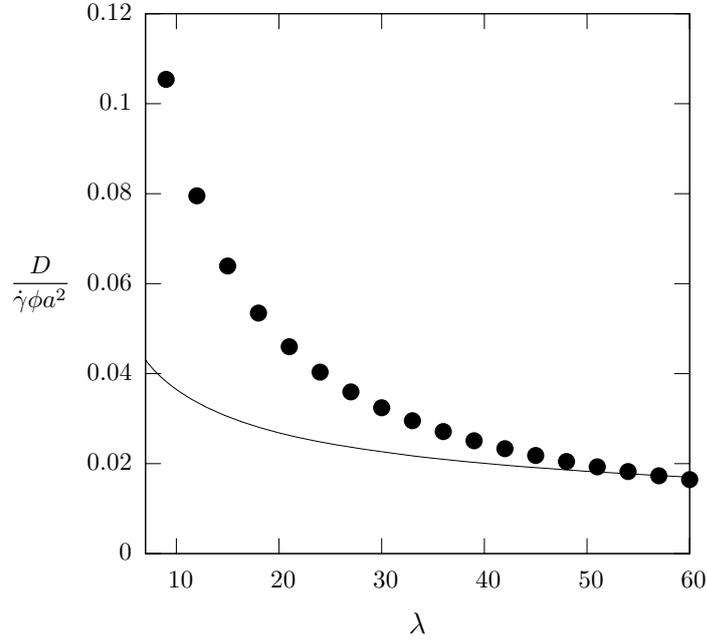


Figura 7.6: Resultado de  $D/\phi a^2 \dot{\gamma}$  em função de  $\lambda$ , para uma emulsão diluída monodispersa. Os pontos representam os resultados numéricos e a linha cheia a função  $f(\lambda) = c(\Delta X)^4$ , em que  $\Delta X$  é determinado pela Eq. 6.17 e  $c = 0.55$  é uma constante de ajuste.

parede, é caracterizado por uma velocidade de migração. Considerando que as células são sujeitas a um escoamento de cisalhamento simples com a presença de uma parede rígida, a velocidade de migração da célula pode ser estimada usando a teoria de Chan & Leal, 1979, descrita também em Smart & Leighton, 1991. Propõe-se portanto a seguinte expressão dimensional:

$$u(y) = a\dot{\gamma}Cah(\lambda)\tilde{y}^{-2} \quad (7.9)$$

em que  $a$  é o diâmetro característico da célula não deformada,  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento do escoamento,  $\tilde{y} = y/a$  e  $h(\lambda)$  é calculada segundo proposta de Chan & Leal, 1979.

$$h(\lambda) = \frac{9}{2240}(19\lambda + 16)(9\lambda^2 + 17\lambda + 9)(1 + \lambda)^{-3} \quad (7.10)$$

É importante lembrar que Eq. 7.9 é baseada na teoria de pequena deformação

e baixos números de capilaridade. A velocidade de migração  $u(y)$  não será nula se as partículas apresentarem deformação causada pela presença da parede. A deformação da gota causa assimetria da distribuição de tensões na superfície da gota. Assim, a gota sofre uma força que se reflete numa velocidade de migração da partícula a partir da parede rígida. Em outras palavras, esse mecanismo em um microvaso produz uma migração de células da parede em direção ao centro do microvaso.

Agora, para uma estimativa da espessura da camada livre de células, considera-se o balanço do fluxo difusivo e fluxo migratório das gotas na direção transversal à parede, no plano de cisalhamento. Nesta circunstância a Eq. 7.4 reduz-se a

$$D \frac{d\phi}{dy} - u\phi = 0. \quad (7.11)$$

No caso de pequenas deformações ou  $Ca \ll 1$  a difusividade pode ser descrita da seguinte forma

$$D = a^2 \phi \dot{\gamma} f(\lambda) \quad (7.12)$$

em que  $f(\lambda)$  é avaliada com base no resultado da Fig. 7.6 ou poderia ainda ser usada a teoria assintótica de Cunha & Hinch, 1996, para altos  $\lambda$ . A referida teoria assintótica é representada na Fig. 7.6 pela linha cheia, vê-se que a teoria pode ser usada para valores de  $\lambda > 50$ . Para o presente contexto de emulsões de alta razões de viscosidade a teoria de Cunha e Hinch é ajustada para a seguinte expressão

$$D = c\Delta X^4 \quad (7.13)$$

Substituindo-se a Eq. 7.9 em 7.11 obtém-se como equação diferencial linear adimensional

$$f(\lambda) \frac{d\phi}{d\tilde{y}} - h(\lambda) Ca \tilde{y}^{-2} = 0. \quad (7.14)$$

Portanto

$$\frac{d\phi}{d\tilde{y}} = Ca \frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} \tilde{y}^{-2} \quad (7.15)$$

Obsevações experimentais (ver Fig. 1.3) mostram a existência de uma camada livre de células próxima a parede de um microvaso. Portanto a fração volumétrica  $\phi$  (hematócrito) pode ser estabelecida conforme segue

$$\phi = \begin{cases} \phi_\infty & \text{para } y \rightarrow \infty \\ 0 & \text{para } 0 < y \leq \delta \end{cases} \quad (7.16)$$

Integrando a Eq. 7.15 tem-se

$$\int_0^\phi d\phi = - \int_{\tilde{y}}^{\tilde{\delta}} Ca \frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} \tilde{y}^{-2} d\tilde{y} \quad (7.17)$$

que resulta

$$\phi = Ca \frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} \left( \frac{1}{\tilde{\delta}} - \frac{1}{\tilde{y}} \right). \quad (7.18)$$

Agora, aplicando-se a condição de contorno  $\tilde{y} \rightarrow \infty$ ;  $\phi = \phi_\infty$  tem-se

$$\tilde{\delta} = \frac{Ca h(\lambda)}{\phi_\infty f(\lambda)} \quad (7.19)$$

em que  $\tilde{\delta} = \delta/a$ . Da Eq. 7.19 conclui-se que a espessura da camada livre de células depende da taxa de cisalhamento do parâmetro elástico das células, aqui representado pelo número de capilaridade, da razão de viscosidade célula-plasma e é inversamente proporcional ao hematócrito no núcleo do microvaso.

Os valores das funções  $h(\lambda)$  e  $f(\lambda)$ , podem ser obtidos a partir das Figuras 6.5 e 7.6. Para um número de capilaridade de  $Ca \sim 0,01$ , hematócrito médio  $\phi_\infty = 0,45$  e  $\lambda = 50$ , tem-se a espessura de camada estimada pela Eq. 7.19. como sendo

$$\tilde{\delta} = 0,75 \quad (7.20)$$

Dado uma célula de raio característico de  $a = 3\mu m$ , tem-se uma espessura de camada de aproximadamente  $\delta = 2\mu m$ . A espessura da camada livre de células obtida nas referências especializadas na área de hematologia e fisiologia do sangue é de aproximadamente  $\delta = 1\mu m$  (Hogenauer, 2003). O resultado  $\tilde{\delta}$  estimado pela teoria de pequenas deformações usando o modelo simplificado descrito na presente seção é o dobro dos valores típicos medidos experimentalmente.

### 7.3 Modelo para evolução temporal da camada livre de células

Nesta seção será proposta uma solução por similaridade para o cálculo da distribuição transversal de partículas. Novamente, o modelo trata o sangue como uma emulsão monodispersa de gotas protótipos de glóbulos vermelhos em um escoamento cisalhante simples na presença de uma parede rígida. A análise permitirá determinar a evolução temporal da fração volumétrica de células em um microvaso e estimar a espessura  $\tilde{\delta}$  da camada livre de células adjacente à parede.

A equação governante do problema corresponde ao caso unidimensional transiente da Eq. 7.1, reescrita na forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (7.21)$$

Para a velocidade de migração,  $u$ , usa-se a Eq. 7.9, reescrita a seguir de forma dimensional substituindo-se  $\tilde{y} = y/a$

$$u(y, \lambda, Ca) = \dot{\gamma} a^3 Ca h(\lambda) y^{-2}. \quad (7.22)$$

Para a difusividade hidrodinâmica utiliza-se novamente a equação a seguir

$$D(\lambda, y) = a^2 \dot{\gamma} \phi f(\lambda). \quad (7.23)$$

Agora, substituindo-se as Eqs. 7.22 e 7.23 na Eq. 7.21, obtém-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \dot{\gamma} a^3 Ca \frac{h(\lambda)}{y^2} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a^2 \dot{\gamma} f(\lambda) \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \quad (7.24)$$

que pode também ser reescrita na seguinte forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\dot{\gamma} a^3 Ca h(\lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi}{y^2} \right) + a^2 \dot{\gamma} f(\lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right). \quad (7.25)$$

### 7.3.1 Adimensionalização da equação governante

Para adimensionalização da equação governante propõe-se as seguinte variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t \frac{D_\infty}{a^2} \\ \tilde{\phi} &= \phi / \phi_\infty \\ \tilde{y} &= y/a, \end{aligned} \quad (7.26)$$

em que  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{t}$  e  $\tilde{y}$  são variáveis adimensionais, na Eq. 7.25 obtém-se

$$\frac{\phi_\infty}{a^2/D_\infty} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} = -\dot{\gamma} a^3 Ca h(\lambda) \phi_\infty \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{\tilde{\phi}}{a^2 \tilde{y}^2} \right) + a^2 \dot{\gamma} \frac{f(\lambda)}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{\phi_\infty^2 \tilde{\phi}}{a} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right). \quad (7.27)$$

Com algumas manipulações algébricas da Eq. 7.27 e usando as variáveis adimensionais com nomenclatura padrão por questões de simplificação de notação, tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{a^2 \dot{\gamma} Ca h(\lambda)}{D_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi}{y^2} \right) + \frac{\phi_\infty \dot{\gamma} f(\lambda) a^2}{D_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (7.28)$$

Como  $D_\infty = \phi_\infty a^2 \dot{\gamma}$  define-se o número de Peclet como uma relação entre uma escala de tempo difusivo  $a^2/D_\infty$  e uma escala de tempo do escoamento  $1/\dot{\gamma}$ ,  $Pe_\infty = \frac{a^2}{D_\infty} \dot{\gamma}$ , em que  $Pe_\infty$  é o número de Peclet baseado no hematócrito  $\phi_\infty$ , portanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = Pe_\infty Cah(\lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi}{y^2} \right) + f(\lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (7.29)$$

Vale ressaltar que no caso em que  $Pe \rightarrow \infty$  o tempo do escoamento ( $1/\dot{\gamma}$ ) é muito inferior ao tempo de difusão ( $a^2/D$ ) e assim a distribuição de partículas é regida predominantemente pela migração convectiva de partículas causada pela presença da parede rígida. Como o balanço de fluxo de partículas próximo à parede do microvaso resulta em uma camada livre de células o problema possui as seguintes condições de contorno adimensionais

$$\begin{cases} \phi(0, y) = \phi_0 \\ \phi(t, \infty) = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, \infty) = 0 \\ \phi(t, y) = 0 \quad \text{para } y \leq \tilde{\delta} \end{cases} \quad (7.30)$$

em que  $\delta/a = \tilde{\delta}$  é a espessura adimensional da camada livre de células.

### 7.3.2 Solução pelo método de similaridade

Métodos de similaridade são tipicamente usados na solução de problemas de camada limite. O uso do referido método é conveniente pois reduz-se a equação diferencial parcial do problema a uma equação ordinária em termos das variáveis similares. Uma solução similar do campo  $\phi(y, t)$  pode ser calculada se, por exemplo, existem dois perfis de fração volumétrica em dois tempos diferentes  $t$  que se distinguem apenas por uma escala em  $\phi$  e  $y$ . Deste modo, todas as soluções serão “similares” em relação ao tempo  $t$ . Sendo assim, uma vez definida uma escala  $v$  e  $g$ , existe uma solução similar  $\psi(\eta)$ , em que  $\eta(y, g)$  e  $\phi = \psi(\eta)v$ . Uma condição de existência da solução similar  $\psi$  é que a equação diferencial similar deve ser expressa por uma equação apenas em termos de  $\psi$  e  $\eta$  (Schlichting, 1968).

Agora, no problema investigado nesta seção a solução por similaridade da equação governante determina que a existência da mudança de variáveis a seguir

$$\phi = v(t)\psi(\eta) \quad (7.31)$$

em que

$$\eta = \frac{y}{g(t)} \quad (7.32)$$

reduz a equação diferencial parcial governante a uma equação diferencial ordinária. Calculando-se as derivadas parciais envolvidas na Eq. 7.29 e substituindo-se as Eqs. 7.31 e 7.32 nas derivadas da Eq. 7.29 em termos das variáveis similares  $\psi$  e  $\eta$  obtém-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial(v(t)\psi(\eta))}{\partial t} = v'(t)\psi(\eta) - \frac{y}{g(t)^2}g'(t)v(t)\psi'(\eta) = v'\psi - v\psi'\eta\frac{g'}{g}; \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi}{y^2} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{1}{y^2} + \phi \frac{-2}{y^3} = v \frac{\psi'}{g} \frac{1}{y^2} - 2 \frac{v\psi}{y^3} = \frac{v\psi'}{g^3\eta^2} - 2 \frac{v\psi}{g^3\eta^3} = \frac{v}{g^3} \left( \frac{\psi}{\eta^2} \right)' \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = v^2 \frac{\psi'^2}{g^2} + v^2 \psi \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\psi'}{g} \right) = v^2 \frac{\psi'^2}{g^2} + v^2 \psi \frac{\psi''}{g^2} = \frac{v^2}{g^2} (\psi\psi')' \quad (7.35)$$

Na seqüência, substituindo-se as derivadas calculadas nas Eqs. 7.33, 7.34 e 7.35 na Eq.7.29 determina-se que

$$v'\psi - v\psi'\eta\frac{g'}{g} = -Pe_\infty Cah(\lambda) \left( \frac{v}{g^3} \left( \frac{\psi}{\eta^2} \right)' \right) + f(\lambda) \left( \frac{v^2}{g^2} (\psi\psi')' \right) \quad (7.36)$$

Agora, multiplicando-se a Eq. 7.36 por  $g^3$ , obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária

$$g^3 v' \psi - v g^2 \psi' \eta g' = -Pe_\infty Cah(\lambda) \left( v \left( \frac{\psi}{\eta^2} \right)' \right) + f(\lambda) (v^2 g (\psi\psi')') \quad (7.37)$$

em que  $\psi' = d\psi/d\eta$ ,  $g' = dg/dt$ ,  $v' = dv/dt$ .

Define-se a constante

$$\alpha = Pe_\infty Cah(\lambda), \quad (7.38)$$

Vale notar que

$$\frac{\alpha}{f(\lambda)} = \frac{Cah(\lambda)}{\phi_\infty f(\lambda)} = \tilde{\delta}, \quad (7.39)$$

em que  $\tilde{\delta}$  é a espessura adimensional da camada livre de células deduzida para o caso de fluxo nulo na Eq. 7.19. Sendo assim, a Eq.7.37 pode ser reescrita da seguinte forma

$$\{g^3 v'\} \psi - \{v g' g^2\} \psi' \eta = -\{\alpha v\} \left( \left( \frac{\psi}{\eta^2} \right)' \right) + \{v^2 g f(\lambda)\} (\psi\psi')' \quad (7.40)$$

A solução similar exige que a Eq. 7.40 seja expressa apenas em termos de  $\psi$  e  $\eta$ . Note que, se os valores absolutos dos termos entre  $\{\}$  forem todos iguais e não nulos, ou seja, se

$$|g^3 v'| = |v g' g^2| = |v \alpha| = |v^2 g f(\lambda)| \neq 0,$$

ou de outra forma se as escalas  $g$  e  $v$  são tais que

$$\begin{cases} g^3 v' = v \alpha \\ v \alpha = f(\lambda) v^2 g \end{cases} \quad (7.41)$$

a Eq. 7.40 pode ser re-escrita, por exemplo, como a seguir

$$v\alpha(\psi - \psi'\eta) = v\alpha \left[ - \left( \frac{\psi}{\eta^2} \right)' + (\psi\psi')' \right]. \quad (7.42)$$

Dividindo-se a Eq. 7.42 por  $v\alpha$  a condição de existência da solução similar é satisfeita.

Portanto, integrando-se a primeira equação na Eq. 7.41, obtém-se

$$\ln(v) = \alpha \int \frac{dt}{g^3} \quad (7.43)$$

Por outro lado pela segunda equação da Eq. 7.41 tem-se que

$$v = \frac{1}{g} \frac{\alpha}{f(\lambda)}. \quad (7.44)$$

Substituindo-se o resultado de  $v$  obtido na Eq. 7.44 na Eq. 7.43 determina-se que

$$\ln \left( \frac{\alpha}{f(\lambda)} \frac{1}{g} \right) = \alpha \int \frac{dt}{g^3}. \quad (7.45)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo tem-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\alpha}{f(\lambda)} \frac{1}{g} \right) \right| &= \frac{\alpha}{g^3} \\ \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} &= \frac{\alpha}{g^3} \\ g(t) &= (3\alpha)^{1/3} t^{1/3}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Substituindo-se o resultado de  $g(t)$  na Eq. 7.44 obtém-se o valor de  $v(t)$  expresso da seguinte forma

$$v(t) = \frac{\alpha^{2/3}}{3^{1/3} f(\lambda)} t^{-1/3} \quad (7.47)$$

Portanto,

$$\phi = \frac{\alpha^{2/3}}{3^{1/3} f(\lambda)} t^{-1/3} \psi(\eta). \quad (7.48)$$

Finalmente, substituindo-se as equações 7.46 e 7.47 na Eq. 7.40, obtém-se a equação diferencial ordinária para solução por similaridade da equação diferencial parcial original

$$(\psi\eta)' - \left( \frac{\psi}{\eta^2} \right)' + (\psi\psi')' = 0 \quad (7.49)$$

Integrando-se com relação a  $\eta$  resulta em

$$\psi\eta - \frac{\psi}{\eta^2} + \psi\psi' = C \quad (7.50)$$

em que  $C$  é uma constante de integração. A Eq. 7.50 é uma equação diferencial ordinária não-linear determinada em termos das variáveis similares  $\psi$  e  $\eta$ . A solução da referida equação pode ser obtida por integração numérica usando-se uma rotina padrão de Runge-Kutta de passo negativo. Os detalhes serão descritos na próxima seção.

### 7.3.3 Solução numérica da equação transiente de distribuição de partículas

Nesta seção serão apresentadas a solução numérica da Eq. 7.50 e as análises dos resultados obtidos.

Para a solução numérica da Eq. 7.50 é conveniente escrever a mesma da seguinte forma

$$\psi' = \frac{C}{\psi} - \eta + \frac{1}{\eta^2}. \quad (7.51)$$

Agora, com a Eq. 7.51  $\psi'$  pode ser integrado numericamente usando um método de Runge-Kutta de quarta ordem. No problema, as condições de contorno impõem que a distribuição de partículas seja nula em  $y = \tilde{\delta}$ . Portanto existe  $\eta = \delta^*$  tal que  $\psi = 0$ . Assim, considera-se um valor  $\psi_\infty$  em que  $\phi$  é máximo e permanente e com um passo negativo ( $-d\eta$ ) fazem-se iterações do método de Runge Kutta partindo-se de  $\psi_\infty$  até que  $\psi = 0$ .

A constante de integração  $C$  é calculada considerando-se o ponto em que  $\psi' = 0$  e  $\psi = \psi_\infty = \text{constante}$ . Portanto explicitando-se  $C$  da equação 7.51, tem-se

$$C = \psi_\infty \left( \eta_\infty - \frac{1}{\eta_\infty^2} \right). \quad (7.52)$$

em que  $\eta_\infty$  é tal que  $\psi(\eta_\infty) = \psi_\infty$  Para o cálculo de  $\psi_\infty$ , considera-se o ponto em que  $\phi = 1$ , ou seja, em um ponto em que a concentração é constante no tempo e no espaço. Essa condição leva a

$$\psi_\infty v = 1. \quad (7.53)$$

em que  $v$  é calculado pela Eq. 7.47. O valor de  $\eta_\infty$  é determinado por estimativa direta, pois não se conhece o valor de  $y$  tal que  $\phi = \phi_\infty$ . Para verificar se a estimativa está correta, avalia-se o valor de  $\psi'$  tal que  $\psi' \sim 0$ . No caso, admitiu-se  $\eta$  tal que  $\psi' < 10^{-5}$ ,

A solução permite avaliarmos a variação da distribuição de gotas no espaço e no tempo em função do número de Capilaridade ( $Ca$ ), da velocidade de migração, da difusividade hidrodinâmica.

## Resultados

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos com a solução da Eq. 7.21 por meio da solução numérica da equação similar Eq. 7.50. A Fig. 7.7 mostra a solução adimensional de  $\psi(\eta)$  em função de  $\eta$ . Observa-se que em  $\eta = \delta^* = 0,4$  tem-se

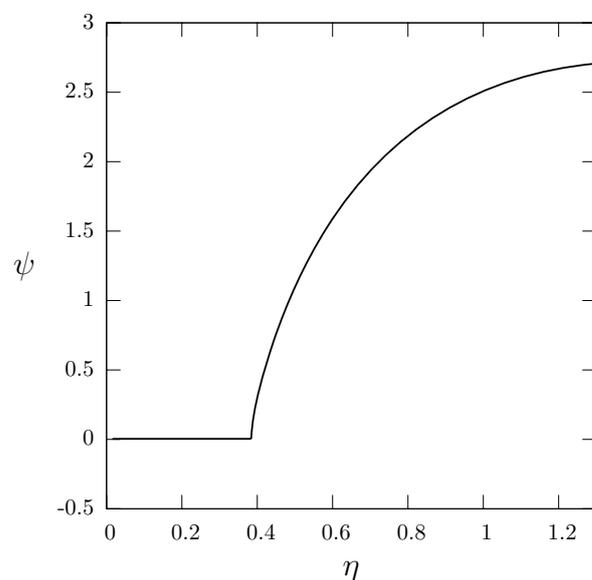


Figura 7.7: Solução numérica de  $\psi(\eta)$  obtida.

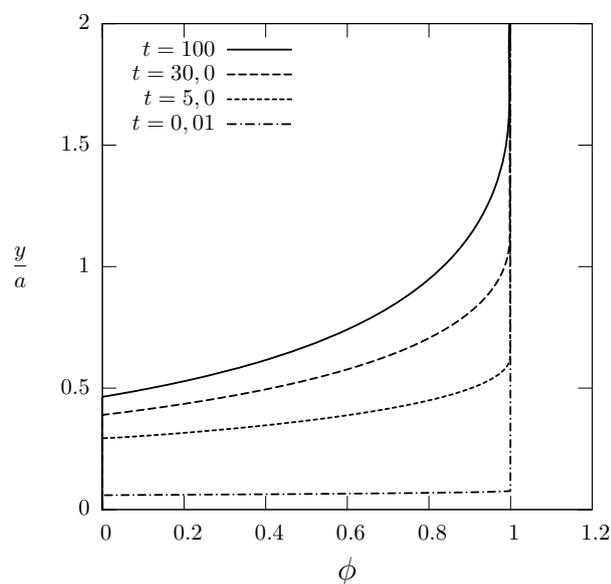


Figura 7.8: Perfil de concentração em função  $y/a$  em diferentes tempos.

$\psi(\eta) = 0$ , em  $\eta = \eta_\infty = 1,3$  tem-se  $\psi_\infty = 2,70$  e  $\frac{d\psi}{d\eta} = 0$ . Com esse resultado é possível avaliar a distribuição de gotas  $\phi(y, t)$ , para diferentes tempos e posições transversais  $y$ . Os cálculos foram baseados em um erro nos chutes de  $\eta_\infty$  menor que 1%.

A Fig. 7.8 representa o perfil de concentração  $\phi$  em diferentes tempos. O resultado permite avaliar o comportamento das partículas ao longo do tempo e a formação

Tabela 7.1: Valores de  $y = y_\infty$  em que  $\phi = \text{constante}$  e  $\tilde{\delta}$  em que  $\phi = 0$ 

t	$y_\infty$	$\tilde{\delta}$	$\tilde{\delta}/y_\infty$
0,01	0,06	0,06	1,00
5,0	0,6	0,3	0,5
30,0	1,1	0,4	0,36
100,0	1,65	0,47	0,28

da camada livre de células. Percebe-se na referida figura que para o tempo adimensional de  $t = 0,01$  o perfil de concentração é praticamente uniforme e existe uma camada de plasma com espessura de aproximadamente  $\tilde{\delta} = 0,08$ . Por outro lado, no tempo  $t = 100$  vê-se que o perfil aproxima-se de uma curva parabólica em relação a  $\phi$  e possui uma camada de plasma de aproximadamente  $\tilde{\delta} = 0,48$ . É possível afirmar que o desenvolvimento da camada de plasma em  $0,01 < t < 100$  ocorre de forma lenta em relação ao tempo com uma derivada média de aproximadamente  $d\tilde{\delta}/dt = 4 \times 10^{-5}$ . Note na referida figura que nos quatro tempos pode-se determinar uma cota  $y = y_\infty$  em que  $\phi = \text{constante}$ , o que caracteriza uma camada limite de distribuição de partículas. Na Tab. 7.1 tem-se valores da distância  $y$  da parede para os quatro tempos usados na Fig. 7.8 e também o valor da espessura da camada livre de células. Vê-se nos resultados da Tab. 7.1 que a espessura da camada livre de células se desenvolve de forma mais lenta que  $y_\infty$ . Pode-se afirmar também que a região não uniforme da concentração é relativamente maior que a região da camada de plasma livre de células.

