

Daniel Dourado de Aragão Santos

*Oscilações Coletivas em um Plasma  
Magnetizado Sujeito a um Campo de  
Radiação*

Brasília

Julho de 2012

Daniel Dourado de Aragão Santos

*Oscilações Coletivas em um Plasma  
Magnetizado Sujeito a um Campo de  
Radiação*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Amato

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

Julho de 2012

# *Comentários e Agradecimentos*

Primeiramente agradeço aos meus pais, Joaquim e Cecília, pelos pais maravilhosos que são e pelo amor, companhia e atenção que ao longo de todos esses anos sempre dedicaram a mim. Quero que saibam que esse trabalho somente foi possível porque vocês me ensinaram a lutar e a perseverar naquilo que eu acredito.

À minha irmã Pricila, pela companhia, carinho e atenção que tem sempre comigo e por levar com esportiva as brincadeiras e piadinhas feitas nos momentos de descontração.

Ao meu querido avô Aragão e minha querida avó Isabel que sempre torceram e rezaram pelo meu sucesso. Agradeço os momentos que vivemos juntos, momentos que tornaram minha infância incrivelmente divertida.

Ao meu orientador Marco Amato, muito tenho a agradecer, pela disponibilidade para discutir assuntos essenciais para a elaboração deste trabalho e pelas contribuições para minha formação acadêmica. Agradeço também ao professor Arsen Melikyan pelas boas indicações de literaturas.

Aos meus colegas de sala e amigos Bruno e Natália pela companhia nas horas de trabalho e pela incansável disposição em estudar e discutir Física. À minha amiga Regina por toda a ajuda e pelos incentivos (cafezinhos, bolos,...) para se avançar um pouco mais no trabalho.

Aos meus amigos da Física: Carlos, João, André, Márcio, Cíntia, Paulo, Carol, Saulo, Disrael, Fábio, Júnior, Igo, Marquinhos, Evandro, Fernando, Luiz, Marcos e Leander pela convivência durante esse período e por constituírem o ambiente agradável em que convivemos.

Aos amigos Sandro, Thiago e Viviane, por torcerem sempre pelo meu sucesso e pelos prazerosos momentos de lazer que passamos juntos.

Aos amigos do futebol dominical pelas revigorantes horas de descontração, importantes para o início de uma nova semana de trabalho com bastante disposição.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*Dedico este trabalho em especial ao meu avô, que com a sua trajetória de vida me inspira a superar com muita determinação as dificuldades da vida. À minha mãe e à minha avó que, neste momento, prestam toda assistência a ele.*

# *Resumo*

Neste trabalho, estamos interessados em descrever o comportamento dos modos longitudinais em plasmas magnetizados sujeitos a um campo eletromagnético externo na aproximação de dipolo. Admitimos oscilações coletivas na direção de polarização da radiação externa. Para tratar o problema utilizamos um modelo semiclássico, em que empregamos uma formulação quântica para descrever os elétrons e clássica para a descrição dos campos externos.

Com essa abordagem, obtivemos uma expressão para a constante dielétrica semelhante à obtida para os modos de Bernstein [1], porém acrescida de um somatório no número de fótons envolvidos nas transições eletrônicas. Apesar de se tratar de um somatório infinito, verificamos que é possível, como boa aproximação, limitá-lo a um número máximo de fótons, e assim obter gráficos referentes à relação de dispersão. Para gerar as curvas de dispersão, calculamos numericamente as raízes da constante dielétrica por meio de uma subrotina escrita em linguagem C.

Os limites assintóticos (harmônicos ciclotrônicos) referentes a pequenos comprimentos de onda não são alterados pela presença da radiação, porém observamos o surgimento de modos ressonantes propagativos e de modos estacionários com comprimentos de onda finitos e não nulos. Analisamos a influência do número de fótons envolvidos nas transições eletrônicas entre os níveis de Landau e de parâmetros do plasma como densidade e temperatura sobre o aspecto das curvas de dispersão. Verificamos que no limite de baixas temperaturas a presença da radiação afeta significativamente as curvas de dispersão, entretanto, para plasmas mais energéticos essa influência praticamente desaparece. Na ótica quântica esse comportamento sugere uma relação de predominância entre os processos de transição eletrônica motivados pela interação elétron-plasmon e pela interação elétron-fóton.

Por fim, verificamos a forte dependência dos modos coletivos longitudinais com a magnitude do campo magnetostático e com a amplitude do campo de radiação. Observamos que as oscilações em torno dos harmônicos ciclotrônicos são intensificadas à medida que aumentamos a amplitude do campo elétrico da radiação e atenuadas quando aumentamos a magnitude do campo magnetostático.

**Palavras-Chave:** Plasma Magnetizado, Modos Longitudinais, Relação de Dispersão.

# *Abstract*

In this work, we are interested to describe the behavior of longitudinal modes in magnetized plasmas subjected to an external electromagnetic field in the dipole approximation. We assume that collective modes are in the direction of polarization of the external field. To describe the system, we employ a semiclassical model, for which electrons receive a quantum mechanical treatment and the external fields are treated from a classical viewpoint.

This approach provide us an expression for the dielectric constant similar to that found for the Bernstein modes [1], however, increased by a sum over the number of photons involved on the electronic transitions. Although the sum is infinite, we show that is possible, to a good approximation, restrict it to a maximum number of photons and then, obtain graphs for the dispersion relation. To generate the dispersion relation graphs, we compute numerically the roots of the dielectric constant by means of a subroutine written in C language.

The asymptotic limits (cyclotron harmonics) for small wavelengths are not affected by presence of radiation however, we observed the emergence of resonant propagative modes and stationary modes with wavelengths finite and nonzero. We analyze the influence of the number of photons involved on the electronic transitions between Landau levels and how the plasma parameters such as density and temperature affect the dispersion curves. We found that in the low temperatures limit the presence of radiation significantly affects the dispersion curves, whereas for more energetic plasmas this influence virtually disappears. In the quantum picture this behavior suggests a relationship of dominance between the electronic transitions driven by electron-plasmon interaction and caused by the electron-photon interaction.

Finally, we found a strong dependence of the longitudinal collective modes with the magnitude of the magnetostatic field and the amplitude of the radiation field. We observed that the oscillations around the cyclotron harmonics are intensified as we increase the amplitude of the radiation field and attenuated when we increase the magnitude of the homogeneous magnetic field.

**Keywords:** Magnetized Plasma, Longitudinal Modes, Dispersion Relation.

# *Sumário*

**Lista de Figuras**

**Lista de Tabelas**

**Lista de Variáveis**

<b>Introdução</b>	p. 11
<b>1 Aspectos Fundamentais em Física de Plasmas</b>	p. 15
1.1 Definição de plasma . . . . .	p. 16
1.2 Comportamento coletivo . . . . .	p. 17
1.3 Quase-neutralidade e Blindagem de Debye . . . . .	p. 17
1.4 Frequência de Plasma . . . . .	p. 20
1.5 Critérios para o Plasma . . . . .	p. 21
<b>2 Ondas em plasmas</b>	p. 23
2.1 Teoria Hidrodinâmica . . . . .	p. 23
2.1.1 Descrição hidrodinâmica para um plasma livre . . . . .	p. 24
2.1.2 Descrição hidrodinâmica para um plasma magnetizado . . . . .	p. 28
2.2 Teoria Cinética . . . . .	p. 31
2.2.1 Propagação de ondas eletrostáticas em um plasma livre . . . . .	p. 38
2.2.2 Modos de Bernstein . . . . .	p. 39
<b>3 Uma formulação quântica para a propagação de ondas eletrostáticas em um plasma magnetizado</b>	p. 49

<b>4 Resultados Numéricos</b>	p. 62
<b>Conclusão</b>	p. 73
<b>Referências</b>	p. 75
<b>Apêndice A - Obtenção do operador unitário</b>	p. 78
<b>Apêndice B - Cálculo numérico das Funções de Bessel</b>	p. 82
<b>Apêndice C - Códigos utilizados para obtenção dos gráficos</b>	p. 88



# *Lista de Figuras*

1	Desenho esquemático da blindagem de Debye. . . . .	p. 18
2	Camada de elétrons deslocada de sua posição de equilíbrio; $d$ e $x$ representam a espessura e o deslocamento da camada, respectivamente. . . .	p. 21
3	Relação de dispersão para as ondas de Bernstein.[Figura retirada de S. Gruber e G. Bekefi, Phys. of Fluids <b>11</b> , 122(1968)] . . . . .	p. 47
4	Orientação dos campos externos. . . . .	p. 49
5	Relação de Dispersão $\bar{\Omega} \times \xi$ para os modos próximos ao primeiro harmônico ciclotrônico. . . . .	p. 65
6	Relação de Dispersão $\bar{\Omega} \times \xi$ para os modos próximos ao segundo harmônico ciclotrônico. . . . .	p. 65
7	Relação de Dispersão em torno do primeiro harmônico para diferentes valores de densidade. . . . .	p. 67
8	Relação de Dispersão em torno do segundo harmônico para diferentes valores de densidade. . . . .	p. 67
9	Gráfico da relação $\bar{\Omega} \times \xi$ em torno do primeiro harmônico ciclotrônico para diferentes valores de temperatura e quantidades de fótons. . . . .	p. 69
10	Gráfico da relação $\bar{\Omega} \times \xi$ em torno do segundo harmônico ciclotrônico para diferentes valores de temperatura e quantidades de fótons. . . . .	p. 69
11	Gráficos de dispersão para diferentes magnitudes do campo magnetostático. Assumimos para a amplitude do campo elétrico da radiação $E = 10 V/m$ . . . . .	p. 70
12	Gráficos de dispersão referente ao primeiro <i>branch</i> para valores de $B_0$ entre $0.250 T$ e $1.000 T$ com $E = 10 V/m$ . . . . .	p. 71
13	Gráficos de dispersão referente ao segundo <i>branch</i> para valores de $B_0$ entre $0.250 T$ e $1.000 T$ com $E = 10 V/m$ . . . . .	p. 71

14	Gráficos de dispersão para diferentes amplitudes do campo elétrico da radiação. Admitimos um campo magnetostático $B_0 = 1,0 T$ . . . . .	p. 72
15	Comportamento das funções de Bessel para seis ordens distintas. . . . .	p. 83
16	Funções de Bessel $J_0(x)$ e $J_1(x)$ para $N = 30$ . Os pontos representam os gráficos gerados pela subrotina e as linhas correspondem aos gráficos fornecidos pelo Gnuplot 4.6.0. . . . .	p. 85
17	Exemplos de gráficos de dispersão em que os argumentos das funções de Bessel extrapolam seu intervalo de confiabilidade. Utilizamos para a plotagem $n_0 = 10^{18} m^{-3}$ , $k_B T = 1 eV$ , $B_0 = 0,5 T$ e $E = 10 V/m$ . Em cada gráfico as curvas representam as diferentes quantidades de fótons. . . . .	p. 85
18	Funções de Bessel $I_0(x)$ e $I_1(x)$ para $L = 30$ . Os pontos representam os gráficos gerados pela subrotina e as linhas correspondem aos gráficos fornecidos pelo Maple 13. . . . .	p. 86

# *Lista de Tabelas*

- 1 Valores da fração de átomos ionizados para diferentes temperaturas e para diferentes espécies atômicas. Utilizamos para a densidade total  $n = n_i + n_n = 3,0 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . A menor temperatura da tabela corresponde a  $T \approx 300 \text{ K}$ . . . . . p. 16

# *Lista de Variáveis*

$e_a$	Carga elétrica das partículas do tipo “a”
$m_a$	Massa das partículas do tipo “a”
$\varphi$	Potencial coulombiano
$F_a(v)$	Função de distribuição das partículas do tipo “a”
$n_0$	Densidade de equilíbrio dos elétrons
$T_e$	Temperatura dos elétrons
$\lambda_D$	Comprimento de Debye para os elétrons
$N_D$	Número de elétrons na esfera de Debye
$\omega_p$	Frequência eletrônica de plasma
$\tau$	Tempo médio entre colisões dos elétrons com as partículas neutras
$\mathbf{u}_e$	Velocidade média dos elétrons
$\mathbf{E}$	Campo elétrico
$\mathbf{B}$	Campo magnético
$\rho$	Densidade de carga
$\mathbf{J}$	Densidade de corrente
$\mathbf{k}$	Vetor de onda dos modos coletivos
$\omega$	Frequência dos modos coletivos
$\sigma(\omega)$	Condutividade elétrica
$\mathbf{D}$	Vetor deslocamento elétrico
$\epsilon(\omega)$	Permissividade elétrica
$\mathbf{B}_0$	Campo magnetostático externo
$\omega_c$	Frequência eletrociclôtrônica
$\epsilon_{ij}$	Constante dielétrica
$f_a(v)$	Função de distribuição normalizada das partículas do tipo “a”
$\sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{k}, \omega)$	Condutividade elétrica de alta frequência das partículas do tipo “a”
$\pi_{ij}^{(a)}(\mathbf{k}, \omega)$	Polarizabilidade de alta frequência das partículas do tipo “a”
$\epsilon_{\parallel}$	Constante dielétrica “longitudinal”
$\epsilon_{\perp}$	Constante dielétrica “transversal”

$\mathbf{E}(t)$	Campo externo de radiação
$\omega$	Frequência de oscilação do campo $\mathbf{E}(t)$
$\mathbf{A}_0$	Potencial vetor associado ao campo $\mathbf{B}_0$
$\mathbf{A}(t)$	Potencial vetor associado ao campo $\mathbf{E}(t)$
$H_0$	Hamiltoniano eletrônico na presença dos campos $\mathbf{B}_0$ e $\mathbf{E}(t)$
$H_L$	Hamiltoniano eletrônico na presença exclusiva do campo $\mathbf{B}_0$
$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$	Função de onda do elétron na presença dos campos $\mathbf{B}_0$ e $\mathbf{E}(t)$
$\Phi(\mathbf{r}, t)$	Função de onda do elétron na presença de $\mathbf{B}_0$ (Função de onda de Landau)
$\Phi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r})$	Autofunções de Landau
$E_{n,k_z}$	Autoenergias do elétron no estado $ n, k_x, k_z\rangle$
$U$	Operador de transformação unitária
$\varphi(\mathbf{r}, t)$	Potencial local
$\Psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t)$	Função de onda perturbada para o elétron no estado $ \mathbf{m}\rangle =  n^{(m)}, k_x^{(m)}, k_z^{(m)}\rangle$
$\delta\rho_{n^{(m)}, k_z^{(m)}}(\mathbf{r}, t)$	Flutuação na densidade de carga dos elétrons no estado $ \mathbf{m}\rangle$
$\delta\rho(\mathbf{r}, t)$	Flutuação total na densidade de cargas
$\varphi_{ext}$	Potencial externo
$\varphi_{ind}$	Potencial induzido
$\mathbf{q}$	Vetor de onda dos plasmons
$\Omega$	Frequência dos plasmons
$\varepsilon(\mathbf{q}, \Omega)$	Função dielétrica
$\xi$	“Vetor de onda” adimensional dos modos longitudinais
$\bar{\Omega}$	“Frequência” adimensional dos modos longitudinais
$\bar{\omega}$	Razão da frequência da radiação pela frequência eletrociclôtrônica

# *Introdução*

Em meados de 1830, o cientista britânico Michael Faraday realizou uma série de experimentos para investigar um fenômeno que lhe chamava a atenção: a luminosidade emitida por um gás rarefeito quando submetido a uma descarga elétrica. Nos anos seguintes, sugeriu-se que essa luminosidade era provocada pela interação de “raios” que partiam do cátodo, denominados raios catódicos, com as partículas do gás. Entretanto, foi somente em torno de 1870 que se conheceu a verdadeira natureza dos raios catódicos, que nada mais eram que feixes de elétrons com altas velocidades emitidos do cátodo quente. Nessa época o gás incandescente observado no interior dos tubos foi denominado *matéria radiante*.

Em seus experimentos sobre espalhamento de elétrons em gases ionizados[2], Tonks e Langmuir detectaram a presença de elétrons com energias abaixo da que se esperava. Para explicar este fenômeno eles sugeriram a existência de oscilações elétricas responsáveis por causar espalhamento tanto por submeter os elétrons a variações abruptas dos campos quanto por provocar flutuações nos potenciais dos eletrodos.

Durante o ano de 1929 Tonks e Langmuir comprovaram experimentalmente a existência dessas oscilações [3]. Verificaram ainda que essas variações elétricas eram tão rápidas (ca.  $10^9 s^{-1}$ ) que os íons, por serem mais pesados, permaneciam praticamente incólumes. Neste mesmo ano, eles introduziram o termo *plasma* para se referir à porção do gás com densidades elevadas e aproximadamente iguais de íons e elétrons e, além disso, elaboraram uma teoria para explicar as *oscilações eletrônicas de plasma* como assim as denominaram. Surgia-se assim uma nova área da Física, a *Física dos Plasmas*.

