

**ANÁLISE DE VIGAS-PAREDE APLICANDO MODELO DE
BIELA E TIRANTE E MICROTRELIÇA**

CHAIRA LACERDA NEPOMUCENO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS
E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ANÁLISE DE VIGAS-PAREDE APLICANDO MODELO DE
BIELA E TIRANTE E MICROTRELIÇA

CHAIRA LACERDA NEPOMUCENO

ORIENTADOR: ANTÔNIO CARLOS DE OLIVEIRA MIRANDA
CO-ORIENTADOR: GUILHERME SALES SOARES DE AZEVEDO
MELO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: E.DM - 005A/12
BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2012

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DE VIGAS-PAREDE APLICANDO MODELO DE BIELA E
TIRANTE E MICROTRELIÇA

CHAIRA LACERDA NEPOMUCENO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Antônio Carlos de Oliveira Miranda, D.Sc. (ENC-UnB)
(Orientador)

Prof. William Taylor Matias da Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)

Prof., Osvaldo Luís Manzoli, Dr. Ing. (UNESP)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 13 DE ABRIL DE 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA

NEPOMUCENO, CHAIRA LACERDA	
Análise de vigas-parede aplicando modelo de biela e tirante e microtreliça [Distrito Federal] 2012.	
xvii, 160p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2012).	
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.	
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1.Vigas-parede	2.Modelo de biela e tirante
3.Microtreliça	
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

NEPOMUCENO, CHAIRA LACERDA. (2012). Análise de Vigas-Parede aplicando Modelo de Biela e Tirante e Microtreliça. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-005A/12, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 160p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Chaira Lacerda Nepomuceno.

TÍTULO: Análise de Vigas-Parede aplicando Modelo de Biela e Tirante e Microtreliça.

GRAU: Mestre

ANO: 2012

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Chaira Lacerda Nepomuceno
Rua Perú nº11, Vila Marabá.
68.464-000 Tucuruí – PA – Brasil.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, agradeço a força e o favor de Deus para superar e vencer todos os obstáculos.

Preciso agradecer imensamente aos professores orientadores Antônio Carlos de Oliveira Miranda e Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo que acreditaram em mim e me proporcionaram as condições necessárias para concluir minha dissertação. A vocês meus sinceros agradecimentos e profunda estima.

Não posso esquecer-me do Professor William Taylor Matias, que tanto colaborou para a conclusão deste trabalho. Muito obrigada!

Aos colegas do PECC, em especial a Nailde, Dyorgge e Wagner, que sempre me estenderam a mão nos momentos mais difíceis. Devo muitos favores a vocês (Podem cobrar!).

Aos professores do PECC, em especial ao Professor Luciano Bezerra, uma pessoa simplesmente extraordinária, uma mente brilhante e fonte de inspiração para toda a vida.

A querida Eva Veloso, secretária do PECC, pela simpatia, disponibilidade em ajudar e receptividade aos novos alunos, além do que, pelo delicioso cafezinho.

E por último e não menos importante, a minha família, pois somente vocês sabem o quanto o ano de 2010 foi difícil para mim e por tudo o que eu passei para chegar até esse momento da defesa (Graças a Deus, o ano de 2011 foi melhor que 2010!).

Ao CNPq pelo auxílio financeiro a pesquisa!

RESUMO

ANÁLISE DE VIGAS-PAREDE APLICANDO MODELO DE BIELA E TIRANTE E MICROTRELIÇA.

Autora: Chaira Lacerda Nepomuceno

Orientador: Antônio Carlos de Oliveira Miranda

Co-orientador: Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, 13 de abril de 2012.

A proposta deste trabalho é estudar métodos analíticos e numéricos na predição de carga última e modo de ruptura de vigas- parede. Estudou-se duas propostas analíticas, a predição da carga última com o software CAST e a análise não-linear com o software *Micro-Truss Analyzer*.

Foram estudados quatro exemplos de vigas da literatura, cada um com suas peculiaridades, de maneira a explorar as potencialidades dos métodos de análise. As vigas analisadas foram duas vigas-parede biapoiadas sujeitas a duas cargas concentradas, ensaiadas em 1980, por Giuseppe Guimarães; uma viga contínua sujeita a duas cargas concentradas, ensaiada por Rogowsky, Ong e MacGregor, em 1983 e uma viga em microconcreto ensaiada por Melo, em 2011.

Os resultados analíticos mostraram-se bastante seguros e puderam prever o modo de ruptura de maneira adequada. Em relação ao software CAST, os resultados calculados mostraram-se a favor da segurança, no entanto, subestimaram bastante a resistência dos elementos estruturais.

E por último, os resultados com os modelos de microtreliça mostraram-se bastante promissores. Os valores encontrados para a carga última e as imagens do pós-processamento se mostraram bastante coerentes.

ABSTRACT

ANALYSIS OF DEEP BEAMS APLYING STRUT-AND-TIE MODEL AND MICROTRUSS.

Autora: Chaira Lacerda Nepomuceno

Orientador: Antônio Carlos de Oliveira Miranda

Co-orientador: Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, 13 de abril de 2012.

The purpose of this study is to evaluate analytical and numerical methods of ultimate load and failure mode prediction of deep beams. It has been studied two analytical purposes for simple beams e two for continuous deep beams, the ultimate load prediction with CAST and non-linear analysis software with Micro-Truss Analyzer, presented in this dissertation. Four samples were analyzed, each with its peculiarities, in order to explore the potential of analytical methods. It was analyzed two samples of simple deep beams subjected to two concentrated loads, tested in 1980 by Giuseppe Guimarães; a continuous beam subjected to two concentrated loads, tested by Rogowsky, MacGregor, and Ong, 1983; a beam with a hole in the soul and a tooth, assayed by Ley in 2007 and a beam in microconcrete tested by Melo in 2011.

The analytical results were very safe and could provide the failure mode as appropriate. As for the software CAST, the calculated results showed that for safety, however, quite underestimated the resistance of the structural elements.

Finally, the results of microtruss samples were very promising. The values found for the ultimate load and post-processing of images proved to be quite consistent.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1. VIGAS-PAREDE	6
2.1.1. Definições e aspectos normativos.....	6
2.1.2. Mecanismos de ruptura de vigas-parede.	8
2.2. ANALOGIA DA TRELIÇA	10
2.2.1. Introdução.....	10
2.2.2. Histórico.	10
2.3. MODELO DE BIELA E TIRANTE	13
2.3.1. Introdução.....	13
2.3.2. Elementos da treliça.....	14
2.3.2.1. Nós.	14
2.3.2.2. Bielas.	16
2.3.2.3. Tirantes.	17
2.3.3. Avaliação da resistência efetiva das bielas, regiões nodais e tirantes.	18
2.3.3.1. Segundo Schlaich <i>et al.</i> (1987):.....	19
2.3.3.2. ACI 318 (2008) – Apêndice A:	20
2.3.3.3. CEB-FIP <i>Model Code</i> 2010 (2010):.....	22
2.3.4. Direção das bielas e tirantes.	23
2.3.4.1. Lourenço & Almeida (2004).	24
2.3.4.2. Liang (2002).	26
2.3.4.3. Liang <i>et al.</i> (2006).	28
2.3.4.4. Nagarajan <i>et al.</i> (2009):.....	29
2.3.4.5. Pantoja (2009).	32
2.3.5. Influência da escolha do modelo de biela e tirante na resistência e desempenho do elemento estrutural.	33
2.3.6. Resumo do capítulo.	37
3. MODELO DE BIELA E TIRANTE PARA A PREDIÇÃO DA CARGA ÚLTIMA	38
3.1. Abordagem de Won <i>et al.</i> (1998) para vigas-parede simplesmente apoiadas sem armadura de alma	38
3.1.1. Resistência efetiva do concreto.	39

3.1.2.	Geometria do modelo.	40
3.1.3.	Detalhe do nó CCT.	40
3.1.4.	Detalhe do nó CCC.	41
3.1.5.	Equilíbrio das forças.	42
3.1.6.	Checação do modelo.	43
3.1.7.	Carga última.	44
3.2.	Abordagem de Zhang & Tan (2007) para vigas-parede simplesmente apoiadas sem armadura de alma.	44
3.2.1.	Equilíbrio das forças.	45
3.2.2.	Geometria das bielas.	46
3.2.3.	Tensões principais.	46
3.2.4.	Carga última.	48
3.3.	Abordagem de Zhang & Tan (2007) para predição da carga última de vigas contínuas.	49
3.3.1.	Derivação das tensões na zona nodal A.	54
3.3.2.	Derivação das tensões na zona nodal B.	55
3.3.3.	Derivação das tensões na zona nodal C.	57
3.3.4.	Carga última.	58
3.4.	Modelo de predição da carga última e modo de ruptura de vigas contínuas de Nagarajan & Pillai (2009).	58
4.	PROGRAMAS COMPUTACIONAIS.	65
4.1.	Visão geral do programa CAST.	65
4.2.	<i>Software Micro-Truss Analyzer</i>.	67
4.2.1.	Discretização em Microtreliças.	67
4.2.2.1.	Histórico do modelo reticulado.	67
4.2.2.2.	Discretização em microtreliça.	69
4.2.2.	Modelo de dano contínuo isotrópico com duas variáveis escalares.	78
4.2.3.	Modelo constitutivo da armadura.	81
4.2.3.1.	Modelo friccional unidimensional com endurecimento.	85
4.2.4.	Geração dos elementos de treliça.	87
5.	EXEMPLOS ANALISADOS.	89
6.	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.	98
6.1.	Resultados analíticos.	98
6.1.1.	Viga A2 de Guimarães (1980).	98

6.1.1.1. Modelo de biela e tirante de Won <i>et al.</i> (1998).....	98
6.1.1.2. Modelo de biela e tirante de Zhang & Tan (2007).....	103
6.1.2. Viga V5 de Rogowsky <i>et al.</i> (1983).....	109
6.1.2.1. Modelo de biela e tirante de Zhang & Tan (2007).....	109
6.1.2.1. Modelo de biela e tirante de Nagarajan & Pillai (2009).....	113
6.2. Resultados com o CAST.....	116
6.2.1. Viga A1 de Guimarães (1980).....	116
6.2.2. Viga A2 de Guimarães (1980).....	122
6.3. Resultados com o MTA.	129
6.3.1. Viga A2 de Guimarães (1980).....	131
6.3.2. Viga A1 de Guimarães (1980).....	136
6.3.3. Viga V5 de Rogowsky <i>et al.</i> (1983).....	139
6.3.4. Viga R-1b de Melo (2011).....	142
7.1. Viga A1.....	147
7.2. Viga A2.....	149
7.3. Viga V5.....	149
7.4. Viga R1-b.....	153
7. CONCLUSÕES.....	155
REFERÊNCIAS.....	155

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Vão de cisalhamento (a) $a_v < 2h$ – viga-parede; (b) $a_v = 2h$ – limite para classificação de uma viga-parede; (c) $a_v > 2h$ – viga esbelta (ACI 318, 2008).	7
Figura 2.2 – Princípio de <i>Saint Venant</i> (SAINT VENANT, 1855).	7
Figura 2.3 – Ruptura por flexão em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999).	8
Figura 2.4 – Ruptura por esmagamento da biela em uma viga biapoiada (MELO, 1984). ...	9
Figura 2.5 – Ruptura por tração diagonal em uma viga biapoiada (MELO, 1984).	9
Figura 2.6 – Ruptura por flexão-cisalhamento em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999).	9
Figura 2.7 – Modelo original da treliça de Ritter (RITTER, 1899).	11
Figura 2.8 – Adaptação de Mörsch a treliça de Ritter (MÖRSCH, 1902).	11
Figura 2.9 – Esquema estático de um (a) consolo curto, (b) modelo de biela e tirante para um nó de pórtico e (c) dente <i>Gerber</i> (KUCHMA; TJHIN, 2001).	14
Figura 2.10 – Nós singulares (I) e nós contínuos (II) (FIB <i>BULLETIN</i> 52, 2010).	15
Figura 2.11 – Nó hidrostático e não-hidrostático (THOMPSON, 2002 <i>apud</i> BROWN, 2005).	15
Figura 2.12 – Tipos de bielas (a) prismática, (b) em leque e (c) em forma de garrafa (SCHLAICH <i>et al.</i> , 1987).	17
Figura 2.13 – Pressão radial das barras (FIB <i>BULLETIN</i> 52, 2010).	18
Figura 2.14 – Ancoragem no comprimento do apoio (FIB <i>BULLETIN</i> 52, 2010).	18
Figura 2.15 – Cálculo de ρ_{\perp} no ACI 318 (ACI 318, 2008).	21
Figura 2.16 – Compressão uniaxial (CEB-FIB MC, 2010).	22
Figura 2.17 – Compressão longitudinal e tração transversal (CEB-FIB MC, 2010).	22
Figura 2.18 – Compressão longitudinal e armadura inclinada (CEB-FIB MC, 2010).	23
Figura 2.19 – Modelo de biela e tirante baseado (a) na trajetória de tensões elásticas e (b) na distribuição de tensões na ruptura (LOURENÇO; ALMEIDA, 2004).	26
Figura 2.20 – Estrutura de uma (a) ligação entre viga e pilar, (b) topologia ótima, (c) modelo de biela e tirante e (d) detalhamento da armadura (LIANG, 2002).	28
Figura 2.21 – (a) Esquema estático do bloco e (b) modelo de biela e tirante (LIANG <i>et al.</i> , 2006).	29
Figura 2.22 – (a) Topologia ótima e (b) elementos unidos por nós (LIANG <i>et al.</i> , 2006).	29
Figura 2.23 – Viga discretizada em microtreliça (NAGARAJAN <i>et al.</i> , 2009).	30
Figura 2.24 – Viga-parede sujeita a uma carga concentrada no meio do vão e tensões principais de (a) compressão, (b) tração e (c) modelo de biela e tirante (NAGARAJAN <i>et al.</i> , 2009).	30

Figura 2.25 – Viga-parede sujeita a duas cargas concentradas simétricas tensões principais de (a) compressão, (b) tração e (c) modelo de biela e tirante (NAGARAJAN et al., 2009).	31
Figura 2.26 – Viga-parede sujeita a um carregamento distribuído tensões principais de (a) compressão, (b) tração e (c) modelo de biela e tirante (NAGARAJAN et al., 2009).	31
Figura 2.27 – Padrão de fissuração de uma viga-parede sujeita a uma carga concentrada no meio do vão (a) sob carga de serviço e (b) sob carga de ruptura (NAGAJARAN, 2009).	32
Figura 2.28 – Esquema do MOBITOT (PANTOJA, 2009).	32
Figura 2.29 – Viga-parede com abertura na alma (LEY et al., 2007).	33
Figura 2.30 – Trajetória de tensões de (a) compressão e (b) tração (LEY et al., 2007).	34
Figura 2.31 – Modelo (1) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY et al., 2007).	34
Figura 2.32 – Modelo (2) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY et al., 2007).	35
Figura 2.33 – Modelo (3) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY et al., 2007).	35
Figura 2.34 – Modelo (4) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY et al., 2007).	35
Figura 2.35 – Modelo (4i) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY et al., 2007).	35
Figura 2.36 – Modelo (5) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY et al., 2007).	36
Figura 2.37 – Modelo sem armadura na ruína (6) (LEY et al., 2007).	36
Figura 3.1 – Dados estatísticos do modelo (WON et al., 1998).	38
Figura 3.2– Modelagem do nó CCT (WON et al., 1998).	40
Figura 3.3 – Modelagem do nó CCC (WON et al., 1998).	42
Figura 3.4 – Forças atuantes no modelo de viga-parede (WON et al., 1998).	42
Figura 3.5 – Representatividade do modelo – carga última calculada versus carga última experimental (ZHANG; TAN, 2007).	45
Figura 3.6 – Distribuição não-uniforme da tensão principal de tração (ZHANG; TAN, 2007).	47
Figura 3.7 – Algoritmo de implementação do modelo de Zhang & Tan (2007).	49
Figura 3.8 – Modelo de biela e tirante para uma viga contínua com dois vãos submetida a duas cargas concentradas (ZHANG; TAN, 2007).	50
Figura 3.9 – Representatividade do modelo: carga última calculada versus carga última experimental (ZHANG; TAN, 2007).	50

Figura 3.10 – Treliça equivalente para uma viga contínua com dois vãos submetida a duas cargas concentradas (ZHANG; TAN, 2007).	51
Figura 3.11 – Zona nodal A (ZHANG; TAN, 2007).....	54
Figura 3.12 – Zona nodal B (ZHANG; TAN, 2007).	56
Figura 3.13 – Zona nodal C (ZHANG; TAN, 2007).	57
Figura 3.14 – Detalhe de uma viga contínua com dois vãos sujeita a duas cargas concentradas (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).	58
Figura 3.15 – Modelo de biela e tirante para uma viga contínua com dois vãos (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).	59
Figura 3.16 – Modelo de biela e tirante mostrando espessura das bielas e tirantes e zonas nodais (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).	60
Figura 3.17 – Treliça de momentos positivos (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).....	62
Figura 3.18 – Treliça de momentos negativos (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).....	63
Figura 3.19 – Modelo completo de treliça plástica (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).	63
Figura 3.20 – Representatividade do modelo: carga real x carga calculada (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).	64
Figura 4.1 – Passos para implementação de um MBT (Adaptado de BROWN, 2005).	66
Figura 4.2 – Abordagem de fissuras discretas (WANG, 2002).....	68
Figura 4.3 – Distinção entre (a) micro -, (b) meso - e (c) macro - nível para o concreto (WANG, 2002).	69
Figura 4.4 – Padrão de microtreliças para tensões planas (SALEM, 2004).....	70
Figura 4.5 – Modelo treliçado de Niwa (NIWA <i>et al.</i> , 1995).	70
Figura 4.6 – Formulação da matriz de rigidez do elemento de barra (SALEM, 2004).....	71
Figura 4.7 – Matriz de rigidez do elemento de barra (SALEM, 2004).	71
Figura 4.8 – Modelos constitutivos não-lineares adotados para o concreto e o aço (SALEM, 2004).....	72
Figura 4.9 – Esquema da viga analisada por microtreliças (SALEM, 2004).....	73
Figura 4.10 – Deflexão e padrão de fissuração da viga analisada por microtreliças (SALEM, 2004).....	73
Figura 4.11 – Localização dos (a) tirantes e (b) principais bielas na viga analisada (SALEM, 2004).....	73
Figura 4.12 – Comparação entre os gráficos de carga x deslocamento obtidos numericamente e em laboratório (SALEM, 2004).	74
Figura 4.13 – Ângulo de inclinação das bielas em uma (a) análise linear e (b) análise não linear (SALEM; MAEKAWA, 2006).	74

Figura 4.14 – Estrutura de distribuição aleatória dos agregados graúdos (NAGARAJAN <i>et al.</i> , 2010).....	75
Figura 4.15 – Padrão de fissuração da tentativa (a) #1; (b) #2 e (c) #3 (NAGARAJAN <i>et al.</i> , 2010).....	77
Figura 4.16 – Comparação do diagrama carga x deslocamento entre os resultados numéricos e experimentais (NAGARAJAN <i>et al.</i> , 2010).	77
Figura 4.17 – Comportamento cíclico do concreto em condições unidimensionais.	80
Figura 4.18 – Algoritmo de integração do modelo de dano.	81
Figura 4.19 – Dispositivo friccional de Coulomb (adaptada de Simo & Hughes, 1997)...	82
Figura 4.20 – Padrão de elementos de treliça para o caso plano de tensões (NAGARAJAN <i>et al.</i> , 2010).....	88
Figura 5.1 – Viga A1 – dimensões em milímetros (mm) – adaptado de Guimarães (1980). 89	
Figura 5.2 – Ensaio de compressão simples do concreto da viga A1 (FERNANDES, 2010). 91	
Figura 5.3 – Viga A2 – dimensões em milímetros (mm) – adaptado de Guimarães (1980). 92	
Figura 5.5 – Seção Transversal da viga V5 – dimensões em milímetros (mm) – adaptado de Rogowsky <i>et al.</i> (1983).	94
Figura 5.6 – Curva carga x deslocamento no meio do vão da viga V5 (7/1.0T1) (Rogowsky <i>et al.</i> , 1983).....	94
Figura 5.7 – (a) Viga R2-b e (b) seção transversal da viga (MELO, 2011).	96
Figura 5.8 – Curva carga x deslocamento da viga R2-b (MELO, 2011).....	97
Figura 6.1 – MBT da viga A2 segundo Won <i>et al.</i> (1995).....	103
Figura 6.2 – MBT da viga A2 segundo Zhang & Tan (2007).	109
Figura 6.3 – MBT para viga V5 segundo Zhang & Tan (2007).....	112
Figura 6.4 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).....	116
Figura 6.5 – Identificação do nós:	118
Figura 6.6 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).	118
Figura 6.7 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do ACI (2008).....	120
Figura 6.8 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).	121
Figura 6.9 – Predição da carga última da viga A2 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).....	123

Figura 6.10 – Identificação do nós:	124
Figura 6.11 – Predição da carga última da viga A2 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).	124
Figura 6.13 – Identificação do nós:	127
Figura 6.14 – Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).	127
Figura 6.16 – Barra de ferramentas do MTA.	129
Figura 6.17 – Definição do refinamento da malha.	130
Figura 6.18 – Definição dos parâmetros globais.	130
Figura 6.19 – Definição das condições de apoio.	130
Figura 6.20 – Definição do carregamento.	130
Figura 6.21 – Localização dos nós analisados da viga A2.	134
Figura 6.22 – Resultado da análise AN1V2.	135
Figura 6.23 – Resultado da análise AN2V2.	136
Figura 6.25 – Localização dos nós analisados da viga A1 malha M2.	138
Figura 6.26 – Localização dos nós analisados da viga A1 malha M2.	139
Figura 6.27 – Localização dos nós analisados da viga V5 – malha M1.	140
Figura 6.28 – Resultado da análise AN1V5.	141
Figura 6.29 – Resultado da análise AN2V5.	142
Figura 6.31 – Resultado da análise AN1R1B.	144
Figura 6.32 – Resultado da análise AN2R1B.	145
Figura 6.33 – Resultado da análise AN3R1B.	146
Figura 7.1 – Escala do nível de tensão para distribuição de tensões.	147
Figura 7.2 – Escala de nível de tensão para distribuição de dano.	147
Figura 7.3 – Trajetória de tensões de (a) compressão e (b) tração para o passo inicial. ...	148
Figura 7.4 – Trajetória de tensões de (a) compressão e (b) tração para o último passo de carga.	148
Figura 7.5 – Deformada + distribuição do dano a (a) compressão na Viga A1 e (b) a tração na Viga A1, para o último passo de carga (15x).	148
Figura 7.6 – Ruptura da viga A1 (GUIMARÃES, 1980).	149
Figura 7.7 – Deformada + distribuição do dano a tração na Viga A2 – passo 3.	149
Figura 7.8 – Deformada + distribuição do dano a tração na Viga A2 – passo 4 (30x). ...	149
Figura 7.9 – Trajetória de tensões de compressão na Viga A2 – passo 1.	150
Figura 7.10 – Trajetória de tensões de tração na Viga A2 – passo 1.	150

Figura 7.11 – Trajetória de tensões de compressão na Viga A2 – passo 4.	150
Figura 7.12 – Trajetória de tensões de tração na Viga A2 – passo 4.....	150
Figura 7.13 – Distribuição do dano a tração na Viga A2 – passo 4.	150
Figura 7.14 – Distribuição do dano a compressão na Viga A2 – passo 4.	150
Figura 7. 15 – Distribuição de tensões de tração no (a) passo 1; (b) passo 2; (c) passo 3 e (d) passo 4.....	151
Figura 7. 16 – Distribuição de tensões de compressão no (a) passo 1; (b) no passo 2; (c) no passo 3 e (d) no passo 4.	151
Figura 7.17 – Distribuição do dano a tração no (a) passo 1; (b) no passo 2; (c) no passo 3 e (d) no passo 4.....	152
Figura 7.18 – Distribuição do dano a compressão no (a) passo 1; (b) passo 2; (c) passo 3; (d) passo 4.....	152
Figura 7. 19 – Deformada + Distribuição do dano a compressão no passo 4 (15x).....	153
Figura 7. 20 – Deformada + Distribuição do dano a tração no passo 4 (15x).	153
Figura 7. 21 – Ruptura da viga V5 (ROGOWSKY <i>et al.</i> , 1983).	153
Figura 7. 22 – Distribuição das trajetórias de tensão de tração no passo 4.	154
Figura 7. 23 – Distribuição das trajetórias de tensão de compressão no passo 4.	154
Figura 7. 24 – Deformada + Distribuição do dano a tração no passo 4 (50x).	154
Figura 7.25 – Distribuição do dano a compressão no passo 4 (50x).	154
Figura 7.26 – Evolução da ruptura da viga R1b (MELO, 2011).	154

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resultados experimentais (Adaptado de LEY <i>et al.</i> , 2007).....	36
Tabela 4.1 – Predição da carga última (NAGARAJAN <i>et al.</i> , 2010).....	76
Tabela 4.2 – Situações de carregamento para o modelo de elastoplasticidade.	85
Tabela 4.3 – Sumário das principais equações governantes do modelo friccional unidimensional com endurecimento (FERNANDES, 2010).....	86
Tabela 5.1 – Propriedades da viga A1.....	90
Tabela 5.2 – Propriedades da viga A2.....	92
Tabela 5.3 – Propriedades da viga V5 (7/1.0 T1).....	95
Tabela 5.4 – Dados da viga R2-b.	96
Tabela 6.1 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).	117
Tabela 6.2 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).	117
Tabela 6.3 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).....	119
Tabela 6.4 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).....	119
Tabela 6.5 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do ACI (2008).	120
Tabela 6.6 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do ACI (2008).	120
Tabela 6.7 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).....	122
Tabela 6.8 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).	122
Tabela 6.9 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).	123
Tabela 6.10 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).	123
Tabela 6.11 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).....	124
Tabela 6.12 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).....	125

Tabela 6.13 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do ACI (2008).	126
Tabela 6.14 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do ACI (2008).	126
Tabela 6.15 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).	128
Tabela 6.16 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won <i>et al.</i> (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).	128
Tabela 6.17 - Propriedades atribuídas à viga A2 no MTA.	132
Tabela 6.18 – Modelo de cabeçalho do programa <i>Micro-truss Analyzer</i>	132
Tabela 6.19 – Variáveis, valores e sub-rotinas correspondentes.	133
Tabela 6.20 – Resumo da análise AN1V2.	134
Tabela 6.21 – Resumo da análise AN2V2.	136
Tabela 6.22 – Propriedades atribuídas a viga A1 no MTA.	137
Tabela 6.23 – Resumo da análise AN1V1.	137
Tabela 6.24 – Propriedades atribuídas a viga V5 no MTA.	139
Tabela 6.25 – Resumo da análise AN1V5.	140
Tabela 6.26 – Resumo da análise AN2V5.	141
Tabela 6.27 – Propriedades atribuídas a viga S8 no MTA.	142
Tabela 6.28 – Resumo da análise AN1R1B.	143
Tabela 6.29 – Resumo da análise AN2R1B.	144
Tabela 6.30 – Resumo da análise AN3R1B.	145

1. INTRODUÇÃO

Ainda que o comportamento do concreto armado sob cisalhamento tenha sido estudado por mais de 100 anos, a dificuldade em determinar a resistência ao cisalhamento do concreto armado ainda persiste.

A maioria dos códigos normativos apresenta formulações que podem prever a carga última à flexão com um erro máximo de 10%. Entretanto, em se tratando de cisalhamento, verifica-se que os resultados encontrados por meio de diferentes formulações pode variar até uma razão de 2 (BENTZ *et al.*, 2006).

No caso da flexão, a hipótese das seções planas (hipótese de Bernoulli) fornece uma teoria simples e aceita universalmente para a previsão da resistência à flexão. O dimensionamento de elementos de concreto armado é facilitado a partir desta hipótese, pois é possível assumir que a distribuição das deformações ao longo da altura da seção perpendicular do elemento é mantida linear. Além disso, costuma-se desprezar as deformações de distorção provocadas pelo cisalhamento.

Em relação ao cisalhamento, não há acordo para uma base científica racional que possa conduzir a resultados satisfatórios (BENTZ *et al.*, 2006). As tensões de cisalhamento provocam na seção transversal, uma deformação tipo “empenamento”, de modo que a seção plana antes da flexão não permanecerá plana depois da mesma (TIMOSHENKO; GERE, 1994), e os modelos de cálculo baseados nas propriedades das seções não são válidos quando as seções planas não permanecem planas devido à ação dos esforços.

Ensaio experimentais têm demonstrado que a hipótese de Bernoulli pode ser aplicada satisfatoriamente a vigas elaboradas de qualquer material, especialmente quando o comprimento da viga é muito maior que a altura da seção. Entretanto, em regiões de um elemento estrutural submetidas a perturbações, seja de natureza estática (presença de cargas concentradas ou apoios discretos) ou de natureza geométrica (mudanças bruscas na geometria da peça), a hipótese deixa de ser válida. Nessas regiões de perturbação, as deformações provocadas pelo cisalhamento apresentam valores significativos, obrigando a sua consideração no dimensionamento do elemento.

As regiões de perturbação são delimitadas por meio da aplicação do princípio de Saint-Venant, que estabelece que, “se existem dois sistemas estaticamente equivalentes de forças sendo aplicadas na mesma região de um contorno, em corpos diferentes, mas geometricamente idênticos, as diferenças ocorridas nas tensões serão desprezíveis em regiões

suficientemente afastadas da área de aplicação das cargas. No entanto, imediatamente abaixo do ponto de aplicação das cargas, surgirão diferenças significativas de tensão”.

Aplicando-se este princípio pode-se dividir uma estrutura em regiões contínuas e descontínuas: nas regiões contínuas ou “B” (*Bernoulli* ou *Beam*), aplica-se a hipótese de Bernoulli e nas regiões descontínuas ou “D” (*Disturbed* ou *Discontinuity*), a hipótese de Bernoulli deixa de ser válida, devido à existência de perturbações.

Algumas estruturas especiais apresentam apenas regiões “D” em sua geometria, devido às dimensões reduzidas, abertura nos vãos, mudanças bruscas na geometria ou aplicação de cargas concentradas. Essa situação é típica de blocos rígidos sobre estacas, nós de pórticos, consolos curtos e vigas-parede, objeto de estudo desta dissertação.

As regiões “D”, em geral, têm sido dimensionadas com base no empirismo e experiências passadas por décadas, o que tem causado um desempenho da estrutura inferior ao esperado ou mesmo a ruína. Nestes casos deve-se adotar uma solução que leve em consideração a não-linearidade das tensões e deformações, conforme recomendação dos códigos normativos atuais, tais como o ACI 318 (2008) e a NBR 6118 (2007), que recomendam a utilização de ferramentas de análise não-linear no dimensionamento, modelos elásticos ou ainda, o modelo de biela e tirante.

Nesse contexto são apresentados os objetivos deste estudo:

1.1. Objetivo geral.

Conforme explicitado acima, a NBR 6118 sugere a utilização de modelos analíticos (modelo de biela e tirante) e numéricos no dimensionamento de vigas-parede. Desta forma, tem-se por objetivo deste trabalho verificar a precisão dos modelos, comparando-os com resultados experimentais.

O objetivo geral deste trabalho é verificar a capacidade dos modelos analíticos e de modelos numéricos (análise não-linear de um modelo discretizado em microtreliças – uma generalização recente do modelo de biela e tirante) de representar resultados experimentais, como a carga última e modo de ruptura de vigas-parede com precisão satisfatória.

Para o alcance deste objetivo serão utilizadas as seguintes ferramentas:

- Abordagens analíticas do modelo de biela e tirante para predição da carga última e modo de ruptura de vigas-parede;
- O software CAST (*Computer Aided Strut-and-Tie*) para a verificação do modelo de biela e tirante;
- O software *Micro-Truss Analyzer* de análise não-linear utilizando discretização em elementos de treliça, desenvolvido pelos professores do PECC, Antônio Carlos de Oliveira Miranda e William Taylor Matias;

1.2. Objetivos específicos:

Como objetivos específicos espera-se:

- Contribuir ao estudo do modelo de biela e tirante, assim como, ao estudo de vigas-parede;
- Fornecer embasamento teórico para utilização do programa CAST;
- Calibrar e otimizar o software *Micro-Truss Analyzer*.

1.3. Justificativas.

É notável a importância das vigas-parede enquanto elementos estruturais. Como aplicações típicas citam-se os reservatórios elevados, cujas paredes recebem as ações uniformemente distribuídas provenientes das lajes de tampa e de fundo e transmitem essas ações aos pilares, funcionando como vigas. Em algumas estruturas de edifícios, funcionam como vigas de transição, absorvendo a força de um ou mais pilares e transferindo-a a outros pilares. É muito frequente também o uso como cortinas em pavimentos de subsolo ou garagem, sendo calculada como viga-parede e como laje vertical submetida às ações provenientes do empuxo do solo (SILVA; GIONGO, 2000).

Entretanto, o projetista de estruturas se depara com a existência de poucas alternativas que podem guiar um dimensionamento seguro, eficaz e econômico de uma viga-parede, devido ao complexo estado de tensões do elemento. Nesse sentido, a norma brasileira deixa a desejar, quando não presta maiores esclarecimentos e não indica outra referência no assunto. Além disso, o conceito de viga-parede utilizado pela norma encontra-se desatualizado.

Entre os modelos utilizados no dimensionamento de vigas-parede tem-se um *boom* de utilização do modelo de biela e tirante. Schlaich, Schafer & Jennewein (1987) não mediram esforços na tentativa de sistematizar e disseminar a utilização do modelo de biela e tirante no dimensionamento de regiões “D” e evitar dimensionamentos inseguros baseados no empirismo e em experiências passadas. Entretanto, uma utilização inadvertida do modelo de biela e tirante pode ocasionar um desempenho inferior da estrutura.

O modelo tem por base o mecanismo resistente das vigas de concreto armado. Buscando-se representar uma estrutura real constrói-se um modelo idealizado, constituído de barras comprimidas e tracionadas, unidas por nós, tal qual uma treliça, arranjadas de maneira a seguir o caminho das cargas no interior do elemento estrutural. Aparentemente se trata de algo muito simples, no entanto, a definição da geometria da treliça não deve ser guiada apenas por intuição do projetista.

A utilização de ferramentas de análise não-linear consiste em uma alternativa para o dimensionamento de vigas-parede, tendo como principal vantagem obter informações a respeito do estado limite de serviço, predição da carga última e obtenção do gráfico carga x deslocamento. Contudo, os principais *softwares* comumente utilizados na elaboração de modelos numéricos de análise não-linear são demasiadamente caros e complexos. E ainda, esse tipo de tecnologia não está disseminada no meio técnico. Nesse sentido, é de interesse o desenvolvimento de ferramentas alternativas e a existência de referências que orientem e exemplifiquem a utilização destas.

Neste trabalho propõe-se a criação de uma ferramenta computacional de análise não linear por meio de microtreliças, denominada *Micro-Truss Analyzer*. Baseada em trabalhos anteriores, propõe-se uma discretização da região “D” em elementos de barras. Contudo, diferentemente de publicações anteriores, é proposta uma disposição aleatória das barras, de forma que melhor se adéquem ao contorno da estrutura e melhor representem as concentrações de tensões existentes. Por este método é possível ter uma estimativa segura da carga última do elemento estrutural em questão e ainda, o gráfico carga x deslocamento, sendo útil também na previsão do comportamento do elemento sob carga de serviço. A análise efetuada com o software permite ainda a visualização clara das bielas e tirantes no interior da estrutura, constituindo-se de uma ferramenta didática no ensino do modelo de biela e tirante.

1.4. Estrutura do trabalho.

A dissertação está estruturada em 8 capítulos, na seguinte ordenação:

Capítulo 1 – Introdução.

Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica: apresenta dois tópicos principais: o primeiro trata de vigas-parede e o segundo, sobre o modelo de biela e tirante.

Capítulo 3 – Modelos de biela e tirante para a predição da carga última de vigas-parede: serão abordados os modelos analíticos para predição do modo de ruptura e da carga última de vigas-parede e apresentados os exemplos a serem analisados.

Capítulo 4 – Programas computacionais: são apresentados os programas computacionais empregados nas análises numéricas, o CAST e o *Micro-Truss Analyzer*.

Capítulo 5 – Exemplos analisados.

Capítulo 6 – Resultados: apresenta a comparação entre os resultados analíticos, numéricos e experimentais.

Capítulo 7 – Pós-processamento com o *Micro-Truss Analyzer*.

Capítulo 8 – Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

2.1. VIGAS-PAREDE.

2.1.1. Definições e aspectos normativos.

Em 1978, as vigas-parede foram definidas por Leonhardt & Monnig como chapas que possuem apoios semelhantes às vigas. Os autores acima citados perceberam que para $l/d \leq 2$ (onde l representa o vão e d , a altura útil), para vigas com um único vão e para $l/d \leq 3$, para vigas contínuas, observa-se um comportamento de viga-parede.

Foi por meio do diagrama de deformações ϵ_x que Leonhardt & Monnig estipularam um limite entre vigas-parede e vigas comuns. No caso de vigas-parede, não se aplica a Hipótese de Bernoulli, não havendo assim a linearidade na distribuição de tensões e deformações.

Várias normas que abordam o conceito de viga-parede. Por exemplo, a norma brasileira NBR 6118 (2003) e a norma americana ACI 318 (2008). A NBR 6118 (2003) classifica as vigas-parede como elementos especiais, por caracterizarem um comportamento que não respeita a hipótese das seções planas. E, desta forma, devem ser calculadas e dimensionadas por modelos teóricos apropriados, tais como modelos elásticos ou não-lineares ou modelo de biela e tirante. São definidas como estruturas planas verticais apoiadas de modo descontínuo e são consideradas vigas-parede as vigas altas cuja relação $l/h \leq 2$, para vigas biapoiadas, e $l/h \leq 3$, em vigas contínuas. Pode-se verificar que a definição e a limitação de viga parede da NBR 6118 (2003) se assemelha a utilizada por Leonhardt & Monnig em 1978.

Por outro lado, o ACI 318 (2008), define que uma viga-parede é uma viga na qual uma parcela significativa da carga aplicada é transferida aos apoios por meio de uma biela, que liga a carga à reação. Esse fenômeno ocorre se uma carga concentrada atua a uma distância $2d$ ou menor do apoio, onde d é a altura útil da viga, ou para vigas submetidas a um carregamento uniformemente distribuído com uma relação entre comprimento e altura menor que 4, conforme figura 2.1. Quanto aos métodos de dimensionamento, o ACI 318 (2008) recomenda a utilização de ferramentas de análise não-linear ou que estes elementos sejam dimensionados por meio de modelos de biela e tirante, do qual trata o apêndice A. Verifica-se que o ACI é mais rigoroso na classificação e definição destes elementos e ainda, que leva em consideração o vão de cisalhamento da viga, para classificá-la enquanto viga-parede.

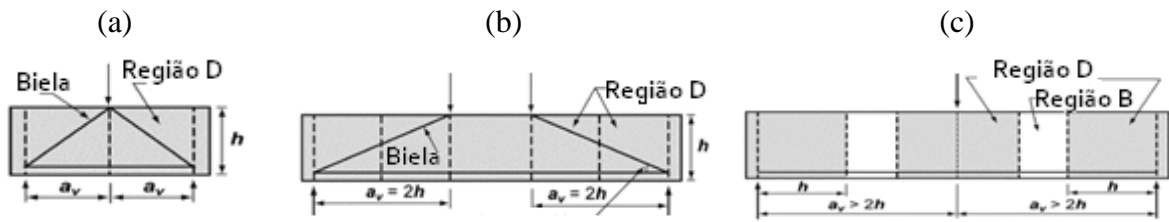


Figura 2.1 – Vão de cisalhamento (a) $a_v < 2h$ – viga-parede; (b) $a_v = 2h$ – limite para classificação de uma viga-parede; (c) $a_v > 2h$ – viga esbelta (ACI 318, 2008).

O princípio de *Saint Venant* e a subdivisão da estrutura em regiões “B” e “D” são a base científica da definição do ACI. Admite-se, em geral, que a perturbação causada por uma carga concentrada, reação de apoio ou descontinuidade geométrica, se propaga por uma distância b do local onde atua a perturbação, a partir daí, inicia-se a regularização das tensões (figura 2.2). Essa perturbação se traduz em distribuição de tensões e deformações não-lineares.

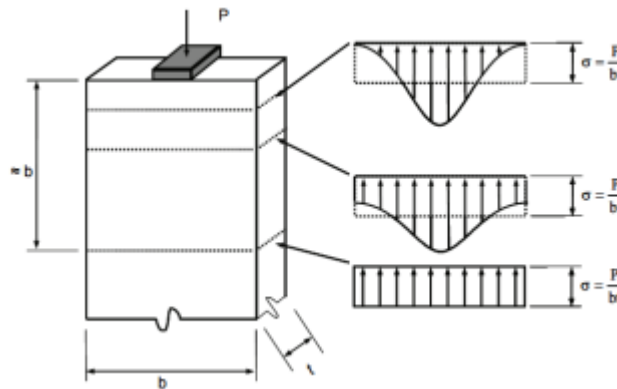


Figura 2.2 – Princípio de *Saint Venant* (SAINT VENANT, 1855).

Baseado no que foi exposto brevemente, pode-se concluir que a classificação adotada pela norma brasileira é incompleta, pois não leva em consideração a existência de perturbações na viga, tais como a ocorrência de cargas concentradas, como considera o ACI. Adicionalmente, Schlaich *et al.* (1987) afirmam que uma simples regra do tipo l/h para classificar vigas, vigas-parede, consolos curtos e consolos longos pode levar a enganos. Recomendam ainda que, para uma melhor classificação, tanto as descontinuidades geométricas quanto a ocorrência de cargas concentradas devem ser levadas em conta.

2.1.2. Mecanismos de ruptura de vigas-parede.

Para uma taxa geométrica de armadura principal de tração bem distribuída e ancorada, a resistência a flexão de uma viga-parede é sempre superior à de cisalhamento (GUIMARÃES, 1980), o que acaba por priorizar a ocorrência de uma ruptura por cisalhamento. Este tipo de ruína pode ser frágil e catastrófica, nesse contexto, torna-se importante conhecer os modos de ruptura de vigas-parede:

Ruptura por flexão (figura 2.3): se caracteriza pelo escoamento da armadura de flexão no meio do vão. Surgem fissuras verticais que se prolongam da base da viga até quase toda a sua altura. A ruptura se dá por escoamento da armadura, ocorrendo, por vezes, o esmagamento do concreto.

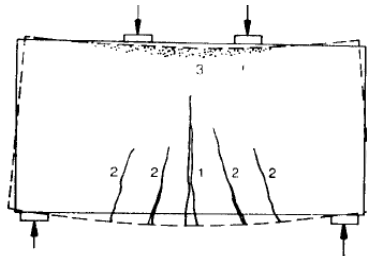


Figura 2.3 – Ruptura por flexão em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999).

Ruptura por cisalhamento: depende fundamentalmente da localização e distribuição das cargas aplicadas. Em vigas-parede biapoiadas submetidas a um carregamento aplicado no bordo superior, a ruptura tem início com a formação de uma fissura diagonal em ambos os vãos de cisalhamento, próxima aos apoios e que se propaga em direção ao ponto de aplicação da carga (concentrada) ou a 1/3 do vão a partir do apoio, no caso de uma carga distribuída.

Em vigas biapoiadas, a ruptura por cisalhamento se subdivide em ruptura por compressão diagonal (figura 2.4) e tração diagonal ou fendilhamento (figura 2.5). Neste primeiro modo, após o aparecimento da primeira fissura de cisalhamento entre o apoio e o ponto de aplicação da carga, surgem novas fissuras paralelas a primeira, formando uma biela comprimida, que é esmagada.

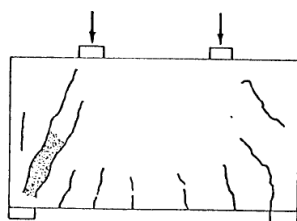


Figura 2.4 – Ruptura por esmagamento da biela em uma viga biapoiada (MELO, 1984).

A ruptura por tração diagonal ou fendilhamento ocorre logo após a formação da fissura diagonal, sem esmagamento do concreto. Com o acréscimo de carga, aumentam as forças de compressão na biela e conseqüentemente, a tração indireta transversalmente ao campo de compressão. Este tipo de ruptura é semelhante à ruptura de corpos de prova cilíndricos ensaiados a compressão diametral (MELO, 1984).

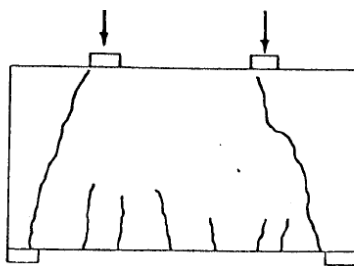


Figura 2.5 – Ruptura por tração diagonal em uma viga biapoiada (MELO, 1984).

Ruptura por flexão-cisalhamento (figura 2.6): inicia-se pelo escoamento da armadura seguido pelo esmagamento do concreto na zona comprimida. Entretanto, a resistência última ao cisalhamento é atingida antes do esmagamento total do concreto.

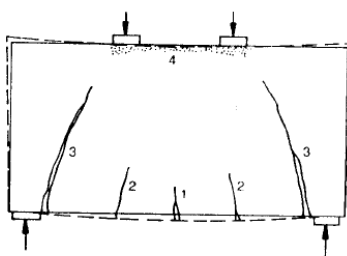


Figura 2.6 – Ruptura por flexão-cisalhamento em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999).

Ruptura por esmagamento do concreto sobre o apoio ou sob cargas concentradas (ruptura local): o estado de tensões sobre os apoios e locais de aplicação de cargas

concentradas é tal que pode ocorrer esmagamento do concreto nestas regiões (MELO, 1984), antes que seja esgotada toda a capacidade resistente da viga.

2.2. ANALOGIA DA TRELIÇA.

2.2.1. Introdução.

De maneira geral, os elementos estruturais mais comuns de concreto armado ou protendido são dimensionados utilizando métodos simplificados que desprezam as deformações causadas pelo cisalhamento e admitem uma distribuição linear de deformações ao longo da seção perpendicular. Entretanto, para regiões “D”, o esforço cortante é preponderante e os métodos de cálculo usuais são pouco eficientes, conduzindo a dimensionamentos inseguros. E assim, o dimensionamento de regiões “D” tem sido feito por décadas considerando-se experiências práticas utilizadas sem maiores problemas no passado.

Os códigos normativos atuais recomendam a utilização de análise de tensões elásticas utilizando elementos finitos, análises não-lineares e mais recentemente, o emprego do método de biela e tirante no dimensionamento de regiões “D”, que consiste em supor a estrutura real formada por uma treliça, composta de bielas comprimidas, tirantes e nós.

Schlaich *et al.* (1987) não mediram esforços na tentativa de sistematizar o uso do modelo de biela e tirante no dimensionamento de estruturas de concreto. Entretanto, deve-se a Ritter e Mörsch, na virada do século XX, os primeiros passos do modelo de biela e tirante: a analogia da treliça.