Na Fig. 7.9 vê-se que  $\tilde{\delta}$  aumenta com o aumento do valor de  $Ca$ . No caso o aumento do número de capilaridade provoca um aumento das deformações sofridas pelas gotas e conseqüentemente o fluxo migratório de gotas para regiões distantes da parede rígida é mais efetivo. Vale lembrar que  $\tilde{\delta}$  pode ser reescrito na seguinte forma

$$\tilde{\delta} = \frac{Pe_\infty Ca h(\lambda)}{f(\lambda)}, \quad (7.54)$$

mostrando a dependência de  $\tilde{\delta}$  dos parâmetros físicos mais relevantes do problema,  $Pe_\infty$ ,  $Ca$  e  $\lambda$ . Na Fig. 7.10 vê-se que o aumento do número de Péclet resulta em um aumento da camada livre de células, assim como no caso do aumento do número de capilaridade. No entanto a causa está associada ao decréscimo da difusividade ( $D_\infty$ ) e a predominância dos movimentos de migração de gotas para longe da parede rígida em relação aos movimentos de partículas devido a fluxos difusivos.

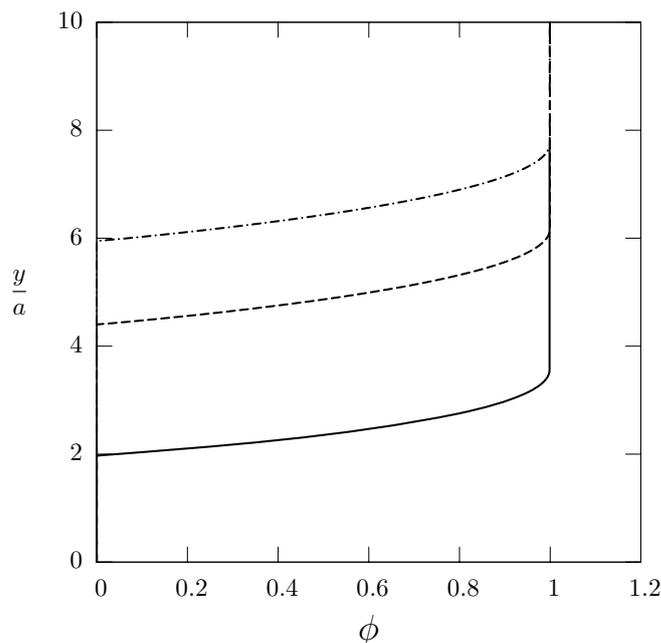


Figura 7.9: Fração volumétrica em função da distância adimensional  $y/a$  em diferentes valores do número de capilaridade da emulsão. Com valores de  $Ca = 0, 1$  representados pela linha sólida,  $Ca = 0, 5$  pela linha tracejada e  $Ca = 1, 0$  pela linha traço-ponto.

Na Fig. 7.11 pode-se observar a evolução da camada livre de células adimensional  $\tilde{\delta}$  ao longo do tempo adimensional  $t$  para diferentes valores do número de Capilaridade  $Ca$ . Em casos limites, se  $Pe \gg 1$  a migração é o mecanismo predominante e o estado permanente nunca será alcançado uma vez que as gotas se distanciarão da parede a todo instante  $t$ . No caso em que  $Pe \ll 1$  (difusão é o mecanismo predominante na formação da camada de plasma) a migração de gotas não será suficiente para afastar as gotas da parede e portanto a espessura da camada livre de gotas ficará confinada a regiões muito próximas à parede.

No caso do sangue a redução da difusividade pode ser associada à redução de colisões entre as células no escoamento, ou diminuição do gradiente de hematócrito. Como foi discutido, uma redução na difusividade provoca o aumento da camada livre de células. A redução do hematócrito implica uma diminuição da viscosidade intrínseca do sangue.

Com os resultados apresentados em Bishop *et al.*, 2001, da velocidade de escoamento em vênulas de  $60\mu m$  estima-se usando a presente teoria e resultados numéricos o comprimento de desenvolvimento ( $L/a = Pe_{\infty} U t_{\infty}$ ), em que  $U$  é a velocidade do

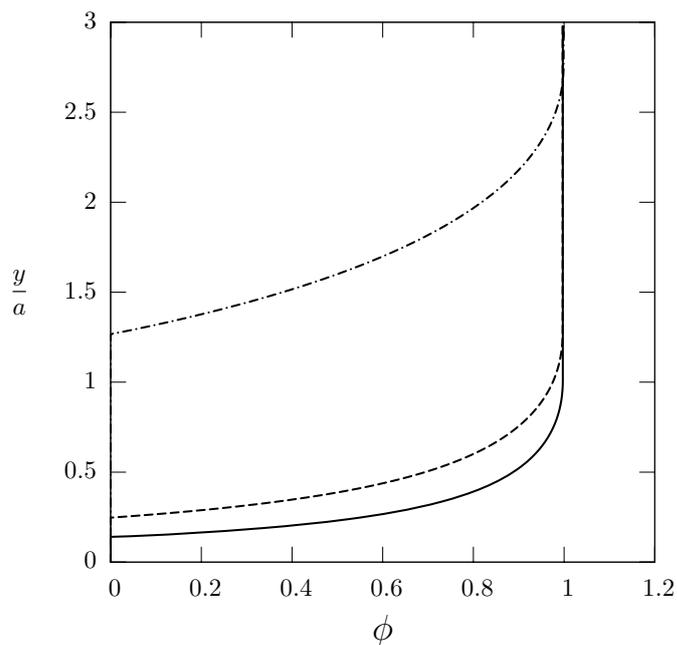


Figura 7.10: Fração volumétrica em função da distância adimensional  $y/a$  para diferentes valores do número de Peclet da emulsão. Com valores de  $Pe = 0,5$  representados pela linha sólida  $Pe = 1,0$  pela linha tracejada e  $Pe = 10,0$  pela linha traço-ponto.

escoamento médio, da camada livre de gotas para diferentes valores de  $\tilde{\delta}$ . Na Fig. 7.12 vê-se que o comprimento de desenvolvimento é aproximadamente 1000 vezes o raio da célula ( $a = 3,5\mu m$ ) e portanto da ordem de milímetros.

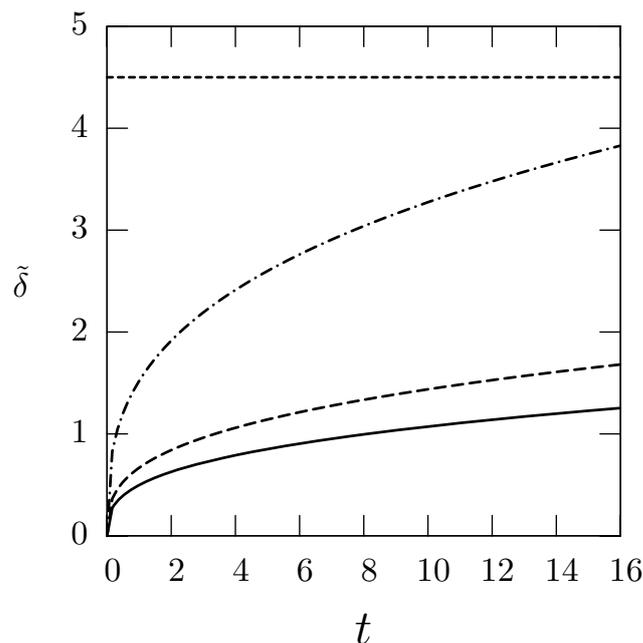


Figura 7.11: Espessura adimensional de camada livre de células em função do tempo adimensional para três valores do número de capilaridade. A linha sólida representa valores para  $Ca=0,01$ , a linha tracejada representa valores de  $Ca = 0,02$ , a linha traço-ponto representa valores com  $Ca=0,05$  e a linha horizontal tracejada representa a espessura da camada livre de células no estado permanente para  $Ca = 0.05$ .

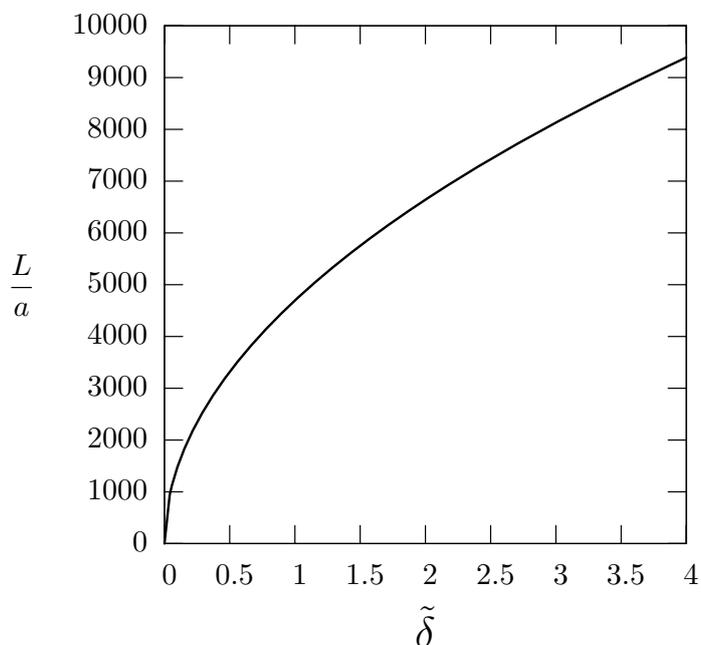


Figura 7.12: Comprimento de desenvolvimento em função da espessura adimensional da camada livre de células  $\tilde{\delta}$ , para uma velocidade de escoamento de  $14.0mm/s$  em vasos de  $60\mu m$  (Bishop *et al.*, 2001).

## Capítulo 8

# Investigações experimentais preliminares do escoamento de fluidos não-newtonianos em tubos

Neste capítulo será abordada a metodologia de cálculo e procedimentos experimentais para o estudo reológico de fluidos não-newtonianos escoando em tubos. Esse estudo é uma primeira abordagem de metodologia experimental para investigar o escoamento do sangue em microvasos. Sendo assim, os escoamentos estudados são da ordem de milímetros e os fluidos usados são emulsões e soluções com comportamento não-newtoniano semelhantes ao do sangue. Novamente as emulsões serão consideradas protótipo do sangue

Com os experimentos determina-se uma maneira prática de realizar-se medições em escala micrométrica de escoamentos em tubos. São investigadas três abordagens experimentais para a determinação das viscosidades dos fluidos ensaiados.

O experimento é em um primeiro momento realizado com água que fornece dados de referência para validação das abordagens experimentais exploradas. Em seguida são realizados experimentos com emulsões de água e óleo e soluções poliméricas de poliacrilamida que permitem definir a metodologia a ser usada para o estudo de escoamentos da ordem do micrometro.

A seguir serão apresentadas as metodologias de cálculo usadas para obtenção do valor das viscosidades dos fluidos ensaiados.

## 8.1 Metodologia de cálculo

Como já se sabe para determinar-se a viscosidade de um fluido é necessário conhecer o valor da taxa de cisalhamento e a tensão de cisalhamento do escoamento, além de outras propriedades como, por exemplo, a temperatura e a fração volumétrica de partículas para o caso de suspensões ou emulsões. Como mostrado no capítulo 2 deste trabalho, em geral tem-se a conhecida relação entre a taxa de cisalhamento e tensão de cisalhamento conforme descrita a seguir

$$\mu(\dot{\gamma}, T, \phi) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (8.1)$$

novamente  $\tau$  é a tensão de cisalhamento e  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento do escoamento,  $T$  é a temperatura do fluido e  $\phi$  é a fração volumétrica de gotas no caso de uma emulsão. No caso de fluidos newtonianos,  $\mu$  é constante e é denotada como viscosidade dinâmica do fluido. No caso de fluidos não-newtonianos,  $\mu$  é chamada de viscosidade aparente (Tanner, 1994). No entanto, no escoamento em tubo não é possível medir diretamente a taxa de cisalhamento e a tensão de cisalhamento. De outra forma, a vazão e a diferença de pressão são as duas quantidades do escoamento a serem medidas que permitem o cálculo da viscosidade do fluido a uma dada temperatura. De acordo com a Lei de Poiseuille em escoamentos laminares de fluidos newtonianos a viscosidade pode ser calculada por (Batchelor, 1967):

$$\mu = -\frac{\pi \Delta p R^4}{8LQ}. \quad (8.2)$$

Para fluidos não-newtonianos a viscosidade  $\mu$  calculada pela referida lei é a viscosidade intrínseca, que possui valor diferente da viscosidade aparente. Portanto um cálculo generalizado para fluidos não-newtonianos é desenvolvido a seguir para se avaliar a viscosidade aparente do fluido em escoamentos com gradiente de pressão em tubo.

### 8.1.1 Cálculo generalizado da viscosidade de fluidos não-newtonianos.

Nesta seção serão apresentadas metodologias de cálculos da viscosidade de fluidos em escoamento em tubo usadas para a descrição de dados experimentais. Os cálculos permitem estimar uma taxa de cisalhamento na parede que é usada no cálculo da viscosidade do fluido.

Considere o escoamento de um fluido induzido por uma diferença de pressão ( $p_L - p_0$ ) em um tubo de raio  $R$  constante em toda sua dimensão longitudinal. Nesse caso a vazão é calculada pela equação a seguir

$$Q = 2\pi \int_0^R ur dr \quad (8.3)$$

considerando a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} v = u(r) \quad dv &= \frac{du}{dr} dr = \dot{\gamma} dr \\ ds = r dr \quad s &= \frac{r^2}{2} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Integrando-se por partes a Eq. (8.3) segundo a relação

$$\int v ds = vs - \int s dv, \quad (8.5)$$

a vazão pode ser expressa pela seguinte expressão

$$Q = 2\pi u(r) \left. \frac{r^2}{2} \right]_0^R - 2\pi \int_0^R \dot{\gamma} \frac{r^2}{2} dr \quad (8.6)$$

Note que na parede do tubo existe a condição de contorno de aderência do fluido e portanto nesse ponto a velocidade do escoamento é nula (i. e.  $u(R) = 0$ ), assim tem-se que

$$u(r) \left. \frac{r^2}{2} \right]_0^R = 0 \quad (8.7)$$

e a equação 8.6 reduz-se a

$$Q = - \int_0^R \pi \dot{\gamma} r^2 dr. \quad (8.8)$$

Sabe-se que em escoamento em tubo devido a diferença de pressão tem-se o seguinte balanço de forças de pressão e tensão de cisalhamento da parede

$$(P_0 - P_L)\pi R^2 = \tau_w 2\pi RL. \quad (8.9)$$

em que  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento na parede do tubo (i. e.  $r = R$ ). Com algumas manipulações algébricas da Eq. 8.9 calcula-se  $\Delta p/L$  pela seguinte equação

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{\tau_w}{2R} \quad (8.10)$$

Na sequência, a equação do movimento em coordenadas cilíndricas que rege o balanço de forças de um fluido de viscosidade  $\mu$  é dada por

$$-\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau) = 0 \quad (8.11)$$

A solução em termos de  $\tau$  é calculada integrando-se a Eq. 8.11 para se obter

$$\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{dp}{dz} \right) r + \frac{C_1}{r}. \quad (8.12)$$

Como resultado da condição de contorno de simetria do escoamento no centro do tubo tem-se que  $\tau_{rz}(0) = 0$ , então  $C_1 = 0$ , portanto

$$\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{dp}{dz} \right) r. \quad (8.13)$$

Note que para um capilar de paredes cilíndricas  $dp/dz = \Delta p/L$  e usando o resultado da Eq. 8.10, reescreve-se a Eq. 8.13 da seguinte forma

$$\tau = -\frac{\tau_w}{R} r, \quad (8.14)$$

ou seja, em termos de  $r$

$$r = -R \frac{\tau}{\tau_w}. \quad (8.15)$$

e diferenciando-se em  $r$  tem-se

$$dr = -R \frac{d\tau}{\tau_w}. \quad (8.16)$$

Substituindo  $dr$  da Eq. 8.16 na Eq. (8.8), obtém-se

$$Q = - \int_0^{-\tau_w} \pi \dot{\gamma} \frac{R^2 \tau^2}{\tau_w^2} \left( -\frac{R}{\tau_w^3} \right) d\tau, \quad (8.17)$$

e portanto,

$$\frac{\tau_w^3 Q}{\pi R^3} = \int_0^{-\tau_w} \dot{\gamma}(\tau) \tau^2 d\tau. \quad (8.18)$$

Utilizando-se o teorema fundamental do cálculo na Eq. 8.18 obtém-se

$$\frac{d}{d\tau_w} \left( \frac{\tau_w^3 Q}{\pi R^3} \right) = (\dot{\gamma}(\tau) \tau^2) \Big|_0^{-\tau_w}. \quad (8.19)$$

Com algumas manipulações algébricas na Eq. 8.19 mostra-se que a taxa de cisalhamento na parede do tubo, denotada por  $\dot{\gamma}(\tau_w) = \dot{\gamma}_w$ , pode ser calculada pela seguinte equação

$$\dot{\gamma}_w = \frac{1}{\tau_w^2} \frac{d}{d\tau_w} \left( \frac{\tau_w^3 Q}{\pi R^3} \right). \quad (8.20)$$

Após derivar a Eq. 8.20, obtém-se

$$\dot{\gamma}_w = \frac{1}{\pi R^3} \frac{1}{\tau_w^2} \left( 3\tau_w^2 Q + \tau_w \frac{dQ}{d\tau_w} \right). \quad (8.21)$$

Da Eq. 8.10 calcula-se  $\tau_w$  pela seguinte equação

$$\tau_w = -\frac{\Delta p R}{2L} \quad (8.22)$$

Substituindo-se Eq. 8.22 na Eq. 8.21, obtém-se que

$$\dot{\gamma}_w = \frac{1}{\pi R^3} \left( 3Q + \Delta p \frac{dQ}{d(\Delta p)} \right), \quad (8.23)$$

portanto

$$\dot{\gamma}_w = \frac{Q}{\pi R^3} \left( 3 + \frac{dQ/Q}{d(\Delta p)/\Delta p} \right). \quad (8.24)$$

Uma vez que  $dx/x = d(\ln x)$ , sendo  $x$  uma variável arbitrária, reescreve-se a Eq. 8.24 da seguinte forma

$$\dot{\gamma}_w = \frac{Q}{\pi R^3} \left( 3 + \frac{d(\ln Q)}{d(\ln \Delta p)} \right). \quad (8.25)$$

Sendo assim, pode-se determinar a viscosidade próxima a parede de um tubo capilar de um fluido não-newtoniano pela equação a seguir

$$\mu_w = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} = -\frac{\Delta p R}{2L \dot{\gamma}_w}. \quad (8.26)$$

A Eq. 8.26 é usada para se determinar experimentalmente o comportamento da viscosidade de fluidos não newtonianos em regimes próximos a parede do tubo, ou seja, em regiões de altas taxas de cisalhamento do escoamento. Supondo que a estrutura do fluido em toda a região do escoamento seja aproximadamente homogênea,  $\mu_w$  pode ser considerada como uma medida representativa da viscosidade aparente do fluido. Fluidos com estruturas microscópicas, em regiões de parede (devido às altas taxas de cisalhamento), apresentam geralmente viscosidades menores do que aquelas medidas em regiões mais centrais do escoamento. Observa-se, no entanto, que  $\mu_w(\dot{\gamma}) \cong \mu(\dot{\gamma})$ . No caso de suspensões essa viscosidade também depende da fração volumétrica das partículas uma vez que em escoamentos em baixos números de Reynolds em tubos a concentração de partículas tende a decair nas proximidades das paredes pois as partículas tendem a migrar de regiões de altas taxas de cisalhamento para baixas taxas de cisalhamento, isto é, da parede para o centro do tubo (Hampton & A. A. Mammoli, 1997). A mesma afirmação vale para o caso de emulsões de alta razão de viscosidade em que as gotas sofrem pequenas deformações. Para emulsões com baixa razão de viscosidade, ou seja, que sofrem deformações intensas a Eq. 8.26 poderia ser usada para o cálculo da viscosidade com a configuração estirada das gotas casos em que  $Ca \gg 1$ .

## 8.2 Escoamento em tubo capilar alimentado por um esvaziamento de tanque

Nesta seção será apresentado o modelo envolvido com o escoamento de um fluido em um tubo capilar alimentado por um grande reservatório. Diferente dos métodos já descritos, na presente abordagem não é necessária a medição direta das pressões  $p_0$  e  $p_L$  do escoamento no tubo.

Conforme discutido no cap. 2 do presente trabalho, quando o fluido é não-newtoniano a viscosidade calculada pela equação Eq. 8.2 é a viscosidade intrínseca. Nessa equação a medida da diferença de pressão é obtida por tomadas de pressão ao longo do comprimento do tubo. Na presente metodologia experimental a diferença de pressão é estimada com o uso de um reservatório para alimentar o tubo com o fluido. Algumas aproximações são consideradas.

Considera-se o caso do escoamento a partir de um tanque conforme ilustrado na Fig. (8.1) (Detalhes sobre a construção do aparato experimental são expostos na seção 8.3). Na região do referido tanque, desde a superfície livre do fluido até a entrada do tubo considera-se um escoamento invíscido. Nesse caso, a vazão pode ser calculada pela equação a seguir

$$Q = \frac{dh}{dt} \pi R_i^2. \quad (8.27)$$

em que  $h$  é a altura instantânea do líquido no reservatório e  $R_i$  é o raio interno do tanque reservatório.

Dessa maneira assume-se que o escoamento no tubo horizontal está desenvolvido e é laminar. Sendo assim, a vazão pode ser calculada pela lei de Poiseuille. Então substitui-se o valor de  $Q$  na Eq. 8.27 pela vazão da lei de Poiseuille para obter

$$\pi R_i^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi(p_0 - p_L)R^4}{8\mu L}. \quad (8.28)$$

Neste caso  $\mu$ , na Eq. 8.28 é a viscosidade intrínseca do fluido no escoamento em tubo capilar. A pressão  $p_0$  é determinada pela altura  $h(t)$  de líquido no tanque. Se o regime do escoamento é quasi-estacionário a altura do líquido e a pressão se relacionam de acordo com a equação da hidrostática

$$p_0 = h(t)\rho g + p_{atm} \quad (8.29)$$

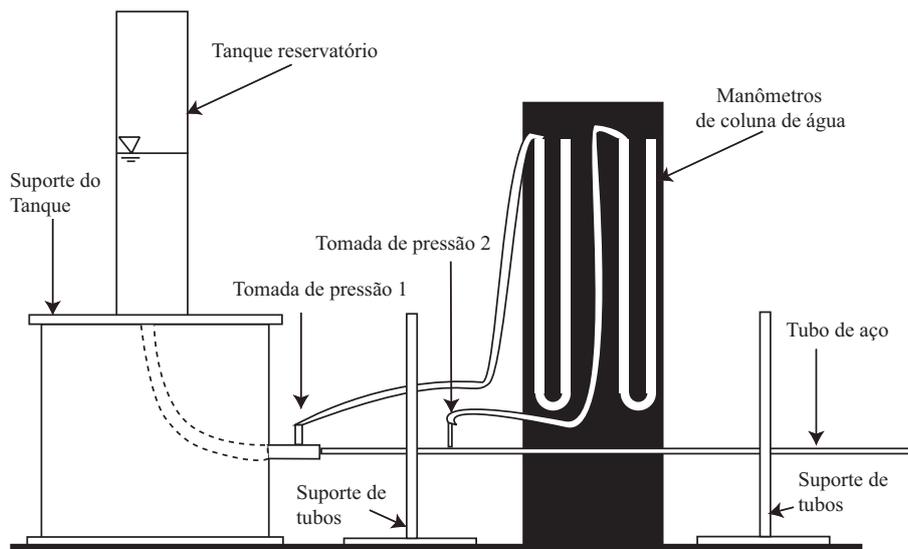


Figura 8.1: Ilustração do aparato experimental construído durante o desenvolvimento do presente trabalho. A tomada de pressão 1 está posicionada antes da entrada do tubo, enquanto a tomada de pressão 2 está posicionada a uma distância maior do que o comprimento de desenvolvimento de um fluido newtoniano.

em que  $g$  é a aceleração gravitacional e  $\rho$ , a massa específica do fluido e  $p_{atm}$  a pressão atmosférica. O caso estacionário pode ser admitido para razões de áreas transversais do tubo de saída e do tanque menores que  $10^{-2}$ .

Assumindo-se que  $p_L = p_{atm}$  reescreve-se a Eq. 8.28 como a seguir

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho g h(t) R^4}{8\mu L R_i^2}. \quad (8.30)$$

Integrando-se a Eq. 8.30 acima no intervalo de tempo  $t_0$  a  $t$  e nas alturas  $h_0$  a  $h$  determina-se que:

$$\mu = \frac{\rho g R^4 \Delta t}{8L R_i^2 \ln(h_0/h(t))}. \quad (8.31)$$

O resultado da Eq. 8.31 permite o cálculo da viscosidade intrínseca de um fluido não-newtoniano em um escoamento em tubos capilares alimentado por um grande reservatório apenas com a medição da altura da coluna de fluido em cada instante de tempo  $t$ , o valor da massa específica do fluido e as características geométricas do escoamento. Na verdade, toda essa metodologia experimental baseada no aparato mostrado na Fig. 8.1 funciona como um viscosímetro para medida da viscosidade intrínseca de escoamentos em capilares, incluindo aqueles equivalentes da microcirculação *in vitro* dependendo do capilar ensaiado.