A partir de então, especialmente entre as décadas de 1930 e 1950, a Física dos plasma teve seus fundamentos teóricos estabelecidos. Nesse período, A. A. Vlasov [4] tratou o problema da propagação de ondas longitudinais em plasmas não colisionais sob o ponto de vista da teoria cinética, onde obteve uma relação de dispersão para o caso em que a velocidade de fase das ondas é muito maior que a velocidade térmica dos elétrons. Decorridos oito anos do trabalho de Vlasov, L. D. Landau [5] mostrou que quando o problema é tratado matematicamente de forma mais rigora, pelos métodos da transformada de Laplace e de integrais de contorno, é possível prever a existência de um novo efeito:

o amortecimento dos modos eletrostáticos, que ficou conhecido como *amortecimento de Landau*. Esse fenômeno foi justificado por um mecanismo ressonante de transferência de energia entre as ondas e os elétrons energéticos [6]. Do estudo das oscilações iônicas de baixa frequência sob a ação de campos magnéticos [7], H. Alfvén desenvolveu um importante ramo da Física dos Plasmas conhecido como *Teoria Magnetohidrodinâmica* (Teoria MHD). Com as ferramentas desenvolvidas ele foi capaz de descrever o mecanismo de propagação de ondas transversais não dispersivas ao longo do campo magnético. Essas ondas ficaram conhecidas como *ondas hidromagnéticas* ou *ondas de Alfvén*. Nos anos que se sucederam aos trabalhos de Alfvén, plasmas magnetizados foram intensamente estudados, em especial com relação à propagação de ondas longitudinais perpendiculares a um campo magnético estático. Gross [8] demonstrou a existência de *gaps* no espectro de frequências para os modos longitudinais perpendiculares ao campo magnético com diferenças aproximadamente múltiplas da frequência ciclotrônica. Nesse estudo, ele sugeriu que os modos com comprimento de onda próximo ao comprimento de Debye podem sofrer fortes atenuações. Bernstein [1] realizou um trabalho bastante completo sobre a propagação dos modos longitudinais em plasmas magnetizados. Verificou a existência de *gaps* no espectro de frequências, porém, contrapondo-se às previsões de Gross, demonstrou a ausência de atenuações desses modos em plasmas próximos ao equilíbrio térmico. Os modos longitudinais perpendiculares ao campo magnético estático ficaram conhecidos como *modos de Bernstein* ou *modos harmônicos ciclotrônicos*. Trabalhos posteriores [9, 10, 11] comprovaram experimentalmente a existência desses modos.

Em complemento às descrições cinética e hidrodinâmica empregadas até então, a partir dos anos 1960 foi proposta uma abordagem com base nas ferramentas da mecânica quântica (MQ). Esse tratamento, apesar de inadequado para a resolução de problemas mais simples, apresenta grandes vantagens quando questões mais complicadas envolvendo interações não-lineares são consideradas. No tratamento quântico as ondas no plasma são compostas por quase-partículas (plasmons), que interagem entre si e com as partículas do plasma. Nessa nova abordagem, Pines e Schrieffer [12] desenvolveram um trabalho pioneiro em que obtiveram um hamiltoniano de interação para as partículas e os plasmons (os quanta das ondas de Langmuir) e para as partículas e os fonons (os quanta das ondas acústico iônicas). Determinaram a taxa de variação das funções de distribuição das partículas e das quase-partículas e explicaram o amortecimento de Landau como uma competição entre os processos de absorção e emissão estimulada das quase-partículas pelas partículas. A partir de então o formalismo da MQ foi amplamente empregado para a descrição de plasmas livres e magnetizados e resultados previstos pelas teorias cinética

e hidrodinâmica puderam ser recuperados quando tomado o limite clássico [13].

Atualmente um dos assuntos que mais atraem a atenção dentro da Física dos Plasmas é a pesquisa da fusão termonuclear controlada. Apesar de os primeiros experimentos em fusão nuclear remontarem ao final da década de 1940, seu rápido avanço ocorreu somente após as pesquisas nessa área tornarem-se públicas em 1958. A obtenção de reações de fusão nuclear dentro de uma máquina de confinamento envolve um problema associado aos mecanismos utilizados para aquecer o plasma até altas temperaturas. Essa motivação desencadeou, a partir da década de 1960, uma série de trabalhos associados ao aquecimento de plasmas através da incidência de um campo de radiação. Nessa perspectiva, a descrição quântica apresentava uma grande vantagem em relação às demais, ao explicar o fenômeno como um processo de absorção de fótons do campo de radiação pelos elétrons durante suas colisões com os núcleos. Nessa época, o formalismo da MQ ganhava um grande impulso e diversos trabalhos associados à interação de plasmas com campos de radiação eletromagnética foram publicados [14, 15, 16, 17].

A presente dissertação está estruturada em quatro capítulos e inicia-se com a apresentação de alguns conceitos básicos em Física de Plasmas e fundamentais para o entendimento das oscilações coletivas longitudinais, que representa o objetivo central deste trabalho. Esses aspectos fundamentais, bem como os critérios de plasma são apresentados de forma sucinta no primeiro capítulo.

No capítulo 2 estudamos as oscilações coletivas em plasmas livres e magnetizados sob a perspectiva das teorias hidrodinâmica e cinética. Vimos que a teoria hidrodinâmica fornece os modos não propagativos de Langmuir para plasmas livres e as oscilações híbridas para plasmas magnetizados. Mostramos que esses resultados podem ser recuperados a partir da descrição cinética quando tomamos o limite de baixas temperaturas. Finalizamos o capítulo com a obtenção da relação de dispersão para os modos longitudinais que se propagam no plano perpendicular ao campo magnético axial.

No capítulo 3 apresentamos os cálculos desenvolvidos neste trabalho para a obtenção da relação de dispersão dos modos longitudinais em um plasma magnetizado submetido a um campo de radiação. Assumimos um campo magnetostático axial e um campo de radiação monocromática polarizada na direção do eixo-x, em regime de onda plana e na aproximação de dipolo. Tratamos inicialmente o plasma dentro do formalismo da MQ e somente ao final dos cálculos tomamos o limite clássico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) para a obtenção da função dielétrica. Observamos que na ausência de radiação o resultado obtido em [13] é recuperado.



No capítulo 4 consideramos a propagação de plasmons na direção de polarização da radiação e constatamos que na ausência de radiação os modos de Bernstein são recuperados. Comentamos sobre o método utilizado para resolver numericamente a equação de dispersão e apresentamos os gráficos obtidos para os modos longitudinais. Analisamos as principais alterações provocadas pela introdução da radiação sobre o aspecto das curvas de dispersão. Observamos como o número de fótons envolvidos nas transições eletrônicas se reflete no aspecto dessas curvas e a possibilidade de considerar um número máximo de fótons no processo. Obtivemos também gráficos para diferentes valores de densidade e temperatura do plasma, bem como para valores distintos dos campos externos.

Finalizamos o trabalho com as conclusões e algumas perspectivas de atuações futuras.

# 1 Aspectos Fundamentais em Física de Plasmas

Hoje se sabe que a “matéria radiante”, como assim se referiam os cientistas do final do século XIX ao gás incandescente observado dentro dos tubos a vácuo, constitui quase toda a matéria visível do universo. Em nosso sistema solar, por exemplo, somente o Sol - uma esfera de plasma - é responsável por 99,86% de toda sua massa.

O motivo para não presenciarmos com tanta frequência a matéria neste estado pode ser compreendido quando utilizamos a equação de Saha [18, 19], que nos informa a razão aproximada entre a densidade de átomos ionizados  $n_i$  e a densidade de átomos neutros  $n_n$  que se deve esperar de um gás no equilíbrio térmico.

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp(-U/k_B T), \quad (1.1)$$

onde  $T$  é a temperatura do gás em Kelvin,  $U$  a energia de ionização dos átomos que compõem o gás e  $k_B \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  é a constante de Boltzmann.

Para o ar atmosférico, por exemplo, temos os valores  $n_n \approx 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ,  $T = 300\text{K}$  e  $U = 14,5 \text{ eV}$  que nos permite obter um valor extremamente baixo para o grau de ionização:  $n_i/n_n \approx 10^{-122}$ . Por esse motivo dizemos que o ar atmosférico nas condições normais é um gás neutro.

O fator exponencial em (1.1) expressa o fato de que, no equilíbrio térmico, o número de átomos rápidos, efetivos para as ionizações, cai exponencialmente com  $U/k_B T$ . À medida que aumentamos a temperatura do sistema esse fator assume valores cada vez maiores até que quando  $U$  é poucas vezes maior que  $k_B T$  dar-se início a um crescimento abrupto da fração de átomos ionizados e assim dizemos que o gás se encontra no estado denominado plasma. Esse comportamento está ilustrado na Tabela 1, em que calculamos as frações de átomos ionizados  $n_i/n$ , onde  $n = n_i + n_n$ , em diferentes temperaturas para um gás

Temperatura (eV)	Espécie atômica			
	Hg	H	N	He
0.026	$10^{-88}$	$10^{-114}$	$10^{-122}$	$10^{-206}$
0.100	$10^{-23}$	$10^{-29}$	$10^{-32}$	$10^{-53}$
0.500	0.000174	0.000007	0.000003	$10^{-10}$
1.000	0.052631	0.011076	0.006972	0.000046
2.000	0.689320	0.425440	0.356765	0.035329
3.000	0.944297	0.865752	0.831258	0.313524
4.000	0.983556	0.965113	0.956741	0.707477
5.000	0.992885	0.986779	0.984161	0.900772
10.00	0.999103	0.998771	0.998651	0.996329

Tabela 1: Valores da fração de átomos ionizados para diferentes temperaturas e para diferentes espécies atômicas. Utilizamos para a densidade total  $n = n_i + n_n = 3,0 \cdot 10^{25} m^{-3}$ . A menor temperatura da tabela corresponde a  $T \approx 300 K$ .

composto por átomos de mercúrio (Hg), hidrogênio (H), nitrogênio (N) e hélio(He).

Os potenciais de ionização para as espécies exemplificadas são:  $U_{Hg} = 10.44 eV$ ,  $U_H = 13.60 eV$ ,  $U_N = 14.53 eV$  e  $U_{He} = 24.59 eV$ .

## 1.1 Definição de plasma

A matéria visível existente no universo é classificada em quatro estados: sólido, líquido, gasoso e plasma. A diferença básica entre esses estados reside na magnitude dos potenciais de ligação que mantêm suas partículas constituintes agregadas. O aquecimento de uma substância que se encontra no estado sólido ou líquido acarreta uma maior agitação de suas partículas. Considerando que esse aquecimento se dê de forma gradativa, o sistema atingirá um estado em que sua energia térmica equiparar-se-á à energia de ligação que mantém o sistema unido, ocorrendo assim uma transição de fase.

Da mesma forma, se fornecermos energia a um sistema gasoso, seja por aquecimento, por descarga elétrica ou pela incidência de radiação, podemos produzir a ionização dos átomos ou moléculas que o compõem e assim obter o plasma. Contudo, conforme vimos em (1.1), em qualquer gás sempre há algum grau de ionização e portanto a simples designação gás ionizado não é uma boa definição de plasma. Uma definição mais precisa é a seguinte:

*Plasma é um gás quase-neutro composto por elétrons, íons positivos e partículas eletricamente neutras que exibem comportamento coletivo.*

Para entender a definição precisamos agora estabelecer os conceitos de comportamento

coletivo e quase-neutralidade.

## 1.2 Comportamento coletivo

Em um plasma, elétrons, íons e partículas neutras estão em constante movimento térmico e frequentemente colidem entre si. Nesse aspecto o plasma não difere dos gases ordinários, possuindo assim um comportamento de fluido. Contudo, uma das características básicas dos plasmas não reside nas colisões randômicas de suas partículas, mas no fato delas interagirem entre si através de forças de longo alcance.

Por ser composto por partículas carregadas, o movimento relativo entre porções do plasma pode gerar concentrações locais de cargas positivas e negativas que, de acordo com as leis do eletromagnetismo, dão origem a existência de campos elétricos. Além disso, esse movimento produz correntes elétricas e conseqüentemente campos magnéticos.

A existência desses campos permite que perturbações locais possam se propagar por uma vasta região do plasma, afetando assim o movimento de partículas muito distantes. Neste aspecto o plasma exibe um caráter coletivo, que lhe confere uma série de propriedades particulares não observadas nos gases neutros.

## 1.3 Quase-neutralidade e Blindagem de Debye

Uma característica fundamental do comportamento de um plasma é sua capacidade em blindar potenciais elétricos locais nele aplicados. Na ausência de campos externos e em um volume pequeno comparado com o comprimento característico de variação de parâmetros macroscópicos como densidade e temperatura, porém suficientemente grande para conter um grande número de partículas, a carga líquida total é nula:

$$\sum_a e_a n_a = 0, \quad (1.2)$$

onde  $e_a$  e  $n_a$  representam, respectivamente, a carga e a densidade das partículas da espécie  $a$ . A equação (1.2) expressa a neutralidade macroscópica do plasma.

Suponha que, na tentativa de gerar um campo elétrico no interior de um plasma, inserimos duas esferas carregadas conectadas a uma bateria.

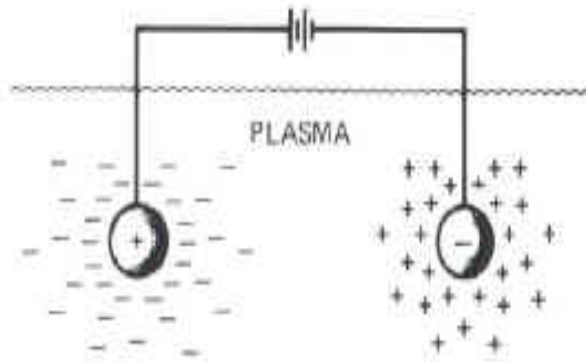


Figura 1: Desenho esquemático da blindagem de Debye.

Para restaurar a neutralidade, o plasma responde de modo a formar uma nuvem de íons em torno da esfera negativa e uma nuvem de elétrons em torno da esfera positiva. Se a agitação térmica das partículas for nula, deverá existir na nuvem a mesma quantidade de carga, em módulo, que há na esfera. Neste caso, a blindagem é perfeita e nenhum campo elétrico residual é observado fora da nuvem. Por outro lado, se admitirmos algum grau de agitação térmica, as partículas que estiverem na borda<sup>1</sup> da nuvem, onde o campo elétrico é fraco, possuem energia térmica suficiente para escapar do poço de potencial eletrostático. Nessa situação, a blindagem não é perfeita e potenciais da ordem de  $k_B T/e$  podem penetrar no plasma, causando o aparecimento de campos elétricos finitos.

Vamos agora considerar que a esfera positiva encontra-se na origem do sistema de coordenadas e possui um potencial eletrostático  $\varphi_0$ . O potencial nos pontos ao seu redor satisfaz a equação de Poisson, que em uma dimensão é dada por

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -e(n_i - n_e), \quad (1.3)$$

onde  $n_i$  e  $n_e$  representam, respectivamente, as densidades de íons e de elétrons.

Se assumirmos  $m_i/m_e \rightarrow \infty$ , então, dentro da escala de tempo do experimento, os íons não realizam movimentos significativos (aproximação de íons fixos). Dessa forma, temos que  $n_i = n_0$ , onde  $n_0$  representa a densidade de partículas nas regiões distantes da esfera, livres de sua influência.

Na presença de um potencial elétrico a função de distribuição dos elétrons no equilíbrio térmico é

<sup>1</sup>Denominamos borda da nuvem a região em que a energia potencial eletrostática é aproximadamente igual à energia térmica das partículas.

$$F_e(v) = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{1/2} \exp \left[ - \left( \frac{1}{2} m_e v^2 - e\varphi \right) / k_B T_e \right]. \quad (1.4)$$

A densidade de elétrons pode ser obtida a partir da integração da função de distribuição sobre todas as velocidades

$$\begin{aligned} n_e &= \int_{-\infty}^{\infty} F_e(v) dv \\ &= n_0 \exp \left( \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

que corresponde a uma distribuição de Boltzmann e satisfaz  $n_0 = n_e(0)$ .

Vamos agora substituir a densidade de elétrons obtida em (1.5) na equação de Poisson. Assim, obtemos

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = en_0 \left[ \exp \left( \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right) - 1 \right]. \quad (1.6)$$

Expandindo a exponencial em série de Taylor, temos

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = en_0 \left[ \frac{e\varphi}{k_B T_e} + \frac{1}{2} \left( \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right)^2 + \dots \right]. \quad (1.7)$$

Assumindo que o potencial eletrostático é fraco o suficiente tal que  $e\varphi \ll k_B T_e$  (critério para plasma), podemos negligenciar os termos de ordem superior a um na expansão e, assim, obter

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T_e} \varphi, \quad (1.8)$$

cuja solução é dada por

$$\varphi = \varphi_0 \exp(-|x|/\lambda_D), \quad (1.9)$$

onde

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

A quantidade  $\lambda_D$  é denominada comprimento de Debye [19, 18, 20] e representa uma medida da distância característica a partir da qual potenciais localizados são blindados no plasma. A partir dela podemos definir uma esfera de raio  $\lambda_D$  denominada *esfera de Debye* que representa a região do plasma que contém as partículas que blindam o potencial local. O número de partículas carregadas dentro da esfera é dado por

$$N_D = n_0 \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3. \quad (1.11)$$

As partículas dentro da esfera de Debye não sentem a presença de campos eletrostáticos gerados fora dela. Por esse motivo dizemos que o comportamento coletivo do plasma ocorre dentro dessa esfera, região onde as partículas interagem através de forças eletromagnéticas.