2.2.2. Histórico.

Em 1899, Wilhelm Ritter desenvolveu uma teoria em que o mecanismo resistente de uma viga no estágio II (fissurado) pudesse ser associado ao funcionamento de uma treliça, para determinar a armadura transversal necessária para o equilíbrio de uma viga e explicar o papel dos estribos na resistência ao cisalhamento (figura 2.7). Anteriormente, acreditava-se que os estribos causavam um efeito de pino, que resistia ao esforço cortante horizontal. Baseado no modelo de treliça de Ritter, ficou claro que os estribos sofrem esforços de tração e que o efeito de pino não é a principal parcela resistente ao cisalhamento.

Em 1902, o modelo de Ritter foi refinado por Mörsch, que percebeu que a representação discreta das forças diagonais que Ritter utilizou em sua treliça seria mais bem

representada por campos de tensão de compressão (figura 2.8). Esse modelo ficou conhecido como treliça de Mörsch ou ainda, analogia da treliça. A treliça de Mörsch baseia-se na inclinação fixa de 45° para as bielas comprimidas de concreto e de 45° (direção das tensões principais de tração) a 90° de inclinação para a armadura de cisalhamento.

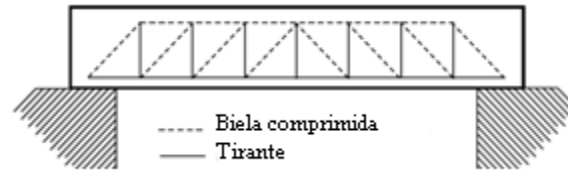


Figura 2.7– Modelo original da treliça de Ritter (RITTER, 1899).



Figura 2.8 – Adaptação de Mörsch a treliça de Ritter (MÖRSCH, 1902).

Pesquisas experimentais mostraram, no entanto, que a analogia da treliça produzia resultados de resistência ao cisalhamento muito conservadores, pois negligenciava a contribuição do concreto, além de que a tensão real na armadura era menor que a calculada por meio da treliça de Mörsch, o que conduzia a uma armadura transversal exagerada. Isso porque a abordagem de Mörsch não considerava os seguintes fatores:

- A treliça é hiperestática, ou seja, os nós não podem ser considerados como articulações perfeitas;
- Os banzos não são paralelos;
- Parte do esforço cortante é absorvido pelo banzo de concreto comprimido;
- Existe certo grau de engastamento na ligação da biela comprimida com o banzo superior; e assim, as bielas são submetidas à flexo-compressão, aliviando os montantes;

- As bielas são mais rígidas que os montantes e absorvem mais esforço cortante que o determinado pela analogia da treliça. Portanto, a parcela de esforço cortante será menor na armadura transversal quanto maior for a largura da alma da viga;
- Nas regiões mais solicitadas pelo esforço cortante, a inclinação das bielas é menor que 45°;
- A quantidade de armadura longitudinal influi no esforço da armadura transversal.
- Nos elementos de concreto submetidos ao esforço cortante existem ainda outros mecanismos resistentes, além da própria armadura transversal, como: efeito de arco, encaixe dos agregados e o efeito de pino da armadura longitudinal.

Anos depois, em 1927, Richart propôs um método de dimensionamento ao esforço cortante onde as contribuições do aço e do concreto seriam calculadas independentemente e somadas, para determinar a capacidade resistente da peça (RICHART, 1927). Tal método estimava a capacidade resistente do concreto baseado em observações de vigas rompidas por cisalhamento e estimava a contribuição do aço por meio da analogia da treliça, considerando os campos de tensões do concreto atuando a 45° da armadura longitudinal.

O tema ficou esquecido até meados dos anos 70, quando o assunto voltou a interessar pesquisadores americanos e o método foi aplicado a elementos submetidos a uma combinação de esforço cortante e momento torçor. E assim, a analogia da treliça foi sendo refinada, visando implementá-la e adequá-la aos resultados experimentais, por pesquisadores como Leonhardt, Rüschi e Kupfer.

O primeiro desenvolvimento importante foi a generalização do ângulo de inclinação das bielas de concreto, considerado 45° por Mörsch. Entretanto, a base científica para uma aplicação racional do método e sua relação com a teoria da plasticidade foi estabelecida por Thurlimann, Marti e Mueller.

Mais tarde, Marti (1985) e Schlaich *et al.* (1987) apresentaram uma abordagem do método para o dimensionamento de regiões descontínuas. A proposta apresentada por Schlaich *et al.* (1987) foi de generalizar a analogia da treliça de modo a aplicá-la na forma de biela e tirante para qualquer parte da estrutura, não apenas regiões descontínuas.

A norma canadense, CSA Standard, foi a primeira a adotar o modelo de biela e tirante, em 1984, para o dimensionamento de regiões descontínuas. Em 1989, a AASHTO adotou o modelo e apenas em 2002, o ACI incluiu referências do modelo em seu código

normativo. Em 2003, a ABNT incluiu na norma brasileira, NBR 6118, referência acerca deste método.

2.3. MODELO DE BIELA E TIRANTE.

2.3.1. Introdução.

O modelo de biela e tirante tem por base o mecanismo resistente das vigas de concreto armado; buscando-se representar a estrutura real, constrói-se um modelo idealizado, o qual é constituído por barras comprimidas e tracionadas, unidas por nós, tal qual uma treliça. Em outras palavras, o modelo consiste em uma representação discreta dos campos de tensão de tração e compressão nos elementos estruturais, sendo que as bielas representam os campos principais de compressão e os tirantes representam os campos principais de tração.

Uma das grandes vantagens do modelo de biela e tirante é analisar a estrutura em questão sem a necessidade de separar os esforços solicitantes e as forças internas para equilibrá-los, constituindo-se em um modelo mais realista.

Entre outras vantagens, qualquer estrutura pode ser representada por biela e tirante, sendo bastante útil em elementos que apresentam um complexo estado de tensões, tais como em vigas-parede, consolos, dentes *Gerber*, cunhas de ancoragem de protensão, entre outras situações, abrangendo estruturas de concreto armado e protendido (figura 2.9).

O método é baseado no teorema do limite inferior da plasticidade. Esse teorema baseia-se no princípio de que se o equilíbrio e os critérios de ruptura são satisfeitos, um limite inferior para a carga última é obtido. A compatibilização de deformações não é considerada no modelo, pois não é exigida no teorema do limite inferior e até mesmo devido à complexa distribuição de deformações não-lineares que existe em regiões “D”.

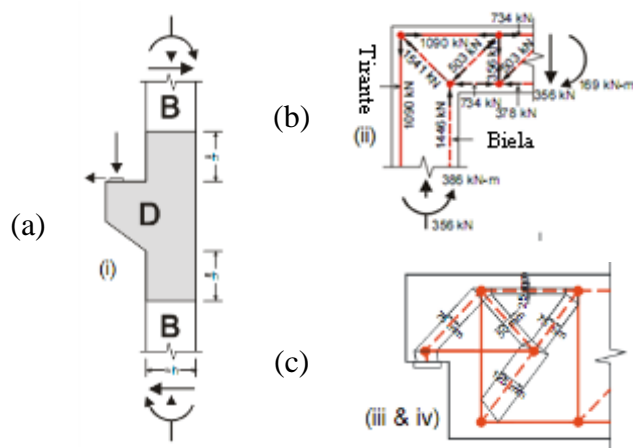


Figura 2.9 – Esquema estático de um (a) consolo curto, (b) modelo de biela e tirante para um nó de pórtico e (c) dente *Gerber* (KUCHMA; TJHIN, 2001).

Certo conservadorismo é inerente ao modelo – outra vantagem do método – devido a sua concepção estar atrelada ao teorema do limite inferior. Entretanto, é assumido que há capacidade de deformação suficiente para que as forças na estrutura sejam distribuídas de acordo com o modelo, o que pode ocasionar fissuração excessiva, devido ao comportamento plástico assumido, uma vez que as condições de compatibilidade de deformações não são exigidas. No entanto, são impostas algumas limitações ao modelo, visando evitar problemas desta natureza, como, por exemplo, as limitações dos ângulos entre bielas e tirantes e taxas de armadura mínima recomendada por códigos normativos.

2.3.2. Elementos da treliça.

A seguir, serão detalhados os elementos constituintes do modelo de biela e tirante.

2.3.2.1. Nós.

Os nós idealizam pontos de interseção entre os elementos da treliça. Na realidade, são regiões onde as tensões são desviadas por certo comprimento.

Em uma estrutura, a maioria dos nós é do tipo contínuo, onde os campos de tensões no concreto se equilibram ou são desviados em comprimentos satisfatórios. Esses nós não são críticos no projeto e é suficiente que seja verificada a ancoragem das barras que nele concorrem.

Por outro lado, se ocorre concentração de tensões no concreto e o desvio das forças ou ancoragem são feitos localizadamente, os nós são chamados de singulares ou concentrados. Esse tipo de nó geralmente governa a resistência e as dimensões do elemento estrutural. A figura 2.10 apresenta os tipos de nó e a diferença entre eles:

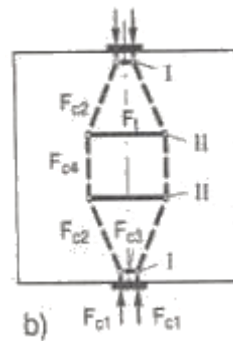


Figura 2.10 – Nós singulares (I) e nós contínuos (II) (FIB *BULLETIN* 52, 2010).

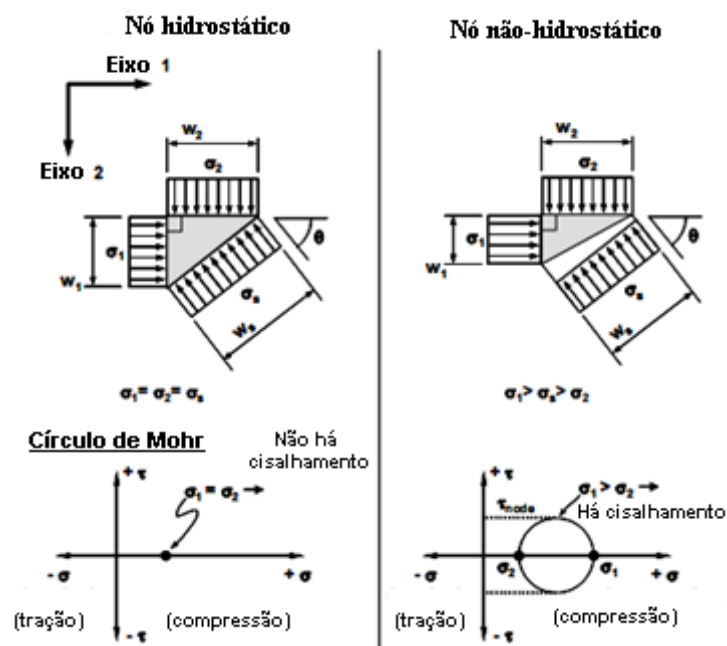


Figura 2.11 – Nó hidrostático e não-hidrostático (THOMPSON, 2002 *apud* BROWN, 2005).

Quanto às tensões atuantes em cada face, um nó pode ser classificado em: hidrostático e não-hidrostático. Se um nó é dimensionado de forma que as tensões em todas as faces sejam iguais, esse é considerado um nó hidrostático. Neste tipo de nó, as tensões principais são iguais e, portanto, não há cisalhamento (figura 2.11). A ausência de esforço cortante no nó é uma das grandes vantagens do nó hidrostático, mas a grande desvantagem é a dificuldade em dimensionar as faces obedecendo às limitações entre os ângulos.

Por outro lado, em um nó não-hidroestático não é necessário que todas as faces tenham a mesma tensão. Entretanto, Schlaich *et al.* (1987) recomenda que a razão entre a dimensão da maior face e a menor seja, no máximo, 2, para limitar o cisalhamento. Schafer & Schlaich (1988) propuseram um método simplificado para configurações típicas de nós. Segundo os pesquisadores citados, o nó tem sua geometria definida pela interseção das dimensões das bielas e tirantes, cujos eixos devem coincidir. Assim, as tensões planas atuantes em todos os lados da região nodal não precisam ser iguais, porém as tensões em cada lado do nó devem ser constantes e permanecer abaixo de um limite pré-estabelecido para a tensão nodal.

Os nós são nomeados de acordo com a quantidade de bielas e tirantes que nele se cruzam. Por exemplo, se três bielas comprimidas se cruzam em um nó, este é chamado de nó CCC. Se duas bielas comprimidas e um tirante se interceptam em um nó, este é chamado de CCT, e assim por diante. Se mais de três elementos se interceptam em um nó, com ângulos diferentes, elementos similares podem ser combinados em um, atuando como uma força resultante.

2.3.2.2. Bielas.

As bielas representam discretizações dos campos de compressão no concreto, delimitadas por uma diagonal de concreto formada por duas fissuras consecutivas. Dependendo da forma como as tensões se distribuem dentro da estrutura, existem três configurações típicas para as bielas de concreto (figura 2.12), descritas com maiores detalhes a seguir:

- Biela prismática (*prismatic*): trata-se de um campo de tensão que se distribui uniformemente, sem perturbação, e que não produz tensão transversal de tração;
- Biela em leque (*fan-shaped*): trata-se de uma idealização de um campo de tensão com curvatura desprezível, que não desenvolve tensão transversal de tração;
- Biela em garrafa (*bottle-shaped*): trata-se de um tipo de biela que possui a distribuição de tensão em linhas curvilíneas com afunilamento da seção e que desenvolve tensões transversais de tração. A tração transversal combinada com a compressão longitudinal pode causar fissuras que levam a uma ruptura prematura do concreto.

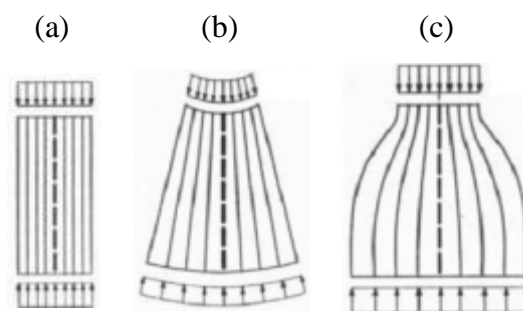


Figura 2.12 – Tipos de bielas (a) prismática, (b) em leque e (c) em forma de garrafa (SCHLAICH *et al.*, 1987).

2.3.2.3. Tirantes.

As forças de tração no modelo de biela e tirante são normalmente absorvidas por tirantes constituídos de barras de aço. Em situações especiais pode ser necessário utilizar tirantes de concreto, como por exemplo, nas bielas do tipo “garrafa”, não-armadas transversalmente.

Uma grande preocupação em relação aos tirantes é a ancoragem da armadura. É recomendável a utilização de barras mais finas e em maior quantidade de camadas, pois se deve disponibilizar as armaduras ao longo de uma área suficientemente grande, de maneira a evitar o esmagamento das regiões nodais.

A ancoragem das barras por aderência consiste, essencialmente, em uma transferência de carga por tensão de compressão no concreto pelas mossas das barras de aço ou por pressão radial das barras dobradas (figura 2.13) e se inicia onde a trajetória de tensões de compressão encontra a barra ancorada e são desviadas pelas tensões de aderência.

Sobre o apoio, a ancoragem se inicia no começo da seção do apoio e deve ser estender, no mínimo, até o fim do apoio (figura 2.14). Entretanto, o comprimento dentro do nó pode não ser suficiente para satisfazer a ancoragem necessária e, neste caso, deve-se prolongar a barra além do nó, o que faz com que parte da força no tirante seja considerada como uma força de compressão atuando por detrás do nó.

A ancoragem ideal em um nó do tipo CCT é feita com uma placa de ancoragem, segundo FIB Bulletin 52 (2010), que transfere a força por detrás do nó, causando compressão no mesmo e aumentando a resistência nodal.

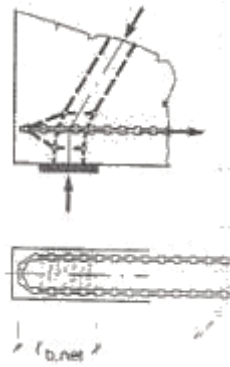


Figura 2.13 – Pressão radial das barras (FIB *BULLETIN* 52, 2010).

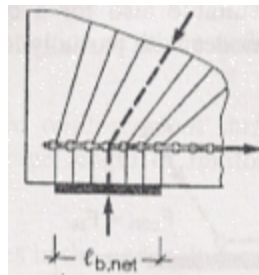


Figura 2.14 – Ancoragem no comprimento do apoio (FIB *BULLETIN* 52, 2010).

2.3.3. Avaliação da resistência efetiva das bielas, regiões nodais e tirantes.

Em geral, a resistência efetiva dos tirantes, constituídos de uma armadura passiva ou ativa, é garantida por uma simples minoração da resistência do aço, do tipo:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}, \text{ para aços de resistência normal.} \quad (2.1)$$

$$f_{pd} = \frac{f_{p0.1k}}{\gamma_s}, \text{ para aços de protensão.} \quad (2.2)$$

Onde: γ_s é o coeficiente de minoração da resistência do aço.

Entretanto, uma estimativa conservadora da resistência a compressão das bielas e zonas nodais é crucial para garantir segurança estrutural e priorizar que o escoamento da armadura longitudinal ocorra antes do esmagamento do concreto. Se não ocorre o escoamento ou mesmo, ocorre um escoamento parcial, antes do esmagamento do concreto, uma ruptura

brusca com conseqüências drásticas pode acontecer, conforme tem sido observado nas rupturas de estruturas por cisalhamento.

Por este motivo, nas últimas duas décadas, vários pesquisadores têm se dedicado a discutir a resistência efetiva do concreto nas bielas e regiões nodais nos modelos de biela e tirante. No geral, a resistência efetiva é calculada da forma:

$$f_c = \nu f_c' \quad (2.3)$$

Onde: ν é chamado por vezes de fator de eficiência ou ainda de fator de redução da resistência do concreto.

Diferentes abordagens são discutidas, relativas ao efeito do estado de tensões no concreto, deformações, presença de armadura, resistência do concreto, entre outros fatores, no coeficiente ν , mas não há consenso sobre o assunto.

A seguir serão apresentadas e discutidas algumas formulações relativas à avaliação da resistência das bielas e regiões nodais, publicadas por Schlaich *et al.* (1987) e pelas normas americana – ACI 318 – e européia – CEB/FIB *Model Code*:

2.3.3.1. Segundo Schlaich *et al.* (1987):

A minoração da resistência do concreto se dá da seguinte forma:

$f_{cd}^* = 1,0f_{cd}$, para nós sem perturbação e bielas em estado de compressão uniaxial; (2.4)

$f_{cd}^* = 0,8f_{cd}$, se ocorrerem deformações de tração na direção transversal ou na armadura de tração transversal que possam causar fissuração paralela a biela comprimida de espessura normal ou em nós que ancorem barras de aço; (2.5)

$f_{cd}^* = 0,6f_{cd}$, para bielas ou nós com fissuras inclinadas ou estribos inclinados; (2.6)

$$f_{cd}^* = 0,4f_{cd}, \text{ para bielas ou nós com fissuras inclinadas com } (2.7)$$

abertura excessiva;

nde

:

$$f_{cd} = \frac{0,85 f_c}{\gamma_c}$$

O autor acima citado, um dos pioneiros na introdução da abordagem do modelo de bielas e tirante no dimensionamento de regiões “D”, leva em consideração na formulação acima o estado de tensões no concreto, a presença de armadura ancorada no nó e a existência de fissuras na redução da resistência a compressão do concreto. A relativa simplicidade da formulação apresentada por Schlaich *et al.* (1987) se deve ao anseio do autor de disseminar o método e torná-lo aplicável a situações práticas do dia-a-dia.

2.3.3.2. ACI 318 (2008) – Apêndice A:

A resistência a compressão efetiva do concreto na biela (f_{ce}) deve ser calculada utilizando-se a formulação a seguir:

$$f_{ce} = 0,85\beta_s f'_c \quad (2.8)$$

nde:

β_s é o fator de eficiência da biela, que vale 1,0 para bielas prismáticas, 0,75 para bielas em forma de garrafa adequadamente reforçadas e 0,60 para bielas em forma de garrafa reforçadas inadequadamente;

f'_c é a resistência a compressão específica do concreto.

O fator de eficiência da biela em forma de garrafa depende da quantidade de armadura empregada. Se a equação 2.9 for satisfeita, o fator de eficiência 0,75 é utilizado; senão, 0,60. O propósito da armadura é resistir as tensões transversais de tração que surgem neste tipo de biela e evitar o surgimento de fissuras que podem comprometer a resistência do concreto.

A equação 2.9 é apresentada a seguir:

$$\rho_{\perp} = \sum \frac{A_{si}}{b_s s_i} \text{sen}\alpha_i \geq 0,003 \quad (2.9)$$

Onde:

A_{s_i} é a área total de armadura com espaçamento s_i na i -ésima camada cruzando a biela, formando um ângulo α_i da armadura com a biela;

b_s é a largura da biela;

s_i é o espaçamento da armadura na i -ésima camada;

α_i é o ângulo entre a i -ésima camada de armadura e o eixo da biela.

A figura 2.15 auxilia no entendimento dos parâmetros para o cálculo da equação 2.9:

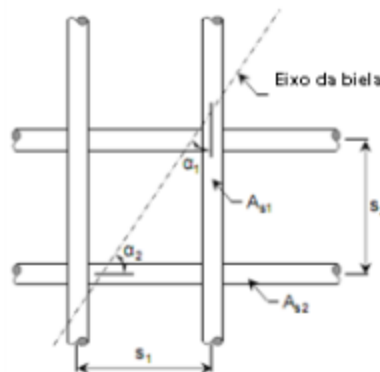


Figura 2.15 – Cálculo de ρ_{\perp} no ACI 318 (ACI 318, 2008).

A resistência da região nodal é calculada por meio da seguinte fórmula:

$$f_{ce} = 0,85\beta_n f'_c \quad (2.10)$$

Onde:

β_n é o fator de eficiência do nó que vale 1,0 para nós do tipo CCC, 0,80 para nós do tipo CCT e 0,60 para nós do tipo CTT e TTT;

f'_c é a resistência a compressão específica do concreto.

2.3.3.3. CEB-FIP *Model Code* 2010 (2010):

No dimensionamento das bielas, a resistência a compressão reduzida do concreto deve ser utilizada $\frac{k_c f_c}{\gamma_c}$. O fator de redução k_c é calculado conforme formulação a seguir:

$$k_c = 1,0 \left(\frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 1,0 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (2.11)$$

Válida para estado de tensão de compressão uniaxial ou ainda, para regiões que existam tensão de compressão na direção transversal, situação na qual uma resistência maior pode ser assumida – compressão multiaxial (figura 2.16).

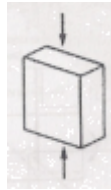


Figura 2.16 – Compressão uniaxial (CEB-FIB MC, 2010).

$$k_c = 0,75 \left(\frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 0,8 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (2.12)$$

Válida para bielas com fissuras paralelas a direção de compressão e armadura de tração perpendicular as fissuras (figura 2.17).

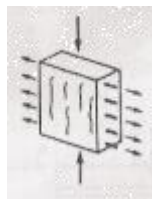


Figura 2.17 – Compressão longitudinal e tração transversal (CEB-FIB MC, 2010).

$$k_c = 0,55 \left(\frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 0,55 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (2.13)$$

Válida para bielas onde ocorre armadura inclinada em relação à direção da compressão (figura 2.18).

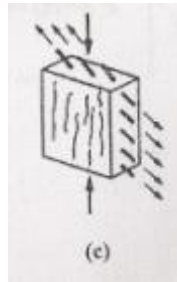


Figura 2.18 – Compressão longitudinal e armadura inclinada (CEB-FIB MC, 2010).

No dimensionamento das regiões nodais, a resistência a compressão reduzida do concreto deve ser utilizada $\frac{k_c f_c}{\gamma_c}$. O fator de redução k_c é calculado conforme formulação a seguir:

$$k_c = 1,0 \left(\frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 1,0 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}), \text{ para nós onde não existam} \quad (2.14)$$

tirantes ancorados.

$$k_c = 0,75 \left(\frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} \leq 1,0 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}), \text{ para nós onde existam} \quad (2.15)$$

tirantes ancorados em uma ou duas direções.

2.3.4. Direção das bielas e tirantes.

De maneira geral, a escolha do modelo de biela e tirante a ser adotado no dimensionamento de uma estrutura pode ser feita baseando-se nos seguintes critérios:

- Modelos padronizados disponíveis em códigos normativos;
- Caminho das cargas ou “*load path approach*”: o caminho das cargas no interior da estrutura ocorre por meio de campos de tensão de compressão e tração, que são representados por bielas e tirantes. Uma desvantagem é que para estruturas complexas, determinar-se o caminho das cargas pode não ser uma tarefa fácil.

- Análises elásticas utilizando método dos elementos finitos: a definição do modelo de biela e tirante nas direções das tensões principais obtidas na análise elástica é adequada e recomendada por vários pesquisadores, entre eles, Schlaich *et al.* (1987).

- Análises não-lineares que considerem a fissuração do concreto: a construção de modelo de biela e tirante através de programas de elementos finitos que incorporem recursos de análise não-linear tem sido bastante eficiente no desenvolvimento, análise e detalhamento de estruturas de concreto armado e protendido, possibilitando a criação de modelos mais realistas. No entanto, a utilização de tais recursos ainda é restrita, devido ao alto custo dos programas computacionais, tempo de análise e experiência anterior necessária para se obter bons resultados. Souza (2004) apresenta pesquisa desenvolvida por Foster (1998) que mostra que as bielas comprimidas tornam-se mais estreitas após a fissuração do concreto.

- Pesquisas experimentais;

- Algoritmos de otimização estrutural: os modelos de biela e tirante em concreto armado, em geral, são elaborados a partir da distribuição de tensões elásticas e pelo processo de caminho das cargas, já citados anteriormente. Esses métodos envolvem processos de tentativa e erro e são baseados na intuição e experiência do projetista. Em virtude disso, a computação gráfica e algoritmos de otimização vêm sendo utilizados para desenvolver os modelos de maneira automática, necessitando de menor intervenção do projetista.

A seguir, serão apresentados alguns trabalhos referentes aos processos de otimização do modelo de biela e tirante:

2.3.4.1. Lourenço & Almeida (2004).

Schlaich *et al.* (1987) afirmam que na seleção do melhor modelo deve-se considerar sempre que os esforços tendem a seguir os caminhos mais curtos e com as menores deformações. E, uma vez que os tirantes são mais deformáveis que as bielas comprimidas de concreto, um modelo com menor número de tirantes com menor comprimento, será o mais adequado:

$$\sum F_i l_i \varepsilon_i = \text{mínimo} \quad (2.16)$$

Baseados na proposição de Schlaich et al. (1987), Lourenço & Almeida (2004) propõe uma metodologia baseada na metodologia da minimização da energia de deformação global dos modelos, definindo a geometria das bielas através dos campos de tensões.

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad (2.17)$$

Onde: U representa a energia de deformação do modelo e x , as variáveis que se pretende analisar.

Sendo U definida por:

$$U = \int_v \sigma * \varepsilon * dV \quad (2.18)$$

O método descrito acima é ilustrado aplicando-se a uma viga parede ensaiada por Leonhardt & Walter. A partir do primeiro modelo, baseado na trajetória de tensões elásticas, obtém-se uma carga de ruptura de apenas 40% da capacidade última da viga, obtida experimentalmente. Com o segundo modelo, baseado na distribuição de tensões na ruptura, obteve-se 94% da carga última do ensaio (figura 2.19). A previsão do comportamento estrutural na ruptura só poderia ser definida por meio de uma análise não-linear de elementos finitos. Porém, segundo Lourenço & Almeida (2004), baseados na metodologia proposta, do princípio da minimização da energia de deformação do modelo de biela e tirante, consegue-se uma boa aproximação do comportamento estrutural, permitindo, de forma relativamente simples, determinar o campo de tensões na ruptura.

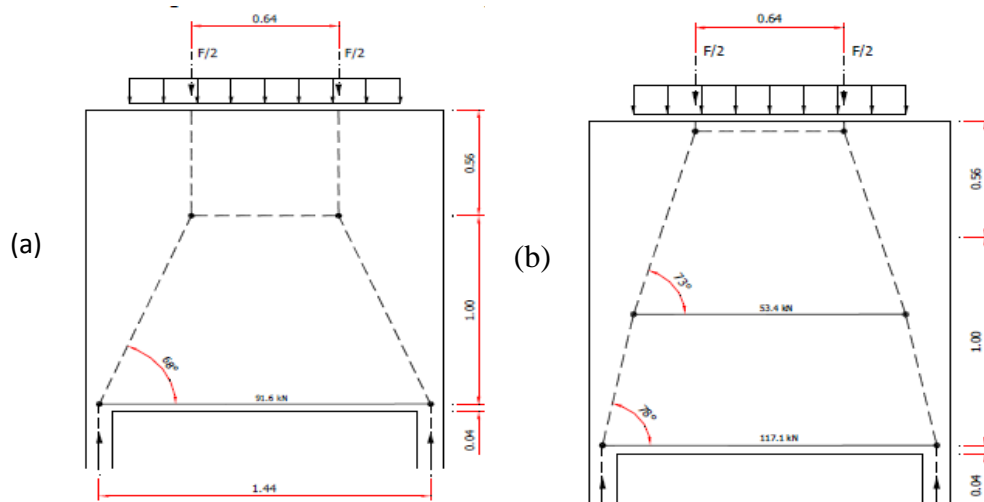


Figura 2.19 – Modelo de biela e tirante baseado (a) na trajetória de tensões elásticas e (b) na distribuição de tensões na ruptura (LOURENÇO; ALMEIDA, 2004).

2.3.4.2. Liang (2002).

A otimização baseada em performance (PBO – Performance Based Optimization), vem sendo utilizada por Liang para a detecção automática do modelo de biela e tirante em estruturas de concreto armado e protendido.

O PBO parte do princípio que alguns elementos da estrutura de concreto armado não são tão efetivos em suportar cargas quanto outros. Desta forma, eliminando porções subutilizadas da estrutura, o caminho real das cargas pode ser encontrado.

A otimização pode ser equalizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{Mínimo } \sum_{e=1}^n w_e(t) \\ &\text{Sujeito a } C \leq C^* \end{aligned} \quad (2.19)$$

Onde:

w é o peso do enésimo elemento;

t é a espessura dos elementos;

C é a energia de deformação da estrutura sob aplicação de carregamento;

C^* é o valor limite de C ;

n é o total de elementos.

A efetividade do elemento em suportar cargas é medida pela energia de deformação por unidade de peso (densidade da energia de deformação), que avalia a contribuição do elemento na rigidez da estrutura modelada por elementos finitos.

$$\gamma_e = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \{u_e\}^T [k_e] \{u_e\} \right\}}{w_e} \quad (2.20)$$

Onde:

u_e é o vetor de deslocamentos do e -ésimo elemento;

k_e é a matriz de rigidez do e -ésimo elemento;

w_e é o peso do e -ésimo elemento.

O critério de eliminação de elementos pouco efetivos é remover os elementos com as menores densidades de deformação. E, para determinar o nível de otimização, utiliza-se o critério PI (índice de *performance*):

$$\text{Máximo } PI = \frac{c_o w_o}{c_i w_i} \quad (2.21)$$

Onde:

c_o e w_o são a energia de deformação e o peso inicial da estrutura (sem remoção de elementos);

c_i e w_i são a energia de deformação e peso na i -ésima iteração.

A topologia ótima representa o mecanismo que melhor transmite cargas no elemento de concreto, sendo tratado também como o modelo de biela e tirante ótimo. A figura 2.20 mostra um exemplo de aplicação do PBO:

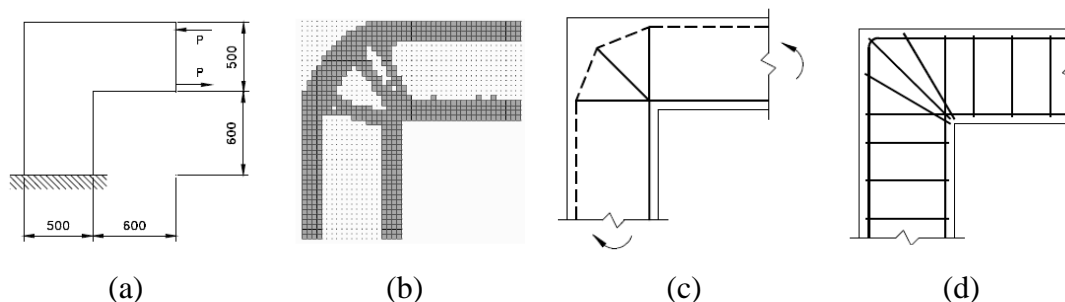


Figura 2.20 – Estrutura de uma (a) ligação entre viga e pilar, (b) topologia ótima, (c) modelo de biela e tirante e (d) detalhamento da armadura (LIANG, 2002).

2.3.4.3. Liang *et al.* (2006).

É evidente que a dificuldade em gerar um modelo de biela e tirante adequado para uma estrutura 3D e a necessidade de automatizar o processo é maior, pois as técnicas atuais, como por exemplo, do caminho das cargas, tornam-se de difícil aplicação nestes casos. Neste trabalho mais recente, Liang *et al.* (2006) apresenta a otimização topológica aplicada a estruturas 3D.

A otimização topológica é baseado no RESO (Refined Evolutionary Structural Optimization). O método do RESO baseia-se em eliminar partes menos efetivas da estrutura, baseando-se na densidade de energia de deformação, de maneira semelhante ao PBO, diferenciando-se no critério de eliminação dos elementos pouco efetivos. Os elementos são deletados quando a densidade de energia de deformação (w_i) é menor que uma razão de rejeição (RR – rejection ratio) vezes a densidade média da estrutura (w_{ave}). Ou seja:

$$\text{Se } w_i < RR * w_{ave}, \text{ o elemento é deletado.} \quad (2.22)$$

Onde:

$$w_i = \frac{1}{2V_i} \{u_i\}^T [k_i] \{u_i\};$$

$\{u_i\}$ é o vetor de deslocamentos;

$[k_i]$ é a matriz de rigidez;

V_i é o volume do elemento i .

A análise é repetida utilizando-se o mesmo RR até que um estado estacionário seja alcançado, o que representa que nenhum elemento será eliminado. Nesse estágio, uma taxa de evolução (ER – *evolution rate*) é acrescida ao valor de RR.

$$RR = RR + ER \quad (2.23)$$

O índice de *performance* (PI – *performance index*) proposto em Liang (2002) é adotado para monitorar quando a topologia ótima é encontrada.

As figuras abaixo mostram um bloco de fundação, o esquema estático do bloco, o modelo de biela e tirante e os resultados obtidos com o RESO:

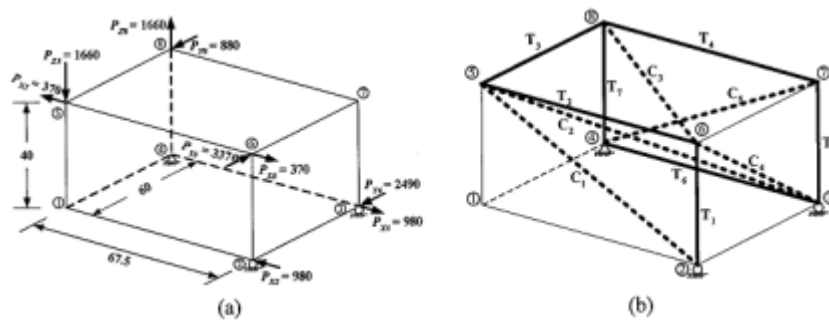


Figura 2.21 – (a) Esquema estático do bloco e (b) modelo de biela e tirante (LIANG *et al.*, 2006).

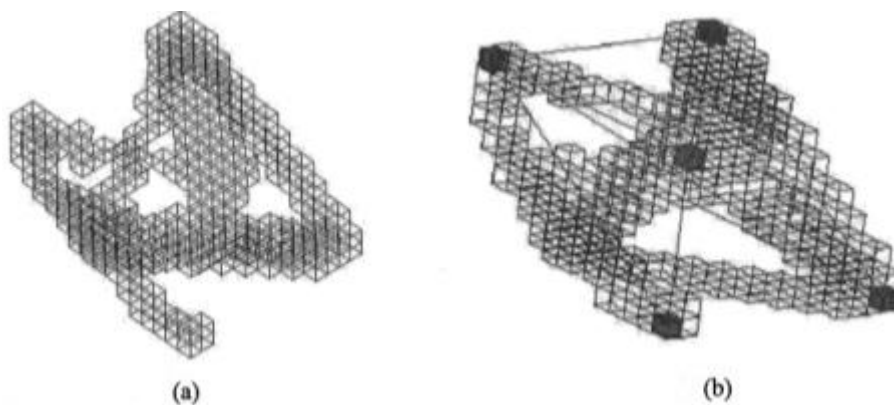


Figura 2.22 – (a) Topologia ótima e (b) elementos unidos por nós (LIANG *et al.*, 2006).

2.3.4.4. Nagarajan *et al.* (2009):

O estudo de Nagarajan trata da aplicação da microtreliça ao modelo de biela e tirante para a análise e dimensionamento de concreto armado. A microtreliça pode ser

considerada uma generalização do modelo de biela e tirante e é utilizada para encontrar a melhor topologia para a estrutura. E ainda, pode ser usado para prever a resposta não linear da estrutura de concreto armado.

O uso do modelo de microtreliça é ilustrado por meio de um exemplo de viga-parede, conforme figura abaixo, onde o elemento estrutural é discretizado em um padrão de elementos de barra.

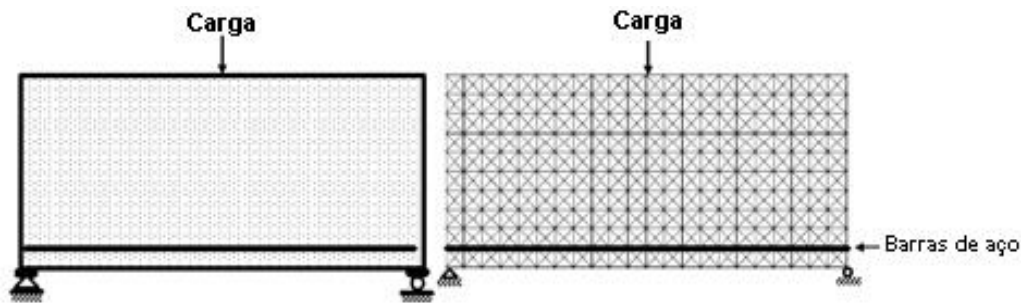


Figura 2.23 – Viga discretizada em microtreliça (NAGARAJAN *et al.*, 2009).

O desenvolvimento do modelo se dá realizando uma análise linear do modelo discretizado em microtreliça. Os caminhos de carga são traçados com os elementos submetidos às maiores tensões normais de compressão e tração.

As figuras a seguir mostram as análises de tensões elásticas obtidas com o modelo da microtreliça. Os tipos de biela e o modelo de biela e tirante para a estrutura se tornam claramente perceptíveis por meio desta análise.

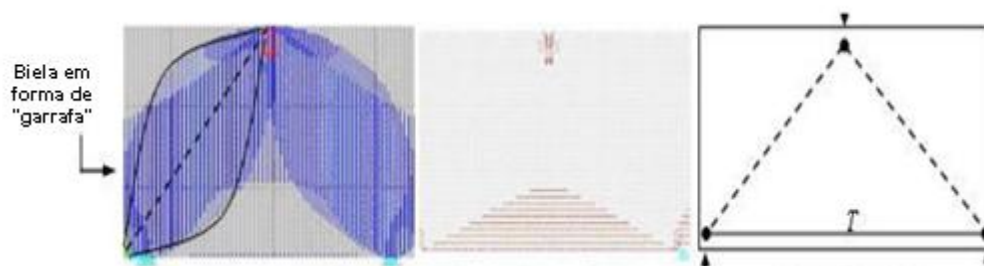


Figura 2.24 – Viga-parede sujeita a uma carga concentrada no meio do vão e tensões principais de (a) compressão, (b) tração e (c) modelo de biela e tirante (NAGARAJAN *et al.*, 2009).

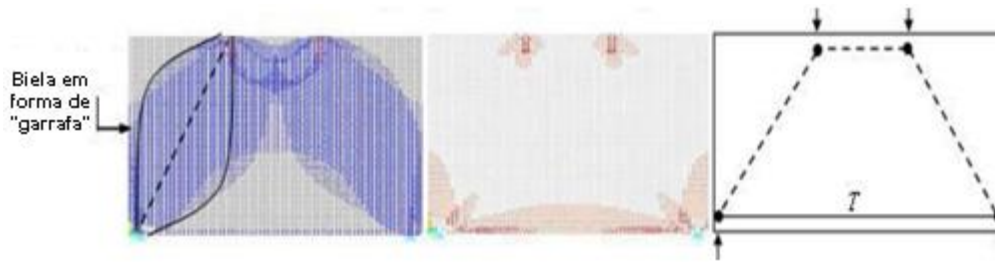


Figura 2.25 – Viga-parede sujeita a duas cargas concentradas simétricas tensões principais de (a) compressão, (b) tração e (c) modelo de biela e tirante (NAGARAJAN et al., 2009).

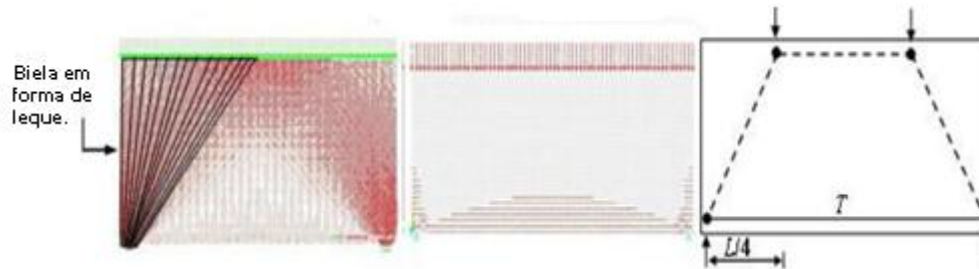


Figura 2.26 – Viga-parede sujeita a um carregamento distribuído tensões principais de (a) compressão, (b) tração e (c) modelo de biela e tirante (NAGARAJAN et al., 2009).

É possível realizar uma análise não-linear do modelo discretizado em microtreliça seguindo-se os passos abaixo (o autor utilizou o software *Ansys*® 10.0 em seu estudo).

- Discretizar o elemento estrutural em um padrão de microtreliças;
- Aplicar a carga última esperada para o elemento em alguns passos;
- Analisar a estrutura a cada passo de carga por iterações de *Newton-Raphson* para alcançar a solução;
- Gravar os deslocamentos e as deformações a cada passo de carga;
- Desativar os elementos nos quais a deformação excede a deformação última (rigidez é anulada);
- Remover os elementos desativados, obtendo-se o padrão de fissuração do elemento.

Abaixo são mostrados resultados da análise não-linear da viga-parede que apresenta o padrão de fissuração do elemento para a carga de serviço e para a carga última, para o caso de uma viga sujeita a uma carga concentrada no meio do vão.

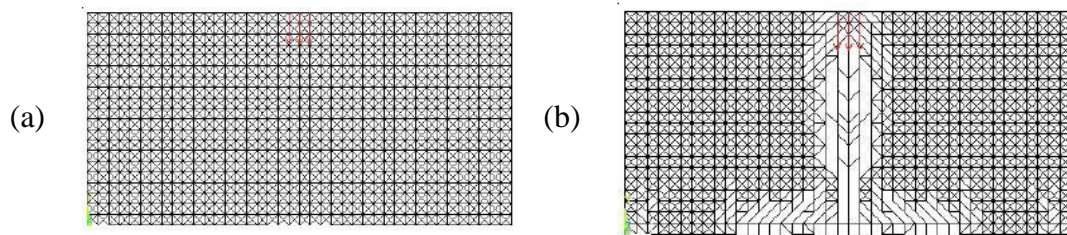


Figura 2.27 – Padrão de fissuração de uma viga-parede sujeita a uma carga concentrada no meio do vão (a) sob carga de serviço e (b) sob carga de ruptura (NAGAJARAN, 2009).

2.3.4.5. Pantoja (2009).

Pantoja (2009) apresentou uma proposta de tese cujo objetivo principal é conceber um sistema gráfico integrado que possua uma série de subprogramas capazes de gerar o modelo de biela e tirante, calcular a treliça, dimensionar e realizar a verificação dos elementos, verificar o desempenho no estado limite último via algoritmos de confiabilidade e programação matemática, verificar desempenho em serviço via análise não-linear e definir, iterativamente, um modelo final.

O sistema integrado será denominado MOBITOT e será desenvolvido em linguagem MATLAB, para controle e interligação dos programas, entre os quais, alguns já existem e outros serão desenvolvidos pelo pesquisador, conforme esquema abaixo:

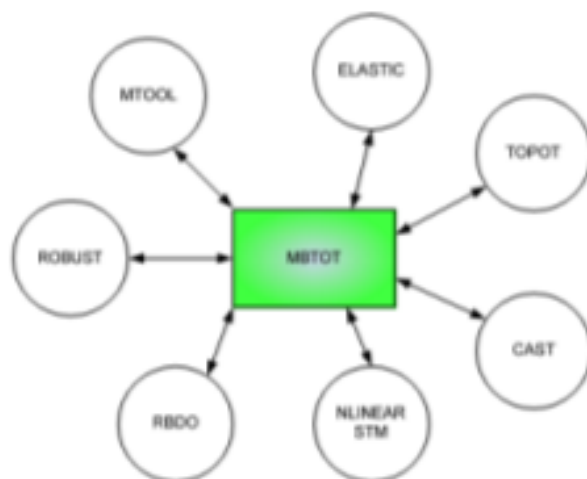


Figura 2.28 – Esquema do MOBITOT (PANTOJA, 2009).

O MOBITOT vai aliar programas como o MTOOL, um gerador de malhas de elementos finitos; o ELASTIC, responsável pela análise de tensões elásticas; TOPOT, responsável pela otimização topológica com indutores; o programa CAST desenvolvido pelos

pesquisadores Kuchma e Tjhin (Universidade de Illinois), que efetuará o cálculo das treliças e o dimensionamento e verificação dos elementos; o NLINEARSTM, um programa de análise não-linear desenvolvido na Universidade de Illinois, que possibilitará a verificação do estado limite último em serviço; RBDO realizará um dimensionamento ótimo para o modelo de biela e tirante em questão; assim como o ROBUST, um programa de otimização robusta.

2.3.5. Influência da escolha do modelo de biela e tirante na resistência e desempenho do elemento estrutural.

Ley *et al.* (2007) conduziu uma competição entre alunos, que deveriam elaborar um modelo de biela e tirante para uma viga com abertura na alma, conforme figura 2.29, que conduziu a maior relação entre carga última e quantidade de aço (kg) com uma deformação mínima de $l/100$ (10,7 mm), onde l representa o vão da viga.

A estrutura deveria ser projetada para resistir a uma carga de projeto de 23,6 kN, utilizando concreto com resistência a compressão de 24 MPa e resistência a tração de 1,6 MPa. Cinco grupos de trabalho foram formados e trabalhando independentemente, cada equipe implementou um modelo e elaborou um projeto de detalhamento da armadura, segundo critérios do código normativo ACI 318, versão de 2005, onde cada modelo deu ênfase a um critério de desempenho do elemento estrutural.

