

Thiago Velozo Trufini

*Integrabilidade na gravitação bidimensional*

Brasília

Julho de 2012

Thiago Velozo Trufini

*Integrabilidade na gravitação bidimensional*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Arsen Melikyan

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

Julho de 2012

”The more we learn about the world, and the deeper our learning, the more conscious, specific, and articulate will be our knowledge of *what we do not know*, our knowledge of our ignorance. For this, indeed, is the main source of our ignorance — the fact that our knowledge can be only finite, while our ignorance must necessarily be infinite”

*Karl Popper*, *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*, 1963

”Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail again. Fail better.”

*Samuel Beckett*, *Worstward Ho*, 1983

## Agradecimentos

Ao meu professor e orientador Arsen Melikyan, pela paciência (muita!) e disponibilidade que me ajudou a desenvolver o trabalho de forma efetiva e divertida.

Ao meu professor e co-orientador Aleksandr Pinzul pelas discussões e referências que me ajudaram a desenvolver a dissertação.

À toda minha família, pelo imenso apoio prestado. Sem eles provavelmente não estaria onde estou agora.

Aos meus amigos, pelos momentos de descontração e diversão. Ombros amigos foram essenciais ao meu equilíbrio.

À minha amiga e companheira Priscylla Amora, por aguentar meus desabafos, pelas discussões motivadoras e por me tornar feliz do jeito que sou.

E finalmente à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior) pelo auxílio financeiro prestado, que me ajudou a desenvolver esses e outros trabalhos ao longo do meu mestrado.

## Resumo

Modelos bidimensionais de gravitação surgem naturalmente na descrição de diversos fenômenos físicos. Grande parte desses modelos visam entender o processo de criação do Universo no cenário pré Big-Bang, provendo também testes não-triviais no contexto da teoria quântica de campos.

A gravitação bidimensional acoplada com o campo dilaton (G2dD) vem sendo bastante estudada. Ela se mostra como um sistema integrável na teoria clássica, assim, a estruturação da integrabilidade nos possibilita entender as soluções clássicas não-perturbativas e assim proceder com a quantização. A G2dD é bastante similar com o modelo sigma não linear (SNL), que também é integrável. No entanto, diferente da G2dD, o SNL não é quantizável usando a teoria de sistemas integráveis - isso ocorre graças ao comportamento ambíguo entre os parênteses de Poisson de suas matrizes de monodromia, que codificam todas as informações do modelo integrável.

Recentemente, um interessante modelo da gravitação quântica foi proposta por Hořava. Esse modelo, chamado de Hořava-Lifshitz (HL), vem sendo extensivamente estudado e explorado no meio científico. Ele propõe alterações na gravitação de Einstein de forma que a mesma seja renormalizável e, conseqüentemente, quantizável. Para ser uma teoria coerente, a HL deve tender a relatividade padrão de Einstein nos limites de baixas energias. Outro fato importante é que para altas energias a HL se transforma numa teoria bidimensional efetiva.

Utilizando o HL como uma motivação, estudamos a gravitação bidimensional através do formalismo da Integrabilidade. Calculamos os parênteses de Poisson entre as matrizes de monodromia do modelo principal do campo quiral (PCM), que é um tipo de SNL bidimensional, e obtivemos a ambigüidade dessa estrutura. O mesmo foi feito para a G2dD, cujo resultado foi único e viável. Comparamos então as características e peculiaridades entre o PCM e a G2dD e observamos o papel fundamental que o dilaton possui: viabilizar a estrutura de Poisson, tornando o modelo quantizável pelo formalismo da integrabilidade.

Visando tornar o trabalho acessível a todo público interessado nessa área da Física, fizemos uma revisão sobre grande parte dos pontos cruciais da teoria que são importantes para o entendimento do nosso resultado. Achemos necessário também preencher nosso trabalho com muita álgebra, levando em consideração o número elevado de pontos sutis.

# Abstract

Two-dimensional models of gravitation arise naturally in the description of various physical phenomena. Most of these models aim to understand the process of creating the universe in the pre-Big Bang scenario, as well as provide various non-trivial tests in the context of the quantum field theory.

The two-dimensional gravity coupled with dilaton field (G2dD) has been a subject of intense research in the recent years. It has integrable structure in the classical theory, and, therefore, allows one to understand both the classical non-perturbative solutions, as well as proceed with the quantization of the model. The G2dD has a similar to the nonlinear sigma model (SNL) structure, which is also integrable on the classical level. However, unlike G2dD, SNL is not quantizable easily using the theory of integrable systems - this is due to the ambiguous behavior of the algebra of the monodromy matrices, which encode the complete information of integrable structure.

Recently, an interesting model of quantum gravity has been proposed by Hořava. This model, called Hořava-Lifshitz (HL), has been extensively studied and explored in the scientific community in the last few years. He proposed changes in Einstein's gravitation theory so that it is renormalizable and therefore makes sense in the context of the quantum field theory. To be a coherent theory, HL must tend to the standard Einstein's relativity in the low-energy limits, and one of the consequences of the HL theory is the important feature that for high energies HL becomes effectively a two-dimensional theory.

Using the HL as a motivation, we study two-dimensional gravitation utilizing the formalism of integrability. We calculate the Poisson brackets between monodromy matrices of the principal chiral model (PCM), which is a type of two-dimensional SNL, and show how the ambiguity of this structure appears. The same is done for G2dD, where we show that the ambiguity is removed, and the result is unique and well-defined. We then compare the characteristics and peculiarities between the PCM and G2dD and note the key role played by the dilaton field, due to which the Poisson structure becomes regularized, making the model quantizable in the framework of integrable models.

Aiming to make the work accessible to everyone interested in this area of physics, we review in details most of the crucial points, that are important for understanding of our results, and include various non-trivial calculations explicitly, which should be especially useful for interested students.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 1
<b>2</b>	<b>Integrabilidade</b>	p. 5
2.1	Formalismo Hamiltoniano	p. 5
2.2	Integrabilidade de Liouville e variáveis angulo-ação	p. 7
2.3	Integrabilidade na Teoria Clássica de Campos	p. 15
2.3.1	Estrutura de Poisson	p. 16
2.3.2	Integrabilidade e a Teoria Clássica de Campos	p. 19
2.4	Alguns modelos importantes	p. 21
2.4.1	Sólitons	p. 21
2.4.2	O modelo de Schrödinger não-linear (NLS)	p. 24
2.5	A representação de Lax e o MEIC	p. 25
2.6	Quantidades conservadas	p. 29
2.7	Matriz $r$ clássica	p. 35
<b>3</b>	<b>Integrabilidade na gravitação bidimensional</b>	p. 46
3.1	Modelo do campo quirial principal - PCM	p. 47
3.2	Campo gravitacional bidimensional acoplado com o campo do dilaton	p. 56
3.2.1	Par de Lax e cargas conservadas	p. 63
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	p. 75
4.1	Projeto em andamento	p. 76
	<b>Apêndice A – Alguns comutadores importantes</b>	p. 77
	<b>Apêndice B – Relações envolvendo o parâmetro espectral da G2dD</b>	p. 79

**Referências Bibliográficas**

p. 80

**Referências**

p. 80



# 1 *Introdução*

Os métodos e aplicações da teoria de sistemas integráveis são aceitos como os meios mais eficazes na análise de uma vasta gama de fenômenos físicos bidimensionais - desde a física da matéria condensada [1] com os modelos de sine-gordon, Schroedinger não linear, 6-vértices não linear, 8-vértices não linear, até os recentes progressos na teoria de cordas [2-10] com a correspondência AdS/CFT e a própria gravitação quântica com a teoria de Hořava-Lifshitz, como veremos adiante. Assim, a Integrabilidade dispõe de um robusto arcabouço para o estudo de diversos modelos que são até inacessíveis por meio de outros formalismos. A idéia da Integrabilidade é obter soluções exatas de sistemas através de quadraturas (série de operações algébricas e resolução de integrais), revelando uma perspectiva física não perturbativa completa e rica.

Neste trabalho estudaremos um pouco do *critério de Liouville* para definir a integrabilidade. Esse critério baseia-se no conhecido *teorema de Liouville*, proposto inicialmente no contexto do formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica. Assim, para um sistema ser integrável à Liouville, ele deve ser caracterizado por um espaço de fase  $2n$  dimensional possuindo  $n$  quantidades independentes em involução. Existe então uma transformação canônica que permite reescrever as equações de movimento do sistema em termos de novas variáveis, denominadas ângulo-ação. Assim, a Hamiltoniana sendo independente dessas novas variáveis, fica trivial a integração das equações de Hamilton. Observe que originalmente o teorema é válido somente para sistemas finitos e discretos, no entanto pode ser estendido para o caso infinito-dimensional de campos.

O *par de Lax* e a *condição de curvatura nula* (CCN) são conceitos intimamente ligados a integrabilidade. A estrutura de Lax foi introduzida por *Peter Lax* [11] em 1968 ao discutir a física dos *sólitons* em meios contínuos e consiste basicamente em encontrar uma representação alternativa das equações de movimento de um dado modelo. Os elementos dessa estrutura são um par de operadores diferenciais  $L$  e  $M$  dependentes de um parâmetro temporal que satisfazem uma equação de compatibilidade (*equação de Lax*). Essa estruturação de Lax vale para sistemas finitos e infinitos e contínuos, dessa forma, é utilizado em teorias de campo.

Embora existam outros métodos [12] para se obter o par de Lax, em geral deve-se 'adivinhar' uma expressão para  $L$  levando a um  $M$  que satisfaça a equação de Lax. Esse inconveniente em procurar expressões adequadas para o par de operadores foi amenizada por uma técnica proposta

por Ablowitz *et al* (1987). Através de um sistema sobredeterminado de equações diferenciais ordinárias eles obtiveram uma expressão matricial, equivalente a equação de Lax, chamada de *condição de curvatura nula* (CCN). Essa expressão, por conter matrizes ao invés de operadores diferenciais, é mais fácil de trabalhar e assim podemos, por processos mais simples de dedução, encontrar uma expressão para  $L$  tal que a CCN represente a equação de movimento do sistema. Faddeev [13] também é um nome recorrente e fundamental nessa área pois, além de colaborar com o desenvolvimento da CCN, descreveu diversos modelos utilizando esse formalismo.

Uma outra quantidade relevante nesse contexto é a *matriz de monodromia*  $T_L(\lambda)$ . Essa matriz, que depende de um parâmetro espectral arbitrário  $\lambda$ , é definida com o objetivo de transladar soluções. Como veremos adiante, o traço dessa quantidade nos leva a uma família de quantidades conservadas. Conseqüentemente, todas as propriedades espectrais do modelo estão codificadas no traço da matriz de monodromia. Vale a pena destacar também, que ao calcularmos os parênteses de Poisson entre essas matrizes  $T_L$ , pode-se provar a involução e a conseqüente integrabilidade do modelo.

O interessante do formalismo de Lax ou da CCN é que caso um modelo seja passível desses tipos de representação, ele é automaticamente integrável. Utilizamos essa estrutura no nosso trabalho. Obtemos os pares de Lax e os respectivos parênteses de Poisson entre as matrizes de monodromia de dois modelos bidimensionais: modelo principal do campo quiral (PCM) e a gravitação bidimensional acoplada ao campo dilaton (G2dD).

Como veremos adiante, o PCM é um tipo de campo quiral que possui valores num grupo de Lie compacto. Ele já vem sendo estudado há bastante tempo no meio científico, possuindo assim uma literatura exaustiva (ver [14]). A característica central desse modelo é a não ultralocalidade de sua álgebra, que se estende aos parênteses de Poisson, possuindo assim termos que divergem no infinito, violando a identidade de Jacobi. Por motivos didáticos vamos comprovar essa qualidade anômala do PCM - teremos dessa forma, uma metodologia de resolução a ser aplicada e comparada com outros modelos.

O interesse de se estudar modelos reduzidos a duas dimensões reside no fato de surgirem características que no modelo original não ocorria, além é claro, de também serem mais simples e representativos para o desenvolvimento de novas soluções. A teoria de Einstein por exemplo ao ser reduzida, se torna integrável e possui soluções exatas [15], já a de Hořava-Lifshitz ainda é nebulosa, mas possui características bem interessantes e promissoras de serem estudadas<sup>1</sup>. Particularmente na G2dD, que é uma redução dimensional de teorias gravitacionais, surge um campo escalar acoplado, o dilaton, resultante da compactificação das métricas de dimensões

---

<sup>1</sup>De forma bem peculiar, a teoria de Hořava-Lifshitz reduzida possui, além de outros campos, dois campos acoplados: dilaton e o modo escalar, de forma que o mecanismo da integrabilidade ainda não foi utilizada na literatura para caracterizar esse modelo reduzido.

superiores, que é essencial para a quantização desse modelo. Como veremos ao longo do trabalho, esse fator retira a ambiguidade provocada pela não ultralocalidade dos parênteses de Poisson, tornando a teoria viável por essa estruturação.

A teoria da gravitação prevista pela Relatividade Geral não é renormalizável [16]. Dessa forma, apesar de ter sucesso como uma teoria clássica da gravitação, sendo uma teoria efetiva no infravermelho (IR - baixas energias), ela é quebrada no ultravioleta [17] (UV - altas energias). Assim, na escala do UV estamos impossibilitados de descrever interações gravitacionais e o próprio espaço-tempo; conseqüentemente não podemos quantizá-la utilizando técnicas de quantização convencionais.

Em 2009, Hořava [18] propôs modificações na teoria gravitacional de Einstein visando torná-la renormalizável e quantizável. Essas modificações, chamadas pela literatura como gravitação de Hořava-Lifshitz (HL), tem como base fundamental desistir da invariância de Lorentz ao introduzir uma escala de coordenadas diferente no UV, a chamada *escala anisotrópica ou escala de Lifshitz* [19]. Não vamos entrar em mais detalhes quantitativos ao longo deste trabalho acerca da HL, mas vale a pena destacar que: nos limites do UV, a HL possui uma estrutura bidimensional [20] e nos limites do IR a HL deve resultar na Relatividade Geral proposta por Einstein.

Em um próximo trabalho vamos utilizar de fato a teoria HL. A idéia é proceder com a redução bidimensional desse modelo, analisando a álgebra resultante, e verificar se o mesmo é integrável. Como sabemos que no limite do IR o HL resulta na teoria da relatividade geral, iremos então para esse limite no modelo HL reduzido comparar com a G2dD, obtida nesta dissertação.

A estruturação deste trabalho é simples e foi feita em dois capítulos e apêndices.

No capítulo 2 englobamos um resumo de grande parte da teoria para a compreensão dos resultados. Abordamos o conceito de Integrabilidade, primordial no nosso trabalho, bem como exemplos de modelos integráveis que são bastante aplicáveis em todas as áreas da Física. Estendemos a integrabilidade para campos e obtivemos a teoria para o caso simplificado mas representativo do modelo de Schroedinger não linear.

No capítulo 3 abordamos os resultados do nosso trabalho. Através da equação de movimento do PCM e da G2dD estudados na literatura, obtivemos os respectivos pares de Lax e matrizes de monodromia. Assim, calculando os parênteses de Poisson entre as quantidades obtidas, pudemos comprovar ou não a possibilidade de quantização dos modelos, bem como o funcionamento do dilaton para o caso da G2dD.

Finalmente na conclusão, discutimos os resultados obtidos e nos apêndices algumas contas

que podem não ser triviais para o leitor.

O leitor vai observar também o volume de contas contidas ao longo dos capítulos. Achamos necessário essa abordagem para assim estabelecer a álgebra e o formalismo que é bem disperso na literatura correlata.

## 2 Integrabilidade

Um sistema é considerado integrável classicamente quando ele é modelado por equações diferenciais não lineares (EDNL) que podem ser resolvidas analiticamente. Isso implica que a solução pode ser reduzida a um número finito de operações algébricas e integrações (quadraturas). Neste capítulo introduziremos a integrabilidade clássica no contexto de sistemas dinâmicos, com o objetivo de obtermos soluções explícitas de equações de movimentos que serão importantes neste trabalho.

### 2.1 Formalismo Hamiltoniano

No contexto da mecânica clássica, o movimento de um sistema com  $n$  graus de liberdade é descrito por uma trajetória imersa no espaço de fase  $M$  com dimensão  $2n$  e com as coordenadas locais:

$$\xi = (p_j, q_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Assim sendo, o espaço de fase pode ser visto localmente como um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2n}$  mas globalmente pode ser uma variedade topológica não trivial (veja [21]), como uma esfera ou um toro por exemplo. As suas variáveis dinâmicas são funções  $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = f(p, q, t)$ , onde  $t$  é um parâmetro denominado 'tempo'.

Vamos considerar duas funções  $f, g : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Podemos introduzir o parênteses de Poisson da seguinte forma:

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \quad (2.1.1)$$

A partir dessa definição podemos verificar que as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} && \Rightarrow && \text{Antissimetria} \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0 && \Rightarrow && \text{Identidade de Jacobi} \\ \{f_1, \alpha f_2 + \beta f_3\} &= \alpha \{f_1, f_2\} + \beta \{f_1, f_3\} && \Rightarrow && \text{Linearidade} \\ \{f_1, f_2 f_3\} &= \{f_1, f_2\} f_3 + f_2 \{f_1, f_3\} && \Rightarrow && \text{Regra de Leibniz} \end{aligned}$$

Pode-se verificar também que as coordenadas locais  $\xi$  satisfazem as relações de comutação canônicas:

$$\{p_j, p_k\} = 0, \quad \{q_j, q_k\} = 0, \quad \{q_j, p_k\} = \delta_{jk} \quad (2.1.2)$$

As funções  $f$  e  $g$  estão em involução caso seja satisfeita a seguinte relação:

$$\{f, g\} = 0$$

Vamos considerar uma Hamiltoniana  $H = H(p, q, t)$ , onde usualmente omitimos o  $t$  (já que de forma geral há uma independência temporal). A dinâmica do sistema é determinada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \quad \forall \quad f = f(p, q, t) \quad (2.1.3)$$

Escolhendo  $f = p_j$  ou  $f = q_j$  obtemos as equações de Hamilton:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \text{e} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (2.1.4)$$

que compõem um sistema<sup>1</sup> de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem. Observamos que esse sistema (2.1.4) é determinístico, já que  $(p_j(t), q_j(t))$ , para um tempo arbitrário  $t$ , são determinados univocamente pelas  $2n$  condições iniciais  $(p_j(0), q_j(0))$ . Uma outra implicação da equação (2.1.4) é que os elementos de volume no espaço de fase  $M$  são conservados.

**Definição 2.1** Uma função  $f = f(p_j, q_t, t)$  é dita constante de movimento<sup>2</sup> se satisfizer  $\dot{f} = 0$ <sup>3</sup> quando as equações (2.1.4) forem válidas; ou, equivalentemente,

$$f(p(t), q(t), t) = c \quad \text{onde } c \text{ é uma constante,} \quad (2.1.5)$$

se  $p(t)$  e  $q(t)$  são soluções de (2.1.4)

Quando nos deparamos com um sistema de equações do tipo (2.1.4) só podemos resolvê-lo caso haja um número suficiente de constantes de movimento, já que a mesma elimina uma das equações do sistema. Assim sendo, é feita a redução de ordem desse sistema.

Considere uma constante de movimento  $f$  que não depende explicitamente do tempo e que, dessa forma, defina uma hipersuperfície  $f(p, q) = c$  em  $M$  (figura 1). Duas hipersuperfícies correspondentes a duas cargas conservadas se interceptam em uma superfície com codimensão 2 em  $M$ . Geralmente, a trajetória é descrita sobre uma superfície de dimensão  $2n - L$ , onde  $L$  é o número de cargas conservadas independentes. Se  $L = 2n - 1$ , então essa superfície é uma

<sup>1</sup>Esse sistema é essencialmente equivalente às equações de movimento de Newton. O formalismo hamiltoniano permite então uma visão mais geométrica da mecânica clássica e é o ponto inicial para a quantização do sistema

<sup>2</sup>ou primeira integral, ou integral de movimento, ou carga conservada

<sup>3</sup> $\dot{\square}$  representa derivada temporal de  $\square$

solução de (2.1.4).

Dessa forma, construir uma solução de (2.1.4) implica na construção dessas hipersuperfícies - e, para isso, é necessário obter um número correspondentes de integrais de movimento. Podemos verificar que, dada duas cargas conservadas que independem explicitamente de  $t$ , sempre podemos usar seus parênteses de Poisson para definir uma terceira constante de movimento<sup>4</sup>. Outra forma, mais geral, de se obter algumas integrais de movimento, é utilizar o teorema de Noether (relacionadas a algumas simetrias do hamiltoniano como a de translação temporal, rotações, etc). A obtenção das cargas conservadas dessa maneira, no entanto, geralmente não são suficientes para prosseguirmos.

Para exemplificar o que foi dito, vamos considerar o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.1** Considere o seguinte hamiltoniano de um sistema com 1 grau de liberdade em um espaço de fase  $M = \mathbb{R}^2$ :

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$$

Temos de 2.1.4 que

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad e \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

Como o hamiltoniano é uma constante de movimento<sup>5</sup>, teremos:

$$\frac{1}{2}p^2 + V(q) = E \quad \text{constante, denominada energia (correspondente a uma hipersuperfície)}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \dot{q} = p = \pm\sqrt{2[E - V(q)]} &\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{2[E - V(q)]} \\ &\Rightarrow t = \pm \int \frac{dq}{\sqrt{2[E - V(q)]}} \end{aligned}$$

Dessa forma, para obter a solução teríamos que resolver a integral acima e inverter a relação para assim obtermos  $q(t)$ . Observe que apesar desse passo nem sempre ser possível, o sistema não deixa de ser integrável.

## 2.2 Integrabilidade de Liouville e variáveis angulo-ação

Como foi visto anteriormente, dado um sistema do tipo 2.1.4, na maioria das vezes é suficiente saber as  $n$  (ao invés de  $2n - 1$ ) cargas conservadas, já que as mesmas reduzem a ordem do sistema em 2. Partindo desse pressuposto, podemos introduzir a seguinte definição de *sistema integrável*.

<sup>4</sup>Essa conclusão segue da identidade de Jacobi e o fato de que todas as integrais de movimento comutam com o hamiltoniano

<sup>5</sup> $\{H, H\} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$

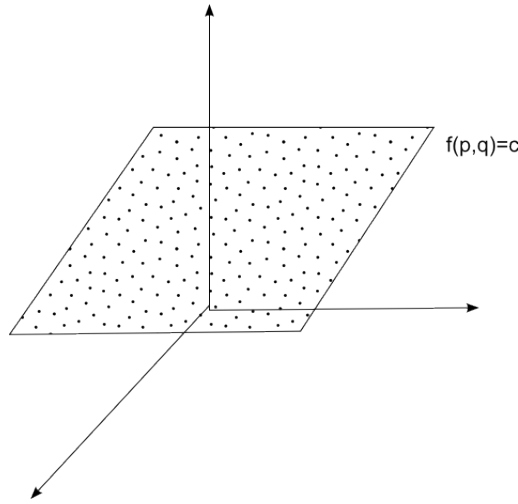


Figura 1: Tipo de superfície nível

**Definição 2.2** Um sistema integrável consiste de um espaço de fase par (de dimensão  $2n$ ) associado com  $n$  funções independentes globalmente definidas<sup>6</sup>  $f_1, f_2, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  tais que as mesmas estejam em involução:

$$\{f_j, f_k\} = 0 \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.1)$$

A partir do *Teorema de Arnold-Liouville* podemos verificar que os sistemas integráveis permitem obter equações de movimento solúveis. Antes de introduzir este teorema, vamos abordar um outro aspecto que se utiliza da liberdade em escolha de coordenadas nas equações de Hamilton.

A *transformação canônica* é feita a partir de uma transformação de coordenadas no espaço de fase do tipo  $Q_k = Q_k(p, q)$  e  $P_k = P_k(p, q)$  em que ocorra a preservação dos parênteses de Poisson (e conseqüentemente as equações de Hamilton):

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_k}$$

$$\forall f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Introduzindo uma função geradora  $S(q, P, t)$ , tal que  $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial P_k}) \neq 0$ , podemos construir uma transformação canônica escolhendo:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

<sup>6</sup>Os gradientes  $\nabla f_j$  são linearmente independentes no espaço tangente a qualquer ponto em  $M$



A idéia por trás do *Teorema de Arnold-Liouville* a seguir, é 'procurar' transformações canônicas tais que as novas variáveis  $H(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , por exemplo impliquem em:

$$\begin{aligned}\dot{P}_k(t) &= -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \Rightarrow P_k(t) = \text{constante} = P_k(0) \text{ e,} \\ \dot{Q}_j(t) &= \frac{\partial H}{\partial P_k} \Rightarrow Q_k(t) = Q_k(0) + t \frac{\partial H}{\partial P_k}\end{aligned}$$

A dificuldade desse processo reside justamente em encontrar funções geradores para tais transformações canônicas. Vale a pena citar também que decidir se um dado hamiltoniano é integrável ou não (sem ter nenhum conhecimento das  $n$  involuções do sistema) é um problema ainda aberto a pesquisas.

Liouville provou que se em um sistema com  $n$  graus de liberdade, é sabido as  $n$  cargas conservadas em involução, então esse sistema é integrável por quadraturas

**Teorema 2.1 (Teorema de Arnold-Liouville)** *Suponha que exista  $n$  funções em involuções em uma variedade  $M$  de dimensão  $2n$ :*

$$f_1, f_2, \dots, f_n \quad \{f_i, f_j\} \equiv 0, \quad \text{com } i, j = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \text{Sistema integrável,}$$

e que:

$$M_f := \{(p, q) \in M; f_k(p, q) = c_k\}, \quad \text{onde } c_k = \text{constante e } k = 1, 2, \dots, n$$

seja uma superfície de nível de dimensão  $n$  das cargas conservadas  $f_k$ . Então:

1.  $M_f$  é uma variedade suave sob o fluxo de fase com Hamiltoniana  $H = f_1$ ;
2. Se  $M_f$  for compacta e conexa então ela é difeomórfica a um toro

$$T^n := S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1,$$

e, na vizinhança desse toro em  $M$  pode-se introduzir as coordenadas 'ângulo-ação'

$$I_1, I_2, \dots, I_n, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \quad \text{com } 0 \leq \phi_k \leq 2\pi,$$

tais que os ângulos  $\phi_k$  são coordenadas em  $M_f$  e as ações  $I_k = I_k(f_1, f_2, \dots, f_n)$  são as cargas conservadas.

3. As equações canônicas com Hamiltoniana  $H$  podem ser integradas por quadraturas. Assim, as equações de movimento com as novas variáveis ficam na forma:

$$\dot{I}_k = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\phi}_k = \omega_k(I_1, I_2, \dots, I_n), \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n$$

4. O fluxo de fase com Hamiltoniano  $H$  preve um movimento condicionalmente periódico em

$M_f$ , assim, em coordenadas angulares  $\phi_k$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , teremos:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k, \quad \omega = \omega(f)$$

A prova completa deste importante teorema pode ser encontrada em [22]. Vamos agora entender alguns elementos do teorema que serão relevantes para esta dissertação.

- Como o sistema relacionado ao *Teorema de Arnold-Liouville* é integrável e de dimensão  $2n$ , o movimento descrito ocorre na superfície:

$$f_1(p, q) = c_1, f_2(p, q) = c_2, \dots, f_n(p, q) = c_n \quad \text{de dimensão } 2n - n = n.$$

Essa superfície, de acordo com o teorema, é um toro; assim, para cada ponto da variedade  $M$  existe precisamente um toro  $T^n$  passando por ele. Dessa forma  $M$  admite uma foliação por folhas  $n$  dimensionais - cada folha é um toro, e para cada toro temos as constantes (superfícies de nível)  $c_1, \dots, c_n$ . Com a condição de que  $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial p_k}\right) \neq 0$ , podemos resolver o sistema  $f_k(p, q) = c_k$  para o momento  $p_i$ :

$$p_i = p_i(q)$$

Calculando o diferencial de  $f_i(q, p(q)) = c_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f_m}{\partial p_j} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \frac{\partial f_m}{\partial p_j} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} &= 0 \end{aligned}$$

onde multiplicamos a expressão por  $\frac{\partial f_m}{\partial p_j}$ . Trocando os índices, e fazendo a subtração entre as expressões  $(mi) - (im)$  obtemos:

$$\underbrace{\{f_i, f_m\}}_{=0} + \frac{\partial f_m}{\partial p_j} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \frac{\partial f_m}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0$$

Como as funções estão em involução, temos que o primeiro termo da expressão anterior é igual a zero. Dessa forma, rearranjando os índices de soma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_m}{\partial p_j} \left( \frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) &= 0 \\ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon_{jkl} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} &= \nabla \times \mathbf{p} = 0 \\ \Rightarrow \int_S (\nabla \times \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{q} &= \oint_{\delta S} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \\ \Rightarrow \oint p_j dq_j &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Onde usamos o teorema de Stokes, observando que  $S$  é a superfície e  $\delta S$  o seu contorno.