## 1.4 Frequência de Plasma

Quando um plasma experimenta uma perturbação instantânea em seu estado de equilíbrio, surgem campos auto-consistentes <sup>2</sup> que agem sobre as partículas na tentativa de restaurar a neutralidade do sistema. Esses campos são responsáveis por colocar os elétrons em oscilação com uma frequência bem definida. Os íons, por sua vez, devido sua inércia, não tem tempo para responder aos campos oscilatórios e são considerados fixos.

Para ilustrar esse processo, vamos considerar que uma camada de elétrons de um plasma inicialmente uniforme e em repouso é deslocada, em relação a um fundo de íons fixos, pela ação de uma força externa.

Quando essa influência externa é subitamente removida, o campo elétrico interno resultante do deslocamento das cargas acelera os elétrons, cuja dinâmica é dada pela equação

$$m_e \ddot{x} = -eE = -\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} x, \quad (1.12)$$

onde  $E = en_0 x / \epsilon_0$  é obtido a partir da Lei de Gauss.

Obtemos de (1.12) que a dinâmica da camada de elétrons é uma oscilação harmônica com frequência

---

<sup>2</sup>Campos gerados pelas partículas do próprio plasma.

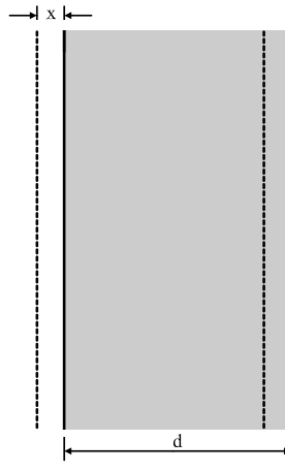


Figura 2: Camada de elétrons deslocada de sua posição de equilíbrio;  $d$  e  $x$  representam a espessura e o deslocamento da camada, respectivamente.

$$\omega_p = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}. \quad (1.13)$$

Essas oscilações, que estão intimamente associadas ao efeito da blindagem dos campos elétricos, são denominadas oscilações de *Langmuir* [3, 21] e são as mais simples que podemos observar em um plasma<sup>3</sup>. A frequência dessas oscilações é denominada *frequência natural de plasma* ou simplesmente *frequência de plasma*.

## 1.5 Critérios para o Plasma

As oscilações coletivas em um plasma estão intimamente associadas à blindagem dos campos elétricos. Essa blindagem, por sua vez, deve-se a uma distribuição de cargas em uma esfera de raio  $\lambda_D$ . Contudo, se as dimensões do plasma forem inferiores ao comprimento de Debye essa blindagem não será efetiva e o sistema não se comportará verdadeiramente como um plasma. Uma condição necessária para que um gás ionizado seja considerado plasma é que ele seja denso o suficiente tal que

$$\lambda_D \ll L, \quad (1.14)$$

onde  $L$  representa a dimensão do plasma.

Em adição à (1.14) o comportamento coletivo requer ainda que haja um grande

---

<sup>3</sup>É importante ressaltar que para a derivação das oscilações de Langmuir negligenciamos a dinâmica dos íons e o movimento térmico dos elétrons.



número de partículas na esfera de Debye

$$N_D \gg 1. \quad (1.15)$$

Se definirmos o parâmetro  $g$  como

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3}, \quad (1.16)$$

a condição (1.15) pode ser reescrita como

$$g \ll 1. \quad (1.17)$$

O parâmetro  $g$  é chamado *parâmetro de plasma* e representa uma medida da razão da energia potencial média entre as partículas e da energia cinética média do plasma [18]. A condição (1.17) é denominada *aproximação de plasma*.

Um último aspecto que deve ser observado diz respeito às colisões dos elétrons com as partículas neutras. Seja  $\tau$  o tempo médio entre essas colisões, então, para que um gás ionizado exiba comportamento coletivo, devemos ter

$$\omega_p \tau > 1. \quad (1.18)$$

A condição anterior garante que forças hidrodinâmicas comuns (forças de colisão) não determinarão o comportamento do plasma.

Os critérios (1.14), (1.17) e (1.18), juntamente com a condição de neutralidade (1.2) devem ser satisfeitos em um plasma.

## 2 Ondas em plasmas

Nesse capítulo estudaremos as oscilações coletivas em plasmas por meio das duas formulações usuais: a teoria hidrodinâmica e a teoria cinética. Em cada formulação estudaremos o problema das oscilações coletivas em um plasma livre<sup>1</sup> e em um plasma magnetizado<sup>2</sup>.

Na teoria hidrodinâmica o caráter individual das partículas que compõem o sistema é negligenciado. Em vez disso, o plasma é tratado sob um ponto de vista puramente macroscópico, sendo composto por elementos de volume com valores médios bem definidos de velocidade e densidade. Nessa formulação o plasma é visto como um fluido condutor cuja dinâmica é governada por uma combinação das Leis de Maxwell e das equações de Navier-Stokes. A abordagem hidrodinâmica é precisa quando o movimento térmico das partículas do plasma é negligenciável quando comparado ao movimento em resposta aos campos auto-consistentes ou quando a frequência de colisão é suficientemente alta de tal forma que a função de distribuição é mantida próxima à Maxwelliana. A teoria cinética, por outro lado, descreve o plasma como uma coleção de partículas a qual podemos associar uma função de distribuição não necessariamente Maxwelliana. Plasmas não colisionais, por exemplo, ficam mais bem descritos por uma abordagem cinética, pois seu tratamento não fica restrito ao limite de baixas temperaturas. Nessa formulação as equações do eletromagnetismo em conjunto com as equações cinéticas determinam a evolução temporal do sistema.

### 2.1 Teoria Hidrodinâmica

Nessa seção faremos um estudo das ondas em plasmas no regime  $\omega \gg \omega_{col}$ , onde  $\omega$  é a frequência de oscilação dos campos auto-consistentes do plasma e  $\omega_{col}$  a frequência de colisão. Nesse caso, podemos negligenciar as colisões e tratar o sistema como não

---

<sup>1</sup>Entende-se por plasma livre um plasma que não esteja submetido a campos externos.

<sup>2</sup>Um plasma sujeito a um campo magnético uniforme e estático.

colisional. Além disso, negligenciaremos o efeito do movimento térmico das partículas, isto é, assumiremos um plasma frio, em que a velocidade de propagação das ondas é consideravelmente superior à velocidade térmica das partículas. Trabalharemos também na aproximação de íons fixos e, portanto, os elétrons representam a única espécie de interesse dinâmico que compõe o plasma.

### 2.1.1 Descrição hidrodinâmica para um plasma livre

A velocidade média dos elétrons  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(\mathbf{x}, t)$  e sua densidade  $n_e = n_e(\mathbf{x}, t)$  satisfazem a equação de continuidade

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \quad (2.1)$$

e a equação de movimento

$$\frac{D_e \mathbf{u}_e}{Dt} = -\frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}), \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são os campos elétrico e magnético das ondas e o operador  $D_e/Dt$  é definido por

$$\frac{D_e}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla,$$

denominado derivada convectiva ou derivada material.

Os campos satisfazem as equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{J}$  e  $\rho$  são as densidade de corrente e de carga produzidas pelos elétrons, dadas por

$$\mathbf{J} = -en_e \mathbf{u}_e \quad (2.7)$$

$$\rho = -e(n_e - n_0), \quad (2.8)$$

sendo  $n_0$  a densidade de equilíbrio dos elétrons que, pela condição (1.2), é igual a densidade de íons.

As equações (2.1) - (2.8) formam um conjunto de equações que descrevem a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma frio na formulação hidrodinâmica.

Para resolver tais equações utilizaremos o procedimento de linearização, que consiste em separar as variáveis macroscópicas do plasma em duas partes: uma correspondente à configuração de equilíbrio, que representaremos com subíndice 0, e uma parte correspondente a uma pequena perturbação, que representaremos com subíndice 1,

$$n_e = n_0 + n_1; \quad \frac{|n_1|}{n_0} \ll 1 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_{e,0} + \mathbf{u}_{e,1}; \quad \frac{|\mathbf{u}_{e,1}|}{|\mathbf{u}_{e,0}|} \ll 1 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1. \quad (2.12)$$

Esse procedimento nos permite obter equações dinâmicas para as perturbações.

As quantidades  $n_0$ ,  $\mathbf{u}_{e,0}$ ,  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  em (2.9) - (2.12) expressam o estado do plasma na ausência de oscilação. Admitindo que no equilíbrio o plasma é uniforme, neutro e encontra-se em repouso

$$n_e = n_i = n_0, \quad \mathbf{u}_{e,0} = \mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0. \quad (2.13)$$

A equação de movimento para as perturbações fica dada por

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e,1}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_1, \quad (2.14)$$

onde negligenciamos os termos de ordem quadrática na perturbação.

Assumindo que as perturbações  $n_1$ ,  $\mathbf{u}_{e,1}$ ,  $\mathbf{E}_1$  são oscilações harmônicas

$$n_1, \mathbf{u}_{e,1}, \mathbf{E}_1 \propto \exp[i(kx - \omega t)], \quad (2.15)$$

segue que,

$$\mathbf{u}_{e,1} = -\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{E}_1. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.7), obtemos a lei de Ohm, que relaciona densidade de corrente e campo elétrico

$$\mathbf{J}_1 = \sigma \mathbf{E}_1, \quad (2.17)$$

onde

$$\sigma \equiv \sigma(\omega) = \frac{ie^2 n_0}{m_e \omega} \quad (2.18)$$

é denominada condutividade de alta frequência do plasma.

Vamos agora introduzir o vetor deslocamento elétrico dado por

$$\frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mathbf{J}_1. \quad (2.19)$$

Assumindo uma dependência do tipo  $e^{-i\omega t}$  para todas as variáveis dinâmicas do plasma e utilizando as equações (2.17) e (2.18), obtemos

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon(\omega) \mathbf{E}_1, \quad (2.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega} = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e \omega^2} \right) \\ \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

é a permissividade elétrica do plasma.

Retornando às equações de Maxwell, segue de (2.3) e (2.4) com  $E, B \sim e^{-i\omega t}$  que

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{B}_1 \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = -i\mu_0\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}_1 \quad (2.23)$$

e como consequência de (2.22), temos

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1, \quad (2.24)$$

isto é, os campos elétrico, magnético e o vetor de onda são ortogonais entre si.

Substituindo (2.24) em (2.23) e utilizando a identidade para o produto vetorial triplo, obtemos

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = -\mu_0\omega^2\epsilon(\omega)\mathbf{E}_1 \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) - (k^2 - \mu_0\omega^2\epsilon(\omega))\mathbf{E}_1 = 0. \quad (2.25b)$$

Vemos da equação (2.25b) que, para uma onda puramente transversal, o primeiro termo se anula e devemos necessariamente ter

$$\epsilon(\omega) = \frac{k^2}{\mu_0\omega^2}. \quad (2.26)$$

Por outro lado, se tomarmos o produto escalar de (2.25b) com o vetor de onda, temos

$$\mu_0\omega\epsilon(\omega)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.27)$$

donde vemos que para uma onda puramente longitudinal a equação a ser satisfeita é

$$\epsilon(\omega) = 0. \quad (2.28)$$

As equações (2.26) e (2.28) com  $\epsilon(\omega)$  dado por (2.21) são conhecidas como relações de dispersão dos modos transversais e longitudinais, respectivamente. Elas fornecem uma relação funcional entre a frequência  $\omega$  e a magnitude do vetor de onda  $k$  dos modos que podem se propagar no plasma.

A componente elétrica dos modos transversais está associada com uma componente magnética [Eq. (2.24)] o que não ocorre com os modos longitudinais. Por esse motivo dizemos que os modos transversais são eletromagnéticos enquanto que os modos longitudinais são eletrostáticos.

As equações obtidas para as relações de dispersão fornecem restrições para os modos coletivos em um plasma frio livre de colisões. Concluimos das equações (2.28) e (2.21) que os modos longitudinais, independente do comprimento de onda, possuem frequência igual à frequência de plasma (modos de Langmuir). Por outro lado, de acordo com as equações (2.26) e (2.21), constatamos que os modos transversais somente são capazes de se propagar com frequência superior à frequência de plasma. Essa característica permite, por exemplo, que se determine, por meio da reflexão ou não de ondas eletromagnéticas, a densidade de um plasma. Este fenômeno foi observado na década de 1920 por G. Breit e M. Tuve, que descobriram a reflexão de ondas de rádio pela ionosfera.

A partir de então, em virtude do desenvolvimento no setor de comunicações, surgiu um grande interesse nos fenômenos associados à propagação de ondas eletromagnéticas na atmosfera. Contudo, o plasma presente na ionosfera está também sujeito ao campo magnético terrestre e por esse motivo, nessa época, fenômenos relacionados a plasmas magnetizados foram extensivamente estudados.

### 2.1.2 Descrição hidrodinâmica para um plasma magnetizado

Estudaremos agora as oscilações coletivas em um plasma sujeito a um campo magnético uniforme e estático  $\mathbf{B}_0$ . Nessa seção continuaremos assumindo modos de alta frequência em regime de plasma frio.

Nesse caso, as equações hidrodinâmicas necessárias para a descrição do plasma assumem a forma

$$\frac{D_e \mathbf{u}_e}{Dt} = -\frac{e}{m_e} \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u}_e \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B})] \} \quad (2.29)$$

$$e \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0. \quad (2.30)$$

Os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  das ondas são determinados a partir das equações (2.3) - (2.6), onde as densidades de corrente e de carga são dadas por (2.7) e (2.8), respectivamente. É importante notar que, devido à condição (2.13), não faremos mais distinção entre as

variáveis  $\mathbf{u}_e$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  e suas correspondentes perturbações  $\mathbf{u}_{e,1}$ ,  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{B}_1$ .

Assumindo oscilações de pequena amplitude, obtemos, após linearizar (2.29) e (2.30), as seguintes equações:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0) \quad (2.31)$$

$$e \frac{\partial n'_e}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_e = 0, \quad (2.32)$$

onde  $n'_e = n_e - n_0$ .

No caso de ondas monocromáticas, as variáveis dinâmicas são proporcionais a  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$  e as equações (2.31) e (2.32) tomam a forma

$$-i\omega \mathbf{u}_e + \frac{e}{m_e} (\mathbf{u}_e \times B_0) = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}, \quad (2.33)$$

$$n'_e = n_0 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e}{\omega}. \quad (2.34)$$

Tomando o eixo-z ao longo da direção do campo  $\mathbf{B}_0$ , obtemos de (2.33) as seguintes expressões para as componentes da velocidade

$$u_{ex} = -\frac{e(i\omega E_x + \omega_c E_y)}{m_e(\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad u_{ey} = -\frac{e(i\omega E_y - \omega_c E_x)}{m_e(\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad u_{ez} = -\frac{ieE_z}{m_e\omega}, \quad (2.35)$$

onde  $\omega_c = eB_0/m_e$  é a frequência ciclotrônica dos elétrons.

Utilizando as equações em (2.35) podemos, por meio das relações apresentadas na seção anterior, determinar a densidade de corrente  $\mathbf{J} = -en_0\mathbf{u}_e$ , o tensor condutividade elétrica  $\sigma_{ij}$  e o tensor permissividade elétrica relativa ou constante dielétrica  $\varepsilon_{ij}$ , definido por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0}, \quad (2.36)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  é o tensor permissividade elétrica.

O tensor constante dielétrica do plasma possui a seguinte forma:



$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

onde as componentes  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são dadas por

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (2.38)$$

Quando  $\mathbf{B}_0 = 0$ , o plasma é isotrópico e o tensor  $\varepsilon_{ij}$  torna-se proporcional ao tensor unitário,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_3 \delta_{ij}$ .

A Lei de Ampère-Maxwell em (2.4) pode ser reescrita em termos do vetor deslocamento elétrico definido em (2.19) da seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.39)$$

onde o vetor  $\mathbf{D}$  é dado pelo produto

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}(\omega) \cdot \mathbf{E}. \quad (2.40)$$

Obtemos, das equações (2.39) e (2.40), para o caso de ondas planas monocromáticas na direção do eixo-x, a equação

$$ik\mathbf{x} \times \mathbf{B} = -i\mu_0\omega\boldsymbol{\epsilon}(\omega) \cdot \mathbf{E}. \quad (2.41)$$

Para oscilações longitudinais ( $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}$ ), o primeiro membro de (2.41) se anula, e nesse caso, a componente  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1$  deve, obrigatoriamente, ser nula. Dessa forma, obtemos para o plasma um modo não propagativo com frequência dada por

$$\omega^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2, \quad (2.42)$$

denominada *frequência híbrida*.

## 2.2 Teoria Cinética

A teoria de fluido usada na seção anterior é a descrição mais simples para um plasma. De fato, essa aproximação é suficiente para descrever uma ampla variedade de fenômenos observados, contudo, há alguns fenômenos para os quais esse tratamento é inadequado. Nesse caso, precisamos considerar uma função de distribuição  $F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  para as partículas do tipo  $a$  que constituem o plasma.

A função de distribuição para as partículas do tipo  $a$  é definida por

$$F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{dN_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{d^3x d^3v}, \quad (2.43)$$

onde  $dN_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  representa o número de partículas do tipo  $a$  que, no instante  $t$ , se encontram no elemento de volume  $d^3x d^3v$  em torno do ponto  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  do espaço de fase.