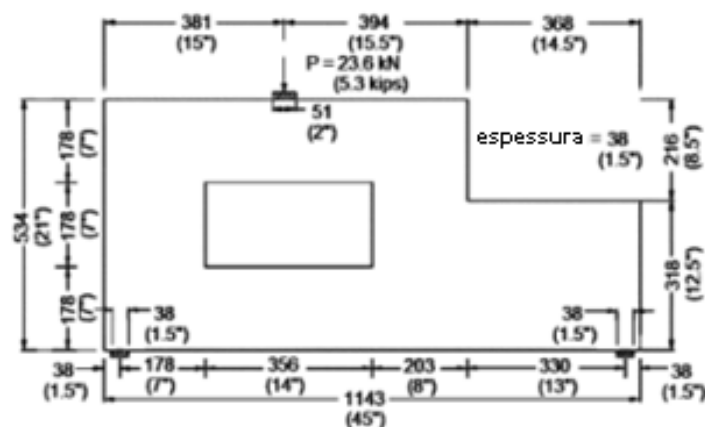


Figura 2.29 – Viga-parede com abertura na alma (LEY *et al.*, 2007).

A primeira tarefa de cada equipe foi realizar uma análise de tensões elásticas utilizando elementos finitos, conforme sugerido por Schlaich *et al.* (1987) (figura 2.30). E então, definir a treliça interna, calcular as forças e dimensionar a área de aço. Em seguida, checar os apoios e regiões nodais e detalhar a armadura.

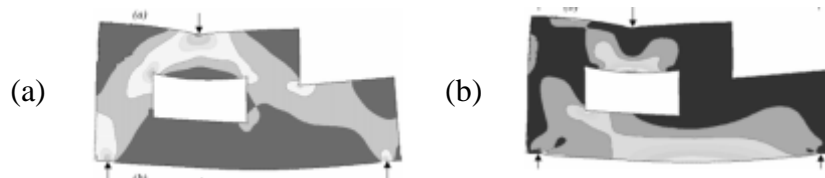


Figura 2.30 – Trajetória de tensões de (a) compressão e (b) tração (LEY *et al.*, 2007).

Foram ensaiadas sete vigas-parede, entre elas, uma viga de concreto sem armadura, para verificar a resistência e o padrão de fissuração da viga, utilizando apenas a resistência à tração do concreto e outras seis vigas com detalhamentos diferentes, cujas características principais foram: ênfase dada a (1) minimização do comprimento dos tirantes; (2) distribuir as cargas ao redor das aberturas; (3) ductilidade do elemento estrutural; (4) adoção do posicionamento das bielas e tirantes seguindo a distribuição de tensões elásticas; e (4i), variação da armadura do modelo 4; (5) preencher de todo o contorno com bielas e tirantes.

As figuras abaixo mostram os seis modelos de biela e tirante e as respectivas armaduras das vigas-parede.

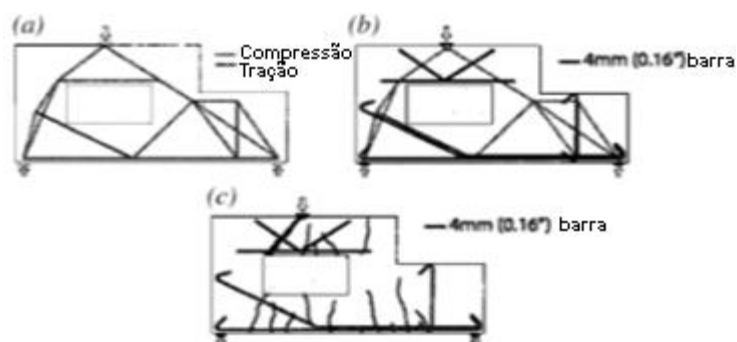


Figura 2.31 – Modelo (1) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY *et al.*, 2007).

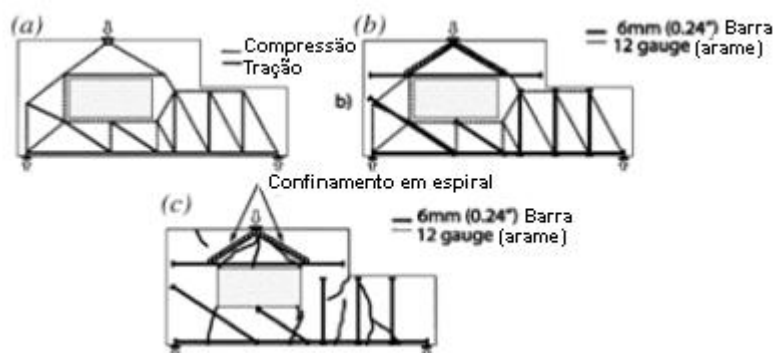


Figura 2.32 – Modelo (2) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY *et al.*, 2007).

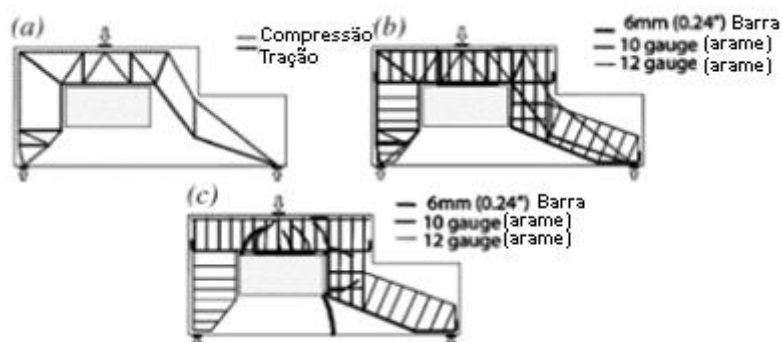


Figura 2.33 – Modelo (3) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY *et al.*, 2007).

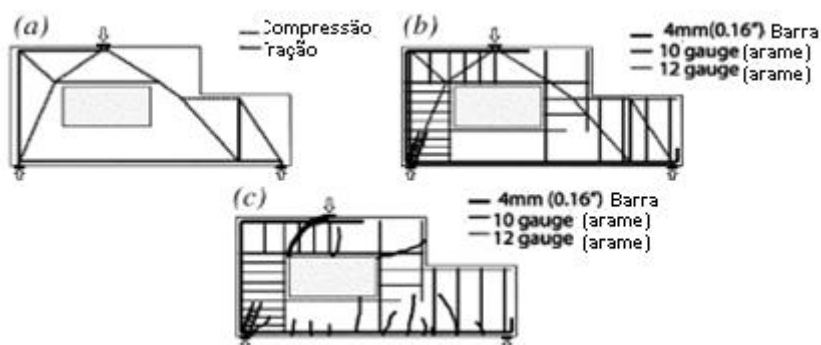


Figura 2.34 – Modelo (4) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY *et al.*, 2007).

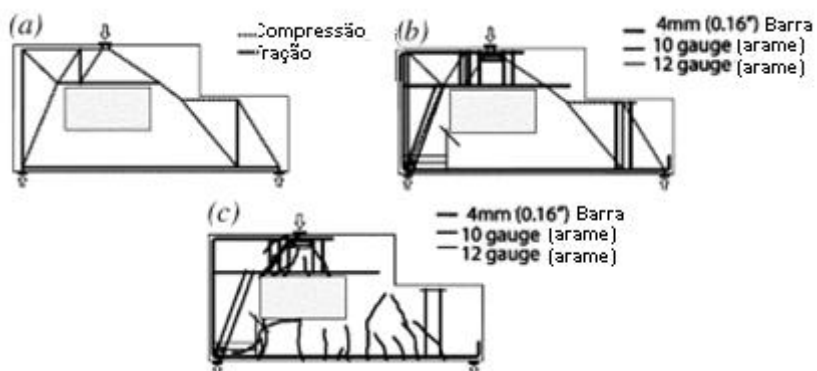


Figura 2.35 – Modelo (4i) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY *et al.*, 2007).

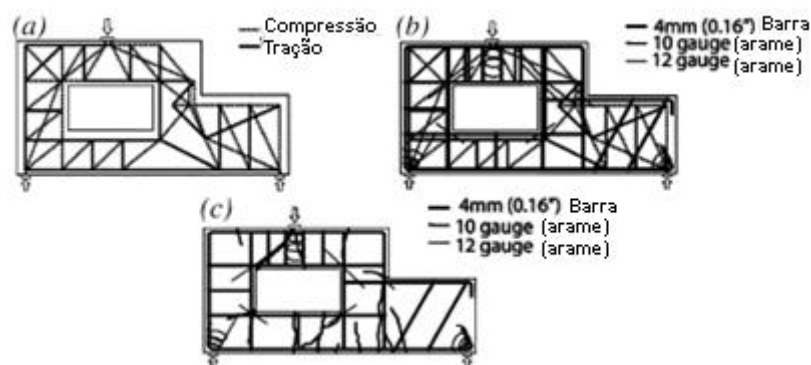


Figura 2.36 – Modelo (5) (a) MBT, (b) Detalhamento da armadura sobreposto ao MBT e (c) Padrão de fissuração na ruína (LEY *et al.*, 2007).



Figura 2.37 – Modelo sem armadura na ruína (6) (LEY *et al.*, 2007).

Analisando os resultados experimentais, Ley *et al.* (2007) verificou que, apesar da diferença nas abordagens do dimensionamento, os mecanismos de ruptura das vigas-parede foram bastante similares. As vigas-parede de 1 a 5 suportaram maior carregamento que a carga de projeto e apenas os modelos 2 e 3 apresentaram fissura quando submetidos a um carregamento menor que a carga de projeto.

Uma comparação entre a carga última, deflexão e razão de eficiência de cada viga é mostrada na tabela 2.1, que resume os principais resultados.

O modelo de maior eficiência, ou seja, que alcançou um equilíbrio entre segurança estrutural e economia, foi o modelo 1, que prezou por minimizar o tamanho dos tirantes, seguindo recomendação de Schlaich *et al.* (1987). Entretanto, o modelo que alcançou maior resistência foi o modelo 4i, uma variação do modelo 4, que seguiu criteriosamente a localização das bielas e tirantes segundo a análise de tensões elásticas. E o modelo que apresentou a maior deflexão foi o 3, que foi implementado pela equipe para apresentar um comportamento de pórtico de concreto armado.

Tabela 2.1 – Resultados experimentais (Adaptado de LEY *et al.*, 2007).

Modelo	Deformação na ruptura (mm)	Carga de ruptura (kN)	Carga de fissuração (kN)	Razão de eficiência (kN/kg)
(1)	17	40,5	26,7	101
(2)	17,5	32,9	22,2	33
(3)	27,4	27,1	22,2	26
(4)	15,5	38,3	28,5	38
(4i)	20,8	55,2	28,5	58
(5)	18	42,7	31,1	36
(6)	9,1	18,1	18,1	-

Os resultados mostraram que o modelo de biela e tirante pode fornecer um limite inferior para a carga de ruptura com segurança e que a orientação das bielas e tirantes definiu o mecanismo de transferência de forças predominante na estrutura.

2.3.6. Resumo do capítulo.

No início do capítulo foi discutida a definição de viga-parede e seu comportamento estrutural sob carregamento. A seguir, falou-se sobre o histórico do modelo de biela e tirante, desde sua utilização por Ritter e Mörsch, no início do século XX até as aplicações mais atuais do método, como, por exemplo, a utilização da otimização topológica aliada à energia de deformação dos elementos e os modelos de microtreliças na definição do modelo que melhor representa o caminho das cargas dentro da estrutura.

Incluiu-se ainda um breve tópico acerca de fatores de minoração da resistência das bielas de concreto e regiões nodais, pois serão estes os parâmetros utilizados neste trabalho. E o capítulo foi finalizado citando o interessante trabalho de Ley *et al.* (2007), que comprovou que não existe um modelo de biela e tirante único para a estrutura e que, dependendo da escolha do projetista e do mecanismo de transferência de forças, a estrutura corresponderá de forma mais ou menos prejudicial a sua vida útil.

3. MODELO DE BIELA E TIRANTE PARA A PREDIÇÃO DA CARGA ÚLTIMA.

Neste tópico serão apresentadas as abordagens de modelo de biela e tirante para predição da carga última e modo de ruptura de vigas-parede.

3.1. Abordagem de Won *et al.* (1998) para vigas-parede simplesmente apoiadas sem armadura de alma.

A abordagem de Won *et al.* (1998) apresentada a seguir aplica-se a vigas-parede rompidas por cisalhamento ou esmagamento da biela comprimida, antes ou depois do escoamento da armadura longitudinal e antes ou depois do escoamento dos estribos. Não sendo válida para vigas que rompem por esmagamento das regiões nodais ou por flexão. É aplicável para relações $a/d \leq 2,5$ para vigas simplesmente apoiadas sujeitas a uma carga concentrada ou duas cargas concentradas simétricas.

Foram 162 vigas analisadas por Won *et al.* (1998), obtendo-se os seguintes dados estatísticos em relação a representatividade do modelo:

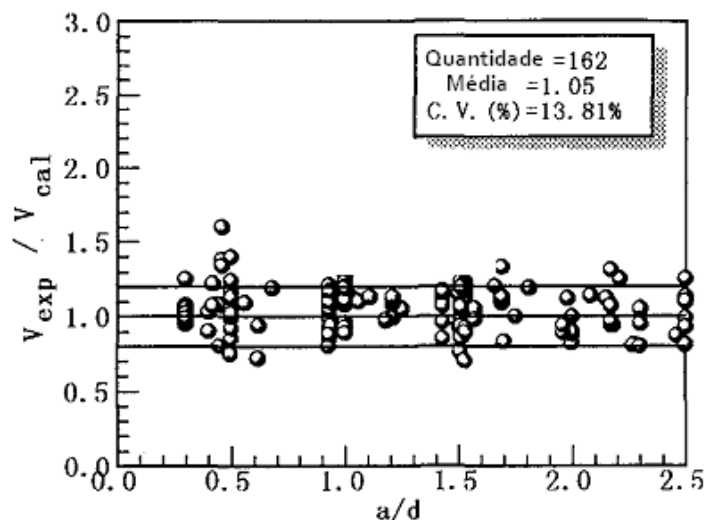


Figura 3.1 – Dados estatísticos do modelo (WON *et al.*, 1998).

Esta modelagem é trabalhosa devido à quantidade de cálculos e a necessidade de realizar várias iterações. Assim sendo, recomenda-se a utilização de planilhas de cálculo ou

mesmo a programação do algoritmo disponibilizado no artigo publicado por Won *et al.* (1998). Abaixo são apresentados os parâmetros a serem calculados:

3.1.1. Resistência efetiva do concreto.

Para nós do tipo CCC é aplicada a formulação do CEB-FIP *Model Code* versão de 1990, que limita a tensão no concreto submetido à compressão para zonas não-fissuradas e nós onde concorrem apenas bielas comprimidas ao valor de f_{ce1} (equação 3.1).

$$f_{ce1} = 0,85 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{ck} \quad (3.1)$$

Para nós do tipo CCT e bielas inclinadas, os autores propõem uma nova formulação para a resistência reduzida do concreto que leva em conta a resistência a compressão do concreto, a relação entre o vão de cisalhamento e altura útil (a/d) e a perturbação causada pela presença das barras de aço. Se a força no tirante da viga analisada for provida pela quantidade exata de armadura necessária para o equilíbrio, então se aplica a formulação 3.2.

$$f'_{ce2} = 0,68 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \left(1,25 - 0,25 \frac{a}{d} \right) f_{ck} \quad (3.2)$$

Quando a quantidade de armadura é maior que a necessária para o equilíbrio do nó, a perturbação causada pelas barras é menor, pois ocorre uma redução na tensão no tirante e a resistência a compressão do nó aumenta. Logo, aplica-se a equação 3.3 proposta pelos autores.

$$f_{ce2} = \frac{\left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \left(1,25 - 0,25 \frac{a}{d} \right) f_{ck}}{0,5 + \sqrt{\frac{T_a}{T_{max}}}} \quad (3.3)$$

Onde: T_a é a força necessária para o equilíbrio da biela aplicando-se a equação dada em 3.4 e $T_{máx}$ é dado por:

$$T_{max} = A_s f_y \quad (3.4)$$

Onde: A_s é a área de aço disponível e f_y , a tensão de escoamento.

3.1.2. Geometria do modelo.

Na primeira iteração é assumido que d_a , altura da biela horizontal, é a média entre um valor mínimo e máximo, onde o valor mínimo é zero e o máximo é a altura efetiva da viga (d).

$$d_a = \frac{d_a^{min} + d_a^{max}}{2} \quad (3.5)$$

A partir do valor assumido para d_a é calculado o valor do ângulo θ , que representa a inclinação da biela:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d - 0,5d_a}{a} \right) \quad (3.6)$$

3.1.3. Detalhe do nó CCT.

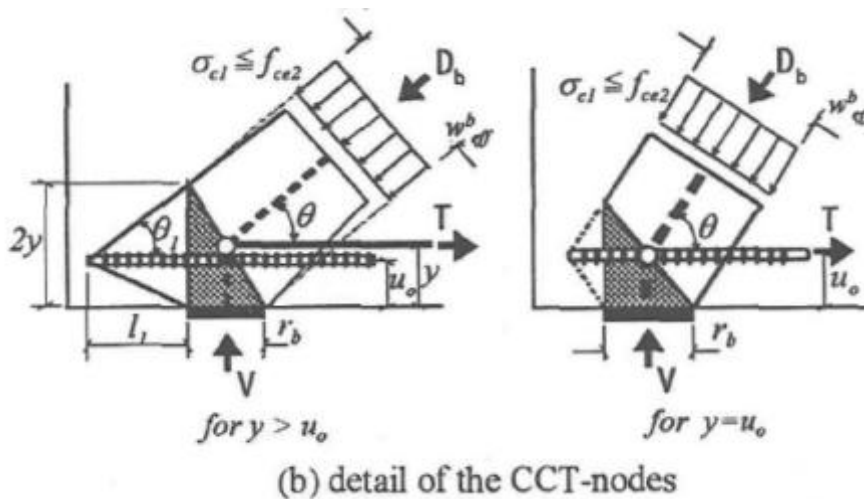


Figura 3.2– Modelagem do nó CCT (WON *et al.*, 1998).

A dimensão da parte inferior da biela inclinada (w_{eff}^b) no nó CCT é dada pela equação 3.7.

$$w_{eff}^b = r_b \text{sen}\theta + 2y \text{cos}\theta \quad (3.7)$$

Onde: r_b é o tamanho da placa do apoio, u_0 é distância do centróide das barras ao extremo da viga e y , do eixo do tirante ao extremo da viga.

A condição de igualdade para que $u_0=y$ é que l_l seja menor que o $l_{l,mín}$. Onde l_l é o comprimento da barra que se estende além da placa de apoio e $l_{l,mín}$ é dado por:

$$l_{l,mín} = \frac{u_0[a + 0,5(r_b - r_l)]}{d - u_0} \quad (3.8)$$

Onde r_l é o tamanho da placa de aplicação da carga.

Esta condição para o $l_{l,mín}$ também determina que d_{eff} não exceda o valor de d .

$$d_{eff} = h - y \leq d \quad (3.9)$$

E o ângulo θ_l formado caso $l_l > l_{l,mín}$ é definido por:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d}{a + l_l + 0,5(r_b - r_l)} \right) \quad (3.10)$$

3.1.4. Detalhe do nó CCC.

A espessura da biela na parte superior, correspondente ao nó CCC – w_{eff}^t – é calculada da seguinte forma:

$$w_{eff}^t = r_l \text{sen}\theta + d_a \text{cos}\theta \quad (3.11)$$

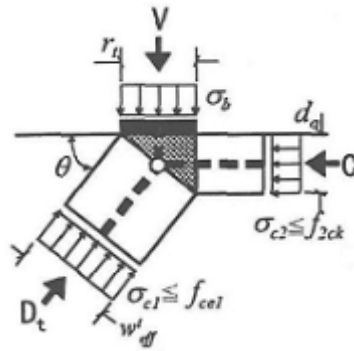


Figura 3.3 – Modelagem do nó CCC (WON *et al.*, 1998).

3.1.5. Equilíbrio das forças.

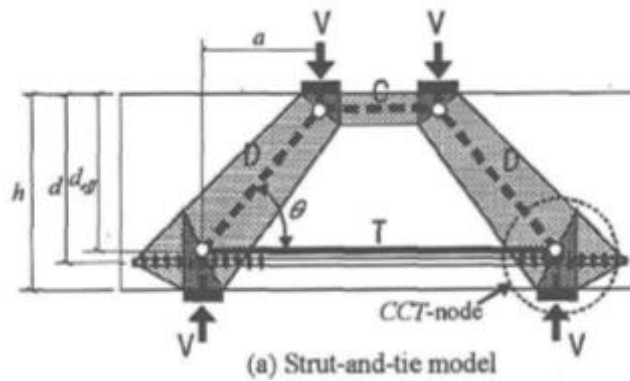


Figura 3.4 – Forças atuantes no modelo de viga-parede (WON *et al.*, 1998).

Considerando o nó CCC, a força D_t na biela inclinada que atua neste nó é limitada por:

$$D_t = b f_{ce1} w_{eff}^t = b f_{ce1} (r_t \text{sen}\theta + d_a \text{cos}\theta) \quad (3.12)$$

Por equilíbrio das forças que ocorrem no nó CCT, tem-se que a força necessária para equilibrar o tirante é dada por:

$$D_b \text{cos}\theta = T_a \quad (3.13)$$

Onde: D_b é a força na biela inclinada atuante no nó CCT.

Como ainda não é possível calcular o valor de T_a , utiliza-se a resistência efetiva f'_{ce2} (equação 3.18) para calcular o valor inicial de D_b :

$$D_b = b f'_{ce2} w_{eff}^b \quad (3.14)$$

Substituindo o valor de 3.14 em 3.13 obtém-se o valor de T_a :

$$T_a = b f'_{ce2} w_{eff}^b \cos \theta \quad (3.15)$$

Onde o valor de w_{eff}^b é dado em 3.7.

De posse do valor de T_a , calcula-se o f_{ce2} (equação 3.3) e, em seguida, obtém-se o coeficiente β , que representa a razão entre f_{ce2} e f'_{ce2} .

$$\beta = \frac{f_{ce2}}{f'_{ce2}} \geq 1,0 \quad (3.16)$$

Finalmente, calculam-se os valores reais de T e D_b , levando-se em consideração o aumento da resistência do nó:

$$T = \beta * T_a \quad (3.17)$$

$$D_b = \frac{T_a}{\cos \theta} \quad (3.18)$$

3.1.6. Checagem do modelo.

O modelo deve ser rodado até que se obtenha a seguinte igualdade $D_b = D_t$. Se não for encontrada tal igualdade, deve-se alterar os valores de $d_a^{mín}$ e $d_a^{máx}$, modificando-se o valor de $d_a^{mín}$ para o d_a calculado, se $D_b > D_t$. Se $D_b < D_t$, faz-se $d_a^{máx} = d_a$.

Algumas verificações adicionais são necessárias. Calculam-se os valores de σ_b e σ_{c2} , que representam, respectivamente, as tensões no ponto de aplicação da carga e tensão na face do nó CCC perpendicular a biela horizontal.

$$\sigma_b = \frac{D_t \operatorname{sen} \theta}{b r_l} \quad (3.19)$$

$$\sigma_{c2} = \frac{D_t \cos\theta}{b d_a} \quad (3.20)$$

O valor de σ_{c2} é comparado com f_{2ck} . Onde:

$$f_{2ck} = \frac{1 + 3,80\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_{ck} \quad (3.21)$$

E:

$$\alpha = \frac{\text{mín}(\sigma_b, \sigma_{c2})}{\text{máx}(\sigma_b, \sigma_{c2})} \quad (3.22)$$

A resistência efetiva f_{ce1} (equação 3.1) é aplicada à superfície do nó faceada pela biela inclinada e f_{2ck} (equação 3.21) limita a resistência do concreto no lado do nó faceado pela biela horizontal. Se σ_{c2} for maior que f_{2ck} , o valor de d_a é reduzido para:

$$d_a = \frac{D_t \cos\theta}{b f_{2ck}} \quad (3.23)$$

3.1.7. Carga última.

Por fim, é feito o cálculo de carga última da viga:

$$V = D_t \text{sen}\theta \quad (3.24)$$

3.2. Abordagem de Zhang & Tan (2007) para vigas-parede simplesmente apoiadas sem armadura de alma.

Esta abordagem é adequada à predição da resistência última ao cisalhamento e foi testada em 233 vigas-parede simplesmente apoiadas apresentando boa representatividade. As vigas testadas apresentaram resistência do concreto variando entre 16 e 120 MPa, altura entre 200 e 1750 mm e relação a/d entre 0,28 e 2,0. A taxa geométrica de armadura longitudinal destas vigas variava entre 0,90% e 4,07% e as taxas de armadura de alma vertical e horizontal

variavam entre 0 e 2,86% e 0 e 3,17%, respectivamente. A média da relação entre resistência última ao cisalhamento calculada e resistência última experimental foi de 0,91, apresentando coeficiente de variação de 0,13, conforme figura abaixo. Nos tópicos a seguir, o modelo será deduzido.

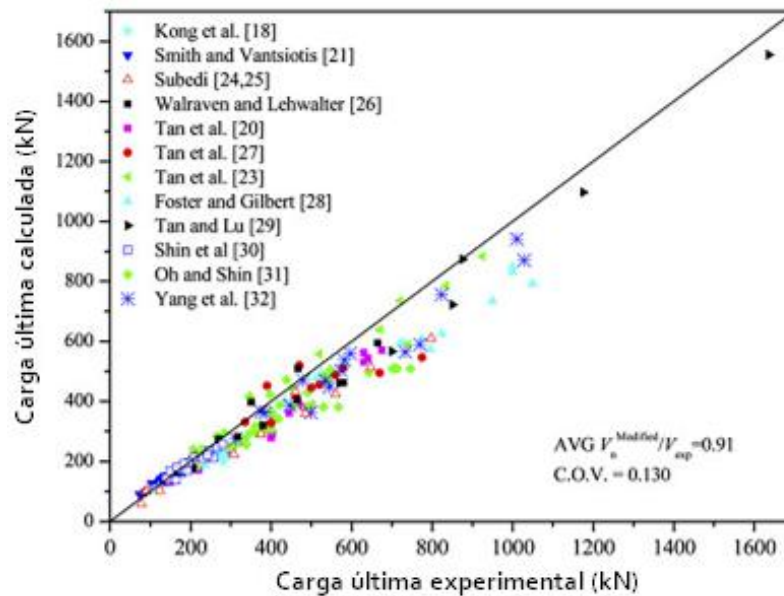


Figura 3.5 – Representatividade do modelo – carga última calculada *versus* carga última experimental (ZHANG; TAN, 2007).

3.2.1. Equilíbrio das forças.

Considerando V_n , a resistência última ao cisalhamento da viga-parede, por equilíbrio são obtidas as forças na parte inferior da biela inclinada:

$$F_c = \frac{V_n}{\text{sen } \theta_s} \quad (3.25)$$

$$T_s = \frac{V_n}{\text{tan } \theta_s} \quad (3.26)$$

Onde: F_c e T_s são as forças na biela inclinada e no tirante principal.

3.2.2. Geometria das bielas.

O processo de definição da geometria das bielas é iterativo e no passo inicial assume-se que $l_d=l_c$, onde l_c é a altura do nó CCT e l_d , do nó CCC. Em casos onde a precisão do resultado não é uma exigência, pode-se assumir que $l_d=l_c$ introduzindo um erro no cálculo de apenas 2%.

$$\tan \theta_s = \frac{h - \frac{l_c - l_d}{2}}{a} \quad (3.27)$$

3.2.3. Tensões principais.

Esta abordagem é baseada no critério de ruptura de *Morh-Coulomb* (equação 3.28), sendo indispensável a análise das tensões principais na viga.

$$\frac{f_1}{f_t} + \frac{f_2}{f'_c} = 1 \quad (3.28)$$

As tensões principais de tração na biela inclinada são calculadas com a componente da força no tirante perpendicular ao eixo da biela. Desta forma, tem-se o valor da tensão principal de tração, que inclui o fator k que leva em conta a não-uniformidade da distribuição da tensão (figura 3.6). A distribuição de tensões de tração ao longo da biela é extremamente não-linear e difícil de ser implementada mecanicamente (ZHANG; TAN, 2007).

$$f_1 = \frac{kT_s \text{sen } \theta_s}{A_c / \text{sen } \theta_s} \quad (3.29)$$

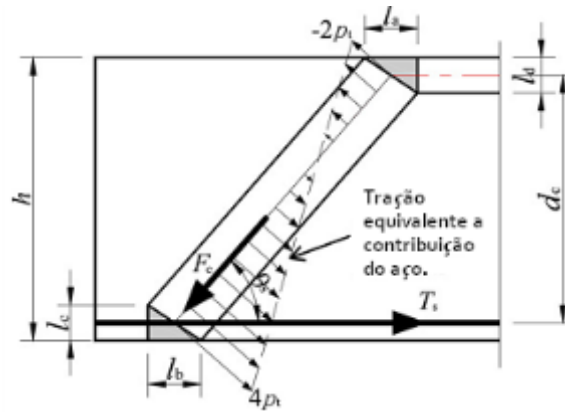


Figura 3.6 – Distribuição não-uniforme da tensão principal de tração (ZHANG; TAN, 2007).

Para os casos estudados neste trabalho (vigas-parede com armadura longitudinal inferior sem armadura de alma), Zhang & Tan (2007) encontraram o valor de k igual a 4.

Após a mensuração da tensão principal de tração na direção de f_t necessita-se saber a resistência a tração do material (f_t), que é dada pela soma das contribuições do aço e do concreto, tal que:

$$f_t = f_{st} + f_{ct} \quad (3.30)$$

Onde: f_{st} é a contribuição da armadura e f_{ct} a contribuição do concreto.

A contribuição do concreto a tração é bastante influenciada pelo surgimento de fissuras. Desta forma, utilizar toda a resistência a tração do concreto seria inseguro, sendo utilizado, portanto, uma equação de Belarbi & Tsu (1994) citada por Zhang & Tan (2007) para a resistência a tração do concreto fissurado:

$$f_{ct} = 0,31\sqrt{f'_c} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1} \right)^{0,4} \quad (3.31)$$

Onde:

$\varepsilon_{cr} = 0,00008$ é tomado como a deformação do concreto no momento da fissuração.

$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + \varepsilon_2) \cot^2 \theta_s$ representa a principal deformação de tração na biela de concreto. (3.32)

ε_s é a deformação da barra de aço e ε_2 é a deformação do concreto no momento em que ocorre o esmagamento e vale 0,002.

A contribuição do concreto é relativamente pequena, se comparada a do aço e por segurança pode-se omitir essa parcela. Entretanto, para resultados mais precisos, é necessário levá-la em consideração.

Por sua vez, a contribuição do aço é dada pela soma das contribuições da armadura longitudinal e de alma.

$$f_{st} = f_{sw} + f_{ss} \quad (3.33)$$

Sendo este estudo limitado às vigas-parede sem armadura de alma, tem-se que $f_{st}=f_{ss}$. Onde f_{ss} é dado por:

$$f_{ss} = \frac{4A_s f_y \text{sen} \theta_s}{A_c / \text{sen} \theta_s} \quad (3.34)$$

Desta forma é determinada a parcela de resistência do aço e do concreto na resistência a tensão principal de tração f_1 .

A tensão principal de compressão (f_2) na direção da biela inclinada é dada por:

$$f_2 = \frac{F_c - T \cos \theta}{A_{str}} \quad (3.35)$$

Onde: F_c é a força na biela, $T \cos \theta$ é a componente da força no tirante e A_{str} é a área da seção transversal do nó CCT na porção inferior da biela inclinada.

3.2.4. Carga última.

Combinando as equações 3.29 e 3.35 em 3.28 chega-se a seguinte formulação para a carga última:

$$V_n = \frac{1}{\frac{4\text{sen}\theta_s \cos\theta_s}{A_c f_t} + \frac{\text{sen}\theta_s}{A_{str} f_c'}} \quad (3.36)$$

A figura 3.7 resume o fluxograma de implementação do modelo apresentado.

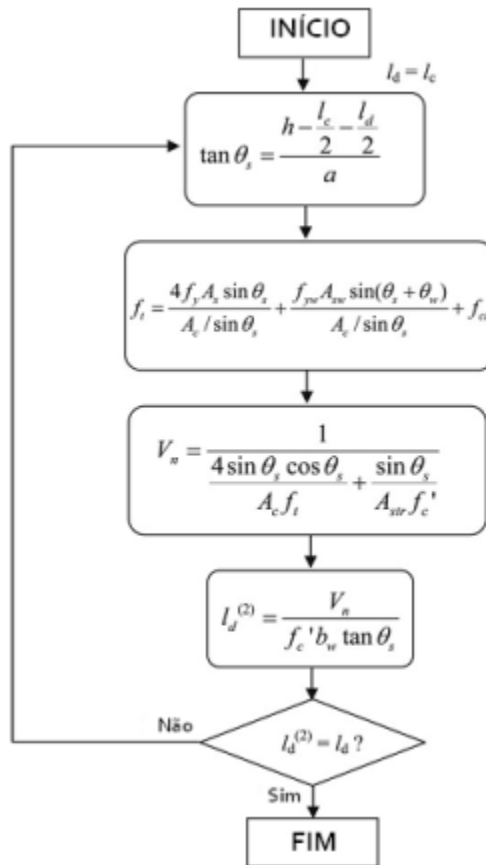


Figura 3.7 – Algoritmo de implementação do modelo de Zhang & Tan (2007).

3.3. Abordagem de Zhang & Tan (2007) para predição da carga última de vigas contínuas.

O modelo de biela e tirante sugerido por Zhang & Tan (2007) é aplicável a vigas-parede contínuas com dois vãos de cisalhamento e dois pontos de aplicação de carga, um em cada vão é mostrado na figura abaixo. O modelo é idealizado como uma treliça estaticamente indeterminada e é utilizado para calcular a carga última ao cisalhamento destes elementos. A figura 3.8 mostra a nomenclatura dada aos parâmetros geométricos, onde tem-se que l_a é a dimensão da placa de aplicação da carga, l_b é a placa dos apoios extremos, l_f é a placa do apoio do meio, l_e é a distância entre-eixos entre o apoio extremo e o apoio central, a é o vão

de cisalhamento, c_1 é a distancia entre o centróide das barras de aço superiores à extremidade superior da viga, c_2 é a distância entre o centróide das barras de aço inferiores à extremidade inferior da viga, h é a altura total e d , a altura efetiva.

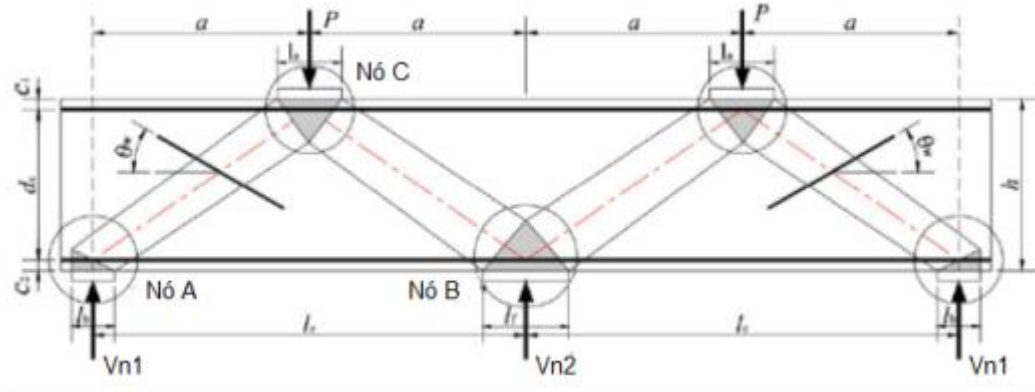


Figura 3.8 – Modelo de biela e tirante para uma viga contínua com dois vãos submetida a duas cargas concentradas (ZHANG; TAN, 2007).

Para a validação do modelo 54 exemplos de vigas-parede contínuas foram analisadas. A altura dessas vigas variou entre 400 a 1000 mm, com razão l_e/d entre 0,95 e 4,49. A taxa de armadura longitudinal variou entre 0,07% e 1,88% e as taxas de armadura de alma vertical e horizontal variaram entre 0 e 0,90% e 0 e 1,71%. As cargas últimas calculadas mostraram-se a favor da segurança e a média geral entre a carga experimental e a prevista foi de 0,95 com um coeficiente de variação de 0,130 – figura 3.9. A figura 3.10 mostra as forças internas na treliça estaticamente indeterminada.

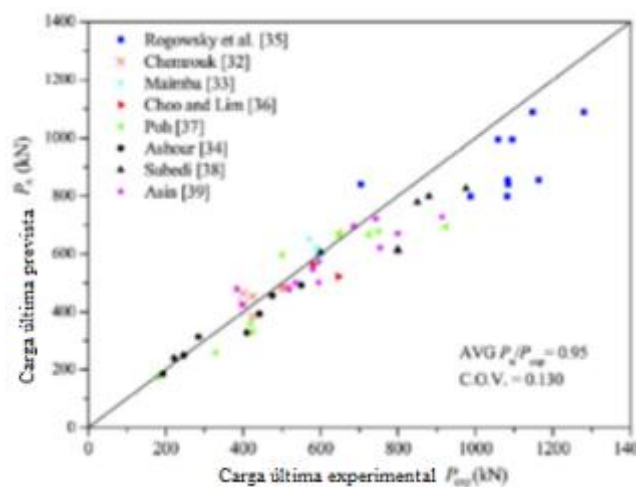


Figura 3.9 – Representatividade do modelo: carga última calculada *versus* carga última experimental (ZHANG; TAN, 2007).

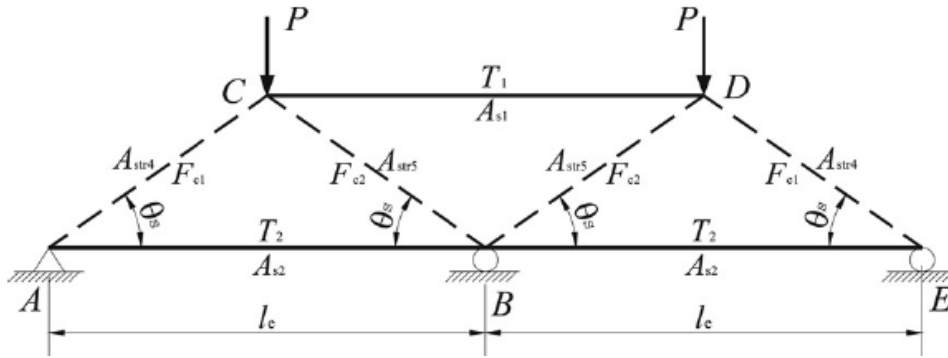


Figura 3.10 – Treliça equivalente para uma viga contínua com dois vãos submetida a duas cargas concentradas (ZHANG; TAN, 2007).

O critério de ruptura de Mohr é adotado na interface entre a biela e o nó CCT as cargas de ruptura são deduzidas da mesma forma que o modelo para vigas simplesmente apoiadas submetidas a um carregamento concentrado, divergindo, obviamente, nas forças atuantes neste treliça que é estaticamente indeterminada.

$$\frac{f_1}{f_t} + \frac{f_2}{f_c'} = 1 \quad (3.37)$$

Inicialmente, Assumindo propriedades elasto-plásticas perfeitas para o concreto e barras de aço, as forças internas na treliça podem ser calculadas por:

$$F_{c1} = A * P \quad (3.38)$$

$$T_1 = B * P \quad (3.39)$$

$$T_2 = C * P \quad (3.40)$$

$$F_{c2} = D * P \quad (3.41)$$

Onde: F_{c1} e F_{c2} representam as forças nas bielas externas e internas, respectivamente; T_1 e T_2 representam as forças nos tirantes na armadura superior e inferior, respectivamente, e P representa a carga aplicada na viga.

Dada a hiperestaticidade da treliça, aplica-se o teorema de *Crotti-Engesser* para determinação dos coeficientes A, B, C e D.

Considerando cada força aplicada na viga de valor P e a força no apoio do meio valendo X e fazendo o equilíbrio dos nós, têm-se que:

$$F_{c1} = \frac{\left(P - \frac{X}{2}\right)}{\text{sen}\theta_s} \quad (3.42)$$

$$F_{c2} = \frac{X}{2\text{sen}\theta_s} \quad (3.43)$$

$$T_1 = \frac{(X - P)}{\tan\theta_s} \quad (3.44)$$

$$T_2 = \frac{\left(P - \frac{X}{2}\right)}{\tan\theta_s} \quad (3.45)$$

Aplicando em seguida o teorema de *Crotti-Engesser* (equação 3.46), tem-se a equação 3.47.

$$U_c = \sum \int_v \left(\int \varepsilon d\sigma \right) dV \quad (3.46)$$

$$U_c = \frac{\left(P - \frac{X}{2}\right)^2 l_e}{2\text{sen}^2\theta_s \cos\theta_s E_c A_{str4}} + \frac{X^2 l_e}{8\text{sen}^2\theta_s \cos\theta_s E_c A_{str5}} + \frac{(X - P)^2 l_e}{2\tan^2\theta_s E_s A_{s1}} + \frac{\left(P - \frac{X}{2}\right)^2 l_e}{\tan^2\theta_s E_s A_{s2}} \quad (3.47)$$

Onde: θ_s é o ângulo da biela inclinada com a horizontal, E_c e E_s representam os módulos de elasticidade do concreto e aço, respectivamente. E os termos A_{str1} , A_{str2} e A_{str3} correspondem a área da seção transversal das extremidades (região nodal) das bielas inclinadas, enquanto que A_{str4} e A_{str5} representam a área da seção transversal média das bielas externa e interna, respectivamente, calculadas como segue:

$$A_{STR1} = b_w(l_c \cos\theta_s + l_b \cos\theta_s) \quad (3.48)$$

$$A_{STR2} = b_w(l_c \cos\theta_s + l_f \cos\theta_s) \quad (3.49)$$

$$A_{STR3} = b_w(l_d \cos\theta_s + l_a \cos\theta_s) \quad (3.50)$$

$$A_{STR4} = \frac{A_{STR1} + A_{STR3}}{2} \quad (3.51)$$

$$A_{STR5} = \frac{A_{STR2} + A_{STR3}}{2} \quad (3.52)$$

$$\theta_s = \arctg\left(\frac{2(h - c_1 - c_2)}{l_e}\right) \quad (3.53)$$

Onde: l_c e l_d são as alturas efetivas do nó inferior e superior, sendo que:

$$l_c = 2c_2 \quad (3.54)$$

$$l_d = 2c_1 \quad (3.55)$$

Da teoria do mínima energia potencial complementar, têm-se que, no apoio do meio:

$$\Delta_B = \frac{\partial U_c}{\partial X} = 0 \quad (3.56)$$

Denominando as seguintes razões:

$$m = \frac{A_{str5}}{A_{str4}} \quad (3.57)$$

$$n = \frac{E_c A_{str5}}{E_s A_{s1}} \quad (3.58)$$

$$p = \frac{E_c A_{str5}}{E_s A_{s2}} \quad (3.59)$$

Então, derivando U_c em função da reação no apoio do meio (X) e igualando a zero (devido a indeslocabilidade do nó) e substituindo os termos por m (3.57), n (3.58) e p (3.59), encontra-se a seguinte expressão para X :

$$X = \frac{2(m + 2n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)}{1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s} P \quad (3.60)$$

Após a obtenção da força X calculam-se as forças atuantes na treliça, dadas por:

$$F_{c1} = \frac{1 + 2n \cos^3 \theta_s}{\text{sen } \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} P = A * P \quad (3.61)$$

$$T_1 = \frac{\cos \theta_s (m + 2p \cos^3 \theta_s - 1)}{\text{sen } \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} P = B * P \quad (3.62)$$

$$T_2 = \frac{\cos \theta_s (1 + 2n \cos^3 \theta_s)}{\text{sen } \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} P = C * P \quad (3.63)$$

$$F_{c2} = \frac{m + 2n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s}{\text{sen } \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} P = D * P \quad (3.64)$$

3.3.1. Derivação das tensões na zona nodal A.

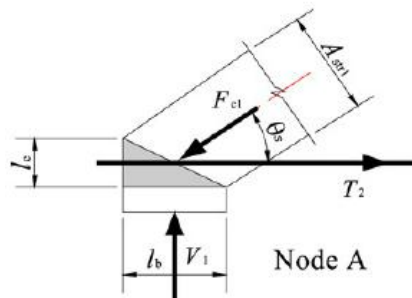


Figura 3.11 – Zona nodal A (ZHANG; TAN, 2007).

Na zona nodal A (figura 3.11), a tensão principal de tração (f_{1A}) perpendicular a biela inclinada e a tensão principal de compressão nesta biela (f_{2A}) são dadas pelas equações apresentadas abaixo:

$$f_{1A} = \frac{4T_2 \text{sen}\theta_s}{A_c / \text{sen}\theta_s} = 4C \text{sen}^2\theta_s \frac{P}{A_c} \quad (3.65)$$

$$f_{2A} = \frac{F_{c1} - T_2 \text{cos}\theta_s}{A_{str1}} = (A - C \text{cos}\theta_s) \frac{P}{A_{str1}} \quad (3.66)$$

Combinando as tensões principais no critério de ruptura de Mohr, tem-se que a carga última P_{nA} é dada por:

$$P_{nA} = \frac{1}{\frac{4C \text{sen}^2\theta_s}{f_{tA} A_c} + \frac{(A - C \text{cos}\theta_s)}{f_{c'} A_{str1}}} \quad (3.67)$$

Onde f_{tA} é a máxima tensão de tração na zona nodal A na direção de f_i e pode ser expressa por:

$$f_{tA} = \frac{4A_{s2} f_y \text{sen}\theta_s}{A_c / \text{sen}\theta_s} + f_{ct} \quad (3.68)$$

E f_{ct} é dada conforme formulação apresentada em 3.31.