Vale ressaltar que a metodologia de cálculo de incerteza de medição encontra-se no anexo D.

### 8.3 Procedimentos e materiais usados para coletas de dados

Nesta seção serão descritos os métodos, aparatos experimentais e materiais usados na realização dos experimentos.

#### 8.3.1 Aparato Experimental

O aparato experimental usado foi:

- Base de acrílico de  $300 \times 300 \times 300$  mm usada para sustentar o reservatório de líquido (ver Fig. 8.2);
- Reservatório cilíndrico de acrílico com diâmetro interno  $\phi_{interno} = 140$ mm e altura  $H = 500$ mm, com tampa removível e quatro furos nos quais se encaixam tubos de saída com diâmetros internos variados de 10mm, 7mm, 4mm, 2mm. Essas saídas de diferentes diâmetros permitem variar a razão de áreas do tanque em relação a área de vazão do escoamento, o que varia a vazão conseqüentemente. Dessa forma, também foi possível testar capilares de diferentes diâmetros. Fazendo um paralelo com a rede de vasos da microcirculação, a mesma varia de vasos da ordem de  $10\mu m$  a  $1mm$
- Dois suportes de acrílico para tubos de diferentes diâmetros;
- Dois tubos de aço inoxidável de diâmetros internos  $\phi_{interno} = 2$ mm e  $\phi_{interno} = 5$ mm, com uma tomada de pressão 2 (ver detalhes na Fig. 8.2). É importante destacar que durante experimentos preliminares o escoamento de água foi testado em tubos de aço de 1, 2, 3, 5 e 7mm de diâmetro, com intuito de avaliar a escala do experimento. Para se determinar o comprimento de desenvolvimento, confeccionaram-se 2 tubos de 5mm e 7mm de diâmetro interno, com tomadas de pressão distas umas das outras em torno de 50mm, usou-se um tubo de 3mm de diâmetro com 2 tomadas de pressão (já existente no laboratório) e tubos de 1 e 2mm sem tomada de pressão. Avaliou-se a dependência da queda de pressão em relação ao comprimento L entre as tomadas de pressões e a viscosidade da

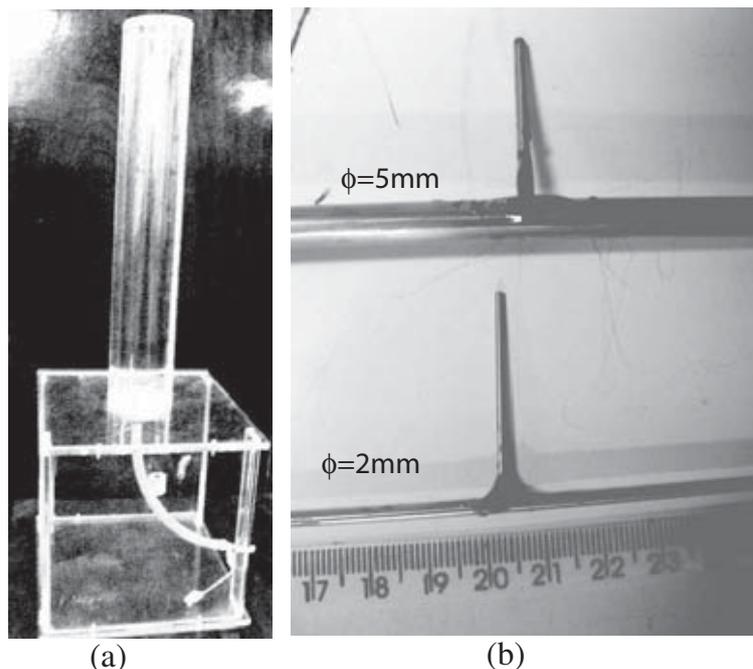


Figura 8.2: Foto do tanque e suporte de acrílico em (a) e dos tubos de aço inoxidável usados com as tomadas de pressão em (b).

água calculada pela lei de Poiseuille para o escoamento de água nos referidos tubos. Como resultado pode-se concluir, para água, que tubos com mais de  $3\text{mm}$  de diâmetro interno não podem ser usados na determinação da viscosidade da água e que o comprimento de desenvolvimento é menor que cem vezes o diâmetro interno do tubo em tubos com diâmetros menores e iguais a  $2\text{mm}$  de diâmetro. Em vista disso foi possível adotar os tubos de  $2\text{mm}$  e  $5\text{mm}$  pela disponibilidade de material no laboratório e possibilidade de confecção de tomadas de pressão transversais aos tubos.

- Tubos de silicone para conexão entre mangueiras;
- Mangueiras de borracha e silicone para conexão entre tomadas de pressão e sistema de realimentação;
- Manômetro de água para medidas de diferenças de pressão nos tubos capilares. Resolução de  $0.05\text{mm}$  de coluna de água (ver detalhes Fig. 8.3);
- Becker de 5, 20mL e 4L;
- Balança Marte modelo AS 5500, com resolução de  $0,01\text{g}$ ;

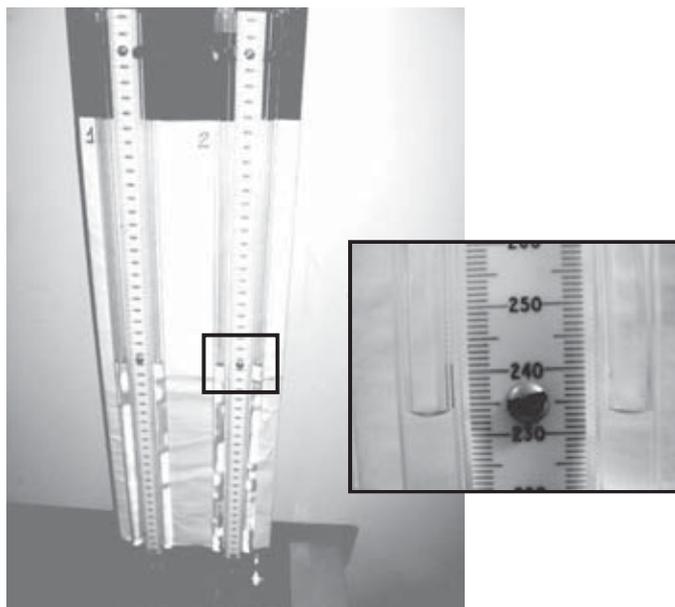


Figura 8.3: Manômetro de coluna de água usado para as medições de pressão realizadas. No detalhe tem-se a escala milimétrica usada para medir as colunas.

- Bomba do tipo aquário modelo Better 650 (ver Fig.8.4);



Figura 8.4: Bomba usada para realimentar o tanque reservatório.

- Cronômetro Kadio KD 2005, com resolução de 0,01s;
- Lâminas para microscopia ótica;
- Proveta de 1000mL, marca Laborglass, para medir volume dos fluidos usados;
- Microscópio ótico com ampliações máximas de 400× e 500×;
- Termômetro de mercúrio com resolução de 0,5°C;

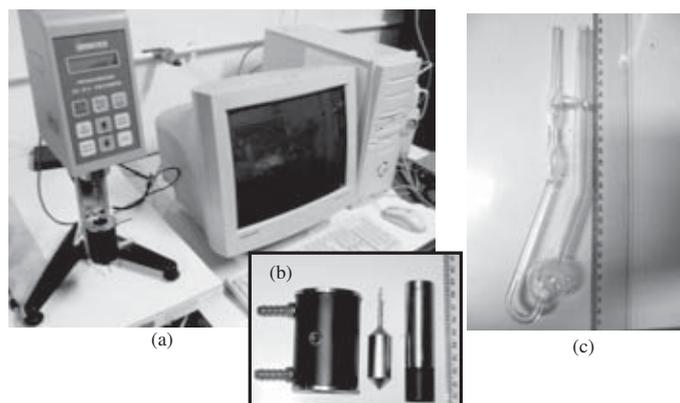


Figura 8.5: Viscosímetros usados para as medições das viscosidade durante os experimentos, (a) Instalação do viscosímetro de Couette, (b) Spindle usado para as medições de viscosidade no viscosímetro de Couette, (c) Viscosímetro de Ostwald SIZE 50 para as medições da viscosidade com água.

- Termopar tipo K (Chromel-Alumel) e mostrador digital, resolução de  $1^{\circ}C$ ;
- Válvula de controle de vazão marca Tigre;
- Viscosímetro de cilindros rotativos (Couette) Brookfield DVD Loader + Programmable com "spindle" de pequenas amostragem (ilustrado na Fig. 8.5). Percentual de torque entre 10 a 100% e taxa de cisalhamento entre 0,132 a  $264s^{-1}$ ;
- Viscosímetro de Ostwald (ver Fig. 8.5) para medida de viscosidade cinemática e calibração das viscosidades medidas;

### 8.3.2 Procedimentos experimentais

Nesta seção será descrito o procedimento da montagem da bancada de testes e de obtenção dos dados experimentais.

Para a montagem experimental primeiro limpa-se o reservatório de líquido e saídas, mangueiras de borracha e tubos de silicone, mangueiras do manômetro, tubos de aço inoxidável, garantindo a ausência de resíduos de qualquer espécie. O sistema de limpeza é realizado com água escoando pelo de tubo de teste e em seguida com ar comprimido de um circuito disponível no próprio laboratório. Espera-se secar o tubo capilar por completo e instala-se o mesmo na base para tubos. Em seguida bloqueiam-se as saídas do tanque que não serão usadas no escoamento. Conectam-se as mangueiras do tubo ao reservatório e as mangueiras nas tomadas de pressão

do tubo usado e bloqueiam-se as mesmas antes de iniciar o experimento. Põe-se um becker limpo para coletar a vazão na saída do tubo usado para o ensaio e posiciona-se a bomba de realimentação no becker coletor conectada às mangueiras do sistema de realimentação.

Após os preparativos iniciais descritos acima coleta-se uma amostra do fluido e iniciam-se medidas de viscosidade no viscosímetro de cilindros rotativos ou, no caso da água, no viscosímetro de Ostwald. Liga-se a bomba de realimentação e espera-se o reservatório de líquido alcançar uma altura de aproximadamente 360mm com referência a base da bancada experimental. Regula-se a válvula de vazão de modo que o regime permanente seja alcançado. Liberam-se as tomadas de pressões de modo que não haja bolhas de ar e conectam-se as tomadas de pressão ao manômetro de coluna de água. Espera-se as colunas de água estabilizarem. Anota-se a pressão estabilizada. Com um becker de 100 mL e um cronômetro padrão mede-se o tempo necessário para que o escoamento preencha 20 mL do becker. Repete-se a tomada de tempo 10 vezes observando se a pressão varia ou mesmo a altura de fluido no tanque reservatório. Após as 10 tomadas de tempo, abre-se a válvula controladora de vazão e espera-se o fluido alcançar 385mm da altura com referência a base do suporte do reservatório. Repete-se o procedimento a partir da abertura da válvula controladora de vazão para as alturas de 410, 435, 460,485 e 510 mm de altura em relação a base do suporte do tanque reservatório. Durante a altura de 435mm, coleta-se uma amostra do fluido para ensaio em viscosímetro. Ao fim das medições na altura de 510 mm, abre-se a válvula mais uma vez e espera-se o fluido alcançar uma altura de mais de 560 mm da base. Fecham-se as tomadas de pressão e desliga-se a bomba. Anota-se o tempo a partir do momento em que o fluido alcança 560mm de altura para as alturas, 536, 510, 485, 460, 435, 410, 385, 360, 335. Ao fim da tomada de tempo, coleta-se uma amostra do fluido para ensaio em viscosímetro.

As alturas consideradas foram adotadas levando-se em conta o tempo demandado para execução do experimento completo, e a maior abrangência de alturas possíveis, ou seja, diferenças de pressão de entrada no tubo.

O procedimento descrito acima foi feito com o tubo de 2mm e em seguida com o tubo de 5mm de diâmetro no mesmo dia. Foram ensaiados como líquido de trabalho água filtrada, solução de poliacrilamida a concentrações de 100, 200, 300 e 400 ppm e

uma emulsão de óleo disperso em água e água dispersa em óleo de fração volumétrica de gota de 0,02 (20%).

## 8.4 Resultados

Nesta seção serão apresentados os principais resultados das medições experimentais realizadas. Foram usados os seguintes procedimentos de cálculos: cálculo da viscosidade intrínseca pela lei de Poiseuille (Eq. 8.2), cálculo da viscosidade intrínseca com o esvaziamento do tanque (Eq. 8.31) e cálculo da viscosidade aparente do fluido nas regiões de parede do tubo capilar  $\mu_w \cong \mu$  (Eq. 8.26). Procedimentos esses apresentados na seção 8.1 e 8.2 do presente capítulo.

### 8.4.1 Escoamento em tubo com água filtrada

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos para a água filtrada. As medidas foram feitas em diferentes números de Reynolds, dentro do regime laminar, e com controle de temperatura. Aqui serão apresentados os resultados relativos a temperatura de  $25 \pm 1^\circ C$ . Os valores das viscosidades são comparados com valores teóricos e também com medidas obtidas com o viscosímetro de Ostwald para se estabelecer uma calibração das medidas obtidas com o escoamento em tubo.

Na Fig. 8.6 observa-se o comportamento linear da vazão  $Q$  em função da queda de pressão  $\Delta p$ , esperado para a água que é um fluido newtoniano. Os resultados indicam que os dados associados as tomadas de pressão 2 (pontos  $\bullet$ ) possuem um comportamento linear  $Q \times \Delta p$  assim como os dados obtidos com tomada de pressão 1 (pontos  $\blacklozenge$ ). A Fig. 8.6 mostra também que para a mesma vazão a queda de pressão é maior para a tomada de pressão 1 do que a queda de pressão medida com a tomada de pressão 2. Nesse caso porque a maior queda é mensurada ao longo de um comprimento maior de tubo. É importante ainda ressaltar que a tomada de pressão 1 inclui a queda de pressão existente no comprimento de desenvolvimento do escoamento ( $\frac{\partial u}{\partial z}$ ). Nesse comprimento as tensões cisalhantes agindo sobre o fluido são mais intensas que as tensões de cisalhamento no escoamento desenvolvido. Fato esse explicado pelos gradientes de velocidade mais severos existente na referida região de escoamento desenvolvido. A Fig. 8.6 mostra ainda que a lei de Poiseuille calculada com a viscosidade da água a  $25^\circ C$  mostra uma correspondência bastante fiel com os dados da tomada de

pressão 2 (linha sólida e pontos ●). A mesma observação não pode ser feita para os dados da tomada de pressão 1 (linha tracejada e pontos ◆). Essa discrepância pode ser associada ao comprimento de desenvolvimento do escoamento existente, lembrando que a lei de Poiseuille é aplicada a escoamentos totalmente desenvolvidos. Em adição, esses experimentos preliminares serviram também para uma calibração da bancada experimental.

Aos dados observados na Fig. 8.6 foi feito um ajuste linear aos dados de  $\ln(Q)$  e  $\ln(\Delta p)$  que obteve  $\frac{d(\ln(Q))}{d(\ln(\Delta p))} \cong 1$  para ambos os dados da tomada de pressão 1 e 2. A taxa de cisalhamento na parede para o referido resultado com água é calculada re-escrevendo-se a Eq. 8.25 da seguinte forma

$$\dot{\gamma}_w = \frac{4Q}{\pi R^3} \quad (8.32)$$

e a viscosidade calculada pela Eq. 8.26 é reescrita da seguinte forma

$$\mu_w = \frac{-\pi \Delta p R^4}{8QL}. \quad (8.33)$$

Portanto a viscosidade  $\mu_w$  determinada pela formulação mais geral, no caso da água, é igual a viscosidade calculada pela lei de Poiseuille, Eq. 8.2.

A Fig. 8.7 mostra que a viscosidade teórica (obtida em tabelas de propriedades da água) e a medida em viscosímetro de Ostwald está dentro da incerteza experimental obtida para os dados da tomada de pressão 2 (pontos ●). De acordo com tabelas de propriedades da água uma variação de  $5^\circ C$  na temperatura da água leva a uma variação de aproximadamente  $0,1 mPa \cdot s$  na viscosidade, como a incerteza expandida dos dados obtidos é de aproximadamente  $0,1 mPa \cdot s$  o experimento fornece dados seguros para se constatar mudanças de temperatura maiores que  $5^\circ C$ . A Fig. 8.7 mostra que a viscosidade calculada com dados da tomada de pressão 1 (pontos ◆) é maior que a viscosidade teórica e de referência (medição em viscosímetro de Ostwald) e com diferença acima da incerteza de medição. Esse resultado mostra a importância de se considerar o desenvolvimento do escoamento e as condições de entrada para a medição da viscosidade com o escoamento em tubo capilar no caso da água.

Para o caso do esvaziamento calcula-se a vazão pela equação a seguir

$$Q = \frac{[h_0 - h(t)]A}{\Delta t}, \quad (8.34)$$

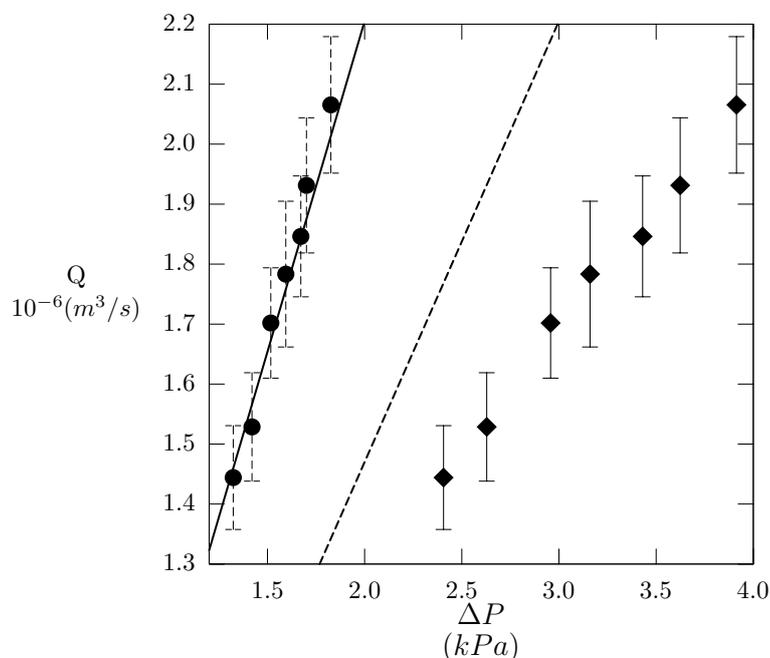


Figura 8.6: Vazão em função da diferença de pressão tomada de pressão 2. A linha sólida representa os valores da lei de Poiseuille com a viscosidade teórica da água para considerando a tomada de pressão 2, a linha tracejada representa o mesmo valor da lei de Poiseuille porém para a tomada de pressão 1 (todos a temperatura de  $25^{\circ}C$ ), os pontos  $\blacklozenge$  representam os valores medidos na pressão 1 e os pontos  $\bullet$  representam os valores medidos na pressão 2.

em que  $A$  é a área do tanque reservatório. A pressão, nesse caso, é determinada pela seguinte equação

$$-\Delta p = h(t)\rho g. \quad (8.35)$$

Com isso pode-se calcular também a taxa de cisalhamento  $\dot{\gamma}$  pela Eq. 8.25. A Fig. 8.8 mostra a comparação entre os valores de  $Q$  em função de  $\Delta p/L$  da tomada de pressão 2 e o esvaziamento do reservatório. Percebe-se que para valores da vazão menores que  $1,8 \times 10^{-6} m^3/s$  há uma tendência dos valores da queda de pressão  $\Delta p/L$  obtidas pelo esvaziamento do reservatório aproximarem-se dos valores obtidos com a tomada de pressão 2. O referido resultado permite afirmar que as duas formulações de medição de  $Q$  e  $\Delta p$  divergem pela existência do comprimento de desenvolvimento

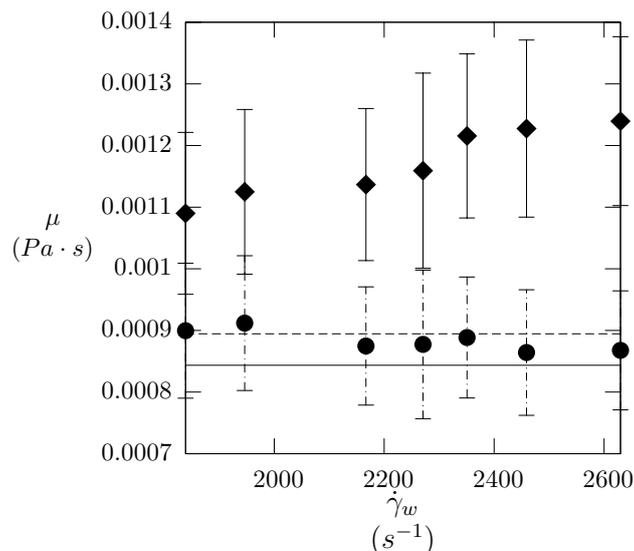


Figura 8.7: Viscosidade em função da taxa de cisalhamento para água filtrada a  $25^{\circ}C$ . Os pontos (●) são os dados obtidos com medida de pressão 2 e os pontos (◆) são dados obtidos com a tomada de pressão 1. A linha sólida corresponde ao valor da viscosidade da água medida em viscosímetro de Ostwald e a linha tracejada é o valor da viscosidade obtida em tabelas de propriedades da água a  $25^{\circ}C$ .

e condições de entrada do tubo. No caso, vê-se que essas condições são mais amenas em vazões menores. Na Fig. 8.9 mostra-se a viscosidade calculada pela Eq. 8.31 comparada com a viscosidade obtida pela medição na tomada de pressão 2 em função da taxa de cisalhamento. Vê-se que a formulação do esvaziamento do tanque fornece valores que divergem significativamente da viscosidade da água medida com tomada de pressão 2. A diferença observada poderia ser explicada pelo fato que na formulação de esvaziamento de tanque o cálculo da viscosidade é influenciado por todas as condições existentes de escoamento desde a saída do tanque reservatório a entrada do tubo de experimento. No caso, especula-se que essas condições podem desviar das admitidas no cálculo teórico, como por exemplo a condição unidirecional de escoamento. Vale ressaltar também que assim como a tomada de pressão 1 a viscosidade com base no método de esvaziamento do tanque considera o comprimento de desenvolvimento do escoamento sendo também um fator que leva os resultados a divergirem da viscosidade calculada com tomada de pressão 1.

Os resultados obtidos para o cálculo da viscosidade da água permitem concluir que a viscosidade calculada usando a tomada de pressão 2 são os valores mais próximos da viscosidade teórica e das medidas de referência com viscosímetro de Ostwald. No

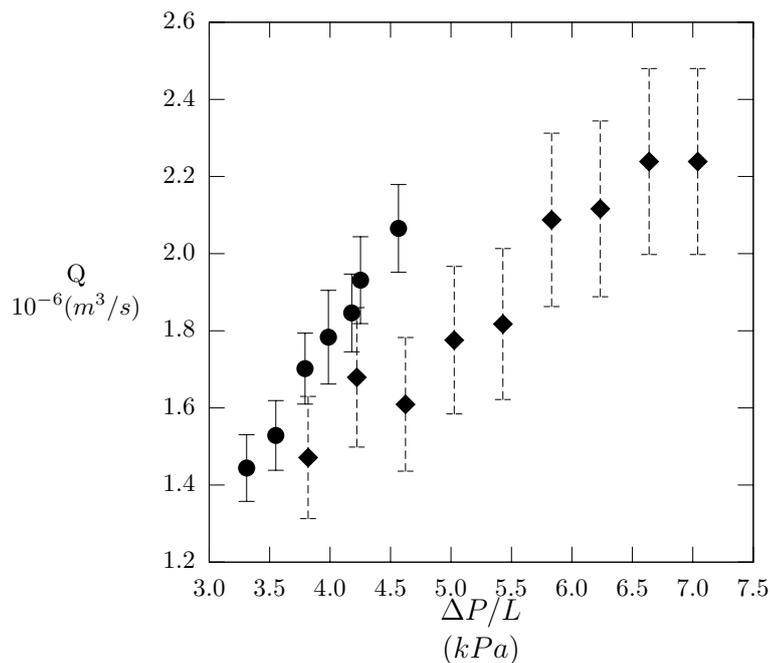


Figura 8.8: Comparação da vazão em função do gradiente de pressão  $\Delta p/L$  para os dados obtidos com a tomada de pressão 2 (representado pelos pontos (●)) e com resultados obtidos com o esvaziamento de reservatório (representado pelos pontos ◆).