A densidade de partículas dessa espécie,  $n_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , pode ser obtida integrando (2.43) sobre todo o espaço de velocidades,

$$n_a(\mathbf{x}, t) = \int F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.44)$$

Podemos ainda definir a função de distribuição normalizada,  $f_a$ , que pode ser obtida pela substituição  $dN_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rightarrow dN_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)/n_a(\mathbf{x}, t)$  e  $F_a \rightarrow f_a$  em (2.43). Dessa forma, temos

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{n_a(\mathbf{x}, t)} F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (2.45)$$

que implica em sua normalização

$$\int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v = 1. \quad (2.46)$$

Torna-se bastante conveniente trabalhar com esse tipo de distribuição normalizada, uma vez que a elas podemos atribuir a interpretação de densidade de probabilidade, o que facilita bastante o cálculo de valores médios de quantidades físicas.

Seja  $G_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  uma grandeza física qualquer associada às partículas do tipo  $a$  do plasma, então seu valor médio é dado por

$$\langle G_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = \int G_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.47)$$

e portanto, a velocidade média das partículas é dada por

$$\mathbf{u}_a(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.48)$$

A densidade total de carga e de corrente no plasma podem ser obtidas a partir de (2.44) e (2.48), sendo dadas, respectivamente, por

$$\rho_a(\mathbf{x}, t) = \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) = \sum_a e_a \int F_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.49)$$

$$e \mathbf{J}_a(\mathbf{x}, t) = \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_a(\mathbf{x}, t) = \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.50)$$

onde somamos sobre todas as espécies que compõem o plasma.

As equações (2.48) - (2.50) nos mostram que as variáveis macroscópicas de interesse físico necessárias para uma descrição macroscópica do plasma podem ser obtidas sistematicamente, uma vez que conhecemos a função de distribuição.

A função de distribuição, por sua vez, no limite não colisional, satisfaz a equação de Vlasov [19, 18, 22, 21, 23]

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_a + \frac{e_a}{m_a} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.51)$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são os campos médios aos quais as partículas estão sujeitas.

A equação de Vlasov, juntamente com as equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.55)$$

compõem um sistema de equações auto-consistentes para as funções  $f_a$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Esse

sistema foi estudado pela primeira vez por Vlasov [4] e por esse motivo é denominado sistema de equações de Vlasov.

Apesar do sistema de equações não-lineares em (2.51) - (2.55) ser bastante complexo, podemos observar que ele é satisfeito pelas funções

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{a0}(v), \quad \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad (2.56)$$

pois as densidades de carga e de corrente em (2.49) e (2.50) se anulam em virtude da condição (1.2) para a neutralidade do plasma e devido à isotropia da função de distribuição.

Novamente vamos repetir o procedimento de linearização discutido na seção anterior. Definimos um estado de equilíbrio para o sistema e em seguida examinamos uma solução que difere ligeiramente da solução de equilíbrio, isto é, consideraremos perturbações nas funções  $f_{a0}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  dadas em (2.56),

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{a0}(v) + f_{a1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t); \quad |f_{a1}| \ll f_{a0} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1, \quad (2.58)$$

onde as funções  $f_{a1}$ ,  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  são perturbações pequenas o suficiente de tal forma que, quando substituirmos (2.57) e (2.58) no sistema de equações de Vlasov, seja possível desprezar os termos de ordem quadrática nessas quantidades.

Como resultado, obtemos o seguinte sistema de equações para as perturbações

$$\frac{\partial f_{a1}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_{a1} + \frac{e_a}{m_a} \left( \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0 \quad (2.59)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \left( \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) \int \mathbf{v} f_{a1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \right) \quad (2.60)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (2.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (2.62)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) \int f_{a1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.63)$$

A partir de agora vamos omitir o subíndice 1, dado que trabalharemos exclusivamente

com as perturbações.

A equação (2.59) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_a = -\frac{e_a}{m_a} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right), \quad (2.64)$$

onde o segundo membro representa um termo não-uniforme. A expressão para  $f_a$  é então composta por duas partes: a solução da equação homogênea, que satisfaz a condição inicial

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) \quad \text{quando } t = 0 \quad (2.65)$$

e a solução especial da equação não-uniforme. Como resultado obtemos

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_a(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}, 0) - \frac{e_a}{m_a} \int_0^t \left( \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - t'), t') dt' \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right). \quad (2.66)$$

Pode-se verificar por diferenciação direta que (2.66) satisfaz (2.64).

Vamos agora expandir todas as funções em integrais de Fourier com respeito às coordenadas a fim de obter equações para os coeficientes de Fourier. Desse modo, as funções podem ser dadas pelas seguintes expressões

$$f_a = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3k \quad (2.67)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3k \quad (2.68)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3k. \quad (2.69)$$

Substituindo (2.67) - (2.69) em (2.66), obtemos a seguinte equação para os coeficientes de Fourier da função  $f_a$

$$f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) = f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) - \frac{e_a}{m_a} \int_0^t \left( \mathbf{E}(\mathbf{k}, t') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t - t')) dt' \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right). \quad (2.70)$$

Multiplicando (2.70) por  $e_a n_a$ , somando sobre  $a$  e integrando sobre  $\mathbf{v}$ , obtemos as componentes de Fourier da densidade de carga

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{k}, t) = & \sum_a e_a n_a \int f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) d^3v \\ & - \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{m_a} \int \int_0^t \left( \mathbf{E}(\mathbf{k}, t') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t - t')) \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right) dt' d^3v. \end{aligned} \quad (2.71)$$

A expressão para a densidade total de carga consiste de duas partes. A primeira é completamente determinada pela configuração inicial da função de distribuição e é, portanto, uma função conhecida das coordenadas e do tempo. Denotaremos essa parte por  $\rho^{ext}$  (a densidade de cargas “externas”). A segunda parte, que é proporcional a magnitude do campo elétrico, corresponde a densidade de carga induzida, que denotaremos por  $\rho^{ind}$ . Assim, a expressão (2.71) pode ser escrita na forma

$$\rho(\mathbf{k}, t) = \rho^{ext}(\mathbf{k}, t) + \rho^{ind}(\mathbf{k}, t). \quad (2.72)$$

Se agora multiplicarmos (2.70) por  $e_a n_a \mathbf{v}$ , somarmos sobre  $a$  e integrarmos sobre  $\mathbf{v}$ , obtemos a seguinte expressão para as componentes de Fourier da densidade de corrente

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{k}, t) = & \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) d^3v \\ & - \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{m_a} \int \int_0^t \int \mathbf{v} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t - t')) \left( \mathbf{E}(\mathbf{k}, t') \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}} \right) dt' d^3v. \end{aligned} \quad (2.73)$$

A densidade de corrente também pode ser representada pela soma de uma corrente “externa” e outra induzida

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{J}^{ext}(\mathbf{k}, t) + \mathbf{J}^{ind}(\mathbf{k}, t). \quad (2.74)$$

Vamos agora efetuar a transformada de Fourier do campo elétrico dado em (2.68) em relação ao tempo

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \exp(i\omega t) dt. \quad (2.75)$$

Procedendo de forma análoga podemos determinar as funções  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)$  e  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$ .

Usando o teorema da convolução e lembrando que

$$-i \int_0^{\infty} \exp(i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t) dt = \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (2.76)$$

obtemos as expressões

$$\rho^{ext}(\mathbf{k}, \omega) = i \sum_a e_a n_a \int \frac{f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \quad (2.77)$$

$$\mathbf{J}^{ext}(\mathbf{k}, \omega) = i \sum_a e_a n_a \int \frac{\mathbf{v} f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, 0)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \quad (2.78)$$

$$\rho^{ind}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{m_a} \int \frac{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \quad (2.79)$$

$$\mathbf{J}^{ind}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{m_a} \int \frac{\mathbf{v} (\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v. \quad (2.80)$$

Seja  $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  o tensor condutividade elétrica, então, pela lei de Ohm, temos

$$J_i^{ind}(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.81)$$

A partir das equações (2.80) e (2.81), podemos obter a seguinte expressão para o tensor condutividade elétrica do plasma

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_a \sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{m_a} \int \frac{v_i \frac{\partial f_{a0}}{\partial v_j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v, \quad (2.82)$$

onde  $\sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{k}, \omega)$  é denominada condutividade de alta frequência das partículas  $a$  do plasma.

O vetor deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  é dado por

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 E_i(\mathbf{k}, \omega) + \frac{i}{\omega} \sigma_{ij} E_j(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j, \quad (2.83)$$

onde  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  é o tensor permissividade elétrica do plasma, que está relacionado com o tensor condutividade da seguinte forma:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \delta_{ij} + \frac{i}{\omega} \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.84)$$

Substituindo (2.82) em (2.84) obtemos a expressão para o tensor adimensional constante dielétrica (ou permissividade elétrica relativa)

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0} = \delta_{ij} + \sum_a \pi_{ij}^{(a)}, \quad (2.85)$$

onde a quantidade  $\pi_{ij}^{(a)}$  é denominada polarizabilidade de alta frequência das partículas  $a$  do plasma, dada por

$$\pi_{ij}^{(a)} = \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sigma_{ij}^{(a)} = \frac{e_a^2 n_a}{\epsilon_0 m_a \omega} \int \frac{v_i \frac{\partial f_{a0}}{\partial v_j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v. \quad (2.86)$$

Para estabelecer a estrutura geral do tensor  $\epsilon_{ij}$ , devemos notar que como ele depende somente do vetor  $\mathbf{k}$ , os únicos tensores de segundo rank independentes que podemos construir são o tensor identidade  $\delta_{ij}$  e o tensor  $k_i k_j$ . Portanto, o tensor  $\epsilon_{ij}$  deve ter a estrutura

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.87)$$

As funções  $\epsilon_{\parallel}$ ,  $\epsilon_{\perp}$  são chamadas respectivamente de constante dielétrica “longitudinal” e “transversal”.

Segue de (2.87) que

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{ij} \frac{k_i k_j}{k^2} \quad \text{e} \quad 2\epsilon_{\perp} = \epsilon_{ij} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (2.88)$$

Substituindo (2.85) com  $\pi_{ij}^{(a)}$  dado por (2.86) em (2.88), obtemos as formas explícitas para  $\epsilon_{\parallel}$ ,  $\epsilon_{\perp}$

$$\epsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{\epsilon_0 m_a k^2 \omega} \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \quad (2.89)$$

$$\epsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{2\epsilon_0 m_a k^2 \omega} \int \frac{((\mathbf{k} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{k}) \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v. \quad (2.90)$$



As expressões (2.89) e (2.90) são frequentemente escritas de uma forma ligeiramente diferente. Se utilizarmos, na expressão (2.89), o fato de que  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^{-1} = -1 + \omega/(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$  e integrarmos (2.90) por partes, obtemos

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{\epsilon_0 m_a k^2} \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \quad (2.91)$$

$$\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{\epsilon_0 m_a \omega} \int \frac{f_{a0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v. \quad (2.92)$$

Vemos então que na teoria cinética as propriedades dielétricas de um plasma cujas partículas obedecem a uma distribuição de velocidades isotrópica são determinadas por duas funções escalares do vetor de onda e da frequência,  $\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$  e  $\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega)$ .

### 2.2.1 Propagação de ondas eletrostáticas em um plasma livre

Na seção anterior obtivemos equações independentes para as constantes dielétrica longitudinal e transversal. Isto significa que na ausência de campos externos e na condição de isotropia da função de distribuição, as ondas longitudinal e transversal propagam-se independentemente. Nessa seção nos restringiremos ao estudo das ondas longitudinais.

Na descrição hidrodinâmica vimos que os modos longitudinais satisfazem

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (2.93)$$

cuja expressão explícita é dada a partir de (2.91) por

$$1 + \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{\epsilon_0 m_a k^2} \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{a0}}{\partial \mathbf{v}})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v = 0. \quad (2.94)$$

A equação (2.94) é conhecida como *relação de dispersão* dos modos longitudinais e define uma relação funcional entre a frequência  $\omega$  e o vetor de onda  $\mathbf{k}$  dos modos longitudinais que podem se propagar no plasma.

Examinaremos a solução da relação de dispersão para o caso mais simples, em que podemos negligenciar o movimento dos íons (aproximação de íons fixos) devido a sua baixíssima mobilidade comparada à dos elétrons. Assim, em vez de assumir as formas  $a = e, i$ , o subíndice  $a$  representará somente os elétrons. Como resultado, obtemos

$$1 + \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e k^2} \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v = 0. \quad (2.95)$$

Assumindo uma temperatura eletrônica nula  $T_e = 0$ , a função de distribuição pode ser escrita na forma

$$f_{e0}(v) = \delta(v). \quad (2.96)$$

Substituindo (2.96) em (2.95) e integrando por partes em relação à velocidade, obtemos

$$1 - \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \int \frac{\delta(\mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} d^3 v = 0. \quad (2.97)$$

Utilizando a propriedade de filtragem da função delta para efetuar a integral em  $\mathbf{v}$ , obtemos

$$1 - \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 0, \quad (2.98)$$

que resulta em

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}} \equiv \omega_p. \quad (2.99)$$

Portanto, no regime de temperatura nula, as únicas oscilações longitudinais possíveis para um plasma eletrônico são os modos de Langmuir.

## 2.2.2 Modos de Bernstein

Nessa seção estamos interessados em descrever os modos propagativos de pequenas amplitudes em um plasma magnetizado próximo às condições de equilíbrio. Continuaremos com a abordagem cinética, porém, diferente da seção anterior, não nos preocuparemos com a dinâmica das demais espécies, além dos elétrons. Em outras palavras, assumiremos um plasma de elétrons.

Vamos novamente admitir que as partículas que compõem o sistema são descritas por uma função de distribuição do tipo

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_0(v_\perp, v_\parallel) + F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) ; |F_1| \ll F_0 \quad (2.100)$$

e que as perturbações, tanto na função de distribuição quanto nos campos elétrico e magnético, se propagam no plasma como ondas planas

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_1(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (2.101)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (2.102)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \quad (2.103)$$

No limite não colisional, a função de distribuição satisfaz a equação de Vlasov, que na presença de um campo magnetostático externo  $\mathbf{B}_0$  assume a forma

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F + \frac{e_a}{m_a} \{ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times [\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.104)$$

Substituindo (2.100) - (2.103) em (2.104) e tomando somente os termos de primeira ordem na perturbação, obtemos

$$-i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})F_1(\mathbf{v}) - \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F_0(v_\perp, v_\parallel)}{\partial \mathbf{v}} = \frac{e}{m}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial F_1(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.105)$$

Admitindo que o campo magnetostático externo só possui componente ao longo do eixo-z, o segundo membro de (2.105) fica dado por

$$\frac{e}{m}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial F_1(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -\omega_c \left( v_x \frac{\partial F_1}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial F_1}{\partial v_x} \right) = -\omega_c \frac{dF_1}{d\phi}, \quad (2.106)$$

onde  $\phi$  é o ângulo polar no sistema de coordenadas cilíndricas definido no espaço das velocidades.

Das equações de Maxwell, temos

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (2.107)$$

que, juntamente com a identidade para o produto vetorial triplo, nos permite obter

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{\omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}] \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.108)$$

Substituindo (2.108) e (2.106) em (2.105), obtemos

$$\frac{dF_1}{d\phi} - i \frac{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{\omega_c} F_1 = \frac{e}{\omega_c m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}] \right\} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.109)$$

Admitindo uma propagação ao longo do eixo-x, obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dF_1}{d\phi} - i \frac{(\omega - kv_{\perp} \cos\phi)}{\omega_c} F_1 = \frac{e}{\omega_c m} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} (\cos\phi E_x + \text{sen}\phi E_y) + \left[ \frac{k}{\omega} \left( v_z \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right) \cos\phi + \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right] E_z \right\}, \quad (2.110)$$

que admite a solução

$$F_1(\mathbf{v}) = \frac{1}{\mu(\phi)} \int_{-\infty}^{\phi} \mu(\phi') q(\phi') d\phi', \quad (2.111)$$

onde o fator integrante,  $\mu(\phi)$ , é dado por

$$\mu(\phi) = \exp \left[ -i \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \phi + i \left( \frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \right) \text{sen}\phi \right] \quad (2.112)$$

e  $q(\phi)$  representa o segundo membro de (2.110).