3.3.2. Derivação das tensões na zona nodal B.

A tensão principal de tração f_{1b} perpendicular a biela inclinada na zona nodal B – ver figura 3.12 – consiste em duas componentes, a saber a contribuição do aço superior e inferior e é dada pela equação 3.69:

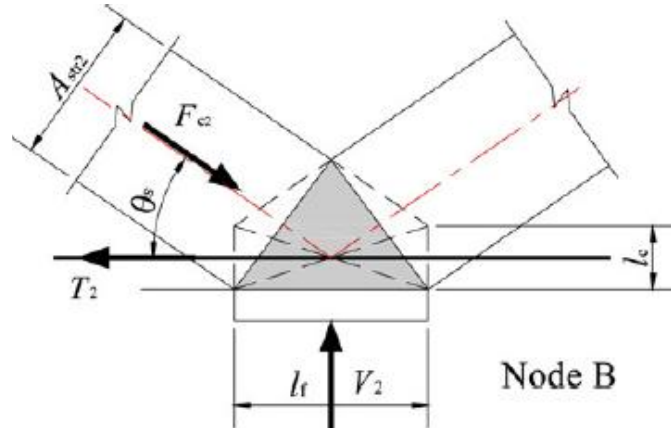


Figura 3.12 – Zona nodal B (ZHANG; TAN, 2007).

$$f_{1B} = \frac{4T_2 \operatorname{sen} \theta_s - 2T_1 \operatorname{sen} \theta_s}{A_c / \operatorname{sen} \theta_s} = (4C - 2B) \operatorname{sen}^2 \theta_s \frac{P}{A_c} \quad (3.69)$$

A tensão principal de compressão na zona nodal B é obtida de forma semelhante a zona nodal A conforme equação 3.70:

$$f_{2B} = \frac{F_{c2} - T_2 \cos \theta_s}{A_{str2}} = (D - C \cos \theta_s) \frac{P}{A_{str2}} \quad (3.70)$$

Novamente aplicando o critério de ruptura de Mohr, calcula-se P_{nB} :

$$P_{nB} = \frac{1}{\frac{(4C-2B) \operatorname{sen}^2 \theta_s}{f_{tB} A_c} + \frac{(D-C \cos \theta_s)}{f_{c'} A_{str2}}} \quad (3.71)$$

E a tensão máxima de tração na zona nodal B é expressa por:

$$f_{tB} = \frac{4T_{2max} - 2T_{1a}}{A_c / \operatorname{sen}^2 \theta_s} + f_{ct} \quad (3.72)$$

Onde: T_{2max} é a tensão de escoamento da armadura inferior e T_{1a} é a força correspondente na armadura superior quando ocorre o escoamento na armadura inferior e não pode exceder o valor da resistência ao escoamento da armadura superior (equação 3.73).

$$T_{1a} = \frac{B}{C} T_{2max} \quad (3.73)$$

3.3.3. Derivação das tensões na zona nodal C.

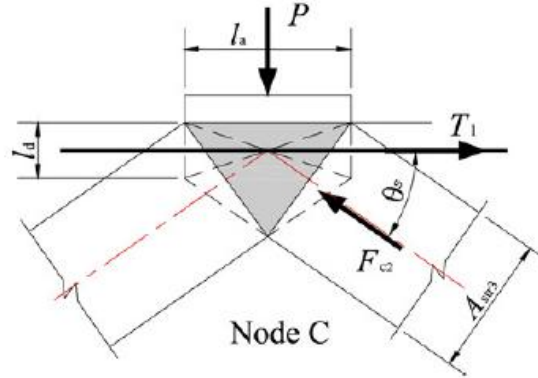


Figura 3.13 – Zona nodal C (ZHANG; TAN, 2007).

Da mesma forma que nos outros nós na zona nodal C (figura 3.13), tem-se que:

$$f_{1c} = \frac{4T_1 \text{sen } \theta_s - 2T_2 \text{sen} \theta_s}{A_c / \text{sen} \theta_s} = (4B - 2C) \text{sen}^2 \theta_s \frac{P}{A_c} \quad (3.74)$$

$$f_{2c} = \frac{F_{c2} - T_1 \cos \theta_s}{A_{str3}} = (D - B \cos \theta_s) \frac{P}{A_{str3}} \quad (3.75)$$

E P_{nC} é dado por:

$$P_{nC} = \frac{1}{\frac{(4B-2C)\text{sen}^2\theta_s}{f_{tc}A_c} + \frac{(D-B \cos \theta_s)}{f_{c'}A_{str3}}} \quad (3.76)$$

Onde f_{tc} é a máxima tensão de tração na zona nodal C e é dado por:

$$f_{tc} = \frac{4T_{1max} - 2T_{2a}}{A_c / \text{sen}^2 \theta_s} + f_{ct} \quad (3.77)$$

De forma semelhante, T_{1max} é a tensão de escoamento da armadura superior e T_{2a} é a força correspondente na armadura inferior quando ocorre o escoamento da da armadura superior e não deverá ser maior que a resistência ao escoamento da armadura inferior (equação 3.78).

$$T_{2a} = \frac{C}{B} T_{1max} \quad (3.78)$$

3.3.4. Carga última.

E assim, a carga última é dada pelo menor valor entre:

$$P_n = \text{mín} (P_{nA}, P_{nB}, P_{nC}) \quad (3.79)$$

3.4. Modelo de predição da carga última e modo de ruptura de vigas contínuas de Nagarajan & Pillai (2009).

A figura abaixo mostra uma viga contínua com dois vãos sujeita a duas cargas concentradas. Verifica-se que l_a , l_b e l_c correspondem ao tamanho das placas de apoio exterior, do meio e aplicação da carga, respectivamente; e_b é o cobrimento da armadura inferior de área A_{sp} e tensão de escoamento f_{yp} ; e_t é o cobrimento da armadura superior de área A_{sn} e tensão de escoamento f_{yn} . W é a carga aplicada em cada vão e P é a carga total aplicada.

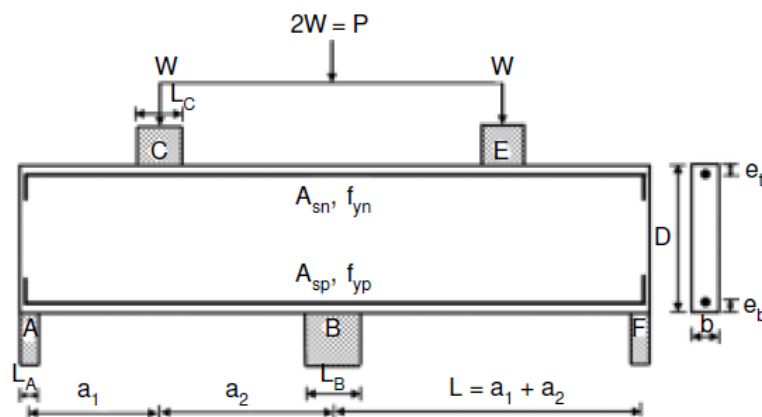


Figura 3.14 – Detalhe de uma viga contínua com dois vãos sujeita a duas cargas concentradas (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).

Da seção transversal da viga tem-se que, a altura efetiva h é a altura total subtraída das distâncias dos centróides da armadura inferior e superior a extremidade da viga, e_b e e_t , respectivamente:

$$h = D - e_t - e_b \quad (3.80)$$

Representando por biela e tirante as forças internas desta viga, obtém-se o modelo abaixo:

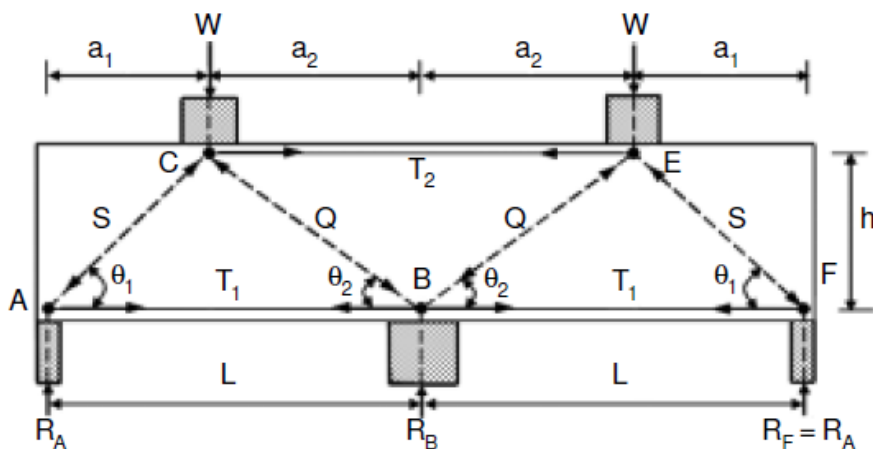


Figura 3.15 – Modelo de biela e tirante para uma viga contínua com dois vãos (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).

Onde os ângulo θ_1 e θ_2 podem ser determinados da geometria da treliça interna e são dados por:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{h}{a_1} \right) \quad (3.81)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{h}{a_2} \right) \quad (3.82)$$

Onde: a_1 e a_2 são, respectivamente, a distância do apoio extremo ao ponto de aplicação da carga e distância do ponto de aplicação da carga ao apoio do meio.

É assumido que as vigas contínuas podem apresentar três modos de ruptura principais: por flexão, por cisalhamento e por falha de ancoragem. Sendo este último

prevenido por um correto detalhamento da armadura, logo o modelo pode prever os dois primeiros tipos de ruptura citados.

Se uma viga rompe por cisalhamento, é assumido que as bielas AC (*S*), CB (*Q*) e FE (*S*) mostradas na figura 3.16 chegam ao seu limite de capacidade antes que os tirantes venham a escoar.

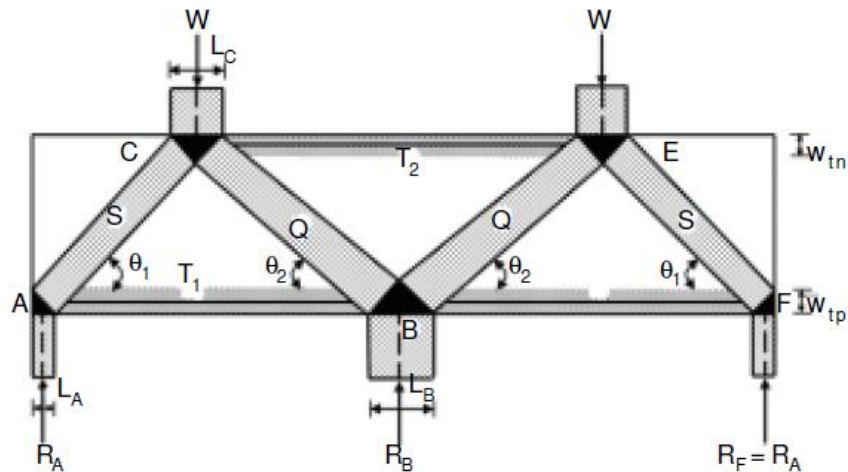


Figura 3.16 – Modelo de biela e tirante mostrando espessura das bielas e tirantes e zonas nodais (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).

Desta forma, o limite de capacidade da biela AC (*S*) é dado por:

$$S = f_{cs} w_{s1} b \quad (3.83)$$

Onde:

f_{cs} é a resistência efetiva da biela. Os autores utilizam os fatores de minoração da resistência do concreto da norma indiana, sendo f_{cs} assim calculado:

$$f_{cs} = 0,45 \beta_s f_{ck} \quad (3.84)$$

w_{s1} é a espessura da biela AC (*S*), que vale o menor valor entre a espessura da biela no nó A (w_a) e a espessura da biela no nó C (w_{c1}). Sendo que:

$$w_a = l_a \text{sen } \theta_1 + w_{tp} \text{cos } \theta_1 \quad (3.85)$$

$$w_{tp} = 2e_b \quad (3.86)$$

$$w_{c1} = \frac{l_c}{2} \text{sen } \theta_1 + w_{tn} \cos \theta_1 \quad (3.87)$$

$$w_{tn} = 2e_t \quad (3.88)$$

Analogamente, a capacidade da biela CB ou BE (Q) é dada por:

$$Q = f_{cs} w_{s2} b \quad (3.89)$$

Onde w_{s2} é a espessura da biela CB (Q), que vale o menor valor entre a espessura da biela no nó B (w_b) e a espessura da biela no nó C (w_{c2}). Sendo que:

$$w_b = \frac{l_b}{2} \text{sen } \theta_2 + w_{tp} \cos \theta_2 \quad (3.90)$$

$$w_{c2} = \frac{l_c}{2} \text{sen } \theta_2 + w_{tn} \cos \theta_2 \quad (3.91)$$

A reação no apoio “A” (R_a) e no apoio “B” (R_b) podem ser obtidas por equilíbrio dos nós, sendo dadas por:

$$R_a = S \text{sen} \theta_1 \quad (3.92)$$

$$R_b = 2 Q \text{sen} \theta_2 \quad (3.93)$$

Desta forma, a capacidade última ao cisalhamento de uma viga contínua é dada pela soma das reações:

$$P_s = 2 W = 2 R_a + R_b = 2(S \text{sen} \theta_1 + Q \text{sen} \theta_2) \quad (3.94)$$

Se ocorrer que as barras de aço escoem antes das bielas esgotarem sua capacidade, a viga rompe por flexão. Assim sendo, a treliça é idealizada ser constituída de duas sub-treliças, uma de momentos positivos e outra de momentos negativos.

Dada a treliça de momentos positivos, conforme figura 3.17, tem-se que equilibrando as forças no nó A e B tem-se que:

$$R_a = T_1 \tan\theta_1 \quad (3.95)$$

$$R_b = 2 T_1 \tan\theta_2 \quad (3.96)$$

Onde:

$$T_1 = 0,87 f_{yp} A_{sp} \quad (3.97)$$

Desta forma, a capacidade do treliça de momentos positivos é dada por:

$$2W_p = 2R_a + R_b = 2T_1(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) \quad (3.98)$$

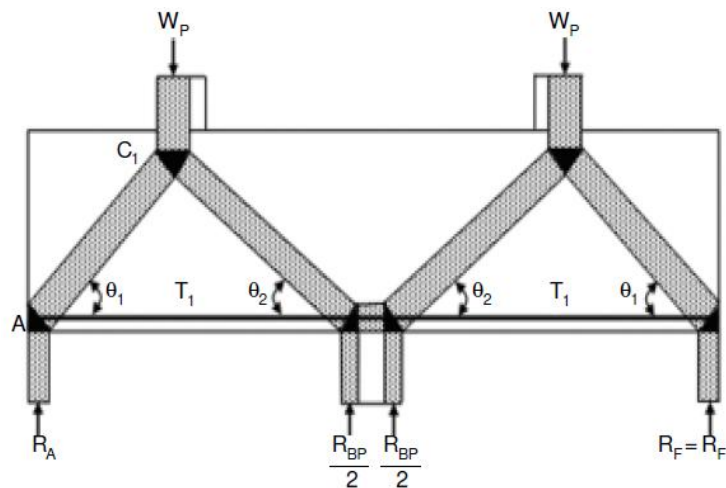


Figura 3.17 – Treliça de momentos positivos (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).

Para determinação da capacidade da treliça de momentos negativos, a zona nodal C é dividida em duas: c_1 e c_2 . A sub-zona nodal c_2 é mostrada na figura 3.18. Fazendo-se o equilíbrio das forças desse nó, tem-se que:

$$W_n = T_2 \tan\theta_2 \quad (3.99)$$

Onde:

$$T_2 = 0,87 f_{yn} A_{sn} \quad (3.100)$$

Desta forma, a capacidade do treliça de momentos negativos é dada por:

$$2W_n = 2T_2 \tan\theta_2 \quad (3.101)$$

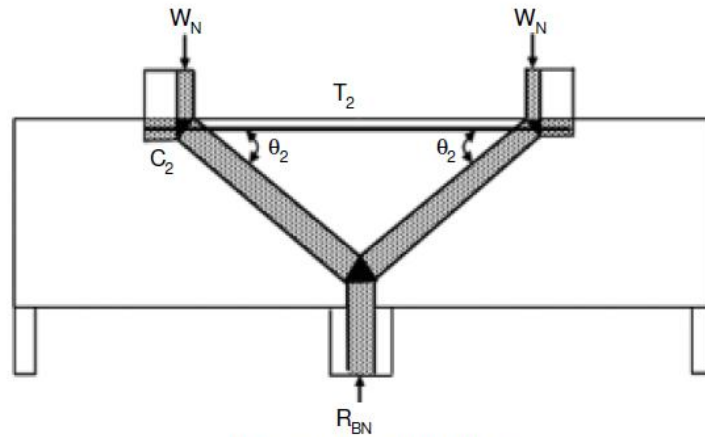


Figura 3.18 – Treliça de momentos negativos (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).

Concluindo, a capacidade de uma viga contínua à flexão é a soma das duas parcelas do momento positivo e negativo (figura 3.19):

$$P_f = 2W_p + 2W_n = 2T_1(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) + 2T_2 \tan\theta_2 \quad (3.102)$$

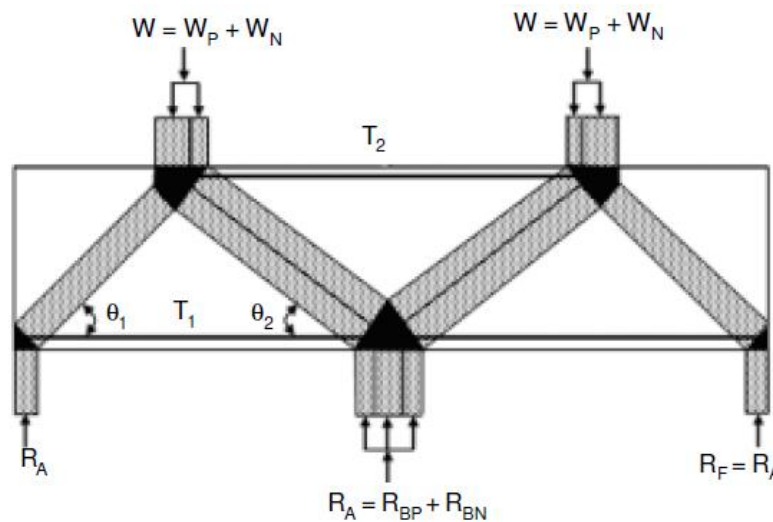


Figura 3.19 – Modelo completo de treliça plástica (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).

Para determinar o tipo de ruptura mais provável, iguala-se as capacidades resistentes da viga a flexão e ao cisalhamento. Desta forma, obtém-se a área de aço necessária para uma ruptura balanceada.

$$Ssen\theta_1 + Qsen\theta_2 = 0,87 A_{sp1b} [f_{yp}(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) + nf_{yn} \tan \theta_2] \quad (3.103)$$

Onde: n é a razão entre a área de aço da armadura longitudinal superior e inferior, respectivamente.

Se a área de aço existente for maior que a área de aço necessária para uma ruptura balanceada, então ocorrerá uma ruptura por cisalhamento. Do contrário, ocorre ruptura por flexão.

Para validar a metodologia proposta, os autores analisaram 34 vigas encontradas na literatura e 6 vigas que ensaiaram em laboratório, obtendo-se a representatividade mostrada abaixo. Os autores não ressaltaram as limitações do modelo, declarando apenas que o modelo mostrou-se a favor da segurança, pois grande parte dos exemplos analisados e todas as vigas por eles ensaiadas apresentaram carga experimental maior que a calculada.

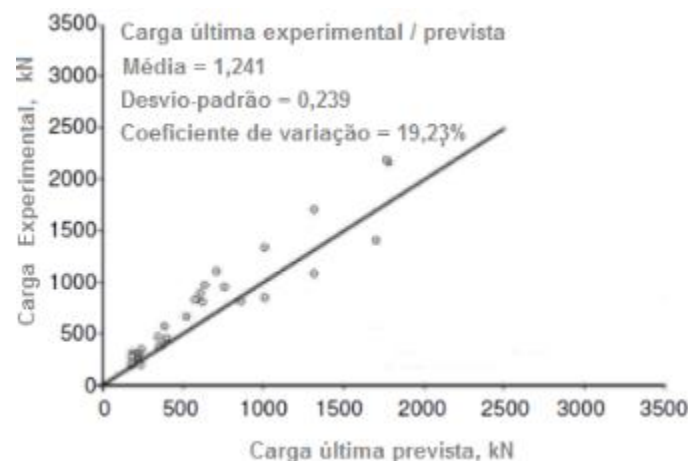


Figura 3.20 – Representatividade do modelo: carga real x carga calculada (NAGARAJAN; PILLAI, 2009).

4. PROGRAMAS COMPUTACIONAIS.

Nesta seção serão brevemente apresentados os recursos do software CAST (ferramenta utilizada no cálculo do modelo de biela e tirante) aplicados nesta pesquisa. A seguir, será feito um breve histórico da modelagem por microtreliça, para então, apresentar o software *Micro-Truss Analyzer* e os fundamentos desse programa.

4.1. Visão geral do programa CAST.

Em geral, o dimensionamento de uma estrutura ou região “D” utilizando o modelo de biela e tirante se dá segundo o processo ilustrado no fluxograma abaixo (figura 4.1). Entretanto, alguns passos se constituem nas maiores dificuldades do processo, entre eles: definição da geometria dos nós e bielas, verificação da resistência dos nós e bielas, ancoragem da armadura dos tirantes, definição da geometria e dimensões da treliça e o cálculo de treliças estaticamente indeterminadas.

Foi nesse contexto que o CAST (“*Computer Aided Strut and Tie*”), uma ferramenta gráfica de dimensionamento por bielas e tirantes, foi desenvolvido na Universidade de Illinois, em 2000, pelos pesquisadores Daniel Kuchma e Tjen Tjhin, e ganhou destaque (o programa está disponível para download gratuito no site [HTTP://dankuchma.com/stm](http://dankuchma.com/stm), onde também podem ser encontrados tutoriais de utilização do programa).

A grande potencialidade do CAST consiste em modelar a estrutura ou região “D”, definir a treliça interna, solucioná-la e realizar a verificação das bielas e nós com rapidez, poupando o usuário de trabalhos repetitivos. O ambiente do CAST é bastante amigável e se trata de um software bastante didático que, no entanto, delega tarefas importantes ao usuário, a saber, a definição da treliça.

Entre outras limitações do CAST têm-se que não faz verificações acerca da ancoragem da armadura, nem mesmo dispõe de verificações a respeito de armadura mínima ou outros requisitos normativos relativos ao dimensionamento de regiões descontínuas. Entretanto, no que concerne a eficiência dos cálculos dos esforços nas treliças e verificação das regiões nodais e bielas, o CAST cumpre os seus objetivos. E, existe a possibilidade de resolver um modelo para várias condições de carregamento, realizar uma análise de carga x

deslocamento da treliça, fornecendo-se o modelo constitutivo do material ou mesmo realizar um cálculo simples de predição da carga última da região “D” em questão.

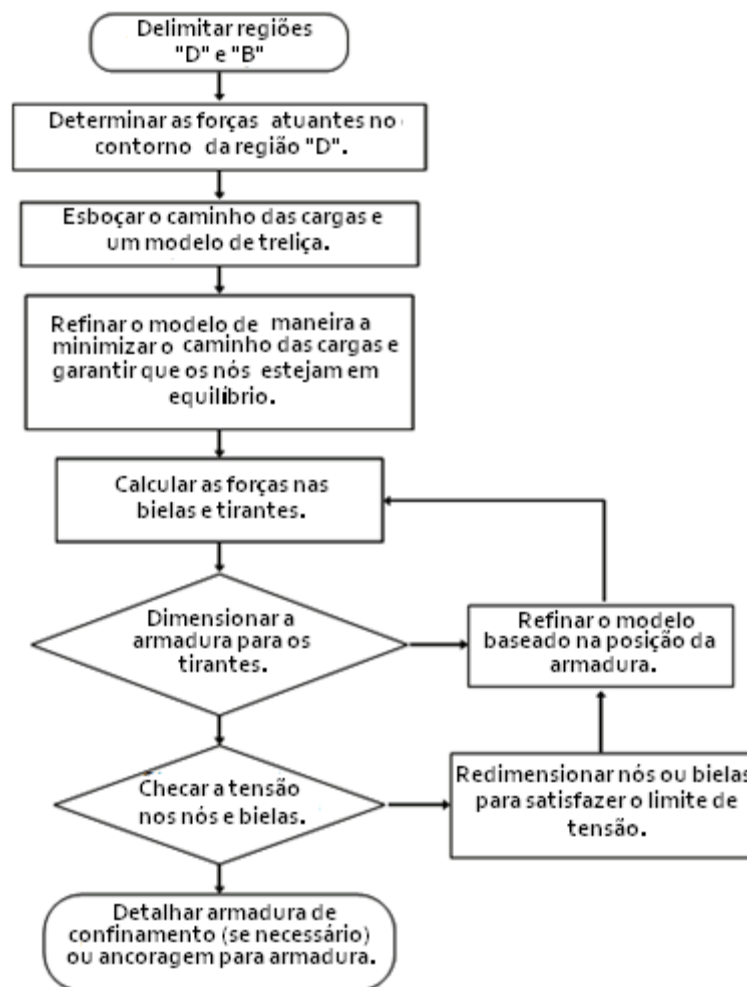


Figura 4.1 – Passos para implementação de um MBT (Adaptado de BROWN, 2005).

As verificações de nós e bielas podem ser feitas utilizando-se os fatores de eficiência pré-definidos no software (Schlaich *et al.*, 1987; Macgregor, Marti, Ramirez & Breen, Nielsen e ACI 318) ou o usuário pode definir fatores de eficiência que julgar mais adequado.

O CAST tem passado por várias atualizações, entre elas, uma proposta de Park *et al.* (2010) de aliar um software de análise não-linear a sua estrutura original, pois a análise não-linear de elementos finitos é uma ferramenta bastante útil na definição e validação do modelo de biela e tirante sugerido pelo usuário. Vários artigos foram publicados sobre o CAST e outras informações a respeito e projetos de atualização podem ser encontradas nos trabalhos dos pesquisadores Kuchma e Thjin.

4.2. *Software Micro-Truss Analyzer.*

O *software Micro-Truss Analyzer* consiste em uma ferramenta adaptada do software Quebra 2D que utiliza o modelo de micro-treliças para discretização do concreto, cujo comportamento não-linear é simulado por meio de um modelo de Dano Contínuo. Este modelo inclui duas variáveis escalares de dano, uma para tração e outra para compressão.

As armaduras são discretizadas através de elementos de treliça plana, sendo o comportamento do aço representado pelo modelo elasto-plástico unidimensional com endurecimento isotrópico e cinemático. Não se considera a aderência entre o concreto e a armadura, considera-se somente o acoplamento nodal entre os elementos de treliça plana que discretizam o concreto e as armaduras. O *software* fornece um pré-processamento gráfico bastante simples e é capaz de gerar a malha de elementos de barra (treliça) e calcular a área destes elementos.

O programa MTA realiza a interface gráfica de pré e pós-processamento gráfico. O arquivo gerado no pré-processamento, de extensão *.dat*, contém informações de entrada a serem repassadas para o programa **1-damage.exe**, que realiza as análises. Os arquivos de saída (pós-processamento) gerados nesse processo também são visualizados no MTA.

Antes de explicitar as funções do software, cabe revisar os conceitos que o originaram: a discretização em microtreliças e o modelo de dano contínuo isotrópico.

4.2.1. Discretização em Microtreliças.

A origem da microtreliça se confunde com o início da utilização do modelo reticulado na simulação numérica do processo de fraturamento do concreto. Por este motivo, será feita uma breve introdução ao histórico da modelagem numérica do fraturamento do concreto para, a seguir, abordar o tópico de microtreliças.

4.2.2.1. Histórico do modelo reticulado.

A modelagem numérica do processo de fraturamento no concreto teve início no final da década de 1960 com a publicação de dois artigos marcantes, nos quais as abordagens discreta e distribuída foram apresentadas. Na abordagem de fissuras discretas, inicialmente a malha de elementos finitos é desconectada nos nós onde ocorre a fissura e assim que a ligação

em um nó é separada em dois (figura 4.2), uma carga limite é transferida entre eles (WANG, 2002).

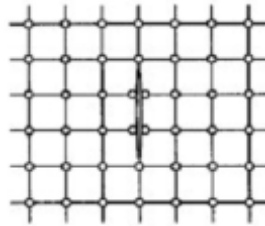


Figura 4.2 – Abordagem de fissuras discretas (WANG, 2002).

Na abordagem de fissuras distribuídas, o fraturamento é considerado como uma faixa de microfissuras distribuídas sobre um elemento finito e quando ocorre uma fissuração em um elemento, a matriz de rigidez do elemento isotrópico torna-se ortotrópica e a rigidez na direção da tensão principal de tração é gradualmente reduzida a zero. Na década de 70, esta abordagem ganhou destaque e muitos trabalhos foram desenvolvidos de forma a introduzir relações constitutivas em um modelo distribuído. Na década de 80, também houve muitos avanços, tal qual o reconhecimento de que devido a efeitos de cisalhamento (fator de retenção de cisalhamento – *shear retention factor*), a direção das tensões principais sofre alterações ao longo do processo de carregamento.

Outro importante avanço foi o reconhecimento de que o concreto não é um material perfeitamente frágil, mas apresenta alguma capacidade residual de suportar carregamentos após atingir seu limite de resistência à tração. Essa observação experimental levou a substituição de modelos de fratura frágil por modelos de amolecimento de tração (*tension-softening*), nos quais um ramo descendente foi introduzido para modelar a progressiva queda.

Já na década de 90 surgiu outra abordagem, baseada na mesoestrutura do concreto, que pode ser encontrada nos trabalhos de Van Mier (1991), Schlangen&Van Mier (1992), Schlangen (1993) e Vervuurt, (1997) citados por Wang (2002). No nível meso, o concreto é considerado um material trifásico, constituído de agregado graúdo, matriz cimentícia e zona de transição, que podem ser considerados para simular a heterogeneidade do concreto. Nesse nível pode-se notar que a natureza heterogênea do material provoca concentração local de tensões e a existência de poros e impurezas no material reduz a sua resistência (figura 4.3).

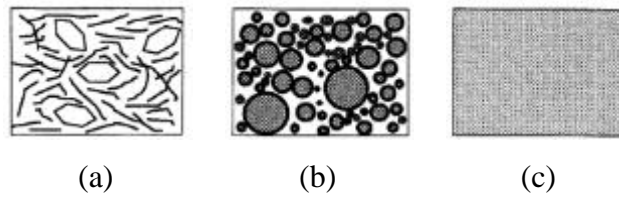


Figura 4.3 – Distinção entre (a) micro -, (b) meso - e (c) macro - nível para o concreto (WANG, 2002).

Os modelos desenvolvidos de acordo com a abordagem da mesoestrutura do concreto são conhecidos como modelos reticulados (*lattice models*). Neles, o material é idealizado como um reticulado formado de pequenos elementos de barras e o processo de fraturamento é simulado pela remoção em cada etapa de carregamento das barras cuja tensão de tração seja superior à sua resistência última, conforme a lei de fraturamento adotada na simulação.

Um importante passo em um modelo reticulado é determinar o comprimento dos elementos de barra no modelo, o que depende diretamente do tamanho da mínima dimensão característica do material que foi incluído no modelo. Este comprimento não deve ser muito pequeno, pois uma redução exagerada do mesmo acarreta a inclusão de muitos elementos no modelo e, conseqüentemente, exige um enorme esforço computacional. Wang (2002) afirma que, em geral, o comprimento das barras deve ser menor que $1/3$ do diâmetro da menor partícula de agregado. Uma vez determinado o comprimento das barras, a área da seção transversal também pode ser determinada. Na análise bidimensional os valores da altura (h) e espessura (b) devem ser escolhidos de tal forma que o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do reticulado (ν), como um todo, apresentem os mesmos valores medidos no material real.

Modelos reticulados foram usados para resolver problemas de elasticidade inicialmente por Hrennikoff (1941), que propôs a discretização de um contínuo em um reticulado de treliça. Em 1991, Herrmann empregou um reticulado quadrado com elementos de barras para simular fraturas em materiais heterogêneos, implementando a heterogeneidade através de uma variação das resistências das barras (WANG, 2002).

4.2.2.2. Discretização em microtreliça.

A discretização em microtreliça utilizada nos trabalhos de Salem (2004) baseia-se nos trabalhos de Hrennikoff e o padrão de microtreliça abaixo (figura 4.4), proposto pelo

pesquisador em questão é utilizado para desenvolver o modelo de microtreliça para vigas de concreto armado.

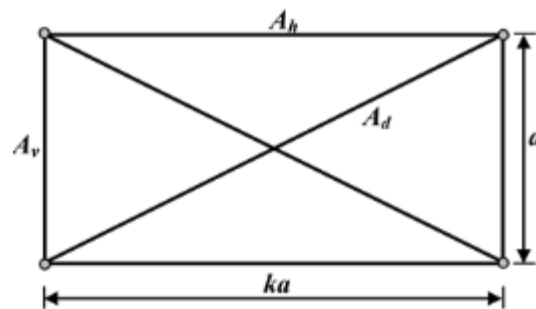


Figura 4.4 – Padrão de microtreliças para tensões planas (SALEM, 2004).

Neste padrão, os elementos verticais e horizontais resistem aos esforços normais e os elementos na diagonal, ao esforço cortante, podendo captar modos de ruptura relacionados à flexão e ao cisalhamento. Incorporando a não-linearidade geométrica e física do material pode-se prever o comportamento não-linear da estrutura como um todo.

O modelo de microtreliça começou a ser utilizado na simulação de elementos de concreto armado nas publicações de Salem (2004). Em trabalhos anteriores, Niwa *et al.*(1995) desenvolveram um modelo reticulado para explicar o mecanismo resistente do concreto armado ao cisalhamento que, no entanto, consistia em um modelo em nível macro, no qual a estrutura é modelada em elementos de concreto sujeitos a tensões normais de tração e compressão, um elemento de arco e a armadura que pode ser modelada como barras verticais ou horizontais (figura 4.5).

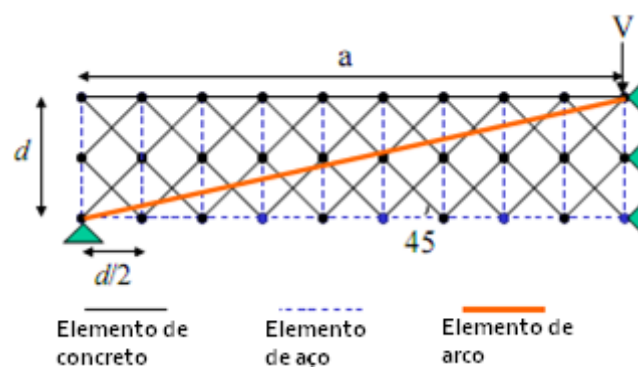


Figura 4.5 – Modelo treliçado de Niwa (NIWA *et al.*, 1995).

Alguns pontos apresentavam-se como deficiências do modelo de Niwa, tais como a necessidade de predefinir os elementos de barra comprimidos e tracionados, tarefas que

dependem de resultados analíticos fornecidos pela teoria de vigas. Desta forma, o modelo não poderia ser aplicado a estruturas mais complexas, como vigas com aberturas, ou vigas-parede, que são elementos que não se adequam as hipóteses assumidas nessa teoria.

Por outro lado, o método proposto por Salem (2004) apresenta uma abordagem mesoscópica da estrutura. O modelo de Salem possibilita simular o processo de fraturamento no concreto e pode ser considerado uma generalização do modelo de biela e tirante, uma vez que pode capturar as principais bielas e tirantes durante a análise. O objetivo é dispor de um modelo que possa ser útil tanto ao dimensionamento quanto a análise do comportamento não-linear da estrutura.

Neste modelo, as treliças são solucionadas por meio de uma análise não-linear utilizando o método da rigidez. Os elementos são arranjados isotropicamente, a rigidez é calculada baseada nas dimensões e um comportamento completamente não-linear é suposto para o concreto e o aço. A formulação da matriz de rigidez de cada elemento de barra é formulada diretamente assumindo um deslocamento unitário na direção global, conforme figura abaixo.

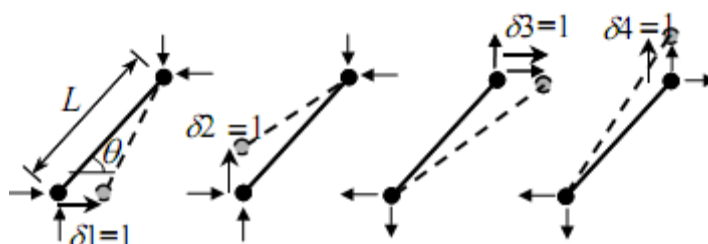


Figura 4.6 – Formulação da matriz de rigidez do elemento de barra (SALEM, 2004).

Os elementos da matriz de rigidez são representados em função do ângulo de inclinação θ com a horizontal, como segue, onde $c = \text{cosseno}$ e $s = \text{seno}$, E é o módulo de elasticidade tangente do material, A é a área da seção transversal do elemento e l é o comprimento da barra:

$$[S]^g = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2\theta & c\theta.s\theta & -c^2\theta & -c\theta.s\theta \\ c\theta.s\theta & s^2\theta & -c\theta.s\theta & -s^2\theta \\ -c^2\theta & -c\theta.s\theta & c^2\theta & c\theta.s\theta \\ -c\theta.s\theta & -s^2\theta & c\theta.s\theta & s^2\theta \end{bmatrix}$$

Figura 4.7 – Matriz de rigidez do elemento de barra (SALEM, 2004).

Segundo Salem (2004) as dimensões do elemento de barra devem ser escolhidas de forma a serem relativamente pequenas e as relações constitutivas do material são escolhidas para representá-los a nível microscópico. Neste modelo são utilizados os conceitos de *bare bar behavior* e *plain concrete behavior* para representar a não-linearidade dos materiais (figura 4.8). E a não-linearidade geométrica do modelo é levada em conta quando ocorre a atualização dos deslocamentos a cada iteração e calculando-se as deformações baseando-se em novos deslocamentos.

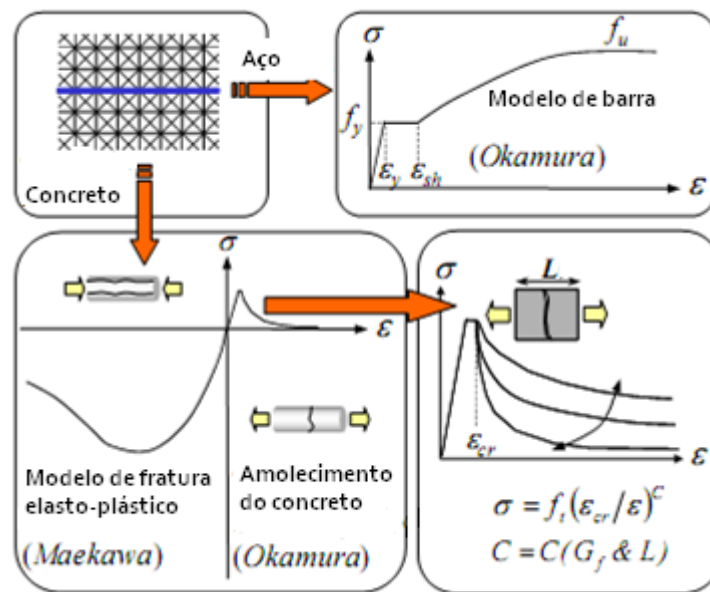


Figura 4.8 – Modelos constitutivos não-lineares adotados para o concreto e o aço (SALEM, 2004).

Um exemplo de aplicação da microtreliça de Salem (2004) pode ser visto na figura 4.9. O modelo é aplicado a uma viga com um vão de 2400 mm e seção retangular de 200 x 600 mm e armadura constituída de uma barra de 19 mm de diâmetro, sem armadura de alma e tensão de escoamento do aço de 350 MPa. O concreto apresentara resistência a compressão de 30 MPa e a resistência a tração de 2,5 MPa. Os elementos de barra da microtreliça foram escolhidos com dimensões de 30 mm, desta forma, são considerados pequenos o suficiente para ser cruzados por, pelo menos, uma fissura.

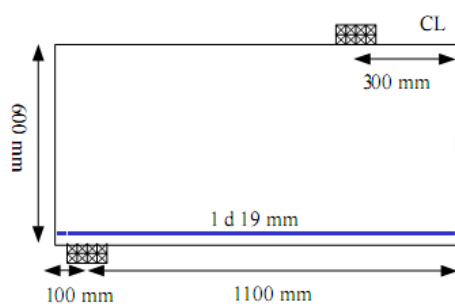


Figura 4.9 – Esquema da viga analisada por microtreliças (SALEM, 2004).

A figura 4.10 mostra a deflexão e o padrão de fissuração da viga e as figuras 4.11 (a) e (b) mostram as principais bielas e tirantes da viga, tornando-se uma ferramenta útil na elaboração do modelo de biela e tirante, colaborando para o dimensionamento de estruturas complexas. Na figura 4.12 é feita uma comparação entre os resultados experimentais e numéricos obtidos com o modelo de microtreliça, onde pode ser observado que o modelo representa satisfatoriamente os resultados obtidos em laboratório.

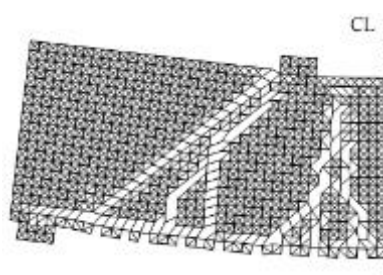


Figura 4.10 – Deflexão e padrão de fissuração da viga analisada por microtreliças (SALEM, 2004).

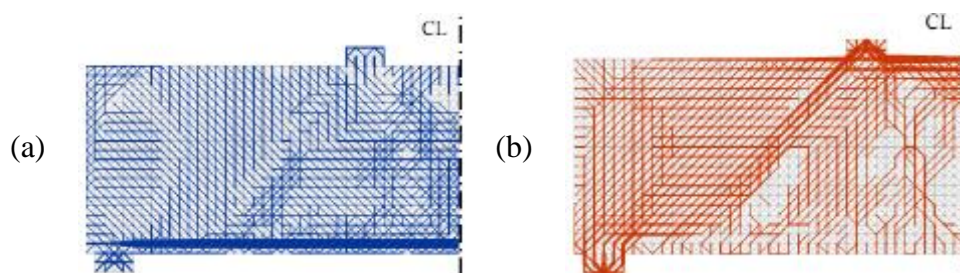


Figura 4.11 – Localização dos (a) tirantes e (b) principais bielas na viga analisada (SALEM, 2004).

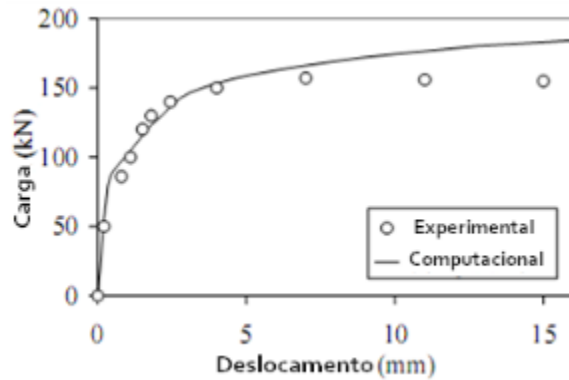


Figura 4.12 – Comparação entre os gráficos de carga x deslocamento obtidos numericamente e em laboratório (SALEM, 2004).

Apesar de ser um método bastante útil no dimensionamento de regiões “D”, o modelo de biela e tirante têm limitações, especialmente relacionadas à predição da carga última, do comportamento não-linear e do correto dimensionamento de estruturas que apresentam, essencialmente, um comportamento não-linear. Neste contexto, em 2006 Salem & Maekawa publicaram outra abordagem do modelo de biela e tirante baseado em uma análise não-linear do modelo. Este tipo de análise possibilita verificar a redistribuição de forças internas devido a não-linearidade do material (fissuração do concreto, amolecimento do concreto - *concrete softening* e escoamento do aço). A redistribuição de forças internas permite a reorientação das tensões principais, causando um aumento no ângulo de inclinação da biela, conforme figura 4.13 (SONG *et al.*, 1998 *apud* SALEM; MAEKAWA, 2006).

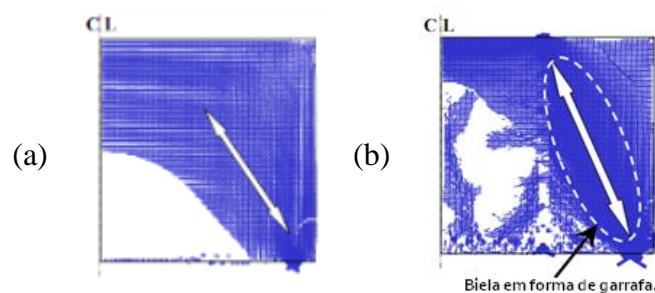


Figura 4.13 – Ângulo de inclinação das bielas em uma (a) análise linear e (b) análise não linear (SALEM; MAEKAWA, 2006).

Nagarajan *et al.* (2009) deram continuidade ao estudo de microtreliça e publicaram um artigo em que exemplificaram a aplicação do método a vigas-parede, conforme mostrado na subseção 2.3.4 deste trabalho.

E ainda nesta linha de pesquisa, Nagarajan, Jayadeep & Pillai (2010) apresentam um modelo de microtrreliça modificado, que consiste em uma abordagem para prever o comportamento de vigas de concreto armado utilizando uma análise em nível meso. O elemento de concreto armado é substituído por um elemento de microtrreliça e uma estrutura aleatória de distribuição dos agregados é desenvolvida sobre a estrutura de microtrreliças (figura 4.14). O diagrama tensão \times deformação do aço é suposto uma curva elasto-plástico perfeita, cuja deflexão inicial define o módulo de elasticidade do material e total compatibilidade de deformações entre aço e concreto é assumida.

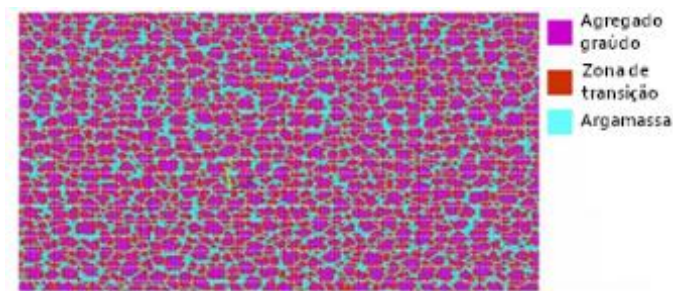


Figura 4.14 – Estrutura de distribuição aleatória dos agregados graúdos (NAGARAJAN *et al.*, 2010).

A análise de Nagarajan foi feita por meio de elementos finitos utilizando-se o software *Ansys*® 10.0 e rotinas computacionais foram implementadas para gerar o modelo de microtrreliça e a estrutura aleatória do agregado graúdo. A não-linearidade geométrica foi levada em consideração, pois as mudanças geométricas são importantes em elementos de pequena dimensão.

Os passos essenciais para a referida análise são:

1- Desenvolver o modelo de microtrreliça e associar as propriedades geométricas dos elementos.

2- Gerar a estrutura aleatória de distribuição dos agregados. O tamanho e o percentual dos agregados na mesoestrutura são calculados e comparados com os valores necessários. Se os valores encontrados não são adequados, outra mesoestrutura é gerada até que um modelo satisfatório seja obtido.

3- A carga máxima a ser aplicada na análise é tomada como 20% maior que a carga última esperada e é aplicada em certa quantidade de etapas.

4- A carga correspondente ao primeiro passo é aplicada.

5- A estrutura é analisada e parâmetros-chave como valor da carga, deslocamentos e tensão axial em todos os elementos é elementos são gravados.

6- Os elementos em que a tensão atuante supera a resistência à tração do concreto são desativados (anulando-se as suas rigidezes).

7- Removendo-se os elementos desativados, tem-se o padrão de fissuração em qualquer passo de carga.

8- A carga correspondente ao próximo passo é aplicada e os passos de 5 a 7 são repetidos, até que a ocorra divergência nos resultados computados. A carga correspondente ao ultimo passo em que houve convergência dos resultados é tomada como a carga última.

A validação do modelo foi feita comparando-se os resultados numéricos com resultados experimentais. As vigas analisadas possuíam seção transversal idêntica, com altura de 200 mm e largura de 150 mm e vão de 2000 mm. Uma viga foi calculada para romper por cisalhamento, atuava nela um carregamento no meio do vão, com um vão de cisalhamento de 900 mm. As outras duas foram carregadas em quatro pontos simétricos; uma foi calculada para ser subarmada e a outra, superarmada.