Vemos então pela expressão resultante que a integral de contorno na superfície do toro, é igual é zero (conservativa).

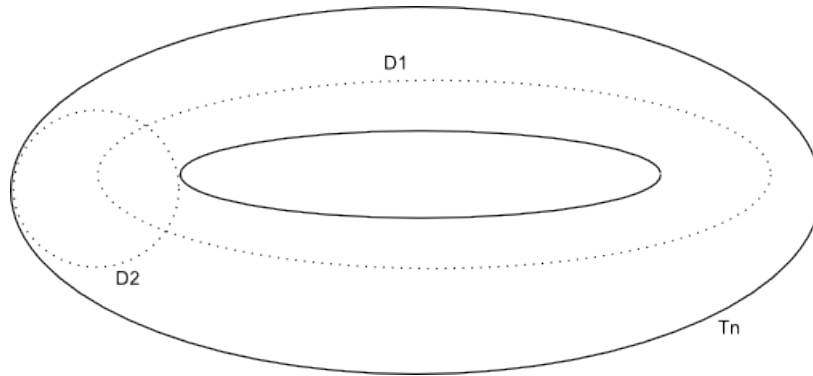


Figura 2: Ciclos  $D_1$  e  $D_2$  não contráteis em um toro  $T^n$ .

- Apesar do obtido no item anterior, teremos ainda  $n$  curvas que *não* podem ser contraídas para se tornar um ponto (ver figura 2), assim resultarão em integrais que não serão nulas. Essas curvas fechadas, os *ciclos* serão denominados  $D_k$ , onde o  $k$  representa o  $k$ -ésimo ciclo. Definimos, dessa forma, as coordenadas de ação:

$$I_k := \frac{1}{2\pi} \oint_{D_k} p_j dq_j \text{ com:} \quad (2.2.4)$$

$$D_k = \{(\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n) \in T^n; 0 \leq \bar{\phi}_k \leq 2\pi, \bar{\phi}_i = \text{constante para } i \neq k\},$$

onde os  $\bar{\phi}$ , como veremos posteriormente, são as coordenadas ângulos no toro. Vale a pena observar que, independente da escolha da curva  $D_k$ , a ação (2.2.4) é a mesma. Essa conclusão decorre do uso do teorema de Stokes em duas curvas arbitrárias  $D_k$  e  $\tilde{D}_k$  (figura 3) e percorridas em sentidos opostos uma da outra:

$$\oint_{D_k} p_j dq_j + \oint_{\tilde{D}_k} p_j dq_j = \int (\frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k}) dq_j \wedge dq_k = 0$$

onde  $\wedge$  é o produto antissimétrico, ou produto exterior.

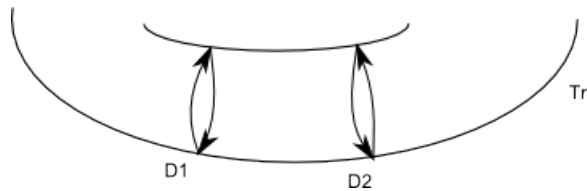


Figura 3: Ciclos  $D_1$  e  $D_2$  com sentidos opostos em num toro  $T^n$ .

- Uma consequência importante do teorema de *Arnold-Liouville* é a comutação dos parênteses de Poisson entre as ações  $I_k$ . Como  $I_k$  depende somente de  $f_k = c_k$ , que são as cargas

conservadas, teremos:

$$\{I_i, I_k\} = \frac{\partial I_i}{\partial f_r} \frac{\partial f_r}{\partial q_j} \frac{\partial I_k}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial p_k} - \frac{\partial I_i}{\partial f_r} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \frac{\partial I_k}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial q_k} = \frac{\partial I_i}{\partial f_r} \frac{\partial I_k}{\partial f_s} \{f_r, f_s\} = 0$$

Consequentemente:

$$\{I_k, H\} = \dot{I}_k = 0 \Rightarrow I_k = \text{constante}$$

Assim, podemos representar as superfícies que formam o toro utilizando as ações  $I_k$ . É interessante notar que *não* podemos definir  $I_k = f_k$  pois, apesar de  $I_k = I(f_k)$ , a transformação  $(p, q) \rightarrow (I, \phi)$  geralmente *não* é canônica.

- Precisamos construir uma outra coordenada conjugada a ação  $I_k$ . Definimos então a *coordenada ângulo* a partir da função geradora:

$$S(q, I) = \int_{q_0}^q p_j dq_j, \quad (2.2.5)$$

onde  $q_0$  é um ponto qualquer do toro, escolhido arbitrariamente. Observe que essa definição independe da trajetória entre  $q$  e  $q_0$  - caso semelhante ao que foi visto para um ciclo. Ao escolher um ponto de partida inicial  $q'_0 \neq q_0$ , apenas acrescentamos uma constante a  $S$ , deixando a coordenada ângulo invariante:

$$\phi_i = \frac{\partial S}{\partial I_i} \quad (2.2.6)$$

- Para entendermos que as coordenadas ângulo são periódicas com período  $2\pi$ , considere os caminhos  $D$  e  $D \cup D_k$  (que representa o  $k$ -ésimo ciclo) entre os pontos  $q$  e  $q_0$  (figura 4). Calculemos então, a integral no percurso:

$$S'(q, I) = \int_{D \cup D_k} p_j dq_j = \int_D p_j dq_j + \int_{D_k} p_j dq_j = S(q, I) + 2\pi I_k,$$

onde usamos as expressões 2.2.4 e 2.2.5. Dessa forma, derivando em relação a ação  $I_k$ :

$$\phi'_k = \frac{\partial S'(q, I)}{\partial I_k} = \phi_k + 2\pi$$

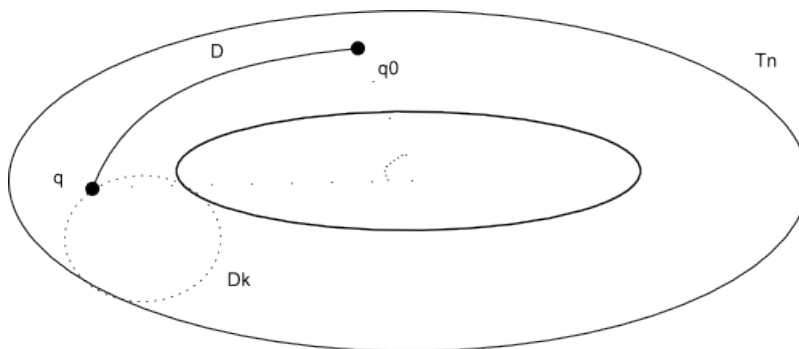


Figura 4: Definição das coordenadas no toro.

- Já comentamos anteriormente que as transformações

$$q = q(\phi, I), \quad p = p(\phi, I), \quad \phi = \phi(q, p), \quad I = I(q, p)$$

são canônicas<sup>7</sup> e inversíveis. Dessa forma, semelhante a (2.1.2), teremos:

$$\{I_j, I_k\} = 0, \quad \{\phi_j, \phi_k\} = 0, \quad \{\phi_j, I_k\} = \delta_{jk}, \quad (2.2.7)$$

de maneira que podemos obter a dinâmica do sistema a partir de:

$$\dot{I}_k = \{I_k, \bar{H}\}, \quad \dot{\phi}_k = \{\phi_k, \bar{H}\}, \quad (2.2.8)$$

onde

$$\bar{H}(\phi, I) = H(q(\phi, I), p(\phi, I)),$$

é o novo Hamiltoniano, dependente agora das variáveis ângulo-ação.

Como  $I_k$  são as cargas conservadas, obtemos da equação de Hamilton que:

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi_k} = 0,$$

onde podemos concluir novamente que  $\bar{H} = \bar{H}(I)$ . Temos também que:

$$\dot{\phi}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial I_k} = \omega_k(I),$$

sendo que  $\omega_k$  também são primeiras integrais, já que só há dependência com a ação  $I$ . A partir dessas expressões podemos, através de uma integração, obter as equações de movimento em coordenadas ângulo-ação:

$$I_k(t) = I_k(0), \quad \phi_k(t) = \omega_k(I)t + \phi_k(0) \quad (2.2.9)$$

Podemos ver então que a trajetória obtida em (2.2.9) depende das velocidade angulares  $\omega_k$  e a correspondente dimensão  $n$  do espaço de fase.

Vamos agora aplicar o que foi discutido utilizando o seguinte exemplo ilustrativo.

**Exemplo 2.2 (Oscilador harmônico)** *Considere o seguinte hamiltoniano para o oscilador harmônico bidimensional:*

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

*Como há uma independência temporal do hamiltoniano, temos que o próprio é uma carga conservada. Dessa forma, escolhendo um  $H(p, q) = E$  fixo, teremos uma foliação de  $M$  em elipses:*

$$\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = E$$

---

<sup>7</sup>Vimos que as coordenadas ângulo-ação são definidas pela função geradora  $S$

Fixamos um valor  $E$ , portanto escolhemos um ciclo (elipse) em particular  $M_f$  (figura 5). Tere-  
mos então:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_f} pdq = \frac{1}{2\pi} \int \int_A dpdq = \frac{E}{\omega}$$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{\omega} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{\omega} + \omega q^2 \right). \quad (2.2.10)$$

onde utilizamos o teorema de Stokes, transformando a integral no caminho em torno de  $M_f$  em  
uma área  $S$  (área da elipse).

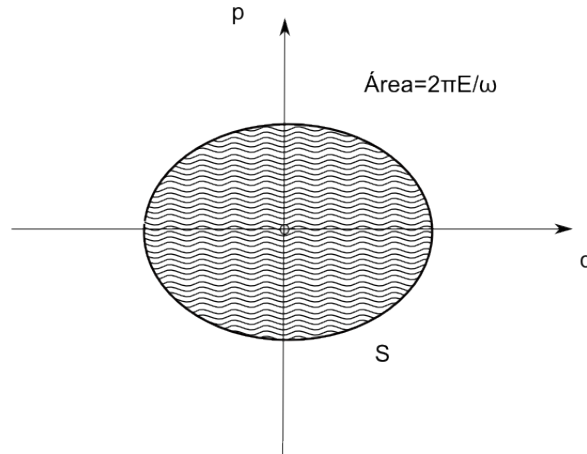


Figura 5: Elipse com superfície  $S$  no espaço de fase.

Podemos definir um outro sistema de coordenadas melhor adaptado ao oscilador harmônico.  
Escolheremos  $(\rho, \theta)$ :

$$p = \rho \cos \theta \quad e \quad q = \frac{\rho}{\omega} \sin \theta,$$

o que nos leva ao seguinte parênteses de Poisson:

$$\{\rho, \theta\} = \frac{\omega}{\rho}$$

e Hamiltoniano

$$\overline{H} = \frac{1}{2} \rho^2$$

Dessa forma:

$$\frac{d\phi}{dt} = \{\overline{H}, \phi\} = \omega \Rightarrow \phi = \omega t + \phi_0$$

Vamos agora expressar as coordenadas  $(I, \phi)$  em termos de  $(p, q)$ . Para isso, calculemos a função  
geradora:

$$S(q, I) = \int pdq = \pm \int \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2} dq.$$

Para  $S(q, I)$  positivo teremos:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\partial S}{\partial I} = \int \frac{\omega dq}{\sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}} = \arcsin\left(q\sqrt{\frac{\omega}{2I}}\right) - \phi_0 \\ \Rightarrow q &= \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin(\phi + \phi_0).\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

Finalmente<sup>8</sup>, escrevendo a ação  $I$  em termos da energia  $E$  através da relação 2.2.10:

$$p = \sqrt{2E} \cos(\omega t + \phi_0) \quad q = \sqrt{\frac{2E}{\omega^2}} \sin(\omega t + \phi_0)\tag{2.2.12}$$

Não é difícil generalizar esse exemplo para a soma direta de  $n$  osciladores harmônicos. O Hamiltoniano, estendido para esse caso, é dado por:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$$

com os respectivos parênteses de Poisson, dado pela relação canônica 2.1.2. Agora, com  $n$  quantidades conservadas em involução, ao invés de elipse, teremos um toro real  $n$ -dimensional no espaço de fase. O movimento ocorre nesses toros, que folheiam o espaço de fase. Pelo teorema de Arnold-Liouville, é possível também introduzir  $n$  ângulos  $\phi_i$ , que, como no caso unidimensional, evoluem de forma linear no tempo com as respectivas frequências  $\omega_i$ . Dessa forma, as coordenadas referentes ao caso de  $n$  osciladores se estende basicamente inserindo os índices discretos  $i$  na equação obtida para as coordenadas  $p$  e  $q$  em 2.2.12.

## 2.3 Integrabilidade na Teoria Clássica de Campos

Até agora consideramos apenas sistemas com um número finito de graus de liberdade, desenvolvendo, para esse caso, critérios objetivos para determinar se dado sistema é integrável ou não. No entanto, para estudar modelos integráveis em teorias de campo, que é o escopo deste trabalho, precisamos estender o conceito de integrabilidade para sistemas com infinitos graus de liberdade. O método do espalhamento inverso clássico tem um papel importante para esse caso, pois é ele que fornecerá um algoritmo para se encontrar soluções dessas equações diferenciais parciais não lineares integráveis.

Antes de mergulharmos na Teoria Clássica de Campos vamos primeiro entender uma estrutura que será importante para estabelecer o formalismo Hamiltoniano para sistemas infinito dimensionais: a *Estrutura de Poisson*.

---

<sup>8</sup>Lembrando que, da equação de Hamilton,  $p = \dot{q}$

### 2.3.1 Estrutura de Poisson

Considere um espaço de fase  $M$ ,  $m$ -dimensional com coordenadas locais  $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ . Partimos então para a seguinte definição:

**Definição 2.3** A matriz antissimétrica  $\omega^{ab} = \omega^{ab}(\xi)$  é chamada estrutura de Poisson se o seguinte Parêntese de Poisson, definido como:

$$\{f, g\} = \omega^{ab}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \frac{\partial g}{\partial \xi^b} \quad (2.3.1)$$

satisfaz a relação de antissimetria e a identidade de Jacobi:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Fazendo  $f = \xi^a$  e  $g = \xi^b$  em 2.3.1 obtemos a seguinte relação:

$$\omega^{ab} = \{\xi^a, \xi^b\} \quad (2.3.2)$$

Usando a expressão 2.3.2 obtida acima, e escolhendo  $f = \xi^l, g = \xi^m$  e  $h = \xi^n$  na identidade de Jacobi, obtemos agora:

$$\omega^{lb}(\xi) \frac{\partial \omega^{mn}(\xi)}{\partial \xi^b} + \omega^{nb}(\xi) \frac{\partial \omega^{lm}(\xi)}{\partial \xi^b} + \omega^{mb}(\xi) \frac{\partial \omega^{nl}(\xi)}{\partial \xi^b} = 0, \quad (2.3.3)$$

que é a identidade de Jacobi para a forma simplética, como veremos mais adiante.

Dado o Hamiltoniano  $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a dinâmica é dada pela mesma equação 2.1.3, obtida anteriormente. Dessa forma, as equações de Hamilton, agora mais gerais<sup>9</sup>, ficam na forma:

$$\dot{\xi}^a = \omega^{ab}(\xi) \frac{\partial H}{\partial \xi^b}, \quad (2.3.4)$$

onde simplesmente substituímos  $f = \xi^a$  na dinâmica 2.1.3.

De forma a aplicar o que discutimos até aqui, vamos considerar o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.3** Considere a variedade  $M = \mathbb{R}^3$  com a seguinte estrutura  $\omega^{ab}(\xi) = \epsilon^{abc} \xi^c$ , onde  $\epsilon$  é o tradicional símbolo de Levi-Civita, completamente antissimétrico entre seus índices. Calculemos então o seguinte parênteses de Poisson:

$$\{\xi^1, \xi^2\} = \omega^{12}(\xi) = \epsilon^{123} \xi^3 \Rightarrow \{\xi^1, \xi^2\} = \xi^3, \quad (2.3.5)$$

da mesma forma:

$$\{\xi^3, \xi^1\} = \xi^2, \quad \{\xi^2, \xi^3\} = \xi^1.$$

Onde usamos a relação (2.3.2). Toda estrutura de Poisson admite um invariante de Casimir,

<sup>9</sup>Agora estamos utilizando as coordenadas locais  $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ .



definido pela relação  $\Omega = \xi^i \xi_i$ . Um invariante de Casimir para a variedade desse exemplo seria qualquer função  $f(r)$ , onde

$$r = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}.$$

Calculemos agora o seguinte parêntese de Poisson:

$$\begin{aligned} \{f(r), \xi^a\} &= \omega^{cd}(\xi) \frac{\partial f(r)}{\partial \xi^c} \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^d} = \omega^{ca}(\xi) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi^c} \\ &= \epsilon^{cad} \xi^d \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi^c} = \epsilon^{cad} \xi^d \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{1}{2} (\xi^1 \delta_c^1 + \xi^2 \delta_c^2 + \xi^3 \delta_c^3) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \{f(r), \xi^a\} = 0 \end{aligned}$$

Observamos então que o invariante de Casimir comuta com uma coordenada local - independente da escolha do Hamiltoniano. Assim, com a escolha de

$$H = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi^1)^2}{c_1} + \frac{(\xi^2)^2}{c_2} + \frac{(\xi^3)^2}{c_3} \right],$$

onde  $c_i$  representam constantes, teremos as seguintes equações de movimento:

$$\dot{\xi}^1 = \frac{c_3 - c_2}{c_2 c_3} \xi^2 \xi^3, \quad \dot{\xi}^2 = \frac{c_1 - c_3}{c_1 c_3} \xi^1 \xi^3, \quad \dot{\xi}^3 = \frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2} \xi^1 \xi^2,$$

onde utilizamos as equações de Hamilton (2.3.4). Repare que essas equações de movimento são de um corpo fixo rígido no seu centro de gravidade.

Utilizando a linguagem desenvolvida até aqui, introduziremos a seguinte definição.

**Definição 2.4 (Variedade e estrutura simplética)** Uma variedade  $M$  é dita simplética se a mesma possui dimensão par  $m = 2n$  com uma estrutura  $\omega$  inversível e fechada. Dessa forma,

$$\begin{aligned} W_{ab} &:= (\omega^{-1})_{ab} \Rightarrow \text{inversível} \\ \partial_a W_{bc} + \partial_c W_{ab} + \partial_b W_{ca} &= 0 \Rightarrow \text{fechada} \end{aligned}$$

onde denominamos a matriz inversa  $W_{ab}$  de estrutura simplética.

No contexto dessa definição, temos o teorema de Darboux. Esse teorema afirma basicamente que, a partir das condições da definição anterior, existe localmente um sistema de coordenadas

$$\xi^1 = q_1, \xi^2 = q_2, \dots, \xi^n = q_n, \xi^{n+1} = p_1, \xi^{n+2} = p_2, \dots, \xi^{2n} = p_n$$

tal que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

e dessa forma, os parenteses de Poisson se reduzem a forma canônica (2.1.1). Para uma maior formalidade no tratamento deste teorema, ver [22] e [23].

**Exemplo 2.4 ( $S^2$ )** No último exemplo, a estrutura de Poisson do sistema era degenerada<sup>10</sup>, já que a matriz  $\omega^{ab}$  não era inversível. Dessa forma, não havia uma estrutura simplética e conseqüentemente não podíamos usar o teorema de Darboux. Consideremos agora uma restrição da estrutura  $\omega^{ab} = \epsilon^{abc}\xi^c$  para uma esfera,  $S^2$  com  $r = C$ . Teremos então a seguinte estrutura simplética na esfera, dada por:

$$\begin{aligned} \{\xi^1, \xi^2\} &= \xi^3 = \sqrt{C^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2} \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{C^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{\sqrt{C^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Vamos agora escolher uma parametrização diferente e mais conveniente para a esfera:

$$\xi^1 = C \sin \theta \cos \phi, \quad \xi^2 = C \sin \theta \sin \phi, \quad \xi^3 = C \cos \theta,$$

assim a estrutura simplética nas coordenadas  $(\theta, \phi)$  pode ser calculada. Substituindo a parametrização no lado esquerdo (LE) de (2.3.6):

$$\begin{aligned} \{\xi^1, \xi^2\} &= C \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi\} \{\theta, \phi\} \\ \Rightarrow \{\xi^1, \xi^2\} &= C \sin \theta \cos \theta \{\theta, \phi\}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Substituindo agora a parametrização no lado direito (LD) de (2.3.6):

$$\sqrt{C^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2} = C \cos \theta \quad (2.3.8)$$

Igualando LE (2.3.7) com LD (2.3.8) obtemos:

$$\begin{aligned} \{\theta, \phi\} &= \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{ou} \\ W &= \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que é a estrutura simplética.

Observe que essa estrutura é igual a forma do volume em  $S^2$ . Sendo o raio  $C$  arbitrário, o espaço de fase  $\mathbb{R}^3$  é folheado então por espaços de fases simpléticos  $S^2$ ; assim, cada ponto do espaço pertence a exatamente uma esfera centrada na origem (ver figura 6).

<sup>10</sup>Já que  $\det(\omega) = 0$  naquele caso. Essa degenerescência sempre ocorre caso o espaço de fase seja de dimensão ímpar e/ou exista um invariante Casimir não trivial

Este exemplo faz parte de um caso geral: fixar uma função de Casimir<sup>11</sup> (invariante) no espaço das funções de Poisson leva a folheações pelos espaços simpléticos. As coordenadas de Darboux na esfera são dadas por  $q = -\cos\theta$  e  $p = \phi$ , sempre satisfazendo a relação canônica  $\{q, p\} = 1$ .

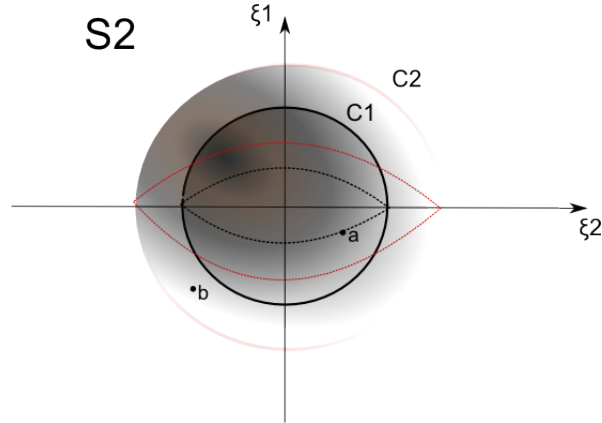


Figura 6: Dois pontos  $a$  e  $b$  contidos em cada uma das folhas esféricas  $C_1$  e  $C_2$  do espaço de fase.

### 2.3.2 Integrabilidade e a Teoria Clássica de Campos

O conceito de integrabilidade, introduzido pela definição 2.2 admite uma extensão imediata para o caso infinito dimensional de teorias de campos. Essa extensão consiste em permitir que o número de graus de liberdade  $n$  seja infinito. Nessa idéia, uma teoria de campos é dita integrável caso haja infinitas quantidades conservadas em involução. Entretanto, ocorre sutilezas que devem ser levadas em consideração. A mais importante delas se deve ao fato de que agora, um dado sistema, mesmo possuindo infinitas cargas conservadas, não é necessariamente integrável. Isso decorre da necessidade de uma integral de movimento para cada grau de liberdade, assim, mesmo um numero infinito pode não ser suficiente. Precisamos então construir um mapa injetor entre cada grau de liberdade do sistema e suas integrais de movimento - tal mapa se relaciona diretamente com a construção das coordenadas de ângulo e ação.

Agora que já introduzimos a estrutura de Poisson (na subseção 2.3.1), podemos estabelecer o formalismo Hamiltoniano para sistemas com infinitos graus de liberdade. Formalmente, podemos substituir as coordenadas de trajetória  $\xi_i(t)$  pela variável dinâmica  $\psi(x, t)$ . Assim, o índice discreto  $i$  se transforma na variável contínua e independente  $x$ . O espaço de fase  $M$  que antes era localmente isomórfico a  $\mathbb{R}^{2n}$ , é substituído por um espaço de funções suaves sobre a linha ( $D \subset \mathbb{R}$ ) com condições de contorno apropriadas.

Podemos então, esquematicamente, definir as seguintes transformações necessárias para o

<sup>11</sup>Nesse exemplo fixamos  $f(r) = C$ .

caso infinito dimensional:

Equações diferenciais ordinárias (EDO's)  $\longrightarrow$  Equações diferenciais parciais (EDP's)

$$\xi_i(t), i = 1, \dots, n \longrightarrow \psi(x, t), x \in D$$

$$\sum_i \longrightarrow \int_D dx$$

Funções  $f(\xi)$   $\longrightarrow$  Funcionais  $F[\psi(x, t)]$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta \psi}$$

Os funcionais são dados por integrais na forma:

$$F[\psi(x, t)] = \int_D dx F(\psi, \partial_x \psi, \partial_x^2 \psi, \dots),$$

e a derivada funcional por:

$$\frac{\delta F}{\delta \psi(x, t)} = \frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \partial_x \psi} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial F}{\partial \partial_x^2 \psi} + \dots, \quad \text{onde } \frac{\delta \psi(x, t)}{\delta \psi(y, t)} = \delta(x - y).$$

Temos que a função  $\delta(x - y)$  é a conhecida função delta de Dirac, que satisfaz:

$$\int_D \delta(x) dx = 1, \quad \delta(x) = 0 \quad \text{para } x \neq 0$$

Analogamente ao caso finito dimensional da relação (2.3.2), podemos definir os parênteses de Poisson:

$$\{F, G\} = \int_{D^2} dx dy \omega(x, y, \psi) \frac{\delta F}{\delta \psi(x, t)} \frac{\delta G}{\delta \psi(y, t)}, \quad (2.3.9)$$

onde a estrutura de Poisson  $\omega(x, y, \psi)$  deve garantir a antissimetria de 2.3.9 e a validade da identidade de Jacobi. Uma possível escolha canônica para a estrutura corresponde a:

$$\omega(x, y, \psi) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \delta(x - y). \quad (2.3.10)$$

A partir de (2.3.10) então, vamos calcular<sup>12</sup> (2.3.9):

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= -\frac{1}{2} \int_{D^2} dx dy \partial_x \delta(x - y) \frac{\delta F}{\delta \psi(x, t)} \frac{\delta F}{\delta \psi(x, t)} + \frac{1}{2} \int_{D^2} dx dy \partial_y \delta(x - y) \frac{\delta F}{\delta \psi(x, t)} \frac{\delta F}{\delta \psi(x, t)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{D^2} dx dy \delta(x - y) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \right) \frac{\delta G}{\delta \psi(y)} - \frac{1}{2} \int_{D^2} dx dy \partial_x \delta(x - y) \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(y)} \\ &\Rightarrow \{F, G\} = \frac{1}{2} \int_D dx \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \right) \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} - \frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Essa então é a versão infinita do parênteses de Poisson definido originalmente em (2.1.1). Observe que para obter (2.3.11), usamos que o operador de diferenciação  $\partial_x$  é anti-auto-adjunto com

<sup>12</sup>Por conveniência vamos ignorar o parâmetro  $t$  de dependência temporal nas contas a seguir.

respeito ao produto interno usual:

$$(\Psi, \Phi) = \int_D dx \Psi(x) \Phi(x), \quad (2.3.12)$$

assim:

$$\begin{aligned} (\partial_x \Psi, \Phi) &= \int_D (\partial_x \Psi(x)) \Phi(x) = \\ &= \underbrace{\int_D \partial_x (\Psi(x) \Phi(x))}_{=0} - \int_D \Psi(x) \partial_x \Phi(x) \\ &\Rightarrow (\partial_x \Psi, \Phi) = -(\Psi, \partial_x \Phi) \end{aligned}$$

As equações de Hamilton, utilizando (2.3.11) vão adquirir então a seguinte forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \{H[\psi], \psi(x)\} = \int_D dy \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\delta H}{\delta \psi(y)} \right) \frac{\delta \psi(x)}{\delta \psi(y)} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta \psi(x)}. \quad (2.3.13)$$

## 2.4 Alguns modelos importantes

Como vimos anteriormente, não existe uma definição universal de integrabilidade para EDP's. Em Teoria de Campos o espaço de fase é infinito dimensional, não sendo suficiente mesmo um número infinito de cargas conservadas para garantir a integrabilidade. Dessa forma, se torna importante focar o estudo em técnicas para gerar soluções e entender suas propriedades. Nessa seção vamos elencar alguns modelos que tiveram um papel importante, ao longo da história, para o desenvolvimento dessas técnicas. Neste trabalho, daremos ênfase ao modelo *não-linear de Schrödinger*, por ser simplificado e mais didático para posteriores extensões.