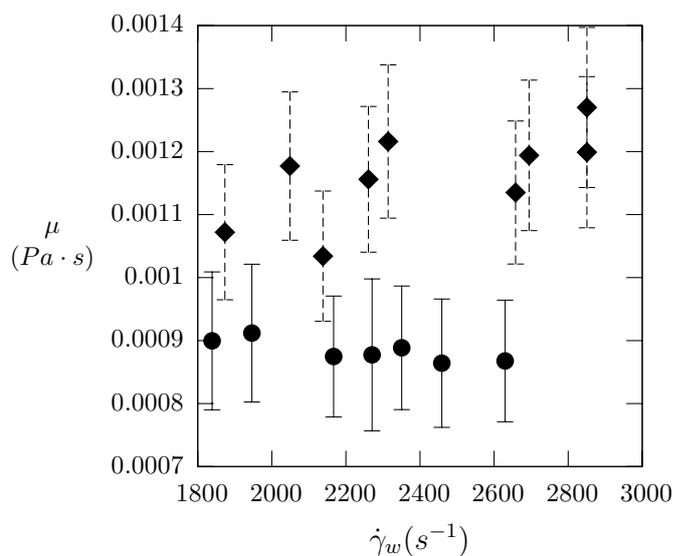


Figura 8.9: Viscosidade em função da taxa de cisalhamento. Os pontos ● são valores obtidos com medição de pressão posterior a entrada do tubo e os pontos ◆ são dados obtidos com o esvaziamento do tanque.

caso, a referida viscosidade será admitida no presente trabalho como sendo a viscosidade nominal obtida pelos experimentos de escoamentos em tubos capilares. Vale ressaltar que, as viscosidades calculadas com outros valores de medidas de pressão e vazão são da ordem de magnitude das medidas de referência e portanto podem ser usadas para estimar-se a viscosidade intrínseca de fluidos não-newtonianos. Fica evidente também que, desconsiderando as discrepâncias dos resultados, o procedimento de esvaziamento de tanque para o cálculo da viscosidade intrínseca produz resultados satisfatórios. Assim, esse procedimento deve ser usado utilizando-se de diferentes raios de tubo de teste para se alcançar uma faixa considerável de taxas de cisalhamento. Os valores nominais devem ser obtidos por meio da tomada de pressão 2, que apresentaram melhor concordância com valores de referência.

#### 8.4.2 Escoamento em tubo com solução de poliacrilamida (PAMA)

No caso de fluidos pseudo-plásticos, como a solução usada de poliacrilamida aniônica 34% com peso molecular de aproximadamente  $10^6 g/mol$  (produto Art Floc/SCP 1530 da Art-Aratrop), tem-se que o escoamento não segue necessariamente o perfil parabólico de um escoamento de um fluido newtoniano em tubo capilar. Portanto, a viscosidade deveria ser calculada a princípio pela lei de Poiseuille modificada. A Fig. 8.10 mostra o gráfico da vazão em função da queda de pressão da solução PAMA para 100, 200, 300 e 400 ppm, para escoamento em tubo de 600mm de comprimento a tomada de pressão 2 a 200mm da entrada do tubo. A linha sólida representa os valores da lei de Poiseuille com uma viscosidade adimensional constante de  $\mu/\mu_{25^\circ C} = 2.3$ . No caso, observa-se que a solução a 100 ppm descreve um comportamento linear típico ( $Q = \frac{d\Delta p}{dQ} \Delta p$ ) de um fluido newtoniano com  $d \ln(Q)/d \ln(\Delta p) \cong 1$ . Ainda na mesma figura a linha tracejada representa os valores da lei de Poiseuille para a viscosidade adimensional constante igual a  $\mu/\mu_{25^\circ C} = 3.7$ . Com isso, é possível notar que para a solução de 200 ppm o comportamento de  $Q$  em função de  $\Delta p$  ainda se aproxima da lei de Poiseuille em alguns pontos experimentais ( $\Delta p > 1.8 kPa$ ). O mesmo ajuste não foi possível para os pontos que representam os valores de  $Q$  em função de  $\Delta p$  para concentrações de 300 e 400 ppm. Dessa forma para essas concentrações apenas um ajuste não-linear com equação  $Q = \left(\frac{d\Delta p}{dQ}\right)^n \Delta p$  ajusta-se de forma satisfatória aos pontos experimentais. Portanto para esses casos  $d \ln(Q)/d \ln(\Delta p) \neq 1$ . Em virtude do

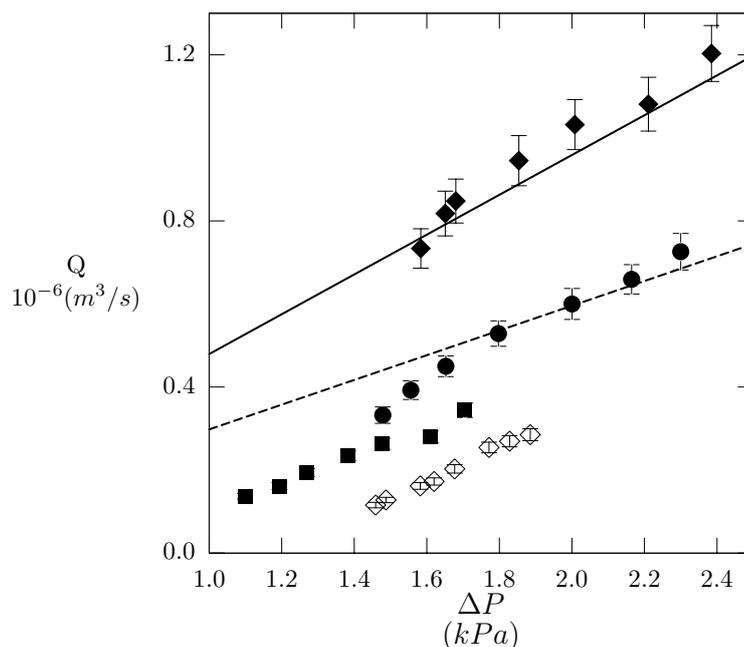


Figura 8.10: Vazão em função da diferença de pressão ao longo do tubo para (◆) 100ppm, (●) 200ppm, (■) 300ppm e (◇) 400ppm em tubo capilar de 2mm de diâmetro. A linha sólida representa os valores da lei de Poiseuille com uma viscosidade adimensional constante igual a  $\mu/\mu_{25^{\circ}C} = 2.3$  e a linha tracejada representa a mesma com  $\mu/\mu_{25^{\circ}C} = 3.7$ .

comportamento não-newtoniano das soluções com concentrações maiores que 100ppm examina-se também escoamentos em tubos com dois diâmetros, com 2mm e 5mm. A Fig. 8.11 mostra a vazão em função da queda de pressão para as tomadas de pressão em um tubo com comprimento de 2010mm e tomada de pressão 2 a 500mm da entrada do tubo e diâmetro de 5mm. Na referida figura a linha sólida mostra a lei de Poiseuille usando a viscosidade adimensional igual a  $\mu/\mu_{25^{\circ}C}$ . Vale observar que assim como na Fig. 8.10 a solução a 200 ppm mostra boa concordância com a lei de Poiseuille em alguns pontos experimentais.

Tem-se na Fig. 8.12 a viscosidade calculada pela Eq. 8.26 adimensionalizada pela viscosidade da água medida a  $25^{\circ}C$  em função da taxa de cisalhamento adimensionalizada pela taxa de cisalhamento média do escoamento da água em tubo para a solução de 100ppm. O referido resultado considera medidas com a tomada de pressão 2 no tubo. O resultado indica que nessa concentração o comportamento do fluido con-

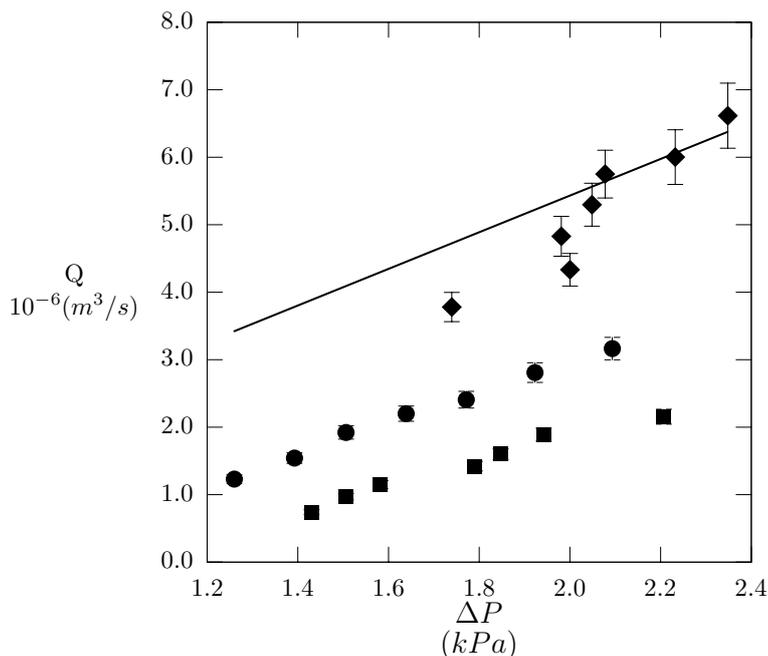


Figura 8.11: Vazão em função da diferença de pressão ao longo do tubo para ( $\blacklozenge$ ) 200ppm, ( $\bullet$ ) 300ppm, ( $\blacksquare$ ) 300ppm em tubo capilar de 5mm de diâmetro. A linha sólida representa a lei de Poiseuille com uma viscosidade adimensional constante de  $\mu/\mu_{25^{\circ}C} = 4.2$ .

tinua tipicamente linear na respectiva faixa de taxa de cisalhamento examinada, fato que pode ser explicado pela relação linear entre vazão e diferença de pressão também observada. Comportamento este de fluido newtoniano tendo em vista a baixa diluição do polímero na solução PAMA. Essa baixa concentração não foi suficiente para que a deformação das macromoléculas ou interações entre as mesmas mudasse de forma significativa a estrutura interna no fluido e que isso fosse refletido no comprimento pseudo-plástico da viscosidade do fluido.

As Figs. 8.13, 8.14 e 8.15 mostram o comportamento da viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional. Os pontos ( $\blacklozenge$ ) são dados obtidos com o viscosímetro de cilindros rotativos, enquanto os pontos ( $\bullet$ ) correspondem aos dados obtidos do escoamento em tubo capilar de 2mm de diâmetro. Os pontos ( $\blacksquare$ ) foram obtidos para tubo de 5mm de diâmetro. Nota-se que o escoamento no tubo de 2mm apresenta taxas de cisalhamento mais elevadas do que aquelas correspondentes ao escoamento em tubos de 5mm de diâmetro. Estas mesmas taxas de

cisalhamento foram ainda maiores do que as taxas de cisalhamento ensaiadas no viscosímetro de cilindros rotativos. Nos gráficos citados percebe-se uma correspondência entre as medidas em escoamento em tubo e as obtidas pelo viscosímetro de Couette. O resultado permite afirmar que em fluidos de viscosidade aparente adimensional entre 10 e 15, ambos os instrumentos podem ser usados para se obter a viscosidade em uma faixa de taxa de cisalhamento adimensional entre  $0.1 < \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_a < 0.2$ . A Fig. 8.15 mostra que a viscosidade obtida com o tubo de 5mm de diâmetro difere consideravelmente da viscosidade do escoamento em tubo capilar de 2mm. Isso pode estar associado ao comportamento não-newtoniano do fluido que provoca alterações na microestrutura e reologia do fluido em função das relações geométricas do escoamento, no caso o diâmetro do tubo. Da mesma figura, é visto que os valores obtidos com o viscosímetro de cilindros rotativos de Couette e no escoamento em tubo de 2mm são equivalentes. O referido resultado pode ser explicado observando que no tubo de 2mm de diâmetro a microestrutura do fluido próximo a parede do tubo se aproxima da microestrutura encontrada no escoamento médio. Desta forma, a viscosidade calculada para o escoamento em regiões próximas à parede é aproximadamente a viscosidade aparente do fluido em todo o domínio do escoamento. No caso do tubo com 5 mm de diâmetro, a configuração das macromoléculas distinguem-se consideravelmente entre regiões de parede e regiões do núcleo do escoamento. Na parede as moléculas poliméricas estão mais estiradas do que as da região central do escoamento, de modo que a viscosidade calculada na parede do tubo não é exatamente a mesma presente em todo o domínio do escoamento. As altas tensões de cisalhamento em regiões de parede levam a maior taxa de cisalhamento de dissipação que é refletido no aumento da viscosidade aparente do fluido.

Vale ressaltar que mesmo em regimes diluídos soluções poliméricas possuem comportamento não-newtoniano pronunciado. Esse efeito ocorre devido a deformação e anisotropia produzida pelo estiramento e orientação das macromoléculas em função dos gradientes de velocidade (Cunha & Andreotti, 2007).

Nas Figs. 8.13, 8.14, 8.15 tem-se também um ajuste do tipo lei de potência  $\mu = c\dot{\gamma}^{n-1}$  dos pontos experimentais obtidos para o escoamento em tubo capilar e no viscosímetro de cilindros rotativos. Os melhores ajustes correspondem a  $n = 0,57$ ,  $n = 0,43$  e  $n = 0,42$  e os valores de  $c = 2,66$ ,  $c = 3,69$  e  $c = 4,76$  para os dados

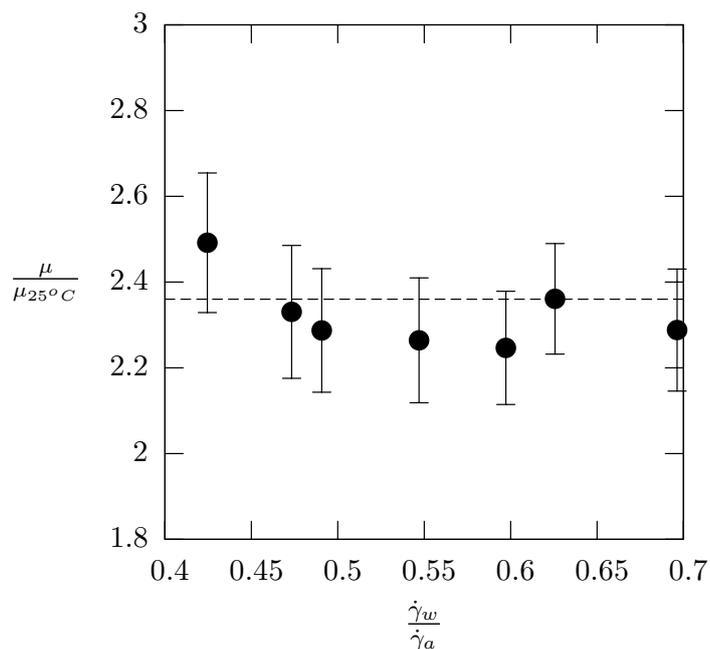


Figura 8.12: Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para uma concentração de 100ppm. A linha tracejada horizontal mostra o valor constante de  $\mu/\mu_{25^\circ C} = 2.36$ .

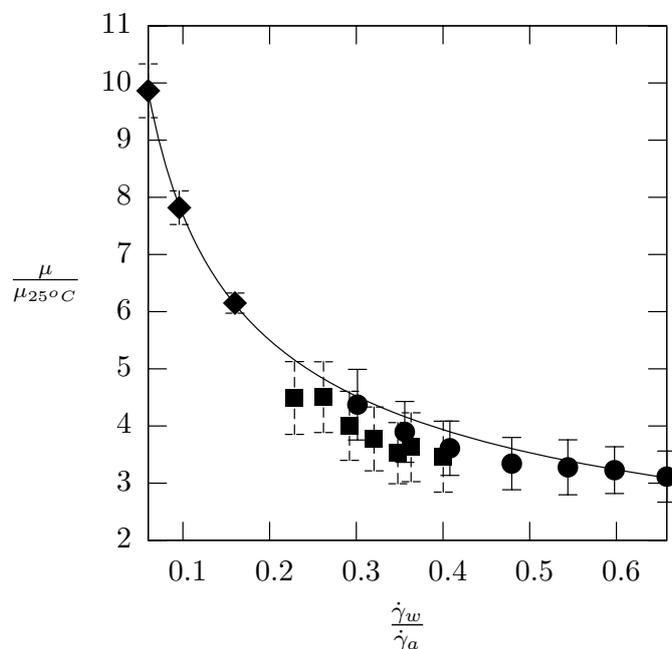


Figura 8.13: Viscosidade aparente adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para solução a 200ppm. Os pontos ( $\blacklozenge$ ) foram obtidos com o viscosímetro de cilindros rotativos, ( $\bullet$ ) denotam as medidas obtidas para o escoamento em tubo capilar de 2mm de diâmetro e ( $\blacksquare$ ) dados obtidos em tubo capilar de 5mm de diâmetro.

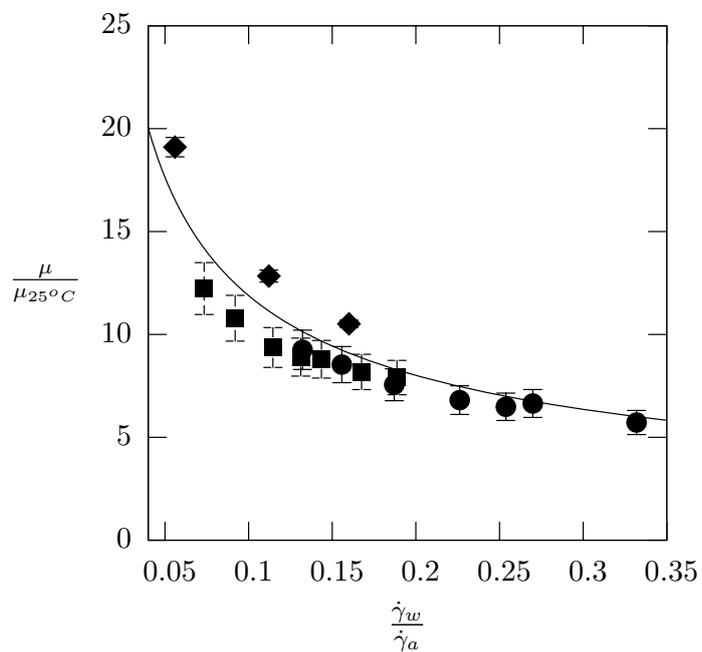


Figura 8.14: Viscosidade adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para solução de 300ppm. Os pontos ( $\blacklozenge$ ) foram obtidos com o viscosímetro de cilindros rotativos, ( $\bullet$ ) denotam as medidas obtidas para o escoamento em tubo capilar de 2mm de diâmetro e ( $\blacksquare$ ) dados obtidos em tubo capilar de 5mm de diâmetro.

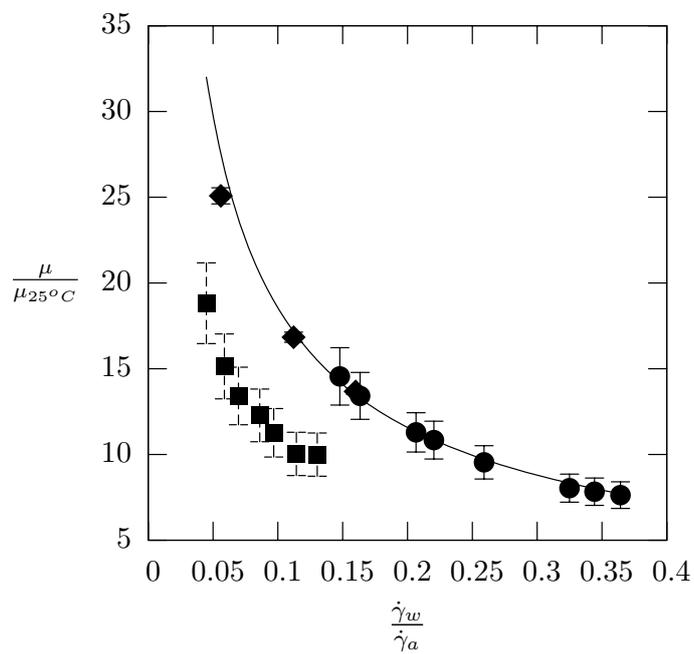


Figura 8.15: Viscosidade adimensional em função da taxa de cisalhamento adimensional para solução de 400ppm. Os pontos (◆) foram obtidos com o viscosímetro de cilindros rotativos, (●) denotam as medidas obtidas para o escoamento em tubo capilar de 2mm de diâmetro e (■) dados obtidos em tubo capilar de 5mm de diâmetro.

obtidos com as soluções a 200, 300 e 400ppm, respectivamente. Vale lembrar que para  $n < 1$  o modelo lei de potência da viscosidade aparente representa um fluido pseudo-plástico e para  $n > 1$  tem-se um fluido dilatante. No caso, ressalta-se que a presente metodologia usada para o cálculo da viscosidade aparente da solução poderia também ser usada para a determinação do índice  $n$  para um fluido como o sangue, uma vez que o mesmo apresenta também um comportamento pseudo-plástico.

Para verificar as propriedades da solução PAMA antes e depois dos ensaios de escoamentos em tubo capilar foram coletadas amostras do fluido e ensaiadas para medidas de viscosidade com o tempo segundo uma mesma metodologia de medição no viscosímetro de cilindros rotativos tipo Couette do laboratório de Mecânica dos Fluidos. Os resultados mostram que não houve uma degradação significativa do fluido durante os ensaios de escoamento em tubo capilar.

Nas Figs. 8.16 e 8.17 apresentam-se os resultados da viscosidade da solução polimérica em função da taxa de cisalhamento estimada para o método com esvaziamento de tanque em comparação com a viscosidade obtida por meio da Eq. 8.26 com tubos de 2mm e 5mm respectivamente. Nota-se que a viscosidade calculada pela formulação do esvaziamento do tanque possui valores maiores que a viscosidade obtida com a tomada de pressão 2, no caso das soluções com concentrações de 300 e 400 ppm e uma concordância entre os valores calculados pelas duas metodologias para as soluções de concentração 200 ppm. Percebe-se então que diferentemente do escoamento da água em tubo capilar, a solução polimérica a 200 ppm não é influenciada pelo comprimento de desenvolvimento. Tal fato pode ser explicado pelas baixas taxas de cisalhamento (i. e. menor comprimento de desenvolvimento) e proximidade do comportamento da solução com a concentração ao escoamento parabólico de um fluido newtoniano escoando em tubo capilar. No entanto, os resultados das soluções com concentrações de 300ppm e 400ppm mostram que para esses valores de concentração o efeito não-newtoniano do fluido é mais significativo e o escoamento não se aproxima a um escoamento parabólico. Portanto as metodologias de cálculo da viscosidade divergem entre si de forma mais significativa para altas concentrações de polímero ( $> 200ppm$ ). Assim, o experimento de esvaziamento de reservatório não é recomendado para a medição de viscosidades com comportamento não-newtoniano, como é o caso do sangue com hematócrito de 45% e emulsões e soluções de alta concentração.

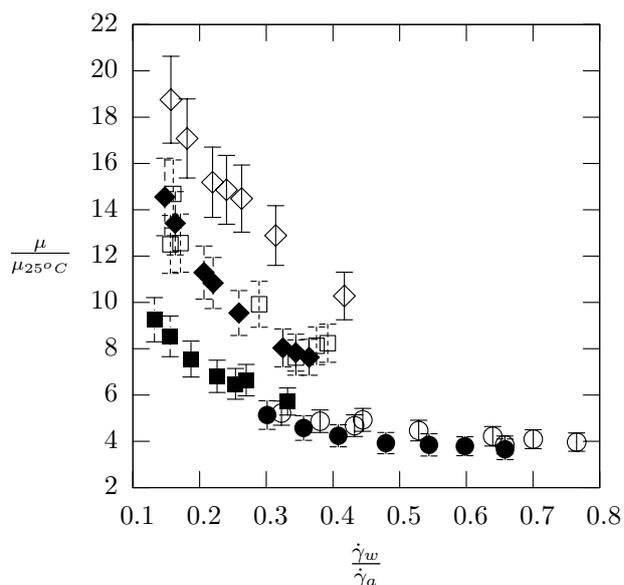


Figura 8.16: Viscosidade em função da taxa de cisalhamento, os pontos (●), (■) e (◆) correspondem aos valores calculados pela equação Eq. 8.26 e (○), (□) e (◇) são os dados obtidos com a metodologia de esvaziamento de tanque, respectivamente para concentrações de 200, 300 e 400 ppm de PAMA escoando em tubos capilares de 2mm de diâmetro.

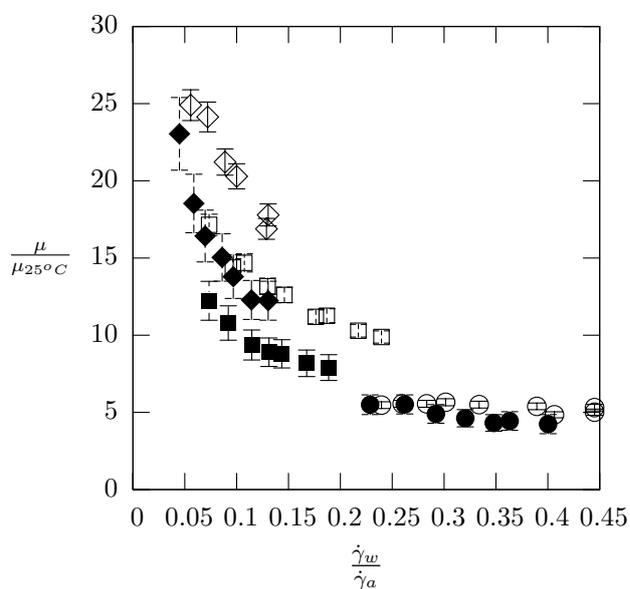


Figura 8.17: Viscosidade em função da taxa de cisalhamento, os pontos (●), (■) e (◆) correspondem aos valores calculados pela equação Eq. 8.26 e (○), (□) e (◇) são os dados obtidos com a metodologia de esvaziamento de tanque, respectivamente para concentrações de 200, 300 e 400 ppm de PAMA escoando em tubos capilares de 5mm de diâmetro.

### 8.4.3 Escoamento de emulsão óleo-água e água-óleo 20% em tubo

A emulsão ensaiada é composta de óleo mineral usado na refrigeração de transformadores de energia, cedido pela ELETRONORTE-DF ao laboratório de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos - Vortex da Universidade de Brasília. A água filtrada usada para a preparação da emulsão é retirada do filtro disponível no mesmo laboratório.