O percentual de agregados utilizado na simulação numérica foi de 58,3%, resistência a compressão do concreto de 20 MPa, tensão de escoamento do aço de 415 MPa e dos estribos, 250 MPa, módulo de elasticidade do aço de 200000 MPa e do concreto, 25980 MPa.

Três hipóteses de distribuição dos agregados foram testadas e os resultados obtidos são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 4.1 – Predição da carga última (NAGARAJAN et al., 2010)

Viga	Experimental	Carga última (KN)				
		Análise mesoscópica				
		# 1	# 2	# 3	Média	Erro (%)
Subarmada	38	42	44,4	39,13	41,84	10,11
Superarmada	93	97,6	88	88	91,2	-1,94
Cisalhamento	92	80	98	102	93,33	1,45

As figuras abaixo mostram as três tentativas de simulação do padrão de fissuração da viga rompida por cisalhamento. E, a seguir, pode ser visualizado o comparativo do gráfico carga x deslocamento experimental e numérico desta viga.

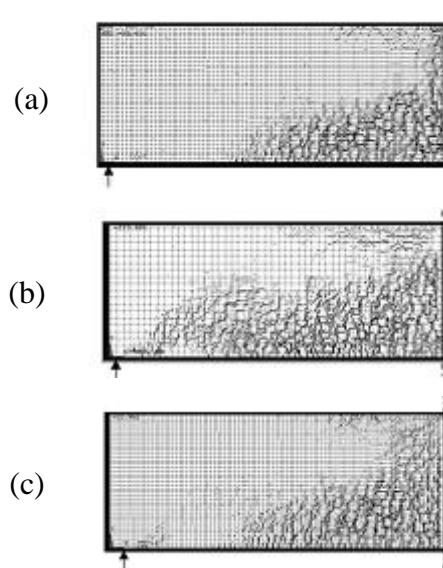


Figura 4.15 – Padrão de fissuração da tentativa (a) #1; (b) #2 e (c) #3 (NAGARAJAN *et al.*, 2010).

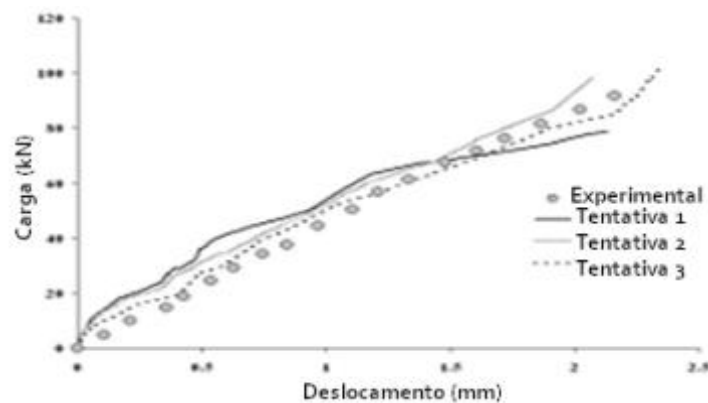


Figura 4.16 – Comparação do diagrama carga x deslocamento entre os resultados numéricos e experimentais (NAGARAJAN *et al.*, 2010).

Neste tópico foi esclarecida a importância da análise não-linear dentro do contexto do dimensionamento de regiões “D” e mostrou-se ainda que, a microtreliça pode ser utilizada como uma ferramenta de boa precisão e de fácil utilização na análise não-linear e nos modelos de bielas e tirantes, com vantagem de possibilitar a visualização do estado limite de serviço da estrutura por meio dos padrões de fissuração e deslocamento sob carga de serviço.

4.2.2. Modelo de dano contínuo isotrópico com duas variáveis escalares.

O modelo recorre a duas variáveis escalares de dano (d^+ , d^-) com evoluções independentes, cujos valores possíveis obedecem à condição $0 \leq d^{+(-)} \leq 1$ e podem ser intuitivamente associados à degradação produzida no concreto sob condições de tração ou de compressão. De acordo com requisitos termodinâmicos básicos os valores destas variáveis internas não podem ser decrescentes, condição que é satisfeita mediante a utilização de leis de evolução adequadas, e que serão descritas mais adiante. Relativamente à lei constitutiva propriamente dita o modelo conduz ao formato bastante intuitivo:

$$\sigma = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (4.1)$$

onde $\bar{\sigma}^+ = E \varepsilon^+$ é a tensão efetiva de tração, ε^+ é a deformação de tração, $\bar{\sigma}^- = E \varepsilon^-$ é a tensão efetiva de compressão, ε^- é a deformação de compressão e E é o módulo de elasticidade do material.

4.2.2.1. Critérios de dano.

Localmente o modelo necessita determinar se um dado ponto de integração está em “carga” ou em “descarga”, o que é clarificado através do recurso a dois critérios de dano independentes para a tração e para a compressão, que são estabelecidos com base nas seguintes normas (4.2a e 4.2b):

$$\tau^+ = \frac{\bar{\sigma}^+}{E} \quad (4.2a)$$

$$\tau^- = \sqrt{\frac{|\bar{\sigma}^-|}{\sqrt{3}}} (\sqrt{2} - k) \quad (4.2b)$$

$$\text{com } K = \sqrt{2} \frac{R_0 - 1}{2R_0 - 1}, R_0 = \frac{f_{0,2D}^-}{f_{0,1D}^-} = 1.16 \rightarrow K = 0.1714 \quad (4.2c)$$

Na equação (4.2c) K representa uma propriedade material que permite graduar o ganho de resistência do concreto quando submetido a compressão biaxial em relação a compressão uniaxial. R_0 é a relação entre as máximas tensões elásticas do concreto para os estados biaxial e uniaxial. Valores típicos de R_0 e K para o concreto são dados na equação

(4.2c), de acordo com a referência Cervera (Cervera, Oliver et al. 1996). Os critérios de danos adotados são:

$$\bar{\tau}^+ - r^+ \leq 1 \quad (4.3a)$$

$$\bar{\tau}^- - r^- \leq 1 \quad (4.3b)$$

Nos quais $r^{+(-)}$ podem ser interpretados como variáveis de endurecimento, controlando a expansão das superfícies de dano descritas pela equação (4.3a e 4.3b) à medida que a evolução do processo de carga determina a evolução das normas (4.2a e 4.2b). O domínio elástico inicial é caracterizado pelas condições $\bar{\tau}^+ = r_0^+$ e $\bar{\tau}^- = r_0^-$, sendo $r_0^{+(-)}$ propriedades materiais facilmente relacionáveis com as tensões $f_0^{+(-)}$ que em ensaios uniaxiais determinam a fronteira entre o comportamento linear e o início da degradação em tração ou em compressão, são indicadas as seguintes expressões para os valores destas propriedades

$$r_0^+ = \frac{f_0^+}{\sqrt{E}} \quad (4.4a)$$

$$r_0^- = \sqrt{\frac{f_0^-}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} - k)} \quad (4.4b)$$

Por sua vez as condições de consistência e de persistência sobre as superfícies de dano determinam $\dot{r}^{+(-)} = \dot{\bar{\tau}}^{+(-)}$, pelo que para um instante t genérico tem-se

$$r_t^{+(-)} = \max \left\{ r_0^{+(-)}, \max_{s \in [0, t]} [\bar{\tau}_s^{+(-)}] \right\} \quad (4.5)$$

4.2.2.2. Critérios de dano

No presente modelo para o concreto as leis de evolução das variáveis de dano são explícitas em termos de variáveis de endurecimento $r^{+(-)}$, obtendo-se bons resultados recorrendo às seguintes definições:

$$d^+ = 1 - r_0^+ / r^+ e^{A^+(1-r^+/r_0^+)}, \text{ se } r^+ \geq r_0^+ \quad (4.6a)$$

$$d^- = 1 - r_0^-/r^-(1 - A^-) - A^-e^{B^-(1-r^-/r_0^-)}, \text{ se } r^- \geq r_0^- \quad (4.6b)$$

O parâmetro A^+ , tendo em vista o cumprimento de requisitos de objetividade face ao refinamento da malha de elementos finitos, é dado por:

$$A^+ = \left(\frac{G_f E}{l_{ch} (f_0^+)^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 1 \quad (4.7)$$

Onde G_f é a energia de fratura dissipada em um ensaio simples de tração, sendo l_{ch} o comprimento característico do elemento finito considerado. Neste trabalho, adota-se $l_{ch} = l$, onde l é o comprimento de cada elemento da malha de elementos finitos. Por outro lado, os parâmetros A^- e B^- são obtidos através da simulação numérica do ensaio de compressão simples tal que a curva obtida se aproxime da curva tensão-deformação obtida experimentalmente. De forma esquemática a Figura 4.17 reproduz a resposta global fornecida pelo modelo para o comportamento cíclico do concreto em condições uniaxiais quando as variáveis de dano evoluem de acordo com as equações (4.6a e 4.6b).

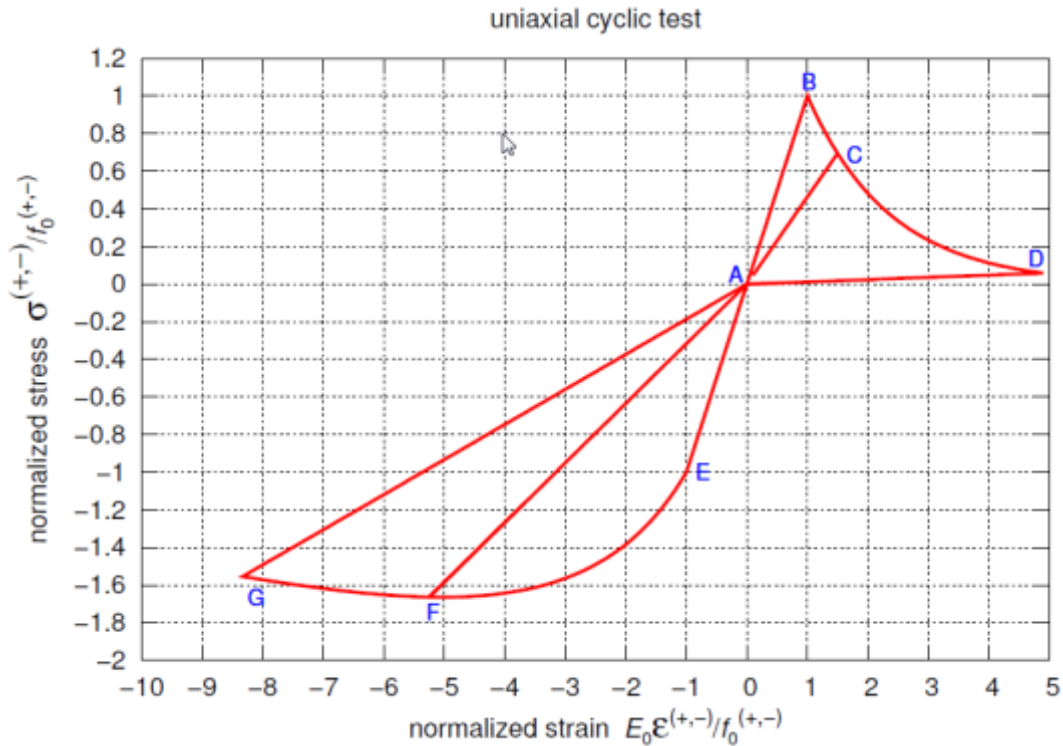


Figura 4.17 – Comportamento cíclico do concreto em condições unidimensionais.

No quadro abaixo se descreve o algoritmo de integração do modelo dano utilizado neste trabalho.

$$r_0^+ = \frac{f_0^+}{\sqrt{E}}, \quad r_0^- = \sqrt{\frac{f_0^-}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} - k)}, \quad k = \sqrt{2} \frac{R_0 - 1}{2R_0 - 1}, \quad R_0 = \frac{f_{0,2D}^-}{f_{0,1D}^-} = 1.16 \implies k = 0.1714$$

Input: $r_0^+, r_0^-, r_n^+, r_n^-, \varepsilon_{n+1}$

evaluate the effective stress: $\bar{\sigma}_{n+1} = E\varepsilon_{n+1}$

if $\bar{\sigma}_{n+1} > 0$

compute equivalent stress: $\bar{r}_{n+1}^+ = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}}{\sqrt{E}}$

if $\bar{r}_{n+1}^+ > r_n^+$ then

$r_{n+1}^+ = \bar{r}_{n+1}^+$

else

$r_{n+1}^+ = r_n^+$

end if

tensile damage variable: $d_{n+1}^+ = 1 - \frac{r_0^+}{r_{n+1}^+} e^{A^+ \left(1 - \frac{r_{n+1}^+}{r_0^+}\right)}$, $A^+ = \left(\frac{G_f E}{l^* f_0^{+2}} - \frac{1}{2}\right)^{-1} > 0$

calculate the final stress: $\sigma_{n+1}^+ = (1 - d_{n+1}^+) \bar{\sigma}_{n+1}$

calculate the secant modulus: $E_{n+1}^+ = (1 - d_{n+1}^+) E$

else if $\bar{\sigma}_{n+1} < 0$

compute equivalent stress: $\bar{r}_{n+1}^- = \sqrt{\frac{|\bar{\sigma}_{n+1}|}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} - k)}$

if $\bar{r}_{n+1}^- > r_n^-$ then

$r_{n+1}^- = \bar{r}_{n+1}^-$

else

$r_{n+1}^- = r_n^-$

end if

compressive damage variable: $d_{n+1}^- = 1 - \frac{r_0^-}{r_{n+1}^-} (1 - A_{\bar{r}}^-) - A^- e^{B^- \left(1 - \frac{r_{n+1}^-}{r_0^-}\right)}$

calculate the final stress: $\sigma_{n+1}^- = (1 - d_{n+1}^-) \bar{\sigma}_{n+1}$

calculate the secant modulus: $E_{n+1}^- = (1 - d_{n+1}^-) E$

end if

Figura 4.18 – Algoritmo de integração do modelo de dano.

4.2.3. Modelo constitutivo da armadura.

Para simular numericamente o comportamento da armadura foi implementado computacionalmente um modelo elastoplástico unidimensional, detalhado em Simo & Hughes

(1997), no qual são levados em consideração os efeitos do endurecimento isotrópico e cinemático do material.

Apresenta-se a formulação matemática das equações governantes básicas inerentes ao modelo utilizado, destacando-se a decomposição aditiva da deformação em partes elástica e plástica, função de escoamento considerando-se o endurecimento isotrópico e cinemático e condições de complementaridade de *Kuhn-Tucker*.

Para integração das equações governantes foi utilizado um algoritmo de integração implícita *Backward-Euler* conjuntamente com a utilização do preditor elástico durante o processo iterativo de retorno à superfície de escoamento.

O modelo elastoplástico utilizado para representar os elementos da armadura é basicamente caracterizado pelas seguintes definições:

- i. Relação tensão-deformação;
- ii. Regra de fluxo plástico;
- iii. Leis para o endurecimento isotrópico e cinemático;
- iv. Condição de escoamento e domínio plástico;
- v. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker;
- vi. Condição de consistência.

Inicialmente, para um modelo simplificado que não considera os fenômenos do endurecimento, tem-se que, dado um dispositivo friccional unidimensional de Coulomb que inicialmente possui comprimento e área unitários, e é constituído de uma mola, com constante elástica E e por um elemento de fricção de *Coulomb*, com constante $\sigma_y > 0$. As constantes E e σ_y representam respectivamente o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do material.

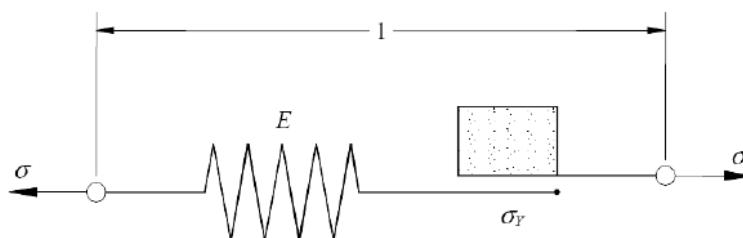


Figura 4.19 – Dispositivo friccional de Coulomb (adaptada de Simo & Hughes, 1997).

Num ponto da armadura submetido a um estado elastoplástico, a deformação total ε é dividida em sua parte elástica ε_e , recuperável, e sua parte plástica, ε_p , irre recuperável, conforme mostra a equação abaixo.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (4.8)$$

Assumindo que ε , ε_p e σ são funções do tempo, temos que:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_p \quad (4.9)$$

Uma mudança na configuração do ponto só é possível se $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$. Para caracterizar essa mudança serão assumidas algumas hipóteses:

1. A tensão σ não pode ser maior em valor absoluto que $\sigma_y > 0$. Isso significa que a princípio as tensões admissíveis estão situadas num intervalo $[-\sigma_y, \sigma_y]$. O domínio elástico é, portanto, estabelecido por:

$$E_\sigma := \{\sigma \in R | f(\sigma) \leq 0\} \quad (4.10)$$

Sendo E o módulo de elasticidade, a relação tensão-deformação desse ponto é representada por:

$$\sigma = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (4.11)$$

Sendo $f(\sigma)$ a função de escoamento, que tem a seguinte forma:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (4.12)$$

2. Se o valor absoluto σ da tensão aplicada for menor que a tensão de escoamento σ_y , nenhuma mudança em $\dot{\varepsilon}_p$ é observada, isto é, $\dot{\varepsilon}_p = 0$ caracterizando um regime elástico conforme se pode ver na equação 4.13.

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \rightarrow \dot{\epsilon}_p = 0 \rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad (4.13)$$

3. Quando $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0$, considera-se que o elemento escoou na direção das tensões aplicadas com uma constante de escoamento $y \geq 0$. A variação da deformação plástica é representada pela regra do fluxo plástico apresentada pela equação 4.14.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= y \geq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_y > 0 \\ \dot{\epsilon}_p &= -y \geq 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_y < 0 \\ \dot{\epsilon}_p &= y \text{ sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Onde $\text{sign}(\sigma)$ é uma função sinal definida como:

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

As condições de carga e descarga são determinadas através das condições de Kuhn-Tucker (equação 4.16) e pela condição de consistência (4.17). Tais condições têm a função de manter o estado de tensão sob o contorno da região elástica durante as deformações plásticas e determinar quais são as condições de carregamento.

	$f(\sigma) < 0 \rightarrow y = 0$	
Condições de Kuhn-Tucker	$y < 0 \rightarrow f(\sigma) = 0$	(4.16)

	$y f(\sigma) = 0$	
Condição de consistência	$y \dot{f}(\sigma) = 0$	(4.17)

Durante o fluxo-plástico a função de escoamento deve permanecer igual a zero, e, portanto, sua variação no tempo também deve ser nula. Essa consideração leva a condição de consistência.

Na tabela abaixo são resumidas as principais situações ocorridas durante o processo de carga-descarga.

Tabela 4.2 – Situações de carregamento para o modelo de elastoplasticidade.

Localização de $f(\sigma)$	Constante de escoamento	Situação de carga
$f < 0 \leftrightarrow f(\sigma) \in \text{int}(E_\sigma)$	$y=0$	Elástico
$f = 0 \leftrightarrow f(\sigma) \in \partial(E_\sigma)$	$\dot{f} < 0 \rightarrow y = 0$	Descarga elástica
	$\dot{f} = 0 \rightarrow y = 0$	Carga Neutra
	$\dot{f} = 0 \rightarrow y > 0$	Carga Plástica
$f > 0$	-	Estado inadmissível

4.2.3.1. Modelo friccional unidimensional com endurecimento.

Para alguns materiais, uma vez iniciado o processo de plastificação, a superfície de escoamento varia devido ao fenômeno de endurecimento. À medida que o endurecimento evolui, a superfície de fluência pode expandir sem mudança de forma, caracterizando o endurecimento isotrópico, ou transladar simulando o efeito *Baushinger*, caracterizando o endurecimento cinemático.

A lei de endurecimento é marcada pela escolha de suas variáveis internas e pela definição da forma com a qual irá afetar a regra de fluxo e a condição de escoamento.

Para que a influência do endurecimento isotrópico na função de escoamento $f(\sigma)$ seja considerada, introduziram-se as variáveis K , denominada de módulo plástico e α , uma função não negativa, designada variável interna de endurecimento plástico isotrópico. Dessa maneira a equação 4.18 passa a ter a seguinte forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_y + k\alpha] \leq 0, \text{ com } \alpha \geq 0 \quad (4.18)$$

A evolução da variável interna de endurecimento plástico isotrópico α é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= |\dot{\epsilon}_p| \\ \dot{\alpha} &= |y \text{ sign}(\sigma)| \\ \dot{\alpha} &= y \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sendo H o modelo de endurecimento cinemático e q uma variável que define a localização do centro da superfície de escoamento designada variável interna de

endurecimento plástico, a equação 4.18 toma a forma da equação 4.20 para levar-se em consideração o efeito do endurecimento cinemático:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - [\sigma_y + k\alpha] \leq 0 \quad (4.20)$$

A evolução da variável q é determinada pela Regra de Ziegler:

$$\dot{q} = H \dot{\varepsilon}_p \quad (4.21)$$

Onde:

$$\dot{\varepsilon}_p = y \operatorname{sign}(\sigma - q) \quad (4.22)$$

Portanto:

$$\dot{q} = y H \operatorname{sign}(\sigma - q) \quad (4.23)$$

A Tabela 4.3 é um resumo das principais equações governantes do modelo constitutivo desenvolvido por Simo & Hughes (1997), o qual considera os efeitos do endurecimento do material. Esse modelo foi implementado dentro do programa em Elementos Finitos (**1-damage.exe**) utilizado neste trabalho.

Tabela 4.3 – Sumário das principais equações governantes do modelo friccional unidimensional com endurecimento (FERNANDES, 2010).

Relação tensão \times deformação	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$
Regra de fluxo plástico	$\dot{\varepsilon}_p = y \operatorname{sign}(\sigma - q)$
Lei de endurecimento isotrópico	$\dot{\alpha} = y$
Lei de endurecimento cinemático	$\dot{q} = y H \operatorname{sign}(\sigma - q)$
Condição de escoamento	$f(\sigma, q, \alpha) = \sigma - q - [\sigma_y + K_a] \leq 0$
Fechamento do domínio elástico	$E_\sigma = \{(\sigma, q, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, q, \alpha) = 0\}$
Condições de complementaridade de <i>Kuhn-Tucker</i>	$y \geq 0, f(\sigma, q, \alpha) \leq 0, yf(\sigma, q, \alpha) = 0$
Condição de consistência	$\dot{f}(\sigma, q, \alpha) = 0$ (se $f(\sigma, q, \alpha) = 0$)

4.2.4. Geração dos elementos de treliça.

A forma padrão de elementos de treliça é bastante restrita para formas regulares de modelos, não permitindo formas com geometrias mais complexas que pode ocorrer em estruturas reais. Diferentemente do aplicado anteriormente na literatura, esse trabalho propõe o uso de geração de malha automática de triângulos para a geração de elementos de treliças.

Para tanto, é empregado um algoritmo 2D para domínios bidimensionais de forma arbitrária (Miranda, Meggiolado *et al.*, 2003). O algoritmo proposto incorpora aspectos de técnicas para geração de malhas bem conhecidas na literatura e define alguns passos originais adicionais. O algoritmo se baseia em uma técnica de avanço da fronteira (Shaw and Pitchen 1978; Potyondy 1993), mas usa também uma técnica de decomposição espacial recursiva (Samet 1984; Wawrzynek 1991), no caso um árvore quaternária (*quadtree*), para desenvolver diretrizes locais usadas para definir o tamanho dos elementos gerados. A técnica de avanço da fronteira usada neste algoritmo é baseada em um procedimento padrão encontrado na literatura, mas com alguns passos adicionais. Para melhorar a qualidade das malhas geradas (no que diz respeito à forma dos elementos), um procedimento de melhoria local *a posteriori* é usado.

Uma breve descrição do algoritmo é realizada. O dado de entrada é uma descrição poligonal do contorno da região a ser gerado a malha, dado por uma lista de nós que definem suas coordenadas e uma lista de segmentos (ou arestas) definidos pela conectividade dos nós. Esse tipo de entrada pode representar qualquer forma, incluindo furos. Dos segmentos do contorno, uma estrutura auxiliar de pano-de-fundo *quadtree* é criada para controlar os tamanhos dos elementos triangulares gerados pelo processo de avanço da fronteira. O algoritmo se inicia a partir das arestas do contorno inicial. A cada passo do procedimento de geração de malha, um novo triângulo é gerado para cada aresta de frente base de avanço. Consequentemente, o domínio da região é contraída, possivelmente em várias regiões. O processo para quando todas as regiões contraídas resultam em um único triângulo. Apesar de que o algoritmo gere no final uma lista de triângulos, apenas as arestas dos triângulos são usadas como elementos de treliça.

Depois que os elementos são gerados, é necessário definir a área da seção transversal de cada elemento de treliça. As áreas definidas na Figura 4.20 são calculadas por meio das equações apresentadas abaixo:

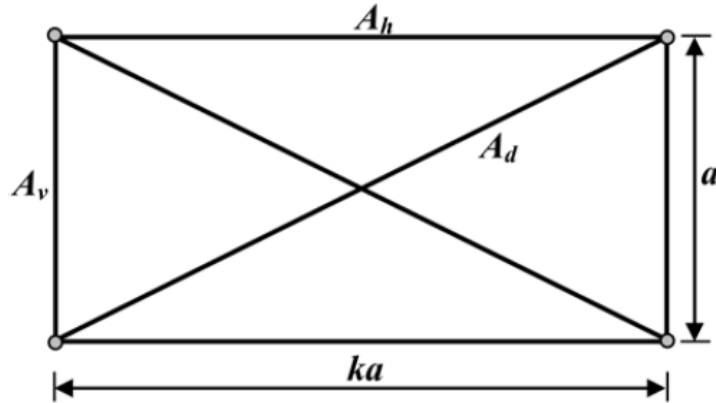


Figura 4.20 – Padrão de elementos de treliça para o caso plano de tensões (NAGARAJAN *et al.*, 2010).

$$\begin{aligned}
 A_h &= \frac{3}{8} (3 - k^2) at \\
 A_d &= \frac{3}{16} \frac{(3 - k^2)^{3/2}}{k} at \\
 A_v &= \frac{3}{8} \frac{(3k^2 - 1)}{k} at
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Onde t é espessura. As áreas foram calculadas considerando um coeficiente de *Poisson* igual a $1/3$. Considerando um elemento que forma um cubo unitário, $a = 1$, $t = 1$ e $k = 1$, as equações apresentadas resultam num volume três vezes maior ao esperado. Essa informação é usada para o cálculo das áreas dos elementos de treliça gerados nesse trabalho. A área de cada elemento de treliça é calculada aqui como:

$$A = \frac{3t \sum \frac{A_{AdjTri}}{3}}{L}
 \tag{4.25}$$

Onde A é a área do elemento de treliça, L é o seu comprimento, A_{AdjTri} é a área de cada triângulo adjacente a aresta (elemento). Observar que essa área é obtida triplicando o valor do volume dos triângulos.

5. EXEMPLOS ANALISADOS.

Foram escolhidos quatro exemplos da literatura para aplicar os métodos de análise apresentados. O primeiro exemplo se trata de uma viga-parede simplesmente apoiada submetida a um carregamento simétrico – viga A1 – ensaiada por Guimarães (1980). A viga em questão já havia sido analisada por Fernandes (2010) em sua dissertação de mestrado aplicando o modelo de dano contínuo com duas variáveis e malha de elementos finitos quadriláteros serendípticos gerada pelo QUEBRA 2D e análise 2D de tensões.

Este exemplo se trata de uma viga-parede simplesmente apoiada submetida a carregamento simétrico que apresentou ruptura por flexão. Desta forma, a viga não se enquadrava nas limitações dos modelos analíticos citados. No entanto, foi analisada aplicando o MTA e o CAST.

A figura 5.1 apresenta a geometria da viga e na tabela 5.1 encontram-se as propriedades mecânicas dos materiais e resultados experimentais.

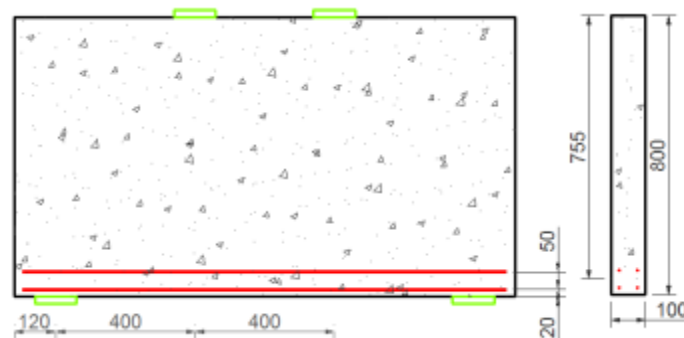


Figura 5.1 – Viga A1 – dimensões em milímetros (mm) – adaptado de Guimarães (1980).

Tabela 5.1 – Propriedades da viga A1.

Propriedades geométricas	b	100	mm
	h	800	mm
	d	755	mm
	c	45	mm
	a	400	mm
	l	1440	mm
	p_l	120	mm
	p_s	120	mm
	a/d	0,53	
Aço	A_s	197,8 (2x2Ø8mm)	mm ²
	ρ	0,26	%
	f_y	534	MPa
	E_s	212500	MPa
Concreto	f_c	24,8	MPa
	f_t	2,4	MPa
	E_c	23704	MPa
Ruptura	P_u	480	KN
	<i>Tipo de Ruptura</i>	Flexão.	
	P_y	390	KN

Onde:

b : base; h : altura; d : altura útil ($d = h - c$); c : cobrimento; a : vão de cisalhamento; l : comprimento da viga; p_l : comprimento do placa do ponto de aplicação da carga; p_s : comprimento da placa do ponto de apoio; A_s : área de aço; ρ : taxa de armadura; f_y : tensão de escoamento do aço; E_s : módulo de elasticidade do aço; f_c : resistência a compressão do concreto; f_t : resistência a tração do concreto; E_c : módulo de elasticidade do concreto; P_u : carga última experimental; P_y : carga de escoamento.

Segundo Guimarães (1980), a resistência a compressão do concreto encontrada foi de $f_c=24,8$ MPA aos 51 dias, deformação última de $2,502 \times 10^{-3}$ e resistência a tração de 2,4 MPA. A partir da curva de tensão-deformação, Fernandes (2010) adotou um módulo de elasticidade de 30 MPA e resistência $f_0^- = 12$ MPA, correspondente a $0,484f_c$. Para a energia de fratura adotou $g_f=150$ N/m.

Fernandes (2010) também determinou os parâmetros necessários para implementação do modelo de dano. A partir de ajustes a curva tensão \times deformação do concreto, determinou os parâmetros A^- e B^- . Para os valores de $A^- = 1,00$ e $B^- = 0,744$, a deformação última encontrada foi de $e_u=2,9 \times 10^{-3}$, valor mais próximo do fornecido pelo autor, $e_u=2,502 \times 10^{-3}$, conforme curvas mostradas na Figura 5.2.

Para que não houvesse problemas de objetividade da malha, o comprimento característico l foi calculado para cada elemento finito como sendo a raiz quadrada da sua área (FERNANDES, 2010). Portanto, o parâmetro A^+ , determinado por meio da equação 4.28, depende das características geométricas do elemento.

O aço utilizado nesta viga apresentou tensão de escoamento $f_y=534$ MPA e $E=212,5$ GPA. Ajustando a curva fornecida por Guimarães (1980), Fernandes (2010) chegou a um valor de 1 GPA para a constante de endurecimento isotrópico (H).

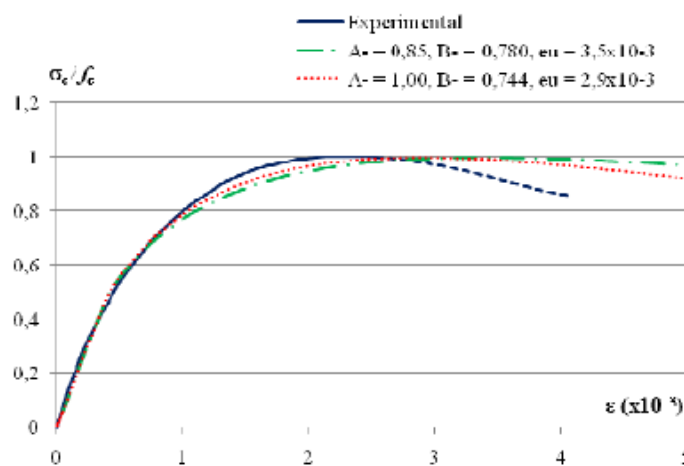


Figura 5.2 – Ensaio de compressão simples do concreto da viga A1 (FERNANDES, 2010).

O segundo exemplo se trata de uma viga-parede simplesmente apoiada submetida a um carregamento simétrico – viga A2 – ensaiada por Guimarães (1980). Devido a diferença em torno de 10% na resistência do concreto da viga A2 em relação a viga A1, considerou-se que os parâmetros determinados para A2 também são válidos para A1. Por enquadrar-se nos critérios, esta viga também foi analisada por métodos analíticos.

A figura 5.3 mostra a geometria da viga A2 e a tabela 5.2 apresenta as propriedades dos materiais e dados experimentais.

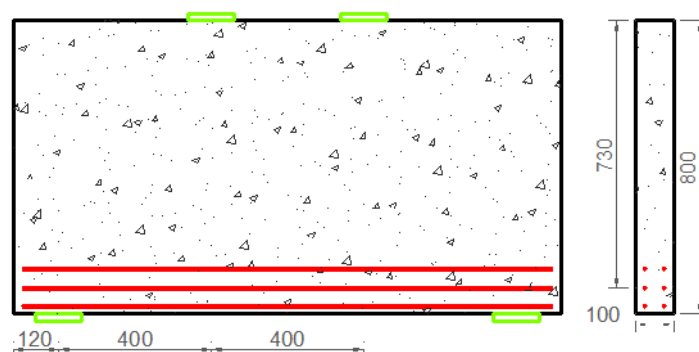


Figura 5.3 – Viga A2 – dimensões em milímetros (mm) – adaptado de Guimarães (1980).

Tabela 5.2 – Propriedades da viga A2.

	b	100	mm	
	h	800	mm	
	d	730	mm	
	c	70	mm	
Propriedades geométricas	a	400	mm	
	l	1440	mm	
	p_l	120	mm	
	p_s	120	mm	
	a/d	0,55	-	
	Aço	A_s	427,50 (3x2Ø10mm)	mm ²
		ρ	0,59	%
f_y		582	MPa	
E_s		212500	MPa	
Concreto	f_c	22,3	MPa	
	f_t	2,23	MPa	
	E_c	22480	MPa	
	P_u	546	KN	
Ruptura	<i>Tipo de Ruptura</i>	Cisalhamento		
	P_y	-	KN	

Nota: O valor do módulo de elasticidade do concreto foi estimado conforme NBR 6118 (2007).

O terceiro exemplo analisado é a viga V5 ensaiada por Rogowsky *et al.* (1983). Trata-se de uma viga-parede contínua, conforme figura 5.4, rompida por cisalhamento que foi analisada pelos modelos analíticos e utilizando o MTA.

Não se detém de informações precisas dessa viga para estabelecer com maior precisão os parâmetros para o modelo de dano contínuo. Não foram publicadas informações do ensaio do concreto, de tal forma que não foi possível determinar os parâmetros A^- e B^- ou mesmo a energia de fratura, que também foi estimada em 150 KN/m. A resistência f_o^- foi estimada da mesma forma que no trabalho de Fernandes (2010) e para f_o^+ , aplicou-se a resistência a tração do concreto conforme NBR 6118 (2007).

Na tabela 5.3 são apresentados os dados experimentais e as propriedades dos materiais da viga V5. Nas figuras 5.4 e 5.5 têm-se a geometria da viga e na figura 5.6, a curva carga x deslocamento experimental.

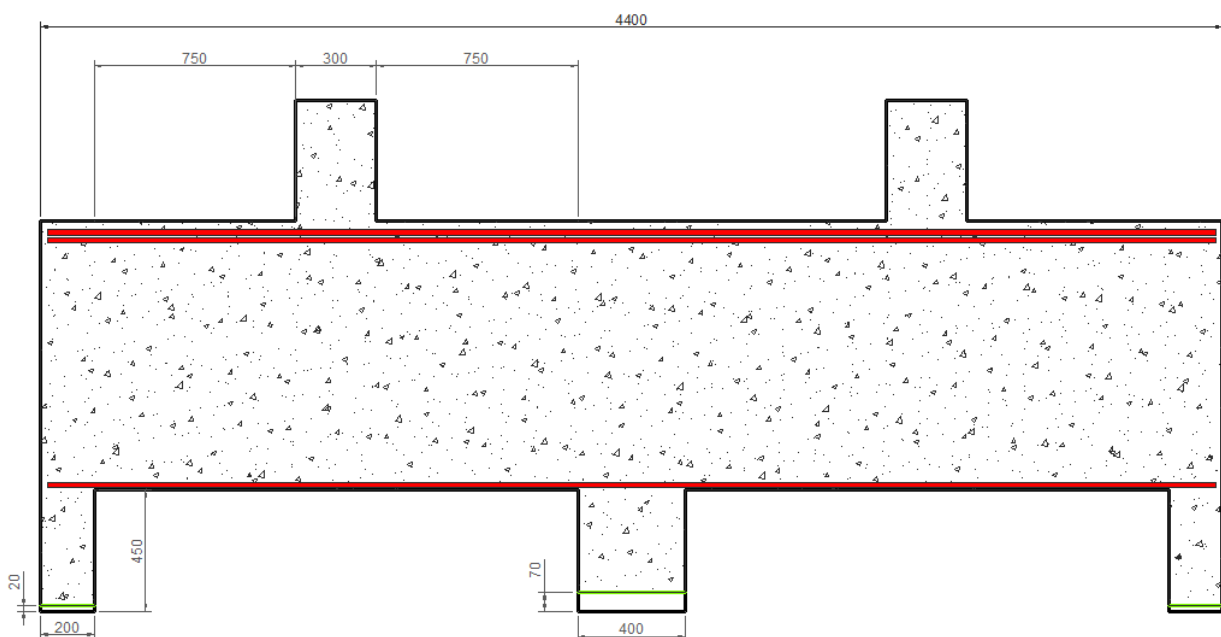


Figura 5.4 – Viga V5 – dimensões em milímetros (mm) – adaptado de Rogowsky *et al.* (1983).

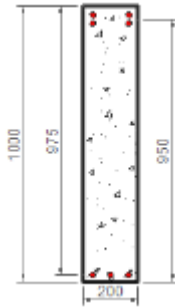


Figura 5.5 – Seção Transversal da viga V5 – dimensões em milímetros (mm) – adaptado de Rogowsky *et al.* (1983).

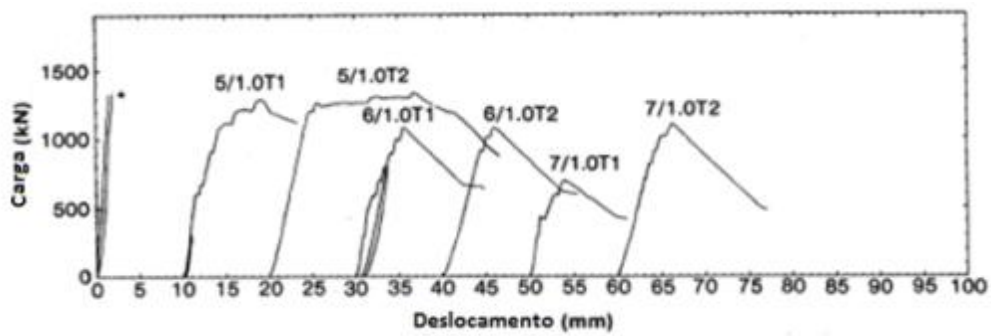


Figura 5.6 – Curva carga \times deslocamento no meio do vão da viga V5 (7/1.0T1) (Rogowsky *et al.*, 1983).

Tabela 5.3 – Propriedades da viga V5 (7/1.0 T1).

	Armadura negativa			Armadura positiva		
Propriedades geométricas	b	200	mm	b	200	mm
	h	1000	mm	h	1000	mm
	d	950	mm	d	975	mm
	c	50	mm	c	25	mm
	a	750	mm	a	750	mm
	l	4400	mm	l	4400	mm
	p_l	300	mm	p_l	300	mm
	p_s	200/400/200	mm	p_s	200/400/200	mm
	a/d	0,79		a/d	0,77	
Aço	A_s	(4Ø20M) 1152	mm ²	A_s	(3Ø20M) 864	mm ²
	ρ	0,63	%	ρ	0,46	%
	f_y	420	MPa	f_y	420	MPa
	E_s	195800	MPa	E_s	195800	MPa
Concreto	f_c	34,5	MPa	f_c	34,5	MPa
	f_t	2,71	MPa	f_t	2,71	MPa
	E_c	21,6	MPa	E_c	21,6	MPa
Ruptura		T1			T2	
	P_u	714	KN	P_u	1107	KN
	<i>Tipo</i>	Cisalhamento		<i>Tipo</i>	Cisalhamento	
	P_y	-	KN	P_y	-	KN

Nota: T2 refere-se ao reensaio da viga V5, reforçada após a ruptura com a primeira carga apresentada em T1. Resistência à tração estimada conforme NBR 6118 (2007).

O último exemplo se trata de uma miniatura de viga em microconcreto biapoiada submetida a uma carga centrada ensaiada por Melo (2011). A figura 5.7 apresenta a geometria da viga e a figura 5.8, a curva carga x deslocamento experimental da mesma. Na tabela 5.4 encontram-se os dados experimentais da viga em questão.

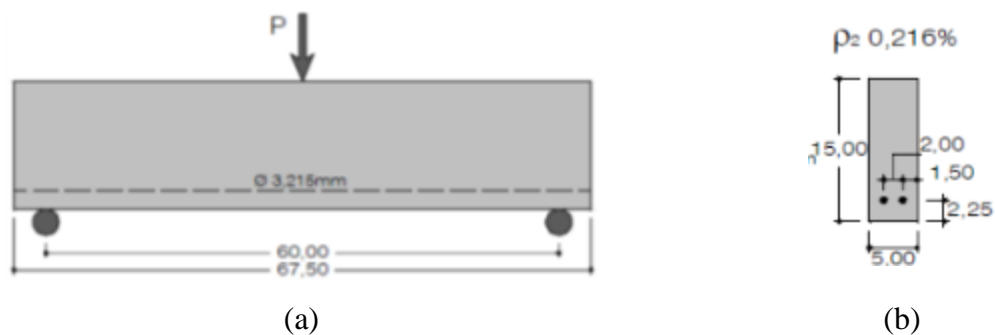


Figura 5.7 – (a) Viga R2-b e (b) seção transversal da viga (MELO, 2011).

Tabela 5.4 – Dados da viga R2-b.

	b	50	mm
	h	150	mm
	d	127,5	mm
	c	22,5	mm
Propriedades geométricas	a	300	mm
	l	675	mm
	p_l	10	mm
	p_s	10	mm
	a/d	x	
	A_s	x	mm ²
	Aço	ρ	0,216
f_y		346,39±6,25	MPa
E_s		114,77±3,85	GPa
G_f		72,43±1,12	N/m
Concreto	f_c	35,47±0,46	MPa
	f_t	4,40±0,17	MPa
	E_c	26,95±0,56	GPa
	Ruptura	P_u	8,20

Para este exemplo, em especial, dispunha-se de dados experimentais mais precisos, assim como a determinação da energia de fratura. No entanto, mantiveram-se os mesmos valores para A^- e B^- , pois não se dispunha da curva tensão \times deformação do concreto.

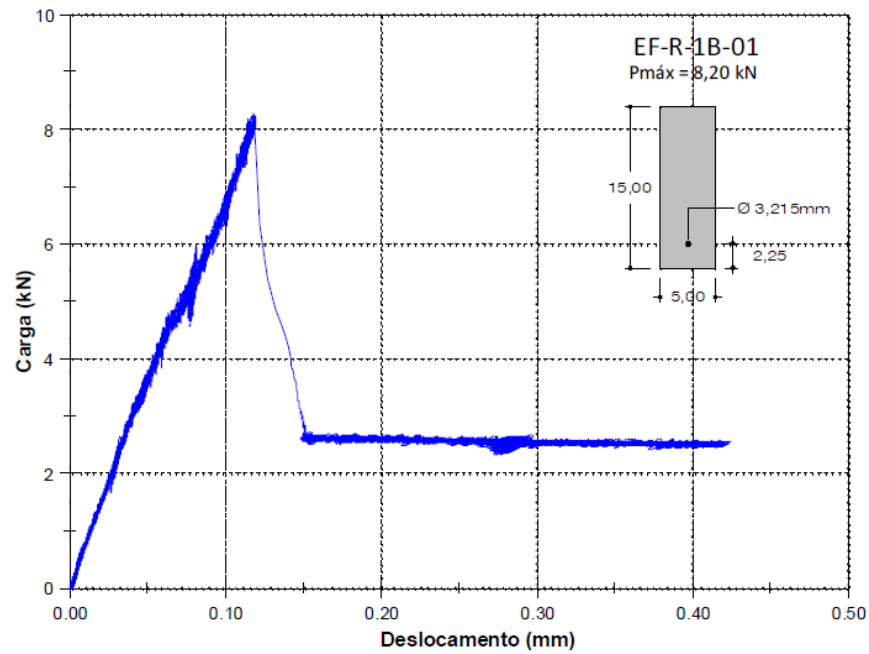


Figura 5.8 – Curva carga \times deslocamento da viga R2-b (MELO, 2011).

6. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.

6.1. Resultados analíticos.

6.1.1. Viga A2 de Guimarães (1980).

6.1.1.1. Modelo de biela e tirante de Won *et al.* (1998).

Na primeira iteração, assume-se que $d_{\min} = 0$ e $d_{\max} = d$. Os dados de entrada são: f_{ck} , a , d , d_a^{\min} , d_a^{\max} , b , r_b , u_0 , A_s , f_y , r_l , l_b e l_t .

O valor de l_t é dado pelo comprimento da barra que se estende além do apoio. Desta forma, assume-se que seja um valor que corresponde à distância do final do apoio a extremidade da viga subtraído do cobrimento da viga, assumido ser 20 mm. Desta forma, obtém-se $l_t = 40$ mm.