### 2.4.1 Sólitons

Muitos dos modelos não-lineares possuem como solução as ondas solitárias, ou simplesmente sólitons. A importância dos sistemas com soluções sólitons reside no fato de que os mesmos possuem um número infinito de cargas conservadas, levando, dentre outras propriedades importantes, a estabilidade pelo processo de espalhamento. A sua descoberta (em meados do século 19) impulsionou o estudo de fenômenos não-lineares.

A primeira onda solitária foi observada em agosto de 1834 por *John Scott Russell*. Russell inicialmente estava interessado no estudo da formação das ondas devido à resistência ao movimento dos barcos e também na fabricação de cascos ideais para navios. Em uma de suas observações, ele verificou esse fenômeno, e fez a seguinte descrição:

”Eu observava o movimento de um barco que dois cavalos rebocavam através de um canal raso e estreito, quando, de repente, o barco parou; no entanto o movimento

continuou pela água do canal, e foi se acumulando, em um estado de intensa agitação ao redor do barco e daí, jogando o barco para trás, espalhou-se ao longo do canal com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, curvada e com superfície perfeitamente definida, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem alterar sua forma ou velocidade. Continuando a cavalo, segui a onda que se movia a aproximadamente 8 ou 9mi/h [14km/h], preservando sua forma original - uns 30 pés [9m] de comprimento e 1 a 1,5 pés [300 – 450mm] de altura. A altura da onda foi gradualmente diminuindo e após uma perseguição por uma 1 ou 2mi eu a perdi na sinuosidade do canal. Assim, em agosto de 1834, foi o primeiro encontro com esse estranho mas bonito fenômeno.”

John Scott Russell, 1844, "Report on Waves" [24]

Exemplos de equações com soluções do tipo sóliton:

- **(Equação KdV)** O modelo representativo de KdV (*Korteweg de Vries*) descrito pela seguinte equação:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right), \quad \sigma = \frac{1}{3} h^3 - \frac{Th}{\rho g}$$

onde  $\eta$  é a elevação da superfície em relação a altura de equilíbrio  $h$ ,  $\alpha$  uma constante arbitrária relacionada ao movimento uniforme do líquido,  $g$  a constante gravitacional,  $T$  a tensão superficial do líquido,  $\rho$  a respectiva densidade e  $\tau$  e  $\xi$  os parâmetros temporais e espaciais, é resultado de sucessivos estudos do fenômeno observado e estudado inicialmente por Russel. Após diversas investigações feitas por vários grupos de pesquisas em busca do entendimento do fenômeno, Korteweg e de Vries desenvolveram essa equação não-linear e obtiveram sua solução mais simples. Vale dizer que esse desenvolvimento foi propiciado pela *tecnologia do método do espalhamento inverso clássico* (MEIC<sup>13</sup>), elaborada em 1967 justamente no curso da tentativa de entender esse fenômeno. O MEIC então se tornou uma ferramenta de alta importância no contexto da integrabilidade de sistemas.

A versão adimensional, feita através da transformação

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h\sigma}} \tau, \quad x = -\sigma^{-1/2} \xi, \quad u = \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha$$

resulta na seguinte equação:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{com} \quad u = u(x, t), \quad (2.4.1)$$

que é mais famosa e utilizada na literatura. Vale a pena observar que a equação de KdV

<sup>13</sup>Como o próprio nome sugere, através do MEIC pode-se obter soluções de sistemas recuperando o potencial inicial dos dados de espalhamento



Figura 7: Colisão entre dois sólitons, prescritos pela equação de KdV, na praia de Oregon, costa oeste dos Estados Unidos. (Foto de Terry Toedtemeier em 1978)

foi observada em outros fenômenos físicos (ver figura 7) como nas colisões livres de ondas hidromagnéticas, física de plasma, dinâmica de redes, etc. Para o tratamento formal desse modelo, ver [25].

- **(Equação de Sine-Gordon)** A equação de KdV introduziu o primeiro exemplo de sólitons, mas nem todas estruturas localizadas não-lineares podem ser descritas por esse modelo ou similares. Dessa forma, podemos dizer que existe uma nova categoria de sólitons, bastante assídua na física do Estado Sólido, que possuem uma excepcional estabilidade, proveniente da topologia da energia potencial da superfície do sistema; e a *equação de Sine-Gordon* modela essa onda solitária. Uma equação de movimento Sine-Gordon pode ser:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \phi = 0, \quad (2.4.2)$$

onde  $\phi(x, t)$  é uma função com valores reais e  $\beta$  e  $m$  alguns parâmetros positivos.

Do ponto de vista físico a equação (2.4.2) representa um modelo de teoria de campos relativístico no espaço-tempo de dimensão 2. Os parâmetros  $\beta$  e  $m$ , representam respectivamente a constante de acoplamento do sistema e a massa. Importante de dizer que no campo da matemática essa equação já vinha sendo explorada a mais tempo, com o estudo de superfícies com índice de curvatura negativo. Para um tratamento formal e completo ver [13] e [26].

### 2.4.2 O modelo de Schrödinger não-linear (NLS)

Antes do sóliton, discussões e estudos sobre o caráter corpuscular de ondas eletromagnéticas, eram bastante explorados. Esses fótons, soluções da *equação de Schrödinger dependente do tempo*, tinham alto poder dispersivo, de forma que ocorria essa dispersão em uma escala de tempo inversamente proporcional ao quadrado da amplitude do pacote, no espaço dos  $k$ <sup>14</sup>. Dessa forma, observou-se que a não-linearidade tem um papel fundamental no balanceamento do processo dispersivo. Trabalhando somente em 1 dimensão, desenvolveu-se a seguinte equação de movimento, proveniente dessa necessidade do equilíbrio entre dispersão e foco do pacote de onda:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2g|\psi|^2\psi, \quad (2.4.3)$$

que é a *equação de Schrödinger não linear* (NLS). A 2.4.3 descreve então a evolução temporal da função de onda (pacote)  $\psi(x, t)$  visto de um referencial com a velocidade de grupo da onda portadora.

A função  $\psi(x, t)$  possui valores complexos - campo clássico carregado - e  $|\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$ , onde a barra representa a conjugação complexa. O domínio da variável  $x$  é a reta real inteira  $-\infty < x < \infty$  e o valor inicial  $\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x)$  é considerado suficientemente suave.

O parâmetro real  $g$  é a constante de acoplamento do sistema, e, em seu limite linear  $g = 0$  a equação 2.4.3 se reduz a original equação de Schrödinger, com função de onda de uma partícula com massa  $m = \frac{1}{2}$  em um espaço unidimensional.

Sabendo que os parênteses de Poisson entre dois observáveis:

$$\{F, G\} = i \int_D dx \left( \frac{\delta F}{\delta\psi(x)} \frac{\delta G}{\delta\bar{\psi}(x)} - \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta\psi(x)} \right) \quad (2.4.4)$$

estão bem definidos e são não-degenerados, teremos formalmente, para as variáveis canônicas  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$ :

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi(y)\} &= 0 \\ \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} &= 0 \\ \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= i\delta(x - y) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

O Hamiltoniano do modelo NLS é:

$$H = \int_D dx \left( \frac{d\psi}{dx} \frac{d\bar{\psi}}{dx} + g\bar{\psi}\psi\psi\psi \right) \quad (2.4.6)$$

---

<sup>14</sup>Espaço dos momenta



e os funcionais carga  $Q$  (número de partículas) e momento  $P$  são:

$$Q = \int_D dx \bar{\psi} \psi \quad (2.4.7)$$

$$P = \frac{1}{2i} \int_D dx \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \psi \right) \quad (2.4.8)$$

Da seguinte relação:

$$\{|\psi(x)|^2, |\psi(y)|^2\} = 0,$$

e lembrando que  $\bar{\psi} \psi = |\psi|^2$ , podemos obter que os os funcionais  $P$  e  $Q$  são integrais de movimento e estão em involução:

$$\{H, Q\} = \{H, P\} = 0 \quad \text{e} \quad \{P, Q\} = 0$$

Apesar de sua simplicidade, o NLS possui um caráter universal no campo da física não-linear. Esse modelo surge em diversos fenômenos e situações: na descrição do transporte de energia em moléculas de proteína [27], em teorias de dinâmica de ondas em águas profundas [28], na própria ótica não-linear [29], entre outros.

## 2.5 A representação de Lax e o MEIC

Sabemos que as quantidades conservadas são grandezas que são funções das variáveis dinâmicas do sistema, e que permanecem invariantes ao longo do tempo. Tais quantidades fornecem informações importantes sobre a dinâmica e da simetria do sistema em questão. Nesse contexto é útil então introduzir a chamada *representação de Lax* [11]. A partir dela podemos construir as desejáveis cargas conservadas do sistema - que é, na maioria dos casos, o primeiro passo na obtenção de soluções explícitas da equação de movimento.

O MEIC se baseia na observação de que uma certa classe de EDP's bidimensionais podem ser representadas a partir da condição de compatibilidade para o seguinte sistema sobredeterminado de EDO's:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial s} &= L_s(s, t; \lambda) \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= L_t(s, t; \lambda) \Psi \end{aligned} \right\} \implies \text{Problema linear fundamental} \quad (2.5.1)$$

onde  $\Psi = \Psi(s, t; \lambda)$  é um vetor de posto  $l$  e o par  $L_s = L_s(s, t; \lambda)$  e  $L_t = L_t(s, t; \lambda)$  representam matrizes quadradas  $l \times l$ . Tanto o número inteiro  $l$  quanto esse par de matrizes dependem do modelo e equação a ser trabalhada. Observe que todos os parâmetros de 2.5.1, também conhecido como problema linear fundamental, tem uma dependência com um parâmetro complexo adicional, denominado parâmetro espectral  $\lambda$ .

Podemos obter a condição de consistência para (2.5.1) a partir da seguinte consideração:

$$\begin{aligned}
\partial_s \Psi = L_s \Psi &\Rightarrow \partial_t \partial_s \Psi = (\partial_t L_s) \Psi + L_s \partial_t \Psi \\
&= \partial_t L_s \Psi + L_s L_t \Psi = (\partial_t L_s + L_s L_t) \Psi \\
&\Rightarrow \partial_t \partial_s \Psi = (\partial_t L_s + L_s L_t) \Psi,
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

da mesma forma:

$$\partial_s \partial_t \Psi = (\partial_s L_t + L_t L_s) \Psi. \tag{2.5.3}$$

Dessa forma, fazendo (2.5.2) – (2.5.3)<sup>15</sup> obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= (\partial_s L_t - \partial_t L_s + L_t L_s - L_s L_t) \Psi \\
&\Rightarrow (\partial_s L_t - \partial_t L_s + [L_t, L_s]) \Psi = 0
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\partial_t - L_t) \partial_s \Psi - \partial_s (\partial_t - L_t) \Psi - (\partial_t - L_t) L_s \Psi + L_s (\partial_t - L_t) \Psi = 0 \\
&\Rightarrow [\partial_t - L_t, \partial_s] \Psi - [\partial_t - L_t, L_s] \Psi = 0
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$\Rightarrow [\partial_t - L_t, \partial_s - L_s] = 0 \tag{2.5.6}$$

que, para um  $\Psi$  arbitrário, pode ser reescrita na seguinte forma:

$$[M, L] = 0, \quad \text{onde } M := \partial_t - L_t \text{ e } L := \partial_s - L_s. \tag{2.5.7}$$

Dessa forma, o par de operadores diferenciais  $M$  e  $L$  é denominado *par de Lax*. Outra condição importante pode ser obtida de 2.5.4:

$$\partial_s L_t - \partial_t L_s + [L_t, L_s] = 0, \tag{2.5.8}$$

que é comumente chamada de *condição de curvatura nula* (CCN) para a conexão de lax  $L_s$ .

Temos que o par de matrizes  $L_s$  e  $L_t$ , deve ser escolhido de tal forma que tanto a CCN quanto o par de lax,  $M$  e  $N$ , impliquem que a EDP não-linear do modelo seja satisfeita para qualquer valores do parâmetro espectral  $\lambda$ . Ressalta-se também que dada essa EDP não-linear e integrável, a conexão de Lax - e consequentemente o par de Lax - pode adquirir várias formas, de forma que ela não é única, mas sempre deve satisfazer a CCN. Podemos esquematizar a idéia da seguinte forma:

Antes de aplicarmos no NLS o proposto pelo esquema na figura (8) para sistemas gerais, vamos primeiro provar a seguinte proposição:

”A condição de curvatura nula é invariante com respeito à transformações de gauge

$$L_\alpha \rightarrow L'_\alpha = r L_\alpha r^{-1} + (\partial_\alpha r) r^{-1} \tag{2.5.9}$$

<sup>15</sup>Neste caso estamos supondo  $\Psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ , levando a  $\partial_t \partial_s \Psi - \partial_s \partial_t \Psi = 0$

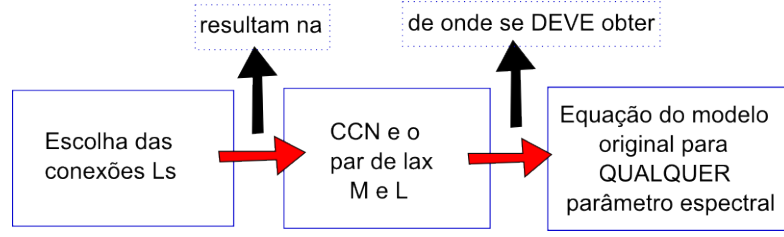


Figura 8: Esquema de construção da equação do modelo original a partir do par de lax  $M$  e  $L$ .

onde  $r$  é uma matriz arbitrária que geralmente depende de variáveis dinâmicas do modelo e do parâmetro espectral.”

□

Calculemos termo a termo os elementos da CCN:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \partial_\alpha L'_\beta &= \partial_\alpha (r L_\beta r^{-1} + \partial_\beta r r^{-1}) \\
 &= (\partial_\alpha r) L_\beta r^{-1} + r (\partial_\alpha L_\beta) r^{-1} - r (L_\beta r^{-1} \partial_\alpha r) r^{-1} \\
 &\quad + (\partial_\alpha \partial_\beta r) r^{-1} - (\partial_\beta r) r^{-1} (\partial_\alpha r) r^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \partial_\beta L'_\alpha &= (\partial_\beta r) L_\alpha r^{-1} + r (\partial_\beta L_\alpha) r^{-1} - r (L_\alpha r^{-1} \partial_\beta r) r^{-1} \\
 &\quad + (\partial_\beta \partial_\alpha r) r^{-1} - (\partial_\alpha r) r^{-1} (\partial_\beta r) r^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow [L'_\alpha, L'_\beta] &= [r L_\alpha r^{-1} + \partial_\alpha r r^{-1}, r L_\beta r^{-1} + \partial_\beta r r^{-1}] \\
 &= r [L_\alpha, L_\beta] r^{-1} + r (L_\alpha r^{-1} \partial_\beta r) r^{-1} - \partial_\beta r L_\alpha r^{-1} + \partial_\alpha r L_\beta r^{-1} \\
 &\quad - r (L_\beta r^{-1} \partial_\alpha r) r^{-1} + (\partial_\alpha r) r^{-1} (\partial_\beta r) r^{-1} - (\partial_\beta r) r^{-1} (\partial_\alpha r) r^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Aplicando então 2.5.8:

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha L'_\beta - \partial_\beta L'_\alpha - [L'_\alpha, L'_\beta] &= r \partial_\alpha L_\beta r^{-1} - r \partial_\beta L_\alpha r^{-1} - [L_\alpha, L_\beta] r^{-1} \\
 &= r (\partial_\alpha L_\beta - \partial_\beta L_\alpha - [L_\alpha, L_\beta]) r^{-1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

Dessa forma, verificamos que a representação da EDP não-linear original, baseado na CCN, é válida para toda classe de conexões equivalentes quando transformadas por calibração [30].

**Exemplo 2.5 (NLS)** Um par de Lax possível para o modelo NLS é dado por:

$$\left. \begin{aligned} M &= \partial_t - L_t \\ L &= \partial_x - L_x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} L_t &= \frac{i\lambda^2}{2} \sigma_3 + \lambda \Omega(x) + \sigma_3 (\partial_x \Omega(x) + g \bar{\Psi} \Psi) \\ L_x &= -\frac{i\lambda}{2} \sigma_3 - \Omega(x) \end{aligned}$$

onde:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{g}\bar{\Psi}(x) \\ -i\sqrt{g}\Psi(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Mostraremos que o par de lax deste exemplo implica na equação original (2.4.3) ao utilizarmos a condição (2.5.7):

$$[M, L] = 0 \iff \partial_x L_t - \partial_t L_x + [L_t, L_x] = 0$$

Calculemos então termo a termo da CCN:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_t L_x &= -\partial_t \Omega(x) \\ \Rightarrow \partial_x L_t &= \lambda \partial_x \Omega(x) + i\sigma_3(\partial_x^2 \Omega(x) + g\partial_x \bar{\Psi}\Psi + g\bar{\Psi}\partial_x \Psi) \\ \Rightarrow [L_t, L_x] &= L_t L_x - L_x L_t \\ &= \frac{\lambda}{2} [-\sigma_3 \partial_x \Omega(x) \sigma_3 + \partial_x \Omega(x)] - i\sigma_3 \partial_x \Omega(x) \Omega(x) + i\Omega(x) \sigma_3 \partial_x \Omega(x) - ig\bar{\Psi}\Psi[\sigma_3, \Omega(x)], \end{aligned}$$

onde utilizamos que  $\sigma_3^2 = 1$ .

Por correspondência teremos:

$$\begin{aligned} [M, L] &= i\sigma_3 \partial_x^2 \Omega(x) + \partial_t \Omega(x) - ig\bar{\Psi}\Psi[\sigma_3, \Omega(x)] \\ &\quad + i \underbrace{[\sigma_3 g(\partial_x \bar{\Psi}\Psi + \bar{\Psi}\partial_x \Psi) - \sigma_3 \partial_x \Omega(x) \Omega(x) + \Omega(x) \sigma_3 \partial_x \Omega(x)]}_{=0} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \underbrace{(\sigma_3 \partial_x \Omega(x) \sigma_3 + \partial_x \Omega(x))}_{=0}, \end{aligned}$$

onde utilizamos as seguintes relações nos termos que vão para zero:

$$\begin{aligned} \sigma_3 \partial_x^2 \Omega(x) &= i\sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & \partial_x^2 \bar{\Psi} \\ \partial_x^2 \Psi & 0 \end{pmatrix}, \quad [\sigma_3, \Omega(x)] = 2i\sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Psi} \\ \Psi & 0 \end{pmatrix}, \\ \Omega(x) \partial_x \Omega(x) \Omega(x) &= g \begin{pmatrix} \Psi \partial_x \bar{\Psi} & 0 \\ 0 & -\bar{\Psi} \partial_x \Psi \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) \sigma_3 \partial_x \Omega(x) = -g \begin{pmatrix} \bar{\Psi} \partial_x \Psi & 0 \\ 0 & -\Psi \partial_x \bar{\Psi} \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \partial_x \Omega(x) \sigma_3 &= -\partial_x \Omega(x) \end{aligned}$$

Dessa forma, teremos como resultado:

$$[M, L] = i\sigma_3 \partial_x^2 \Omega(x) + \partial_t \Omega(x) - ig\Psi\bar{\Psi}[\sigma_3, \Omega(x)],$$

que na versão matricial, tem a forma:

$$[M, L] = \sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x^2 \bar{\Psi} + i\partial_t \bar{\Psi} + 2g|\Psi|^2 \bar{\Psi} \\ \partial_x^2 \Psi - i\partial_t \Psi + 2g|\Psi|^2 \Psi & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.13)$$

Como  $[M, L] = 0$ , obtemos, de acordo com a matriz 2.5.13 duas equações:

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 \bar{\Psi} + i\partial_t \bar{\Psi} + 2g|\Psi|^2 \bar{\Psi} &= 0 \quad e \\ -\partial_x^2 \Psi - i\partial_t \Psi + 2g|\Psi|^2 \Psi &= 0, \end{aligned}$$

que é a equação de movimento para o NLS 2.4.3 e a sua versão complexa conjugada.

A partir desse exemplo, fica claro que o par de Lax ou a CCN são duas formas equivalentes e alternativas de se representar uma EDP não-linear e integrável em duas dimensões.

## 2.6 Quantidades conservadas

A representação de Lax, introduzida no capítulo anterior, oferece uma grande vantagem no tratamento de modelos integráveis. Isso se deve ao fato de que tal formalismo fornece um método canônico para a construção das cargas conservadas. Vamos considerar o problema linear fundamental, 2.5.1 e uma translação de  $\Psi(x, t; \lambda)$  ao longo da direção  $s$  espacial, para um tempo fixo  $t$ :

$$\Psi(s_2, t; \lambda) = T(s_2, s_1; \lambda)\Psi(s_1, t; \lambda). \quad (2.6.1)$$

O operador  $T(s_2, s_1; \lambda)$ , denominado matriz de transição ou operador de translação, é uma matriz quadrada com posto  $l$ , definida no intervalo  $[s_1, s_2]$  pelas seguintes condições:

$$[\partial_{s_2} - L_s(s_2, t; \lambda)]T(s_2, s_1; \lambda) = 0 \quad \text{com} \quad T(s_1, s_1; \lambda) = 1 \quad (2.6.2)$$

As condições 2.6.2, também chamadas de *problema linear auxiliar*, podem ser obtidas do problema linear fundamental 2.5.1 e de 2.6.1 da seguinte forma<sup>16</sup>:

- 2.5.1:  $L_s(s_2)\Psi(s_2) = \partial_{s_2}\Psi(s_2)$
- LE:  $\Rightarrow L_s(s_2)\Psi(s_2) = L_s(s_2)T(s_2, s_1)\Psi(s_1)$
- LD:  $\Rightarrow \partial_{s_2}\Psi(s_2) = \partial_{s_2}(T(s_1, s_2))\Psi(s_1)$
- Igualando LE com LD:

$$\begin{aligned} L_s(s_2)T(s_2, s_1)\Psi(s_1) &= (\partial_{s_2}T(s_2, s_1))\Psi(s_1) \\ &\Rightarrow [\partial_{s_2} - L_s(s_2)]T(s_2, s_1) = 0, \end{aligned}$$

que é exatamente (2.6.2).

---

<sup>16</sup>Para as contas a seguir omitiremos os parâmetros  $t$  e  $\lambda$  por conveniência.

Temos as seguintes propriedades da matriz de transição:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Psi(s_1, t; \lambda) &= T(s_1, s_1; \lambda) \Psi(s_1, t; \lambda) \Rightarrow T(s_1, s_1; \lambda) = \mathbb{1}_k \\ \Rightarrow T(s_2, s'; \lambda) T(s', s_1; \lambda) &= T(s_2, s_1; \lambda) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$\Rightarrow T(s_2, s_1; \lambda) = T^{-1}(s_1, s_2; \lambda) \quad (2.6.4)$$

observe que especificamente (2.6.4) é consistente com a equação diferencial para  $T(s_2, s_1; \lambda)$  com respeito a  $s_1$ :

$$\partial_{s_1} T(s_2, s_1; \lambda) + T(s_2, s_1; \lambda) L_s(s_1, t; \lambda) = 0$$

Uma solução formal do problema linear auxiliar 2.6.2 tem a forma:

$$T(s_2, s_1; \lambda) = P \exp \int_{s_1}^{s_2} ds L_s(s, t; \lambda) \quad (2.6.5)$$

onde  $P$  representa o ordenamento por caminho para fatores não comutativos. Para entender como funciona o operador  $P$  vamos dividir uma curva  $\gamma \in [s_1, s_2]$  em  $N - 1$  partes (ver figura 9); podemos então definir o operador  $P$  no exponencial como o seguinte limite:

$$P \exp \int_{\gamma} L_a dx^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n \quad (2.6.6)$$

com  $\Omega_n = L_n \cdot L_{n-1} \cdots \cdots L_1$  particionando a curva  $\gamma$  em  $n$  segmentos adjacentes e os respectivos  $L$ 's representando a expansão em cada trecho infinitesimal:

$$L_n = \mathbb{1} + \int_{\gamma_n} L_a dx^a \quad (2.6.7)$$

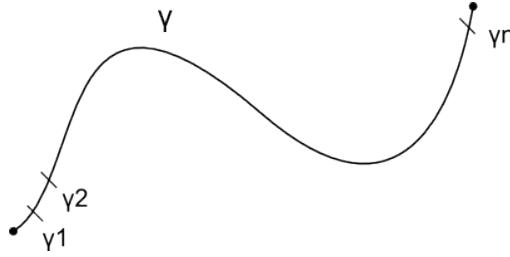


Figura 9: Definição da ação do operador  $P$  como o limite do produto das divisões infinitesimais  $L_n$  do percurso  $\gamma$ .

**Definição 2.5 (Matriz de monodromia)** Definir o intervalo  $[s_1, s_2]$  para um intervalo completo  $[-L, L]$  resulta na matriz de transição  $T(-L, L; \lambda) \equiv T_L(\lambda)$ . Essa matriz, reconhecida como a matriz de monodromia, exerce um papel central na construção das cargas conservadas.

Assim como definimos uma matriz de transição  $T(s_2, s_1; \lambda)$  ao longo da direção espacial, com o tempo constante, podemos fazer diferente. Vamos introduzir agora um objeto que translada a solução do problema linear fundamental 2.5.1 ao longo do tempo, com a coordenada espacial

fixa:

$$\Psi(s, t_2; \lambda) = S(t_2, t_1; \lambda)\Psi(s, t_1; \lambda), \quad (2.6.8)$$

dessa forma, semelhante a 2.6.5, teremos a seguinte solução para o operador  $S$ :

$$S(t_2, t_1; \lambda) = P \exp \int_{t_1}^{t_2} dt L_t(s, t; \lambda) \quad (2.6.9)$$

Definidas as matrizes de transição  $S$  e  $T$ , podemos anotar duas informações importantes:

- Uma translação arbitrária  $\Omega_\gamma$  da solução do problema linear fundamental ao longo do plano  $t \times s$ , pode ser escrita como:

$$\Omega_\gamma = P \exp \left\{ \int_\gamma (L_s ds + L_t dt) \right\} \quad (2.6.10)$$

- $\Omega_\gamma$  não passa de uma expressão para o transporte paralelo ao longo de uma curva  $\gamma$  com a conexão de Lax. Dessa forma, devido a CCN<sup>17</sup>, temos que a exponencial ordenada por caminhos é independente do caminho escolhido. Em particular, para uma curva  $\gamma$  fechada podemos escrever:

$$\Omega_\gamma = \mathbb{1}, \quad (2.6.11)$$

de onde expandimos o exponencial e consideramos a sua primeira ordem.

De posse das informações obtidas até aqui, podemos construir as quantidades conservadas do sistema. Para isso, observemos a seguinte proposição.

**Proposição 2.1** *Considere uma EDP não linear que admite representação de Lax. Caso os campos  $\Psi(s, t; \lambda)$  forem periódicos nas coordenadas espaciais, com período  $2L$ , então as quantidades*

$$\varrho(\lambda) = \text{tr}(T_L(t; \lambda)) \quad (2.6.12)$$

*são independentes do tempo. Assim, o traço da matriz de monodromia,  $\varrho$ , é o funcional gerador das quantidades conservadas.*

Por motivos de completeza, vamos provar essa proposição de duas maneiras diferentes.

□<sup>1</sup>

Basicamente vamos calcular  $\partial_t T_L(\lambda)$  e em seguida, utilizar da tecnologia do traço de matrizes para obter a conservação.

Lembremos de (2.6.6) que podemos escrever a matriz de transição como

$$T_L(\lambda) = P \exp \int_{-L}^L L_a dx^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n$$

---

<sup>17</sup>que é satisfeita pela conexão de Lax

onde  $\Omega_n$  representa o produto dos  $n$  segmentos adjacentes da curva  $\gamma^{18}$ . Dessa forma

$$\begin{aligned}
\partial_t T_L(\lambda) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_t \Omega_n \\
&= (\partial_t L_n) \cdot L_{n-1} \cdots L_1 + \cdots + L_n \cdots L_2 \cdot (\partial_t L_1) \\
&= \cdots + L_n \cdot L_{n-1} \left( \int_{\gamma_n} dx \partial_t L_s \right) \cdot L_{n-1} \cdots L_1 + \cdots \\
&= \int_{-L}^L dx P \cdot \exp \left\{ \int_x^L dy L_s(y; \lambda) \right\} \cdot \partial_t L_s \cdot P \cdot \exp \left\{ \int_{-L}^x dz L_s(z; \lambda) \right\} \\
&\Rightarrow \partial_t T_L(\lambda) = \int_{-L}^L dx P \cdot \exp \left\{ \int_x^L dy L_s(y; \lambda) \right\} \cdot (\partial_x L_t - [L_s, L_t]) \cdot \\
&\quad \cdot P \cdot \exp \left\{ \int_{-L}^x dz L_s(z; \lambda) \right\}, \tag{2.6.13}
\end{aligned}$$

onde utilizamos a CCN (2.5.8), a (2.6.7) e que os intervalos  $\gamma_n$  são suficientemente pequenos de tal forma que todas as  $n$  divisões tenham o mesmo tamanho.