Se mudarmos a variável de integração para  $\phi' = \phi - \phi''$ , a equação (2.111) assume a forma

$$F_1(\mathbf{v}) = \frac{e}{m\omega_c} \exp \left[ -i \left( \frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \right) \text{sen}\phi \right] \int_0^{\phi} d\phi' \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} [\cos(\phi - \phi') E_x + \text{sen}(\phi - \phi') E_y] + \left[ \frac{k}{\omega} \left( v_z \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right) \cos(\phi - \phi') + \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right] E_z \right\} \exp[g(\phi')], \quad (2.113)$$

onde

$$g(\phi') = -i \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \phi' + i \left( \frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \right) \text{sen}(\phi - \phi'). \quad (2.114)$$

A densidade de corrente é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (2.115)$$

onde a amplitude complexa  $\mathbf{J}$  é

$$\mathbf{J} = -e \int \mathbf{v} F_1(\mathbf{v}) d^3v. \quad (2.116)$$

Expressando a velocidade e o elemento de volume em coordenadas cilíndricas, temos

$$\mathbf{J} = -e \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dv_z F_1(\mathbf{v}) (v_{\perp} \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + v_{\perp} \text{sen}\phi \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (2.117)$$

As amplitudes da densidade de corrente e do campo elétrico estão relacionados por meio do tensor condutividade elétrica da seguinte forma:

$$J_i = \sigma_{ij} E_j. \quad (2.118)$$

Substituindo (2.113) em (2.117) e utilizando as equações em (2.118), obtemos

$$\sigma_{ij} = A_i B_j(v_{\parallel}, v_{\perp}, \phi), \quad (2.119)$$

onde definimos os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  por

$$\mathbf{A} = -\frac{e^2}{m\omega} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 dv_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left(-i \frac{kv_{\perp}}{\omega_c} \text{sen}\phi\right) \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \text{sen}\phi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{\infty} d\phi' \exp[g(\phi')] \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} \cos(\phi - \phi') \\ \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} \text{sen}(\phi - \phi') \\ \frac{k}{\omega} \left( v_z \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \right) \cos(\phi - \phi') + \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

Vamos nos limitar ao cálculo da componente  $\sigma_{xx}$ , que será suficiente para as análises posteriores. Para isso calcularemos primeiramente a integral em  $\phi'$  da componente  $B_x$

$$I_1 = \int_0^\infty d\phi' \cos(\phi - \phi') \exp[g(\phi')]. \quad (2.122)$$

Diferenciando (2.114) em relação a  $\phi'$ , obtemos

$$\cos(\phi - \phi') = \frac{\omega}{kv_\perp} + i \frac{\omega_c}{kv_\perp} \frac{dg(\phi')}{d\phi'}. \quad (2.123)$$

Assim, a equação (2.122) fica

$$I_1 = \frac{\omega}{kv_\perp} \int_0^\infty d\phi' \exp[g(\phi')] + i \frac{\omega_c}{kv_\perp} \int_0^\infty d\{ \exp[g(\phi')] \}, \quad (2.124)$$

uma vez que  $d\{ \exp[g(\phi')] \} = \exp[g(\phi')] d\phi'$ . Portanto,

$$I_1 = \frac{\omega}{kv_\perp} \int_0^\infty d\phi' \exp[g(\phi')] - i \frac{\omega_c}{kv_\perp} \exp\left(i \frac{kv_\perp}{\omega_c} \text{sen}\phi\right). \quad (2.125)$$

Para calcular a integral em (2.125), vamos introduzir a variável

$$\xi = \frac{kv_\perp}{\omega_c} \quad (2.126)$$

e expressar o termo  $\exp[g(\phi')]$  por uma série em termos das funções de Bessel  $J_n(\xi)$

$$\exp[g(\phi')] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi) \exp(in\phi) \exp[i(\omega/\omega_c - n)\phi']. \quad (2.127)$$

Substituindo (2.127) em (2.125) e efetuando a integração em  $\phi'$ , temos

$$I_1 = -\frac{i}{\xi} \exp(i\xi \text{sen}\phi) + \frac{i\omega}{kv_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi) \exp(in\phi)}{(\omega/\omega_c - n)}. \quad (2.128)$$

O próximo passo para obtermos a expressão de  $\sigma_{xx}$  é calcular a integral com relação a  $\phi$ , que denotaremos por  $I_2$ . Substituindo (2.128) em (2.119), obtemos

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \left[ -\frac{i}{\xi} + \frac{i\omega}{kv_\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi) \exp(in\phi - i\xi \text{sen}\phi)}{(\omega/\omega_c - n)} \right]. \quad (2.129)$$

O primeiro termo entre colchetes se anula quando integrado, e para calcular o segundo termo devemos notar que é possível escrever

$$\cos\phi = \frac{n}{\xi} + \frac{i}{\xi} \frac{d}{d\phi} (in\phi - i\xi \operatorname{sen}\phi). \quad (2.130)$$

Dessa forma, a integral  $I_2$  fica dada por

$$I_2 = \frac{i\omega}{kv_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\xi)}{\omega/\omega_c - n} \left\{ \frac{n}{\xi} \int_0^{2\pi} d\phi \exp(in\phi - i\xi \operatorname{sen}\phi) + \frac{i}{\xi} \int_0^{2\pi} d[\exp(in\phi - i\xi \operatorname{sen}\phi)] \right\}. \quad (2.131)$$

A segunda integral entre chaves se anula, enquanto que a primeira integral pode ser obtida da relação

$$\int_0^{2\pi} d\phi \exp(in\phi - i\xi \operatorname{sen}\phi) = 2\pi J_n(\xi), \quad (2.132)$$

conhecida como integral de Bessel. Portanto, a equação (2.131) assume a forma

$$I_2 = \frac{2\pi i\omega}{\xi\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n J_n^2(\xi)}{\omega/\omega_c - n}. \quad (2.133)$$

Esse resultado pode ainda ser reescrito de uma forma ligeiramente diferente

$$I_2 = \frac{2\pi i}{\xi^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ n J_n^2(\xi) + \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{(\omega/\omega_c - n)} \right]. \quad (2.134)$$

Como  $J_{-n}(\xi) = (-1)^n J_n(\xi)$ , o somatório do primeiro termo entre colchetes se anula e assim obtemos

$$I_2 = \frac{2\pi i}{\xi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{\omega/\omega_c - n}. \quad (2.135)$$

Uma vez efetuada todas as integrais angulares, obtemos para a componente  $\sigma_{xx}$  a expressão

$$\sigma_{xx} = -\frac{e^2}{m\omega_c} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 dv_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}} I_2 dv_z. \quad (2.136)$$

Assim, substituindo (2.135) em (2.136), temos

$$\sigma_{xx} = -\frac{2\pi i e^2}{m\omega_c} \int_0^\infty v_\perp^2 dv_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_z \frac{\omega_c}{kv_\perp} \frac{\partial F_0}{\partial v_\perp} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{n^2 J_n^2(\xi)}{\omega/\omega_c - n}. \quad (2.137)$$

Assumindo uma função de distribuição de equilíbrio Maxwelliana

$$F_0(v) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(v_\perp^2 + v_\parallel^2)}{2k_B T} \right] \quad (2.138)$$

e definindo a variável adimensional

$$\bar{\nu} \equiv \frac{k_B T}{m} \frac{k^2}{\omega_c^2}, \quad (2.139)$$

a integral em (2.137) fica dada por

$$\sigma_{xx} = \frac{in_0 e^2}{m\omega_c \nu^2} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{n^2}{(\omega/\omega_c - n)} \int_0^\infty \xi J_n^2(\xi) \exp \left( -\frac{\xi^2}{2\nu} \right) d\xi. \quad (2.140)$$

Para efetuar a integral em (2.140) utilizaremos a integral segunda de Weber [24]

$$\int_0^\infty dx \exp(-p^2 x^2) J_l(ax) J_l(bx) x = \frac{1}{2p^2} \exp \left( -\frac{a^2 + b^2}{4p^2} \right) I_l \left( \frac{ab}{2p^2} \right), \quad (2.141)$$

onde  $I_n(x)$  representa as funções de Bessel modificadas, que estão relacionadas com as funções de Bessel por

$$I_n(x) = (-i)^n J_n(ix). \quad (2.142)$$

Substituindo (2.141) em (2.140), obtemos

$$\sigma_{xx} = \frac{in_0 e^2}{m\omega_c} \frac{\exp(-\bar{\nu})}{\bar{\nu}} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{n^2 I_n(\bar{\nu})}{(\omega/\omega_c - n)}. \quad (2.143)$$

As componentes  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$  são nulas, haja vista que seus integrandos são funções ímpares de  $v_z$ .

Das equações de Maxwell e com os campos dados em (2.102) e (2.103), obtemos



$$k\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B} \quad (2.144)$$

$$ik\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c^2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.145)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.146)$$

é o tensor permissividade elétrica relativa.

De (2.143) e (2.146), temos

$$\epsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \frac{\exp(-\bar{\nu})}{\bar{\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 I_n(\bar{\nu})}{(\omega/\omega_c - n)}. \quad (2.147)$$

Nas formas de componentes, as equações (2.144) e (2.145) ficam dadas por

$$B_x = 0 \quad (2.148)$$

$$E_z = -\frac{\omega}{k}B_y \quad (2.149)$$

$$E_y = \frac{\omega}{k}B_z \quad (2.150)$$

$$-\frac{\omega}{kc^2}(\epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y) = 0 \quad (2.151)$$

$$-\frac{\omega}{kc^2}(\epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y) = -B_z \quad (2.152)$$

$$-\frac{\omega}{kc^2}\epsilon_{zz}E_z = B_y, \quad (2.153)$$

onde usamos o fato de que  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ .

Para analisarmos os modos longitudinais, vamos assumir  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ , isto é,  $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}}$ . Nesse caso, a equação (2.151) assume a forma

$$\epsilon_{xx}E_x = 0 \quad (2.154)$$

e conseqüentemente, para uma solução não trivial ( $E_x \neq 0$ ), obtemos

$$\epsilon_{xx} = 0, \quad (2.155)$$

cuja expressão explicita é

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \frac{\exp(-\bar{\nu})}{\bar{\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 I_n(\bar{\nu})}{(\omega/\omega_c - n)}. \quad (2.156)$$

Utilizando a propriedade  $I_{-n}(\bar{\nu}) = I_n(\bar{\nu})$  das funções de Bessel modificadas, temos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n I_n(\bar{\nu}) = 0. \quad (2.157)$$

Somando (2.157) ao segundo membro de (2.156) e introduzindo a variável  $\bar{\omega} \equiv \omega/\omega_c$ , obtemos

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{\exp(-\bar{\nu})}{\bar{\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n I_n(\bar{\nu})}{(\bar{\omega} - n)}. \quad (2.158)$$

Essa equação foi extensivamente investigada por Bernstein [1], que mostrou que ela admite soluções para  $\omega$  e  $k$  reais. Por essa razão, essas soluções são conhecidas como *modos de Bernstein*.

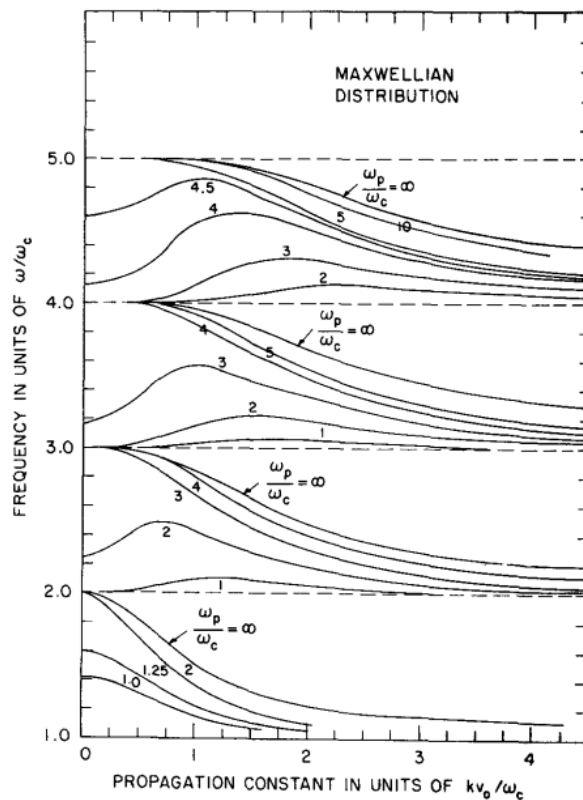


Figura 3: Relação de dispersão para as ondas de Bernstein.[Figura retirada de S. Gruber e G. Bekefi, Phys. of Fluids **11**, 122(1968)]

Apesar da relação de dispersão (2.158), em termos das variáveis adimensionais  $\bar{\nu}$  e  $\bar{\omega}$ , não depender da temperatura, sua existência só é possível porque consideramos que ela é não nula. Atualmente essas ondas têm sido observadas por sondas espaciais cujos dados sobre sua dispersão foram utilizados, por exemplo, por Moncuquet, Meyer-Vernet e Hoang [25] para inferir a temperatura dos elétrons no plasma magnetizado da lua Io de Júpiter.

No limite de baixas temperaturas ( $\bar{\nu} \ll 1$ ) as funções de Bessel que contribuem efetivamente para a componente  $\varepsilon_{xx}$  são:  $I_{\pm 1}(\bar{\nu})$ . Neste caso, é válida a aproximação  $I_n(\bar{\nu}) \approx (1/n!)(\bar{\nu}/2)^n$  e, assim, o segundo membro de (2.147) se reduz à expressão obtida para  $\varepsilon_1$  em (2.38). Nesse regime, os modos de Bernstein se reduzem ao modo estacionário com frequência híbrida previsto pela teoria hidrodinâmica.

### *3 Uma formulação quântica para a propagação de ondas eletrostáticas em um plasma magnetizado*

Nesse capítulo apresentaremos os cálculos desenvolvidos em nossos estudos, onde utilizamos ferramentas de mecânica quântica para analisar os efeitos de uma radiação eletromagnética externa sobre os modos coletivos longitudinais em um plasma magnetizado. Para isso partimos do problema de um elétron na presença de um campo magnético uniforme e estático na direção do eixo-z e um campo de radiação polarizado na direção do eixo-x.

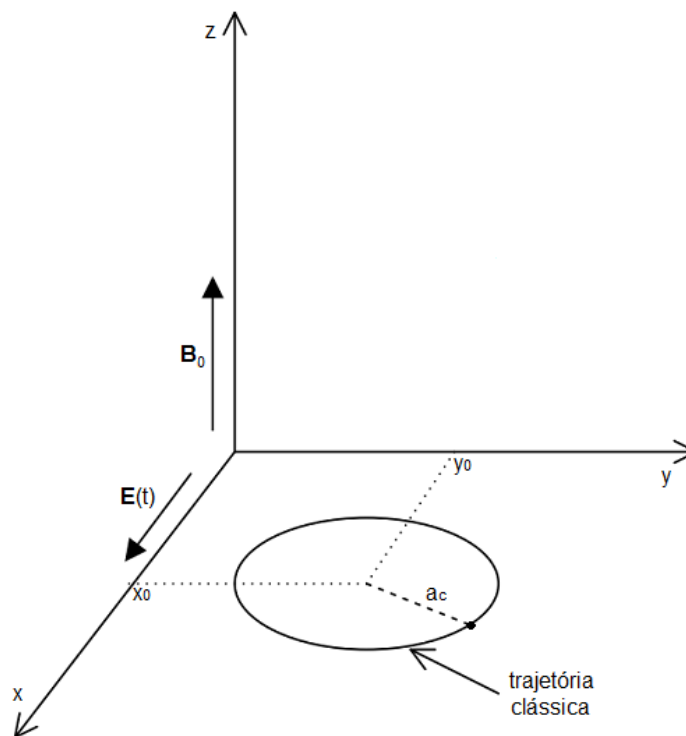


Figura 4: Orientação dos campos externos.

Uma escolha de calibre apropriada para o campo magnetostático é

$$\mathbf{A}_0 = -B_0 y \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.1)$$

enquanto que o campo de radiação, na aproximação de dipolo [26], fica bem descrito pelo potencial vetor

$$\mathbf{A}(t) = -\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.2)$$

que resulta em

$$\mathbf{E}(t) = E \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.3)$$

Como estamos trabalhando no regime de íons fixos e em intervalos de tempo bem inferiores ao tempo de relaxação, a dinâmica do sistema consiste somente no movimento dos elétrons e em suas interações com os campos externos presentes no plasma. Nessa perspectiva, a equação de movimento para o elétron é

$$H_0 \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (3.4)$$

onde

$$H_0 = \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}_0 - e\mathbf{A}(t))^2, \quad (3.5)$$

ou ainda,

$$H_0 = \frac{1}{2m_e} \left( p_x + eB_0 y + \frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e}. \quad (3.6)$$

Não estamos considerando no Hamiltoniano (3.5) o termo de interação entre o spin e o campo magnetostático axial externo, pois se trata de um termo constante [27], responsável por introduzir somente uma fase à função de onda e, portanto, não altera o cálculo dos valores médios das quantidades macroscópicas. Além disso, tomaremos mais adiante o limite clássico e os efeitos, puramente quânticos, associados ao spin se anulam.

Na ausência de radiação, o Hamiltoniano  $H_0$  se reduz ao operador  $H_L$ , que descreve

o elétron na presença exclusiva do campo magnetostático. As funções de onda  $\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ , por sua vez, se reduzem às funções de onda de Landau  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , isto é,

$$H_0 \xrightarrow{E \rightarrow 0} H_L = \frac{1}{2m_e} (p_x + eB_0y)^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e} \quad (3.7)$$

e

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{E \rightarrow 0} \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (3.8)$$

O Hamiltoniano  $H_L$  independe do tempo o que nos permite obter a seguinte equação para a parte espacial da função de onda

$$H_L \Phi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r}) = E_{n,k_z} \Phi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

onde

$$E_{n,k_z} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} \quad (3.10)$$

é a expressão para os níveis de energia de um elétron em um campo magnético uniforme e estático[27].

O primeiro termo em (3.10) fornece valores discretos para a energia correspondes ao movimento do elétron no plano perpendicular ao campo magnético. Esses valores de energia são conhecidos como *níveis de Landau*.

Em (3.9),  $\Phi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r})$  representa as autofunções de Landau [27], dadas por:

$$\Phi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \exp(ik_x x) \exp(ik_z z) \chi_n(y), \quad (3.11)$$

com

$$\chi_n(y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} a_c^{\frac{1}{2}} \sqrt{2^n n!}} \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2 a_c^2}\right] H_n\left(\frac{y-y_0}{a_c}\right), \quad (3.12)$$

onde  $y_0 = \hbar k_x / m_e \omega_c$  e  $a_c = (\hbar / m_e \omega_c)^{\frac{1}{2}}$ . A função  $H_n(y)$  representa os polinômios de Hermite.