Calcula-se então o valor de $l_{t,\min}$, que é dado por:

$$l_{t,\min} = \frac{u_0[a + 0,5(r_b - r_l)]}{d - u_0}$$
$$l_{t,\min} = \frac{70[400 + 0,5(120 - 120)]}{730 - 70} = 42,42 \text{ mm}$$

Como l_t é menor que $l_{t,\min}$ então assume-se que $d_{\text{eff}} = d$ e $y = u_0$. A partir dessa definição, é possível encontrar os resultados abaixo:

$$d_a = \frac{d_a^{\min} + d_a^{\max}}{2} = \frac{0 + 730}{2} = 365 \text{ mm}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d - 0,5d_a}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{730 - 0,5 * 365}{730}\right) = 0,94 \text{ rad}$$

$$f_{ce1} = 0,85 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{ck} = 0,85 \left(1 - \frac{22,3}{250}\right) 22,3 = 17,26 \text{ MPa}$$

$$f'_{ce2} = 0,68 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \left(1,25 - 0,25 \frac{a}{d}\right) f_{ck}$$

$$f'_{ce2} = 0,68 \left(1 - \frac{22,3}{250}\right) \left(1,25 - 0,25 \frac{400}{730}\right) = 15,37 \text{ MPa}$$

$$T_{max} = A_s f_y = 427,8 * 582 = 248,98 \text{ KN}$$

$$w^b_{eff} = r_b \text{sen} \theta + 2y \text{cos}$$

$$w^b_{eff} = 120 * \text{sen } 0,94 + 2 * 70 * \text{cos } 0,94 = 312,22 \text{ mm}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{d}{a + l_l + 0,5(r_b - r_l)} \right)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{730}{400 + 40 + 0,5(120 - 120)} \right) = 1,03 \text{ rad}$$

$$w^t_{eff} = r_l \text{sen} \theta + d_a \text{cos} \theta$$

$$w^t_{eff} = 120 * \text{sen } 0,94 + 365 * \text{cos } 0,94 = 179,48 \text{ mm}$$

$$D_t = b f_{ce1} w^t_{eff}$$

$$D_t = 100 * 17,26 * 179,48 = 539,02 \text{ KN}$$

$$D_b \text{cos} \theta = T_a$$

Substituindo o valor de D_b em T_a :

$$D_b = b f'_{ce2} w_{eff}^b$$

$$T_a = b f'_{ce2} w_{eff}^b \text{cos} \theta$$

$$T_a = 100 * 15,37 * 312,22 * \text{cos } 0,94 = 162,76 \text{ KN}$$

$$f_{ce2} = \frac{\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \left(1,25 - 0,25 \frac{a}{d}\right) f_{ck}}{0,5 + \sqrt{\frac{T_a}{T_{max}}}}$$

$$f_{ce2} = \frac{\left(1 - \frac{22,3}{250}\right) \left(1,25 - 0,25 \frac{400}{730}\right) 22,3}{0,5 + \sqrt{\frac{162,76}{248,98}}} = 17,28 \text{ MPa}$$

$$\beta = \frac{f_{ce2}}{f'_{ce2}} = 1,12$$

Finalmente, calculam-se os valores reais de T e D_b , levando-se em consideração o aumento da resistência do nó:

$$T = \beta * T_a = 1,12 * 162,76 = 182,92 \text{ KN}$$

$$D_b = \frac{T_a}{\cos \theta} = \frac{162,76}{\cos 0,94} = 310,08 \text{ KN}$$

Calculam-se também as tensões na placa de aplicação de carga (σ_b) e na biela horizontal (σ_{c2}), para realizar as devidas verificações.

$$\sigma_b = \frac{D_t \operatorname{sen} \theta}{b r_l} = \frac{539,02 * \operatorname{sen} 0,94}{100 * 120} = 36,27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c2} = \frac{D_t \operatorname{cos} \theta}{b d_a} = \frac{539,02 * \operatorname{cos} 0,94}{100 * 365} = 8,71 \text{ MPa}$$

O autor não explicita um valor com o qual σ_b deva ser comparado. No entanto, os códigos normativos apresentam estes valores. O valor encontrado claramente não está dentro dos limites da segurança, pois está acima da resistência a compressão do concreto f_c . Sendo esta a primeira iteração, se dará prosseguimento aos cálculos mesmo diante dessa verificação mal sucedida.

O valor de σ_{c2} é comparado com f_{2ck} . Onde:

$$f_{2ck} = \frac{1 + 3,80\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_{ck} = \frac{1 + 3,80 * 0,24}{(1 + 0,24)^2} * 22,3 = 27,73 \text{ MPa}$$

$$\alpha = \frac{\text{mín}(\sigma_b, \sigma_{c2})}{\text{máx}(\sigma_b, \sigma_{c2})} = \frac{\text{mín}(36,27; 8,71)}{\text{máx}(36,27; 8,71)} = 0,24$$

Verificação OK! Logo:

$$V = D_t \text{sen}\theta = 539,02 * \text{sen } 0,94 = 435,24 \text{ KN}$$

Verificou-se que não se chegou a igualdade entre D_t e D_b , logo, existe a necessidade de realizar outra iteração (a partir dessa iteração os cálculos não serão mais detalhados, pois consiste apenas em repetição do processo).

2ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{\text{min}} + d_a^{\text{max}}}{2} = \frac{0 + 365}{2} = 182,50 \text{ mm}$$

$$D_t \neq D_b$$

$$342,81 \text{ KN} \neq 315,92 \text{ KN}$$

3ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{\text{min}} + d_a^{\text{max}}}{2} = \frac{0 + 182,5}{2} = 91,25 \text{ mm}$$

$$D_t \neq D_b$$

$$258,35 \text{ KN} \neq 318,49 \text{ KN}$$

4ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{\text{min}} + d_a^{\text{max}}}{2} = \frac{91,25 + 182,5}{2} = 136,88 \text{ mm}$$

$$D_t \neq D_b$$

$$317,23 \text{ KN} \neq 299,55 \text{ KN}$$

5ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{min} + d_a^{max}}{2} = \frac{136,88 + 182,5}{2} = 159,69 \text{ mm}$$

$$D_t \neq D_b$$

$$316,58 \text{ KN} \neq 320,91 \text{ KN}$$

6ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{min} + d_a^{max}}{2} = \frac{136,88 + 159,69}{2} = 148,29 \text{ mm}$$

$$D_t \neq D_b$$

$$316,91 \text{ KN} \neq 310,17 \text{ KN}$$

7ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{min} + d_a^{max}}{2} = \frac{148,29 + 159,69}{2} = 153,99 \text{ mm}$$

$$D_t \neq D_b$$

$$316,75 \text{ KN} \neq 315,53 \text{ KN}$$

Na oitava iteração já se obtém uma razão de 1,13 entre a carga calculada e a experimental, obtendo-se pouca variação a partir daí.

8ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{min} + d_a^{max}}{2} = \frac{153,99 + 159,69}{2} = 156,84 \text{ mm}$$

$$D_t \neq D_b$$

$$316,67 \text{ KN} \neq 318,22 \text{ KN}$$

Foi assumido $P_u = 270,01 \text{ KN}$, valor calculado na 17ª iteração, conforme equações abaixo.

17ª iteração:

$$d_a = \frac{d_a^{min} + d_a^{max}}{2} = \frac{155,25 + 155,26}{2} = 155,26 \text{ mm}$$

$$D_t \cong D_b$$

$$316,71 \text{ KN} \cong 316,72 \text{ KN}$$

$$P_u = 270,01 \text{ KN}$$

$$\frac{P_u \text{ previsto}}{P_u \text{ experimental}} = 0,99$$

Não havendo necessidade para mais cálculos, tem-se que $P_u=270,01 \text{ KN}$. A figura abaixo mostra a geometria do MBT obtido para viga A2 por meio do processo de Won *et al.* (1995).

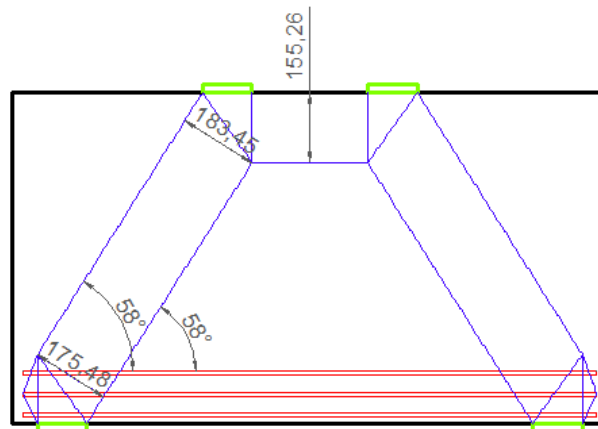


Figura 6.1 – MBT da viga A2 segundo Won *et al.* (1995).

6.1.1.2. Modelo de biela e tirante de Zhang & Tan (2007).

O processo de definição da geometria das bielas é iterativo e no passo inicial assume-se que $l_d=l_c$, onde l_c é a altura do nó CCT e l_d , do nó CCC. Em casos onde a precisão do resultado não é uma exigência, pode-se assumir que $l_d=l_c$ introduzindo um erro no cálculo de apenas 2%, segundo Zhang & Tan (2007).

Os dados de entrada na primeira iteração são: f_c , θ_s , h , l_c , l_d , A_s , f_y , b_w , l_b , E_s , a e d .

Como resultado, tem-se:

$$\tan \theta_s = \frac{h - \frac{l_c}{2} - \frac{l_d}{2}}{a}$$

$$\tan \theta_s = \frac{800 - \frac{140}{2} - \frac{140}{2}}{400}$$

$$\theta_s = 1,03 \text{ rad}$$

$$A_{str} = b_w(l_c \cos \theta_s + l_b \text{sen } \theta_s)$$

$$A_{str} = 100(140 \cos 1,03 + 120 \text{sen } 1,03) = 17518,6 \text{ mm}^2$$

$$A_c = b * d = 100 * 730 = 73000 \text{ mm}^2$$

$$f_{ct} = 0,31 \sqrt{f_c} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1} \right)^{0,4} = 0,29 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + \varepsilon_2) \cot^2 \theta_s = 0,00448$$

Onde ε_s , ε_2 e ε_{cr} são definidos conforme as equações abaixo:

$$\varepsilon_s = \frac{f_y}{E_s} = 0,002739$$

$$\varepsilon_2 = 0,002$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,00008$$

$$f_{st} = f_{sw} + f_{ss}$$

$$\text{Onde } f_{sw} = 0$$

$$f_{ss} = \frac{4A_s f_y \text{sen } \theta_s}{A_c / \text{sen } \theta_s} = \frac{4 * 427,8 * 582 * \text{sen } 1,03}{73000 / \text{sen } 1,03} = 9,98 \text{ MPa}$$

Logo:

$$f_{st} = f_{ss}$$

$$f_t = f_{st} + f_{ct} = 9,98 + 0,29 = 10,27 \text{ MPa}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4 \text{sen} \theta_s \cos \theta_s}{A_c f_t} + \frac{\text{sen} \theta_s}{A_{str} f'_c}}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4 \text{sen } 1,03 \cos 1,03}{73000 * 10,27} + \frac{\text{sen } 1,03}{17518,6 * 22,3}} = 219,59 \text{ KN}$$

A partir do valor encontrado para V_n , faz-se o cálculo inverso para encontrar o valor correspondente de l_d .

$$l_d = \frac{V_n}{f'_c b_w \tan \theta_s} = \frac{219,59 * 10^3}{22,3 * 100 * \tan 1,03} = 59,68 \text{ mm}$$

Na primeira iteração, encontrou-se uma razão entre a carga última calculada e a carga última real de 0,91, representando um erro de aproximadamente 9,59%.

Na segunda iteração, aplicando-se o valor calculado de l_d , obtém-se um erro de 7,33%.

2ª iteração:

$$\tan \theta_s = \frac{h - \frac{l_c}{2} - \frac{l_d}{2}}{a}$$

$$\tan \theta_s = \frac{800 - \frac{140}{2} - \frac{59,68}{2}}{400}$$

$$\theta_s = 1,05 \text{ rad}$$

$$A_{str} = b_w (l_c \cos \theta_s + l_b \text{sen} \theta_s)$$

$$A_{str} = 100(140 \cos 1,05 + 120 \text{sen } 1,05) = 17364,25 \text{ mm}^2$$

$$A_c = b * d = 100 * 730 = 73000 \text{ mm}^2$$

$$f_{ct} = 0,31 \sqrt{f'_c} \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_1} \right)^{0,4} = 0,29 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + \varepsilon_2) \cot^2 \theta_s = 0,00429$$

Onde ε_s , ε_2 e ε_{cr} são definidos conforme as equações abaixo:

$$\varepsilon_s = \frac{f_y}{E_s} = 0,002739$$

$$\varepsilon_2 = 0,002$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,00008$$

$$f_{st} = f_{sw} + f_{ss}$$

$$f_{sw} = 0$$

$$f_{st} = f_{ss} = \frac{4A_s f_y \text{sen} \theta_s}{A_c / \text{sen} \theta_s} = \frac{4 * 427,8 * 582 * \text{sen} 1,05}{73000 / \text{sen} 1,05} = 10,29 \text{ MPa}$$

$$f_t = f_{st} + f_{ct} = 10,29 + 0,29 = 10,58 \text{ MPa}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4 \text{sen} \theta_s \cos \theta_s}{A_c f_t} + \frac{\text{sen} \theta_s}{A_{str} f'_c}}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4 \text{sen} 1,05 \cos 1,05}{73000 * 10,58} + \frac{\text{sen} 1,05}{17364,25 * 22,3}} = 223,60 \text{ KN}$$

$$l_d = \frac{V_n}{f'_c b_w \tan \theta_s} = \frac{223,60 * 10^3}{22,3 * 100 * \tan 1,05} = 57,28 \text{ mm}$$

Já na terceira iteração, a diferença encontrada é desprezível, de 0,07 mm no valor de l_d e de 0,11 KN na carga última (P_u).

$$\tan \theta_s = \frac{h - \frac{l_c}{2} - \frac{l_d}{2}}{a}$$

$$\tan \theta_s = \frac{800 - \frac{140}{2} - \frac{57,28}{2}}{400}$$

$$\theta_s = 1,052 \text{ rad}$$

$$A_{str} = b_w(l_c \cos \theta_s + l_b \sin \theta_s)$$

$$A_{str} = 100 (140 \cos 1,052 + 120 \sin 1,052) = 17359,67 \text{ mm}^2$$

$$A_c = b * d = 100 * 730 = 73000 \text{ mm}^2$$

$$f_{ct} = 0,31 \sqrt{f'_c} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1} \right)^{0,4} = 0,29 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + \varepsilon_2) \cot^2 \theta_s = 0,00428$$

Onde ε_s , ε_2 e ε_{cr} são definidos conforme as equações abaixo:

$$\varepsilon_s = \frac{f_y}{E_s} = 0,002739$$

$$\varepsilon_2 = 0,002$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,00008$$

$$f_{st} = f_{sw} + f_{ss}$$

$$f_{sw} = 0$$

$$f_{st} = f_{ss} = \frac{4A_s f_y \sin \theta_s}{A_c / \sin \theta_s} = \frac{4 * 427,8 * 582 * \sin 1,052}{73000 / \sin 1,052} = 10,29 \text{ MPa}$$

$$f_t = f_{st} + f_{ct} = 10,29 + 0,29 = 10,58 \text{ MPa}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4 \sin \theta_s \cos \theta_s}{A_c f_t} + \frac{\sin \theta_s}{A_{str} f'_c}}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4 \sin 1,05 \cos 1,052}{73000 * 10,58} + \frac{\sin 1,052}{17359,67 * 22,3}} = 223,71 \text{ KN}$$

$$l_d = \frac{V_n}{f'_c b_w \tan \theta_s} = \frac{223,71 * 10^3}{22,3 * 100 * \tan 1,052} = 57,21 \text{ mm}$$

Na quarta iteração, chega-se aos mesmos valores da terceira iteração.

$$\tan \theta_s = \frac{h - \frac{l_c}{2} - \frac{l_d}{2}}{a}$$

$$\tan \theta_s = \frac{800 - \frac{140}{2} - \frac{57,21}{2}}{400}$$

$$\theta_s = 1,053 \text{ rad}$$

$$A_{str} = b_w (l_c \cos \theta_s + l_b \sin \theta_s)$$

$$A_{str} = 100 (140 \cos 1,053 + 120 \sin 1,053) = 17359,54 \text{ mm}^2$$

$$A_c = b * d = 100 * 730 = 73000 \text{ mm}^2$$

$$f_{ct} = 0,31 \sqrt{f'_c} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1} \right)^{0,4} = 0,29 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + \varepsilon_2) \cot^2 \theta_s = 0,00428$$

Onde ε_s , ε_2 e ε_{cr} são definidos conforme as equações abaixo:

$$\varepsilon_s = \frac{f_y}{E_s} = 0,002739$$

$$\varepsilon_2 = 0,002$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,00008$$

$$f_{st} = f_{sw} + f_{ss}$$

$$f_{sw} = 0$$

$$f_{st} = f_{ss} = \frac{4 A_s f_y \sin \theta_s}{A_c / \sin \theta_s} = \frac{4 * 427,8 * 582 * \sin 1,053}{73000 / \sin 1,053} = 10,29 \text{ MPa}$$

$$f_t = f_{st} + f_{ct} = 10,29 + 0,29 = 10,58 \text{ MPa}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4\text{sen}\theta_s \cos\theta_s}{A_c f_t} + \frac{\text{sen}\theta_s}{A_{str} f'_c}}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{4\text{sen } 1,053 \cos 1,053}{73000 * 10,58} + \frac{\text{sen } 1,053}{17359,54 * 22,3}} = 223,71 \text{ KN}$$

$$l_d = \frac{V_n}{f'_c b_w \tan \theta_s} = \frac{223,71 * 10^3}{22,3 * 100 * \tan 1,053} = 57,21 \text{ mm}$$

Por fim, conclui-se que P_u é de 223,71 KN. A figura 6.2 mostra a geometria do modelo de biela e tirante obtido:

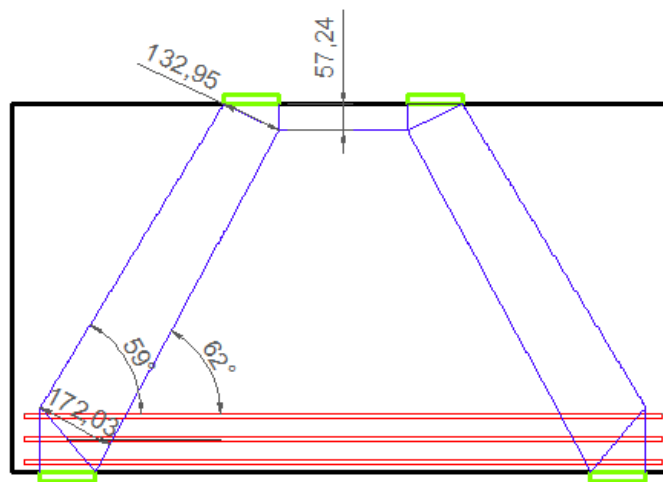


Figura 6.2 – MBT da viga A2 segundo Zhang & Tan (2007).

6.1.2. Viga V5 de Rogowsky *et al.* (1983).

6.1.2.1. Modelo de biela e tirante de Zhang & Tan (2007).

Os dados de entrada para este modelo são l_e , c_1 , c_2 , l_c , h , b_w , l_b , l_a , l_f , f'_c e E_c , f_{sp} , A_{s1} , A_{s2} , f_y e E_s .

A partir dos dados de entrada podem-se desenvolver os cálculos conforme explicitado no tópico 3.3. Inicialmente, define-se a geometria do modelo:

$$A_{STR1} = b_w(l_c \cos \theta_s + l_b \cos \theta_s) = 33944,81 \text{ mm}^2$$

$$A_{STR2} = b_w(l_c \cos \theta_s + l_f \cos \theta_s) = 60386,06 \text{ mm}^2$$

$$A_{STR3} = b_w(l_d \cos \theta_s + l_a \cos \theta_s) = 54669,01 \text{ mm}^2$$

$$A_{STR4} = \frac{A_{STR1} + A_{STR3}}{2} = 44306,91 \text{ mm}^2$$

$$A_{STR5} = \frac{A_{STR2} + A_{STR3}}{2} = 57527,52 \text{ mm}^2$$

$$\theta_s = \arctg\left(\frac{2(h - c_1 - c_2)}{l_e}\right) = 0,72 \text{ rad}$$

$$l_c = 2c_2 = 100 \text{ mm}$$

$$l_d = 2c_1 = 200 \text{ mm}$$

E então, definem-se as variáveis m , n e p e as frações A , B , C e D .

$$m = \frac{A_{str5}}{A_{str4}} = 1,30$$

$$n = \frac{E_c A_{str5}}{E_s A_{s1}} = 5,53$$

$$p = \frac{E_c A_{str5}}{E_s A_{s2}} = 7,38$$

$$A = \frac{1 + 2n \cos^3 \theta_s}{\sin \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} = 0,48$$

$$B = \frac{\cos \theta_s (m + 2p \cos^3 \theta_s - 1)}{\sin \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} = 0,41$$

$$C = \frac{\cos \theta_s (1 + 2n \cos^3 \theta_s)}{\sin \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} = 0,36$$

$$D = \frac{m + 2n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s}{\text{sen } \theta_s (1 + m + 4n \cos^3 \theta_s + 2p \cos^3 \theta_s)} = 1,03$$

A seguir, calcula-se a resistência a tração do concreto:

$$f_{ct} = 0,31 \sqrt{f'_c} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1} \right)^{0,4} = 0,31 \sqrt{34,5} \left(\frac{0,00008}{0,00715} \right)^{0,4} = 0,301 \text{ MPa}$$

Onde:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + \varepsilon_2) \cot^2 \theta_s = 0,00715$$

E:

$$\varepsilon_s = \frac{f_y}{E_s} = 0,002145$$

$$\varepsilon_2 = 0,002$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,00008$$

Definidos os parâmetros e propriedades acima, pode-se proceder para o cálculo da carga última para cada uma das regiões nodais.

Para região nodal A tem-se que:

$$f_{tA} = \frac{4A_{s2}f_y \text{sen} \theta_s}{A_c / \text{sen} \theta_s} + f_{ct} = 3,55 \text{ MPa}$$

Logo:

$$P_{nA} = \frac{1}{\frac{4C \text{sen}^2 \theta_s}{f_{tA} A_c} + \frac{(A-C \cos \theta_s)}{f'_c A_{str1}}} = 919,46 \text{ KN}$$

Para região nodal B, tem-se que:

$$T_{1a} = \frac{B}{C} T_{2max} = 417,67 \text{ KN}$$

$$f_{tB} = \frac{4T_{2max} - 2T_{1a}}{A_c / \text{sen}^2 \theta_s} + f_{ct} = 1,68 \text{ MPa}$$

Logo:

$$P_{nB} = \frac{1}{\frac{(4C-2B)\text{sen}^2\theta_s}{f_{tBAc}} + \frac{(D-C \cos \theta_s)}{f_c'A_{str2}}} = 847,01 \text{ KN}$$

Por fim, para a região nodal C, tem-se que:

$$T_{2a} = \frac{C}{B} T_{1max} = 362,88 \text{ KN}$$

$$f_{tC} = \frac{4T_{1max} - 2T_{2a}}{A_c / \text{sen}^2 \theta_s} + f_{ct} = 3,01 \text{ MPa}$$

Chegando ao valor da carga última para região nodal C de:

$$P_{nC} = \frac{1}{\frac{(4B-2C)\text{sen}^2\theta_s}{f_{tCAc}} + \frac{(D-B \cos \theta_s)}{f_c'A_{str3}}} = 925,59 \text{ KN}$$

A carga última da viga é dada pelo menor valor encontrado entre P_{nA} , P_{nB} e P_{nC} :

$$P_n = \text{mín}(P_{nA}, P_{nB}, P_{nC}) = 847,01 \text{ KN}$$

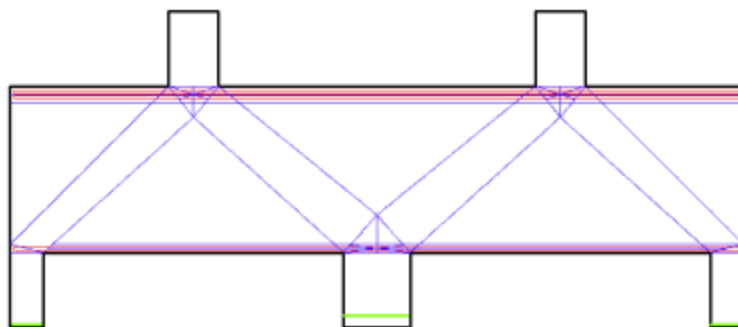


Figura 6.3 – MBT para viga V5 segundo Zhang & Tan (2007).

6.1.2.1. Modelo de biela e tirante de Nagarajan & Pillai (2009).

Os dados de entrada do modelo são: D , e_t , e_b , a_1 , a_2 , l_a , l_b , l_c , f_{ck} , b , f_{yp} , A_{sp} , f_{yn} e A_{sn} .
Daí calcula-se a geometria do modelo:

$$h = D - e_t - e_b$$
$$h = 1000 - 50 - 25 = 925 \text{ mm}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{h}{a_1}\right)$$
$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{925}{1000}\right) = 0,746$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{h}{a_2}\right)$$
$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{925}{1100}\right) = 0,699$$

$$w_{tp} = 2e_b = 2 * 25 = 50 \text{ mm}$$

$$w_a = l_a \text{sen } \theta_1 + w_{tp} \cos \theta_1 = 200 * \text{sen } 0,746 + 50 * \cos 0,746$$

$$w_a = 172,51 \text{ mm}$$

$$w_b = \frac{l_b}{2} \text{sen } \theta_2 + w_{tp} \cos \theta_2 = \frac{400}{2} \text{sen } 0,699 + 50 \cos 0,699 = 166,99 \text{ mm}$$

$$w_{tn} = 2e_t = 2 * 50 = 100 \text{ mm}$$

$$w_{c1} = \frac{l_c}{2} \text{sen } \theta_1 + w_{tn} \cos \theta_1 = \frac{300}{2} \text{sen } 0,746 + 100 \cos 0,746 = 175,27 \text{ mm}$$

$$w_{c2} = \frac{l_c}{2} \text{sen } \theta_2 + w_{tn} \cos \theta_2 = \frac{300}{2} \text{sen } 0,699 + 100 \cos 0,699 = 173,08 \text{ mm}$$

E então, calculam-se os esforços na bielas. O autor sugere um fator de eficiência de $\beta_s = e$ e um coeficiente de 0,45 na minioração da resistência do concreto. No entanto, para manter o padrão das análises, foi adotado o fator de eficiência do CEB-FIP em substituição (k_c).

Inicialmente, calcula-se a resistência efetiva do concreto:

$$k_c = 0,75 \left(\frac{30}{f_{ck}} \right)^{1/3} = 0,715$$

$$f_{cs} = \frac{k_c f_{ck}}{\gamma_c} = 0,51 * 34,5 = 17,60 \text{ Mpa}$$

Dá-se prosseguimento com o cálculo da capacidade da treliça de momentos negativos:

$$S = f_{cs} w_{s1} b = 17,60 * 172,51 * 200 = 607,07 \text{ KN}$$

$$Q = f_{cs} w_{s2} b = 17,60 * 166,99 * 200 = 587,63 \text{ KN}$$

$$R_a = S \text{ sen}\theta_1 = 607,07 * \text{sen } 0,746 = 412,23 \text{ KN}$$

$$R_b = 2 Q \text{ sen}\theta_2 = 2 * 587,63 * \text{sen } 0,699 = 158,09 \text{ KN}$$

Concluindo com o valor da carga última ao cisalhamento:

$$P_s = 2 W = 2 R_a + R_b = 2(S \text{ sen}\theta_1 + Q \text{ sen}\theta_2) = 1.580,86 \text{ KN}$$

A seguir, calcula-se a capacidade da treliça de momentos positivos:

$$R_a = T_1 \tan\theta_1 = 315,71 * \tan 0,746 = 292,03 \text{ KN}$$

$$R_b = 2 T_1 \tan\theta_2 = 2 * 315,71 * \tan 0,699 = 530,96 \text{ KN}$$

$$T_1 = 0,87 f_{yp} A_{sp} = 0,87 * 420 * 864 = 315,71 \text{ KN}$$

$$2W_p = 2R_a + R_b = 2T_1(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) = 1.115,02 \text{ KN}$$

$$W_n = T_2 \tan\theta_2 = 707,95 \text{ KN}$$

$$T_2 = 0,87 f_{yn} A_{sn} = 0,87 * 420 * 1152 = 420,94 \text{ KN}$$

$$2W_n = 2T_2 \tan\theta_2 = 707,95 \text{ KN}$$

Obtendo-se a carga última a flexão:

$$P_f = 2W_p + 2W_n = 2T_1(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) + 2T_2 \tan\theta_2 = 1.822,96 \text{ KN}$$

Verifica-se que a carga última da viga é $P_u = 1580,86 \text{ KN}$ e que o modo indica que o modo de ruptura mais provável será por cisalhamento.

6.2. Resultados com o CAST.

6.2.1. Viga A1 de Guimarães (1980).

Utilizando o CAST foram feitas quatro análises: por meio do modelo de Zhang & Tan (2007) calculou-se a carga última aplicando fatores de eficiência do ACI (2008) e do CEB-FIP MC (2010); o mesmo foi feito para o modelo de Won *et al.* (1995).

A função predição da carga última do CAST permite que, a partir de dada geometria de MBT e critérios de resistência escolhidos pelo usuário, o programa calcule a máxima carga possível de ser aplicada ao elemento. O cálculo é feito de forma simples e intuitiva: por meio do fator de eficiência do concreto, limita-se a tensão máxima nas bielas. Como a geometria já foi definida determina-se a força máxima para que a biela de determinada espessura não supere a resistência do concreto. Os nós são verificados de acordo com o código normativo escolhido, da mesma forma que as bielas. Conforme o esquema acima foi feita a primeira análise baseando-se na geometria do modelo de biela e tirante de Zhang & Tan (2007) – figura 6.4 – aplicando os fatores de eficiência do ACI (2008). No entanto, devido às limitações do CAST, não foi possível reproduzir fielmente o modelo analítico, especialmente as regiões nodais.

Por meio da análise de predição da carga última, verifica-se que a biela horizontal torna-se o limitador da capacidade do modelo, com $P_u = 84,2$ KN. As tensões obtidas nas bielas estão listadas na tabela 6.1 e as tensões nos nós são apresentadas na tabela 6.2.

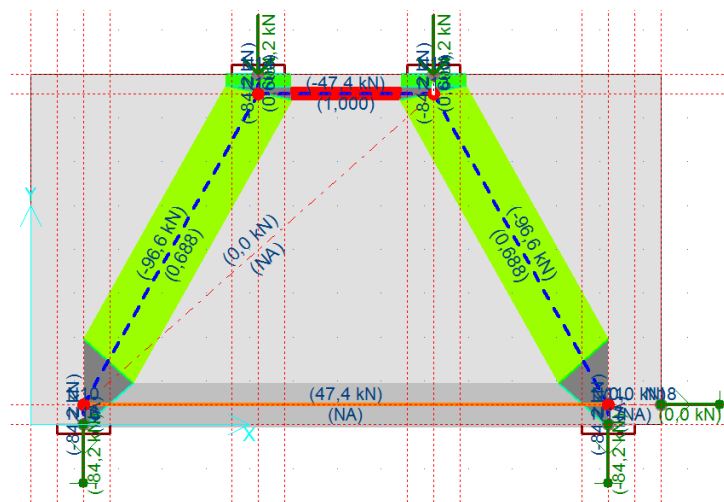


Figura 6.4 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).

Tabela 6.1 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).

ID	l (mm)	θ (°)	F (KN)	f_{ce} (Mpa)	w_{min} (mm)	w_{eff} (mm)	f_u (Mpa)	f_u/f_{ce}	ν
E12	814,90	60,60	-96,60	9,49	101,90	148,00	6,53	0,688	ACI BS
E13	400,00	0,00	-47,40	15,81	30,00	30,00	15,81	1,000	ACI PS
E15	45,00	90,00	-84,20	9,49	88,70	148,00	5,69	0,600	ACI BS

Onde:

ID – identificação;

l – comprimento;

F – força;

f_{ce} – tensão máxima suportada pelo concreto conforme fatores de eficiência aplicados, dada por: $f_{ce} = 0,75 \nu f_c'$;

w_{min} – espessura mínima da biela para que a tensão não exceda a tensão máxima f_{ce} ;

w_{eff} – espessura efetiva da biela;

f_u – tensão efetiva na biela;

BS – *bottle-shaped strut without steel* – biela em forma de garrafa não reforçada: $\nu = 0,85 * 0,6 = 0,51$;

PS – *prismatic strut* – biela prismática: $\nu = 0,85 * 0,8 = 0,68$

Tabela 6.2 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).

Nó	Biela da interface	F (KN)	f_u (Mpa)	f_{ce} (Mpa)	f_u/f_{ce}	□
N12	E12	-96,60	6,53	15,81	0,413	ACI CCC
N12	E15	-84,20	5,69	15,81	0,360	ACI CCC
N12	E13	-47,40	15,81	15,81	1,000	ACI CCC
N10	E11	-47,40	4,74	12,65	0,375	ACI CCT
N10	E12	-96,60	6,53	12,65	0,516	ACI CCT

Onde as figuras 6.5 de (a) a (e) identificam as faces nodais listadas na tabela 6.2:

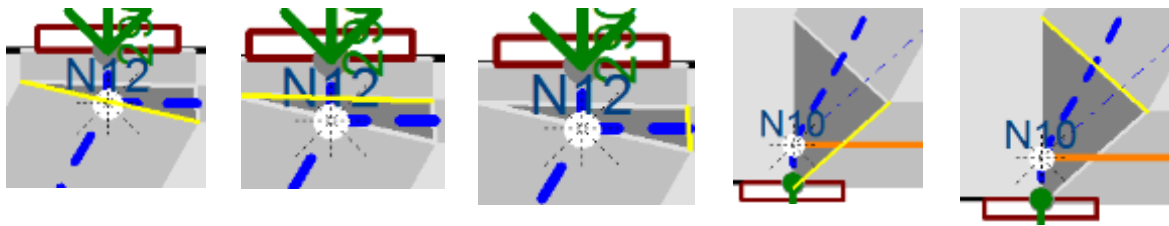


Figura 6.5 – Identificação do nós:

- (a) N12-E12; (b) N12-E15; (c) N12-E13; (d) N10-E11; (e) N10-E12.

E os fatores de eficiência aplicados são dados por:

$$\text{ACI CCC} - \nu = 0,85 * 1,0 = 0,85$$

$$\text{ACI CCT} - \nu = 0,85 * 0,8 = 0,68$$

Mantendo a geometria de Zhang & Tan (2007), foram aplicados os fatores de eficiência do CEB-FIP (2010) para predição da carga última – Figura 6.6.

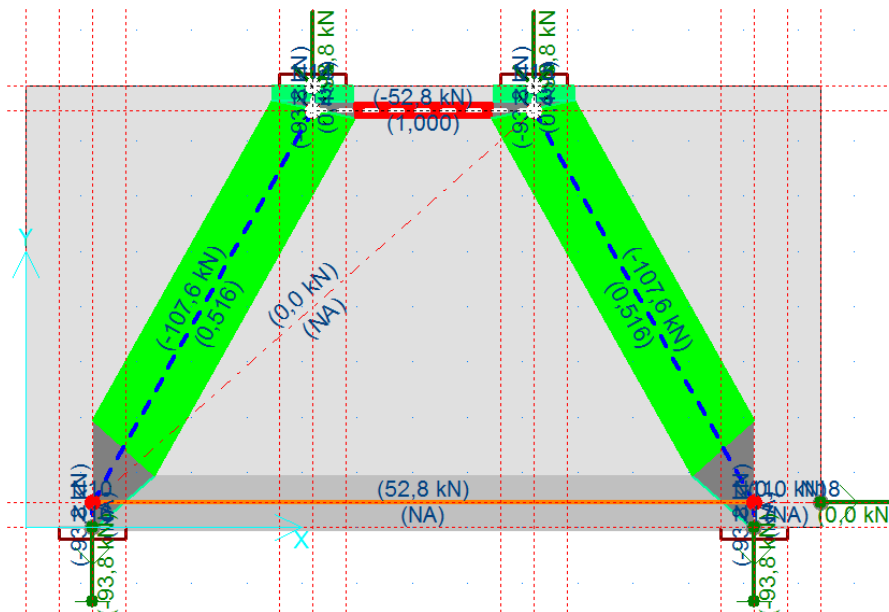


Figura 6.6 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Conforme os resultados mostrados nas Tabelas 6.3 e 6.4, a carga última calculada foi de 93,8 KN e o elemento limitador da resistência do elemento é a biela horizontal E13.

Tabela 6.3 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

ID	l (mm)	θ (°)	F (KN)	f_{ce} (Mpa)	w_{min} (mm)	w_{eff} (mm)	f_u (Mpa)	f_u/f_{ce}	ν
E12	814,90	60,60	-107,60	14,09	76,40	148,00	7,27	0,516	CEB-2010-BS
E13	400,00	0,00	-52,80	17,61	30,00	30,00	17,61	1,000	CEB-2010-PS
E15	45,00	90,00	-93,80	14,09	66,60	148,00	6,34	0,450	CEB-2010-BS

Onde:

f_{ce} – tensão máxima suportada pelo concreto conforme fatores de eficiência aplicados, dada por: $f_{ce} = \frac{\nu f_c'}{1,4}$;

BS – *bottle-shaped strut* – biela em forma de garrafa: $\nu = 0,75 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 0,8$

PS – *prismatic strut* – biela prismática: $\nu = 1,0 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 1,0$

Tabela 6.4 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Nó	Biela da interface	F (KN)	f_u (Mpa)	f_{ce} (Mpa)	f_u/f_{ce}	ν
N12	E12	-107,60	7,27	17,61	0,413	CEB-CCC
N12	E15	-93,80	6,34	17,61	0,360	CEB-CCC
N12	E13	-52,80	17,61	17,61	1,000	CEB-CCC
N10	E11	-52,80	5,28	14,09	0,375	CEB-CCT
N10	E12	-107,60	7,27	14,09	0,516	CEB-CCT

Onde os fatores de eficiência do concreto valem:

CEB-CCC – $\nu = 1,0 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 1,0$

CEB-CCT – $\nu = 0,75 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 0,8$

Para o modelo de Won *et al.* (1995) no CAST, utilizando os fatores do ACI (2008), inicialmente, tem-se o seguinte cenário: o elemento que restringe a resistência da viga

passa a ser a biela inclinada, para uma carga última de $P_u = 111,2$ KN. As tabelas 6.5 e 6.6 apresentam os resultados para os elementos do MBT.

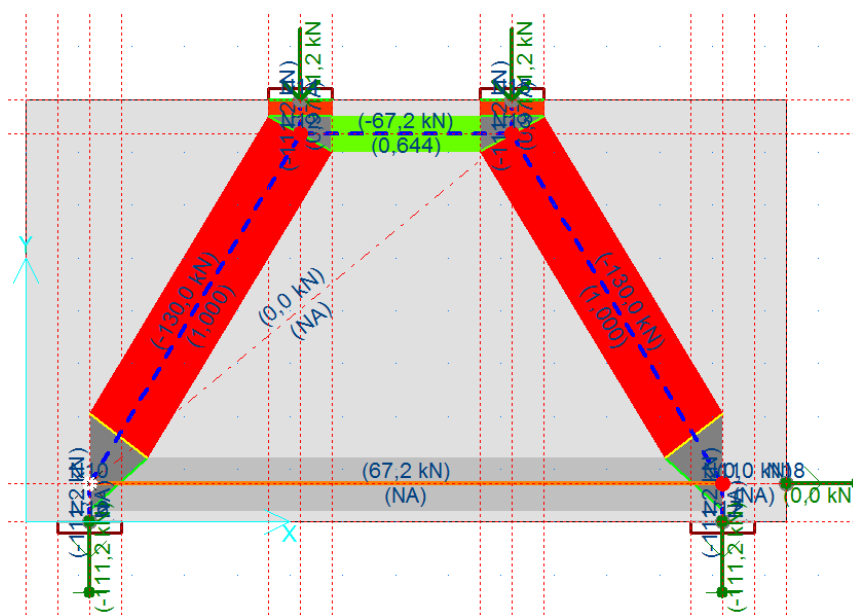


Figura 6.7 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do ACI (2008).

Tabela 6.5 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do ACI (2008).

ID	l (mm)	θ (°)	F (KN)	f _{ce} (Mpa)	w _{mín} (mm)	w _{eff} (mm)	f _u (Mpa)	f_u/f_{ce}	□
E12	773,50	58,86	-130,00	9,49	137,00	137,00	9,49	1,000	ACI BS
E13	400,00	0,00	-67,20	15,81	42,50	66,00	10,18	0,644	ACI PS
E15	66,00	90,00	-111,20	9,49	177,30	120,00	9,27	0,977	ACI BS

Tabela 6.6 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do ACI (2008).

Nó	Biela da interface	F (KN)	f _u (Mpa)	f _{ce} (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
N12	E12	-130,00	9,49	15,81	0,600	ACI CCC
N12	E15	-111,20	9,27	15,81	0,585	ACI CCC
N12	E13	-67,20	10,18	15,81	0,644	ACI CCC
N10	E11	67,20	6,72	12,65	0,531	ACI CCT
N10	E12	-130,00	9,49	12,65	0,750	ACI CCT

Aplicando os fatores do CEB-FIP MC (2010), a carga última calculada é de $P_u = 165,2 \text{ KN}$. As tabelas 6.7 e 6.8 contêm mais informações a respeito.

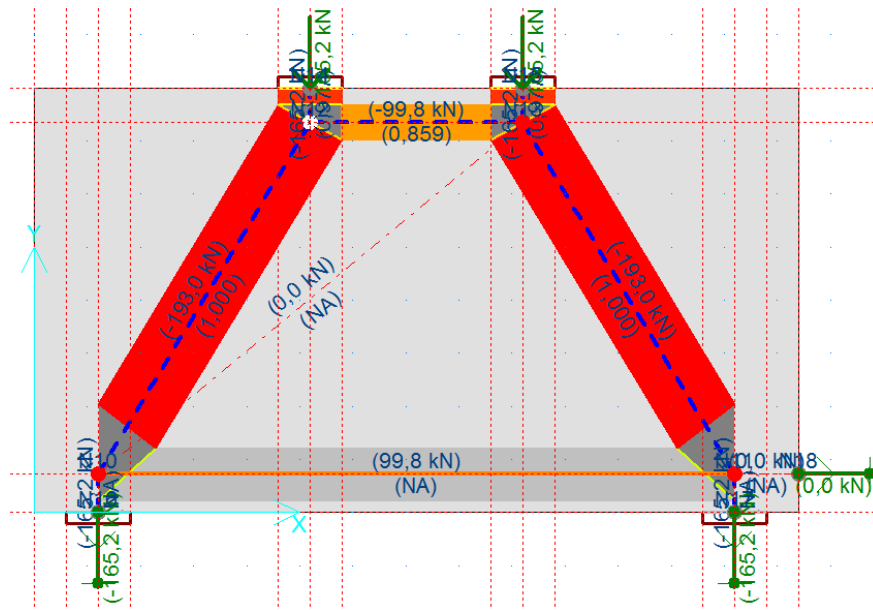


Figura 6.8 – Predição da carga última da viga A1 com MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Tabela 6.7 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

ID	l (mm)	θ (°)	F (KN)	f_{ce} (Mpa)	w_{min} (mm)	w_{eff} (mm)	f_u (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
E12	773,50	58,86	-193,00	14,09	137,00	137,00	14,09	1,000	CEB-2010-BS
E13	400,00	0,00	-99,80	17,61	56,70	66,00	15,12	0,859	CEB-2010-PS
E15	66,00	90,00	-165,20	14,09	117,30	120,00	13,76	0,977	CEB-2010-BS

Tabela 6.8 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A1 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Nó	Biela da interface	F (KN)	f_u (Mpa)	f_{ce} (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
N12	E12	-193,00	14,09	17,61	0,800	CEB-CCC
N12	E15	-165,20	13,76	17,61	0,782	CEB-CCC
N12	E13	-99,80	15,12	17,61	0,859	CEB-CCC
N10	E11	-99,80	9,98	14,09	0,709	CEB-CCT
N10	E12	-193,00	14,09	14,09	1,000	CEB-CCT

6.2.2. Viga A2 de Guimarães (1980).

Da mesma maneira que se procedeu para a viga A1, procedeu-se para A2. Nesta mesma ordem, modelou-se a geometria de Zhang & Tan (2007), com fatores do ACI e do CEB-FIP e em seguida, a geometria de Won *et al.* (1995). Na primeira análise, obteve-se $P_u = 98,5$ KN.

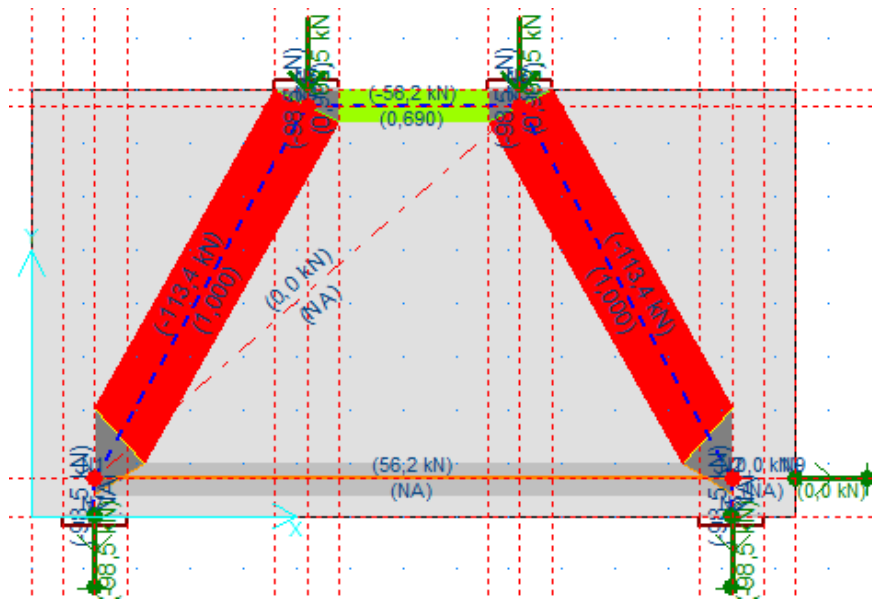


Figura 6.9 – Predição da carga última da viga A2 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).

Tabela 6.9 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).

ID	l (mm)	θ (°)	F (KN)	f_{ce} (Mpa)	w_{min} (mm)	w_{eff} (mm)	f_u (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
E3	807,40	60,30	-113,40	8,53	133,00	132,95	8,53	1,000	ACI BS
E6	400,00	180,00	-56,20	14,22	39,50	57,24	9,81	0,690	ACI PS
E4	28,60	90,00	-280,00	8,53	115,50	120,00	8,21	0,962	ACI BS

Tabela 6.10 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do ACI (2008).

Nó	Biela da interface	F (KN)	f_u (Mpa)	f_{ce} (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
N1	E1	-56,20	11,37	9,81	0,863	ACI CCT
N1	E3	-113,40	11,37	8,53	0,750	ACI CCT
N4	E3	-113,40	14,22	8,53	0,600	ACI CCC
N4	E6	-56,20	14,22	9,81	0,690	ACI CCC

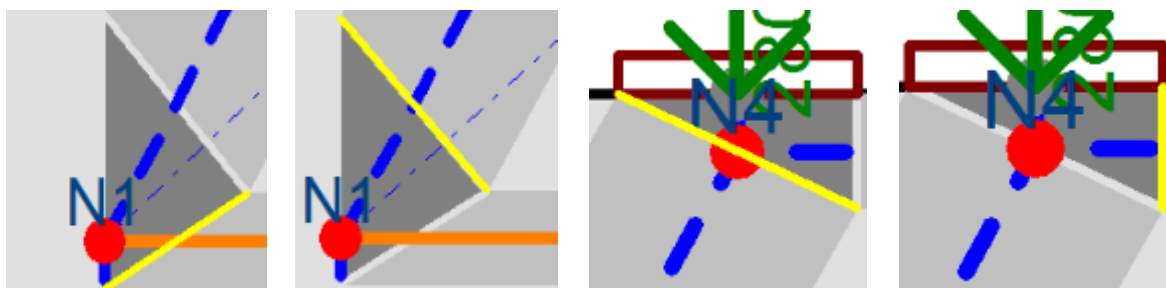


Figura 6.10 – Identificação do nós:

(a)N1-E1;

(b) N1-E3;

(c) N4-E3;

(d) N4-E6.