Através da seguinte relação, obtida do cálculo diferencial:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \xi) d\xi \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial x} d\xi$$

podemos reescrever a equação (2.6.13) como:

$$\begin{aligned}
\partial_t T_L(\lambda) &= \int_{-L}^L dx \partial_x \left\{ P \cdot \exp \left[ \int_x^L dy L_s(y; \lambda) \cdot V(x, \lambda) \cdot P \cdot \exp \left( \int_{-L}^x dz L_s(z; \lambda) \right) \right] \right\} \\
&= P \cdot \exp \left\{ \int_x^L L_s dy \right\} \cdot L_s(x; \lambda) \cdot P \cdot \exp \left\{ \int_{-L}^x L_s(z; \lambda) dz \right\} \Big|_{-L}^L \\
&\Rightarrow \partial_t T_L(\lambda) = V(L, t; \lambda) T_L(\lambda) - T_L(\lambda) V(-L, t; \lambda). \tag{2.6.14}
\end{aligned}$$

Como consideramos o campo com periodicidade de  $2L^{19}$ , teremos, de (2.6.14), que:

$$\partial_t T_L(\lambda) = [V(L, t, \lambda), T_L(\lambda)]. \tag{2.6.15}$$

Para duas matrizes  $A$  e  $B$  quaisquer, temos que:

$$\text{tr}[A, B] = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0,$$

dessa forma, de (2.6.15), finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\partial_t T_L(\lambda)] &= \partial_t \text{tr}[T_L(\lambda)] = 0 \\
&\Rightarrow \text{tr}[T_L(\lambda)] = \varrho(\lambda)
\end{aligned}$$

onde  $\varrho(\lambda)$  representa as quantidades conservadas (independentes do tempo)

---

<sup>18</sup> $\Omega_n = L_n \cdots L_1$

<sup>19</sup> $V(L, t; \lambda) = V(-L, t; \lambda)$



□<sup>2</sup>

Para provarmos a conservação, tomemos uma curva fechada retilínea  $\gamma$  como a borda de um retângulo  $-L \leq s \leq L$  e  $t_1 \leq t \leq t_2$ , como mostrado na figura (10).

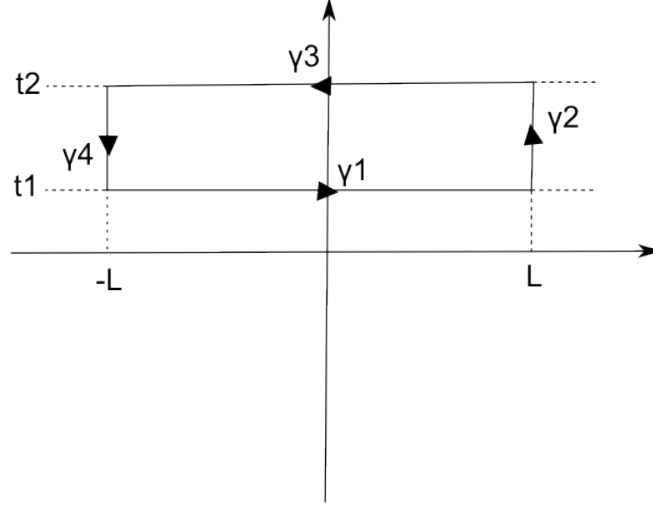


Figura 10: Percurso retilíneo fechado de integração  $\gamma = \cup_{l=1}^4 \gamma_l$

Como vimos anteriormente, para uma curva fechada temos a seguinte relação (agora estendida para esse caso):

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \Omega_\gamma = \Omega_{\gamma_4} \Omega_{\gamma_3} \Omega_{\gamma_2} \Omega_{\gamma_1} \\ &= S^{-1}(-L) T_L^{-1}(t_2) S(L) T_L(t_1) = [T_L(t_2) S(-L)]^{-1} S(L) T_L(t_1), \end{aligned}$$

onde  $\Omega_\gamma$  denota o percurso fechado. Como o campo é periódico em  $s$ , temos que  $L_s(L) = L_s(-L)$  e conseqüentemente  $S(-L) = S(L)$ <sup>20</sup>. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= [T_L(t_2) S]^{-1} S T_L(t_1) \Rightarrow S T_L(t_1) = T_L(t_2) S \\ &\Rightarrow T_L(t_2) = S T_L(t_1) S^{-1} \end{aligned}$$

Tomando o traço e utilizando a sua propriedade de ciclicidade (já usada na prova anterior), encontramos:

$$\text{tr}[T_L(t_2)] = \text{tr}[T_L(t_1)] = \varrho(\lambda).$$

O que implica que  $\varrho(\lambda)$  é uma constante sob evolução temporal.

<sup>20</sup>Omitiremos então a coordenada espacial  $L$

De posse dessas duas provas, podemos concluir que a expressão (2.6.12) pode ser expandida em termos do parâmetro espectral  $\lambda$ . Como  $\lambda$  é arbitrário, teremos então uma família infinita de quantidades conservadas

Dito de outra forma, podemos afirmar que as propriedades espectrais de um modelo integrável estão codificadas no traço da matriz de monodromia  $T_L(\lambda)$ . Destarte, ao expandirmos o traço dessa matriz em termos de  $\lambda$ , podemos calcular explicitamente as cargas conservadas. No entanto, é importante ressaltar, que embora tenhamos obtido um conjunto de infinitas cargas conservadas, não podemos afirmar ainda que seu número seja suficiente para se garantir a integrabilidade do modelo. A solução, como afirmamos anteriormente, é construir um mapa bijetor, relacionando as integrais de movimento e linearizando a EDP.

A partir de mais uma aplicação para o NLS, vamos verificar agora mais algumas propriedades gerais da matriz de transição.

**Exemplo 2.6 (NLS)** *Como já sabemos o par de Lax para o NLS, podemos escrever a matriz de transição para esse sistema:*

$$T(x, y, \lambda) = P \cdot \exp \left\{ \int_y^x dz L_s(z, t; \lambda) \right\} = P \cdot \exp \begin{pmatrix} -\frac{i\lambda}{2}(x-y) & -i\sqrt{g} \int_y^x dz \bar{\psi}(z) \\ i\sqrt{g} \int_y^x dz \psi(z) & \frac{i\lambda}{2}(x-y) \end{pmatrix} \quad (2.6.16)$$

Usando a propriedade onde  $\det(e^A) = e^{\text{tr}A}$ , podemos obter que

$$\det T(x, y; \lambda) = P \cdot \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2}(x-y) + \frac{i\lambda}{2}(x-y) \right\} = 1 \quad (2.6.17)$$

é unimodular. Outra propriedade importante da matriz de transição é que ela obedece a relação de involução:

$$\sigma_1 \bar{T}(x, y; \bar{\lambda}) \sigma_1 = T(x, y; \lambda), \quad (2.6.18)$$

lembrando que a matriz  $\sigma_1$  é uma das matrizes de Pauli; especificamente:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para provar essa propriedade podemos escrever:

$$T(x, y; \lambda) = P \cdot e^L = P \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!}.$$

Sabendo que  $(\sigma_1)^2 = \mathbb{1}$ , notamos que o  $n$ -ésimo termo da série para a matriz de transição pode ser escrita como:

$$\frac{L^n}{n!} = \frac{1}{n!} L \sigma_1 \sigma_1 L \sigma_1 \cdots \sigma_1 L \sigma_1 \sigma_1 L,$$

onde basta mostrarmos que  $\sigma_1 \bar{L} \sigma_1 = L$ :

$$\sigma_1 \bar{L} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i\bar{A}(\bar{\lambda}) & iB(\lambda) \\ -i\bar{B}(\bar{\lambda}) & -iA(\lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -iA(\lambda) & -i\bar{B}(\bar{\lambda}) \\ iB(\lambda) & i\bar{A}(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} = L,$$

com  $A := \frac{\lambda}{2}(x-y)$  e  $B := \sqrt{g} \int_y^x dz \psi(z)$ .

Podemos então, de forma sintética, exibir as duas propriedades da matriz de transição:

$$\begin{aligned} \det T(x, y; \lambda) = 1 &\Rightarrow \text{Unimodularidade} \\ \sigma_1 \bar{T}(x, y, \bar{\lambda}) \sigma_1 = T(x, y; \lambda) &\Rightarrow \text{Relação de involução} \end{aligned}$$

## 2.7 Matriz $r$ clássica

Na última seção verificamos que a construção das infinitas cargas conservadas (de um sistema dinâmico bidimensional com infinitos graus de liberdade) pode ser realizada se a equação que modela esse sistema, admitir uma representação de Lax. Contudo, visando verificar a integrabilidade do sistema, precisamos averiguar ainda se as infinitas integrais de movimento estão em involução. Podemos fazer isso calculando o parênteses de Poisson entre os elementos da matriz de monodromia. A existência da *matriz  $r$*  garante um modo eficiente de se executar tal tarefa. É possível mostrar que a representação dos parênteses de Poisson em termos dessa matriz  $r$  substitui a CCN.

Antes de tudo, vamos introduzir algumas notações referentes a algebra tensorial que serão importantes daqui para frente. Aproveitando, iremos explorar um pouco tal conceito de forma a relembrar algumas características importantes. Considere  $A$  e  $B$  duas matrizes  $k \times k$ . O produto tensorial  $A \otimes B$  resulta em uma matriz  $k^2 \times k^2$  e pode ser representada através de componentes da seguinte forma

$$(A \otimes B)_{ik,jl} = A_{ij} B_{kl}$$

O produto tensorial de duas matrizes  $2 \times 2$  por exemplo, assume a seguinte forma:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Outra notação bastante conveniente é a seguinte:

$$A \otimes B = \overset{(1)(2)}{A} \overset{(1)(2)}{B}, \quad \text{onde} \quad \overset{(1)}{A} = A \otimes \mathbb{1} \text{ e } \overset{(2)}{B} = \mathbb{1} \otimes B,$$

onde segue que  $(A \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes B) = A \otimes B$ .

É bastante comum nesse contexto o uso da matriz identidade  $\mathbb{1} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$  e a matriz permutação  $\mathbb{P}$  (como pode se verificar, ambas  $k^2 \times k^2$ ). Suas componentes são, respectivamente:

$$\mathbb{1}_{ij,lm} = \delta_{il}\delta_{jm} \text{ e } \mathbb{P}_{ij,lm} = \delta_{im}\delta_{jl}$$

Como propriedades da matriz de permutação temos:

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{1} \text{ e } \mathbb{P}(A \otimes B)\mathbb{P} = B \otimes A.$$

Para o caso bidimensional<sup>21</sup>, podemos representar a matriz permutação em termos das matrizes de Pauli:

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{a=1}^3 \sigma_a \otimes \sigma_a \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estabelecida a notação, podemos fazer agora a seguinte definição para os parênteses de Poisson para tensores:

**Definição 2.6** *Sejam  $A$  e  $B$  dois funcionais matriciais possuindo suporte compacto, ou seja, duas matrizes quadradas  $k \times k$  cujos elementos são funcionais de  $\Psi(s)$  e  $\bar{\Psi}(s)$ , definidos no intervalo  $-L < s < L$ . Os parênteses de Poisson do produto tensorial:*

$$\overset{(1)}{\{A, B\}} \overset{(2)}{=} \{A \underset{\cdot}{\otimes} B\} = i \int_{-L}^L ds \left( \frac{\delta A}{\delta \Psi} \otimes \frac{\delta B}{\delta \bar{\Psi}} - \frac{\delta A}{\delta \bar{\Psi}} \otimes \frac{\delta B}{\delta \Psi} \right) \quad (2.7.1)$$

são definidos como uma matriz  $k^2 \times k^2$ , onde seus elementos são os parênteses de Poisson de cada entrada de  $A$  e  $B$ . Em componentes, os respectivos parênteses têm a forma:

$$\overset{(1)}{\{A, B\}} \overset{(2)}{=} \{A \underset{\cdot}{\otimes} B\}_{ij,lm} = \{A_{il}, B_{jm}\}$$

As propriedades básicas dos parênteses de Poisson para o caso tensorial adquirem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{A \underset{\cdot}{\otimes} B\} &= -\mathbb{P}\{B \underset{\cdot}{\otimes} A\}\mathbb{P} \Rightarrow \text{Antissimetria} \\ \{A \underset{\cdot}{\otimes} BC\} &= \{A \underset{\cdot}{\otimes} B\} \overset{(2)}{C} + B \overset{(2)}{\{A \underset{\cdot}{\otimes} C\}} \Rightarrow \text{Regra de Leibnitz} \end{aligned}$$

---

<sup>21</sup> $k = 2$

$$\begin{aligned} & \{A \underset{\cdot}{\otimes} \{B \underset{\cdot}{\otimes} C\}\} + \mathbb{P}_{13} \mathbb{P}_{23} \{C \underset{\cdot}{\otimes} \{A \underset{\cdot}{\otimes} B\}\} \mathbb{P}_{23} \mathbb{P}_{13} \\ & + \mathbb{P}_{13} \mathbb{P}_{12} \{B \underset{\cdot}{\otimes} \{C \underset{\cdot}{\otimes} A\}\} \mathbb{P}_{12} \mathbb{P}_{13} = 0 \Rightarrow \text{Identidade de Jacobi} \end{aligned}$$

Vale a pena ressaltar que a representação das propriedades básicas dos parênteses de Poisson em termos da operação  $\{\cdot \underset{\cdot}{\otimes} \cdot\}$ , são gerais, ou seja, valem para matrizes de dimensões arbitrárias  $n \times n$  (não somente matrizes  $2 \times 2$ ). Assim, a respectiva matriz de permutação para um caso  $n$ -dimensional deve satisfazer as propriedades:

$$\mathbb{P}(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^2 = \mathbb{I}, \quad \mathbb{P}(A \otimes B) = (B \otimes A) \mathbb{P} \quad (2.7.2)$$

Vamos agora introduzir a matriz  $r$  através da seguinte definição:

**Definição 2.7** *A matriz  $r$ , quadrada de  $k^2 \times k^2$ , é definida de forma a satisfazer os seguintes parênteses de Poisson:*

$$\left\{ L_s(s_1, t; \lambda) \underset{\cdot}{\otimes} L_s(s_2, t; \mu) \right\} = \left[ r(\lambda - \mu), L_s^{(1)}(s_1, t; \lambda) + L_s^{(2)}(s_2, t; \mu) \right] \delta(s_1 - s_2), \quad (2.7.3)$$

que são conhecidos, devido a sua importância, como parênteses de Poisson fundamentais (PPF).

Como discutimos anteriormente, os parênteses de Poisson entre as matrizes de transição elucidarão se as cargas conservadas estão em involução. O PPF é um passo importante para comprovar tal fato. Destarte, podemos afirmar que os PPF desempenham um papel central nesse processo.

Duas informações importantes sobre os PPF e a matriz  $r$  devem ser consideradas:

- As matrizes  $r$  utilizadas são não-dinâmicas, ou seja, não dependem explicitamente das variáveis dinâmicas do sistema - os campos  $\Psi(s)$  e  $\bar{\Psi}(s)$ ,
- O PPF é considerado ultralocal. Essa ultralocalidade é observada pela presença apenas de  $\delta(s_1 - s_2)$  - observe que não há derivadas da função delta.

Explorando o modelo NLS, vamos agora obter a sua matriz  $r$ .

**Exemplo 2.7 (NLS)** *Vamos reescrever a conexão de Lax para o modelo NLS da seguinte forma:*

$$L_x(x, t; \lambda) = -\frac{i\lambda}{2} \sigma_3 - \Omega(x) = -\frac{i\lambda}{2} \sigma_3 - i\sqrt{g}(\bar{\psi}\sigma_+ - \psi\sigma_-),$$

onde

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_1 + i\sigma_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_- = \frac{\sigma_1 - i\sigma_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando essa nova expressão, calculemos os PPF:

$$\begin{aligned}
\left\{ L_x(x, t; \lambda) \otimes L_x(y, t; \mu) \right\} &= \underbrace{\left\{ \left( -\frac{i\lambda}{2} \sigma_3 \right) \otimes \left( -\frac{i\mu}{2} \sigma_3 \right) \right\}}_{=0} \\
&+ \underbrace{\left\{ \left( -\frac{i\lambda}{2} \right) \otimes (-i\sqrt{g}(\bar{\psi}(y)\sigma_+ - \psi(y)\sigma_-)) \right\}}_{=0} \\
&+ \underbrace{\left\{ (-i\sqrt{g}(\bar{\psi}(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-)) \otimes \left( -\frac{i\mu}{2} \sigma_3 \right) \right\}}_{=0} \\
&- g \left\{ (\bar{\psi}(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-) \otimes (\bar{\psi}(y)\sigma_+ - \psi(y)\sigma_-) \right\} \\
\Rightarrow \left\{ L_x(x, t; \lambda) \otimes L_x(y, t; \mu) \right\} &= ig (\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-) \delta(x - y), \tag{2.7.4}
\end{aligned}$$

onde usamos a relação canônica 2.7.1. Obviamente os termos indicados são nulos pois existem entradas constantes nos parênteses.

Observe que logo nesta etapa fica claro a ultralocalidade desses parênteses no modelo NLS. Para obter os PPF em termos da matriz  $r$  precisamos ainda fazer algumas modificações. Utilizaremos algumas propriedades e identidades da matriz da permutação  $\mathbb{P}$  e das matrizes de Pauli para realizar tal tarefa. Assim sendo, vamos obter o comutador  $[\mathbb{P}, \sigma_3 \otimes \mathbb{1}]$ . Veremos a sua importância calculando-o:

$$\begin{aligned}
[\mathbb{P}, \sigma_3 \otimes \mathbb{1}] &= \frac{1}{2} [(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sigma_i \otimes \sigma^i), \sigma_3 \otimes \mathbb{1}] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1} + \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3, \overset{(1)}{\sigma_3} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ 2\sigma_+ \otimes \sigma_- + 2\sigma_- \otimes \sigma_+ + \sigma_3 \otimes \sigma_3, \overset{(1)}{\sigma_3} \right] \\
&= [\sigma_+, \sigma_3] \otimes \sigma_- + [\sigma_-, \sigma_3] \otimes \sigma_+ \\
&= 2(\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-) \tag{2.7.5}
\end{aligned}$$

onde utilizamos as seguintes identidades<sup>22</sup>, facilmente obtidas por pura algebra matricial:

$$\begin{aligned}
2\sigma_+ \otimes \sigma_- + 2\sigma_- \otimes \sigma_+ &= \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2, \\
[\sigma_+, \sigma_-] &= \sigma_3, \quad [\sigma_3, \sigma_+] = 2\sigma_+, \quad [\sigma_3, \sigma_-] = 2\sigma_-.
\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo processo, podemos obter:

$$[\mathbb{P}, \mathbb{1} \otimes \sigma_3] = -2(\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-) = -[\mathbb{P}, \sigma_3 \otimes \mathbb{1}] \tag{2.7.6}$$

<sup>22</sup>que foram obtidas das relações envolvendo  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$

Assim, de (2.7.5) e (2.7.6) teremos:

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbb{P}, \left( \frac{\lambda}{2} \sigma_3 \otimes \mathbb{1} + \frac{\mu}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_3 \right) \right] = (\lambda - \mu)(\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-) \\ \Rightarrow & \frac{i \cdot g}{\lambda - \mu} \left[ \mathbb{P}, \left( \frac{\lambda}{2} \sigma_3 \otimes \mathbb{1} + \frac{\mu}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_3 \right) \right] = i \cdot g(\lambda - \mu)(\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-) \\ \Rightarrow & \frac{g}{\lambda - \mu} \left[ \mathbb{P}, \left( \frac{i \cdot \lambda}{2} \sigma_3 \otimes \mathbb{1} + \frac{i \cdot \mu}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_3 \right) \right] = i \cdot g(\lambda - \mu)(\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-). \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Substituindo então 2.7.7 em 2.7.4 obteremos:

$$\Rightarrow \left\{ L_x(x, t; \lambda) \otimes L_x(y, t; \mu) \right\} = \frac{g}{\lambda - \mu} \left[ \mathbb{P}, \left( \frac{i \cdot \lambda}{2} \sigma_3 \otimes \mathbb{1} + \frac{i \cdot \mu}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_3 \right) \right] \delta(x - y) \quad (2.7.8)$$

Observe que a forma de (2.7.8) ainda não é a adequada. Para obtermos de fato a matriz  $r$ , precisamos observar que introduzir o seguinte comutador

$$\underbrace{\left[ \mathbb{P}, i\sqrt{g\bar{\psi}} \left( \begin{smallmatrix} (1) \\ \sigma_+ \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} (2) \\ \sigma_+ \end{smallmatrix} \right) - i\sqrt{g\bar{\psi}} \left( \begin{smallmatrix} (1) \\ \sigma_- \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} (2) \\ \sigma_- \end{smallmatrix} \right) \right]}_{=0} \quad (2.7.9)$$

em (2.7.8) não o altera, já que ambas entradas se comutam graças a propriedade da matriz de permutação  $\mathbb{P}$  (2.7.2). Dessa forma, como expressão final teremos:

$$\left\{ L_x(x, t; \lambda) \otimes L_x(y, t; \mu) \right\} = - \left[ \left( \frac{g \cdot \mathbb{P}}{\lambda - \mu} \right), L_x(x, t; \lambda) + L_x(y, t; \mu) \right] \delta(x - y), \quad (2.7.10)$$

de onde deduzimos que a matriz  $r$  para o NLS deve ser:

$$r(\lambda - \mu) = - \frac{g \cdot \mathbb{P}}{\lambda - \mu} \quad (2.7.11)$$

Antes discutido, agora verificamos que de fato a matriz  $r$  independe de variáveis dinâmicas. Ressaltamos que tal fato não é exclusividade desse modelo, mas sim é um caso geral. Verifica-se também que o LD de (2.7.11) contém uma aparente singularidade em  $\lambda = \mu$ . No entanto, como a matriz de permutação  $\mathbb{P}$  comuta com  $L_x^{(1)}(x, t; \lambda) + L_x^{(2)}(y, t; \mu)$ , o numerador no LD em (2.7.10) também vai para zero em  $\lambda = \mu$  e tal singularidade aparente é desfeita.

A primeira impressão da fórmula (2.7.3) pode parecer como uma reformulação pouco prática dos parênteses de Poisson canônicos (2.4.5). No entanto, como veremos a frente, ela representa na verdade uma propriedade geral das conexões de Lax  $L_s(s, t; \lambda)$ , envolvidas na CCN, para muitos modelos interessantes. Essa propriedade sustenta, de fato, a própria integrabilidade. Não é a toa que recebe o status de parênteses de Poisson fundamental.

É interessante lembrar então, após esse exemplo, que nosso objetivo é obter os parênteses de Poisson entre as matrizes de transição, para assim demonstrar a involução das integrais de movimento de um dado sistema. Focado nesse objetivo, ainda precisamos calcular duas relações que serão fundamentais para realizar tal tarefa. Dessa forma, segue as seguintes proposições.

**Proposição 2.2** *Considere a conexão de Lax  $L_s(s, t; \lambda)$  e sua matriz de transição associada  $T(s_2, s_1; \lambda)$ , onde  $s, s_1$  e  $s_2 \in [-L, L]$  e  $s_2 > s_1$ . Os parênteses de Poisson a seguir então são válidos:*

$$\left\{ T(s_2, s_1; \lambda) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \mu) \right\} = \int_{s_1}^{s_2} d\sigma T^{(1)}(s_2, \sigma; \lambda) \left\{ L_s(\sigma, t; \lambda) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \mu) \right\} T^{(1)}(\sigma, s_1; \lambda).$$

□

Temos que  $T(s_2, s_1; \lambda)$  é solução de  $[\partial_{s_2} - L_s(s_2, t; \lambda)]T(s_2, s_1; \lambda) = 0$  e tem a seguinte forma:

$$T(s_2, s_1; \lambda) = P \exp \int_{s_1}^{s_2} ds L_s(s, t; \lambda).$$

Dividindo o intervalo  $[s_1; s_2]$  em subintervalos infinitesimais  $\Delta_j$ , podemos reescrever a matriz de transição como:

$$T(s_2, s_1; \lambda) = P \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N T_j(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_{N-1} \cdot T_N,$$

onde

$$T_j(\lambda) = P \exp \int_{\Delta_j} ds_j L_s(s_j, t; \lambda) = \mathbb{1} + \int_{\Delta_j} ds_j L_s(s_j, t; \lambda) + O(\Delta^2),$$

obtida após uma expansão. Graças a ultralocalidade dos PPF (2.7.3),

$$\left\{ T_j(\lambda) \otimes_{\prime} T_k(\mu) \right\} = 0 \quad \text{se } j \neq k,$$

dessa forma teremos

$$\begin{aligned} \left\{ T(s_2, s_1; \lambda) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \mu) \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ P \prod_{j=1}^N T_j(\lambda) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \mu) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} P \sum_{j=1}^N \prod_{k=j+1}^N T_k^{(1)} \left\{ T_j(\lambda) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \mu) \right\} \prod_{l=1}^{j-1} T_l^{(1)}(\lambda). \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

Vamos provar esta última igualdade por indução.

△



Supondo (2.7.12) verdadeira, provaremos para o caso  $N + 1$ <sup>23</sup>:

$$\begin{aligned}
\left\{ P \prod_{j=1}^{N+1} T_j \otimes_{\rho} L_s \right\} &= \left\{ T_{N+1} P \prod_{j=1}^N T_j \otimes_{\rho} L_s \right\} = T_{N+1}^{(1)} \left\{ P \prod_{j=1}^N T_j \otimes_{\rho} L_s \right\} + \left\{ T_{N+1} \otimes_{\rho} L_s \right\} P \prod_{j=1}^N T_j^{(1)} \\
&= T_{N+1}^{(1)} P \sum_{j=1}^N \prod_{k=j+1}^N T_k^{(1)} \left\{ T_j \otimes_{\rho} L_s \right\} \prod_{l=1}^{j-1} T_l^{(1)} + \left\{ T_{N+1} \otimes_{\rho} L_s \right\} P \prod_{j=1}^N T_j^{(1)} \\
&= P \sum_{j=1}^N \prod_{k=j+1}^{N+1} T_k^{(1)} \left\{ T_j \otimes_{\rho} L_s \right\} \prod_{l=1}^{j-1} T_l^{(1)} + \left\{ T_{N+1} \otimes_{\rho} L_s \right\} P \prod_{j=1}^N T_j^{(1)} \\
&= P \sum_{j=1}^{N+1} \prod_{k=j+1}^{N+1} T_k^{(1)} \left\{ T_j \otimes_{\rho} L_s \right\} \prod_{l=1}^{j-1} T_l^{(1)}.
\end{aligned}$$

Observe que utilizamos a regra de Leibnitz e a propriedade da superposição das matrizes de transição para chegar no resultado esperado. ▲

Continuando de (2.7.12):

$$\begin{aligned}
\left\{ T(s_2, s_1; \lambda) \otimes_{\rho} L_s(s, t; \mu) \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \prod_{k=j+1}^N T_k^{(1)}(\lambda) \left\{ \left( \mathbb{1} + \int_{\Delta_j} ds_j L_s(s_j, t; \lambda) \right) \otimes_{\rho} L_s(s, t; \mu) \right\} \prod_{l=1}^{j-1} T_l^{(1)}(\lambda) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} P \sum_{j=1}^N \prod_{k=j+1}^N T_k^{(1)}(\lambda) \int_{\Delta_j} ds_j \left\{ L_s(s_j, t; \lambda) \otimes_{\rho} L_s(s, t; \mu) \right\} \prod_{l=1}^{j-1} T_l^{(1)}(\lambda) \\
&= \int_{s_1}^{s_2} d\sigma T^{(1)}(s_2, \sigma; \lambda) \left\{ L_s(\sigma, t; \lambda) \otimes_{\rho} L_s(s, t; \mu) \right\} T^{(1)}(\sigma, s_1; \lambda).
\end{aligned}$$

■

**Proposição 2.3** *Considere a conexão de Lax  $L_s(s, t; \lambda)$  e as matrizes de transição associadas  $T(s_2, s_1; \lambda)$  e  $T(s_2, s_1; \mu)$ , onde  $s, s_1$  e  $s_2 \in [-L, L]$  e  $s_2 > s_1$ . Dessa forma, vale os seguintes parênteses de Poisson:*

$$\begin{aligned}
\left\{ T(s_2, s_1; \lambda) \otimes_{\rho} T(s_2, s_1; \mu) \right\} &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_1}^{s_2} d\sigma_1 d\sigma_2 T(s_2, \sigma_1; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma_2; \mu) \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ L_s(\sigma_1, t; \lambda) \otimes_{\rho} L_s(\sigma_2, t; \lambda) \right\} T(\sigma_1, s_1; \lambda) \otimes T(\sigma_1, s_2; \mu)
\end{aligned}$$

□

Para provarmos esta proposição, utilizaremos a mesma idéia da proposição anterior. Neste caso

<sup>23</sup>Por conveniência omitiremos as dependências das matrizes

dividiremos infinitesimalmente a matriz de transição com dependência de  $\mu$ . Calculemos então:

$$\begin{aligned}
\left\{ T(\lambda) \otimes_{\prime} T(\mu) \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ T(\lambda) \otimes_{\prime} P \prod_{j=1}^N T_j(\mu) \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ P \sum_{i=1}^N \prod_{k=j+1}^N \overset{(1)}{T}_k \left\{ T(\lambda) \otimes_{\prime} T_j(\mu) \right\} \prod_{l=1}^{j-1} \overset{(2)}{T}_k(\mu) \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ P \sum_{i=1}^N \prod_{k=j+1}^N \overset{(1)}{T}_k \left\{ T(\lambda) \otimes_{\prime} \mathbb{1} + \int_{\Delta_j} ds_j L_s(\sigma_j, t; \mu) \right\} \prod_{l=1}^{j-1} \overset{(2)}{T}_k(\mu) \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ P \sum_{i=1}^N \prod_{k=j+1}^N \overset{(1)}{T}_k \left\{ T(\lambda) \otimes_{\prime} \int_{\Delta_j} ds_j L_s(\sigma_j, t; \mu) \right\} \prod_{l=1}^{j-1} \overset{(2)}{T}_k(\mu) \right] \\
&= \int_{s_1}^{s_2} d\sigma_2 \overset{(1)}{T}_k \left\{ T(\lambda) \otimes_{\prime} L_s(\sigma_2, t; \mu) \right\} \overset{(2)}{T}(\mu) \\
&= \int_{s_1}^{s_2} d\sigma_1 d\sigma_2 T(s_2, \sigma_1; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma_2; \mu) \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ L_s(s_1, t; \lambda) \otimes_{\prime} L_s(\sigma_2, t; \lambda) \right\} T(s_1, \sigma_1; \lambda) \otimes T(s_1, \sigma_2; \mu),
\end{aligned}$$

de onde nós utilizamos (2.7.12) e o resultado da proposição (2.2).