Assim como a solução de PAMA uma emulsão geralmente se comporta como um fluido tipicamente não-newtoniano. Dependendo do número de capilaridade do escoamento, as gotas sofrem deformações e alinham-se com os linhas de corrente do escoamento, provocando um efeito pseudo plástico de redução da viscosidade com o aumento do número de capilaridade. A anisotropia associada com a orientação das gotas ao longo das linhas de corrente produz em termos reológicos diferenças de tensões normais  $N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$  e  $N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz}$ . Efeitos não newtonianos tornam-se mais complexos com o aumento da fração volumétrica de gotas. Nesse caso, além das deformações individuais que as gotas sofrem pelo gradiente de velocidade do escoamento existe uma deformação induzida em uma gota produzida pela interação com suas vizinhas.

No Cap. 7 discutiu-se, a luz de uma emulsão, o princípio de formação e desenvolvimento de uma camada de plasma livre de gotas, equivalente ao que ocorre na microcirculação. Vale lembrar que a formação da referida camada é causada pelo balanço entre dois mecanismos; o fluxo migratório de gotas no sentido parede-centro do capilar e a difusão hidrodinâmica de gotas que gera um fluxo difusivo líquido radial no sentido centro-parede. Associada com a camada livre de células quantificou-se o desenvolvimento de uma camada limite de distribuição de gotas onde existe altos gradientes de concentração. Sendo assim, acredita-se que o comprimento de desenvolvimento do escoamento de uma emulsão seja relativamente maior do que o equivalente a um fluido newtoniano com viscosidade próxima a viscosidade equivalente da emulsão. Este aumento no comprimento de desenvolvimento é consequência direta da distribuição heterogênea de gotas numa seção transversal do tubo capilar. Se considerado a difusão hidrodinâmica de gotas calcula-se um tempo de desenvolvimento  $t_d = R^2/2D$ , em que  $R$  é o raio de um tubo onde escoar uma emulsão. Usando  $D = U/Ra^2 f(\phi)$ , em que  $U$  é

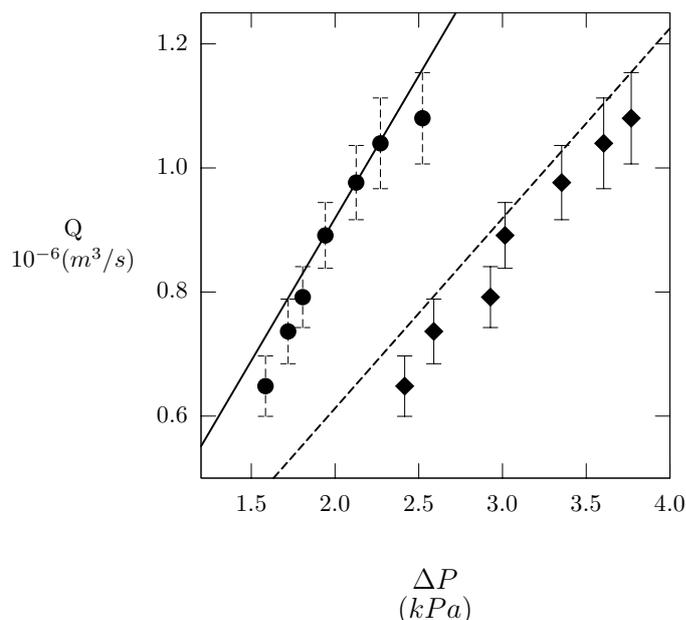


Figura 8.18: Vazão volumétrica em função da diferença de pressão ao longo do tubo para uma emulsão óleo/água com fração volumétrica de 20% escoando em um tubo de 2mm. Pontos (◆) representam valores baseados na tomada de pressão 2 e os pontos ● são valores baseados na tomada de pressão 1. As linhas contínua e tracejada mostram a lei de Poiseuille.

a velocidade média do escoamento, calcula-se o comprimento de desenvolvimento por

$$L_d \sim t_d U \sim \frac{R^3}{8ca^2\phi} \quad (8.36)$$

portanto

$$\frac{L_d}{R} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{1}{8\phi}. \quad (8.37)$$

Uma vez que o comprimento de desenvolvimento para fluido newtoniano em regime laminar escala da seguinte forma  $\tilde{L}_d/a = 100R/a$ , obtém-se

$$\frac{L_d}{a} = \frac{1}{800\phi} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{\tilde{L}_d}{a}. \quad (8.38)$$

A Eq. 8.38 mostra que de fato no caso de emulsões o comprimento de desenvolvimento pode ser maior que 100 vezes o diâmetro do tubo, uma vez que depende inversamente da fração volumétrica  $\phi$  e do quadrado da razão de aspecto  $R/a$ .

Nas Figs. 8.18 e 8.19 é visto que os resultados da vazão  $Q$  em função da queda de pressão  $\Delta p$  para tubo capilar de 5mm e 2mm se aproximam à lei de Poiseuille em

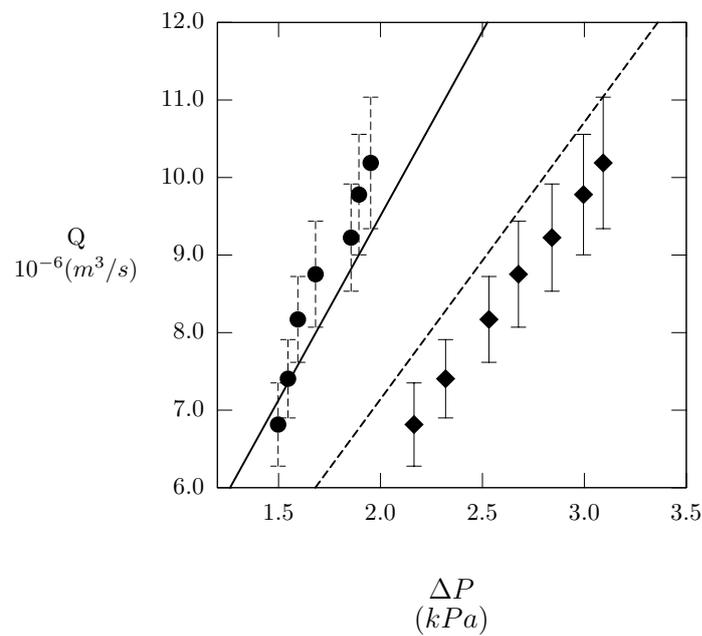


Figura 8.19: Vazão volumétrica em função da diferença de pressão ao longo do tubo para uma emulsão óleo/água com fração volumétrica de 20% escoando em um tubo de 2mm. Pontos (◆) representam valores baseados na tomada de pressão 2 e os pontos ● são valores baseados na tomada de pressão 1. A linha contínua e tracejada mostram a lei de Poiseuille.

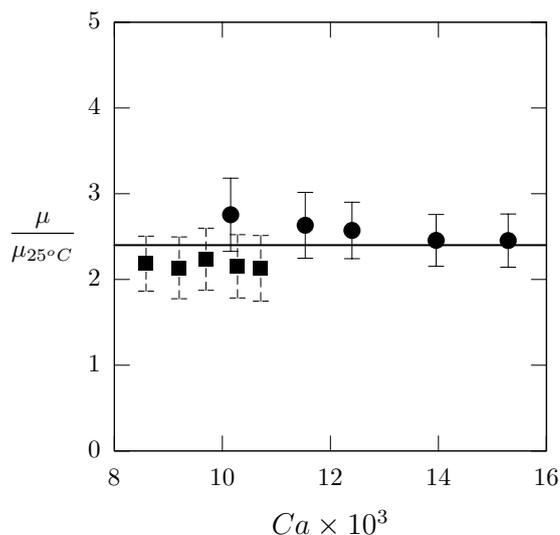


Figura 8.20: Viscosidade aparente da emulsão em função da taxa de cisalhamento na parede do tubo para a emulsão óleo/água a 20%. Os pontos (■) representam os valores experimentais com o tubo de 5mm de diâmetro e os pontos (●) representam os valores com o tubo de 2mm de diâmetro. A linha horizontal representa a viscosidade constante equivalente a viscosidade de Taylor modificada  $\mu^* = \mu\Omega \left[ 1 + \phi \left( \frac{1+5/2\lambda}{1+\lambda} \right) \right]$  (Taylor, 1932), em que  $\Omega$  é uma constante de correção associada aos efeitos de polidispersidade da emulsão.

escoamento laminar de fluido newtonianos em tubo capilar. Isto indica um comportamento newtoniano equivalente da emulsão em que obtém-se  $d\ln(Q)/d\ln(\Delta p) \approx 1,1$  e  $d\ln(Q)/d\ln(\Delta p) \approx 1,3$  para o escoamento no tubo de 2mm de diâmetro e 5 mm de diâmetro, respectivamente. Os regimes de baixos números de capilaridade obtidos não são suficientes para provocar efeitos não-newtonianos associados a deformação das gotas.

A Fig.8.20 mostra o resultado da viscosidade aparente em função da taxa de cisalhamento adimensional (número de capilaridade) para a emulsão com fração volumétrica de gotas de 20% escoando em tubos capilares de 5mm e 2mm de diâmetro. Aqui o número de capilaridade é igual a  $Ca = \dot{\gamma}_w a / \sigma_0$  ( $\dot{\gamma}_w$  é a taxa de cisalhamento na parede calculada no experimento em tubo). Nota-se que há uma leve redução da viscosidade aparente com a taxa de cisalhamento para ambos os resultados. Essa redução é da ordem da incerteza de medição, e poderia ser associada aos efeitos não newtonianos provocados pela polidispersidade da emulsão, por exemplo.

No caso de uma emulsão é interessante avaliar a viscosidade intrínseca da mesma em relação ao número de capilaridade. Para água e óleo admitiu-se uma tensão

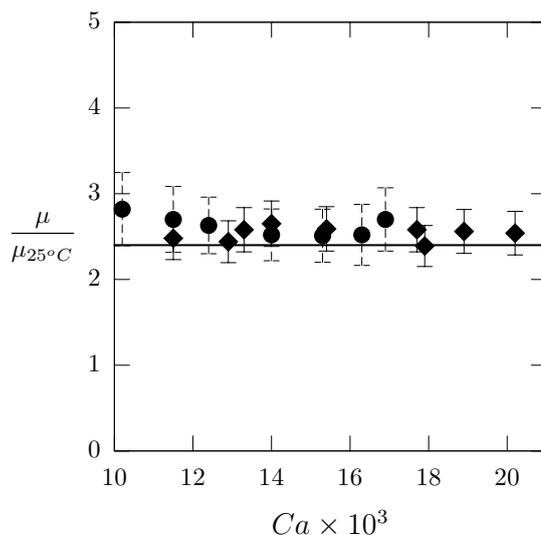


Figura 8.21: Viscosidade intrínseca adimensional da emulsão do número de Capilaridade. No gráfico tem-se os dados obtidos com o uso da equação de Poiseuille, representado pelos pontos (◆) e os dados obtido com o esvaziamento de tanque, representado pelos pontos (●). A linha horizontal mostra a viscosidade de Taylor equivalente .

superficial de  $\sigma_0 = 0.04 Pa \cdot m$  (Paraíso *et al.*, 2005). Na Fig. 8.21 apresentam-se os valores da viscosidade intrínseca adimensional calculados com os dados coletados usando a metodologia de esvaziamento de tanque e os dados medidos com a tomada de pressão 2 no tubo capilar. Verifica-se que as duas metodologias fornecem valores da viscosidades calculadas em total concordância na faixa de taxa de cisalhamento considerada. Para verificar a possível degradação da emulsão durante os ensaios associada principalmente com rupturas de gotas em regiões mais próximas a parede e durante a passagem da emulsão pela bomba de realimentação e a dependência da mesma do tempo, procedeu-se com medições da viscosidade da emulsão em função do tempo para um dado número de capilaridade com amostras colhidas antes, durante e depois dos ensaios. Na Tab. 8.1 apresenta-se a viscosidade média obtida nos ensaios a uma taxa de cisalhamento constante. Nota-se que a diferença do valor da viscosidade obtido para amostra antes do ensaio e a amostra após o ensaio é de  $0,19 mPa \cdot s$ , valor este um pouco maior que a incerteza da medida. Portanto acredita-se que houve apenas uma leve degradação das gotas da emulsão durante o ensaio devido a mudanças microestruturais provocadas pelo escoamento. A diferença das viscosidades referentes as amostras antes e depois é de aproximadamente 10%.

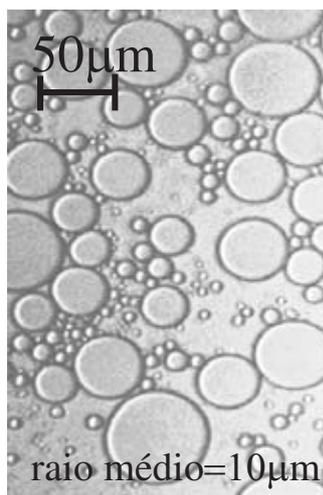
Durante todo o ensaio, para um número de capilaridade fixo a maior variação

Tabela 8.1: Viscosidade da emulsão antes, durante e depois do ensaio.

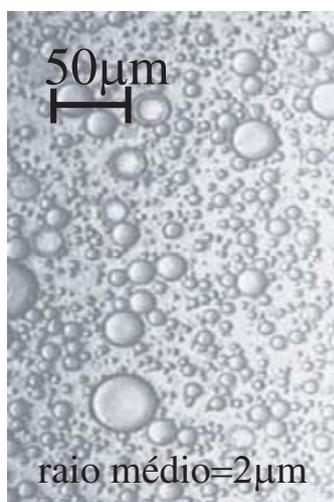
	$Ca \times 10^3$	$\mu/\mu_{25^\circ C}$	Incerteza
Antes	2,2	2,57	0,18
Durante	2,2	2,52	0,18
Depois	2,2	2,35	0,18

da viscosidade obtida foi de  $10^{-1} mPa \cdot s$ , o que permite concluir que a emulsão foi independente do tempo e nenhum transiente associado com tixotropia estrutural foi perceptível. Acredita-se que a taxa de cisalhamento ensaiada no viscosímetro não seja suficiente para deformar e romper as gotas, ou as gotas deformam-se e atingem seu estado de máximo estiramento quase que instantaneamente. No caso dos resultados referentes a escoamentos em tubos capilares mostrados pela Fig. 8.20 e Tab. 8.1 comparando-se os resultados antes e depois das corridas experimentais, observa-se uma leve redução da viscosidade aparente. Esse efeito leva a crer que o cisalhamento quadrático do escoamento em tubo pode ser suficiente para deformar e até mesmo provocar a ruptura das gotas alterando a reologia da emulsão. Atribui-se essa variação à migração de gotas de regiões de altas taxas de cisalhamento para baixas taxas de cisalhamento, sempre presente em cisalhamento quadrático. Essa afirmação é reforçada pelo fato que surfactantes tendem a reduzir a tensão superficial dos líquidos facilitando a deformação e ruptura de gotas (Shmidt *et al.*, 2004).

É visto da Fig. 8.22 que antes do experimento a emulsão apresentava uma configuração polidispersa com gotas de diferentes diâmetros. Percebe-se que no fim do experimento as gotas são praticamente do mesmo tamanho constituindo uma estrutura aproximadamente monodispersa. É importante mencionar que o raio médio das gotas foi obtido por inspeção visual e que constatou-se uma redução desse diâmetro para a amostra coletada depois do experimento. Esse resultado confirma a hipótese que durante o escoamento no tubo capilar houve ruptura de gotas. Uma possibilidade de explicar a redução da viscosidade pelo fato que gotas de diâmetros menores difundem de forma menos eficiente a quantidade de movimento do escoamento e, conseqüentemente, a emulsão possui uma viscosidade inferior ao fim do ensaio. Observa-se ainda da Fig. 8.22 que os surfactantes usados para a estabilização da emulsão foram suficientes para evitar o fenômeno de coalescência das gotas.



(a) Antes



(b) Depois

Figura 8.22: Micrografias da emulsão óleo/água 20% tiradas (a) Antes (polidisperso com razão de tamanhos de gotas aproximadamente  $\beta_p = 14$ , no caso monodisperso  $\beta_p = 1$ .) e (b) Depois (mais uniforme com  $\beta_p = 8$ ) do experimento em tubo capilar.

Com a teoria desenvolvida no Cap. 7 e as imagens obtidas na Fig. 8.22, pode-se estimar o comprimento de desenvolvimento de distribuição de gotas. Assumindo  $Ca = 0,001$ ,  $\phi = 0,2$ ,  $h(\lambda) = 0,67$ ,  $f(\lambda) = 0,06$  e  $a = 10\mu m$ , resulta em

$$\tilde{\delta} = 5,6, \quad (8.39)$$

ou seja, aproximadamente  $56\mu m$  de espessura. Com base nos resultados da Fig.7.12 é possível concluir que o comprimento de desenvolvimento do escoamento em tubo de 2mm, com velocidade média de  $0,34m/s$  é aproximadamente maior a  $0,2m$ . Como a tomada de pressão do tubo de 2mm está a  $0,2m$  da entrada do tubo, é possível que a camada livre de gotas ainda não tenha alcançado seu desenvolvimento completo no ponto de tomada da pressão. Isso pode explicar porque os resultados obtidos com a metodologia de tomada de pressão e do esvaziamento do tanque se aproximam, uma vez que é possível que em ambos os casos o escoamento ainda não esteja completamente desenvolvido.

Os ensaios realizados para medidas de viscosidade no viscosímetro de cilindros rotativos de Couette não mostraram qualquer variação significativa da viscosidade com a taxa de cisalhamento como ocorre com a solução polimérica estudada na seção anterior. Valores da viscosidade das amostras coletadas durante a realização dos ensaios e os resultados obtidos do escoamento em tubo capilar indicam que a viscosidade da emulsão para uma faixa de  $200 < \dot{\gamma} < 1400(s^{-1})$  possui uma viscosidade no intervalo  $1,75 < \mu < 2,4(mPa \cdot s)$ .

A emulsão ensaiada possui uma razão de viscosidade de aproximadamente  $\lambda = 16$ , os números de capilaridade da gota variam no intervalo  $0,28 \times 10^{-6} < Ca < 2,12 \times 10^{-6}$ . Os valores teóricos indicam que as gotas não sofreriam a ruptura durante o escoamento em tubo. É muito provável que durante a passagem pela bomba de realimentação do sistema as gotas sejam sujeitas a altas taxa de cisalhamento e rompam formando uma emulsão de gotas menores.

No caso da emulsão água/óleo a razão de viscosidade é de aproximadamente  $\lambda = 0,5$  e portanto as gotas sofreriam deformações a determinadas taxas de cisalhamento, o que não ocorre na faixa de número de capilaridade investigado no presente experimento. A Fig. 8.23 mostra que a emulsão apresenta um comportamento de fluido newtoniano equivalente com uma viscosidade linear. Na Fig. 8.24 vêem-se que para números de capilaridade entre  $140 \times 10^{-6} < Ca < 280 \times 10^{-6}$  a emulsão água/óleo a

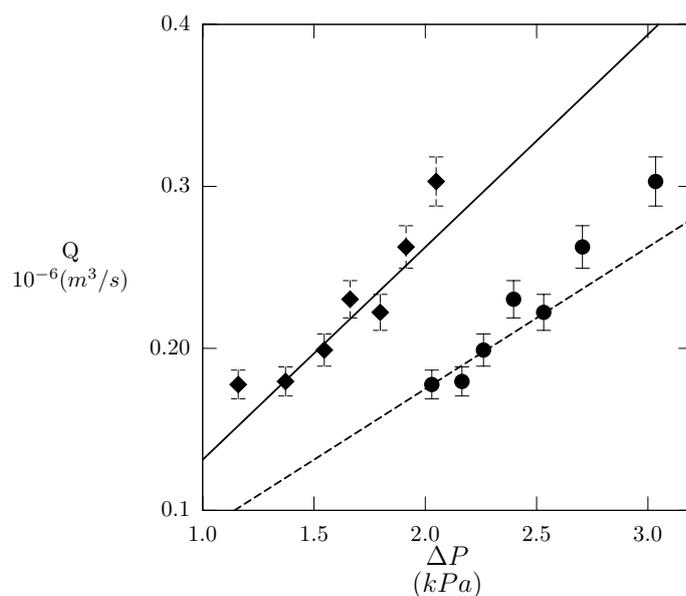


Figura 8.23: Vazão em função da diferença de pressão ao longo do tubo para emulsão óleo/água 20%. Os pontos (●) representam os resultados obtidos para o escoamento em tubo de 2mm de diâmetro com a tomada de pressão 2 e os pontos (◆) representam os resultados para a tomada de pressão 1. As linhas tracejada e sólida representam a lei de Poiseuille.

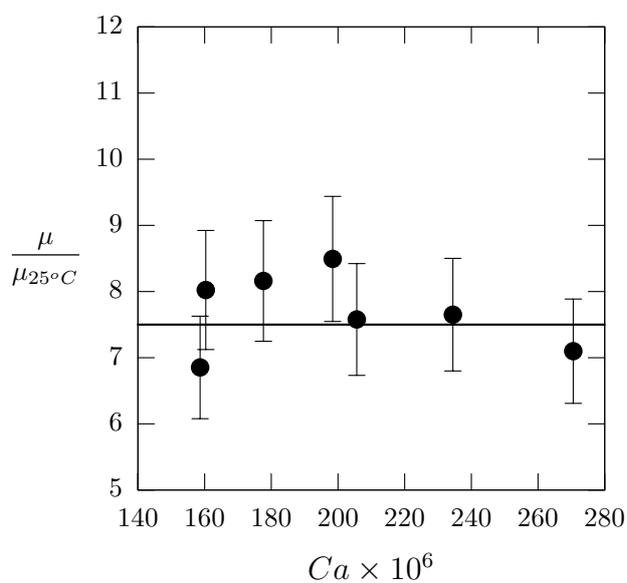
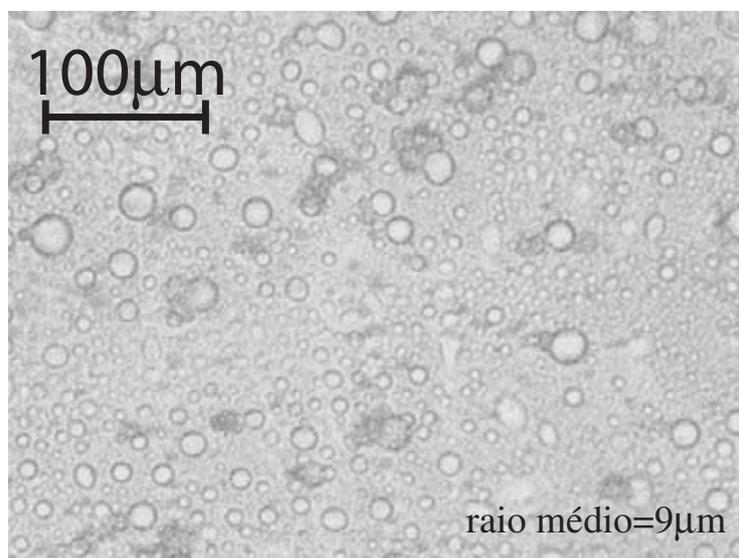


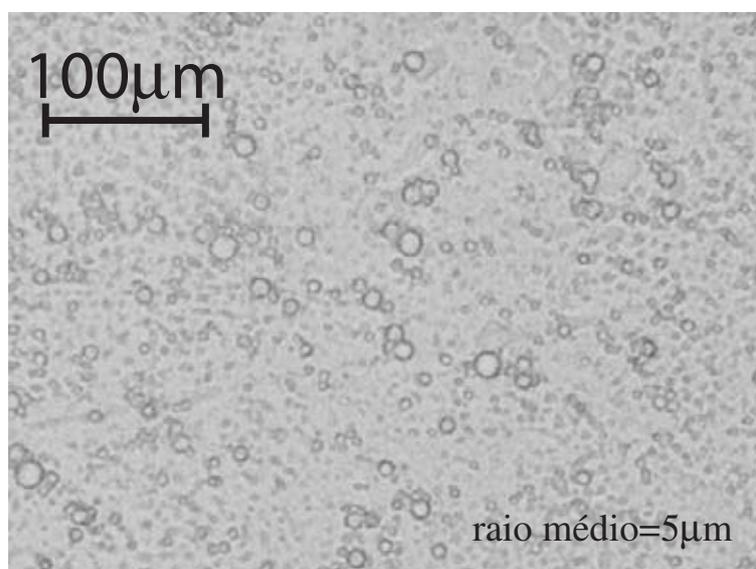
Figura 8.24: Viscosidade intrínseca adimensional em função do número de capilaridade da emulsão água/óleo a 20%. Os pontos representados por ● são valores dos dados do escoamento em tubo com 2mm de diâmetro com a tomada de pressão 2.

20% apresenta uma viscosidade aproximadamente constante. Uma possível explicação é que esse comportamento ocorre porque nesse, apesar de ser uma emulsão com baixa razão de viscosidade o regime de número de capilaridade não é suficiente para deformar a gota e provocar uma variação da viscosidade aparente em função da taxa de cisalhamento.

A Fig. 8.25 mostra fotos das gotas da emulsão água e óleo, antes e depois do escoamento em tubo. Observa-se que após o experimento o fluido não sofreu alterações significativas na configuração das gotas, tendo ocorrido algumas rupturas uma vez que depois dos ensaios a configuração apresenta gotas de menores tamanhos.