A função de onda com a dependência temporal é

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{n,k_z} t\right). \quad (3.13)$$

O Hamiltoniano (3.6) depende explicitamente do tempo e, portanto, o método de separação de variáveis não é adequado para o cálculo da função de onda em (3.4). Para isso, recorreremos a uma transformação unitária [28, 29, 30] nas funções de onda de Landau

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = U\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (3.14)$$

onde

$$U = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \mathbf{r}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{p}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \eta(t)\right). \quad (3.15)$$

A função  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  produz uma translação no espaço, a função  $\boldsymbol{\beta}(t)$  produz uma translação no momento e a função  $\eta(t)$  representa um fator de fase.

Substituindo (3.14) em (3.4) e em seguida multiplicando à esquerda ambos os membros por  $U^\dagger$ , obtemos um sistema de equações diferenciais para as funções que definem o operador unitário em (3.15). Resolvidas essas equações, temos

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_e \omega_c \gamma_1 (\cos(\omega t) - 1) y\right) \exp(-i\gamma_1 (\cos(\omega t) - 1) k_x) \cdot \exp\left(i\frac{\omega_c}{\omega} \gamma_1 \sin(\omega t) k_y\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} 2\gamma_2 \omega t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \gamma_2 \sin(\omega t)\right), \quad (3.16)$$

onde  $\gamma_1 = eE/m_e(\omega_c^2 - \omega^2)$  e  $\gamma_2 = e^2 E^2 / 8m_e \omega(\omega_c^2 - \omega^2)$ .

Os cálculos para a obtenção do operador unitário estão mais bem detalhados no Apêndice A.

Substituindo (3.16) em (3.14), obtemos a função de onda que descreve um elétron sujeito aos campos magnetostático e de radiação

$$\Psi_{n,k_x,k_z}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} F(\omega, t)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_e \omega_c \gamma_1 (\cos(\omega t) - 1) y\right) \exp\left(i\frac{\omega_c}{\omega} \gamma_1 \sin(\omega t) k_y\right) \cdot \exp(-i\gamma_1 (\cos(\omega t) - 1) k_x) \exp(ik_x x) \exp(ik_z z) \chi_n(y) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{n,k_z} t\right). \quad (3.17)$$

Os subíndices acrescentados na função de onda indicam os números quânticos que caracterizam o estado do sistema e a função  $F(\omega, t) = 2\gamma_2\omega t - \gamma_2\text{sen}(2\omega t)$  foi introduzida por conveniência de notação.

Vamos agora considerar que o elétron está sujeito também a um potencial local fraco  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  associado aos campos eletrostáticos auto-consistentes do plasma. Dessa forma, o Hamiltoniano (3.6) ganha um termo adicional e a equação dinâmica para o elétron assume a seguinte forma:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r}, t) = (H_0 - e\varphi(\mathbf{r}, t))\Psi_{n,k_x,k_z}(\mathbf{r}, t), \quad (3.18)$$

onde

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\Omega} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \quad (3.19)$$

é a expansão em série de Fourier do potencial.

Na hipótese de potencial fraco, assumimos que a energia de interação do elétron com os campos auto-consistentes do plasma é bem inferior a sua energia cinética

$$|e\varphi(\mathbf{r}, t)| \ll H_0, \quad (3.20)$$

o que nos permite usar teoria de perturbação para a obtenção da função de onda em (3.18).

As funções de ordem zero dadas em (3.17) formam um conjunto ortonormal e, portanto,

$$\left\langle \Psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \left| \Psi_{\mathbf{j}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \right. \right\rangle = \delta_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}, \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{i} = (n^{(i)}, k_x^{(i)}, k_z^{(i)})$  e  $\mathbf{j} = (n^{(j)}, k_x^{(j)}, k_z^{(j)})$ .

A relação de ortonormalidade (3.21) nos permite expandir a função de onda do elétron sujeito ao potencial local na base  $\{\Psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)\}$ , isto é,

$$\Psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}(t) \Psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}, t). \quad (3.22)$$



Substituindo (3.22) em (3.18), multiplicando em seguida ambos os membros por  $\Psi_{\mathbf{l}}^{(0)*}(\mathbf{r}, t)$  e integrando em todo espaço, obtemos

$$\frac{da_{\mathbf{l},\mathbf{m}}(t)}{dt} = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i},\mathbf{m}}(t) \left\langle \Psi_{\mathbf{l}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \left| \varphi(r, t) \right| \Psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \right\rangle, \quad (3.23)$$

que integrada de  $t_0$  a  $t$  resulta em

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}(t) = a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}(t_0) + \frac{ie}{\hbar} \sum_{\mathbf{i}} \int_{t_0}^t d\tau a_{\mathbf{i},\mathbf{m}}(\tau) \left\langle \Psi_{\mathbf{l}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \left| \varphi(r, \tau) \right| \Psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \right\rangle. \quad (3.24)$$

Vamos assumir que, devido à condição (3.20), os coeficientes  $a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}(t)$  podem ser expandidos na forma

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}(t) = a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(0)}(t) + a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(1)}(t) + a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(2)}(t) + \dots, \quad (3.25)$$

onde  $a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(j)}(t) = O(|e\varphi(\mathbf{r}, t)|^j)$ .

Substituindo (3.25) em (3.24) e igualando os termos de mesma ordem entre os dois membros, obtemos

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(0)}(t) = a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(0)}(t_0), \quad (3.26a)$$

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(1)}(t) = a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(1)}(t_0) + \frac{ie}{\hbar} \sum_{\mathbf{i}} \int_{t_0}^t d\tau a_{\mathbf{i},\mathbf{m}}^{(0)} \left\langle \Psi_{\mathbf{l}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \left| \varphi(\mathbf{r}, \tau) \right| \Psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \right\rangle. \quad (3.26b)$$

Vamos admitir que os campos auto-consistentes não são estritamente harmônicos ( $\propto e^{-i\Omega t}$ ) mas que se anulam lentamente a medida que  $t \rightarrow -\infty$  [5, 31]. Para isso adicionaremos à frequência uma parte imaginária infinitesimal e positiva, *i.e.*, substituiremos, em (3.19),  $\Omega$  por  $\Omega + i\delta$  com  $\delta \rightarrow 0^+$ .

Tomando  $t_0 = -\infty$ , obtemos

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(0)}(t_0) = \delta_{\mathbf{m},\mathbf{l}}. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.26a) e (3.26b), temos

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(0)}(t) = \delta_{\mathbf{m},\mathbf{l}}, \quad (3.28a)$$

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{m}}^{(1)}(t) = \frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \left\langle \Psi_{\mathbf{l}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \left| \varphi(\mathbf{r}, \tau) \right| \Psi_{\mathbf{m}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \right\rangle. \quad (3.28b)$$

Uma vez obtida a expressão para os coeficientes da expansão (3.22), a função de onda perturbada com correção de primeira ordem fica dada por

$$\Psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\mathbf{m}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \frac{ie}{\hbar} \sum_{\mathbf{l}} \int_{-\infty}^t d\tau \left\langle \Psi_{\mathbf{l}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \left| \varphi(\mathbf{r}, \tau) \right| \Psi_{\mathbf{m}}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) \right\rangle \Psi_{\mathbf{l}}^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (3.29)$$

onde o segundo termo do lado direito representa a primeira correção à função de onda,  $\Psi_{\mathbf{m}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ .

Para efetuar a integral em (3.29) utilizaremos as expansões em série de Bessel

$$\exp(iz\cos\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta} \quad e \quad \exp(iz\sin\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(z) e^{im\theta} \quad (3.30)$$

com  $z \in \mathbb{C}$ .

Assim, a primeira correção assume a forma

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{m}}^{(1)}(r, t) = e \sum_{n^{(l)}=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp(i\gamma_1 q_x) \left\langle n^{(l)} \left| \exp(iq_y y) \right| n^{(m)} \right\rangle \sum_{m_1, m_2} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) \cdot \\ J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \frac{\exp \left( \frac{i}{\hbar} (E_{n^{(l)}, k_z^{(l)}} - E_{n^{(m)}, k_z^{(m)}}) + (m_1 + m_2) \hbar \omega - \hbar \Omega) t \right)}{E_{n^{(l)}, k_z^{(l)}} - E_{n^{(m)}, k_z^{(m)}} + (m_1 + m_2) \hbar \omega - \hbar \Omega - i\delta} \psi_{n^{(l), k_x^{(m)} + q_x, k_z^{(m)} + q_z}^{(0)}}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde

$$\left\langle n^{(l)} \left| \exp(iq_y y) \right| n^{(m)} \right\rangle = \int dy \chi_{n^{(l)}}(y) \exp(iq_y y) \chi_{n^{(m)}}(y) \quad (3.32)$$

representa o termo de *overlap* dos níveis de Landau [29, 32].

Após algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte expressão para a função de onda

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} m_e \gamma_1 \omega_c (\cos(\omega t) - 1) y\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} F(t)\right) \exp(i\gamma_1 (\cos(\omega t) - 1) k_x^{(m)}) \\
& \exp\left(i\gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} \sin(\omega t) k_y^{(m)}\right) \exp(ik_x^{(m)} x) \exp(ik_z^{(m)} z) \left\{ \chi_{n^{(m)}}(y) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{n^{(m)}, k_z^{(m)}} t\right) + \right. \\
& e \sum_{n^{(l)}=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \left\langle n^{(l)} \left| \exp(iq_y y) \right| n^{(m)} \right\rangle \sum_{m_1, m_2} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1} \cdot \\
& J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_{n^{(l)}, k_z^{(m)} + q_z} - E_{n^{(m)}, k_z^{(m)}} + (m_1 + m_2) \hbar \omega - \hbar \Omega) t\right)}{E_{n^{(l)}, k_z^{(m)} + q_z} - E_{n^{(m)}, k_z^{(m)}} + (m_1 + m_2) \hbar \omega - \hbar \Omega - i\delta} \cdot \\
& \left. \exp(i\gamma_1 \cos(\omega t) q_x) \exp\left(i\gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} \sin(\omega t) q_y\right) \exp(iq_x x) \exp(iq_z z) \chi_{n^{(l)}}(y) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{n^{(l)}, k_z^{(m)} + q_z} t\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

A presença da perturbação (3.19) induz uma flutuação na densidade de carga que pode ser calculada a partir da função de onda (3.33) da seguinte forma:

$$\delta \rho_{n^{(m)}, k_z^{(m)}}(\mathbf{r}, t) = -e \Psi_{\mathbf{m}}^*(\mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t) - \rho_n^{(0)}(\mathbf{r}), \tag{3.34}$$

onde  $\rho_n^{(0)}$  é a densidade não perturbada de carga

$$\rho_n^{(0)}(\mathbf{r}) = -e \Psi_{\mathbf{m}}^{(0)*}(\mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{m}}^{(0)}(\mathbf{r}, t). \tag{3.35}$$

Desprezando os termos de segunda ordem no potencial, usando o fato de que os somatórios em  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\Omega$  se dão em intervalos simétricos e notando que

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x), \quad J_m(-x) = (-1)^m J_m(x) \tag{3.36}$$

e

$$\varphi^*(-\mathbf{q}, -\Omega) = \varphi(\mathbf{q}, \Omega), \tag{3.37}$$

obtemos a seguinte expressão para a flutuação na densidade de carga

$$\begin{aligned}
\delta\rho_{n^{(m)},k_z^{(m)}}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{e^2}{L_x L_z} \chi_{n^{(m)}}(y) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp(-\Omega t) \exp(iq_x x) \exp(iq_z z) \\
& \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2}\left(\gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y\right) J_{m_3}(\gamma_1 q_x) J_{m_4}\left(\gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y\right) \\
& \exp(i(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\omega t) \chi_{n^{(m)+l}}(y) \left\langle n^{(m)} + l \left| \exp(iq_y y) \right| n^{(m)} \right\rangle \\
& \left\{ \frac{1}{\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_z^{(m)} + q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}k_z^{(m)2} + (m_1 + m_2)\hbar\omega - \hbar\Omega - i\delta} + \right. \\
& \left. \frac{1}{\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_z^{(m)} - q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}k_z^{(m)2} - (m_1 + m_2)\hbar\omega + \hbar\Omega + i\delta} \right\}, \quad (3.38)
\end{aligned}$$

onde  $l = n^{(l)} - n^{(m)}$  está associado com o gap de energia entre dois níveis de Landau<sup>1</sup>.

No cálculo da flutuação na densidade de carga expandimos novamente os harmônicos  $\cos(\omega t)$  e  $\sin(\omega t)$  em (3.33).

A flutuação total na densidade de carga é dada por

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{n, k_z} F_{n, k_z} \delta\rho_{n, k_z}(\mathbf{r}, t), \quad (3.39)$$

onde estamos assumindo uma função de distribuição Maxwelliana, na condição de isotropia ( $k_B T_\perp = k_B T_z = k_B T_e$ ), *i.e.*,

$$F_{n, k_z} = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{1}{k_B T_e} (E_{n, k_z} - \varepsilon_\gamma) \right), \quad (3.40)$$

em que  $\varepsilon_\gamma = 2\gamma_2\omega$  corresponde a energia de interação do elétron com a radiação [29].

A flutuação na densidade de carga produz um potencial induzido no plasma que pode ser calculado por meio da equação de Poisson

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\delta\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}. \quad (3.41)$$

Assim como fizemos com o potencial local, vamos decompor o potencial induzido em uma série de Fourier. Dessa forma o laplaciano fica dado por

<sup>1</sup>Nesse ponto é importante não confundir a variável  $l$  introduzida na equação (3.38) com a variável de estado  $\mathbf{l}$ .

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\mathbf{q}, \Omega} q^2 \exp(-i\Omega t) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega), \quad (3.42)$$

que após ser utilizado em (3.41), fornece

$$\begin{aligned} \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega) = & - \frac{e^2}{\epsilon_0 L_x L_z} \frac{\varphi(\mathbf{q}, \Omega)}{q^2} \sum_l \sum_{n, k_z} \chi_n(y) \exp(-iq_y y) \chi_{n+l}(y) \left\langle n+l \left| \exp(iq_y y) \right| n \right\rangle \\ & \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) J_{m_3}(\gamma_1 q_x) J_{m_4} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \exp(i(m_1+m_2+m_3+m_4)\omega t) \\ & \left\{ \frac{F_{n, k_z}}{\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_z + q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}k_z^2 + (m_1 + m_2)\hbar\omega - \hbar\Omega - i\delta} + \right. \\ & \left. \frac{F_{n, k_z}}{\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_z - q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}k_z^2 - (m_1 + m_2)\hbar\omega + \hbar\Omega + i\delta} \right\}. \quad (3.43) \end{aligned}$$

Tomando a média temporal em um período de oscilação do campo de radiação, notamos, a partir do fator  $\exp(i(m_1+m_2+m_3+m_4)\omega t)$ , que somente os termos que satisfazem  $m_1+m_2+m_3+m_4=0$  contribuem para o cálculo do potencial induzido. Após tomarmos a média espacial do potencial obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega) = \langle \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega) \rangle = & - \frac{e^2}{\epsilon_0 V} \frac{\varphi(\mathbf{q}, \Omega)}{q^2} \sum_l \sum_{n, k_z} \left| \left\langle n+l \left| \exp(iq_y y) \right| n \right\rangle \right|^2 \\ & \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, m_4 \\ m_1+m_2+m_3+m_4=0}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) J_{m_3}(\gamma_1 q_x) J_{m_4} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \\ & \left\{ \frac{F_{n, k_z}}{\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_z + q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}k_z^2 + (m_1 + m_2)\hbar\omega - \hbar\Omega - i\delta} + \right. \\ & \left. \frac{F_{n, k_z}}{\hbar\omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_z - q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e}k_z^2 - (m_1 + m_2)\hbar\omega + \hbar\Omega + i\delta} \right\}. \quad (3.44) \end{aligned}$$

O potencial local total é composto por um potencial externo e pelo potencial induzido [33] calculado em (3.44)

$$\varphi(\mathbf{q}, \Omega) = \varphi_{ext}(\mathbf{q}, \Omega) + \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega), \quad (3.45)$$

que, por sua vez, satisfaz a equação

$$\varphi(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{\varphi_{ext}(\mathbf{q}, \Omega)}{\varepsilon(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (3.46)$$

A função dielétrica pode ser obtida a partir de (3.45) e (3.46), sendo dada por

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{\varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega)}{\varphi(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (3.47)$$

Substituindo (3.44) em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 V q^2} \sum_l \sum_{n, k_z} \left| \left\langle n+l \left| \exp(iq_y y) \right| n \right\rangle \right|^2 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \\ J_{m_3}(\gamma_1 q_x) J_{m_4} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \left\{ \frac{F_{n, k_z}}{\hbar \omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_z + q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2 + (m_1 + m_2) \hbar \omega - \hbar \Omega - i\delta} + \right. \\ \left. \frac{F_{n, k_z}}{\hbar \omega_c l + \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_z - q_z)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2 - (m_1 + m_2) \hbar \omega + \hbar \Omega + i\delta} \right\}. \quad (3.48) \end{aligned}$$

Usando o fato de que os somatórios em  $n$  e  $k_z$  em (3.48) são infinitos e assumindo  $n \gg l$  e  $k_z \gg q_z$ , podemos fazer as transformações

$$n \rightarrow n - l \qquad e \qquad k_z + q_z \rightarrow k_z \quad (3.49)$$

no primeiro termo da expressão entre chaves.