■

Agora que obtemos os parênteses de Poisson da proposição 2.3, podemos demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 2.2** *Se os parênteses de Poisson entre os elementos  $L_s(s, t; \lambda)$  admitem representação em termos da matriz  $r$  - (2.7.3); então os parênteses de Poisson entre os elementos da matriz de transição  $T(s, t; \lambda)$  serão dados por:*

$$\begin{aligned}
\left\{ T(s_2, s_1; \lambda) \otimes_{\prime} T(s_2, s_1; \mu) \right\} &= [r(\lambda - \mu), T(s_2, s_1; \lambda) \otimes T(s_2, s_1; \mu)] \\
\Rightarrow \{T_L(\lambda); T_L(\mu)\} &= [r(\lambda - \mu); T_L(\lambda) \otimes T_L(\mu)]
\end{aligned} \tag{2.7.13}$$

Dessa forma, os funcionais  $\varrho(\lambda) = \text{tr}[T_L(t; \lambda)]$  vão gerar as integrais de movimento em involução:

$$\{\varrho(\lambda), \varrho(\mu)\} = 0 \tag{2.7.14}$$

□ (i) Validade de (2.7.13)

Para provarmos a validade de (2.7.13) devemos lembrar, de (2.6.2), que a matriz de transição

$T(s_2, s_1; \lambda)$  satisfaz as seguintes equações diferenciais:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{s_1} T(s_2, s_1; \lambda) + T(s_2, s_1; \lambda) L_s(s_1, t; \lambda) &= 0 \\ \partial_{s_2} T(s_2, s_1; \lambda) - L_s(s_2, t; \lambda) T(s_2, s_1; \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Condição:} \\ &T(s, s; \lambda) = 1 \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

Dessa forma, substituindo os PPF (equação (2.7.3) no resultado da proposição (2.3) e utilizando as equações diferenciais acima, que são satisfeitas pela matriz de transição, teremos:

$$\begin{aligned} \left\{ T(s_2, s_1; \lambda) \otimes T(s_2, s_1; \mu) \right\} &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_1}^{s_2} d\sigma_1 d\sigma_2 T(s_2, \sigma_1; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma_2; \mu) \cdot \\ &\cdot \left[ r(\lambda - \mu); L_s^{(1)}(\sigma_1, t; \lambda) + L_s^{(2)}(\sigma_2, t; \mu) \right] T(s_1, \sigma_1; \lambda) \otimes T(s_1, \sigma_2; \mu) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_1}^{s_2} d\sigma_1 d\sigma_2 \{ [T(s_2, \sigma_1; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma_2; \mu)] r(\lambda - \mu) \cdot (\partial_{\sigma_1} + \partial_{\sigma_2}) \cdot \\ &\cdot [T(\sigma_1, s_1; \lambda) \otimes T(\sigma_2, s_2; \mu)] + (\partial_{\sigma_1} + \partial_{\sigma_2}) [T(s_2, \sigma_1; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma_2; \mu)] r(\lambda - \mu) \cdot \\ &\cdot [T(\sigma_1, s_1; \lambda) \otimes T(\sigma_2, s_1; \mu)] \} \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} d\sigma \{ T(s_2, \sigma; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma; \mu) \cdot r(\lambda - \mu) \cdot \partial_\sigma [T(\sigma, s_1; \lambda) \otimes T(\sigma, s_1; \mu)] + \\ &+ \partial_\sigma [T(s_2, \sigma; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma; \mu)] T(\sigma, s_1; \lambda) \otimes T(\sigma, s_1; \mu) \cdot r(\lambda - \mu) \} \\ &= \int_{s_1}^{s_2} d\sigma \partial_\sigma [T(s_2, \sigma; \lambda) \otimes T(s_2, \sigma; \mu) r(\lambda - \mu) T(\sigma, s_1; \lambda) \otimes T(\sigma, s_1; \mu)] \\ &\Rightarrow \left\{ T(s_2, s_1; \lambda) \otimes T(s_2, s_1; \mu) \right\} = [r(\lambda - \mu); T(s_2, s_1; \lambda) \otimes T(s_2, s_1; \mu)] \end{aligned}$$

## (ii) Quantidades conservadas em involução

Mostraremos agora que os funcionais  $\varrho(\lambda)$  geram quantidades conservadas em involução. Para isso temos que a versão da equação (2.7.13) para matrizes de monodromia tem a forma:

$$\{T_L(\lambda); T_L(\mu)\} = [r(\lambda - \mu); T_L(\lambda) \otimes T_L(\mu)].$$

Após calcularmos seu traço obtemos então<sup>24</sup>:

$$\begin{aligned} \{\text{tr} [T_L(\lambda)]; \text{tr} [T_L(\mu)]\} &= 0 \\ \Rightarrow \{\varrho(\lambda); \varrho(\mu)\} &= 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos que o traço de um comutador é identicamente nulo. ■

A importância do Teorema 2.2 reside no fato de que além das cargas conservadas estarem em involução, qualquer elemento da família gerada por elas ( $\varrho(\lambda)$ ), pode ser considerada como

<sup>24</sup>Vamos utilizar a seguinte propriedade do traço:  $\text{tr} (A \otimes B) = \text{tr} (A) \cdot \text{tr} (B)$

Hamiltoniano do sistema - isso vale, obviamente, quando podemos representar os parênteses de Poisson entre as matrizes de Lax  $L_s(s, t; \lambda)$  em termos da matriz  $r$ . A seguir demonstraremos mais um importante teorema, consequente do que vimos até agora. A partir dele, vamos mostrar que as correspondentes equações de movimento do sistema assumem a forma de uma CCN.

**Teorema 2.3** *Considerando  $\varrho(\lambda)$  como o Hamiltoniano do sistema, temos que:*

$$\partial_t L_s(s, t; \lambda) = \{\varrho(\mu), L_s(s, t; \lambda)\} = \partial_s M(s; \mu, \lambda) + [M(s; \mu, \lambda), L_s(s, t; \lambda)] \quad (2.7.16)$$

onde

$$M(s; \mu, \lambda) = \text{tr}_1 \left[ \begin{array}{c} \overset{(1)}{T}(L, s; \mu) \\ r(\lambda - \mu) \\ \overset{(1)}{T}(s, -L; \mu) \end{array} \right] \quad (2.7.17)$$

□

Com a ajuda da Proposição 2.2 vamos calcular a seguinte quantidade:

$$\begin{aligned} \left\{ T_L(\mu) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \lambda) \right\} &= \int_{-L}^L d\sigma \overset{(1)}{T}(L, \sigma; \mu) \left\{ L_s(\sigma, t; \mu) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \lambda) \right\} \overset{(1)}{T}(\sigma, -L; \mu) \\ &= \int_{-L}^L d\sigma \overset{(1)}{T}(L, \sigma; \mu) \left[ r(\mu - \lambda); \overset{(1)}{L}_s(\sigma, t; \mu) + \overset{(2)}{L}_s(s, t; \lambda) \right] \overset{(1)}{T}(\sigma, -L; \mu) \delta(\mu - \lambda) \\ &= \overset{(1)}{T}(L, s; \mu) r(\mu - \lambda) \overset{(1)}{L}_s(s, t; \mu) \overset{(1)}{T}(s, -L; \mu) - \\ &\quad - \overset{(1)}{T}(L, s; \mu) \overset{(1)}{L}_s(s, t; \mu) r(\mu - \lambda) \overset{(1)}{T}(s, -L; \mu) + \\ &\quad + \overset{(1)}{T}(L, s; \mu) r(\lambda - \mu) (T(s, -L; \mu) \otimes L_s(s, t; \lambda)) - \\ &\quad - (T(L, s; \mu) \otimes L_s(s, t; \lambda)) r(\mu - \lambda) \overset{(1)}{T}(s, -L; \mu) \end{aligned}$$

Nesse estágio, utilizaremos as equações diferenciais para a matriz de transição  $T$  para reescrevermos o termo obtido acima da seguinte forma:

$$\left\{ T_L(\mu) \otimes_{\prime} L_s(s, t; \lambda) \right\} = \partial_s V(s; \mu, \lambda) + \left[ V(s; \mu, \lambda); \overset{(2)}{L}_s(s, t; \lambda) \right]$$

onde

$$V(s; \mu, \lambda) = \overset{(1)}{T}(L, s; \mu) r(\lambda - \mu) \overset{(1)}{T}(s, -L; \mu)$$

Dessa forma, calculando o traço no primeiro espaço ( $\text{tr}_1$ )<sup>25</sup>, obtemos:

$$\{\varrho(\mu), L_s(s, t; \lambda)\} = \partial_s M(s; \mu, \lambda) + [M(s; \mu, \lambda), L_s(s, t; \lambda)]$$

---

<sup>25</sup>'Traço no primeiro espaço' resulta na aplicação do traço somente nos operadores do tipo  $\overset{(1)}{A} = A \otimes \mathbb{1}$ , ou seja, no primeiro espaço do produto tensorial

Provamos então, que a existência dos PPF para um dado sistema, fornece uma alternativa interessante à CCN.



### 3 *Integrabilidade na gravitação bidimensional*

Modelos bidimensionais de gravitação surgem naturalmente na descrição da física da teoria de cordas [31–33], ondas gravitacionais [34, 35], modelos cosmológicos e também em buracos negros. Todos eles visam entender o processo de criação do Universo no cenário pré Big-Bang, provendo também testes no contexto da teoria quântica de campos.

A gravitação bidimensional acoplada com o campo dilaton (G2dD) se mostra como um sistema integrável na teoria clássica, com uma estrutura bem interessante e não trivial. A presença da estruturação da integrabilidade nos possibilita, através do poderoso mecanismo do método do espalhamento inverso, entender tanto as soluções clássicas exatas como as quantizadas.

Em particular, a G2dD é bastante similar com o modelo sigma não linear, que é sabido também ser integrável, no entanto a sua quantização permanece como um problema fundamental. Isso ocorre devido ao comportamento singular da estrutura algébrica entre suas matrizes de monodromia, que contém uma completa caracterização do modelo integrável.

Diferente do modelo sigma não linear, na G2dD a álgebra das matrizes de monodromia se tornam bem definidas. A principal razão para isso é o fato de que a presença do parâmetro espectral, diferente de outros modelos integráveis conhecidos, cria uma dependência com o espaço-tempo e se relaciona com o campo dilaton através de expressões específicas. Dessa forma, essa dependência não trivial entre o parâmetro espectral e o campo dilaton tira ambiguidade que antes ocorria no modelo sigma não linear. Temos então, uma nova possibilidade para proceder com a quantização da gravitação bidimensional – tudo isso utilizando técnicas bem estabelecidas do espalhamento inverso quântico.

Nesta seção vamos estudar o *modelo principal do campo quirral* (PCM), que é um tipo de modelo sigma não linear, e a *G2dD*. Através do cálculo dos parênteses de Poisson entre as matrizes de transição de cada modelo, vamos mostrar como a presença do campo dilaton tira todas as ambiguidades, presentes no PCM. Esses resultados são o ponto central do trabalho. A partir deles pode-se verificar formas de contornar ambiguidades, ou mesmo quantizar os modelos viáveis.

### 3.1 Modelo do campo quiral principal - PCM

Como modelo integrável, o PCM, de dimensão 2, foi extensivamente estudado tanto pela literatura física [36], [37], quanto da matemática [38]. Ele é basicamente um exemplo de modelo sigma não linear, com grupo de Lie  $\mathcal{G}$ .

O PCM pode ser derivado diretamente através da CCN<sup>1</sup> de um par de Lax através da inserção de um parâmetro espectral  $\lambda \in \mathbb{C}$ . A importância do PCM reside no fato de que as suas reduções levam a modelos sigma no espaço coset (como a G2dD, por exemplo) e a modelos sigma em espaços simétricos - dessa forma, seu estudo é essencial para aumentarmos a alçada do nosso conhecimento em modelos integráveis do tipo sigma.

Na abordagem do PCM, vamos utilizar o seguinte Lagrangeano [39]:

$$\mathcal{L} = \text{tr } J_\mu J^\mu \Rightarrow \mathcal{L} = \text{tr } (J_0^2 - J_1^2) \quad (3.1.1)$$

onde  $J_\mu = g^{-1} \partial_\mu g$  são as correntes do modelo e a função  $g = g(x, t)$  representa valores no grupo de Lie compacto  $\mathcal{G}$ . As equações de movimento do modelo, que podem ser obtidas a partir de (3.1.1), são:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial t} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x},$$

que, em termos das correntes  $J_\mu$ , tem a forma:

$$\frac{\partial J_0}{\partial t} - \frac{\partial J_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \partial^\mu J_\mu = 0 \quad \text{com } \mu = 0, 1, \quad (3.1.2)$$

onde  $\mu = 0$  representa a coordenada temporal e  $\mu = 1$  a coordenada espacial  $x$ . Como vimos, a CCN (2.5.8) também provê uma equação de movimento para modelos integráveis. Dessa forma, como outra versão da equação de movimento para o PCM, teremos:

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} - \frac{\partial J_0}{\partial x} + [J_1, J_0] = 0, \quad (3.1.3)$$

de onde nós podemos definir a derivada covariante

$$\partial_0 J_1 = \partial_1 J_0 - [J_1, J_0] \equiv \nabla_1 J_0 \quad (3.1.4)$$

Na álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ , fixamos a base  $t^a$ , com  $a = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n = \dim \mathfrak{g}$ . Essa base é normalizada com respeito a métrica de Killing:

$$\text{tr } t^a t^b = g^{ab} = -\delta^{ab}, \quad (3.1.5)$$

---

<sup>1</sup>Como vimos anteriormente a CCN é uma condição de integrabilidade.

e satisfaz a seguinte relação de comutação, escrita na forma adjunta<sup>2</sup>:

$$\left[ t^a, t^b \right] = f^{abc} t^c \quad (3.1.6)$$

onde  $f^{abc}$  é um tensor, denominado *constante de estrutura*, totalmente antissimétrico entre seus dois primeiros índices. A constante deve satisfazer a identidade de Jacobi [40]:

$$f^{isp} f^{jks} + f^{jsp} f^{kis} + f^{ksp} f^{ijs} = 0. \quad (3.1.7)$$

Definidas as componentes da algebra, é conveniente reescrever as correntes do modelo na seguinte forma:

$$J_\mu = J_\mu^a t^a, \quad \text{com } \mu = 0, 1 \quad \text{e } a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$$

Vamos escolher a componente espacial da corrente  $J_1^a(x) = q^a(x)$ , para ser um conjunto de coordenadas generalizadas do PCM. Dessa forma, da CCN (3.1.4) podemos desenvolver a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \dot{q}_a t^a &= \partial_0 (J_0)_a t^a = \partial_1 (J_0)_a t^a - \left[ (J_1)_a t^a, (J_0)_b t^b \right] \\ &= \partial_1 (J_0)_a t^a - (J_1)_a (J_0)_b \left[ t^a, t^b \right] = \partial_1 (J_0)_a t^a - (J_1)_a (J_0)_b f^{abc} t^c \\ &= \partial_1 (J_0)_a t^a - (J_1)_a (J_0)_c f^{acb} t^b = \partial_1 (J_0)_a t^a - q_b (J_0)_c f^{bca} t^a \\ &= \left[ \partial_1 (J_0)_a - q_b (J_0)_c f^{bca} \right] t^a = (\nabla_1 J_0)_a t^a \\ &\Rightarrow \dot{q}_a = \partial_0 (J_0)_a = (\nabla_1 J_0)_a, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

onde o operador  $\nabla_1$ , como definido anteriormente, é a derivada covariante, determinada pela a conexão  $J_1 = q_a t^a \Rightarrow \nabla_1 (J_0)_a \equiv \frac{\partial (J_0)_a}{\partial x} - q_b (J_0)_c f^{bca}$  agora em termos de componentes. Para uma função arbitrária com componente  $\star_a$ :

$$\nabla_1 \star_a = \frac{\partial \star_a}{\partial x} - q_b \star_c f^{bca} \quad (3.1.9)$$

Com o objetivo de obtermos o momento conjugado canônico do modelo, vamos verificar a forma do funcional  $a\zeta\tilde{a}o$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(g) &= \int \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dx dt = \int \int_{t_1}^{t_2} \text{tr} (J_0^2 - J_1^2) dx dt = \text{tr} \int \int_{t_1}^{t_2} [J_0 (\nabla_1^{-1} \partial_0 J_1) - J_1^2] dx dt \\ &= - \int \int_{t_1}^{t_2} (\nabla_1^{-1} J_0) (\partial_0 J_1) dx dt - \int \int_{t_1}^{t_2} J_1^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

onde utilizamos a identidade<sup>3</sup>  $J_0 = \nabla_1^{-1} \partial_0 J_1$  e que o operador  $\nabla_1$  é anti-auto-adjunto, como no caso (2.3.12). Dessa forma, como  $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \partial_0 J_1} = \pi(x)$  [41], [42], teremos, calculando a derivada

<sup>2</sup>Ressaltamos nesse ponto a notação utilizada da soma para índices repetidos. Nesse caso,  $f^{abc} t^c$  representa a soma do índice da álgebra  $c$

<sup>3</sup>que surge ao aplicarmos a inversa  $\nabla_1^{-1}$  em ambos os lados de (3.1.4)



funcional de (3.1.10):

$$\pi(x) = \nabla^{-1} J_0 \quad (3.1.11)$$

que é o momento conjugado do modelo.

Para as coordenadas generalizadas  $(J_1)_a(x) = q_a(x)$  e  $\pi_a(x)$  obtidas, temos os parênteses de Poisson canônicos:

$$\{q_a(x), q_b(y)\} = 0 = \{\pi_a(x), \pi_b(y)\} \quad (3.1.12)$$

$$\{\pi_a(x), q_b(y)\} = \delta_{ab} \delta(x - y) \quad (3.1.13)$$

□

Utilizamos a definição dos parênteses de Poisson de [13], dessa forma, facilmente obteremos:

$$\begin{aligned} \{\pi_a(x), q_b(y)\} &= \int dz \left[ \frac{\delta\pi_a(x)}{\delta\pi_c(z)} \frac{\delta q_b(y)}{\delta q_c(z)} - \frac{\delta\pi_a(x)}{\delta q_c(z)} \frac{\delta q_b(y)}{\delta\pi_c(z)} \right] = \int dz [\delta_{ac} \delta(x - z) \delta_{bc} \delta(y - z)], \\ &= \delta_{ab} \delta(x - y) \end{aligned}$$

O mesmo processo deve ser feito para os dois parênteses restantes. ■

Temos que a conexão de Lax para o PCM é dado por [36] e [43]:

$$L_1(x; \lambda) = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} (\lambda J_1(x) - J_0(x)), \quad (3.1.14)$$

dessa forma, é interessante escrever as expressões<sup>4</sup>(3.1.12) e (3.1.13) em termos das correntes do modelo. Essas expressões, que serão obtidas na Proposição (3.1), irão nos auxiliar na obtenção dos parênteses de Poisson entre as matrizes de transição do sistema.

**Proposição 3.1** *A estrutura de Poisson do PCM têm a seguinte forma<sup>5</sup>:*

$$\left\{ J_0^{(1)}(x), J_0^{(2)}(y) \right\} = \left[ \Omega_g, J_0^{(1)}(x) \right] \delta(x - y) \quad (3.1.15)$$

$$\left\{ J_0^{(1)}(x), J_1^{(2)}(y) \right\} = \left[ \Omega_g, J_1^{(1)}(x) \right] \delta(x - y) - \Omega_g \partial_x \delta(x - y) \quad (3.1.16)$$

$$\left\{ J_1^{(1)}(x), J_1^{(2)}(y) \right\} = 0, \quad (3.1.17)$$

onde  $\Omega_g = t^a \otimes t_a$  representa o elemento de Casimir da algebra de Lie  $\mathfrak{g}$  na base  $t_a$ .

<sup>4</sup>Parênteses de Poisson canônicos

<sup>5</sup>Lembrando da notação tensorial  $\overset{(1)}{A} = A \otimes \mathbb{1}$  e  $\overset{(2)}{A} = \mathbb{1} \otimes A$

□

Vamos escrever os parênteses de Poisson desejados em termos de componentes da álgebra. Para isso, de (3.1.11), utilizaremos

$$J_0 = -\nabla_1 \pi \quad (3.1.18)$$

e a identidade de Jacobi (3.1.7) para as constantes de estrutura  $f^{abc}$ .

$$\bullet \left\{ J_0^{(1)}(x), J_0^{(2)}(y) \right\}$$

Em termos das componentes da álgebra:

$$\begin{aligned} \{J_0(x)^a, J_0(y)^b\} &= \{\nabla_1 \pi_a(x), \nabla_1 \pi_b(y)\} = \left\{ \frac{\partial \pi_a}{\partial x} - q_d(x) f^{dea} \pi_e, \frac{\partial \pi_b}{\partial y} - q_m(y) f^{mnb} \pi_n(y) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\{\pi_a(x), \pi_b(y)\}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x} \{\pi_a(x), q_m(y) \pi_n(y)\} f^{mnb} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \{q_d(x) \pi_e(x), \pi_b(y)\} f^{dea} + \{q_d(x) \pi_e(x), q_m(y) \pi_n(y)\} f^{dea} f^{mnb} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [\{\pi_a(x), q_m(y)\} \pi_n(y)] f^{mnb} - \frac{\partial}{\partial y} [\{q_d(x), \pi_b(y)\} \pi_e(x)] f^{dea} + \\ &\quad + [q_d(x) \{\pi_e(x), q_m(y) \pi_n(y)\} + \{q_d(x), q_m(y) \pi_n(y)\} \pi_e(x)] f^{dea} f^{mnb} \\ &= -\partial_x [\pi^n(y) \delta(x-y)] f^{ban} + [\partial_y \delta(x-y)] \pi^e(x) f^{ade} \\ &\quad + q^d(x) \pi^n(y) f^{ade} f^{ben} \delta(x-y) - q^m(y) \pi^e(x) f^{ade} f^{bmd} \delta(x-y) \\ &= -[\partial_x \pi^n(x)] \delta(x-y) f^{ban} + q^d(x) \pi^n(x) (f^{ade} f^{ben} - f^{atn} f^{bdt}) \delta(x-y) \\ &= -\partial_x \pi^n(x) \delta(x-y) f^{ban} + q^d(x) \pi^n(x) (-f^{den} f^{bae}) \\ &= (-\partial_x \pi^n(x) - q^d(x) \pi^e(x) f^{dne}) f^{ban} \delta(x-y) \\ &= -f^{ban} \nabla_1 \pi^n(x) \delta(x-y) \\ &\Rightarrow \{J_0(x)^a, J_0(y)^b\} = -f^{abn} J_0^n(x) \delta(x-y) \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Da expressão (3.1.19) obtida, e sabendo que a podemos escrever em termos da estrutura de Casimir:

$$f^{abn} J_0^n(x) \delta(x-y) = - \left[ \Omega_g, J_0^{(1)}(x) \right] \delta(x-y),$$

teremos:

$$\left\{ J_0^{(1)}(x), J_0^{(2)}(y) \right\} = \left[ \Omega_g, J_0^{(1)}(x) \right] \delta(x-y)$$

$$\bullet \left\{ J_0^{(1)}(x), J_1^{(2)}(y) \right\}$$

Em termos das componentes da álgebra:

$$\begin{aligned}
\{J_0^a(x), J_1^b(y)\} &= \{-\nabla_1 \pi^a(x), q^b(y)\} = \{-\partial_x \pi^a(x) + f^{ade} q^d(x) \pi^e(x), q^b(y)\} \\
&= -\partial_x \{\pi^a(x), q^b(y)\} + f^{ade} \{q^d(x) \pi^e(x), q^b(y)\} \\
&= -\partial_x [\delta^{ab} \delta(x-y)] + f^{ade} q^d(x) \{\pi^e(x), q^b(y)\} \\
&= -\delta^{ab} \partial_x \delta(x-y) + f^{ade} q^d(x) \delta^{eb} \delta(x-y) \\
&\Rightarrow \{J_0^a(x), J_1^b(y)\} = -\delta^{ab} \partial_x \delta(x-y) - f^{abd} q^d(x) \delta(x-y) \tag{3.1.20}
\end{aligned}$$

Como no caso anterior, podemos representar (3.1.20) a partir da estrutura de Casimir.

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta^{ab} \partial_x \delta(x-y) + f^{abd} q^d(x) \delta(x-y) &= - \left[ \Omega_g, J_1^{(1)}(x) \right] \delta(x-y) + \Omega_g \partial_x \delta(x-y) \\
&\Rightarrow \left\{ J_0^{(1)}(x), J_1^{(2)}(y) \right\} = - \left[ \Omega_g, J_1^{(1)}(x) \right] \delta(x-y) + \Omega_g \partial_x \delta(x-y)
\end{aligned}$$

$$\bullet \left\{ J_1^{(1)}(x), J_1^{(2)}(y) \right\}$$

Utilizamos os parênteses de Poisson canônicos (3.1.12) e verificamos:

$$\begin{aligned}
\{J_1^a(x), J_1^b(y)\} &= \{q^a(x), q^b(y)\} = 0 \tag{3.1.21} \\
&\Rightarrow \left\{ J_1^{(1)}(x), J_1^{(2)}(y) \right\} = 0
\end{aligned}$$

■

A partir da Proposição 3.1, calcularemos agora o parênteses de Poisson entre o operadores de Lax  $L_1(x, \lambda)$  e  $L_1(y, \mu)$ . Considere então a seguinte proposição:

**Proposição 3.2** *A relação de comutação entre as conexões de Lax para o PCM é dada por:*

$$\begin{aligned}
\left\{ L_1^{(1)}(x, \lambda), L_1^{(2)}(y, \mu) \right\} &= \frac{4\lambda\mu(\lambda + \mu)}{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)} \Omega_g \partial_x \delta(x-y) - \\
&\quad - \frac{2\lambda\mu}{(1 - \lambda^2)(\lambda - \mu)} \left[ \Omega_g, L_1^{(2)}(\mu) \right] \delta(x-y) - \\
&\quad - \frac{2\lambda\mu}{(1 - \mu^2)(\lambda - \mu)} \left[ \Omega_g, L_1^{(1)}(\lambda) \right] \delta(x-y),
\end{aligned}$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são os parâmetros espectrais do modelo.