Aplicando os fatores do CEB-FIB MC (2010), a carga última calculada é de $P_u = 109,60$ KN, enquanto que a carga última analítica encontrada por este modelo foi de 223,71 KN, representando uma razão de 0,46 entre carga calculada e carga experimental.

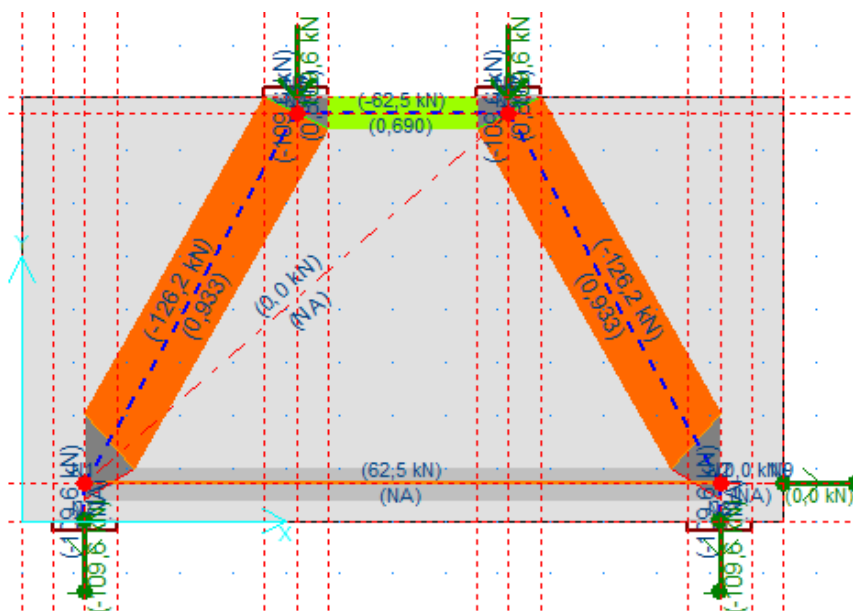


Figura 6.11 – Predição da carga última da viga A2 com MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Tabela 6.11 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

ID	l (mm)	θ (°)	F (KN)	f_{ce} (Mpa)	w_{min} (mm)	w_{eff} (mm)	f_u (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
E3	807,40	60,30	-126,20	10,17	124,10	132,95	9,49	0,933	CEB-BS
E6	400,00	180,00	-62,50	15,83	39,50	57,24	10,92	0,690	CEB-PS
E4	28,60	90,00		10,17	107,80	120,00	9,13	0,898	CEB-BS

Onde:

f_{ce} – tensão máxima suportada pelo concreto conforme fatores de eficiência

aplicados, dada por: $f_{ce} = \frac{\nu f_c'}{1,4}$;

BS – *bottle-shaped strut* – biela em forma de garrafa: $\nu = 0,75 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 0,8$

PS – *prismatic strut* – biela prismática: $\nu = 1,0 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 1,0$

Tabela 6.12 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Zhang & Tan (2007) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Nó	Biela da interface	F (KN)	f_u (Mpa)	f_{ce} (Mpa)	f_u/f_{ce}	ν
N1	E1	-126,20	10,92	9,49	0,869	CEB-CCT
N1	E3	-62,50	10,92	10,92	1,000	CEB-CCT
N4	E3	-126,20	15,83	9,49	0,599	CEB-CCC
N4	E6	-62,50	15,83	10,92	0,690	CEB-CCC

Onde:

CEB-CCC – $\nu = 1,0 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 1,0$

CEB-CCT – $\nu = 0,75 \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} = 0,8$

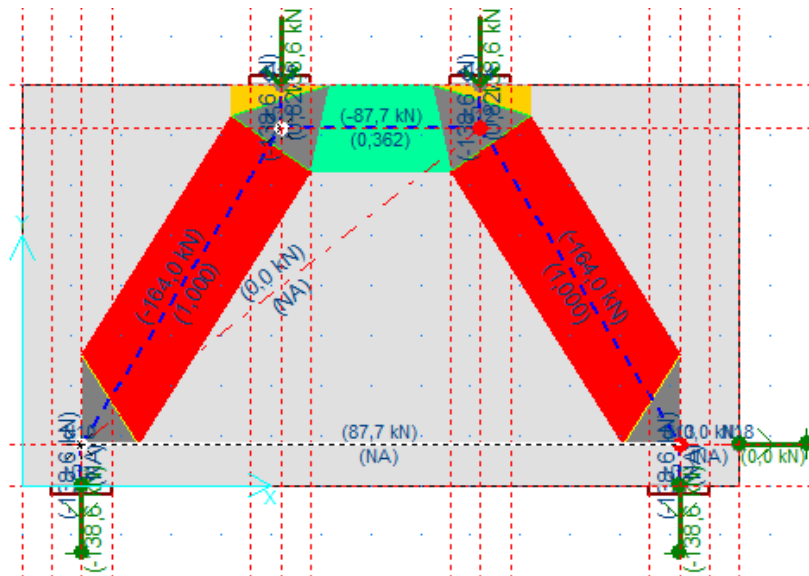


Figura 6.12 – Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do ACI (2008).

Analiticamente, encontrou-se $P_u = 270,01$ kN, uma vez que o modelo não pode ser aplicado de forma mais realista, permitindo considerar variações na espessura da biela inclinada junto ao nó CCC e junto ao nó CCT. O programa subestima bastante a resistência do elemento, tendo sido encontrada uma carga última de apenas 138,60 kN, representando um razão entre carga calculada e carga experimental de 0,58.

Tabela 6.13 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do ACI (2008).

ID	l (mm)	θ (°)	F (kN)	f_{ce} (Mpa)	w_{\min} (mm)	w_{eff} (mm)	f_u (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
E11	748,20	57,68	-164,00	8,53	192,30	192,26	8,53	1,000	ACI BS
E14	400,00	0,00	-87,70	14,22	61,70	170,19	5,15	0,362	ACI PS
E16	85,10	90,00	-138,60	8,53	162,50	196,50	7,05	0,827	ACI BS

Tabela 6.14 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do ACI (2008).

Nó	Biela da interface	F (kN)	f_u (Mpa)	f_{ce} (Mpa)	f_u/f_{ce}	v
N10	E11	-164,00	11,37	8,53	0,750	ACI CCT
N11	E11	-164,00	14,22	8,53	0,600	ACI CCC
N11	E14	-87,70	14,22	5,15	0,362	ACI CCC
N11	E16	-138,60	14,22	7,05	0,496	ACI CCC

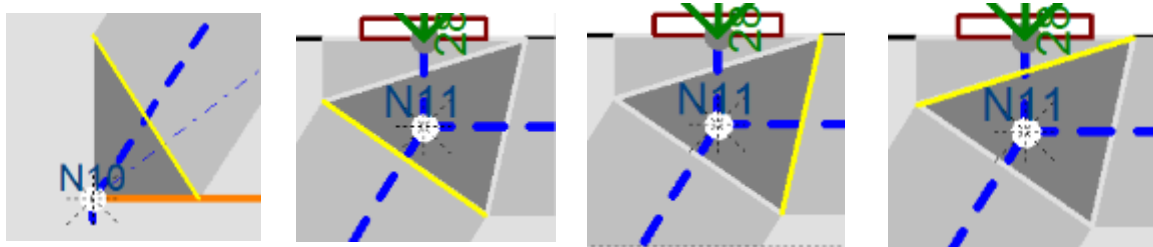


Figura 6.13 – Identificação do nós:

- (a) N10-E11; (b) N11-E11; (c) N11-E14; (d) N11-E16.

Alterando os fatores de eficiência do concreto para o CEB-FIB MC (2010), mantendo o mesmo MBT tem-se o cenário mostrado na figura 6.14 e carga última calculada de 165,20 kN, correspondente a uma razão de 0,612 entre a carga calculada e carga experimental.

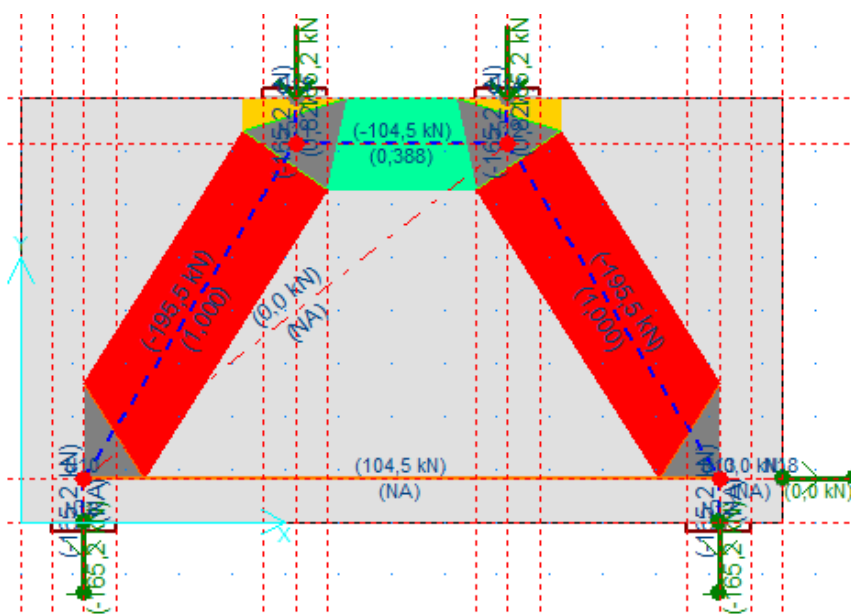


Figura 6.14 – Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Tabela 6.15 - Tensões nas bielas na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

ID	l (mm)	θ (°)	F (KN)	f_{ce} (Mpa)	w_{min} (mm)	w_{eff} (mm)	f_u (Mpa)	$\frac{f_u}{f_{ce}}$	v
E11	748,20	57,68	-195,50	10,17	192,30	192,26	10,17	1,000	CEB-2010-BS
E14	400,00	0,00	-104,50	15,83	66,00	170,19	6,14	0,388	CEB-2010-PS
E16	85,10	90,00	-165,20	10,17	162,50	196,50	8,41	0,827	CEB-2010-BS

Tabela 6.16 - Tensões nos nós na predição da carga última da viga A2 – MBT de Won *et al.* (1995) e fatores do CEB-FIP MC (2010).

Nó	Biela da interface	F (KN)	f_u (Mpa)	f_{ce} (Mpa)	$\frac{f_u}{f_{ce}}$	v
N10	E11	-195,50	10,92	10,17	0,931	CEB-CCT
N11	E11	-195,50	15,83	10,17	0,600	CEB- CCC
N11	E14	-104,50	15,83	6,14	0,388	CEB-CCC
N11	E16	-165,20	15,83	8,41	0,531	CEB- CCC

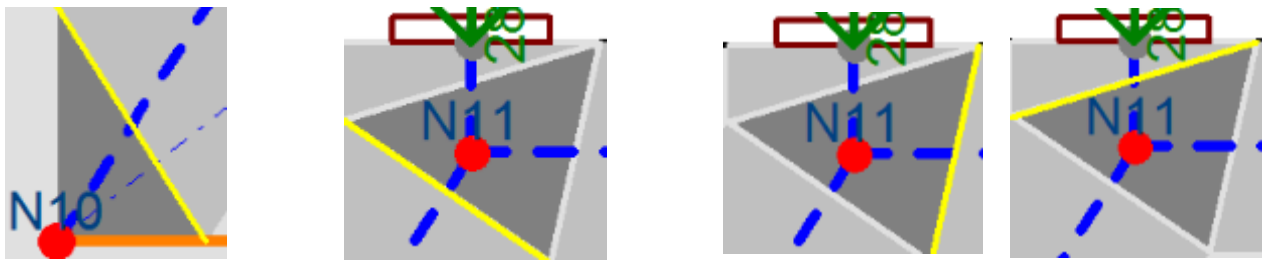


Figura 6.15 – Identificação do nós:

(a) N1-E3;

(b) N1-E1;

(c) N4-E3;

(d) N4-E6.

6.3. Resultados com o MTA.

Serão apresentados a seguir os resultados obtidos com o software *Micro-truss Analyzer*. Inicialmente, serão feitas algumas considerações gerais relativas às funções do software e algumas generalidades que valem para todos os exemplos analisados.

A figura 6.16 mostra as ferramentas para desenho do MTA e para atribuição das propriedades dos materiais e dos parâmetros da análise.

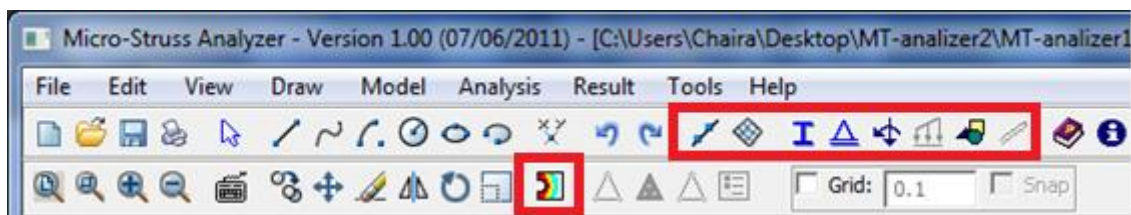








Figura 6.16 – Barra de ferramentas do MTA.

As funções dos principais botões são explicadas abaixo:

-  Divide o elemento de barra em uma quantidade de outros elementos ou em elementos de um tamanho determinado pelo usuário – figura 6.17.
-  Gera a malha de acordo com as subdivisões dos elementos de malha informados pelo usuário.
-  Definição dos parâmetros globais da análise – figura 6.18.
-  Definição das condições de apoio – figura 6.19.
-  Definição do carregamento – figura 6.20.
-  Atribuição das propriedades do concreto.



Atribuição das propriedades do aço.



Gravação/atualização do arquivo de saída de extensão *.dat*.

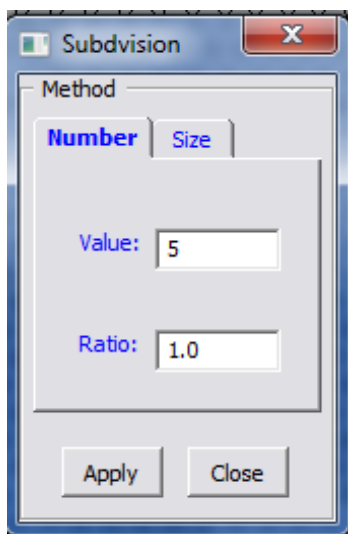


Figura 6.17 – Definição do refinamento da malha.



Figura 6.18 – Definição dos parâmetros globais.

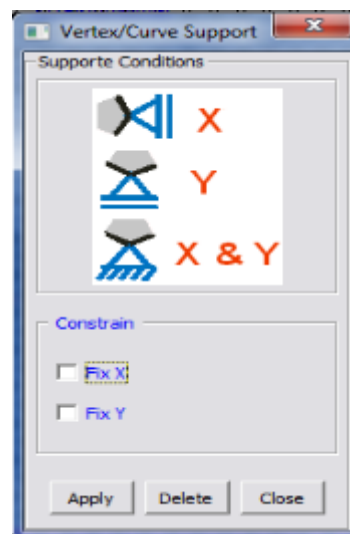


Figura 6.19 – Definição das condições de apoio.

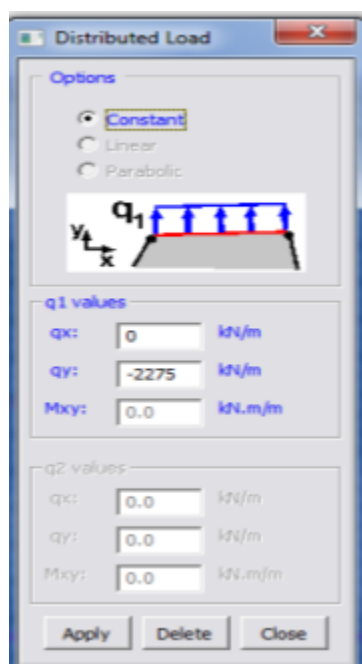


Figura 6.20 – Definição do carregamento.

A quantidade ou tamanhos das subdivisões dos elementos variou em cada análise e em cada exemplo, assim como a geração da malha; os parâmetros globais também variaram para cada análise. Todos os exemplos foram considerados biapoiados, representando a

condição geral dos ensaios experimentais e os carregamentos foram supostos distribuídos em uma área equivalente a placa de apoio que efetuara a distribuição do carregamento no ensaio experimental e o valor da carga aplicada, para todos os exemplos, foi superior a carga última experimental. As propriedades dos materiais variaram em cada exemplo e foram descritas no capítulo 5, com exceção dos parâmetros do modelo de dano que são comentados ao longo deste capítulo.

A janela acima na figura 6.18 mostra a definição dos parâmetros globais da análise. São definidas quantidade de passos, quantidade máxima de iterações, tolerância para convergência, nó de controle, direção do nó de controle, dois nós para plotagem dos dados de deslocamento, um nó que esteja sob carregamento e quatro passos para que se efetue a plotagem dos resultados gráficos do pós-processamento. Para todos os exemplos, adotou-se como nó para o deslocamento, um nó em posição semelhante ou igual ao ponto instrumentado na análise experimental que gerou a curva “carga x deslocamento” original. A propósito, só foi analisado o deslocamento vertical para um nó de deslocamento correspondente ao nó instrumentado nas vigas ensaiadas. E para o nó de carga, considerou-se um ponto médio na área de aplicação da carga.

Inicialmente, serão apresentados os resultados com a viga A2, pois serviram de base para a análise da viga A1.

6.3.1. Viga A2 de Guimarães (1980).

A geometria da viga foi desenhada no software de forma a respeitar as condições reais que existiram no ensaio e o posicionamento adotado das barras de aço buscou representar com fidelidade a distribuição adotada na viga concretada e ensaiada por Guimarães (1980), adotando os mesmos espaçamentos.

De forma que já foi comentado sobre definições de condições de apoio e carregamento, serão apresentadas a seguir as propriedades dos materiais. A tabela abaixo mostra a atribuição das propriedades mecânicas do concreto para este exemplo no MTA e em seguida, a atribuição das propriedades mecânicas do aço. Foram usados os mesmos valores e parâmetros utilizados e recomendados por Fernandes (2010), conforme foi explicado no capítulo 5.

Tabela 6.17 - Propriedades atribuídas à viga A2 no MTA.

Concreto			Aço		
E	22,48	GPa	E	212,5	GPa
ν	0,20		ν	0,30	
f_o^+	2,23	MPa	σ_y	582	
f_o^-	10	MPa	H	1	GPa
A	1		A_s	0,00015	m ²
B	0,744				
f_{o_2D}/f_{o_1D}	0,1714				
G_f	150	KN/m			
b	0,1	m			

Após a definição dentro do ambiente gráfico do MTA das propriedades dos materiais, geração da malha, definição de carregamento e condições de apoio e definição dos parâmetros globais da análise, é gerado um cabeçalho conforme tabela 6.18. As linhas geradas são lidas pelo software **1-damage.exe** que realiza o processamento conforme os dados de entrada informados. Na tabela 6.19 é mostrada a leitura de cada variável informada pelo MTA e a sub-rotina correspondente do **1-damage**.

Tabela 6.18 – Modelo de cabeçalho do programa *Micro-truss Analyzer*.

{Identificação das variáveis}:

Micro-truss generated by Quebra2D

mesh: nn plane truss

1D isotropic damage model with two scalar damage variables

run from Quebra2D objectivity

nn ne nbn nmat ninc niteq niteqd toleq n_ct ndim k_cut kined idef ialgo

arcl arcmax arcmin iarc node_rt n_dir

Tabela 6.19 – Variáveis, valores e sub-rotinas correspondentes.

Abr.	Tradução	Valor	Sub-rotina
nn	Quantidade de nós	543	Depende do modelo.
ne	Quantidade de elementos	1619	Depende do modelo.
nbn	Quantidade de nós com condição de suporte	6	Depende do modelo.
nmat	Quantidade de materiais	2	Depende do modelo.
ninc	Quantidade de passos de carga	1000	Depende do modelo.
niteq	Quantidade máxima de iterações	5	Depende do modelo.
niteqd	Quantidade desejada de iterações	2	Depende do modelo.
toleq	Tolerância para convergência	1.0e-003	Depende do modelo.
n_ct	Procedimento para solução	2	Controle de deslocamento constante.
arcl	Tamanho inicial do comprimento de arco	-2.0e-6	Depende do modelo.
arcmax	Tamanho máximo do comprimento de arco	-2.0e-5	Depende do modelo.
arcmin	Tamanho mínimo do comprimento de arco	-2.0e-7	Depende do modelo.
iarc	Tipo de comprimento de arco	0	Comprimento de arco constante.
node_rt	Nó de controle	343	Depende do modelo.
n_dir	Direção do nó de controle	2	Depende do modelo
n_dim	Tipo de elemento	2	Elemento de Treliça 2D.
k_cut	Número máximo de cortes automáticos	5	
kined	Descrição cinemática	1	Formulação Lagrangeana Total.
idef	Tipo de deformação	1	$\frac{l - l_0}{l_0}$
ialgo	Método de solução não-linear	3	Método Implex.

Na primeira fase da análise variou-se a posição dos nós de controle visando obter o nó mais estável. Na figura 6.21 é mostrada a localização dos nós analisados, onde em azul têm-se os nós de carregamento, em verde, os nós de deslocamento e em vermelho, os nós de controle e na tabela 6.20 é apresentado um resumo da análise.

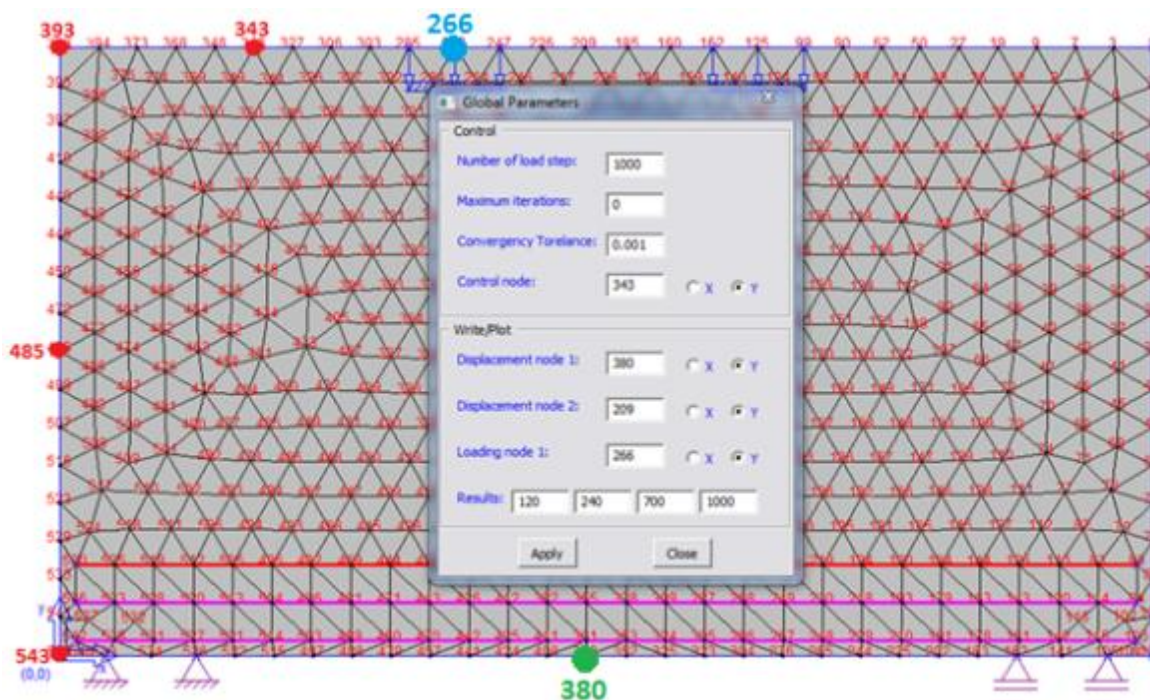


Figura 6.21 – Localização dos nós analisados da viga A2.

Tabela 6.20 – Resumo da análise AN1V2.

Análise AN1V2					
Quantidade de elementos:	543	543	543	543	543
Tamanho dos elementos:	50	50	50	50	50
Quantidade de passos de carga:	1000	2000	2000	2000	2000
	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6
Comprimentos de arco:	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5
	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7
Nó de controle:	343	343	393	485	543
Carga última (KN):	439,24	439,00	649,00	651,00	599,00
Deslocamento máximo (mm):	8,081	18,385	21,098	22,968	21,060

Segue abaixo o gráfico “carga x deslocamento” da análise AN1V2 efetuada – figura 6.22.

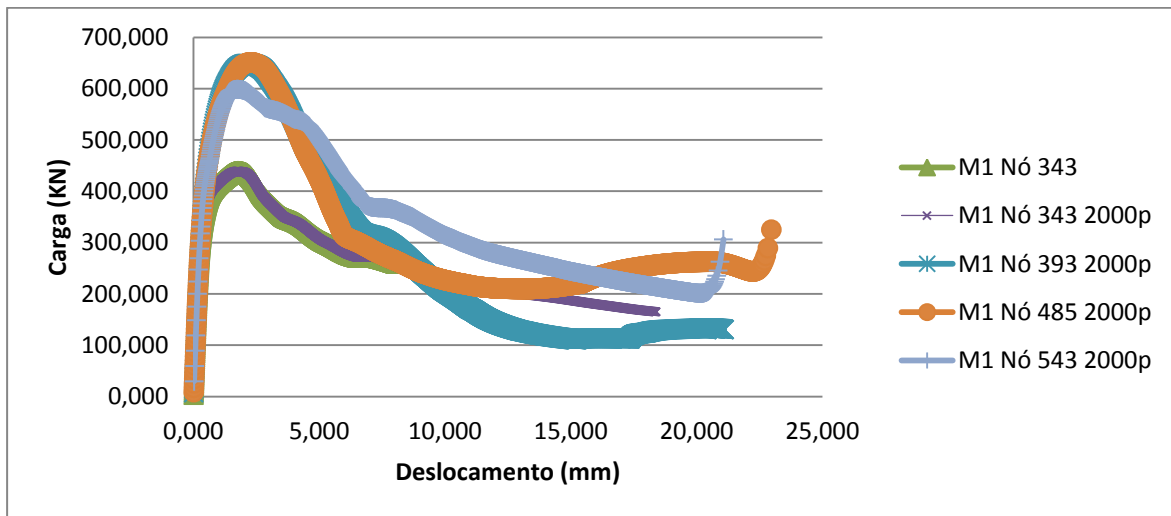


Figura 6.22 – Resultado da análise AN1V2.

Os resultados mostram que as análises efetuadas com o nó de controle 343, localizado a 250 mm de distância da extremidade esquerda da viga, apresentaram maior estabilidade, pois convergiram em todas as iterações. Desta forma, adotou-se essa posição como padrão para o nó de controle. Os nós 485 e 543 não apresentaram bons resultados pois devido a sua localização, deslocaram-se em outro sentido que não o que foi parametrizado no programa.

Em seguida foi feita a análise AN2V2 em função do refinamento da malha e da quantidade de iterações. Refinou-se a malha em subdivisões de 25 mm e adotou-se o nó de controle fixo na posição mais estável, que corresponde ao nó 1208 para a nova malha. Variou-se a quantidade de passos de carga em 2.000, 5.000 e 9.000; em função do aumento dessa quantidade, também se diminuiu o tamanho passo. A tabela 6.21 apresenta um resumo da análise efetuada.

Tabela 6.21 – Resumo da análise AN2V2.

Análise AN2V2			
Quantidade de elementos:	2041	2041	2041
Tamanho dos elementos:	25	25	25
Quantidade de passos de carga:	2000	5000	9000
	-2.0e-6	-2.0e-7	-2.0e-7
Comprimentos de arco:	-2.0e-5	-2.0e-6	-2.0e-6
	-2.0e-7	-2.0e-8	-2.0e-8
Nó de controle:	1208	1208	1208
Carga última (KN):	572,00	354,00	354,00
Deslocamento máximo (mm):	11,507	0,615	0,615

Segue abaixo o gráfico “carga \times deslocamento” da análise AN2V2 efetuada – figura 6.23. As análises com 5.000 e 9.000 passos coincidiram devido ao mesmo comprimento de arco utilizado.

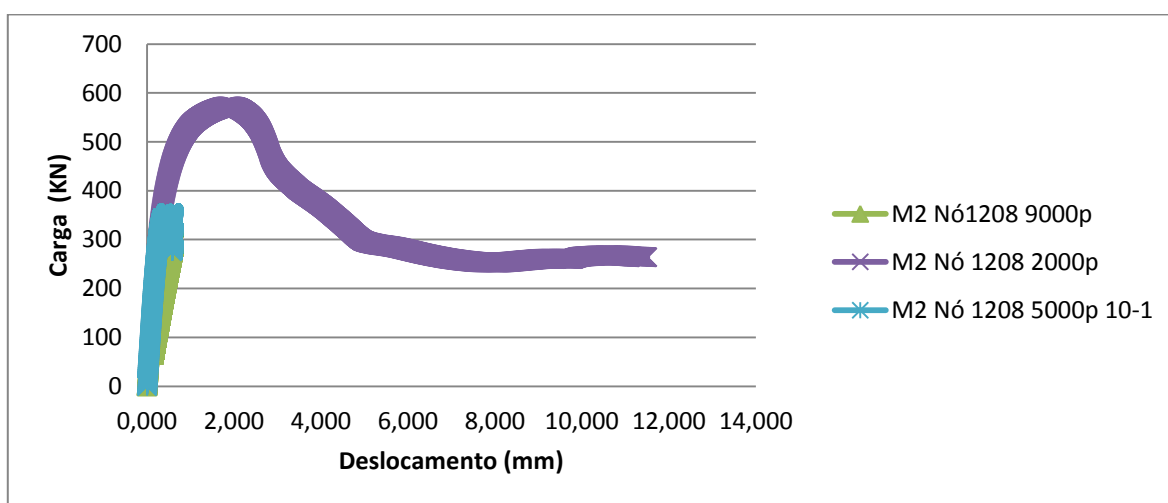


Figura 6.23 – Resultado da análise AN2V2.

6.3.2. Viga A1 de Guimarães (1980).

Conforme explicitado anteriormente, a análise dos nós de controle efetuada para a viga A2 serviu de base para a escolha do nó de controle na viga A1. Devido a análise efetuada em relação ao nó de controle de maior estabilidade do modelo efetuada para viga A2, repetiu-se a mesma localização para a viga A1, discretizada com a malha subdividida em elementos

de 50 mm. A tabela 6.22 apresenta as propriedades dos materiais e os parâmetros do modelo de dano.

Tabela 6.22 – Propriedades atribuídas a viga A1 no MTA.

Concreto			Aço		
E	23,70	GPa	E	212,5	GPa
ν	0,20		ν	0,30	
f_o^+	2,40	MPa	σ_y	534	
f_o^-	12,0	MPa	H		
A	1		A_s	9,89x10-4	m ²
B	0,744				
f_{o_2D}/f_{o_1D}	0,1714				
G_f	150	KN/m			
b	0,1	m			

Na primeira análise estudou-se a influência da malha comparando uma malha de 50 mm e outra de 25 mm, conforme resumo da análise na tabela 6.23; com os nós de controle localizados nas posições conforme figuras 6.24 para a primeira malha e conforme figura 6.25 para a segunda. Vale a mesma legenda, onde em azul são representados os nós de carregamento, em verde, os nós de deslocamento e em vermelho, os nós de controle.

Tabela 6.23 – Resumo da análise AN1V1.

Análise AN1V1				
Quantidade de elementos:	550	2058	2058	2058
Tamanho dos elementos:	50	25	25	25
Quantidade de passos de carga:	2000	2000	5000	9000
	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-7	-2.0e-7
Comprimentos de arco:	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-6	-2.0e-6
	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-8	-2.0e-8
Nó de controle:	333	1207	1207	1207
Carga última (KN):	400,00	506,00	346,00	346,00
Deslocamento máximo (mm):	14,826	10,729	1,222	1,369

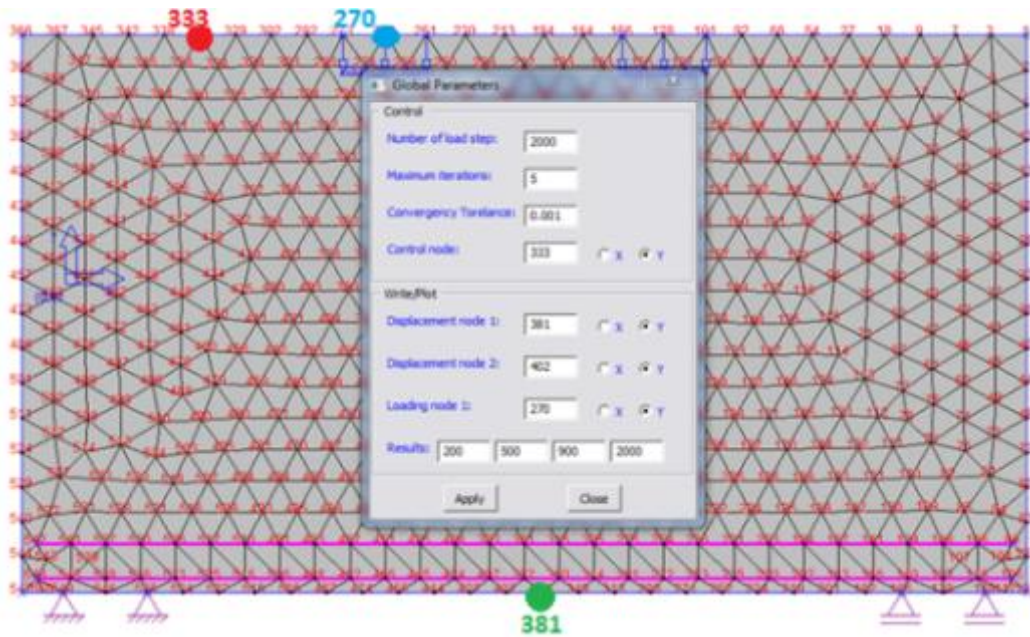


Figura 6.24 – Localização dos nós analisados da viga A1 malha M1.

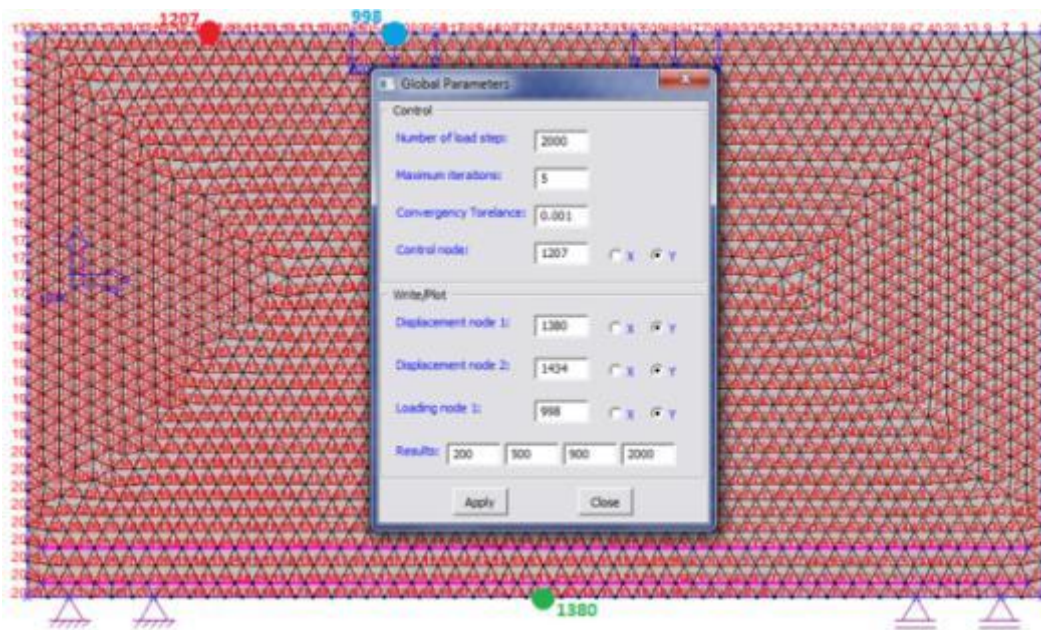


Figura 6.25 – Localização dos nós analisados da viga A1 malha M2.

A figura 6.26 apresenta o gráfico “carga x deslocamento” da análise AN1V1. As análises para 5.000 e 9.000 passos coincidiram devido ao mesmo comprimento de arco utilizado.

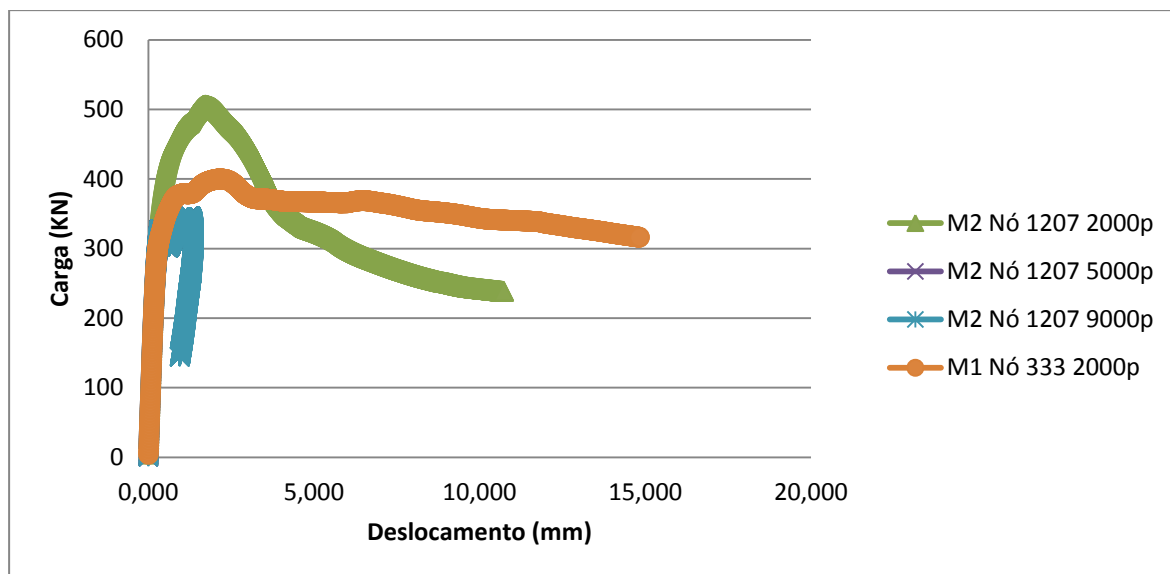


Figura 6.26 – Localização dos nós analisados da viga A1 malha M2.

6.3.3. Viga V5 de Rogowsky *et al.* (1983).

A tabela 6.24 apresenta as propriedades dos materiais e os parâmetros do modelo de dano atribuídos a viga V5 no MTA:

Tabela 6.24 – Propriedades atribuídas a viga V5 no MTA.

Concreto			Aço		
E	21,60	GPa	E	198,50	GPa
ν	0,20		ν	0,30	
f_0^+	2,40	MPa	σ_y	534	
f_0^-	12,0	MPa	H		
A	1		A_s	$5,76 \times 10^{-4}$	m^2
B	0,744				
f_{0_2D}/f_{0_1D}	0,1714				
G_f	150	KN/m			
b	0,2	m			

A análise inicial visou determinar o nó de controle mais estável para dar continuidade às simulações. A figura 6.27 mostra a localização dos nós de controle analisados, nós de carregamento e de deslocamento e a tabela 6.25 apresenta o resumo da análise AN1V5.

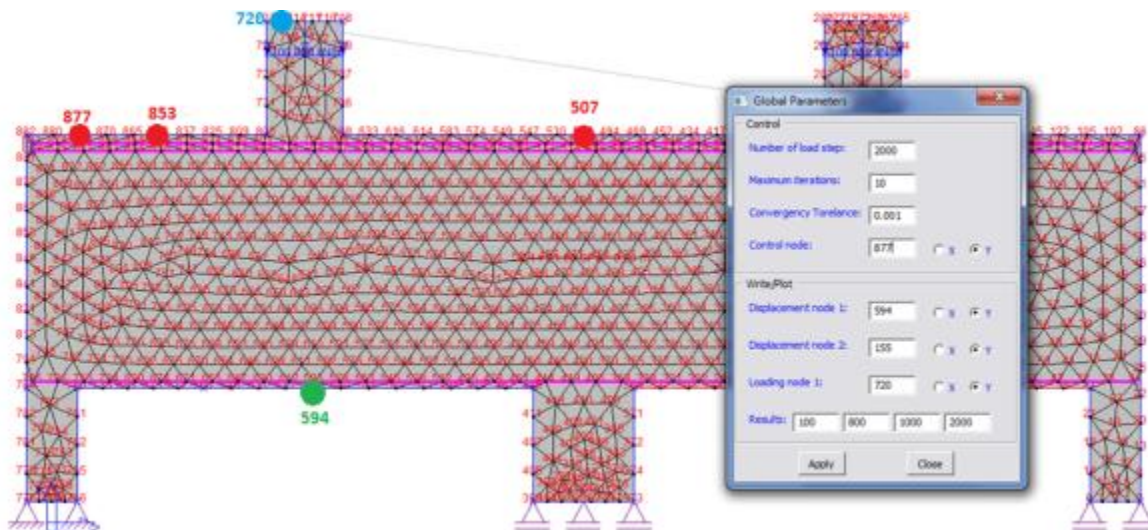


Figura 6.27 – Localização dos nós analisados da viga V5 – malha M1.

Tabela 6.25 – Resumo da análise AN1V5.

AN1V5				
Quantidade de elementos:	883	883	883	883
Tamanho dos elementos:	50	50	50	50
Quantidade de passos de carga:	2000	2000	2000	2000
	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6
Comprimentos de arco:	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5
	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7
Nó de controle:	877	507	594	853
Carga última (KN):	794,77	736,38	745,43	768,27
Deslocamento máximo (mm):	3,129	5,958	4,00	3,379

Conforme resultado apresentado na figura 6.28, foi adotado o nó 507 (localizado no meio da viga) como o nó de controle padrão, pois apresentou deslocamento uniforme de acordo com o sentido e direção parametrizados no programa.

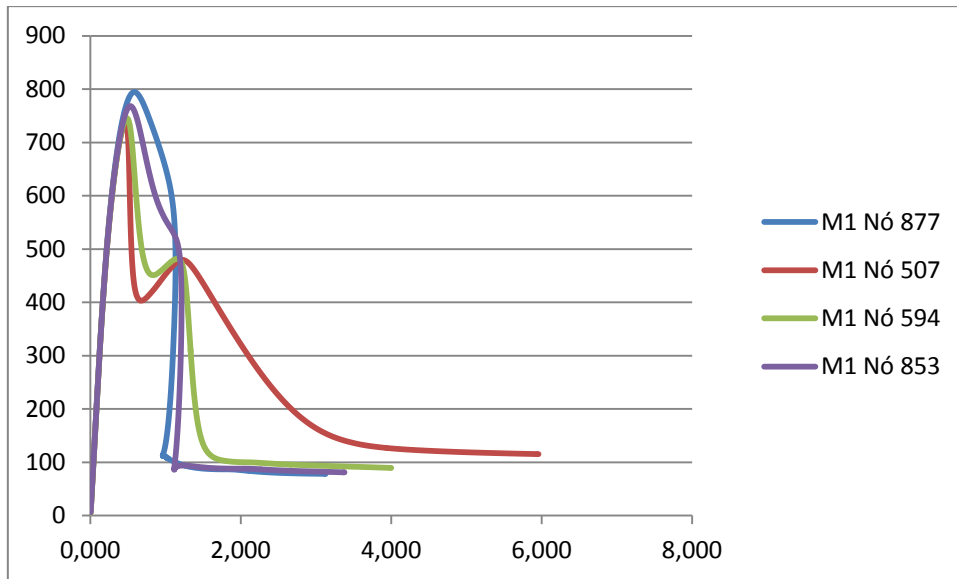


Figura 6.28 – Resultado da análise AN1V5.

Efetuuou-se ainda um estudo com o nó de controle 507 no sentido de investigar a influência da diminuição do tamanho do comprimento de arco e do aumento da quantidade de iterações, conforme tabela 6.26.

Tabela 6.26 – Resumo da análise AN2V5.

Análise AN2V5		
Quantidade de elementos:	883	883
Tamanho dos elementos:	50	50
Quantidade de passos de carga:	8000	2000
	-2.0e-7	-2.0e-6
Comprimentos de arco:	-2.0e-6	-2.0e-5
	-2.0e-8	-2.0e-7
Nó de controle:	507	507
Carga última (KN):	690,74	736,38
Deslocamento máximo (mm):	0,625	5,958

Conforme figura 6.29 abaixo, esta análise esclareceu que o aumento da quantidade de passos de carga juntamente com a diminuição dos comprimentos de arco levaram a uma maior proximidade do resultado experimental, em termos de carga última. No entanto, o deslocamento foi bastante reduzido devendo ser utilizada uma quantidade maior de passos de carga para melhores resultados.

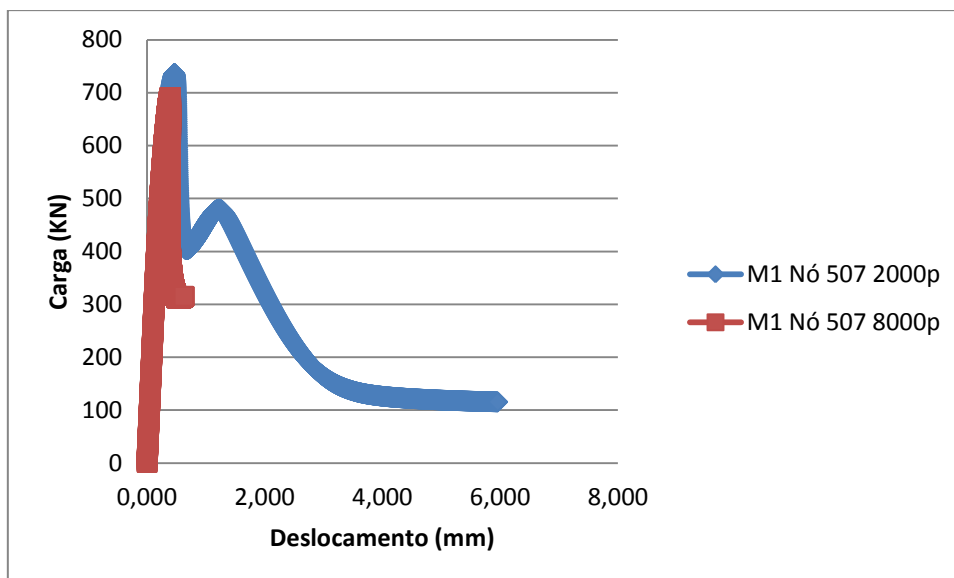


Figura 6.29 – Resultado da análise AN2V5.