(a) Antes



(b) Depois

Figura 8.25: Micrografias da emulsão diluída água/óleo 20% tiradas (a) Antes ( $\beta_p = 5$ ), (b) Depois do experimento da emulsão ter sido submetida ao escoamento em tubo capilar ( $\beta = 4$ ).

## Capítulo 9

### Conclusão

Neste trabalho foram usados diferentes modelos para descrever o escoamento do sangue na microcirculação. As análises mostraram que os modelos usados reproduzem de forma qualitativa, e em alguns casos de forma quantitativa, efeitos e a dinâmica de escoamentos na microcirculação. Sendo assim, a viscosidade intrínseca do sangue pode ser predita de forma aproximada em microvasos de diâmetro da ordem  $10\mu m$  e  $100\mu m$ . As equações constitutivas usadas permitiram a investigação da viscosidade intrínseca do sangue em diferentes condições reológicas, como por exemplo para diferentes valores de razão de viscosidade célula-plasma, do número de capilaridade, da distância entre célula nos capilares, da intensidade das não-uniformidades da parede do microvaso, do hematócrito e do número de Péclet. A formação da camada livre de células na microcirculação também foi investigada e determinou-se que a referida camada forma-se pelo balanço de dois mecanismos de fluxo de células, um migratório e outro difusional. O estudo sobre a referida camada avaliou diferentes condições da formação da mesma, como o tempo de desenvolvimento, a espessura da camada e a distribuição de gotas em função do número de Péclet, do número de capilaridade e do tempo adimensional. Foram realizados experimentos preliminares que permitiram concluir que o procedimento de esvaziamento de tanque com tomada de pressão no tubo capilar pode ser usado com boa acurácia para determinar a ordem de grandeza da viscosidade do sangue em escoamento em um tubo capilar e averiguar possíveis influências de diferentes condições do sangue como, por exemplo, a baixa concentração de hematócrito ou a anemia falciforme, na reologia do mesmo.

As análises de escalas e dimensionais permitiram concluir que os escoamentos em microvasos são dominados por regimes viscosos com  $Re \sim 0.1$  a  $1$ . Concluiu-se

também que as tensões viscosas não são capazes de alterar a área da membrana das células e a deformação da célula deve-se a flexão em regiões com curvatura elevadas. Em adição, a viscosidade da membrana é muito maior do que a viscosidade do citoplasma e portanto essa resiste aos movimentos celulares internos, de forma que o escoamento externo não é afetado por essa dinâmica. Portanto o sangue em média se aproxima-se de emulsões protótipos de sangue com alta razão de viscosidade gota-plasma e que sofrem pequenas deformações, no caso de microvasos da ordem de  $100\mu m$  de diâmetro.

A comparação dos resultados analíticos, do modelo contínuo, com fluido de Casson escoando em um tubo de seção variável, com os valores experimentais da viscosidade intrínseca mostrou que a tensão crítica de escoamento em sangue normal é aproximadamente nula e as variações desse parâmetro pouco influenciam na reologia do sangue. Constatou-se também que o modelo macroscópico do sangue é capaz de recuperar o efeito Fahraeus-Lindqvist, observado em microvasos de diâmetros menores que  $300\mu m$ . Não obstante, estabeleceu-se que a viscosidade intrínseca do sangue se intensifica de forma significativa com as não uniformidades das paredes do microvaso. Em adição, pode-se afirmar que o aumento do hematócrito, associado no referido modelo ao aumento da viscosidade efetiva  $\mu_{eff}$ , afeta significativamente a viscosidade intrínseca do sangue. Desse modo, doenças ou condições físicas e ambientais que aumentam o hematócrito, como o caso da estadia de longo período em regiões de elevadas altitudes, afetam de forma relevante o esforço do coração em bombear sangue para regiões periféricas do corpo, responsáveis pela difusão de oxigênio para os tecidos do organismo humano (Sem levar em consideração a vasodilatação).

O escoamento de células enfileiradas em capilares é descrito com boa aproximação quantitativa com o modelo de células protótipos com formato de parabolóide. O modelo permitiu fazer uma estimativa do valor mínimo de viscosidade intrínseca do sangue em função do raio do microvaso. O referido modelo também reproduziu o chamado efeito Fahraeus-Lindqvist inverso, que ocorre no escoamento em capilares. Os resultados permitiram determinar a viscosidade intrínseca do sangue em capilares de raio adimensional entre  $3 < R/a < 5$ . Constatou-se também que a velocidade média das células é um parâmetro muito importante uma vez que o mesmo está diretamente relacionado com a redução da viscosidade do sangue em capilares, como mostrado nos resultados. Pode-se com o referido modelo também prever a variação da viscosidade

intrínseca em função do hematócrito para vasos com diâmetro de  $6\mu m$ , em que viu-se que o modelo concorda de forma satisfatória com resultados experimentais obtidos de outras pesquisas.

O modelo de escoamento de sangue em microvaso com o sangue descrito por uma equação constitutiva de emulsão diluída de alta razão de viscosidade gota-plasma (pequenas deformações) reproduziu o efeito característico de fluidos pseudo-plástico de redução de viscosidade a um determinado número de capilaridade, que é o caso do sangue. Não somente, a comparação feita da viscosidade intrínseca com valores experimentais do sangue *in vitro*, obtidos de outra pesquisa, mostrou que o referido modelo permitiu entender a relação da viscosidade intrínseca com a variação do hematócrito do sangue para microvasos de diâmetro da ordem de  $100\mu m$ . Como o resultado do modelo se aproxima de forma satisfatória aos valores experimentais usados, o modelo proposto pode ser utilizado para estimar a viscosidade intrínseca de um sangue humano com baixo hematócrito. Vê-se também que em altas razões de viscosidades  $\lambda \rightarrow \infty$ , a viscosidade intrínseca é constante, nessas condições as gotas protótipos de célula não apresentam deformações significativas.

Comparou-se a viscosidade intrínseca do sangue em função do raio do microvaso obtida pelo modelo de emulsão usado para descrever o sangue com dados experimentais de medidas dessa viscosidade, percebeu-se nesse caso que o modelo de emulsão prediz uma viscosidade intrínseca inferior. Acredita-se que essa diferença se dá pela ausência de agregação entre as gotas, e pela desconsideração de não-uniformidades presente em microvaso real. Viu-se também que assim como os demais modelos, o modelo de sangue descrito por uma emulsão de gotas viscosas em escoamento nuclear com plasma foi também capaz de reproduzir o efeito Fahraeus-Lindqvist. No geral, os modelos apresentaram comportamento qualitativos semelhantes.

Na presente dissertação viu-se que a descrição da camada livre de células envolve a compreensão de dois mecanismos: a difusão hidrodinâmica de células, principalmente dos glóbulos vermelhos, e a velocidade de migração devido a presença da parede do microvaso. Verificou-se que a difusão hidrodinâmica de células depende das irreversibilidades das interações célula-célula e da presença de gradientes de concentração de células. Esse mecanismo é responsável pela tendência das células ocuparem regiões adjacentes às paredes dos micro-vasos. Por outro lado, a velocidade de mi-

gração das células devido à interação com a parede do microvaso depende do tamanho de cada célula e do número de capilaridade. No balanço de fluxos de células, a referida migração é o mecanismo responsável pela tendência das células do microvaso ocuparem o núcleo do mesmo. O balanço desse mecanismo, considerando a dependência direta da velocidade de migração com o diâmetro das células, explica também porque as plaquetas tendem a ocupar regiões próximas a parede do micro-vaso e iniciar o processo de formação de trombos.

Para um caso de fluxo líquido nulo (condição de regime permanente), a espessura da camada livre de células foi estimada considerando-se os cálculos feitos para a difusão hidrodinâmica, para a velocidade de migração, para o número de capilaridade, e para o tamanho das gotas protótipos de uma emulsão diluída. Os valores nesse caso tenderam a ser maiores em relação a resultados obtidos de observações experimentais. Acredita-se que isso ocorreu devido a natureza de pequena deformação e diluição das teorias envolvidas na descrição da formação da camada livre de células. O cálculo de distribuição de partículas em escoamento cisalhante com a presença de uma parede rígida permitiu estimar o desenvolvimento da camada livre de células ao longo do tempo e para diferentes valores das propriedades do sangue, como número de capilaridade e Péclet. Calculou-se também o comprimento de desenvolvimento da camada livre de células que chegou a ser da ordem de  $1mm$ . Concluiu-se que a redução do número de capilaridade diminui o tempo de desenvolvimento da camada livre de células como também a espessura da mesma. Portanto, condições físicas que aumentam a tensão superficial do glóbulo vermelho, i. e. diminui o numero de capilaridade, podem levar a uma tendência maior de acúmulo de células na parede do microvaso.

Na presente dissertação a equação de diferencial parcial de segunda ordem que rege o balanço dos mecanismos difusivo e convectivo (migração) foi resolvida com base numa solução por similaridade identificando as variáveis similares. O método foi uma contribuição original que levou a transformação da equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária, resultando num problema de valor inicial resolvido por um algoritmo de Runge-Kutta padrão.

No caso dos experimentos realizados com água viu-se que um escoamento em tubo com uma tomada de pressão localizado após o comprimento de desenvolvimento fornece valores seguros da viscosidade medida. Conclui-se também dos resultados de

medida de viscosidade das soluções poliméricas de Poliacrilamida, que o escoamento em tubo capilar pode ser usado em conjunto com o viscosímetro de cilindros rotativos de Couette para obtenção da viscosidade aparente em diferentes faixas de taxa de cisalhamento. No presente estudo determinaram-se as constantes da lei de potência para as soluções de Poliacrilamida - PAMA de concentração de 200, 300 e 400 ppm. Viu-se também que mesmo a 200 ppm a solução comporta-se aproximadamente como um fluido newtoniano (linear) e no escoamento em tubo de  $2mm$  a viscosidade aparente calculada com a metodologia de esvaziamento de tanque (com a Eq. 8.31) aproxima-se da calculada com tomada de pressão, já que o regime foi próximo de newtoniano. No caso de concentrações maiores os efeitos não-newtonianos foram mais pronunciados e não sendo possível usar a metodologia de esvaziamento de tanque baseada na Eq. 8.31 para se determinar a viscosidade aparente dos mesmos. Portanto, a metodologia de esvaziamento de tanque não é recomendada para a medida de viscosidade aparente de fluidos como o sangue a 45%, ou emulsões não diluídas.

As alterações microestruturais observadas nos experimentos realizados com emulsões leva a crer que antes de qualquer experimento com o sangue deve ser feita uma completa caracterização das propriedades desse fluido e os efeitos sobre essas propriedades de anti-coagulantes, ou outras substâncias usadas para preservar as características reológicas do sangue. No caso, as alterações microestruturais observadas nas emulsões estão associadas com altas taxas de ruptura de gotas com a passagem das emulsões pela bomba de realimentação do reservatório de fluido de trabalho usada no experimento. Concluiu-se portanto que é muito importante analisar-se a microestrutura da emulsão, ou do próprio sangue, antes e depois da realização de experimentos de escoamento em tubo capilar. Viu-se que os regimes de baixos números de capilaridade no escoamento das emulsões de gotas de água dispersas em óleo e gotas de óleo dispersas em água a 20% em tubo capilar não é capaz de deformar as gotas e obter um comportamento não-newtoniano pseudo-plástico das emulsões. As gotas durante o escoamento em tubo permaneciam praticamente esféricas e o fluido como um todo com estrutura isotrópica, exceto no que se refere a alguma migração induzida por gradientes de cisalhamento que estão presentes em escoamento em tubos. No caso, a relação vazão com queda de pressão foi aproximadamente linear e a viscosidade aproximadamente constante na concentração ensaiada. Dizemos que o fluido é caracterizado, do ponto

de vista reológico, como um fluido newtoniano equivalente.

Em geral, a presente dissertação mostrou que a hidrodinâmica do sangue em escoamento em microvasos pode ser entendida e até mesmo mensurada com modelos de fluidos mais simples mas que apresentam comportamento semelhante ao sangue.

#### 9.0.4 Sugestões para trabalhos futuros

No modelo macroscópico de escoamento de sangue em capilares poder-se-ia usar uma condição de preservação de área da cápsula protótipo. Essa abordagem permitirá investigar a influência de alterações geométricas da célula no regime do escoamento capilar. Em adição, para o regime de escoamento em arteríolas pode-se usar uma função não-periódica para caracterizar-se as irregularidades da parede do microvaso a fim de quantificar de forma mais fiel a influência desse fator na viscosidade intrínseca do sangue.

Para o modelo de sangue descrito por uma emulsão de alta razão de viscosidade poderia ser usado um modelo constitutivo que admitisse deformações de gota mais elevadas. Modelos considerando a capacidade de deflexão elástica começam a ser explorados na literatura tendo em vista seu importante papel na microcirculação. De forma semelhante a difusividade hidrodinâmica e a velocidade de migração dos glóbulos vermelhos podem ser determinadas por meio de abordagens de simulações numéricas, como por exemplo, integrais de contorno. Desse modo, poder-se-ia estabelecer um modelo que considera as interações entre células e célula-parede que resultam em deformações moderadas e altas deformações. Os resultados esclarecerão melhor a influência da deformação de células elásticas no mecanismo de formação da camada adjacente a parede dos microvasos. É importante também a análise da formação da referida camada com um modelo considerando a polidispersidade de cápsulas protótipos e o cálculo da difusividade hidrodinâmica e velocidade de migração para essas condições. Essa análise permitiria investigar e explicar a questão de porque plaquetas acumulam-se em regiões da parede do microvaso iniciando o processo de formação de trombos. Recomenda-se também considerar a elasticidade da membrana da cápsula, seguindo as análises de escala ou os parâmetros físicos definidos no cap. 1 da presente dissertação. Essas implementações começam a ser desenvolvidas no grupo usando o método de integral de contorno.

Acreditamos que os modelos estudados podem ser validados pela realização de experimentos com a mesma metodologia apresentada usando o próprio sangue como o fluido de trabalho. A caracterização do sangue usado nos experimentos em tubos capilares seria também de maior relevância. Nesse caso, o experimento deveria ter também como principal foco a determinação da viscosidade intrínseca do sangue. Assim, seria importante que a medição dessa viscosidade seja realizada com tanto em condições normais como também com alterações da reologia provocadas por patologias como anemia falciforme. Pode-se também investigar a influência de aditivos, como surfactantes, atenuantes da tensão superficial do glóbulo vermelho na viscosidade intrínseca do sangue. Acredita-se que esse estudo possa levar a determinação de efeitos sobre a reologia do sangue antes não analisados provocados pela ingestão ou aplicação de medicamentos, por exemplo. Experimentos para caracterização das propriedades como o número de capilaridade, coeficiente e gráfico de flexão e razão de viscosidade membrana-plasma para diversas amostras de diferentes tipos de sangue seriam também importantes. Os resultados desses experimentos permitiriam ajustar os modelos usados bem como entender melhor como alterações nas características das células podem afetar a viscosidade intrínseca do sangue e a dinâmica de escoamento da microcirculação.

A construção de uma bancada experimental com sistema de aquisição de imagens para visualização de deformação e polidispersidade de células e formação de camada livre de células seria também promissor.

# Referências

- Absi, F. S., Oliveira, T. F., e Cunha, F. R., 2006, A note on the extensional viscosity of elastic fluids under stronger flows, “Mechanics Research Communications”, Vol. 33, pp. 401–414.
- Barnes, A. e Willars, E., 1987, “Clinical Hemorheology”, capítulo Diabetes, pp. 275–309. Martinus Nijhoff Pub, Dordrecht.
- Barthes-Biesel, D. e Sgaier, 1985, Role of membrane viscosity in the orientation and deformation of a spherical capsule suspended in shear flow, “J. Fluid Mech.”, Vol. 160, pp. 119.
- Baskurt, O. K., 2003, Pathophysiological Significance of Blood Rheology, “J. Med. Sci”, Vol. 347, pp. 355.
- Batchelor, G. K., 1967, “An Introduction to Fluid Dynamics”, Cambridge University Press.
- Batchelor, G. K., 1970, The Stress System in a Suspension of Force-free Particles, “Journal of Fluid Mechanics”, Vol. 41, pp. 545–570.
- Batchelor, G. K. e Green, J. T., 1972, The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field, “J. Fluid Mech.”, Vol. 56, pp. 274–400.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., e Hassanger, O., 1987, “DYNAMICS OF POLYMERIC LIQUIDS”, Vol. 1, John Wiley & Sons, Nova York, 2<sup>a</sup> edição.
- Bishop, J. J., Popel, A. S., Intaglietta, M., e Johnson, P. C., 2001, Rheological effects of red blood cell aggregation in the venous network: A review of recent studies, “Biorheology”, Vol. 1, pp. 263–274.
- Blevins, R. D., 1984, “Applied Fluid Dynamics Handbook”, capítulo Pipe and Duct Flow, pp. 38 – 124. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.
- Carvalho, J. A. A., 2006, Fundamentos do escoamento do sangue na microcirculação, Projeto de graduação, Universidade de Brasília.

- Carvalho, J. A. A., Oliveira, T. F., e Cunha, F. R., 2007, A core flow model of a high viscosity emulsion to describe the blood flow in the microcirculation, "Proceedings of COBEM 2007". ABCM.
- Chan, P. C. H. e Leal, L. G., 1979, The motion of a deformable drop in a second-order fluid, "J. Fluid mechanics", Vol. 92, pp. 131.
- Chandran, K. B., 2003, Blood rheology, Cardiovascular fluid mechanics, Notas de aula, Capítulo 3 ,<http://www.icaen.uiowa.edu/bme155/rheologynotes.pdf>.
- Chien, S., Dormandy, J., e Ernst, E., 1987, "Clinical Hemorheology", Martinus Nijhoff Pub., Dordrecht.
- Chien, S. e Jan, K.-M., 1973, Ultrastructural basis of the mechanism of rouleaux formation, "Microvasc. Res.", pp. 155–166.
- Couto, H. L. e Cunha, F. R., 2008, Transverse gradient diffusion in a polydisperse dilute suspension of magnetic spheres during sedimentation, p. 12, Em preparação.
- Cristini, V., 2003, Adaptive multiscale numerical simulation of blood rheology and red cell dynamics in the microcirculation., "International Biofluid Mechanics Conference", pp. 12–14.
- Cunha, F. R., 2002, Characterization of capsules and drops motion in micro-vessels for developing of models of blood flow in the microcirculation, CNPq-Report-520386.
- Cunha, F. R., 2003, Projeto de pesquisa: Reologia e microhidrodinâmica de células, Relatório de projeto CNPq # 475201/2003-5, CNPq.
- Cunha, F. R., 2004, Notas de aula da matéria Mecânica dos meios contínuos, anotações do autor, Ciências Mecânica.
- Cunha, F. R., 2006, Notas de Aula de Termodinâmica Clássica, anotações do autor.
- Cunha, F. R. e Andreotti, M., 2007, A Study of the Effect of Polymer Solution in Promoting Friction Reduction in Turbulent Channel Flow, "Journal of Fluids Engineering", Vol. 129, pp. 491–505.
- Cunha, F. R. e Hinch, E. J., 1996, Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres, "J. Fluid Mechanics", Vol. 309, pp. 211.
- Cunha, F. R. e Lowenberg, M., 1999, Normal and pathological distribution of blood flow in the microcirculation, "Proceedings of biomedical engineering research conference", Vol. 1, p. 119.
- Eckstein, E. C., Bayley, D. G., e Shapiro, A. H., 1977, Self-diffusion of particles in

- shear flow of a suspension, "J. Fluid Mech.", Vol. 79, pp. 191–208.
- Einstein, A., 1956, "Investigations on the Theory of the Brownian Movement", Dover Publications, Inc.
- Fahraeus, R., 1929, Suspension stability of suspension, "Physiology", Vol. 9, pp. 241.
- Fahraeus, R. e Lindqvist, T., 1931, The viscosity of blood in narrow capillary tubes, "J. Physiology", Vol. 96, pp. 562–568.
- Frankel, N. A. e Acrivos, A., 1970, The constitutive equation for dilute emulsion, "J. Fluid Mechanics", Vol. 44, pp. 65.
- Gupta, B. B., Nigan, K. M., e Jafrin, M. Y., 1982, A three-layer semi-empirical model for flow of blood and other particulate suspensions through narrow tubes, "J. Biomech Eng.", Vol. 104, pp. 129.
- Hampton, R. E. e A. A. Mammoli, A. L. Graham, N. T., 1997, Migration of particles undergoing pressure-driven flow in a circular conduit, "J. Rheology", Vol. 41, pp. 621–640.
- Helfand, E., 1961, Theory of the molecular friction constant, "Phys. Fluids", Vol. 4, pp. 681.
- Hinch, E. J., 1991, "Perturbation Methods", Press Syndicate of University of Cambridge.
- Hochmuth, R. M. e Waghgh, R. E., 1987, Erythrocyte membrane elasticity and viscosity, "Ann. Rev. Physiol.", Vol. 49, pp. 209–219.
- Hogenauer, W., 2003, The Importance of a Complete Rheological Profile Bulletin #301, Disponível na internet, Rheologics - Tech Bulletin.
- Kholodenko, A. L. e Douglas, J. F., 1995, Generalized Stokes-Einstein equation for spherical particle suspensions, "Phys. Rev.", Vol. 51, pp. 1081–1090.
- Kim, S. e Karrila, S. J., 1991, "Microhydrodynamics, principles and Selected applications", Butterworth-Heinemann, 1ª edição.
- Ku, D. N., 1997, Blood flow in arterioles, "Annu. Rev. Fluid Mech.", Vol. 29, pp. 399–434.
- Lac, E. e Barthes-Biesel, 2008, Pairwise interaction, "Phys. Fluids", Vol. 20.
- Leighton, D. T. e Acrivos, A., 1987, Measurement of shear-induced self diffusion in concentrated suspensions of spheres, "J. Fluid Mechanics", Vol. 181, pp. 415–431.
- Lipowsky, H. H., 2005, Microvascular Rheology and Hemodynamics, "Microcircula-

- tion”, Vol. 12, pp. 5–15.
- Lowenberg, M. e Hinch, E. J., 1997, Collision of two deformable drops in shear flow, “J. Fluid Mechanics”, Vol. 338, pp. 299.
- McQuarrie, D. A., 2000, “Statistical Mechanics”, capítulo The Time-Correlation Function Formalism I, pp. 467–542. University Science Books.
- Napier, P. J. e West, J. B., 1996, Medical and Physiological considerations for a high-altitude MMA site, MMA Memo No 162.
- Oliveira, T. F., 2007, Microhidrodinâmica e reologia de emulsões, Tese de doutorado, PUC - Rio.
- Oliveira, T. F., Couto, H. L. G., e Cunha, F. R., 2005, A theoretical Study of an Emulsion of High Viscosity Drops Under Shear, “Proceeding of the International Congress of Mechanical Engineering”, pp. 21–31, Ouro Preto.
- Paraíso, P. R., Andrade, M. G., e Zemp, R. J., 2005, “Ciência e Tecnologia de Alimentos”, Vol. 25, capítulo Destilação da miscela II: modelagem e simulação do stripping do hexano. Campinas, 1<sup>a</sup> edição.
- Picart, C., Piau, J., e Galliard, H., 1998, Human blood shear yield stress and its hematocrit, “J. Rheology”, Vol. 42, pp. 1–12.
- Popel, A. S. e Johnson, P. C., 2005, Microcirculation and Hemorheology, “J. Fluid Mechanics”, Vol. 37, pp. 43–69.
- Pozrikidis, C., 2003, “Modelling and Simulating of Capsules and Biological Cells”, Chapman & Hall/CRC.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., e Vetterling, W. T., 1992, “Numerical Recipes in Fortran 77”, Vol. 1, Hardback, 2<sup>a</sup> edição.
- Pries, A. R., Nehaus, D., e Gaehtgens, P., 1992, Blood viscosity in tube flow: dependence on diameter and hematocrit, “Am. J. Physiol.”, Vol. 263, pp. H1770–H1778.
- Pries, A. R., Secomb, T. W., Gessner, T., Sperandio, M. B., Gross, J. F., e Gaehtgens, P., 1994, Resistance to blood flow in microvessels in vivo, “Circulation Research”, Vol. 75, pp. 904–915.
- Prista, L. V. N., Alves, A. C., e Morgado, R., 1991, “Técnica Farmacêutica e farmácia galênica”, Fundação Calouste Gulbenkian, 4<sup>a</sup> edição.
- Rallison, J. M., 1984, The deformation of small viscous drops and bubbles in shear flows, “Ann. Rev. Fluid Mech.”, Vol. 16, pp. 45.