□

Calculando os parênteses de Poisson entre o par de Lax (3.1.14):

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{(1)}{L}_1(x, \lambda), \overset{(2)}{L}_1(y, \mu) \right\} &= \frac{4\lambda\mu}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} \left\{ \lambda \overset{(1)}{J}_1(x) - \overset{(1)}{J}_0(x), \mu \overset{(2)}{J}_1(y) - \overset{(2)}{J}_0(y) \right\} \\
&= \frac{4\lambda\mu}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} \left[ \lambda\mu \underbrace{\left\{ \overset{(1)}{J}_1(x), \overset{(2)}{J}_1(y) \right\}}_{=0 \text{ (3.1.17)}} - \lambda \underbrace{\left\{ \overset{(1)}{J}_1(x), \overset{(2)}{J}_0(y) \right\}}_{\mathbf{I}} - \right. \\
&\quad \left. - \mu \underbrace{\left\{ \overset{(1)}{J}_0(x), \overset{(2)}{J}_1(y) \right\}}_{(3.1.16)} + \underbrace{\left\{ \overset{(1)}{J}_0(x), \overset{(2)}{J}_0(y) \right\}}_{(3.1.15)} \right] \\
&= \frac{4\lambda\mu}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} \left\{ \left[ \Omega_g, \overset{(1)}{J}_0(x) \right] \delta(x-y) - \mu \left[ \Omega_g, \overset{(1)}{J}_1(x) \right] \delta(x-y) - \right. \\
&\quad \left. - \lambda \underbrace{\left\{ \overset{(1)}{J}_1(x), \overset{(2)}{J}_0(y) \right\}}_{\mathbf{I}} + \mu \Omega_g \partial_x \delta(x-y) \right\}
\end{aligned}$$

Vamos obter uma expressão para o item **I** indicado, através da Proposição 3.1:

(**I**)

Fazendo a transformação  $x \leftrightarrow y$  na expressão (3.1.15):

$$\left\{ \overset{(1)}{J}_0(x), \overset{(2)}{J}_1(y) \right\} = [\Omega_g, \overset{(1)}{J}_1(y)] \delta(x-y) + \Omega_g \partial_x \delta(x-y),$$

dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{(1)}{J}_1(x), \overset{(2)}{J}_0(y) \right\} &= -\mathbb{P} \left\{ \overset{(1)}{J}_0(y), \overset{(2)}{J}_1(x) \right\} \mathbb{P} \\
&\Rightarrow \left\{ \overset{(1)}{J}_1(x), \overset{(2)}{J}_0(y) \right\} = - \left[ \Omega_g, \overset{(2)}{J}_1(y) \right] \delta(x-y) - \Omega_g \partial_x \delta(x-y)
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade, já discutida na Seção 2.7, da matriz de permutação  $\mathbb{P}$ :

$$\mathbb{P} \overset{(1)}{J}(x) \mathbb{P} = \mathbb{P} (J(x) \otimes \mathbb{1}) \mathbb{P} = \mathbb{1} \otimes J(x)$$

(**I**)

Dessa forma, a expressão parcial até aqui é:

$$\left\{ \begin{matrix} (1) \\ L_1(x, \lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ L_1(y, \mu) \end{matrix} \right\} = \frac{4\lambda\mu}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} \left\{ \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (1) \\ J_0(x) \end{matrix} \right] \delta(x-y) - \mu \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (1) \\ J_1(x) \end{matrix} \right] \delta(x-y) + \right. \\ \left. + \lambda \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (2) \\ J_1(y) \end{matrix} \right] \delta(x-y) + \mu\Omega_g\partial_x\delta(x-y) + \lambda\Omega_g\partial_x\delta(x-y) \right\}. \quad (3.1.22)$$

As seguintes relações<sup>6</sup>, obtidas após isolarmos as correntes do modelo em (3.1.14):

$$J_0 = \frac{(1-\lambda_1^2)\lambda_2}{2\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}L_1(\lambda_1) - \frac{(1-\lambda_2^2)\lambda_1}{2\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}L_1(\lambda_2) \\ J_1 = \frac{1-\lambda_1^2}{2\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}L_1(\lambda_1) - \frac{1-\lambda_2^2}{2\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}L_1(\lambda_2),$$

ao serem substituídas na expressão (3.1.22) e após simples manipulações algébricas, nos levam ao resultado desejado:

$$\left\{ \begin{matrix} (1) \\ L_1(x, \lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ L_1(y, \mu) \end{matrix} \right\} = \frac{4\lambda\mu(\lambda+\mu)}{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)}\Omega_g\partial_x\delta(x-y) - \\ - \frac{2\lambda\mu}{(1-\lambda^2)(\lambda-\mu)} \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (2) \\ L_1(\mu) \end{matrix} \right] \delta(x-y) - \\ - \frac{2\lambda\mu}{(1-\mu^2)(\lambda-\mu)} \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (1) \\ L_1(\lambda) \end{matrix} \right] \delta(x-y)$$

■

Observe que a expressão obtida nesta Proposição não é ultralocal. Vamos verificar se essa propriedade de não-ultralocalidade se estende para os parênteses de Poisson entre as matrizes de transição do modelo. Dessa forma, poderemos julgar se a algebra de Poisson para o PCM tem algum sentido.

A forma da matriz de transição para o PCM é equivalente a (2.6.5):

$$T(x, y; \lambda) = P \exp \int_x^y dz L(z, \lambda).$$

E os seus respectivos parênteses de Poisson são, de forma semelhante a Proposição 2.3, os seguintes [13]:

$$\left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(x, y, \lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', y', \mu) \end{matrix} \right\} = \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, \lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', \mu) \end{matrix} \cdot \\ \cdot \left\{ \begin{matrix} (1) \\ L_1(z, \lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ L_1(z', \mu) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, \lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', \mu) \end{matrix} \quad (3.1.23)$$

<sup>6</sup>Observe que não explicitamos a coordenada espacial  $x$  ou  $y$  pelo simples motivo da propriedade de simetria da função  $\delta(x-y)$

Assim sendo, substituindo na expressão acima, o resultado obtido na Proposição 3.2, teremos a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left\{ T^{(1)}(x, y, \lambda), T^{(2)}(x', y', \mu) \right\} = \\ & = \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \mathcal{A} \Omega_g \partial_z \delta(z - z') T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) - \\ & - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \mathcal{B} \left[ \Omega_g, L_1(\mu) \right] \delta(z - z') T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \\ & - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \mathcal{C} \left[ \Omega_g, L_1(\lambda) \right] \delta(z - z') T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \end{aligned}$$

onde,

$$\mathcal{A} = \frac{4\lambda\mu(\lambda + \mu)}{(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)}, \quad \mathcal{B} = \frac{2\lambda\mu}{(1 - \lambda^2)(\lambda - \mu)} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \frac{2\lambda\mu}{(1 - \mu^2)(\lambda - \mu)}$$

Vamos simplificar a expressão acima por partes, linha a linha. Consideremos primeiro os termos ultralocais (com coeficientes  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{B}$ ):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathcal{C} \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \left[ \Omega_g, L_1(\lambda) \right] \delta(z - z') T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \\ & = \mathcal{C} \left[ \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \Omega_g \left( L_1(\lambda) T^{(1)}(z, y, \lambda) \right) T^{(2)}(z', y', \mu) \delta(z - z') - \right. \\ & \left. - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left( T^{(1)}(x, z, \lambda) L_1(\lambda) \right) T^{(2)}(x', z', \mu) \Omega_g T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \delta(z - z') \right] \\ & = \mathcal{C} \left[ \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \Omega_g \left( \partial_z T^{(1)}(z, y, \lambda) \right) T^{(2)}(z', y', \mu) \delta(z - z') - \right. \\ & \left. - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left( \partial_z T^{(1)}(x, z, \lambda) \right) T^{(2)}(x', z', \mu) \Omega_g T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \delta(z - z') \right] \\ & = \mathcal{C} \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \partial_z \left[ T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \Omega_g T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \right] \delta(z - z') \quad (3.1.24) \end{aligned}$$

De forma análoga, teremos:

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \mathcal{B} \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \left[ \Omega_g, L_1(\mu) \right] \delta(z - z') T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \\ & = \mathcal{B} \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \partial_{z'} \left[ T^{(1)}(x, z, \lambda) T^{(2)}(x', z', \mu) \Omega_g T^{(1)}(z, y, \lambda) T^{(2)}(z', y', \mu) \right] \delta(z - z') \quad (3.1.25) \end{aligned}$$

Assim sendo, reunindo os dois termos obtidos acima e o termo com a não-ultralocalidade

(contendo o coeficiente  $\mathcal{A}$ ), podemos escrever os parênteses de Poisson da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(x, y, \lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', y', \mu) \end{matrix} \right\} = \\ = -2\mathcal{B} \left( \theta(x, y', y) \begin{matrix} (1) \\ T(x, y'; \lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', y'; \mu) \end{matrix} \Omega_g \begin{matrix} (1) \\ T(y', y; \lambda) \end{matrix} \right. \\ \left. + \theta(x, x', y) \begin{matrix} (1) \\ T(x, x'; \lambda) \end{matrix} \Omega_g \begin{matrix} (1) \\ T(x', y; \lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', y'; \mu) \end{matrix} \right) - \\ - 2\mathcal{C} \left( \theta(x', y, y') \begin{matrix} (1) \\ T(x, y; \lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', y; \mu) \end{matrix} \Omega_g \begin{matrix} (2) \\ T(y, y'; \mu) \end{matrix} \right) \\ \left. + \theta(x', x, y') \begin{matrix} (2) \\ T(x', x; \mu) \end{matrix} \Omega_g \begin{matrix} (1) \\ T(x, y; \lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x, y'; \mu) \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

onde fizemos o produto  $\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu}$  no termo contendo o coeficiente  $\mathcal{A}$ <sup>7</sup> além de utilizarmos a importante propriedade da função delta de Dirac:

$$\int_x^y f(z) \delta'(z - z') dz = - \int_x^y f'(z) \delta(z - z') dz = -f'(z') \quad \text{para } x < z' < y, \quad (3.1.26)$$

para simplificarmos a expressão. Note também o uso da notação:

$$\theta(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < y < z \\ 0 & \text{para os casos restantes } x \neq y \neq z, \end{cases}$$

que surge devido aos limites de integração (observe a propriedade (3.1.26)) que definem o intervalo de nulidade da função delta de Dirac.

Observe que o resultado obtido surge dos termos com as funções delta de Dirac das integrais originais. A contribuição do termo não ultralocal é anulada com os termos de fronteira, após realizada a integração por partes.

É justamente as funções  $\theta$ <sup>8</sup> que vão gerar a ambiguidade nos parênteses de Poisson do PCM. Para observarmos isso, basta pegarmos como limites da matriz  $x, x' \rightarrow -\infty$  e  $y, y' \rightarrow \infty$ . Teremos então, dois intervalos possíveis (ver figura 11):

$$\begin{aligned} \bullet \quad x < x' \text{ e } y > y' &\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right\} = 2\mathcal{B} \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right] \\ \bullet \quad x' < x \text{ e } y' > y &\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right\} = 2\mathcal{C} \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

Ou seja, ambos parênteses são obviamente não-antissimétricos e incompatíveis com as identidades de Jacobi, levando a uma condição anômala para essa estrutura. Alguns procedimentos

<sup>7</sup>Assim teremos expressões comuns entre os coeficiente, facilitando a álgebra.

<sup>8</sup>Vale a pena ressaltar que as funções  $\theta$  em questão, são originadas dos termos com derivadas da função  $\delta(z - z')$ . Esse é o motivo da tal ambiguidade.

foram estudados para tornar a estrutura de Poisson do PCM viável. Como não abordaremos esses métodos neste trabalho, recomendamos a literatura [37], [14] e [44].

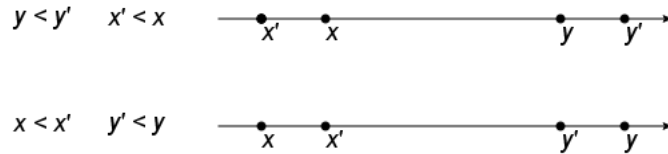


Figura 11: Intervalos utilizados para a análise da estrutura de Poisson dos modelos estudados. Veremos que para o PCM, a estrutura de Poisson é anômala. Já para a G2dD, graças às propriedades do dilaton, ela é viável.

Nesta próxima seção finalmente abordaremos a gravitação bidimensional. Veremos que, apesar da similaridade com o PCM, o campo dilaton  $\rho$  da G2dD inesperadamente retira essa ambiguidade e torna a estrutura de Poisson viável, levando assim a possibilidade da aplicação de métodos para a sua possível quantização.

### 3.2 Campo gravitacional bidimensional acoplado com o campo do dilaton

O estudo da redução dimensional de vários modelos de gravitação e supergravitação, levaram a teorias de campos bidimensionais efetivas possuindo uma estrutura acoplada a espaços cosets de modelos do tipo  $\sigma$ . Apesar dessas teorias de redução dimensional não serem abordados neste trabalho, elas já foram estudadas extensivamente pela literatura, como em [45], [46] e [47]. Dessa forma, começaremos nosso estudo da integrabilidade partindo da teoria gravitacional reduzida, já com o dilaton acoplado.

Dessa forma, temos o espaço coset  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  do modelo, onde  $\mathbf{G}$  é um grupo de Lie semisimples, com sua respectiva álgebra  $\mathfrak{g}$  e componentes  $t^a$ ; e  $\mathbf{H}$  é o subgrupo maximal compacto de  $\mathbf{G}$  (ou simplesmente complemento) com álgebra representada por  $\mathfrak{h}$ . A decomposição da álgebra do modelo é então dada por:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \tag{3.2.1}$$

e as relações de Lie, reflexos da simetria maximal do espaço coset, têm a seguinte estrutura:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{H}] \subset \mathbf{H}, \quad [\mathbf{H}, \mathbf{P}] \subset \mathbf{P}, \quad [\mathbf{P}, \mathbf{P}] \subset \mathbf{P} \tag{3.2.2}$$

Seja  $\Sigma$  um espaço bidimensional Lorentziano parametrizado pelas coordenadas  $x^\mu$ , com  $\mu = 0, 1$ . Os campos físicos da G2dD são mapeamentos  $g(x^\mu) : \Sigma \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$  - ou seja, possuem liberdade de calibre à multiplicação destrógena (ou levógena) de  $\mathbf{H}$ . Utilizaremos neste trabalho



as correntes destrógenas<sup>9</sup>:

$$J_\mu \equiv J_\mu^a t_a \equiv g^{-1} \partial_\mu g,$$

que permitem a seguinte decomposição, de acordo com (3.2.1):

$$J_\mu = Q_\mu + P_\mu, \quad \text{onde } Q_\mu \in \mathfrak{h} \quad \text{e } P_\mu \in \mathfrak{p}. \quad (3.2.3)$$

Por fim, as transformações de calibre dessa estrutura têm a forma:

$$Q_\mu \mapsto h^{-1} Q_\mu h + h^{-1} \partial_\mu h, \quad P_\mu \mapsto h^{-1} P_\mu h, \quad (3.2.4)$$

semelhantes a (2.5.9), onde  $h = h(x^\mu) \in \mathbf{H}$

Vamos agora estabelecer a estrutura canônica da G2dD. O Lagrangiano, reduzido e com a calibração fixa, têm a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \text{tr} (P_\mu P^\mu) = \frac{1}{2} \rho \text{tr} (P_0^2 - P_1^2). \quad (3.2.5)$$

Observe a similaridade com o Lagrangiano do PCM (3.1.1). Na G2dD, além das correntes do campo físico (correntes coset)  $P_\mu$  - em substituição ao grupo compacto do PCM - temos também o campo dilaton  $\rho$ , relacionado com a parte compactificada da métrica das dimensões superiores, após sua redução.

O campo dilaton obedece a equação de Laplace bidimensional:

$$\square \rho = 0, \quad (3.2.6)$$

cujas soluções são a equação de onda na forma:

$$\rho(x) = \rho_+(x^+) + \rho_-(x^-),$$

com o correspondente dual (campo axion [48]):

$$\tilde{\rho}(x) = \rho_+(x^+) - \rho_-(x^-),$$

onde temos a soma entre equação da onda viajando no sentido negativo ( $\rho_-(x^-)$ ) e no sentido positivo ( $\rho_+(x^+)$ ) do espaço bidimensional (com coordenadas (t,x)) e que  $x^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm t)$  representa as coordenadas de cone de luz.

Assim, podemos utilizar uma transformação conforme do tipo

$$\delta x^+ = \xi_-(x^+), \quad \delta x^- = \xi_+(x^-),$$

para então identificar  $\rho$  como uma coordenada espacial radial  $x = r \in [0, \infty[$  e o correspondente  $\tilde{\rho}$  como uma coordenada temporal  $t$  (coordenadas canônicas de Weyl [49] e [46]). Essas definições

---

<sup>9</sup>Isso não passa de uma escolha arbitrária. Poderíamos muito bem utilizar correntes levógenas  $J_\mu \equiv \partial_\mu g g^{-1}$

serão importantes para a nossa análise final, quando tomarmos os limites espaciais.

Por fim, definimos que o correspondente dual do dilatón deve satisfazer [39]:

$$\partial_\mu \tilde{\rho} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \rho. \quad (3.2.7)$$

Apesar das diferenças observadas entre os modelos, vamos introduzir a estrutura canônica de forma análoga ao modo que fizemos com o PCM: utilizaremos  $J_1(x)$  como coordenada generalizada e teremos a figura da derivada covariante, definida em (3.1.9).

Para obtermos o momento canônico correspondente, calculemos o funcional ação:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int \mathcal{L} dx dt = \frac{1}{2} \int \rho \operatorname{tr} (P_0^2 - P_1^2) dx dt = \frac{1}{2} \int \rho \operatorname{tr} [P_0 \cdot (J_0 - Q_0) - P_1^2] dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int \rho \operatorname{tr} [P_0 \cdot (\nabla_1^{-1} \partial_0 J_1) - P_1^2] dx dt = \frac{1}{2} \int \operatorname{tr} [\rho P_0 \cdot (\nabla_1^{-1} \partial_0 J_1) - \rho P_1^2] dx dt \\ &\Rightarrow \mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int \operatorname{tr} [(\partial_0 J_1) \nabla_1^{-1} (\rho P_0) + \rho P_1^2] dx dt, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

onde utilizamos a expressão (3.2.3) e a ortogonalidade entre seus espaços, a identidade  $\partial_0 J_1 = \nabla_1 J_0$  (veja (3.1.8)) e que o operador  $\nabla_1^{-1}$  é anti-auto-adjunto.

Lembremos que, devido a composição  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ , teremos conseqüentemente, além de (3.2.3), a extensão para o momento conjugado:

$$\pi_J = \pi_Q + \pi_P, \quad \text{onde } \pi_Q \in \mathfrak{h} \quad \text{e} \quad \pi_P \in \mathfrak{p},$$

sempre obedecendo a estrutura de Poisson canônica:

$$\left\{ J_1^a(x), \pi_J^b(y) \right\} = \delta^{ab} \delta(x - y), \quad (3.2.9)$$

onde  $a$  e  $b$  são os índices da álgebra.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \pi_J &= \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \dot{J}_1} = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \partial_0 J_1} \Rightarrow \pi_J = -\nabla_1^{-1} (\rho P_0) \Rightarrow \nabla_1 \pi_J = -\rho P_0 \\ &\Rightarrow \rho P_0 = -(\partial_1 \pi_J + [J_1, \pi_J]), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

onde utilizamos a CCN para o momento conjugado  $\nabla_1 \pi_J = \partial_1 \pi_J + [J_1, \pi_J]$ .

Teremos então, de (3.2.10), 2 relações resultantes; cada uma correspondente às álgebras:

$$\mathfrak{p} \quad \blacktriangleright \quad \rho P_0 = -\partial_1 \pi_P - [P_1, \pi_Q] - [Q_1, \pi_P] \quad (3.2.11)$$

$$\mathfrak{h} \quad \blacktriangleright \quad 0 = -\partial_1 \pi_Q - [P_1, \pi_P] - [Q_1, \pi_Q], \quad (3.2.12)$$

onde utilizamos as relações da álgebra de Lie (3.2.2).

Observemos que a segunda equação (3.2.12) define um conjunto de vínculos de primeira ordem, de modo que:

$$\phi \equiv -\partial_1 \pi_Q - [Q_1, \pi_Q] - [P_1, \pi_P] \approx 0 \quad (3.2.13)$$

Mais uma vez devido a ortogonalidade entre os espaços (3.2.3), temos que o elemento de Casimir da álgebra  $\Omega_g$  tem a decomposição  $\Omega_g = \Omega_h + \Omega_p$ . Destarte, partimos para as seguintes proposições.

**Proposição 3.3** *Os parênteses de Poisson canônicos, correspondentes a decomposição da álgebra, são:*

$$\left\{ \overset{(1)}{Q}_1(x), \overset{(2)}{\pi}_Q(y) \right\} = \Omega_h \delta(x-y), \quad \left\{ \overset{(1)}{P}_1(x), \overset{(2)}{\pi}_P(y) \right\} = \Omega_p \delta(x-y) \quad (3.2.14)$$

□

Vamos obter o primeiro parênteses de Poisson. Para isso, escreveremos na forma de componentes:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{(1)}{Q}_1(x), \overset{(2)}{\pi}_Q(y) \right\} &= \left\{ Q_1^q(t_q \otimes \mathbb{1}), \pi_Q^{q'}(\mathbb{1} \otimes t_{q'}) \right\} = \left\{ Q_1^q, \pi_Q^{q'} \right\} (t_q \otimes t_{q'}) \\ &= \delta^{qq'} (t_q \otimes t_{q'}) \delta(x-y) = \Omega_h \delta(x-y), \end{aligned}$$

onde utilizamos a estrutura canônica (3.2.9). Para obtermos o outro parênteses, basta proceder da mesma forma. ■

**Proposição 3.4** *Os parênteses de Poisson entre os campos têm a seguinte forma:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \left\{ \overset{(1)}{P}_0(x), \overset{(2)}{Q}_1(y) \right\} = \frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_p, \overset{(2)}{P}_1(x) \right] \delta(x-y) \\ (ii) \quad & \left\{ \overset{(1)}{P}_0(x), \overset{(2)}{P}_1(y) \right\} = \frac{\Omega_p}{\rho(x)} \partial_x \delta(x-y) + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_p, \overset{(2)}{Q}(x) \right] \delta(x-y) \\ (iii) \quad & \left\{ \overset{(1)}{P}_0(x), \overset{(2)}{g}(y) \right\} = \frac{1}{\rho(x)} \overset{(2)}{g}(x) \Omega_p \delta(x-y) \\ (iv) \quad & \left\{ \overset{(1)}{P}_0(x), \overset{(2)}{P}_0(y) \right\} = \frac{1}{\rho^2(x)} \left[ \Omega_p, \overset{(2)}{\phi}(x) \right] \delta(x-y), \end{aligned}$$

e a álgebra de Poisson entre os vínculos  $\phi(x)$ :

$$(v) \quad \left\{ \overset{(1)}{\phi}(x), \overset{(2)}{\phi}(y) \right\} = \left[ \Omega_h, \overset{(2)}{\phi}(x) \right] \delta(x-y)$$

□

Vamos obter cada um dos parênteses da Proposição acima. Para isso, basicamente utilizaremos as expressões (3.2.11) e (3.2.12) e os comutadores obtidos no Apêndice A

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \left\{ P_0^{(1)}(x), Q_1^{(2)}(y) \right\} \\
&= \left\{ P_0(x) \otimes_{\rho} Q_1(y) \right\} = -\frac{1}{\rho(x)} \underbrace{\left\{ \partial_x \pi_P \otimes_{\rho} Q_1(y) \right\}}_{=0} - \frac{1}{\rho(x)} \left\{ [P_1(x), \pi_Q(x)] \otimes_{\rho} Q_1(y) \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\rho(x)} \left\{ \underbrace{[Q_1(x), \pi_P(x)]}_{=0} \otimes_{\rho} \pi_P(y) \right\} \\
&= -\frac{1}{\rho(x)} P_1(x) \left\{ \pi_Q(x) \otimes_{\rho} Q_1(y) \right\} + \frac{1}{\rho(x)} \left\{ \pi_Q(x) \otimes_{\rho} Q_1(y) \right\} P_1(x) \\
&= -\frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, P_1^{(1)}(x) \right] \delta(x-y) = \frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, P_1^{(2)}(x) \right] \delta(x-y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad & \left\{ P_0^{(1)}(x), P_1^{(2)}(y) \right\} \\
&= -\frac{1}{\rho(x)} \left\{ \partial_x \pi_P^{(1)}(x), P_1^{(2)}(y) \right\} - \frac{1}{\rho(x)} \left\{ \left[ P_1^{(1)}(x), \pi_Q^{(1)}(x) \right], P_1^{(2)}(y) \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\rho(x)} \left\{ \left[ Q_1^{(1)}(x), \pi_P^{(1)}(x) \right], P_1^{(2)}(y) \right\} \\
&= \frac{1}{\rho(x)} \partial_x (\Omega_{\mathfrak{p}} \delta(x-y)) - \frac{1}{\rho(x)} \left\{ (Q_1(x) \pi_P(x)) \otimes_{\rho} P_1(y) \right\} + \frac{1}{\rho(x)} \left\{ (\pi_P(x) Q_1(x)) \otimes_{\rho} P_1(y) \right\} \\
&= \frac{\Omega_{\mathfrak{p}}}{\rho(x)} \partial_x \delta(x-y) + \frac{1}{\rho(x)} \left[ Q_1^{(1)}(x), \Omega_{\mathfrak{p}} \right] \delta(x-y) \\
&= \frac{\Omega_{\mathfrak{p}}}{\rho(x)} \partial_x \delta(x-y) + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, Q_1^{(2)}(x) \right] \delta(x-y)
\end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \left\{ P_0^{(1)}(x), g^{(2)}(y) \right\}$$

Nesses parênteses de Poisson, vamos proceder de uma maneira um pouco diferente. Primeiro calcularemos o lado direito (LD) da expressão, e, em seguida vamos comparar com

o lado esquerdo (LE). Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{LD} &\Rightarrow \left\{ P_0^{(1)}(x), g^{(2)}(y) \right\} = \left\{ P_0(x) \otimes g^{-1} \partial_y g(y) \right\} = \left\{ P_0(x) \otimes P_1(y) + Q_1(y) \right\} \\
&= \frac{\Omega_p}{\rho(x)} \partial_x \delta(x-y) + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_p, Q_1^{(2)}(x) \right] \delta(x-y) + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_p, P_1^{(2)}(y) \right] \delta(x-y) \\
&= \frac{\Omega_p}{\rho(x)} \partial_x \delta(x-y) + \frac{1}{\rho(x)} \left[ \Omega_p, J_1^{(2)}(y) \right] \delta(x-y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{LE} &\Rightarrow \left\{ P_0(x) \otimes g^{-1} \partial_y g(y) \right\} = g^{-1}(y) \partial_y \left\{ P_0(x) \otimes g(y) \right\} + \left\{ P_0(x) \otimes g^{-1}(y) \right\} \partial_y g^{(2)}(y) \\
&= g^{-1}(y) \partial_y \left\{ P_0(x) \otimes g(y) \right\} - g^{-1}(y) \left\{ P_0(x) \otimes g(y) \right\} g^{-1}(y) \partial_y g^{(2)}(y) \\
&= g^{-1}(y) \partial_y \left\{ P_0(x) \otimes g(y) \right\} - \left\{ P_0(x) \otimes g(y) \right\} g^{-1}(y) J^{(2)}(y)
\end{aligned}$$

É fácil observar então que, para satisfazer  $\mathbf{LE}=\mathbf{LD}$ , teremos que:

$$\left\{ P_0(x) \otimes g(y) \right\} = \left\{ P_0^{(1)}(x), g^{(2)}(y) \right\} = -\frac{1}{\rho(x)} g^{(2)}(x) \Omega_p \delta(x-y)$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad &^{10} \left\{ P_0^{(1)}(x), P_0^{(2)}(y) \right\} \\
&= \frac{1}{\rho(x)\rho(y)} \left\{ \partial_x \left[ \pi_P^{(1)} + \left[ Q_1^{(1)}, \pi_P^{(1)} \right] + \left[ P_1^{(1)}, \pi_Q^{(1)} \right], \partial_y \left[ \pi_P^{(2)} + \left[ Q_1^{(2)}, \pi_P^{(2)} \right] + \left[ P_1^{(2)}, \pi_Q^{(2)} \right] \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\rho(x)\rho(y)} [\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}]
\end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \partial_x \left( \left\{ \pi_P^{(1)}, P_1^{(2)}(y) \right\} \pi_Q^{(2)}(y) - \pi_Q^{(2)}(y) \left\{ \pi_P^{(1)}, P_1^{(2)}(y) \right\} \right) \\
&\quad + \partial_y \left( \left\{ P_1^{(1)}, \pi_P^{(2)}(y) \right\} \pi_Q^{(1)} - \pi_Q^{(1)} \left\{ P_1^{(1)}, \pi_P^{(2)}(y) \right\} \right), \\
\mathfrak{B} &= \left\{ Q_1^{(1)} \pi_P^{(1)} - \pi_P^{(1)} Q_1^{(1)}, P_1^{(2)}(y) \pi_Q^{(2)}(y) - \pi_Q^{(2)}(y) P_1^{(2)}(y) \right\}
\end{aligned}$$

e,

$$\mathfrak{C} = \left\{ P_1^{(1)} \pi_Q^{(1)} - \pi_Q^{(1)} P_1^{(1)}, Q_1^{(2)}(y) \pi_P^{(2)}(y) - \pi_P^{(2)}(y) Q_1^{(2)}(y) \right\}$$

Calcularemos então cada termo isoladamente.