Com isso, a função dielétrica pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 V q^2} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) J_{m_3}(\gamma_1 q_x) J_{m_4} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \\ \sum_l \sum_{n, k_z} \left| \left\langle n+l \left| \exp(iq_y y) \right| n \right\rangle \right|^2 \frac{F_{n-l, k_z - q_z} - F_{n, k_z}}{\frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_z - q_z)^2 + \hbar \omega_c l + (m_1 + m_2) \hbar \omega - \hbar \Omega - i\delta}. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Vamos agora tomar o limite macroscópico, onde faremos o volume do sistema tender ao infinito. Nesse caso, temos

$$\sum_{n,k_z}(\dots) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} V \int (\dots) d^3v. \quad (3.51)$$

No limite clássico temos ainda que

$$\hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \frac{m}{2} v_{\perp}^2 \quad (3.52)$$

e, de acordo com [34],

$$\left| \left\langle n+l \left| \exp(iq_y y) \right| n \right\rangle \right|^2 \rightarrow J_l^2 \left( \frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right). \quad (3.53)$$

Feitas essas aproximações e as devidas simplificações no denominador de (3.50), a função dielétrica assume a forma

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 + \frac{e^2}{m_e \epsilon_0 q^2} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) J_{m_3}(\gamma_1 q_x) J_{m_4} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \\ \sum_l \int d^3v \frac{J_l^2 \left( \frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right)}{\Omega - \omega_c l - (m_1 + m_2)\omega - q_z v_z + i\delta} \left[ \frac{l\omega_c}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} + q_z \frac{\partial F}{\partial v_z} \right], \quad (3.54) \end{aligned}$$

onde expandimos o termo  $F_{n-l, k_z - q_z}$  em (3.50) até primeira ordem em torno de  $(n, k_z)$ .

Nesse ponto é importante notar que, na ausência de radiação ( $\gamma_1 = 0$ ), somente os termos  $m_1 = m_2 = 0$  contribuem para a função dielétrica<sup>2</sup>, que, dessa forma, se reduz ao caso tratado por Harris [13].

Para investigar os modos coletivos de oscilação na direção perpendicular ao campo magnetostático vamos tomar  $q_z = 0$ . Assim, a equação (3.54) assume a forma

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 + \frac{e^2}{m_e \epsilon_0 q^2} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_1 q_x) J_{m_2} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \\ J_{m_3}(\gamma_1 q_x) J_{m_4} \left( \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} q_y \right) \sum_l \int d^3v \frac{J_l^2 \left( \frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right)}{\Omega - \omega_c l - (m_1 + m_2)\omega} \frac{l\omega_c}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}}, \quad (3.55) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>A função de Bessel comporta-se como uma delta de Kronecker quando o argumento é nulo, i.e.,  $J_m^2(0) = \delta_{m,0}$ .

onde

$$F(v_{\perp}, v_z) = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\varepsilon_{\gamma}}{k_B T_e}\right) \exp\left(-\frac{m_e v_{\perp}^2}{2k_B T_e}\right) \exp\left(-\frac{m_e v_z^2}{2k_B T_e}\right) \quad (3.56)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial F(v_{\perp}, v_z)}{\partial v_{\perp}} = \left(-\frac{m_e v_{\perp}}{k_B T_e}\right) F(v_{\perp}, v_z). \quad (3.57)$$

Dessa forma, a integral em (3.55), a qual denotaremos por  $I$ , assume a forma

$$I = -\frac{l \omega_c m_e}{k_B T_e} n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp[-(v_z/v_{th})^2] \cdot \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} J_l^2\left(\frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) \exp[-(v_{\perp}/v_{th})^2], \quad (3.58)$$

onde assumimos que a energia de interação do elétron com a radiação é bem inferior a sua energia térmica.

Para efetuar a integral em  $v_{\perp}$ , utilizaremos a integral segunda de Weber [Eq. (2.141)], onde identificamos  $x = v_{\perp}/v_{th}$ ,  $a = b = v_{th} q_{\perp}/\omega_c$  e  $p = 1$ .

Assim, a integral  $I$  pode ser reescrita na forma mais simples

$$I = -\frac{l m_e n_0}{k_B T_e} \exp(-\xi_{\perp}^2) I_l(\xi_{\perp}^2), \quad (3.59)$$

onde  $\xi_{\perp}^2 = (k_B T_e/\omega_c^2 m_e) q_{\perp}^2$ .

Substituindo (3.59) em (3.55) e introduzindo a variável  $\bar{\Omega} \equiv \Omega/\omega_c$ , obtemos

$$\varepsilon(\xi, \bar{\Omega}) = 1 - \frac{\omega_p^2 \exp(-\xi_{\perp}^2)}{\omega_c^2 \xi_{\perp}^2} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} (-1)^{m_1+m_2} i^{m_1+m_3} J_{m_1}(\gamma_3 \xi_x) J_{m_2}(\gamma_4 \xi_y) J_{m_3}(\gamma_3 \xi_x) J_{m_4}(\gamma_4 \xi_y) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{\bar{\Omega} - l - (m_1 + m_2)\bar{\omega}} I_l(\xi_{\perp}^2), \quad (3.60)$$

onde  $\gamma_3 = \sqrt{2}\gamma_1\omega_c/v_{th}$  e  $\gamma_4 = \gamma_3/\bar{\omega}$ .



## 4 *Resultados Numéricos*

Neste capítulo, apresentamos os gráficos da relação de dispersão dos modos longitudinais de um plasma submetido a um campo magnetostático axial e um campo de radiação polarizado na direção do eixo-x. Restringimos-nos ao intervalo de frequências em torno dos dois primeiros harmônicos ciclotrônicos. Nos gráficos ilustrados nas Figuras de 5 a 10, fixamos os parâmetros referentes aos campos e analisamos os efeitos da densidade, da temperatura e do número de fótons envolvidos nas transições eletrônicas sobre o aspecto das curvas. Nas Figuras de 11 a 13, fixamos os valores de densidade e temperatura do plasma e analisamos o efeito da magnitude dos campos externos sobre os gráficos de dispersão. Para a plotagem dos gráficos utilizamos valores para  $B_0$ ,  $n_0$  e  $T$  tais que a aproximação de dipolo ( $\lambda_{rad} \gg \lambda_D$ ), que assumimos para o campo de radiação, fosse respeitada. Todos os cálculos numéricos foram feitos em linguagem de programação C e para a geração e o tratamento dos gráficos foi utilizado o software Gnuplot versão 4.6.0.

Para os cálculos numéricos assumimos que os plasmons propagam-se na direção do eixo-x ( $\xi_y = 0$ ,  $\xi_{\perp} = \xi_x = \xi$ ). Neste caso, a parte real da função dielétrica longitudinal assume a forma

$$\varepsilon(\xi, \bar{\Omega}) = 1 - \frac{\omega_p^2 \exp(-\xi^2)}{\omega_c^2 \xi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(\gamma_3 \xi) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{\bar{\Omega} - l - m\bar{\omega}} I_l(\xi^2), \quad (4.1)$$

onde utilizamos o fato de que somente os termos que satisfazem  $\sum_{i=1}^4 m_i = 0$  contribuem para os somatórios em (3.60).

Verificamos que na ausência de radiação ( $\gamma_3 = 0$ ), a equação (4.1), quando igualada a zero, se reduz à relação de dispersão para os modos de Bernstein discutidos anteriormente. Os termos para  $m > 0$  estão associados aos processos de emissão de fótons enquanto que  $m < 0$  correspondem aos processos de absorção.

A função dielétrica em (4.1) nos fornece a seguinte relação de dispersão para os modos

longitudinais:

$$1 + 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(\gamma_3 \xi) \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{l}{l^2 - (\bar{\Omega} - m\bar{\omega})^2} I_l(\xi^2) = 0, \quad (4.2)$$

onde utilizamos a propriedade  $I_{-n}(x) = I_n(x)$  das funções de Bessel modificadas.

Trata-se de uma relação funcional entre  $\xi$  e  $\bar{\Omega}$  que não admite uma forma explícita  $\bar{\Omega} = f(\xi)$ . A estratégia que utilizamos para resolvê-la foi fixar um valor para  $\xi$  e, por meio do método de Newton-Raphson [35], obter o seu correspondente valor  $\bar{\Omega}$ . Repetindo esse procedimento para valores de  $\xi$  indo de 0 a 2, 5, que, para  $k_B T = 1$  eV e  $B = 2$  T, corresponde a  $0 < q < 2 \cdot 10^6$  m<sup>-1</sup>, fomos capazes de gerar os gráficos da relação de dispersão. As funções de Bessel  $J_m(x)$  e  $I_l(x)$  foram geradas de modo a evitar divergências numéricas quando utilizadas no somatório em (4.2). Entretanto, apesar de garantir a convergência do somatório, essas funções apresentam um intervalo restrito de confiabilidade, conforme discutido no Apêndice B.

Conforme veremos nos gráficos posteriores, as funções de Bessel em (4.2) são responsáveis por introduzir um caráter oscilatório nas curvas de dispersão. Para analisar os fatores que contribuem para intensificar as oscilações vamos reescrever o parâmetro  $\gamma_3$  na função de Bessel da seguinte forma:

$$\gamma_3 = \sqrt{2} \frac{v_D}{v_{th}} \frac{1}{1 - \bar{\omega}^2}, \quad (4.3)$$

onde  $v_D = E/B_0$  representa o máximo valor para a velocidade de deriva devido aos campos ortogonais  $\mathbf{E}(t)$  e  $\mathbf{B}_0$ .

Devido à propriedade  $J_m(x) \approx \delta_{m0}$  para  $x \ll 1$ , percebemos que a influência da radiação externa é mais intensa quanto maior for a razão entre as velocidades de deriva e térmica e quanto mais próxima a frequência da radiação estiver da frequência ciclotrônica do elétron. Observamos que para as amplitudes dos campos externos utilizadas em nossos cálculos computacionais a influência da radiação fez-se perceptível somente na condição próxima à ressonância ( $\bar{\omega} \approx 1$ ). Apesar de não termos lidado com situações fora do regime quase-ressonante, admitimos a possibilidade de oscilações fora desse regime para o caso de plasmas submetidos a campos magnetostáticos fracos. Em campos magnéticos fracos, os níveis de Landau encontram-se bastante próximos e, portanto, há um predomínio do caráter clássico do sistema sobre o caráter quântico.

Para explicar a influência da radiação em ambos os regimes, sugerimos que em campos magnéticos intensos a radiação interage com um sistema quântico e portanto, a frequência do campo eletromagnético externo representa o principal fator responsável por excitar novos modos longitudinais. Em campos magnéticos fracos, admitimos que mesmo um campo de radiação com frequência significativamente diferente da frequência ciclotrônica é capaz de excitar novos modos. Nesse caso, o campo magnético provavelmente exerce pouca influência sobre a absorção da energia da radiação pelos elétrons [15]. Sugerimos que longe da ressonância o principal mecanismo associado à excitação de novos modos longitudinais é a amplitude do campo de radiação.

Para analisar o efeito do número de fótons envolvidos nas transições eletrônicas, truncamos o somatório em  $m$  na equação (4.2) em um número máximo  $M$  de fótons, isto é, substituímos os limites inferior e superior desse somatório por  $m = -M$  e  $m = M$ . Dessa forma, obtivemos relações de dispersão do tipo  $f_M(\xi, \bar{\Omega}) = 0$ , que, com o método descrito no parágrafo anterior, forneceram os gráficos das Figuras 5 e 6. Para a plotagem dos gráficos, consideramos um plasma com densidade  $n_0 = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  e temperatura  $k_B T = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$  (plasma de descarga gasosa). Utilizamos uma amplitude  $E = 10 \text{ Vm}^{-1}$  para o campo de radiação e um campo magnetostático de magnitude  $B_0 = 2 \text{ T}$ . Assumimos também uma radiação em regime próximo da ressonância,  $\bar{\omega} = 1.000001$ .

Observamos em todas as curvas que, independente do número de fótons envolvidos no processo, as frequências dos modos são atenuadas para a frequência ciclotrônica à medida que o número de onda adimensional  $\xi$  cresce. A introdução da radiação torna o plasma mais dispersivo com relação às oscilações longitudinais, pois amplia o intervalo de velocidades de propagação ( $d\bar{\Omega}/d\xi$ ) para esses modos. Os modos referentes à curva  $M = 1$  (modos associados às transições envolvendo emissão ou absorção de até um fóton) não admitem frequência inferior à frequência ciclotrônica. Valores inferiores a essa frequência somente são permitidos quando há pelo menos dois fótons envolvidos no processo. Verificamos também que, com os valores dos parâmetros utilizados na análise, as curvas de dispersão para  $M > 4$  são praticamente idênticas e, portanto, limitar o somatório a  $m = 5$  representa uma boa aproximação.

Os gráficos da Figura 5 nos revelam ainda outro aspecto bastante interessante no que concerne aos modos ressonantes ( $\Omega = \omega_c$ ). Nessa figura vemos que na ausência de radiação externa, os modos longitudinais em um plasma magnetizado (modos de Bernstein) possuem frequências próximas à frequência ciclotrônica, porém não iguais a esta.

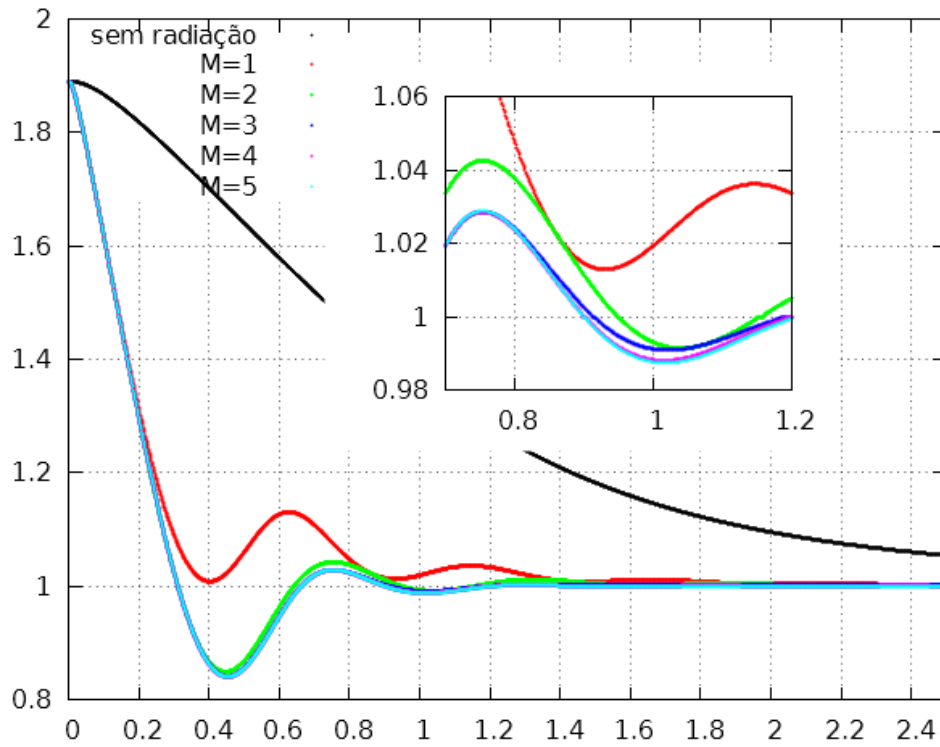


Figura 5: Relação de Dispersão  $\bar{\Omega} \times \xi$  para os modos próximos ao primeiro harmônico ciclotrônico.

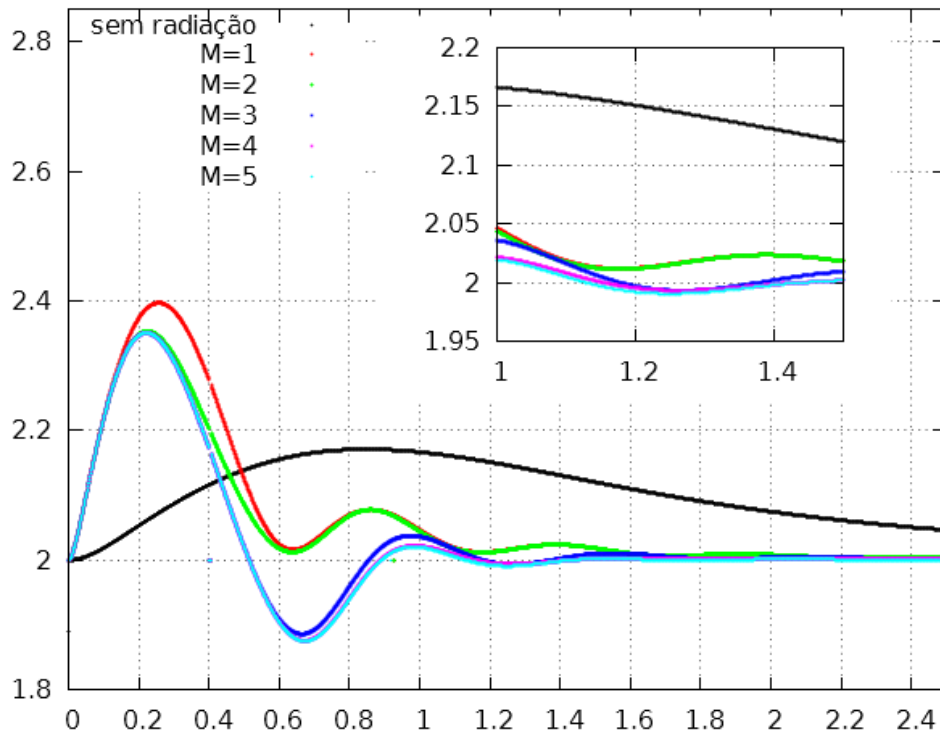


Figura 6: Relação de Dispersão  $\bar{\Omega} \times \xi$  para os modos próximos ao segundo harmônico ciclotrônico.