- Rand, R. P. e Burton, A. C., 1964, Mechanical properties of red cell membrane, "Biophysical journal", Vol. 4, pp. 115–135.
- Roco, M. C., 1993, "Particulate two-phase flow", Butterworth-Heinemann.
- Savina, N. A., Georjina, A., Shakhnazarov, A. A., e Sokolova, I. A., 2005, Disturbance of the blood fluidity as a result of an experimental insult, "J. Engineering Physics and Thermodynamics", Vol. 78, pp. 983–988.
- Schlichting, H., 1968, "Boundary-Layer Theory", Mc Graw-Hill, 6ª edição.
- Secomb, T. W., 2003, "Mechanics of red blood cells and blood in narrow tubes", Chapman & Hall, Boca Raton.
- Secomb, T. W. e Hsu, R., 1996, Analysis of red blood cell motion through cylindrical micropores: effects of cell properties, "Biophysics J.", Vol. 71, pp. 1095.
- Secomb, T. W., Skalak, R., Ozkaya, N., e Gross, J. F., 1986, Flow of axisymmetric red blood cells in narrow capillaries, "J. Fluid Mechanics", Vol. 405, pp. 163.
- Shmidt, W., Neto, D. D., e Botrel, T. A., 2004, Formação de emulsões e seu efeito na uniformidade de aplicação em quimigação, "Engenharia rural", Vol. 15, pp. 71–79.
- Skalak, R., 1976, "In Microcirculation Vol. I - Rheology of the red blood cell membrane", Eds. Grayson, J. & Zingg W., Plenum Press, New York.
- Skalak, R. e Ozkaya, N., 1989, Biofluid mechanics, "Ann. Rev. Fluid Mechanics", Vol. 21, pp. 167.
- Skalak, R. e Tözeren, H., 1979, "Mathematics of microcirculation Phenomena", capítulo Flow Mechanics in The Microcirculation, pp. 17–40. New York: Raven, Copyright [1979] Lippincott-Raven Publisher.
- Smart, J. R. e Leighton, T. J., 1991, Measurement of the drift velocity of a droplet due to the presence of plane, "Phis. Fluids A", Vol. 3, pp. 21–28.
- Tanner, R. L., 1994, "Engineering Rheology", Oxford University Press, Oxford University, Second Edition.
- Taylor, G. I., 1932, The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid, "Proceedings of the Royal Society of London", pp. 41–48.
- Thomas, H. W., 1962, The wall effect in capillary instruments: An improved analysis suitable for applications to blood and other particle suspensions, "Biorheology", Vol. 1, pp. 41.
- Tolentino, T. O. e Cunha, F. R., 2005, Teoria da lubrificação aplicada ao estudo do

escoamento do sangue em microvasos. Relatório de iniciação científica, Relatório de pibic, Universidade de Brasília - UnB.

Weitz, D. A., 2008, Experimental Soft Condensed Group, Página da internet: [www.seas.harvard.edu/projects/weitzlab](http://www.seas.harvard.edu/projects/weitzlab).

## Anexo A

# Argumento de escala para a solução do escoamento de fluido em tubo de paredes senoidais

A seguinte análise de escala mostra como que a variação suave da parede do tubo permite que os termos de inércia da equação de Cauchy possam ser desprezados.

$$\begin{aligned}u_r &\sim \frac{Q}{\pi R_0^2} \frac{\alpha R_0}{L} \sim \frac{\alpha Q}{\pi R_0 L} \\u_z &\sim \frac{Q}{\pi R_0^2} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &\sim \left( \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 - \alpha)^2} - \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 + \alpha)^2} \right) \frac{1}{\alpha R_0} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &\sim \left( \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 - \alpha)^2} - \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 + \alpha)^2} \right) \frac{1}{L} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &\sim \frac{(P_L - P_0)}{L} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) &\sim \frac{(P_L - P_0)}{\alpha R_0 L}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} &\sim \frac{\alpha Q}{\pi R_0 L} \left( \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 - \alpha)^2} - \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 + \alpha)^2} \right) \frac{1}{\alpha R_0} \sim \frac{Q^2}{\pi^2 R_0^4 L} \left( \frac{4\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} \right) \\u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &\sim \frac{Q}{\pi R_0^2} \left( \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 - \alpha)^2} - \frac{Q}{\pi R_0^2 (1 + \alpha)^2} \right) \frac{1}{L} \sim \frac{Q^2}{\pi^2 R_0^4 L} \left( \frac{4\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} \right)\end{aligned}$$

Com:

$$\alpha \rightarrow 0$$

Dessa forma a equação de Cauchy na direção  $z$ , aplicada a esse problema, se reduz a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

## Anexo B

# Determinação das equações diferenciais que governam o movimento de duas partículas em escoamento do tipo cisalhamento simples

A seguir tem-se o desenvolvimento da Eq. 6.14, para se obter as equações diferenciais usadas para resolver o movimento de duas partículas submetidas a escoamento em cisalhamento simples.

Dado a equação a seguir

$$\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1 = \boldsymbol{\Omega}^\infty(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{D}^\infty \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - [A\mathbf{d}\mathbf{d} + B(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{d}\mathbf{d})] \cdot \mathbf{E}^\infty \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{B.1})$$

em que  $\boldsymbol{\Omega}^\infty = -1/2\dot{\gamma}\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{D}^\infty = 1/2\dot{\gamma}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)$ ,  $\mathbf{d} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/R$ ,  $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ ,  $A$  e  $B$  são funções de mobilidade.

Substituindo-se  $\boldsymbol{\Omega}^\infty$ , no termo  $\boldsymbol{\Omega}^\infty(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  da Eq. B.2 tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^\infty \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= -1/2\dot{\gamma}\mathbf{e}_3 \times [(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) - (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3)] \\ &= 1/2\dot{\gamma}[(y_2 - y_1)\mathbf{e}_1 - (x_2 - x_1)\mathbf{e}_2] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo-se  $\mathbf{D}^\infty$  no termo  $\mathbf{D}^\infty \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\infty \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= 1/2\dot{\gamma}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \cdot [(x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{e}_3] \\ &= 1/2\dot{\gamma}[(x_2 - x_1)\mathbf{e}_2 + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_1] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Substituindo-se  $\mathbf{dd}, \delta$  no termo  $\mathbf{Add} + B(\delta - \mathbf{dd})$ , tem-se

$$\mathbf{Add} + B(\delta - \mathbf{dd}) = \frac{A}{R^2} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)^2 & (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1)(z_2 - z_1) \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & (y_2 - y_1)^2 & (y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \\ (x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & (y_2 - y_1)(z_2 - z_1) & (z_2 - z_1)^2 \end{bmatrix} + \frac{B}{R^2} \begin{bmatrix} R^2 - (x_2 - x_1)^2 & -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & -(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & R^2 - (y_2 - y_1)^2 & -(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \\ -(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) & -(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) & R^2 - (z_2 - z_1)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Portanto

$$\begin{aligned} [\mathbf{Add} + B(\delta - \mathbf{dd})] \cdot \mathbf{D}^\infty \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2) &= 1/2 \frac{A}{R^2} \dot{\gamma} [(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2 \mathbf{e}_2 + \\ &(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \mathbf{e}_3] + 1/2 \frac{A}{R^2} \dot{\gamma} [(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2 \mathbf{e}_2 + \\ &(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \mathbf{e}_3] + 1/2 B \dot{\gamma} [-1/R^2 (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - x_1) [1 - (y_2 - y_1)^2 / R^2] \mathbf{e}_2 \\ &- 1/R^2 (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \mathbf{e}_3] + 1/2 B \dot{\gamma} [(y_2 - y_1)(1 - (x_2 - x_1)^2 / R^2) \mathbf{e}_1 - 1/R^2 (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2 \mathbf{e}_2 \\ &- 1/R^2 (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \mathbf{e}_3] \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

Na direção do vetor  $\mathbf{e}_1$ , a equação da velocidade relativa é descrita por:

$$\begin{aligned} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \mathbf{e}_1 &= 1/2 \dot{\gamma} \left[ (y_2 - y_1) + (y_2 - y_1) - \frac{A}{R^2} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) - \frac{A}{R^2} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \right. \\ &\left. + \frac{B}{R^2} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) - B(y_2 - y_1)(1 - (x_2 - x_1)^2 / R^2) \right] \mathbf{e}_1 \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Substituindo-se  $(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \dot{x}$ ,  $(x_2 - x_1) = x$  e  $(y_2 - y_1) = y$ , na equação acima, tem-se.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[ y \dot{\gamma} - \frac{A}{R^2} x^2 y \dot{\gamma} + \frac{B}{R^2} x^2 y \dot{\gamma} - 1/2 B y \dot{\gamma} \right] \\ \dot{x} &= y \dot{\gamma} + \left[ \frac{(B - A)}{R^2} x y \right] x \dot{\gamma} - 1/2 B y \dot{\gamma} \end{aligned}$$

De forma análoga tem-se para as direções 2 e 3, como a seguir.

$$\begin{aligned} (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \mathbf{e}_2 &= 1/2 \dot{\gamma} \left[ (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{A}{R^2} (y_2 - y_1)^2 (x_2 - x_1) - \frac{A}{R^2} (y_2 - y_1)^2 (x_2 - x_1) \right. \\ &\left. + \frac{B}{R^2} (y_2 - y_1)^2 (x_2 - x_1) - B(x_2 - x_1)(1 - (y_2 - y_1)^2 / R^2) \right] \mathbf{e}_2 \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Substituindo-se  $(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = \dot{y}$ ,  $(x_2 - x_1) = x$  e  $(y_2 - y_1) = y$ , na equação acima, tem-se.

$$\dot{y} = \left[ -\frac{A}{R^2} y^2 x \dot{\gamma} + \frac{B}{R^2} y^2 x \dot{\gamma} - 1/2 B x \dot{\gamma} \right]$$

$$\dot{y} = \left[ \frac{(B-A)}{R^2} xy \right] y\dot{\gamma} - 1/2Bx\dot{\gamma}$$

$$\begin{aligned} (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\mathbf{e}_3 = 1/2\dot{\gamma} & \left[ -\frac{A}{R^2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) - \frac{A}{R^2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) \right. \\ & \left. + \frac{B}{R^2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) + B(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)/R^2 \right] \mathbf{e}_3 \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Substituindo-se  $(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = \dot{z}$ ,  $(x_2 - x_1) = x$  e  $(y_2 - y_1) = y$ ,  $(z_2 - z_1) = z$ , na equação acima, tem-se.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left[ -\frac{A}{R^2} yxz\dot{\gamma} + \frac{B}{R^2} xyz\dot{\gamma} \right] \\ \dot{z} &= \left[ \frac{(B-A)}{R^2} xy \right] z\dot{\gamma} \end{aligned}$$

Substituindo-se a igualdade  $e = \frac{(B-A)}{R^2} xy$  e usando o raio médio das esferas e  $\dot{\gamma}$  para adimensionalizar as equações, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2}{1+\beta} [y + ex - 1/2By] \\ \dot{y} &= \frac{2}{1+\beta} [ey - 1/2Bx] \\ \dot{z} &= \frac{2}{1+\beta} [ez] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

em que  $\beta = b/a$ . Note que se  $\beta = 1$ , as equações recuperam as mesmas de Cunha & Hinch, 1996.

## Anexo C

### Equações de Mobilidades

Neste anexo será apresentado um estudo do comportamento das funções mobilidades associadas com o movimento transiente e longitudinal de duas partículas interagindo em escoamento cisalhante.

O cálculo das funções mobilidades são divididas em duas configurações de separação de partículas, a configuração longo alcance e a configuração curto alcance. A configuração de longo alcance compreende regiões cuja a interação entre as duas partículas não envolvem gradientes elevados. Na configuração de curto alcance as distâncias relativas entre as duas partículas pode ser menor que o raio maior delas e o escoamento entre elas apresenta um gradiente de velocidade elevados. As duas partículas tendem a se tocar, a um contanto permanente mecânico que é impedido por uma camada fina de fluido que lubrifica o movimento relativo das mesmas.

Numericamente, os cálculos de curto alcance exigem um refino maior de passos de tempo em relação às configurações de longo alcance.

A análise descrita a seguir foi desenvolvida no sentido de se avaliar a região de transição de curto e longo alcance de interação hidrodinâmica para um controle eficiente do passo de tempo variável de integração numérica. Foram avaliadas condições de trajetória para valores do parâmetro de polidispersidade da suspensão de  $\beta = 1$  e  $\beta = 0.5$

#### Ponto de transição para $\beta = 1$

As funções mobilidades que descrevem o movimento das partículas na direção da velocidade do escoamento cisalhante  $A$  são avaliadas no livro de Kim & Karrila, 1991:

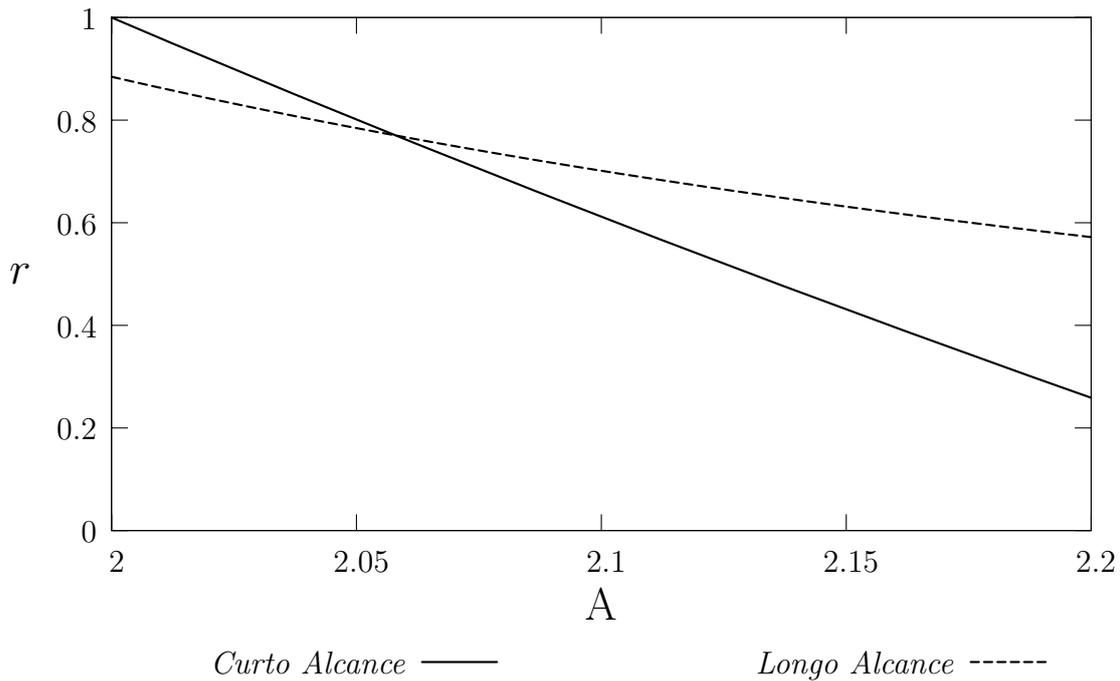


Figura C.1: Intersecção da função  $A(r)$ , para o domínio distante e de interação para  $\beta = 1$ .

*Curto alcance*

$$A = (16.31 - 7.15 * r)/r \quad (C.1)$$

*Longo alcance*

$$A(r) = 5.0/r^3 - 8.0/r^5 + 25.0/r^6 - 35.0/r^8 + 125.0/r^9 - 102.0/r^{10} + 12.5/r^{11} + 430.0/r^{12} \quad (C.2)$$

A Fig.C.1 mostra que o ponto de transição está próximo de  $r = 2.05$  Para a Função  $B(r)$ , tem-se:

*Curto Alcance*

$$B(r) = 2(0.41L^2 + 1.50L - 1.91)/[(L^2 + 6.04L + 6.33)] \quad (C.3)$$

em que

$$L = \text{Log} \left( \frac{1}{r - 2.0} \right) \quad (C.4)$$

*Longo Alcance*

$$B(r) = 1.0/3.0(16.0/r^5 + 10.0/r^8 - 36.0/r^{10} - 25.0/r^{11} - 36.0/r^{12}) \quad (C.5)$$

Em particular a Fig.C.2, mostra um ponto de interseção próximo a 2.1. Diante das terseções 2.05 e 2.1 o ponto 2.1 foi adotado como o ponto de transição entre as duas configurações, durante os cálculos das trajetórias.

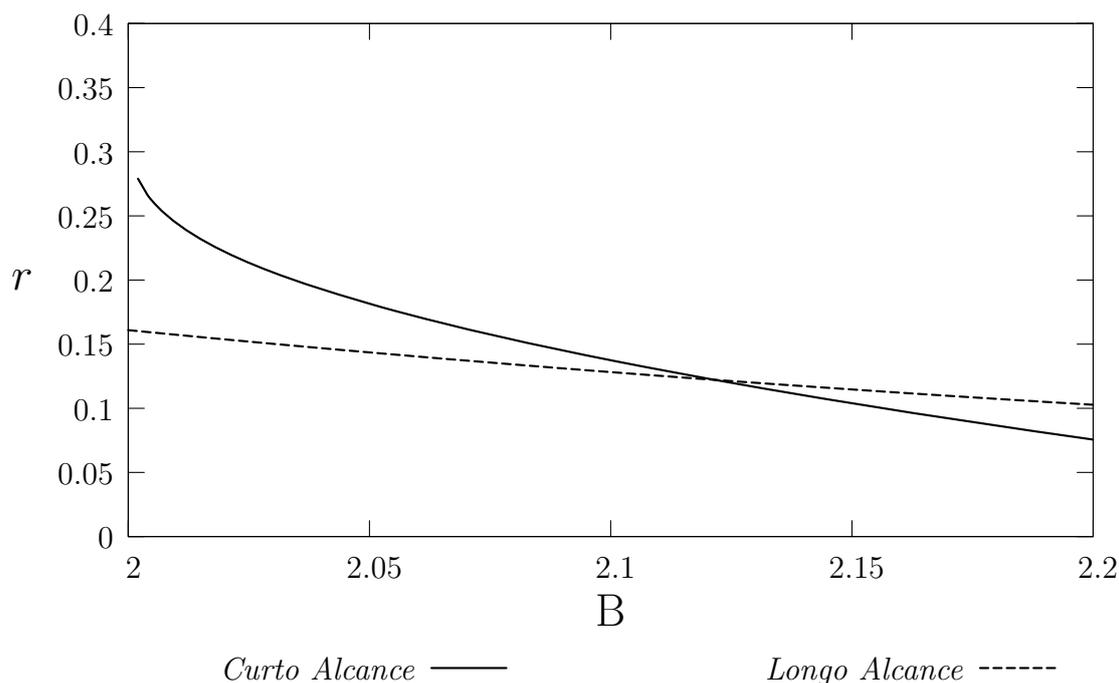


Figura C.2: Intersecção da função  $A(r)$ , para a configuração de longo alcance e interação de curto Alcance, para  $\beta = 1$ .

### Ponto de transição para $\beta = 0.5$

Novamente, as funções mobilidades para  $\beta = 0.5$  que descrevem o movimento longitudinal e transversal das partículas na direção da velocidade do escoamento cisalhante  $A$ , são calculadas segundo expressões avaliadas em Kim & Karrila, 1991:

*Curto Alcance*

$$A(r) = -4 \times 10^{-10}(-.41 \times 10^{12} + .25 \times 10^{12}r + 3.53 \times 10^9 rL - 5.29 \times 10^9 L)/r \quad (C.6)$$

em que

$$L = \log \left( \frac{1}{1.33 \times 10^9 r - 2.0 \times 10^9} \right) \quad (C.7)$$

*Far Field*

$$A(r) = 3.13/r^6 - 2.73/x^8 - 1.08/r^{10} + 5.96/r^{12} + 2.81/r^3 - 2.48/r^5 + 8.79/r^9 - 1.76/r^{11} \quad (C.8)$$

É visto da Fig. C.3, que a transição dos domínios ocorre aproximadamente em  $r = 1.6$

Agora, as funções mobilidades que descrevem o movimento na direção perpendicular ao gradiente de velocidade são calculadas pelas expressões a seguir

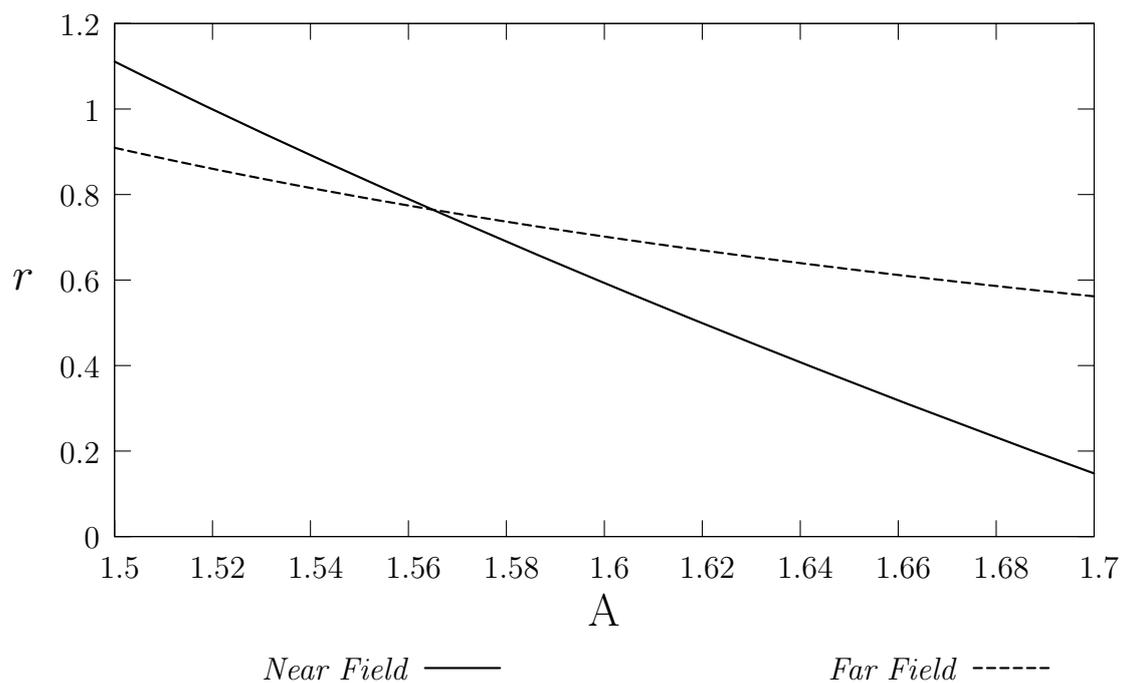


Figura C.3: Intersecção da função  $A(r)$ , para longo alcance e curto alcance, para  $\beta = 0.5$ .

*Curto alcance*

$$B(r) = .19 \times 10^{-1} (.76 \times 10^{11} + 7.02 \times 10^9 L + 1.62 \times 10^8 L^2) / (r(1.72 \times 10^9 + 1.47 \times 10^8 L + 3.13 L^2)) \quad (\text{C.9})$$

*Longo alcance*

$$B(r) = .26/r^8 + .71/r^{10} + .75/r^{12} + 1.66/r^5 - 1.39/r^{11}; \quad (\text{C.10})$$

Como no caso da função  $A(r)$ , nota-se pelo resultado mostrado na Fig.C.4 que a intersecção entre os dois domínios encontra-se aproximadamente em  $r = 1.6$

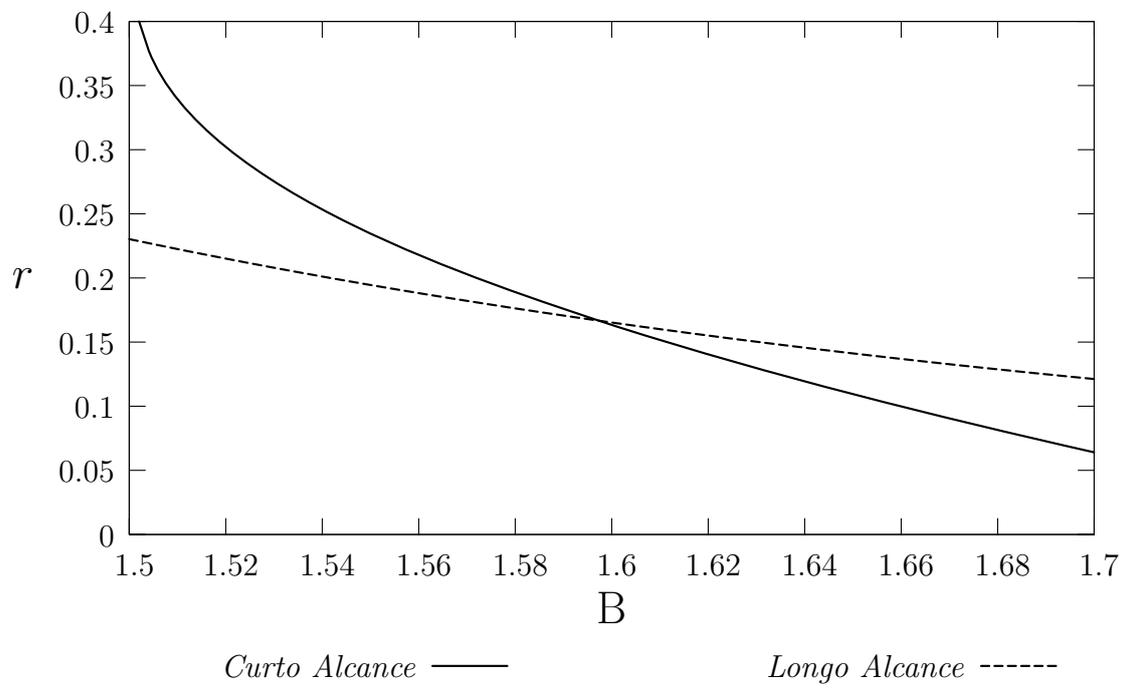


Figura C.4: Intersecção da função  $B(r)$ , para longo e curto alcance, com  $\beta = 0.5$ .

## Anexo D

### Incerteza de medição experimental

Neste apêndice será apresentado o cálculo usado para obter o valor da incerteza de medição associada as medidas apresentadas. Os métodos apresentados seguem a norma ISO para cálculo de incerteza de medição. Cada metodologia de cálculo da viscosidade tem uma incerteza de medição diferente.