---

<sup>10</sup>Uma identidade importante para o cálculo desses parênteses é  $\overset{(1)}{A} \overset{(2)}{B} = \overset{(2)}{B} \overset{(1)}{A}$

Para o termo  $\mathfrak{A}$  teremos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \partial_x \left[ -\Omega_{\mathfrak{p}} \overset{(2)}{\pi}(Q)(y) \delta(x-y) + \overset{(2)}{\pi}_Q \Omega_{\mathfrak{p}} \delta(x-y) \right] + \partial_y \left[ \Omega_{\mathfrak{p}} \overset{(1)}{\pi}(Q)(y) \delta(x-y) - \overset{(1)}{\pi}_Q \Omega_{\mathfrak{p}} \delta(x-y) \right] \\
&= \partial_x \left( \left[ \overset{(2)}{\pi}_Q, \Omega_{\mathfrak{p}} \right] \delta(x-y) \right) - \left[ \overset{(1)}{\pi}_Q, \Omega_{\mathfrak{p}} \right] \partial_y \delta(x-y) \\
&= -\partial_x \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{\pi}_Q \right] \delta(x-y) - \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{\pi}_Q \right] \partial_x \delta(x-y) + \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{\pi}_Q \right] \partial_x \delta(x-y) \\
&= - \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \partial_x \overset{(2)}{\pi}_Q \right] \delta(x-y)
\end{aligned}$$

Para o termo  $\mathfrak{B}$ :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \left\{ \overset{(1)}{Q}_1 \overset{(1)}{\pi}_P, \overset{(2)}{P}_1(y) \overset{(2)}{\pi}_Q(y) \right\} - \left\{ \overset{(1)}{Q}_1 \overset{(1)}{\pi}_P, \overset{(2)}{\pi}_Q(y) \overset{(2)}{P}_1(y) \right\} - \left\{ \overset{(1)}{\pi}_P \overset{(1)}{Q}_1, \overset{(2)}{P}_1(y) \overset{(2)}{\pi}_Q(y) \right\} + \\
&\quad + \left\{ \overset{(1)}{\pi}_P \overset{(1)}{Q}_1, \overset{(2)}{\pi}_Q(y) \overset{(2)}{P}_1(y) \right\} \\
&= \left[ -\overset{(1)}{Q}_1 \Omega_P \overset{(2)}{\pi}_Q + \overset{(2)}{P}_1 \Omega_{\mathfrak{h}} \overset{(1)}{\pi}_P + \overset{(1)}{Q}_1 \overset{(2)}{\pi}_Q \Omega_{\mathfrak{p}} - \Omega_{\mathfrak{h}} \overset{(2)}{P}_1 \overset{(1)}{\pi}_P - \overset{(1)}{\pi}_P \overset{(2)}{P}_1 \Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{p}} \overset{(2)}{\pi}_Q \overset{(1)}{Q}_1 + \right. \\
&\quad \left. + \overset{(1)}{\pi}_P \Omega_{\mathfrak{h}} \overset{(2)}{P}_1 - \overset{(2)}{\pi}_Q \Omega_{\mathfrak{p}} \overset{(1)}{Q}_1 \right] \delta(x-y) \\
&= \left\{ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(1)}{Q}_1 \right] \overset{(2)}{\pi}_Q - \overset{(2)}{\pi}_Q \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(1)}{Q}_1 \right] + \overset{(2)}{P}_1 \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(1)}{\pi}_P \right] - \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(1)}{\pi}_P \right] \overset{(2)}{P}_1 \right\} \delta(x-y) \\
&= \left\{ \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(1)}{Q}_1 \right], \overset{(2)}{\pi}_Q \right] - \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(1)}{\pi}_P \right], \overset{(2)}{P}_1 \right] \right\} \delta(x-y) \\
&= \left\{ \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{\pi}_P \right], \overset{(2)}{P}_1 \right] - \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{Q}_1 \right], \overset{(2)}{\pi}_Q \right] \right\} \delta(x-y)
\end{aligned}$$

E, de forma semelhante ao termo  $\mathfrak{B}$ , temos que o  $\mathfrak{C}$  tem a seguinte forma:

$$\mathfrak{C} = \left\{ \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{\pi}_Q \right], \overset{(2)}{Q}_1 \right] - \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{P}_1 \right], \overset{(2)}{\pi}_P \right] \right\} \delta(x-y)$$

Reunindo os termos  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{C}$  e utilizando a identidade de Jacobi (3.1.7) teremos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} + \mathfrak{C} &= \left\{ \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{\pi}_P \right], \overset{(2)}{P}_1 \right] - \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{Q}_1 \right], \overset{(2)}{\pi}_Q \right] + \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{\pi}_Q \right], \overset{(2)}{Q}_1 \right] - \left[ \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{P}_1 \right], \overset{(2)}{\pi}_P \right] \right\} \delta(x-y) \\
&= - \left\{ \left[ \left[ \overset{(2)}{\pi}_Q, \overset{(2)}{Q}_1 \right], \Omega_{\mathfrak{p}} \right] + \left[ \left[ \overset{(2)}{\pi}_P, \overset{(2)}{P}_1 \right], \Omega_{\mathfrak{p}} \right] \right\} \delta(x-y) \\
&= - \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \left[ \overset{(2)}{Q}_1, \overset{(2)}{\pi}_Q \right] + \left[ \overset{(2)}{P}_1, \overset{(2)}{\pi}_P \right] \right] \delta(x-y).
\end{aligned}$$

E, finalmente:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} (1) \\ P_0(x), P_0(y) \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{\rho(x)\rho(y)} [\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}] \\ &= \frac{1}{\rho^2(x)} \left\{ \Omega_{\mathfrak{p}}, -\partial_x \begin{matrix} (2) \\ \pi_Q \end{matrix} - \left[ \begin{matrix} (2) \\ Q_1, \pi_Q \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} (2) \\ P_1, \pi_P \end{matrix} \right] \right\} \delta(x-y) \\ \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} (1) \\ P_0(x), P_0(y) \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{\rho^2(x)} \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \begin{matrix} (2) \\ \phi(x) \end{matrix} \right] \delta(x-y) \end{aligned}$$

(iv)  $\left\{ \begin{matrix} (1) \\ \phi(x), \phi(y) \end{matrix} \right\}$

O cálculo para esses parênteses fica trivial, já que o mesmo é um caso mais simples dos parênteses (iv) calculado acima. Deixamos então para o leitor a obtenção dessa expressão. ■

Algo interessante de se notar é que entre os parênteses obtidos na Proposição 3.4 existe um termo não ultralocal  $\partial_x \delta(x-y)$ . Esse termo no PCM (e entre outros modelos 2-d integráveis) gerava ambiguidades e por conseguinte a impossibilidade de se obter uma estrutura de Poisson por métodos convencionais<sup>11</sup>.

### 3.2.1 Par de Lax e cargas conservadas

Após introduzirmos a estrutura do modelo e fixarmos a notação, vamos finalmente obter o Par de Lax e as cargas conservadas. Constataremos agora as fundamentais diferenças entre o PCM e a G2dD. A equação de movimento do modelo é dada por [39]:

$$D^\mu (\rho P_\mu) = D_0 (\rho P_0) - D_1 (\rho P_1) = 0 \quad (3.2.15)$$

onde a derivada covariante  $D^\mu$  é definida como:

$$D_\mu P_\nu \equiv \partial_\mu P_\nu + [Q_\mu, P_\nu] \quad (3.2.16)$$

Diante disso, vamos verificar a seguinte proposição.

**Proposição 3.5** *O par de Lax para a G2dD possui a seguinte estrutura:*

$$L_\mu(x, t; \gamma) = Q_\mu + \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} P_\mu + \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} \epsilon_{\mu\nu} P^\nu \quad (3.2.17)$$

onde a função de coordenadas  $\gamma(x, t; \omega)$  tem a forma:

$$\gamma(x, t; \omega) = \frac{1}{\rho} \left( \omega + \tilde{\rho} - \sqrt{(\omega + \tilde{\rho})^2 - \rho^2} \right) \quad (3.2.18)$$

<sup>11</sup>Já discutimos que existem na literatura métodos para tentar contornar esse problema

□

A partir da CCN podemos obter algumas relações, uma referente ao próprio par de Lax e a outra que corresponde às correntes da G2dD:

$$\partial_0 L_1 - \partial_1 L_0 + [L_0, L_1] = 0, \quad (3.2.19)$$

$$\partial_0 J_1 - \partial_1 J_0 + [J_0, J_1] = 0. \quad (3.2.20)$$

Observe que devido a decomposição da álgebra,  $J_\mu = Q_\mu + P_\mu$ , a expressão (3.2.20) pode ser expandida em dois termos:

$$\partial_0 Q_1 - \partial_1 Q_0 + [Q_0, Q_1] + [P_0, P_1] = 0 \quad \in \mathfrak{h} \quad (3.2.21)$$

$$\partial_0 P_1 - \partial_1 P_0 + [Q_0, P_1] + [P_0, Q_1] = 0 \quad \in \mathfrak{p}. \quad (3.2.22)$$

Diante disso, e lembrando do esquema representado na Figura 8 vamos escolher a seguinte forma para conexão de Lax:

$$L_\mu = Q_\mu + A(\gamma)P_\mu + B(\gamma)\epsilon_{\mu\nu}P^\nu.$$

Substituindo essa expressão na CCN (3.2.19) nos leva a:

$$\begin{aligned} & \partial_0 [Q_1 + A(\gamma)P_1 + B(\gamma)P_0] - \partial_1 [Q_0 + A(\gamma)P_0 + B(\gamma)P_1] + \\ & + [Q_0 + A(\gamma)P_0 + B(\gamma)P_1, Q_1 + A(\gamma)P_1 + B(\gamma)P_0] = 0, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

que resulta, após o uso das expressões expandidas (3.2.21) e (3.2.22) em:

$$\begin{aligned} & [A^2(\gamma) - B^2(\gamma) - 1] [P_0, P_1] + B(\gamma) [D_0 P_0 - D_1 P_1] + \\ & + P_1 [\partial_0 A(\gamma) - \partial_1 B(\gamma)] + P_0 [\partial_0 B(\gamma) - \partial_1 A(\gamma)] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Observamos então que (3.2.24) deve ser decomposta em duas:

- (i)  $[A^2(\gamma) - B^2(\gamma) - 1] [P_0, P_1] = 0$
- (ii)  $B(\gamma)D_\mu P^\mu + P_1 [\partial_0 A(\gamma) - \partial_1 B(\gamma)] + P_0 [\partial_0 B(\gamma) - \partial_1 A(\gamma)] = 0$

É trivial observar que uma possível solução de (i) para os coeficiente pode ser:

$$A(\gamma) = \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2}, \quad B(\gamma) = \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2}. \quad (3.2.25)$$



Para obtermos informações de **(ii)**, vamos reescrevê-lo de outra forma:

$$0 = \tag{3.2.26}$$

$$= B(\gamma)D_\mu P^\mu + P_1 [\partial_0 A(\gamma) - \partial_1 B(\gamma)] + P_0 [\partial_0 B(\gamma) - \partial_1 A(\gamma)]$$

$$= D_\mu P^\mu + B(\gamma)^{-1} [\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu A(\gamma) + \partial_\mu B(\gamma)] P^\mu, \tag{3.2.27}$$

e compará-lo com a equação de movimento da G2dD (3.2.15), que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} D^\mu (\rho P_\mu) &= (D^\mu \rho) P_\mu + \rho (D^\mu P_\mu) = (\partial^\mu \rho) P_\mu + \rho D^\mu P_\mu \\ \Rightarrow D^\mu P_\mu + \rho^{-1} (\partial^\mu \rho) P_\mu &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Assim, resultante da comparação entre (3.2.27) e (3.2.28) teremos:

$$B(\gamma)^{-1} (\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu A(\gamma) + \partial_\mu B(\gamma)) = \rho^{-1} \partial_\mu \rho$$

que, após utilizarmos (3.2.25), nos leva a seguinte expressão:

$$\rho^{-1} \partial_\mu \rho = \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma(1 - \gamma^2)} \partial_\mu \gamma + \frac{2}{1 - \gamma^2} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \gamma \tag{3.2.29}$$

Obtida a equação (3.2.29), pode ser verificado que uma possível solução é a seguinte:

$$\partial_\mu \gamma = \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} \gamma \rho^{-1} \partial_\mu \rho - \frac{2\gamma^2}{1 - \gamma^2} \rho^{-1} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \rho \tag{3.2.30}$$

Observe que para um parâmetro espectral  $w$ , a função de coordenadas (3.2.18) satisfaz a expressão (3.2.30), afirmada na proposição (ver apêndice).

Assim, a expressão resultante para o par de Lax é:

$$L_\mu(x, t; \gamma) = Q_\mu + \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} P_\mu + \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} \epsilon_{\mu\nu} P^\nu$$

■

A priori, o cálculo da álgebra de Poisson das matrizes de transição da G2dD é feita de forma semelhante ao que foi feito no PCM. Devemos observar, no entanto, o comportamento peculiar da função de coordenadas  $\gamma(x, t; \omega)$ . Dessa forma, segue a proposição.

**Proposição 3.6** *Os parênteses de Poisson entre as conexões de Lax têm a seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \left\{ L_1^{(1)}(z; \gamma_1), L_1^{(2)}(z'; \gamma_2) \right\} &= \frac{2\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1\gamma_2)\rho} \left[ \Omega_b, L_1^{(1)}(\gamma_1) + L_1^{(2)}(\gamma_2) \right] \delta(z - z') + \\ &+ \frac{2\gamma_2^2(1 - \gamma_1^2)}{(1 - \gamma_2^2)(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1\gamma_2)} \left[ \Omega_p, L_1^{(1)}(\gamma_1) \right] \delta(z - z') + \\ &+ \frac{2\gamma_1^2(1 - \gamma_2^2)}{(1 - \gamma_1^2)(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1\gamma_2)} \left[ \Omega_p, L_1^{(2)}(\gamma_2) \right] \delta(z - z') - \\ &- \frac{2\Omega_p}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)} \left[ \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1^2)}{\rho(z')} + \frac{\gamma_1(1 + \gamma_2^2)}{\rho(z)} \right] \partial_z \delta(z - z'), \end{aligned}$$

onde  $\gamma_1 \equiv \gamma(z, t; v)$  e  $\gamma_2 \equiv \gamma(z', t, \omega)$

□

Inserindo as conexões de Lax (3.2.17) na estrutura de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  nos leva a:

$$\begin{aligned} \left\{ L_1^{(1)}(z, \gamma_1), L_1^{(2)}(z', \gamma_2) \right\} &= \\ &= -\frac{2\gamma_2}{1 - \gamma_2^2} \left\{ Q_1^{(1)}(z, \gamma_1), P_0^{(2)}(z', \gamma_2) \right\} - \frac{1 + \gamma_1^2}{1 - \gamma_1^2} \frac{2\gamma_2}{1 - \gamma_2^2} \left\{ P_1^{(1)}(z, \gamma_1), P_0^{(2)}(z', \gamma_2) \right\} - \\ &- \frac{2\gamma_1}{1 - \gamma_1^2} \left\{ P_0^{(1)}(z, \gamma_1), Q_1^{(2)}(z', \gamma_2) \right\} - \frac{2\gamma_1}{1 - \gamma_1^2} \frac{1 + \gamma_2^2}{1 - \gamma_2^2} \left\{ P_0^{(1)}(z, \gamma_1), P_1^{(2)}(z', \gamma_2) \right\}. \end{aligned}$$

Podemos então introduzir os parênteses obtidos na Proposição 3.4 - o que resulta em:

$$\begin{aligned} &= \frac{2\gamma_2}{\rho(z')(1 - \gamma_2^2)} \left[ \Omega_p, P_1^{(1)}(z) \right] \delta(z - z') + \frac{1 + \gamma_1^2}{1 - \gamma_1^2} \frac{2\gamma_2}{(1 - \gamma_2^2)\rho(z')} \left[ \Omega_p, Q_1^{(1)}(z) \right] \delta(z - z') - \\ &- \frac{2\Omega_p}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)} \left[ \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1^2)}{\rho(z')} + \frac{\gamma_1(1 + \gamma_2^2)}{\rho(z)} \right] \partial_z \delta(z - z') - \\ &- \frac{2\gamma_1}{(1 - \gamma_1^2)\rho(z)} \left[ \Omega_p, P_1^{(2)}(z) \right] \delta(z - z') - \frac{1 + \gamma_2^2}{1 - \gamma_2^2} \frac{2\gamma_1}{(1 - \gamma_1^2)\rho(z)} \left[ \Omega_p, Q_1^{(2)}(z) \right] \delta(z - z') \\ &= \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1\gamma_2 + 1)}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)\rho} \left[ \Omega_p, Q_1^{(1)}(z) \right] \delta(z - z') + \\ &+ \frac{2\gamma_2}{\rho(z')(1 - \gamma_2^2)} \left[ \Omega_p, P_1^{(1)}(z) \right] \delta(z - z') - \frac{2\gamma_1}{(1 - \gamma_1^2)\rho(z)} \left[ \Omega_p, P_1^{(2)}(z) \right] \delta(z - z') - \\ &- \frac{2\Omega_p}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)} \left[ \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1^2)}{\rho(z')} + \frac{\gamma_1(1 + \gamma_2^2)}{\rho(z)} \right] \partial_z \delta(z - z') \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

De (3.2.17), temos

$$P_1(z) = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1^2 \gamma_2) L_1(\gamma_1) - (\gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2^2) L_1(\gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1 \gamma_2)} - \frac{1 + \gamma_1 \gamma_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2} Q_1(z),$$

que, ao ser introduzido em (3.2.31), reverte-se em:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} (1) \\ L_1(z, \gamma_1), L_1(z', \gamma_2) \end{matrix} \right\} = & \\ = & \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 \gamma_2 + 1)}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)\rho} \left\{ \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (1) \\ Q_1(z) \end{matrix} \right] + \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (2) \\ Q_1(z) \end{matrix} \right] \right\} \delta(z - z') + \\ & + \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1 \gamma_2)\rho} \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (1) \\ L_1(\gamma_2) + L_1(\gamma_1) \end{matrix} \right] \delta(z - z') + \\ & + \frac{2\gamma_2^2(1 - \gamma_1^2)}{(1 - \gamma_2^2)(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1 \gamma_2)\rho} \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (1) \\ L_1(\gamma_1) \end{matrix} \right] \delta(z - z') + \\ & + \frac{2\gamma_1^2(1 - \gamma_2^2)}{(1 - \gamma_1^2)(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1 \gamma_2)\rho} \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (2) \\ L_1(\gamma_2) \end{matrix} \right] \delta(z - z') - \\ & - \frac{2\Omega_p}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)} \left[ \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1^2)}{\rho(z')} + \frac{\gamma_1(1 + \gamma_2^2)}{\rho(z)} \right] \partial_z \delta(z - z') \end{aligned}$$

Utilizando os resultados do Apêndice A finalmente obtemos o resultado da Proposição 3.6. ■

De posse do resultado acima, podemos agora obter os parênteses de Poisson entre as matrizes de transição. Para isso, substituiremos a expressão obtida na Proposição 3.6 na relação (3.1.23), produzindo 4 termos:

$$\left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(x, y, v), T(x', y', w) \end{matrix} \right\} =$$

**Termo I**

$$\begin{aligned} & + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left[ \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1 \gamma_2)\rho} \right] \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \left[ \Omega_h, \begin{matrix} (1) \\ L_1(\gamma_1) + L_1(\gamma_2) \end{matrix} \right] \cdot \\ & \cdot \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} \delta(z - z') \end{aligned}$$

**Termo II**

$$\begin{aligned} & + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left[ \frac{2\gamma_2^2(1 - \gamma_1^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1 \gamma_2)(1 - \gamma_2^2)\rho} \right] \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (1) \\ L_1(\gamma_1) \end{matrix} \right] \cdot \\ & \cdot \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} \delta(z - z') \end{aligned}$$

Termo III

$$+ \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left[ \frac{2\gamma_1^2 (1 - \gamma_2^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \gamma_1\gamma_2)(1 - \gamma_1^2)\rho} \right] \begin{matrix} (1) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \left[ \Omega_p, L_1(\gamma_2) \right] \cdot \\ \cdot \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} \delta(z - z')$$

Termo IV

$$- \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left[ \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1^2)}{\rho(z')} + \frac{\gamma_1 (1 + \gamma_1)}{\rho(z)} \right] \left[ \frac{2}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)} \right] \cdot \\ \cdot \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \Omega_p \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} \partial_z \delta(z - z')$$

Vamos simplificar os parênteses de Poisson termo a termo.

Termo I

$$= - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{1}{v - w} \left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \Omega_h \left[ L_1(\gamma_1) + L_1(\gamma_2) \right] \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} - \right. \\ \left. - \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \left[ L_1(\gamma_1) + L_1(\gamma_2) \right] \Omega_h \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} \right\} \delta(z - z') \\ = - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{1}{v - w} \left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \Omega_h \left[ L_1(\gamma_1) \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \right] \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} + \right. \\ \left. + \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \Omega_h \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \left[ L_1(\gamma_2) \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} \right] - \right. \\ \left. - \left[ \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \begin{matrix} (1) \\ L_1(\gamma_1) \end{matrix} \right] \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \Omega_h \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} - \right. \\ \left. - \begin{matrix} (1) \\ T(x, z, v) \end{matrix} \left[ \begin{matrix} (2) \\ T(x', z', w) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ L_1(\gamma_2) \end{matrix} \right] \Omega_h \begin{matrix} (1) \\ T(z, y, v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(z', y', w) \end{matrix} \right\} \delta(z - z') \\ = - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{1}{v - w} \delta(z - z') (\partial_z + \partial_{z'}) \Xi_h \quad (3.2.32)$$

onde  $\Xi_h = T^{(1)}(x, z, v) T^{(2)}(x', z', w) \Omega_h^{(1)} T^{(1)}(z, y, v) T^{(2)}(z', y', w)$ . Observe que para chegarmos na forma (3.2.32) utilizamos a relação inversa do parâmetro espectral (B.0.3). Fazendo a integral por partes nos termos com derivadas espaciais:

$$\begin{aligned}
&= - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{v-w} \delta(z-z') \Xi_h \right] + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{1}{v-w} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \delta(z-z') \right] \Xi_h - \\
&\quad - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{1}{v-w} \delta(z-z') \Xi_h \right] + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{1}{v-w} \left[ \frac{\partial}{\partial z'} \delta(z-z') \right] \Xi_h \\
&= - \int_{x'}^{y'} dz' \frac{1}{v-w} [\delta(y-z') \Xi_h(z \rightarrow y) - \delta(x-z') \Xi_h(z \rightarrow x)] - \\
&\quad - \int_x^y dz \frac{1}{v-w} [\delta(z-y') \Xi_h(z' \rightarrow y') - \delta(z-x') \Xi_h(z' \rightarrow x')],
\end{aligned}$$

que, após a aplicação da função delta de Dirac na integral, os parênteses se reduzem a:

$$\begin{aligned}
&= - \frac{1}{v-w} \left[ \theta(x', x, y') T^{(2)}(x', x, w) \Omega_h^{(1)} T^{(1)}(x, y, v) T^{(2)}(x, y', w) - \right. \\
&\quad - \theta(x', y, y') T^{(1)}(x, y, v) T^{(2)}(x', y, w) \Omega_h^{(2)} T^{(1)}(y, y', w) + \\
&\quad + \theta(x, x', y) T^{(1)}(x, x', v) \Omega_h^{(1)} T^{(1)}(x', y, v) T^{(2)}(x', y', w) - \\
&\quad \left. - \theta(x, y', y) T^{(1)}(x, y', v) T^{(2)}(x', y', w) \Omega_h^{(1)} T^{(1)}(y', y, v) \right] \quad (3.2.33)
\end{aligned}$$

A notação  $\Xi(a \rightarrow b)$ , indica a transformação de variáveis que ocorre na função  $\Xi$ , referente aos limites da integral. Observe também que utilizamos a seguinte relação:  $\partial_z \delta(z-z') = -\partial_{z'} \delta(z-z')$ .

Termo II

$$\begin{aligned}
&= \int_x^y \int_{x'}^{y'} dzdz' \frac{2\gamma_2^2 (1 - \gamma_1^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1\gamma_2) (1 - \gamma_2^2) \rho} \delta(z - z') \partial_z \Xi_p \\
&= \int_x^y \int_{x'}^{y'} dzdz' \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{2\gamma_2^2 (1 - \gamma_1^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1\gamma_2) (1 - \gamma_2^2) \rho} \delta(z - z') \Xi_p \right] - \\
&\quad - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dzdz' \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{2\gamma_2^2 (1 - \gamma_1^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1\gamma_2) (1 - \gamma_2^2) \rho} \right] \delta(z - z') \Xi_p - \\
&\quad - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dzdz' \frac{2\gamma_2^2 (1 - \gamma_1^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1\gamma_2) (1 - \gamma_2^2) \rho} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \delta(z - z') \right] \Xi_p \\
&= \frac{\theta(x', x, y')}{v - w} \left[ \frac{\gamma(w, x) (1 - \gamma(v, x)^2)}{\gamma(v, x) (1 - \gamma(w, x)^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow x) - \frac{\theta(x', y, y')}{v - w} \left[ \frac{\gamma(w, y) (1 - \gamma(v, y)^2)}{\gamma(v, y) (1 - \gamma(w, y)^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow y) + \\
&\quad + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dzdz' \left\{ \frac{4\gamma_1^2 \gamma_2^2 (1 + \gamma_1^2) (\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1\gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)^2 (1 - \gamma_1\gamma_2)^2 (1 - \gamma_2^2) (1 - \gamma_1^2) \rho(z') \rho(z)} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \{ -2\gamma_1 \gamma_2^2 (1 - \gamma_1^4) [(1 - \gamma_1\gamma_2) + \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)] \} \delta(z - z') \Xi_p \partial_z \rho(z) + \\
&\quad + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dzdz' \left\{ \frac{8\gamma_1^3 \gamma_2^2 (\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1\gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)^2 (1 - \gamma_1\gamma_2)^2 (1 - \gamma_2^2) (1 - \gamma_1^2) \rho(z') \rho(z)} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \{ -4\gamma_1^2 \gamma_2^2 (1 - \gamma_1^2) [(1 - \gamma_1\gamma_2) + \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)] \} \delta(z - z') \Xi_p \partial_z \tilde{\rho}(z) - \\
&\quad - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dzdz' \left[ \frac{2\gamma_2^2 (1 - \gamma_1^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1\gamma_2) (1 - \gamma_2^2) \rho(z')} \right] \partial_z \delta(z - z') \tag{3.2.34}
\end{aligned}$$

onde  $\Xi_p = \overset{(1)}{T}(x, z, v) \overset{(2)}{T}(x', z', w) \Omega_p \overset{(1)}{T}(z, y, v) \overset{(2)}{T}(z', y', w)$ . Observe que utilizamos as recorrentes relações do apêndice B para obtermos o resultado acima com dependência de  $\partial_\mu \rho$ .

Utilizando a mesma idéia, podemos obter o terceiro termo.