6.3.4. Viga R-1b de Melo (2011).

A tabela 6.27 apresenta às propriedades dos materiais e os parâmetros do modelo de dano atribuídos a viga S8 no MTA.

Tabela 6.27 – Propriedades atribuídas a viga S8 no MTA.

Concreto			Aço		
E	35,47	GPa	E	114,77	GPa
ν	0,20		ν	0,30	
f_0^+	4,40	MPa	σ_y	346,39	
f_0^-	13,04	MPa	H		
A	1		A_s	$8,00 \times 10^{-6}$	m^2
B	0,744				
f_{0_2D}/f_{0_1D}	0,1714				
G_f	72,43	KN/m			
b	0,05	m			

Este exemplo analisado apresentou resultados experimentais do concreto bastante satisfatórios, tendo sido determinado experimentalmente o módulo de elasticidade e a energia de fratura.

Inicialmente, a viga foi discretizada em elementos de 6,25 mm e foi feita a análise dos nós de controle, conforme identificado na figura 6.30, onde em azul encontra-se o nó de carga, em verde, o nó de deslocamento e em vermelho, os nós de controle.

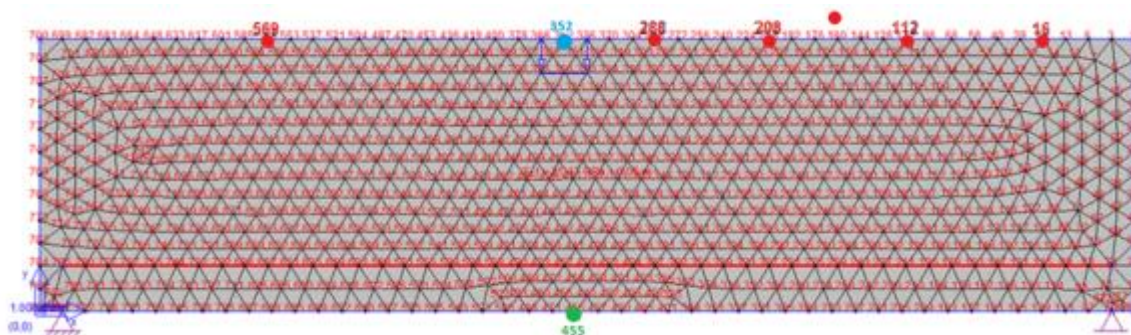


Figura 6.30 – Malha da viga R-1b e localização dos nós principais.

A tabela 6.28 apresenta um resumo análise AN1R1B e a figura 6.31 a seguir apresenta os gráficos “carga \times deslocamento” desta análise.

Tabela 6.28 – Resumo da análise AN1R1B.

Análise AN1R1B					
Quantidade de elementos:	791	791	791	791	791
Tamanho dos elementos:	6,25	6,25	6,25	6,25	6,25
Quantidade de passos de carga:	2000	2000	2000	2000	2000
	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-6
Comprimentos de arco:	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-5
	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-7
Nó de controle:	569	288	208	112	16
Carga última (KN):	12,908	11,886	12,239	13,038	15,872
Deslocamento máximo (mm):	6,177	3,178	4,222	6,987	18,058

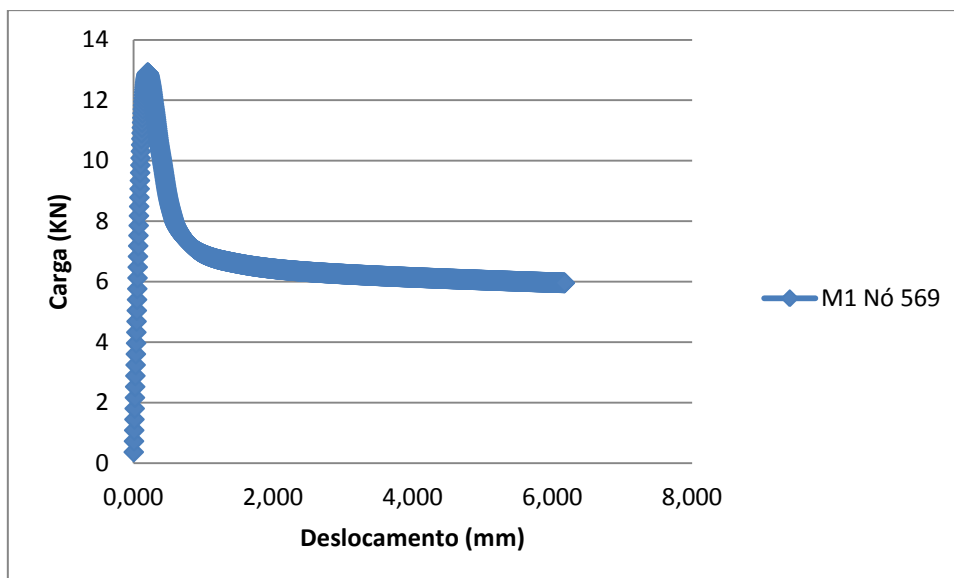


Figura 6.31 – Resultado da análise AN1R1B.

A tabela 6.29 resume o resultado da análise AN2R1B. Com exceção do nó 16, todos os nós convergiram e apresentaram o mesmo comportamento na curva. Fixou-se o nó 288 como nó de controle, localizado a uma distância do ponto de aplicação da carga de 3,75 cm e então variou-se a quantidade de iterações e comprimentos de arco de modo a refinar esse resultado encontrado, conforme tabela resumo 6.29.

Tabela 6.29 – Resumo da análise AN2R1B.

Análise AN2R1B				
Quantidade de elementos:	791	791	791	791
Tamanho dos elementos:	6,25	6,25	6,25	6,25
Quantidade de passos de carga:	5000	8000	12000	15000
	-2.0e-6	-2.0e-6	-2.0e-7	-2.0e-9
Comprimentos de arco:	-2.0e-5	-2.0e-5	-2.0e-6	-2.0e-8
	-2.0e-7	-2.0e-7	-2.0e-8	-2.0e-10
Nó de controle:	288	288	288	288
Carga última (KN):	11,886	11,886	9,747	9,165
Deslocamento máximo (mm):	7,640	11,698	1,745	0,253

Na figura 6.31 é apresentado o gráfico carga x deslocamento da análise AN2R1B.

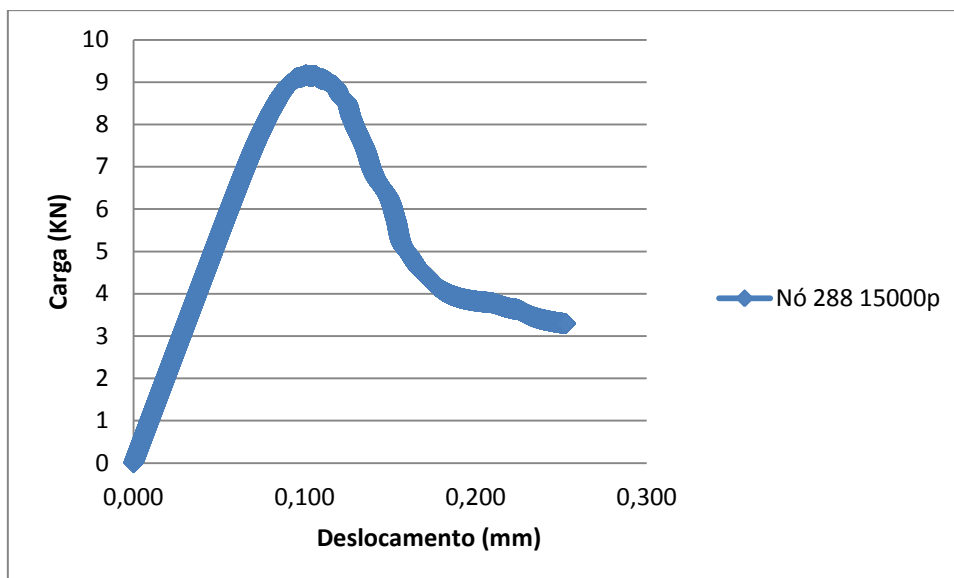


Figura 6.32 – Resultado da análise AN2R1B.

Refinando a malha, que antes estava subdividida em 6,25 mm, para 3,75 mm, o nó de controle passa a ser o 1136, a mesma distância de 37,5 mm de distância do ponto de aplicação da carga, mantendo a mesma carga, mesma posição do nó de carga e nó de deslocamento Conforme resumo mostrado na tabela 6.30, variou-se a quantidade de iterações e, conseqüentemente, diminuiu-se o comprimento de arco.

Tabela 6.30 – Resumo da análise AN3R1B.

Análise AN3R1B			
Quantidade de elementos:	3071	3071	3071
Tamanho dos elementos:	3,75	3,75	3,75
Quantidade de passos de carga:	2000	12000	18000
	-2.0e-6	-2.0e-7	-2.0e-8
Comprimentos de arco:	-2.0e-5	-2.0e-6	-2.0e-7
	-2.0e-7	-2.0e-8	-2.0e-9
Nó de controle:	1136	1136	1136
Carga última (KN):	13,352	10,694	9,780
Deslocamento máximo (mm):	3,379	1,976	0,362

A figura 6.33 mostra as curvas resultantes dessa análise.

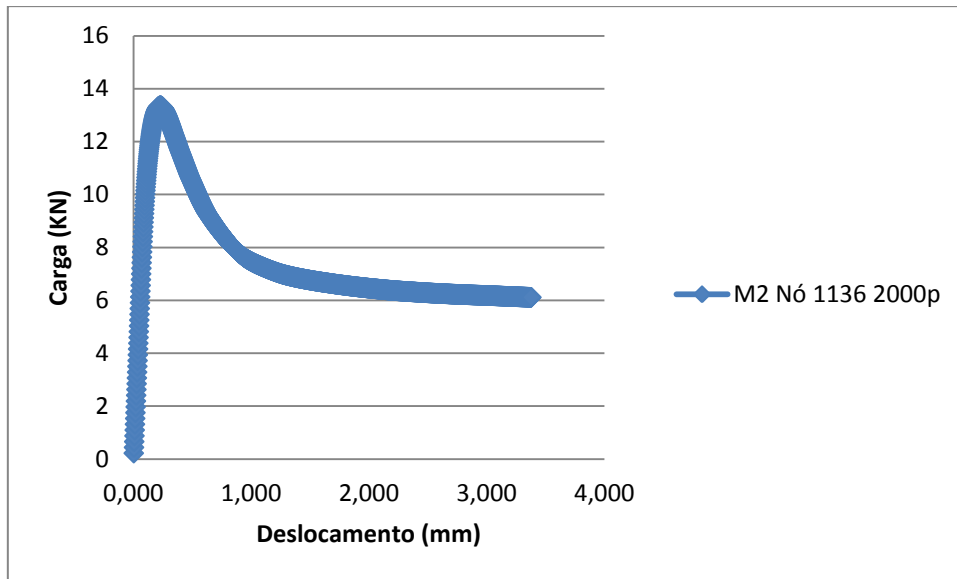


Figura 6.33 – Resultado da análise AN3R1B.

O melhor resultado obtido, em termos de carga última, apresentou uma razão entre carga calculada e carga experimental de 1,15, sendo a análise AN2R1B, com 15.000 passos de carga, malha M1 (6,25 mm), nó 288 e comprimento de arco da ordem de 10^{-7} . Refinar a malha para elementos de 3,75 mm não foi tão efetivo em termos de carga última e aumentou desnecessariamente o tempo de análise, devido ao aumento na quantidade de elementos.

7. PÓS-PROCESSAMENTO DAS ANÁLISES.

Para as análises mostradas a seguir são válidas as escalas de tensões das figuras 7.1 e 7.2, sendo a primeira aplicada às imagens relativas à distribuição de tensões e a segunda, relativa à distribuição do dano no elemento estrutural.

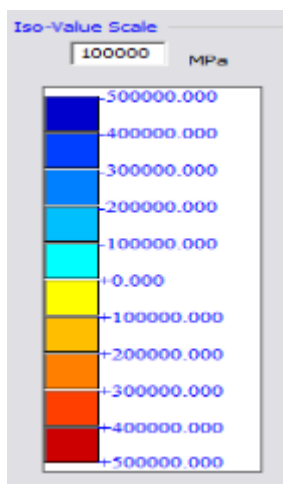


Figura 7.1 – Escala do nível de tensão para distribuição de tensões.

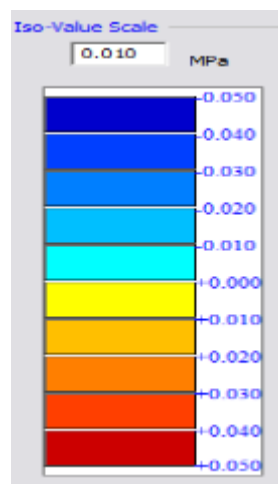


Figura 7.2 – Escala de nível de tensão para distribuição de dano.

7.1. Viga A1.

Serão apresentadas as imagens do pós-processamento da análise AN1V1, malha de 25 mm (M2) da viga A1, com 2.000 passos de carga. Inicialmente, tem-se a distribuição de tensões de compressão e tração para o primeiro passo de carga, ainda na fase elástica, e para o último passo de carga, situação em que a viga já não se encontra no domínio elástico. Finalizando com as imagens do dano a compressão e tração, juntamente com a deformada, aumentada em cinco vezes.

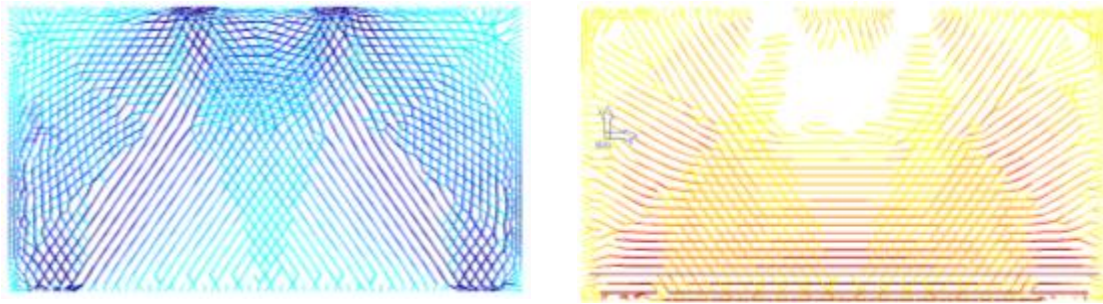


Figura 7.3 – Trajetória de tensões de (a) compressão e (b) tração para o passo inicial.

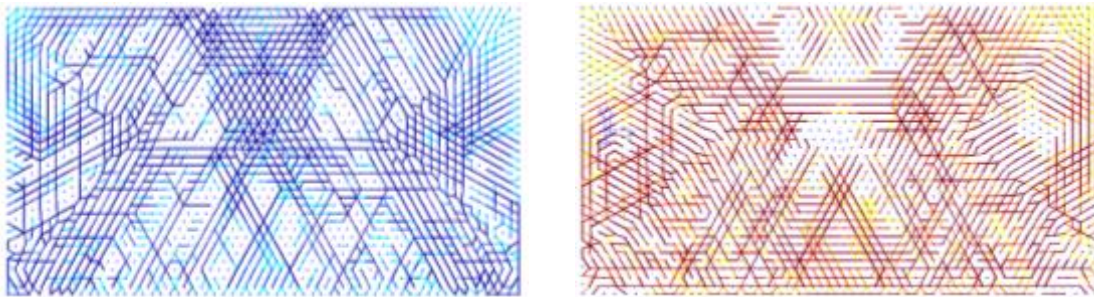


Figura 7.4 – Trajetória de tensões de (a) compressão e (b) tração para o último passo de carga.

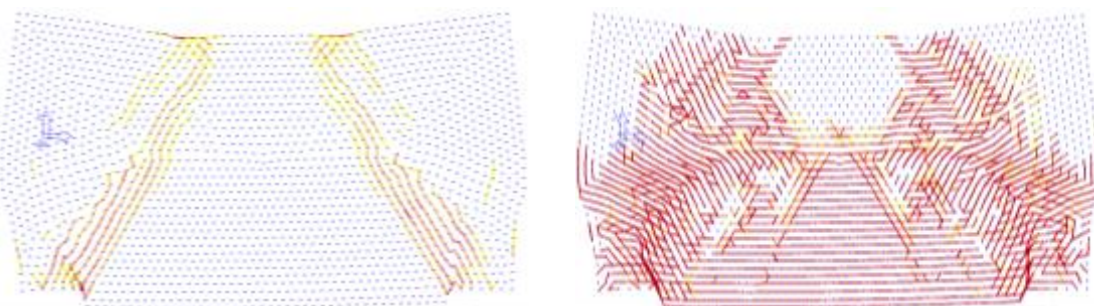


Figura 7.5 – Deformada + distribuição do dano a (a) compressão na Viga A1 e (b) a tração na Viga A1, para o último passo de carga (15x).

Analisando a foto da ruptura da viga A1, verifica-se que o modelo representou a tendência de formação de fissuras entre os apoios e ponto de aplicação da carga. No entanto, no resultado experimental tem-se que as fissuras tendem a encontrar-se no meio da viga, pois o colapso se deu por flexão. O modelo também não captou o esmagamento do concreto no meio vão, ocorrido no ensaio.

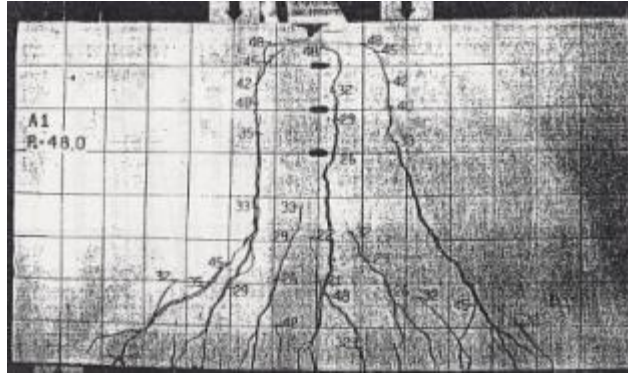


Figura 7.6 – Ruptura da viga A1 (GUIMARÃES, 1980).

7.2. Viga A2.

As figuras 7.15 e 7.16 mostram a evolução do dano e a viga deformada nos últimos passos de carga.

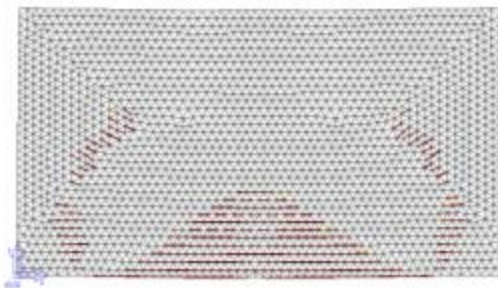


Figura 7.7 – Deformada + distribuição do dano a tração na Viga A2 – passo 3.

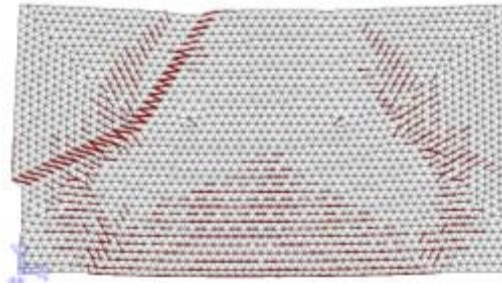


Figura 7.8 – Deformada + distribuição do dano a tração na Viga A2 – passo 4 (30x).

7.3. Viga V5.

Os resultados mostrados correspondem à análise AN3V2 da viga A2, com 2.000 passos de carga. Da mesma forma que para a viga A1, nas figuras 7.9 e 7.10 tem-se uma distribuição de tensões na fase elástica e a seguir, a distribuição de tensões e o dano no último passo de carga, correspondente a carga última.

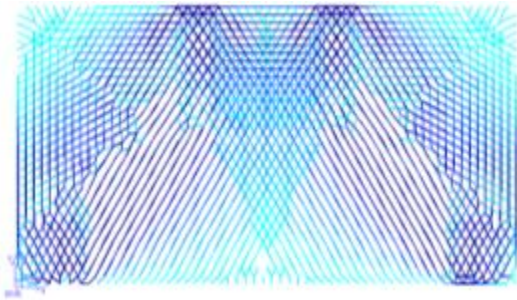


Figura 7.9 – Trajetória de tensões de compressão na Viga A2 – passo 1.

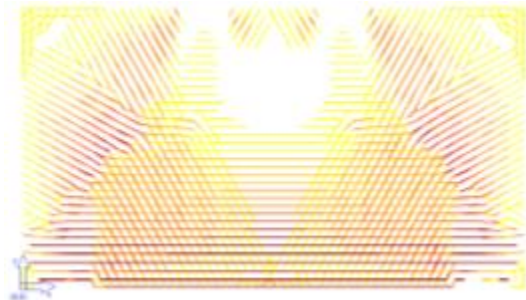


Figura 7.10 – Trajetória de tensões de tração na Viga A2 – passo 1.

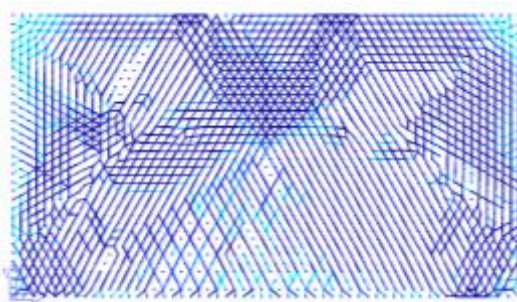


Figura 7.11 – Trajetória de tensões de compressão na Viga A2 – passo 4.



Figura 7.12 – Trajetória de tensões de tração na Viga A2 – passo 4.

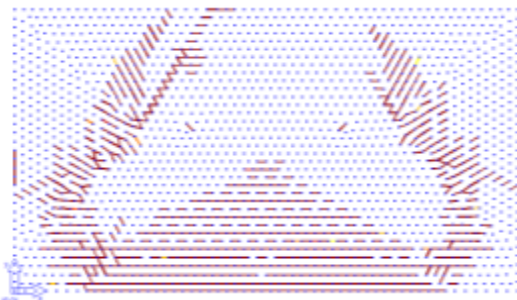


Figura 7.13 – Distribuição do dano a tração na Viga A2 – passo 4.

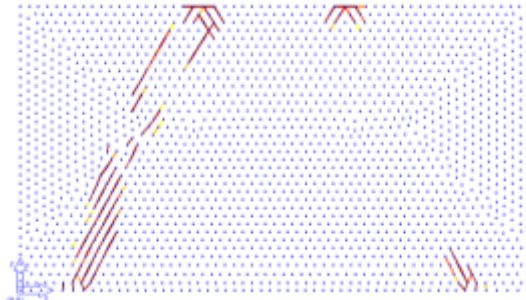


Figura 7.14 – Distribuição do dano a compressão na Viga A2 – passo 4.

As imagens abaixo correspondem a análise AN3V5 da viga V5, com 2.000 iterações. A figura 7.15 mostra a evolução da distribuição de tensões de tração desde a fase elástica até a carga última e a figura 7.16 mostra a distribuição de tensões de compressão no elemento.

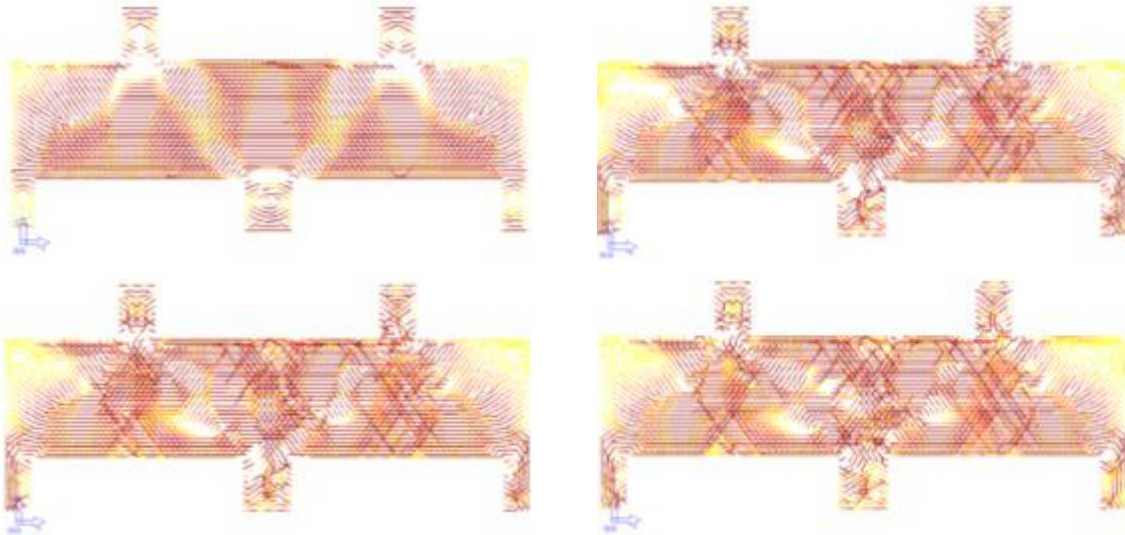


Figura 7. 15 – Distribuição de tensões de tração no (a) passo 1; (b) passo 2; (c) passo 3 e (d) passo 4.

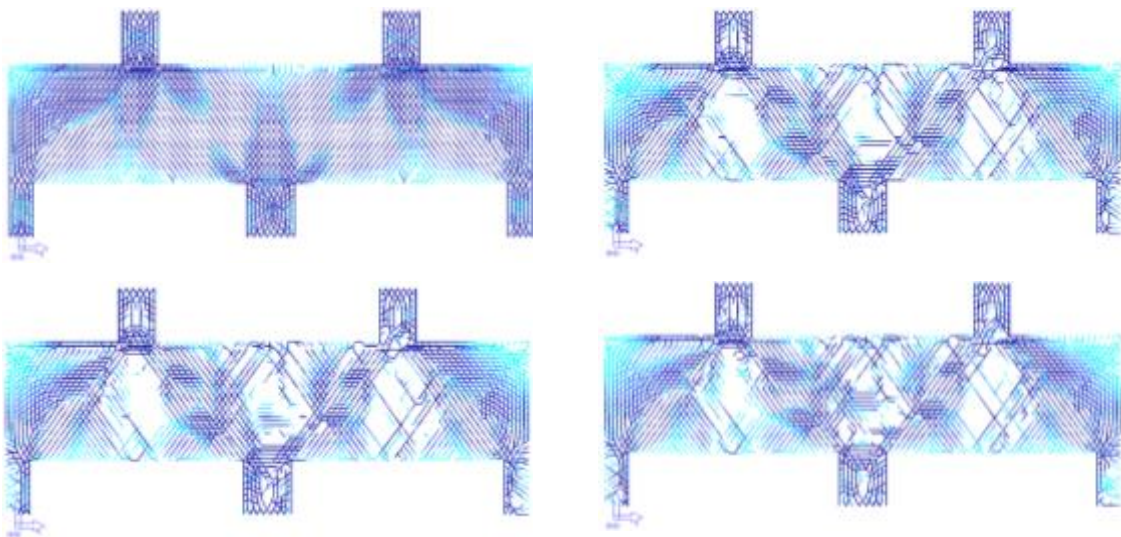


Figura 7. 16 – Distribuição de tensões de compressão no (a) passo 1; (b) no passo 2; (c) no passo 3 e (d) no passo 4.

Nas figuras 7.17 e 7.18 são mostradas a evolução do dano a tração e a compressão na viga, desde o início da fase elástica até a carga última.

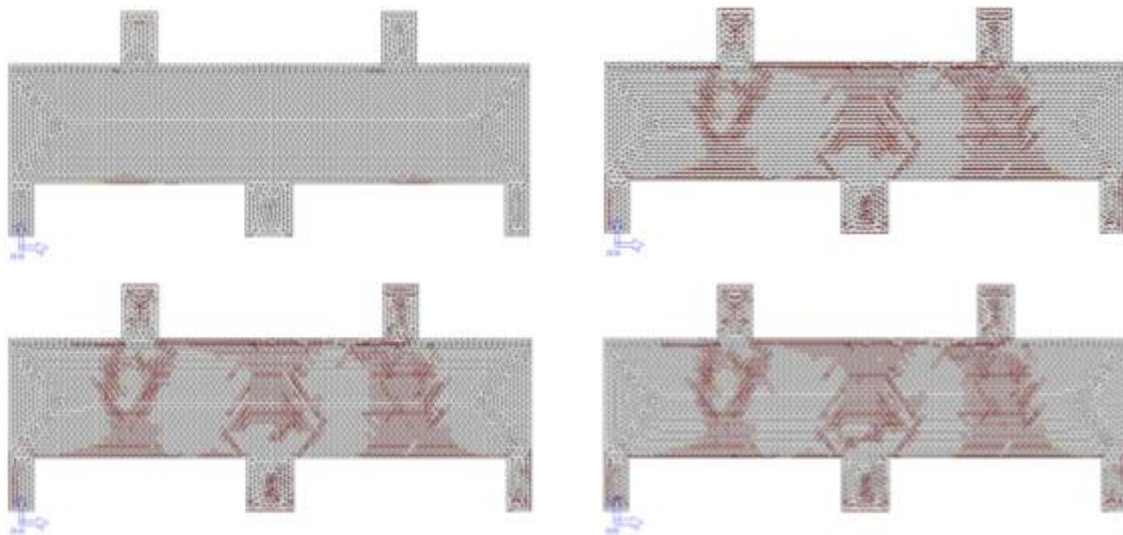


Figura 7.17 – Distribuição do dano a tração no (a) passo 1; (b) no passo 2; (c) no passo 3 e (d) no passo 4.

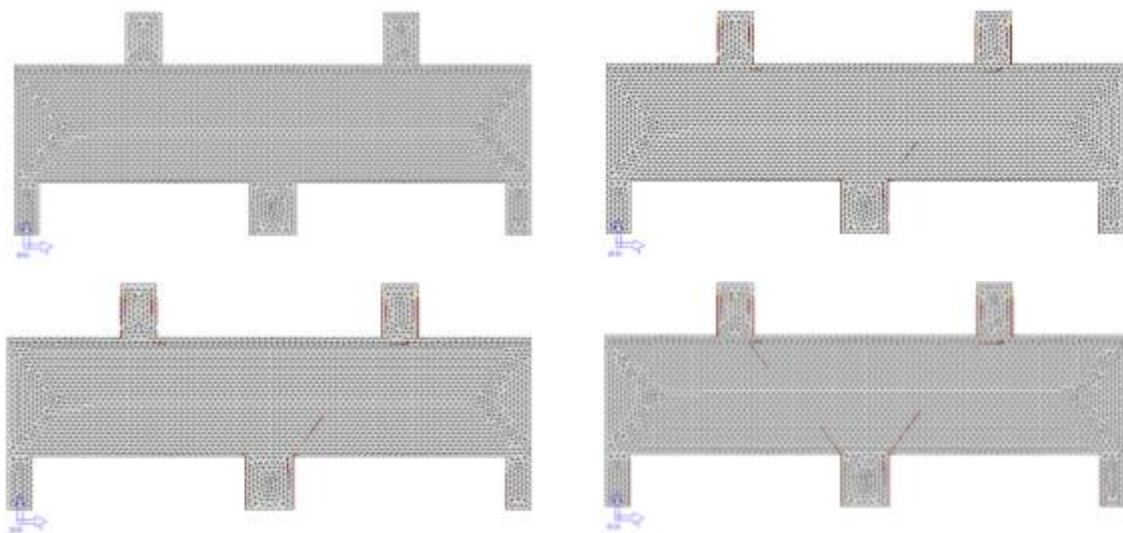


Figura 7.18 – Distribuição do dano a compressão no (a) passo 1; (b) passo 2; (c) passo 3; (d) passo 4.

Por último, são mostradas as deformadas juntamente com o dano ao elemento estrutural no último passo de carga (figuras 7.19 e 7.20).

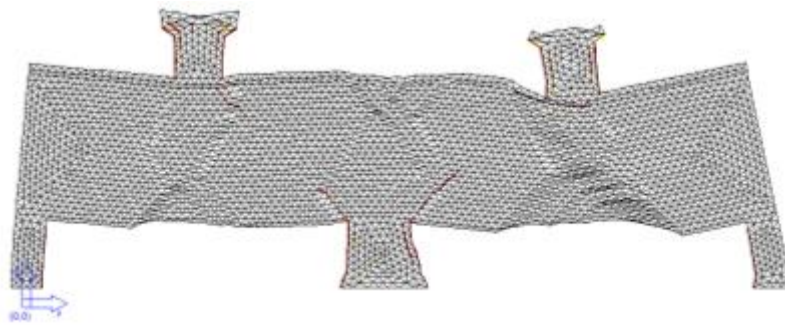


Figura 7. 19 – Deformada + Distribuição do dano a compressão no passo 4 (15x).



Figura 7. 20 – Deformada + Distribuição do dano a tração no passo 4 (15x).

A figura 7.21 apresenta a ruptura da viga V5 em laboratório. Comparando-se a figura 7.20 que apresenta o dano a tração, verifica-se que o modelo foi capaz de prever satisfatoriamente o comportamento real da estrutura.

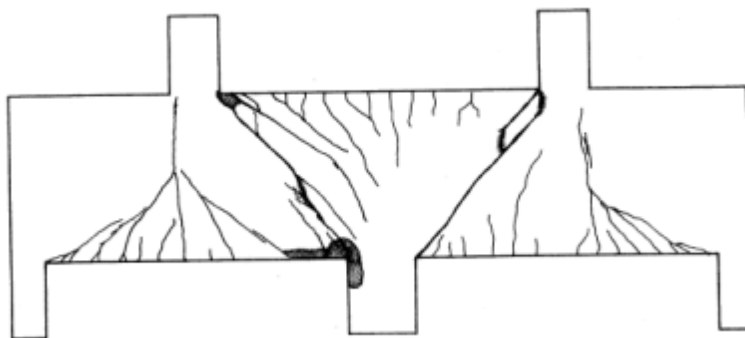


Figura 7. 21 – Ruptura da viga V5 (ROGOWSKY *et al.*, 1983).

7.4. Viga R1-b.

Finalizando, seguem abaixo as imagens oriundas do pós-processamento da viga R1-b, análise AN1R1b. Em sequência tem-se a trajetória de tensões de tração, de compressão, dano a tração e dano a compressão.



Figura 7. 22 – Distribuição das trajetórias de tensão de tração no passo 4.

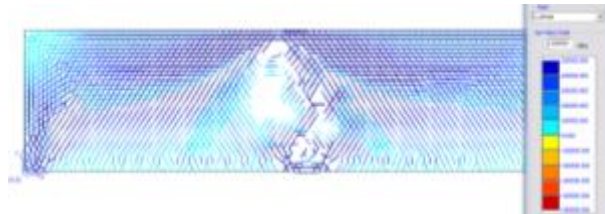


Figura 7. 23 – Distribuição das trajetórias de tensão de compressão no passo 4.

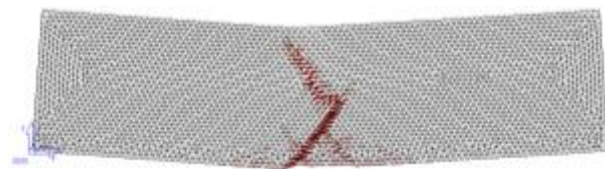


Figura 7. 24 – Deformada + Distribuição do dano a tração no passo 4 (50x).

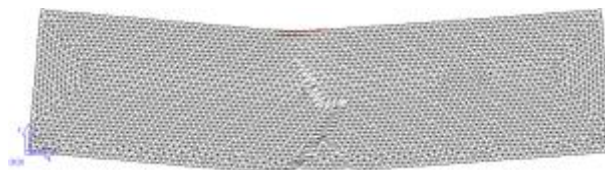


Figura 7.25 – Distribuição do dano a compressão no passo 4 (50x).

A figura 7.26 mostra a evolução do ensaio da viga R1b até o colapso. Por se tratar de um exemplo simples, de uma viga biapoiada com uma carga concentrada aplicada no meio do vão, é previsível que haverá a formação de uma fissura no meio do vão que evoluirá até o colapso, com maior ou menor deformação do elemento, a depender da taxa de armadura. No entanto, verifica-se que o modelo apresentou um excelente resultado.



Figura 7.26 – Evolução da ruptura da viga R1b (MELO, 2011).

7. CONCLUSÕES.

A proposta de avaliar os métodos analíticos, o software CAST e aplicar o software *Micro-Truss Analyzer* foi empregada nos exemplos citados no capítulo 5, tendo sido obtidos bons resultados.

Aplicaram-se os métodos analíticos que puderam prever corretamente modo de ruptura e forneceram valores seguros para a carga última do elemento estrutural.

Inclusive, pode-se afirmar que para exemplos clássicos de vigas-parede, de geometria simplificada, sem grandes fontes de não linearidade, os métodos analíticos são a melhor escolha, pois por meio de cálculos simples e de fácil desenvolvimento, obteve-se respostas seguras.

Em relação à proposta do CAST, percebeu-se que sua função didática de ilustrar o modelo de biela e tirante é a grande potencialidade do programa. Os resultados obtidos subestimaram bastante a carga última dos exemplos. E encontrou-se grande dificuldade para representar as regiões nodais de forma mais fiel ao modelo de biela e tirante, devido às limitações do programa.

A proposta de implementar a microtreliça e avaliar o software *Micro-Truss Analyzer* forneceu resultados bastante satisfatórios. Dentre os pontos fortes, pode-se citar os excelentes resultados do pós-processamento, que mostraram representar os resultados experimentais, a facilidade na entrada dos dados e manipulação dos arquivos do MTA.

Alguns pontos fracos podem ser citados como desvantagem de utilização de dessa análise, como a necessidade de muitos parâmetros de entrada para o modelo de dano. Nem sempre é possível obter exemplos a analisar que contenham todas as informações necessárias, sendo necessário estimar muitos parâmetros, o que acarreta em previsões de carga última pouco satisfatórias.

Outro fator que influencia bastante no resultado final é a análise de convergência, pois se verificou que a quantidade de passos de carga e tamanho de comprimento de arco são as variáveis que comandam a precisão do resultado final. O usuário deve dispor de um tempo para essa análise, para assim determinar as melhores condições para analisar cada exemplo.

Como sugestão para trabalhos futuros recomenda-se:

- Implementar melhorias ao código do MTA;
- Analisar mais exemplos de elementos com descontinuidades, como, por exemplo, nós de pórtico.

REFERÊNCIAS.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento**. ABNT: Rio de Janeiro, 2007.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary (ACI 318R-08)**. Farmington Hills: Michigan, 2008.

BELARBI, A. HSU, T.T.C. **Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension – Compression**. ACI Structural Journal, v. 92, n. 5, p. 562-573, 1995.

BELARBI, A. HSU, T.T.C. **Constitutive Laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete**. ACI Structural Journal, v. 91, n. 4, p. 465-474, 1994.

BENTZ, E. C. *et al.* **Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Elements**. ACI Structural Journal, p. 614-624, Jul-Aug, 2006.

BIRRCHEER, D. B. **Design of reinforced concrete deep beams for strength and serviceability**. 2009. 370 p. Tese (Doutorado) – Universidade do Texas, Austin, 2009.

BROWN, M. D. **Design for shear in reinforced concrete using strut-and-tie and sectional model**. 2005. 397 p. Tese (Doutorado) – Universidade do Texas, Austin, 2005.

CEB-FIB. **Model Code: First Complete Draft**. v. 1. International Federation for Structural Concrete: Lausanne, Switzerland, 224 p., 1999.

CERVERA, M. OLIVER, J. MANZOLI, O. **A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams**. In: Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 25, p. 987-1010, 1996.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETÓN. **CEB-FIP Model Code 1990**. Thomas Telford Services Ltd.: London, 1993.

FARIA, R. POUCA, N. V., DELGADO, R. **Modelação numérica do comportamento cíclico de pilares de betão armado**. In: VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Seção II, p. 827-836, Aveiro, 2000.

FARIA, R. POUCA, N. V., DELGADO, R. **Seismic Behaviour of a R/C wall: Numeric simulation and experimental validation**. In: IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Sevilla, 1999.

FERNANDES, H. H. F. **Aplicação de um Modelo de Dano Isotrópico Escalar na Análise de Vigas Parede de Concreto Armado**. 2010. 85 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

GONÇALVES, R. **Análise de propagação de fissuras por fadiga em concreto pelo mef mediante a mecânica do dano contínuo**. 2003. 103 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP), São Carlos, 2003.

GUIMARÃES, G. B. **Análise experimental de vigas-parede de concreto armado enrijecidas por pilares laterais.** 1980. 133 p. Tese (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1980.

HERRMANN, H. J. **Patterns and scaling in fracture.** Fracture Processes In Concrete Rock and Ceramics, CHAPMAN&HALL/E & FN SPON, p. 195-211, 1991.

HRENNIKOFF, A. **Solutions of problems of elasticity by the framework method.** Journal of Applied Mechanics, n.12, p.169-175, 1941.

KANG, W. T. **Estudo de propagação de fissuras arbitrárias utilizando o modelo reticulado da mesoestrutura.** Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002. 165 p.

LEONHARDT, F; MÖNNIG, E. **Construções de concreto.** v.2. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1979.

LEY, M. T. *et al.* **Experimental verification of strut-and-tie model design method.** Aci Structural Journal, v.104, n.6, nov-dez 2007.

LIANG, Q. Q. STEVEN, G. P. **A performance based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints.** Computational Methods Applied Mechanics Engineering, v.191, n.13-14, p.815-823, 2002.

LIANG-JENG, LEU *et al.* **Strut-and-tie design methodology for three-dimensional reinforced concrete structures.** Journal of Structural Engineering, v.132, n.6, p.929-938, jun.2006.

LOURENÇO, M. S. ALMEIDA, J. F. **Campos de tensões em zonas de descontinuidade.** In: Anais do Encontro Nacional do Betão Estrutural, 2004.

MACGREGOR, J. G.; WIGHT, J. K. **Reinforced concrete, mechanics and design.** 4 ed. New jersey: Pearson Prentice Hall, 1132 p., 2005.

MANZOLI, O. L. **Rate dependent effects in an isotropic damage constitutive model for concrete.** In: Internacional Center for Numerical Methods in Engineering – CIMNE, Technical Report n° 126, Barcelona, 1994.

MARTI, P. **Basic tools of Reinforced Concrete beam design.** ACI JOURNAL Proceeding, v.92, n.1, p.45-56, jan-fev. 1985.

MELO, G. S. S. A. **Análise paramétrica de vigas-parede de concreto armado pelo método dos elementos finitos.** 1984.102 p. Tese (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1984.

MELO, L. R. T. **Monitoração de modelos físicos reduzidos para investigação do comportamento de estruturas em escala real.** 2011. 241 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

MIRANDA, A. C. O., M. A. MEGGIOLADO, *et al.* **Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components.** In: Engineering Fracture Mechanics, 70 (10), 1259-1279, 2003.

MORSCH, E. **Der eisenbetonbau, seine anwendung und theorie.** (Reinforced Concrete Theory and Application). 1 ed., 118 p., 1902.

NAGARAJAN, P.; JAYADEEP, U. B.; PILLAI, T. M. M. **Application of micro truss and strut and tie model for analysis and design of reinforced concrete structural elements.** Songklanakarin Journal of Science and Technology, v. 31, n.6, p. 647-653, 2009.

NAGARAJAN, P.; JAYADEEP, U. B.; PILLAI, T. M. M. **Mesosopic numerical analysis of reinforced concrete beams using a modified micro truss model.** Interaction and Multiscale Mechanics, v. 3, p.23-37, 2010.

NAGARAJAN, P. PILLAI, T. M. M. **Strut-and-tie model for continuous deep beam: analytical and experimental studies.** Journal of the Institution of Engineers (India) – Civil Engineering, v. 90, nov. 2009.

OLIVER, J. HUESPE, A. E. CANTE, J. C. **An implicit / explicit integration schme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems.** In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197 (21-24), p. 1865-1889, 2008.

ORTIZ, I. R. de. **Strut-and-tie modelling of reinforced concrete: short beams and beam – column joints.** 1993. 203 p. Tese (Doutorado) – University of Westminster, Estados Unidos, 1993.

PARK, J. ET AL. **Automated Finite-Element-Based Validation of Structures Designed by the Strut-and-Tie Method.** Journal of Structural Engineering, v. 136, n. 2, p. 203-210, fev. 2010.

RICHART, F. **An investigation of web stresses in Reinforced Concrete beams.** University of Illinois – Engineering Experiment Station, Bulletin n° 166, Urbana, 1927.

RITTER, W. **Die bauweise hennebique (The hennebique construction method),** Schweizerische Bauzeitung, v. 17, 1899.

ROGOWSKY, D. M. MACGREGOR, J. G. ONG, S. Y. **Tests of Reinforced Concrete Deep Beams.** Strcutural Engineering Report, n. 109, Department of Civil Engineering, University of Alberta. Alberta, 1983.

SAINT-VENANT, A. J. C. B. **Memoire sur la Torsion des Prismes,** Mem. Divers Savants, v. 14, pp. 233-560, 1855.

SALEM, H. M. **The Micro Truss Model: An Innovative Rational Design Approach for Reinforced Concrete.** Journal of Adavanced Concrete Technology, v.2, n.1, p.77-87, 2004.

SANTOS, D. **Análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes.** 2006. 171 p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

SANTOS, G. G. M. **Análise sistemática de vigas-parede biapoiadas de concreto armado**. 1999. 150 p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.

SCHAFER, K. SHCLAICH, J. **Consistent Design of Structural Concrete Using Strut and Tie Models**. In: Colóquio sobre comportamento e projeto de estruturas, v. 5, Anais. PUC/RJ. Rio de Janeiro, 1988.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K.; JENNEWEIN, M. **Toward a consistent design of structural concrete**. Journal of the Prestressed Concrete Institute, v.32, n. 3, p. 74-150, Mai-Jun 1987.

SILVA, R. C.; GIONGO, J. S. **Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado**. São Carlos: EESC-USP, 2000.

SIMO, J. C. JU, J. W. **Strain and stress-based continuum damage models – I Formulation**. In: International Journal of Solids and Structures, 23 (7), 821-840, 1987.

SIMO, J. C. JU, J. W. **Strain and stress-based continuum damage models – II Computacional Aspects**. In: International Journal of Solids and Structures, 23 (7), 841-869, 1987.

SMITH, K. N. VANTSIOTIS, A. S. **Shear strength of deep beams**. ACI JOURNAL, v.79, n.3, p.201-213, 1982.

SOUZA, R. A. **Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidade**. 2004. 379 p. Tese (Doutorado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos**. LTC: Rio de Janeiro, 1994.

TJHIN, T. N.; KUCHMA, D. A. **Integrated analysis and design tool for the strut-and-tie method**. Journal of Engineering Structures, v. 29, p.3042-3052, mar. 2007.

WANG, T. K. **Estudo de propagação de fissuras arbitrarias no concreto utilizando o modelo reticulado da mesoestrutura**. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002. 163p.

WON, D.; HINO, S.; OHTA, T. **Ultimate Strength Analysis of RC Deep Beams Using Strut-and-Tie Models**. Journal of Materials, Concrete, Structures and Pavements – JSCE, v. 38, n. 592, p. 181-196, 1998.

ZHANG, N. TAN, K. **Direct strut-and-tie model for single span and continuous deep beams**. Journal of Engineering Structures, v.29, p.2987-3001, mar. 2007.