#### D.1 Incerteza

Toda medida deve ser acompanhada de uma incerteza de medição. Ela determina um intervalo com uma probabilidade específica de conter a medida verdadeira da grandeza.

A incerteza instrumental é associada a medida de um instrumento, na Tab. D.1 tem-se as incertezas associadas aos instrumentos usados para a medição de diferentes grandezas presentes nos cálculos experimentais.

Se são realizadas inúmeras medições a incerteza associada ao valor da grandeza obtida pode ser o desvio padrão experimental da série de medidas, calculada pela equação a seguir

$$u(X) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2} \quad (\text{D.1})$$

em que o índice  $k$  indica a  $k$ -ésima medida da grandeza.

No geral a incerteza da grandeza é calculada pela incerteza combinada expressa pela equação a seguir

$$u(X) = \sqrt{u(X_a)^2 + u(X_i)^2} \quad (\text{D.2})$$

em que  $\Delta X_a$  é a incerteza associada a variações aleatórias captadas nas medições e

Tabela D.1: Instrumentos usados para as medições de grandezas básicas e incertezas associadas

Instrumento	Grandeza	Incerteza
Termopar	Temperatura	1 °C
Termômetro	Temperatura	0,5 °C
Balança	Massa	0,05 g
Proveta PIREX (1000mL)	Volume	$5,0 \times 10^{-6} m^3$
Proveta (10mL)	Volume	$0,05 \times 10^{-6} m^3$
Becker (100mL)	Volume	Vol $\times 5\%$
Régua milimetrada	Comprimento	$0,5 \times 10^{-3} m$
Trena	Comprimento	$0,5 \times 10^{-3} m$
Paquímetro	Comprimento	$0,025 \times 10^{-3} m$
Cronômetro	tempo	0,1 s

$\Delta X_i$  é a incerteza do instrumento exposta na Tab. D.1.

Para grandezas calculadas por funções de outras grandezas, a incerteza é calculada segundo a Eq. D.3

$$u(f(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 u(X_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 u(X_2)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)^2 u(X_n)^2}, \quad (\text{D.3})$$

em que  $f$  é uma grandeza a ser calculada como função das grandezas  $X_j$  e suas respectivas incertezas.

Segundo a norma ISO a incerteza associada a grandeza é a incerteza expandida calculada pela equação abaixo

$$U = \kappa u(f), \quad (\text{D.4})$$

em que  $\kappa$  é o fator de abrangência, no caso de distribuição normal é usado  $\kappa = 2$  para um intervalo de confiança de 95% e no caso da distribuição t-Student a tabela D.2.

## D.2 Incerteza para grandezas indiretas

Nesta seção serão mostrados os cálculos das incertezas das grandezas indiretas, ou seja, obtidas por meio de funções de outras grandezas, presentes nos experimentos.

Tabela D.2: Tabela de fator de abrangência  $\kappa$  para diferentes graus de liberdade  $\nu_{eff}$  da distribuição t-Student considerando-se um intervalo com probabilidade de 95%.

$\nu_{eff}$	$\kappa$	$\nu_{eff}$	$\kappa$	$\nu_{eff}$	$\kappa$	$\nu_{eff}$	$\kappa$
<b>1</b>	6.314	<b>11</b>	1.796	<b>21</b>	1.721	<b>40</b>	1.684
<b>2</b>	2.920	<b>12</b>	1.782	<b>22</b>	1.717	<b>50</b>	1.676
<b>3</b>	2.353	<b>13</b>	1.771	<b>23</b>	1.714	<b>60</b>	1.671
<b>4</b>	2.132	<b>14</b>	1.761	<b>24</b>	1.711	<b>80</b>	1.664
<b>5</b>	2.015	<b>15</b>	1.753	<b>25</b>	1.708	<b>100</b>	1.660
<b>6</b>	1.943	<b>16</b>	1.746	<b>26</b>	1.706	<b>120</b>	1.658
<b>7</b>	1.895	<b>17</b>	1.740	<b>27</b>	1.703	$\infty$	1.645
<b>8</b>	1.860	<b>18</b>	1.734	<b>28</b>	1.701		
<b>9</b>	1.833	<b>19</b>	1.729	<b>29</b>	1.699		
<b>10</b>	1.812	<b>20</b>	1.725	<b>30</b>	1.697		

### D.2.1 Massa específica

A massa específica é calculada pela equação

$$\rho = \frac{m}{V_m} \quad (\text{D.5})$$

em que  $m$  é a massa, e  $V_m$  é o volume ocupado pela massa  $m$ . Portanto a incerteza dessa grandeza é calculada por

$$u(\rho) = \sqrt{m^2 \frac{1}{V_m^4} u(V_m)^2 + \frac{1}{V_m^2} u(m)^2} \quad (\text{D.6})$$

em que  $u(m)$  e  $u(V_m)$  são as incertezas definidas na Tab. D.1 para balança e para a Bureta de 1000mL. Desconsideram-se variações aleatórias porque no caso dessas grandezas nas inúmeras observações não contatou-se variações maiores que a resolução do instrumento.

Para o cálculo da incerteza expandida admite-se um grau de liberdade infinito e uma um intervalo de confiança de 95%, portanto a incerteza associada à grandeza é calculada pela equação

$$U_\rho = 1,645u(\rho) \quad (\text{D.7})$$

### D.2.2 Vazão

A vazão é calculada pela equação a seguir

$$Q = V/t \quad (\text{D.8})$$

em que  $V$  é o volume de referência e  $t$  é o tempo necessário para um fluido preencher o volume  $V$ . Portanto a incerteza da vazão é calculada por

$$u(Q) = \sqrt{V^2 \frac{1}{t^4} u(t)^2 + \frac{1}{t^2} u(V)^2} \quad (\text{D.9})$$

em que  $u(t)$  é calculado pela incerteza combinada

$$u(t) = \sqrt{u(t_a)^2 + u(t_i)^2}, \quad (\text{D.10})$$

em que  $u(t_a)$  é a incerteza aleatória e  $u(t_i)$  a incerteza da Tab. D.1.  $u(V)$  é a incerteza para um becker de 100mL ou bureta de 10mL, dependendo do número de Reynolds do escoamento. No caso do becker de acordo com a Tab. D.1 tem-se que a incerteza pode ser reescrita da seguinte forma

$$u(Q) = \sqrt{V^2 \frac{1}{t^4} u(t)^2 + \frac{0,0025V^2}{t^2}}, \quad (\text{D.11})$$

no caso da proveta  $u(V)$  é o mesmo descrito na Tab. D.1.

Para a incerteza expandida, adota-se um grau de liberdade infinito uma vez que a incerteza envolve desvios aleatórios e incerteza associadas a instrumentos. Portanto a incerteza da vazão é

$$U_Q = 1,645u(Q) \quad (\text{D.12})$$

No caso do esvaziamento do tanque, estima-se a vazão considerando-se a diferença de altura da coluna de fluido no tanque e o tempo decorrido. Portanto a vazão é calculada por

$$Q = \frac{\pi \Delta h \mathbb{R}^2}{\Delta t}, \quad (\text{D.13})$$

em que  $\Delta h = h(t) - h_0$ , no caso a incerteza associada é calculada pela equação a seguir

$$u(Q) = \frac{\pi}{\Delta t} \sqrt{\mathbb{R}^4 u(\Delta h)^2 + 4\Delta h^2 \mathbb{R}^2 u(\mathbb{R})^2 + \frac{\mathbb{R}^4 \Delta h^2}{\Delta t^2} u(\Delta t)^2} \quad (\text{D.14})$$

### D.2.3 Pressão estimada na entrada do tubo durante esvaziamento

Durante o esvaziamento do tanque, tem-se a medição da altura de coluna de fluido a montante da entrada do tubo. Conhecendo-se a densidade do fluido, pode-se estimar a diferença de pressão entre a entrada do tubo e a saída pela equação a seguir

$$-\Delta P = \rho g \bar{h}(t) \quad (\text{D.15})$$

em que  $\rho$  é a densidade do fluido a escoar no tubo e  $\bar{h}(t) = \frac{h(t)+h_0}{2}$ . No caso a incerteza associada a essa estimativa é calculada por

$$u(\Delta P) = \sqrt{(g\bar{h}(t))^2 u(\rho)^2 + (\rho\bar{h}(t))^2 u(g)^2 + (\rho g)^2 u(h(t))^2} \quad (\text{D.16})$$

em que  $u(h(t))$  é o erro associado a régua milimetrada. No caso usa-se uma incerteza combinada

$$u_c \Delta P = \sqrt{u(\Delta P)^2 + u_\delta(\Delta P)^2} \quad (\text{D.17})$$

em que  $u_\delta(\Delta P)$  é a incerteza associada com a diferença de altura da coluna de água e no caso igual a

$$u_\delta(\Delta P) = (h_0 - \bar{h}(t))\rho g \quad (\text{D.18})$$

### D.2.4 Taxa de cisalhamento na parede de tubo

A incerteza da taxa de cisalhamento na Eq. 8.25 é calculada por

$$\Delta \dot{\gamma}_w = \left[ \left( \frac{d\dot{\gamma}_w}{dQ} \right)^2 u(Q)^2 + \left( \frac{3Q}{\pi R^4} \right)^2 \left( 3 + \frac{d \ln Q}{d \ln \Delta P} \right)^2 u(R)^2 + \left( \frac{d\dot{\gamma}_w}{d\Delta P} \right)^2 u(\Delta P)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{D.19})$$

em que

$$\frac{d\dot{\gamma}_w}{dQ} = -\frac{1}{\pi R^3} \left( 3 + \frac{d \ln Q}{d \ln \Delta P} \right) - \frac{Q}{\pi R^3} \left( \frac{dQ^{-1}}{d \ln \Delta P} \right), \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{d\dot{\gamma}_w}{d\Delta P} = -\frac{Q}{\pi R^3} \frac{d}{d \ln \Delta P} \left( \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\Delta P} \right), \quad (\text{D.21})$$

$u(R)$  é obtido pela incerteza do paquímetro,  $u(L)$  é obtido pela incerteza da régua ou trena,  $u(Q)$  é obtido pelos cálculos apresentados na sessão anterior e  $u(\Delta P)$  é calculado conforme a equação a seguir

$$\Delta P = \sqrt{u(\Delta P_i)^2 + u(\Delta P_p)^2} \quad (\text{D.22})$$

em que  $\Delta(\Delta P_i)$  é a incerteza associada a régua milimetrada,  $\Delta(\Delta P_p)$  é a incerteza de paralaxe associada a curvatura do menisco da coluna de água e diferenças causadas por mudança de ângulo de observação.

### D.2.5 Viscosidade obtida pelo escoamento em tubo

A viscosidade no caso do escoamento em tubo é calculada de três formas diferentes. Para o cálculo pela lei de Poiseuille da Eq. 8.2 a incerteza é calculada pela equação

$$\Delta\mu = \frac{\pi R^4}{8QL} \left[ u(\Delta P)^2 + (4R\Delta P)^2 u(R)^2 + \left( \frac{\Delta P}{Q} \right)^2 u(Q)^2 + \left( \frac{\Delta P}{L} \right)^2 u(L)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{D.23})$$

em que  $u(R)$  é obtido pela incerteza do paquímetro,  $u(L)$  é obtido pela incerteza da régua ou trena,  $u(Q)$  é obtido pelos cálculos apresentados na sessão anterior e  $\Delta P$  é calculado conforme a equação a seguir

$$\Delta P = \sqrt{u(\Delta P_i)^2 + u(\Delta P_p)^2} \quad (\text{D.24})$$

em que  $u(\Delta P_i)$  é a incerteza associada a régua milimetrada,  $u(\Delta P_p)$  é a incerteza de paralaxe associada a curvatura do menisco da coluna de água e diferenças causadas por mudança de ângulo de observação.

No caso da viscosidade obtida pela Eq. 8.26 a incerteza é calculada por

$$u(\mu) = \left( \frac{1}{2L\dot{\gamma}_w} \right) \left[ R^2 u(\Delta P)^2 + (\Delta P)^2 u(R)^2 + \left( \frac{R\Delta P}{L} \right)^2 u(L)^2 + \left( \frac{R\Delta P}{\dot{\gamma}_w} \right)^2 u(\dot{\gamma})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{D.25})$$

em que todas as incertezas já foram definidas.

No caso em que a viscosidade é calculada com o esvaziamento do tanque, tem-se a incerteza

$$u(\mu) = \frac{\pi R^3}{8L\mathbb{R}^2 \ln(h_0/h(t))} \left[ (4\rho g \Delta t)^2 u(R)^2 + (Rg\Delta t)^2 u(\rho)^2 + (R\rho\Delta t)^2 u(g)^2 + (R\rho g)^2 u(\Delta t)^2 + \left( \frac{R\rho g \Delta t}{L} \right)^2 u(L)^2 + \left( \frac{2R\rho g \Delta t}{\mathbb{R}} \right)^2 u(\mathbb{R})^2 + \left( \frac{R\rho g \Delta t}{\ln(h_0/h(t))} \frac{h(t)}{h_0} \right)^2 u \left( \frac{h_0}{h(t)} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{D.26})$$

em que  $u(g)$  é a incerteza associada a aceleração da gravidade obtida no laboratório de Metrologia dinâmica,  $u(\mathbb{R})$  é a mesma incerteza da régua milimetrada,  $u(h_0/h(t))$  também é uma incerteza associada ao comprimento medido por meio da régua milimetrada.

## Anexo E

# Produção da solução e emulsão para experimentos

Neste apêndice será apresentado como foram produzidas as soluções de poliacrilamida e a emulsão de óleo e água.

### E.1 Solução de poliacrilamida

A solução de poliacrilamida é feita usando-se o fluido industrial ART FLOC 1530 da Aratrop Industrial. O fluido vem com uma concentração de 34% de poliacrilamida.

Mistura-se o volume do fluido ART FLOC1530 ao respectivo volume de água necessário para obterem-se 100ppm e 200ppm de solução de poliacrilamida.

A solução deve ser agitada manualmente para evitar criação de bolhas durante aproximadamente 30 min para que os agregados de moléculas se distribuam pela solução.

Após esse tempo de agito, deixe a solução repousar até que fique completamente homogênea e pronta para o experimento.

### E.2 Emulsão

Define-se primeiramente qual a fração volumétrica de fase dispersa da emulsão. Assim, define-se um diâmetro aproximado das gotas desejadas para sua emulsão, no caso foi estipulado diâmetro de aproximadamente  $100\mu m$ . Com isso calcula-se o volume ocupado por cada gota com  $V = \pi D^3/6$ , com isso determina-se o número de gotas da fase dispersa  $N = V_{fasedispersa}/V$ .

Calcula-se a superfície total ocupada pelas gotas com  $S_T = \pi D^2 N$ , dessa forma obtém-se a área total de fase dispersa. Para soluções óleo/água a área ocupado por molécula de surfactante é de  $A = 30 \times 10^{-20} m^{-2}$ . Portanto o número de moléculas de surfactante necessárias para emulsão é de  $N_{surfactante} = S_T/A$ . A massa de surfactante é então calculada pela seguinte equação

$$m_s = \frac{MN}{\text{Número de Avogrado}}, \quad (\text{E.1})$$

em que  $M$  é a massa molecular da fase dispersa.

O surfactante é composto por TWEEN 80 e SPAN 80, para a obtenção do EHL de acordo com escala de Griffin. Sabe-se que emulsões óleo/água, possuem um EHL de aproximadamente 12. No caso os valores de EHL são  $EHL_{TWEEN} = 15$  e  $EHL_{SPAN} = 4,3$ . O EHL da emulsão é calculado por  $EHL_{Emulsao} = EHL_{TWEEN}\phi_{TWEEN} + EHL_{SPAN}\phi_{SPAN}$ .

Para a emulsão usada nos experimentos, usou-se 600mL de óleo mineral, 2400mL de água filtrada, 22,8g de TWEEN 80 e 8,89g de SPAN 80. Primeiro colocara-se os surfactantes no óleo e bateram-se usando-se uma batedeira de mão. Quando o fluido começou a ficar esbranquiçado, adicionou-se a água. Agitou-se por aproximadamente 15 minutos e em velocidade máxima do batedor até que a emulsão ficasse com aspecto branco leitoso e homogêneo.

Esperou-se algumas horas até que não houvesse mais espuma e iniciou-se o experimento. O procedimento usado pode ser encontrado em Paraíso *et al.*, 2005.

## Anexo F

### Tabelas dos dados experimentais

Neste apêndice será mostrado os dados para os cálculos dos gráficos apresentados de resultados experimentais apresentados neste trabalho.

Tabela F.1: Dados da água filtrada do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)	2			
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )	
2406,20	1323,90	1,44	25	
2628,46	1420,53	1,53	25	
2957,02	1517,17	1,70	25	
3159,96	1594,47	1,78	25	
3430,53	1671,78	1,85	25	
3623,80	1700,77	1,93	25	
3913,71	1826,40	2,07	25	

Tabela F.2: Dados da água com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Altura do tubo (mm)	98
Diâmetro do tubo (mm)	2
Temp. ( $^{\circ}C$ )	25
$h/h_0$	$\Delta t$
0,95	69
0,94	69
0,94	73
0,94	74
0,93	85
0,93	87
0,92	96
0,91	92
0,90	105

Tabela F.3: Dados da solução de poliacrilamida 100ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)	2		
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
2135.63	1478.51	0.33	23
2367.55	1555.82	0.39	24
2657.46	1652.45	0.45	25
2879.71	1797.41	0.53	25
3063.32	2000.34	0.60	25
3198.61	2164.62	0.66	25
3314.57	2299.91	0.73	25

Tabela F.4: Dados da solução de poliacrilamida 100ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)		5		
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )	
2377.21	1739.425	3.78	23	
2560.82	2000.339	4.33	24	
2667.12	1981.012	4.83	24	
2841.06	2048.656	5.30	24	
2957.02	2077.647	5.75	24	
3072.98	2232.262	6.00	24	
3246.93	2348.224	6.62	24	

Tabela F.5: Dados da solução de poliacrilamida 200ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)		2		
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )	
2415,87	1584,81	0,65	21	
2589,81	1720,10	0,74	21	
2928,03	1807,07	0,79	22	
3015,00	1942,36	0,89	22	
3353,23	2125,96	0,98	23	
3604,48	2270,92	1,04	23	
3768,75	2522,17	1,08	25	

Tabela F.6: Dados da solução de poliacrilamida 200ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)	5		
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
2164,62	1497,84	6,81	22
2319,23	1546,16	7,40	22
2531,83	1594,47	8,17	22
2676,78	1681,44	8,75	22
2841,06	1855,39	9,23	22
2995,68	1894,04	9,78	23
3092,31	1952,02	10,19	23

Tabela F.7: Dados da solução de poliacrilamida 200ppm do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro.

Altura do tubo (mm)	98	Altura do tubo (mm)	60
Diâmetro do tubo (mm)	2	Diâmetro do tubo (mm)	5
Temp. ( $^{\circ}C$ )	25	Temp. ( $^{\circ}C$ )	25
$h/h_0$	$\Delta t$	$h/h_0$	$\Delta t$
0.95	183	0.95	21
0.94	200	0.95	21
0.94	219	0.94	24
0.94	213	0.94	24
0.93	265	0.94	28
0.93	315	0.93	30
0.92	324	0.93	33
0.91	368	0.92	36
0.90	434	0.92	39

Tabela F.8: Dados da solução de poliacrilamida 300ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)      2			
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
2415.87	1584.81	0.65	18
2589.81	1720.10	0.74	18
2928.03	1807.07	0.79	18
3015.00	1942.36	0.89	18
3353.23	2125.96	0.98	18
3604.48	2270.92	1.04	18
3768.75	2522.17	1.08	18

Tabela F.9: Dados da solução de poliacrilamida 300ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)      5			
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
1743.07	1259.94	1.23	18
1913.59	1392.56	1.54	18
2065.16	1506.24	1.92	18
2254.63	1638.87	2.20	18
2425.15	1771.49	2.41	18
2595.66	1923.06	2.81	18
2860.91	2093.58	3.16	18

Tabela F.10: Dados da solução de poliacrilamida 300ppm do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro.

		Altura do tubo (mm)	98
Altura do tubo (mm)	98	Diâmetro do tubo (mm)	5
Diâmetro do tubo (mm)	2	Temp. ( $^{\circ}C$ )	18
Temp. ( $^{\circ}C$ )	18	$h/h_0$	$\Delta t$
$h/h_0$	$\Delta t$	0.95	40
0.95	380	0.94	43
0.94	397	0.94	50
0.94	515	0.94	53
0.89	744	0.93	63
0.91	1189	0.93	73
0.92	870	0.92	86
0.90	1145	0.91	93
		0.90	122

Tabela F.11: Dados da solução de poliacrilamida 400ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm) 2			
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
2339.89	1458.88	0.12	18
2387.25	1487.30	0.13	18
2624.08	1582.03	0.16	18
2813.55	1619.92	0.17	18
2984.07	1676.76	0.20	18
3040.90	1771.49	0.25	18
3097.74	1828.33	0.27	18
3154.58	1885.17	0.29	18

Tabela F.12: Dados da solução de poliacrilamida 400ppm do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)	5		
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
1743.07	1259.94	0.74	18
1894.64	1506.24	0.97	18
1970.43	1582.03	1.15	18
2216.73	1790.44	1.42	18
2311.47	1847.28	1.60	18
2444.09	1942.01	1.89	18
2860.91	2207.26	2.16	18

Tabela F.13: Dados da solução de poliacrilamida 400ppm do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro.

Altura do tubo (mm)	98	Altura do tubo (mm)	98
Diâmetro do tubo (mm)	2	Diâmetro do tubo (mm)	5
Temp. ( $^{\circ}C$ )	18	Temp. ( $^{\circ}C$ )	18
$h/h_0$	$\Delta t$	$h/h_0$	$\Delta t$
0.95	473	0.95	99
0.94	628	0.94	21
0.94	750	0.94	79
0.94	821	0.94	80
0.93	899	0.93	103
0.93	1089	0.93	116
0.98	352	0.92	143
		0.91	161

Tabela F.14: Dados da emulsão 20% óleo/água do escoamento com tomada de pressão em tubo de 5mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)      5			
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
2164,62	1497,84	6,81	22
2319,23	1546,16	7,40	22
2531,83	1594,47	8,17	22
2676,78	1681,44	8,75	22
2841,06	1855,39	9,23	22
2995,68	1894,04	9,78	23
3092,31	1952,02	10,19	23

Tabela F.15: Dados da emulsão 20% óleo/água do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)      2			
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
2415,87	1584,81	0,65	21
2589,81	1720,10	0,74	21
2928,03	1807,07	0,79	22
3015,00	1942,36	0,89	22
3353,23	2125,96	0,98	23
3604,48	2270,92	1,04	23
3768,75	2522,17	1,08	23

Tabela F.16: Dados da emulsão 20% óleo/água do esvaziamento de tanque com tubo de 2mm e 5mm de diâmetro.

Altura do tubo (mm)	98	Altura do tubo (mm)	98
Diâmetro do tubo (mm)	2	Diâmetro do tubo (mm)	5
Temp. ( $^{\circ}C$ )	20	Temp. ( $^{\circ}C$ )	23
$h/h_0$	$\Delta t$	$h/h_0$	$\Delta t$
0,95	120	0.95	13
0,94	128	0.94	14
0,94	137	0.94	16
0,94	135	0.94	14
0,93	157	0.93	17
0,93	173	0.93	18
0,92	182	0.92	19
0,91	188	0.91	19
0,91	210	0.90	21

Tabela F.17: Dados da emulsão 20% água/óleo do escoamento com tomada de pressão em tubo de 2mm de diâmetro.

Diâmetro do tubo (mm)	2		
$\Delta P_1$ (Pa)	$\Delta P_2$ (Pa)	Q ( $m^3/s \times 10^{-6}$ )	Temp. ( $^{\circ}C$ )
2029.33	1159.62	0.18	18
2164.62	1372.21	0.18	18
2261.25	1546.16	0.20	18
2396.54	1662.12	0.23	18
2531.83	1797.41	0.22	18
2705.77	1913.37	0.26	18
3034.33	2048.66	0.30	18

Tabela F.18: Dados da emulsão 20% água/óleo do esvaziamento de tanque com tubo de 5mm de diâmetro.

Altura do tubo (mm)	98
Diâmetro do tubo (mm)	5
Temp. ( $^{\circ}C$ )	18
$h/h_0$	$\Delta t$
0.95	171
0.94	171
0.94	189
0.91	257
0.96	151
0.93	245
0.92	261
0.91	284
0.91	320

Tabela F.19: Dados obtidos para medição da densidade dos fluidos

Água Filtrada				
T(°C)	massa (g)	Volume (mL)	Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	
18	241,5	250	966	
23	984,5	1000	984,5	
25	985,4	1000	985,4	
Solução polimérica				
25	986,5	1000	986,5	
Emulsão (O/A)				
22	958	1000	958	
Emulsão (A/O)				
18	887	1000	887	

Tabela F.20: Medidas de tempo em viscosímetro de Ostwald SIZE 50 com água mineral.

T (°C)	Size	50	Constante (cSt/s)	0,004
	Tempo (s)			
	18	23	25	
	262	243	214	
	262	243	215	
	262	242	212	
	263	240	217	
	263	239	214	
	263	238	214	
	264	239	214	
	264	239	214	
	263	238	213	
	264	238	213	
Média	263	239,9	214	