Termo **III**

$$\begin{aligned}
&= - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{2\gamma_1^2 (1 - \gamma_2^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1 \gamma_2) (1 - \gamma_1^2) \rho} \delta(z - z') \partial_{z'} \Xi_p \\
&= \frac{\theta(x, x', y)}{v - w} \left[ \frac{\gamma(v, x') (1 - \gamma(w, x')^2)}{\gamma(w, x') (1 - \gamma(v, x')^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow x') - \frac{\theta(x, y', y)}{v - w} \left[ \frac{\gamma(v, y') (1 - \gamma(w, y')^2)}{\gamma(w, y') (1 - \gamma(v, y')^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow y') + \\
&\quad + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left\{ \frac{4\gamma_1^2 \gamma_2^2 (1 + \gamma_2^2) (\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1 \gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)^2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)^2 (1 - \gamma_2^2) (1 - \gamma_1^2) \rho(z') \rho(z)} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \{ 2\gamma_1^2 \gamma_2 (1 - \gamma_2^4) [(1 - \gamma_1 \gamma_2) - \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_1)] \} \delta(z - z') \Xi_p \partial_{z'} \rho(z') + \\
&\quad + \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left\{ \frac{8\gamma_1^2 \gamma_2^3 (\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1 \gamma_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)^2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)^2 (1 - \gamma_2^2) (1 - \gamma_1^2) \rho(z') \rho(z)} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \{ 4\gamma_1^2 \gamma_2^2 (1 - \gamma_2^2) [(1 - \gamma_1 \gamma_2) - \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_1)] \} \delta(z - z') \Xi_p \partial_{z'} \tilde{\rho}(z') - \\
&\quad - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \left[ \frac{2\gamma_1^2 (1 - \gamma_2^2)}{(\gamma_2 - \gamma_1) (1 - \gamma_1 \gamma_2) (1 - \gamma_1^2) \rho(z)} \right] \partial_{z'} \delta(z - z') \tag{3.2.35}
\end{aligned}$$

Termo **IV**

$$= - \int_x^y \int_{x'}^{y'} dz dz' \frac{2 [\rho^{-1}(z') \gamma_2 (1 + \gamma_1^2) + \rho^{-1}(z) \gamma_1 (1 + \gamma_2^2)]}{(1 - \gamma_1^2) (1 - \gamma_2^2)} \partial_z \delta(z - z') \Xi_p \tag{3.2.36}$$

Reunindo os 4 termos (3.2.33), (3.2.34), (3.2.35) e (3.2.36) observamos que as expressões que possuem derivada do Dilaton se cancelam, resultando somente em termos com a função  $\theta(x, y, z)$ , que são as mesmas definidas no PCM. Assim:

$$\begin{aligned}
& \left\{ T^{(1)}(x, y, v), T^{(2)}(x', y', w) \right\} = \\
& = -\frac{1}{v-w} \left[ \theta(x', x, y') T^{(2)}(x', x, w) \Omega_h T^{(1)}(x, y, v) T^{(2)}(x, y', w) - \right. \\
& - \theta(x', y, y') T^{(1)}(x, y, v) T^{(2)}(x', y, w) \Omega_h T^{(2)}(y, y', w) + \\
& + \theta(x, x', y) T^{(1)}(x, x', v) \Omega_h T^{(1)}(x', y, v) T^{(2)}(x', y', w) - \\
& \left. - \theta(x, y', y) T^{(1)}(x, y', v) T^{(2)}(x', y', w) \Omega_h T^{(1)}(y', y, v) \right] + \\
& + \frac{\theta(x', x, y')}{v-w} \left[ \frac{\gamma(w, x) (1 - \gamma(v, x)^2)}{\gamma(x, v) (1 - \gamma(x, w)^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow x) - \\
& - \frac{\theta(x', y, y')}{v-w} \left[ \frac{\gamma(w, y) (1 - \gamma(y, v)^2)}{\gamma(y, v) (1 - \gamma(y, w)^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow y) + \\
& + \frac{\theta(x, x', y)}{v-w} \left[ \frac{\gamma(x', v) (1 - \gamma(x', w)^2)}{\gamma(x', w) (1 - \gamma(x', v)^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow x') - \\
& - \frac{\theta(x, y', y)}{v-w} \left[ \frac{\gamma(y', v) (1 - \gamma(y', w)^2)}{\gamma(y', w) (1 - \gamma(y', v)^2)} \right] \Xi_p(z, z' \rightarrow y') \tag{3.2.37}
\end{aligned}$$

Observe que o nosso resultado para a G2dD é similar ao obtido para o PCM, já que há a presença das funções  $\theta(x, y, z)$ , geradoras de ambiguidades nas fronteiras. Assim, a primeira vista nos deparamos com o mesmo problema encontrado anteriormente. No entanto, a dependência da função de coordenadas  $\gamma(x, t, v)$ <sup>12</sup> com o parâmetro espectral  $v$  inverte essa situação. Podemos reescrever os 4 últimos termos centrais da expressão obtida, utilizando algumas expressões do Apêndice B. Teremos então, por exemplo, que:

$$\frac{\gamma(w, x) (1 - \gamma(v, x)^2)}{\gamma(x, v) (1 - \gamma(x, w)^2)} = \sqrt{\frac{(v + \tilde{\rho})^2 - \rho^2}{(w + \tilde{\rho})^2 - \rho^2}} \tag{3.2.38}$$

Substituindo as relações equivalentes a (3.2.38) acima, em (3.2.37) obtém-se uma expressão que pode ser analisada mais facilmente. Para essa análise, utilizaremos os mesmos limites que consideramos para o PCM:  $x, x' \rightarrow -\infty$  e  $y, y' \rightarrow \infty$ . Nessa situação, também podemos observar dois casos:  $x' < x, y < y'$  e  $x < x', y' < y$  (veja a figura 11). Dessa forma, obtemos os seguintes resultados:

- $x' < x$  e  $y' > y$

$$\left\{ T^{(1)}(v), T^{(2)}(w) \right\} = -\frac{1}{v-w} \left[ \Omega_h, T^{(1)}(v) T^{(2)}(w) \right] + \frac{1}{v-w} \sqrt{\frac{(v + \tilde{\rho})^2 - \rho^2}{(w + \tilde{\rho})^2 - \rho^2}} \left[ \Omega_p, T^{(1)}(v) T^{(2)}(w) \right]$$

<sup>12</sup>No caso do PCM,  $\gamma(x, t, v) = \lambda$  adquire um valor constante.



- $x' > x$  e  $y' < y$

$$\left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(v), T(w) \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{v-w} \left[ \Omega_h, \begin{matrix} (1) \\ T(v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(w) \end{matrix} \right] + \frac{1}{v-w} \sqrt{\frac{(w+\tilde{\rho})^2 - \rho^2}{(v+\tilde{\rho})^2 - \rho^2}} \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (1) \\ T(v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(w) \end{matrix} \right]$$

Observe que os segundos termos de ambos limites são diferentes. No entanto, como fizemos a escolha de  $\rho$  como coordenada de Weyl, nos infinitos espaciais o dilaton  $\rho$  (e seu dual  $\tilde{\rho}$ ) também vai a infinito, divergindo. Dessa forma, teremos um resultado único:

$$\left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(v), T(w) \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{v-w} \left[ \Omega_h, \begin{matrix} (1) \\ T(v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(w) \end{matrix} \right] + \frac{1}{v-w} \left[ \Omega_p, \begin{matrix} (1) \\ T(v) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(w) \end{matrix} \right] \quad (3.2.39)$$

já que

$$\lim_{\rho, \tilde{\rho} \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{(w+\tilde{\rho})^2 - \rho^2}{(v+\tilde{\rho})^2 - \rho^2}} \rightarrow +1$$

e

$$\lim_{\rho, \tilde{\rho} \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{(w+\tilde{\rho})^2 - \rho^2}{(v+\tilde{\rho})^2 - \rho^2}} \rightarrow +1$$

Dessa forma, nos limites a álgebra é única e bem definida, satisfazendo particularmente a antissimetria e as identidades de Jacobi. Assim, diferentemente do PCM, a G2dD possui uma estrutura de Poisson viável e pode, por esse formalismo, ser prosseguida pela quantização.

Vale a pena notar que a expressão (3.2.37) obtida acima não é invariante por transformação de calibre (3.2.4). Dessa forma, devemos utilizar uma quantidade que seja invariante por tal transformação; observa-se que a seguinte quantidade tem tal característica:

$$g(x)T(x, y; v)g^{-1}(y).$$

Calculando então os parênteses de Poisson entre essas matrizes de transição invariantes, nos leva a seguinte equação, mais genérica que (3.2.37):

$$\begin{aligned}
& g^{(1)-1}(x)g^{(2)-1}(x') \left\{ g^{(1)}(x)T^{(1)}(x, y, v)g^{(1)-1}(y), g^{(2)}(x')T^{(2)}(x', y', w)g^{(2)-1}(y') \right\} g^{(1)}(y)g^{(2)}(y') = \\
& = -\frac{1}{v-w} \left[ \theta(x', x, y')T^{(2)}(x', x, w)\Omega_h^{(1)}T^{(1)}(x, y, v)T^{(2)}(x, y', w) - \right. \\
& - \theta(x', y, y')T^{(1)}(x, y, v)T^{(2)}(x', y, w)\Omega_h^{(2)}T^{(2)}(y, y', w) + \\
& + \theta(x, x', y)T^{(1)}(x, x', v)\Omega_h^{(1)}T^{(1)}(x', y, v)T^{(2)}(x', y', w) - \\
& \left. - \theta(x, y', y)T^{(1)}(x, y', v)T^{(2)}(x', y', w)\Omega_h^{(1)}T^{(1)}(y', y, v) \right] + \\
& + \frac{\theta(x', x, y')}{v-w} \frac{1 - 2\gamma(x, w)\gamma(x, v) + \gamma^2(x, w)}{1 - \gamma(x, w)^2} \Xi_p(z, z' \rightarrow x) - \\
& - \frac{\theta(x', y, y')}{v-w} \frac{1 - 2\gamma(y, w)\gamma(y, v) + \gamma^2(y, w)}{1 - \gamma(y, w)^2} \Xi_p(z, z' \rightarrow y) + \\
& + \frac{\theta(x, x', y)}{v-w} \frac{1 - 2\gamma(x', v)\gamma(x', w) + \gamma^2(x', v)}{1 - \gamma(x', v)^2} \Xi_p(z, z' \rightarrow x') - \\
& - \frac{\theta(x, y', y)}{v-w} \frac{1 - 2\gamma(y', v)\gamma(y', w) + \gamma^2(y', v)}{1 - \gamma(y', v)^2} \Xi_p(z, z' \rightarrow y') \tag{3.2.40}
\end{aligned}$$

Escolhemos fazer a análise na fronteira na expressão não-invariante (3.2.37). Como concluímos a viabilidade da estrutura de Poisson nessa expressão, o caso se estende para a equação invariante por transformação de calibre obtida acima.

## 4 Conclusão

Nesta dissertação foi feita uma revisão do formalismo da integrabilidade clássica e de campos. Discutimos brevemente alguns modelos precursores que motivaram o desenvolvimento da representação de Lax e CCN. Utilizamos, nessa primeira parte da dissertação, como modelo representativo o NLS. Obtivemos seus pares de Lax, PPF e por fim, com a ajuda de outras quantidades necessárias, provamos a involução de suas quantidades conservadas. Discutimos também a idéia por trás de sua *matriz*  $r$ , que fornece uma alternativa interessante a CCN pois é mais geral e independe das variáveis dinâmicas do sistema.

Na segunda parte deste trabalho introduzimos e discutimos os dois modelos alvos de estudos: o PCM e a G2dD.

Primeiramente identificamos o PCM, suas propriedades gerais e assim, a partir de seu Lagrangeano obtemos suas equações de movimento e os parênteses de Poisson canônicos. Utilizamos o par de Lax proposto por [39] e calculamos o *PPF para o PCM*.

Ressalta-se a característica não-ultralocal do PPF no primeiro termo. Dessa expressão então obtivemos os parênteses de Poisson entre as matrizes de monodromia e calculamos seus valores em dois limites distintos no infinito:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x < x' \text{ e } y > y' &\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right\} = 2\mathcal{B} \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right] \\ \bullet \quad x' < x \text{ e } y' > y &\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda), \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right\} = 2\mathcal{C} \left[ \Omega_g, \begin{matrix} (1) \\ T(\lambda) \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ T(\mu) \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Verificamos então a propriedade anômala da estrutura de Poisson para o PCM: no infinito temos dois valores distintos para os parênteses. Dessa forma ficamos impedidos de prosseguir com o formalismo, com a identidade de Jacobi sendo violada.

Com a metodologia fixada pelo PCM, procedemos da mesma forma para a G2dD. Antes de tudo, no entanto devem ser ressaltadas duas diferenças principais entre os modelos: a presença do campo dilatón acoplado (resultante da redução dimensional) e a nova composição da álgebra, já que temos agora um espaço coset  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ . E são esses fatores que analisamos no desenvolvimento dos cálculos.

Começamos novamente com o Lagrangeano do modelo, identificamos  $\rho$  como as coordenadas canônicas de Weyl (o dilaton e seu dual correspondem as coordenadas espaciais e temporais respectivamente) e *construímos um par de Lax*<sup>1</sup> para a G2dD:

$$L_\mu(x, t; \gamma) = Q_\mu + \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} P_\mu + \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} \epsilon_{\mu\nu} P^\nu,$$

observe que agora temos um 'parâmetro espectral'  $\gamma$  que depende das coordenadas e um 'parâmetro espectral escondido'  $w$  constante, que seria o equivalente ao  $\lambda$  do PCM.

Dessa forma, a partir desse par de Lax, obtivemos o *PPF para a G2dD*. Novamente observamos um termo não ultralocal, o que nos levaria a crer que encontraríamos uma estrutura de Poisson ambígua. No entanto, ao calcular os parênteses de Poisson entre as matrizes de monodromia e considerarmos os mesmos limites utilizados no PCM obtivemos um valor *único*:

$$\left\{ T^{(1)}(v), T^{(2)}(w) \right\} = -\frac{1}{v-w} \left[ \Omega_h, T^{(1)}(v) T^{(2)}(w) \right] + \frac{1}{v-w} \left[ \Omega_p, T^{(1)}(v) T^{(2)}(w) \right].$$

Isso ocorre justamente pelo comportamento do campo dilaton, baseado na nossa escolha como coordenadas de Weyl que acabam convergindo. Assim, como agora não temos divergências entre os parênteses da estrutura de Poisson, a teoria pode ser regularizada e consequentemente quantizada por esse formalismo.

## 4.1 Projeto em andamento

Como obtivemos uma teoria regularizada, o próximo passo óbvio seria a quantização do modelo. No entanto, estamos desenvolvendo um outro movimento possível, em consonância com a teoria do HL, que é proceder com sua redução para 2 dimensões. Em HL, nos limites de altas energias (UV), a teoria é efetivamente bidimensional, assim a idéia é comparar a teoria reduzida com a teoria nos limites de altas energias e elucidar o que de fato ocorre nesse processo.

Vamos lembrar que, além do dilaton, há um *campo escalar* adicional presente na teoria reduzida de HL. Com a redução dimensional ainda não se sabe o que ocorre no contexto da teoria de sistemas integráveis. Assim, pretendemos verificar como esse campo adicional reduzido afeta a integrabilidade, obter a sua CCN, entender a álgebra, bem como a sua regularização. São idéias totalmente originais e ausentes na literatura.

Vale a pena ressaltar que esse estudo sobre HL só está sendo possível graças ao formalismo estabelecido nessa dissertação com o estudo da G2dD. Desta forma, o presente trabalho nos fornece o embasamento necessário para o desenvolvimento de teorias mais avançadas.

---

<sup>1</sup>Diferente do que foi feito para o PCM, onde utilizamos a literatura

## *APÊNDICE A – Alguns comutadores importantes*

Sabemos, devido a decomposição da álgebra, que  $J_\mu = Q_\mu + P_\mu$ , onde  $Q_\mu \in \mathfrak{h}$ ,  $P_\mu \in \mathfrak{p}$  e  $\Omega_g = \Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{p}}$ . Dessa forma, é útil o cálculo de comutadores entre os elementos do grupo. Por questões de conveniência, não explicitamos as dependências espaciais nas contas a seguir.

$$(a) \quad \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(1)}{P} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \left[ t_h \otimes t^h, P \otimes \mathbb{1} \right] = [t_h, P] \otimes t^h = P^p [t_h, t_p] \otimes t^h \\ &= P^p f^{h p p'} t_{p'} \otimes t^h = t_{p'} \otimes \left( f^{p p' h} t_h P^p \right) \\ &= t_{p'} \otimes [t_p, t_{p'}] P^p = t_{p'} \otimes (t_p t_{p'}) P^p - t_{p'} \otimes (t_{p'} t_p) P^p \\ &= (\mathbb{1} \otimes t_p P^p) (t_{p'} \otimes t_{p'}) - (t_{p'} \otimes t_p) (\mathbb{1} \otimes t_p P^p) = (\mathbb{1} \otimes P) \Omega_{\mathfrak{p}} - \Omega_{\mathfrak{p}} (\mathbb{1} \otimes P) \\ &\Rightarrow \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(1)}{P} \right] = - \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, \overset{(2)}{P} \right] \end{aligned}$$

$$(b) \quad \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(1)}{Q} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \left[ t_h \otimes t^h, Q \otimes \mathbb{1} \right] = [t_h, Q] \otimes t^h = Q^{h'} [t_h, t_{h'}] \otimes t^h \\ &= Q^{h'} f^{h h' H} t_H \otimes t^h = t_H \otimes \left( f^{h' H h} t_h Q_{h'} \right) \\ &= t_H \otimes [t_{h'}, t_H] Q^{h'} = t_H \otimes (t_{h'} t^H) Q^{h'} - t_h \otimes (t_H t_{h'}) Q^{h'} \\ &= (\mathbb{1} \otimes t_{h'} Q^{h'}) (t_H \otimes t_H) - (t_H \otimes t^H) (\mathbb{1} \otimes t_{h'} Q^{h'}) = (\mathbb{1} \otimes Q) \Omega_{\mathfrak{h}} - \Omega_{\mathfrak{h}} (\mathbb{1} \otimes Q) \\ &\Rightarrow \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(1)}{Q} \right] = - \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, \overset{(2)}{Q} \right] \end{aligned}$$

$$(c) \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, Q^{(1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= [t_p \otimes t^p, Q \otimes \mathbb{1}] = [t_p, Q] \otimes t^p = Q^h [t_p, t_h] \otimes t^p \\
&= Q_h f^{php'} t_{p'} \otimes t^p = t_{p'} \otimes (f^{hp'p} t_p Q_h) \\
&= t_{p'} \otimes [t^h, t^{p'}] Q_h = t_{p'} \otimes (t^h t^{p'}) Q_h - t_{p'} \otimes (t^{p'} t^h) Q_h \\
&= (\mathbb{1} \otimes t_h Q^h) (t_{p'} \otimes t^{p'}) - (t_{p'} \otimes t^{p'}) (\mathbb{1} \otimes t_h Q^h) = (\mathbb{1} \otimes Q) \Omega_{\mathfrak{p}} - \Omega_{\mathfrak{p}} (\mathbb{1} \otimes Q) \\
&\Rightarrow \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, Q^{(1)} \right] = - \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, Q^{(2)} \right]
\end{aligned}$$

$$(d) \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, P^{(1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= [t_p \otimes t^p, P \otimes \mathbb{1}] = [t_p, P] \otimes t^p = P^{p'} [t_p, t_{p'}] \otimes t^p \\
&= P_{p'} f^{pp'h} t_h \otimes t^p = t_h \otimes (f^{p'hp} t_p P_{p'}) \\
&= t_h \otimes [t^{p'}, t^h] P_{p'} = t_h \otimes (t^{p'} t^h) P_{p'} - t_h \otimes (t^h t^{p'}) P_{p'} \\
&= (\mathbb{1} \otimes t^{p'} P^{p'}) (t_h \otimes t^h) - (t_h \otimes t^h) (\mathbb{1} \otimes t_{p'} P^{p'}) = (\mathbb{1} \otimes P) \Omega_{\mathfrak{h}} - \Omega_{\mathfrak{h}} (\mathbb{1} \otimes P) \\
&\Rightarrow \left[ \Omega_{\mathfrak{p}}, P^{(1)} \right] = - \left[ \Omega_{\mathfrak{h}}, P^{(2)} \right]
\end{aligned}$$

## *APÊNDICE B – Relações envolvendo o parâmetro espectral da G2dD*

Vamos elencar neste apêndice algumas relações que são importantes nos cálculos relacionados ao modelo da G2dD.

A partir de um tratamento algébrico da função de coordenadas  $\gamma(x, t; \omega) = \frac{1}{\rho} \left( \omega + \tilde{\rho} - \sqrt{(\omega + \tilde{\rho})^2 - \rho^2} \right)$  podemos obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sqrt{(w + \tilde{\rho})^2 - \rho^2} &= \frac{\rho}{2\gamma} - \frac{\rho\gamma}{2}, \\ (1 - \gamma^2) &= \frac{2}{\rho^2} \left[ \rho^2 + (w + \tilde{\rho}) \sqrt{(w + \tilde{\rho})^2 - \rho^2} - (w + \tilde{\rho})^2 \right], \\ (1 + \gamma^2) &= \frac{2}{\rho^2} \left[ (w + \tilde{\rho}) \sqrt{(w + \tilde{\rho})^2 - \rho^2} - (w + \tilde{\rho})^2 \right] \end{aligned}$$

Que levam às expressões:

$$\gamma^{-1} \partial_w \gamma = -\frac{2\gamma}{\rho(1 - \gamma^2)} \quad (\text{B.0.1})$$

e

$$\gamma^{-1} \partial_\mu \gamma = \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} \rho^{-1} \partial_\mu \rho + \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} \rho^{-1} \partial_\mu \tilde{\rho} \quad (\text{B.0.2})$$

além da importante expressão inversa do parâmetro espectral  $w$

$$w = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} \right) - \tilde{\rho} \quad (\text{B.0.3})$$

Observe que as relações aqui sintetizadas evocam a derivada em relação ao parâmetro espectral ( $\partial_w$ ) e em relação às coordenadas ( $\partial_\mu$ ).

## *Referências*

- [1] R. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
- [2] G. 't Hooft, “A planar diagram theory for strong interactions,” *Nucl. Phys. B*, vol. 72, p. 461, 1974.
- [3] J. A. Minahan and K. Zarembo, “The Bethe-ansatz for  $N = 4$  super Yang–Mills,” *JHEP*, vol. 03, p. 013, 2003.
- [4] I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, “Hidden symmetries of the  $AdS(5) \times S^{**5}$  superstring,” *Phys.Rev.*, vol. D69, p. 046002, 2004.
- [5] A. Polyakov, “String theory and quark confinement,” *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.*, vol. 68, pp. 1–8. 13 p, Nov 1997.
- [6] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv.Theor.Math.Phys.*, vol. 2, pp. 231–252, 1998.
- [7] E. Witten, “Anti-de sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. 2, no. hep-th/9802150, pp. 253–291, 1998.
- [8] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett. B*, vol. 428, p. 105. 15 p, Feb 1998.
- [9] A. V. Belitsky, V. M. Braun, A. S. Gorsky, and G. P. Korchemsky, “Integrability in qed and beyond,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 19, no. hep-th/0407232, pp. 4715–4788, 2004.
- [10] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 101, p. 031601, 2008.
- [11] P. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 21, 1968.
- [12] S. Novikov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Contemporary Soviet Mathematics, Consultants Bureau, 1984.
- [13] L. Faddeev and L. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the Theory of Solitons*. Classics in Mathematics, Springer, 2007.
- [14] L. Faddeev and N. Reshetikhin, “Integrability of the principal chiral field model in  $1 + 1$  dimension,” *Annals of Physics*, vol. 167, no. 2, pp. 227 – 256, 1986.
- [15] V. A. Belinskii and V. E. Zakharov, “Integration of the Einstein equations by the method of the inverse scattering problem and calculation of exact soliton solutions,” *Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 75, pp. 1953–1971, Dec. 1978.
- [16] D. Grumiller, W. Kummer, and D. Vassilevich, “Dilaton gravity in two-dimensions,” *Phys.Rept.*, vol. 369, pp. 327–430, 2002.



- [17] S. Weinberg, “Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation,” in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey* (S. Hawking and W. Israel, eds.), Cambridge University Press, 1979.
- [18] P. Hořava, “Quantum gravity at a lifshitz point,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 084008, Apr 2009.
- [19] P. Horava, “Membranes at Quantum Criticality,” *JHEP*, vol. 0903, p. 020, 2009.
- [20] P. Hořava, “Spectral dimension of the universe in quantum gravity at a lifshitz point,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 161301, Apr 2009.
- [21] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*. Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics Publishing, 2003.
- [22] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, second ed., 1989.
- [23] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2003.
- [24] J. Russell, “Report on waves,” *British Association for the Advancement of Science*, Setembro 1844.
- [25] M. Ablowitz and P. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. London Mathematical Society Lecture notes Series, Cambridge University Press, 1992.
- [26] A. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981.
- [27] A. Davydov, “The role of solitons in the energy and electron transfer in one-dimensional molecular systems,” *Physica D*, vol. 3, 1981.
- [28] B. Lake, H. Yuen, H. Rungaldier, and W. Fergunson, “Nonlinear deep water waves: theory and experiment,” *J. Fluid Mech.*, vol. 83, 1977.
- [29] A. Scott, F. Chu, and D. McLaughlin, “The soliton: A new concept in applied science,” *IEEE*, vol. 61, 1973.
- [30] G. Weber, *O Modelo de Landau-Lifshitz e a Integrabilidade em Teoria de Cordas*. Tese de doutorado, USP, 2011.
- [31] A. Das, J. Maharana, and A. Melikyan, “Duality and integrability of two-dimensional string effective action,” *Physics Letters B*, vol. 533, 2002.
- [32] A. K. Das, J. Maharana, A. Melikyan, and M. Sato, “The Algebra of transition matrices for the  $AdS_5 \times S^5$  superstring,” *JHEP*, vol. 0412, p. 055, 2004.
- [33] A. K. Das, A. Melikyan, and M. Sato, “The Algebra of flat currents for the string on  $AdS_5 \times S^5$  in the light-cone gauge,” *JHEP*, vol. 0511, p. 015, 2005.
- [34] A. Das, J. Maharana, and A. Melikyan, “Colliding string waves and duality,” *Physics Letters B*, vol. 518, 2001.
- [35] A. K. Das, J. Maharana, and A. Melikyan, “Duality, monodromy and integrability of two-dimensional string effective action,” *Phys.Rev.*, vol. D65, p. 126001, 2002.

- [36] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov, “Relativistically invariant two dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 47, 1978.
- [37] A. Duncan, H. Nicolai, and M. Niedermaier, “On the poisson bracket algebra of monodromy matrices,” *Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields*, vol. 46, pp. 147–150, 1990.
- [38] A. P. Fordy and J. C. Wood, *Harmonic maps and integrable systems*, vol. E23 of *Aspects of Mathematics*. Braunschweig/Wiesbaden, 1994.
- [39] D. Korotkin and H. Samtleben, “Yangian symmetry in integrable quantum gravity,” *Nuclear Physics B*, vol. 527, p. 657, 1998.
- [40] A. Barut and R. Rakczka, *Theory of group representations and applications*. Polish Scientific Publishers, 1980.
- [41] J. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*. Texts in applied mathematics, Springer, 1999.
- [42] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*. Course of theoretical physics, Butterworth-Heinemann, 1976.
- [43] K. Pohlmeyer, “Integrable hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 46, pp. 207–221, 1976.
- [44] N. J. MacKay, “Introduction to yangian symmetry in integrable field theory,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 20, p. 7189, 2005.
- [45] V. De Sabbata, E. Schmutzer, and Ettore Majorana International Centre for Scientific Culture, *Unified field theories of more than 4 dimensions: including exact solutions*. Topics in theoretical and experimental gravitation physics, ”Ettore Majorana”International Centre for Scientific Culture, 1983.
- [46] P. Breitenlohner and D. Maison, “On the Geroch group,” *Ann. Inst. Poincare*, vol. 46, p. 215, 1987.
- [47] H. C. Nicolai, “Two-dimensional gravities and supergravities as integrable systems,” p. 44 p, May 1991.
- [48] H. Nicolai, D. Korotkin, and H. Samtleben, *Integrable classical and quantum gravity*. DESY, 1996.
- [49] C. Hoenselaers and W. Dietz, *Solutions of Einstein’s equations: techniques and results : proceedings of the International Seminar on Exact Solutions of Einstein’s Equations, held in Retzbach, Germany, November 14-18, 1983*. No. v. 1983 in Lecture notes in physics, Springer-Verlag, 1984.