Neste caso, a reta correspondente à frequência ciclotrônica ( $\bar{\Omega} = 1$ ) comporta-se como um limite assintótico e não é alcançada para modos com números de onda finitos, conforme ilustrado pela curva em preto. Contudo, quando introduzimos um campo externo de radiação, observamos que as curvas para  $M \geq 2$  interceptam o eixo  $\bar{\Omega} = 1$  e portanto, modos ressonantes com números de onda finitos são permitidos no plasma. No caso  $M = 5$  (curva em azul claro), visualizamos quatro modos ressonantes, que ocorrem para  $\xi_1 = 0.31$ ,  $\xi_2 = 0.66$ ,  $\xi_3 = 0.90$  e  $\xi_4 = 1.20$ . Percebemos que esses modos ressonantes são propagativos, haja vista que as derivadas  $d\bar{\Omega}/d\xi$  são diferentes de zero nesses pontos.

Percebemos ainda que para o primeiro *branch* os modos de Bernstein admitem somente a frequência híbrida ( $\bar{\Omega}(\xi = 0)$ ) como modo estacionário. A presença do campo de radiação induz o aparecimento de outros modos estacionários no plasma, ilustrados nos gráficos da Figura 5 como os pontos em que a derivada  $d\bar{\Omega}/d\xi$  se anula. Para  $M = 1$  verificamos que esses modos ocorrem com frequência maior que a frequência ciclotrônica. Contudo, quando consideramos dois ou mais fótons envolvidos nos processos de emissão ou absorção de plasmons, modos estacionários com frequência inferior a frequência ciclotrônica também são possíveis.

Um comportamento oscilatório também foi observado em torno do segundo harmônico ciclotrônico, conforme ilustrado na Figura 6. Observamos que a presença da radiação produz um aumento acentuado da frequência dos modos com altos comprimentos de onda. Esse comportamento fica bem nítido no intervalo  $\xi \in (0, 0.4]$ . Novamente notamos que não há modos ressonantes associados às transições eletrônicas envolvendo um único fóton, pois a curva referente a  $M = 1$  não atinge o eixo  $\bar{\Omega} = 2$ . O mesmo fato foi verificado para  $M = 2$  o que nos sugere que esse comportamento se repita para os modos próximos aos harmônicos mais energéticos. Assim, esperamos que no  $n$ -ésimo *branch* os modos associados a  $1 \leq M \leq n$  não assumam frequências inferiores a  $n\omega_c$ .

Na figura 7 analisamos como a relação de dispersão é afetada à medida que variamos a densidade do plasma. Para a geração das curvas, fixamos a temperatura em  $k_B T = 1,6 \times 10^{-18}$  J e  $M = 5$ . Para os campos, assumimos os mesmos valores utilizados nos gráficos anteriores. Analisamos quatro diferentes valores de densidade:  $10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $10^{21} \text{ m}^{-3}$  e  $10^{22} \text{ m}^{-3}$ .

À medida que se aumenta a densidade do plasma, observamos para o primeiro *branch* que a frequência dos modos não propagativos com número de onda  $\xi = 0$  cresce, até atingir um valor limite igual ao dobro da frequência ciclotrônica. Esse comportamento é idêntico

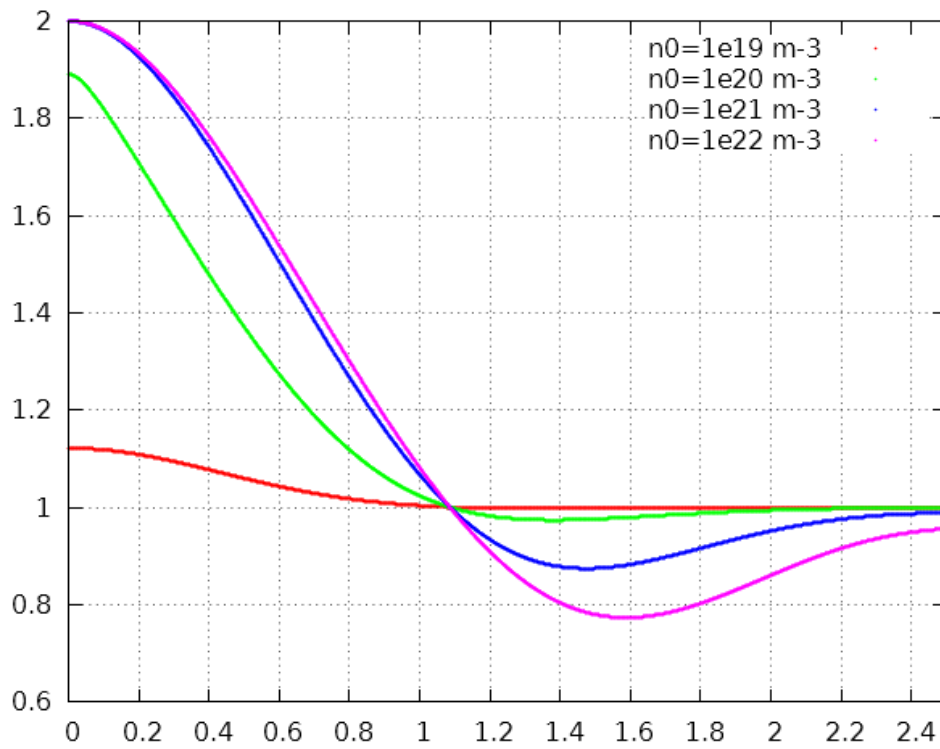


Figura 7: Relação de Dispersão em torno do primeiro harmônico para diferentes valores de densidade.

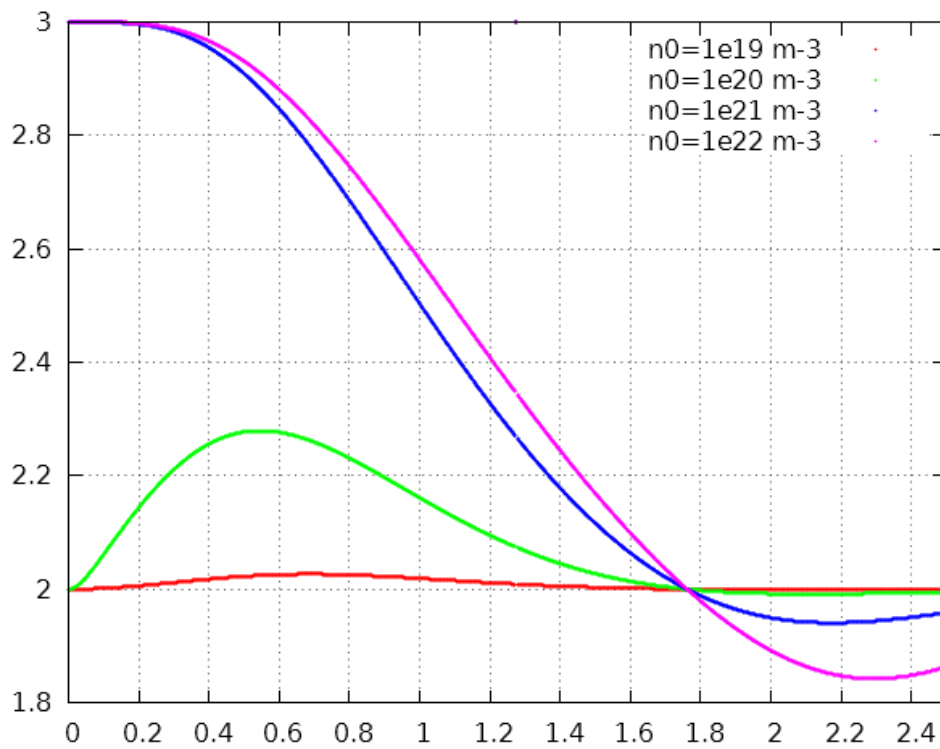


Figura 8: Relação de Dispersão em torno do segundo harmônico para diferentes valores de densidade.

ao observado em plasmas magnetizados livres de radiação (Figura 3). O que é bastante razoável uma vez que tomar  $\xi = 0$  na expressão da função dielétrica produz o mesmo efeito de fazer  $\gamma_3 = 0$  (ausência de radiação). Observamos que as oscilações em torno da frequência ciclotrônica são mais acentuadas em plasmas mais densos e que a atenuação dos modos para o modo ressonante ocorre mais “rapidamente” em plasmas menos densos. Vemos a partir do ponto intercepto das curvas que, tanto no primeiro quanto no segundo *branch*, o primeiro<sup>1</sup> modo ressonante independe da densidade do plasma.

Para analisar o efeito da temperatura do plasma sobre o aspecto das curvas de dispersão, devemos primeiramente notar que a influência térmica aparece na equação de dispersão (4.2) exclusivamente no argumento das funções de Bessel, por meio do fator  $\gamma_3 \propto v_{th}^{-1}$  dado em (4.3). Dessa forma, recorrendo novamente ao caráter delta das funções de Bessel para argumentos próximos de zero, esperamos que a influência da radiação seja menos perceptível em plasmas mais energéticos. Para verificar essa análise, fizemos gráficos da relação de dispersão dos modos longitudinais para diferentes temperaturas, que estão ilustrados nas figuras 9 e 10. Em cada gráfico consideramos as curvas referentes a  $M$  indo de 1 a 5 e o próprio modo de Bernstein (curva em preto), que conseguimos tomando  $E = 1 \times 10^{-7} \text{ Vm}^{-1}$  e  $M = 0$  no código apresentado no Apêndice C. Para a geração dos gráficos fixamos a densidade do plasma em  $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$  e os parâmetros dos campos em  $B_0 = 0,5 \text{ T}$  e  $E = 1,0 \text{ Vm}^{-1}$ .

Nas Figuras 9 e 10 uma constatação imediata é a tendência das curvas referentes a  $1 \leq M \leq 5$  para os modos de Bernstein, o que realmente comprova a diminuição do efeito da radiação à medida que aumentamos a temperatura do plasma. Para  $k_B T = 10 \text{ eV}$ , por exemplo, notamos que as curvas em azul claro ( $M = 5$ ) e vermelho ( $M = 1$ ) estão praticamente sobrepostas e portanto, para temperaturas superiores a esta, assumir cinco ou um único fóton participando do processo de transição eletrônica torna-se praticamente indiferente. Isso reflete o fato de que em plasmas bastante energéticos a energia contida no campo de radiação é pouco significativa quando comparada à energia eletrostática armazenada nos campos longitudinais. Na ótica quântica, concluímos que em plasmas frios, em que a influência da radiação é bastante perceptível, as interações elétron-fóton representam um importante mecanismo para os processos de transição eletrônica. Já em plasmas bastante energéticos o principal mecanismo de excitação dos modos são as interações elétron-plasmon e nesse cenário, a radiação atravessa o plasma sem lhe causar maiores efeitos.

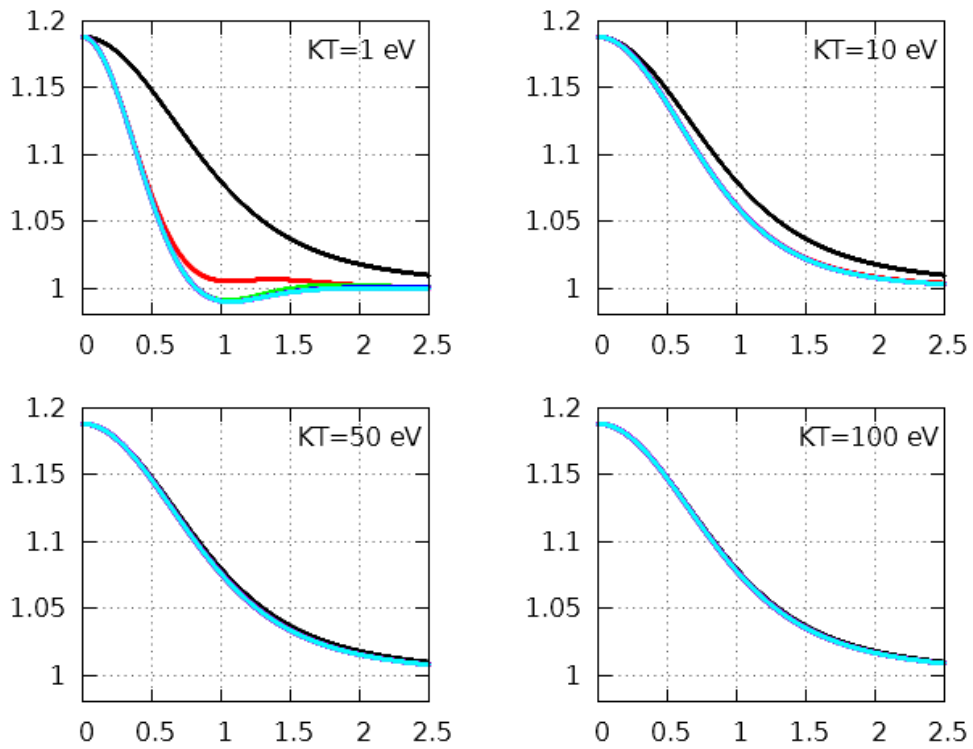


Figura 9: Gráfico da relação  $\bar{\Omega} \times \xi$  em torno do primeiro harmônico ciclotrônico para diferentes valores de temperatura e quantidades de fótons.

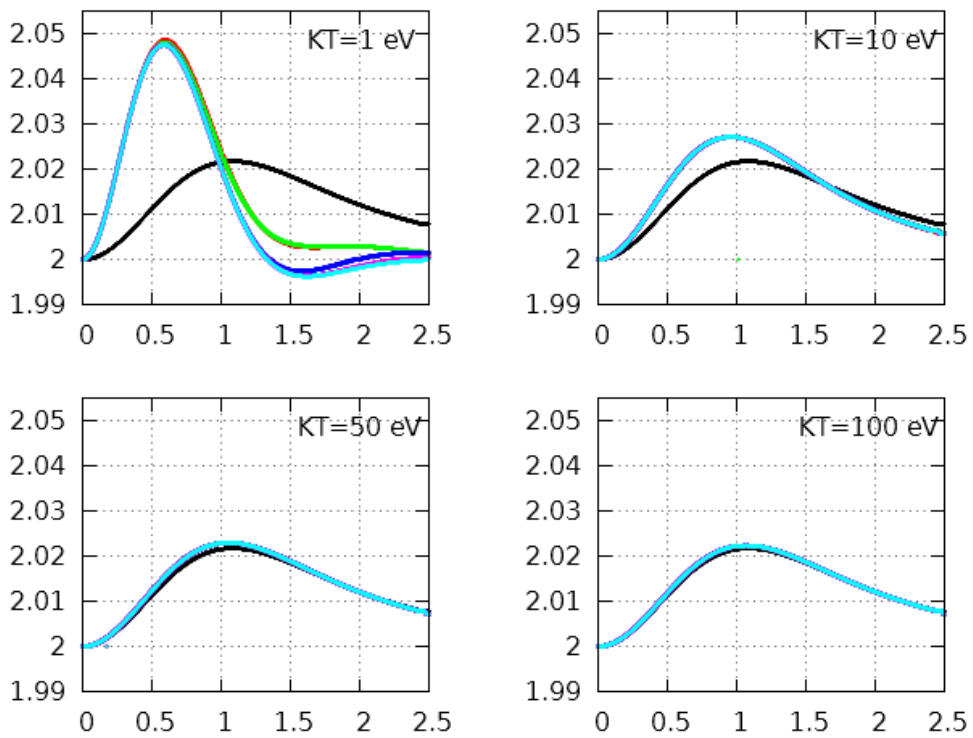


Figura 10: Gráfico da relação  $\bar{\Omega} \times \xi$  em torno do segundo harmônico ciclotrônico para diferentes valores de temperatura e quantidades de fótons.



Nas Figuras de 11 a 13 apresentamos os gráficos da relação de dispersão para diferentes valores de magnitude do campo magnetostático ( $B_0$ ) e na Figura 14 para diferentes amplitudes do campo de radiação ( $E$ ). Para analisar a influência dos parâmetros dos campos externos sobre o aspecto das curvas de dispersão fixamos em ambos os gráficos os valores de densidade e temperatura do plasma em  $n_0 = 10^{19} \text{ m}^{-3}$  e  $k_B T = 150 \text{ eV}$  e limitamos em cinco o número máximo de fótons participantes. Os gráficos das Figuras 11 e 14 foram gerados com  $E = 10 \text{ Vm}^{-1}$  e  $B_0 = 1,0 \text{ T}$ , respectivamente.

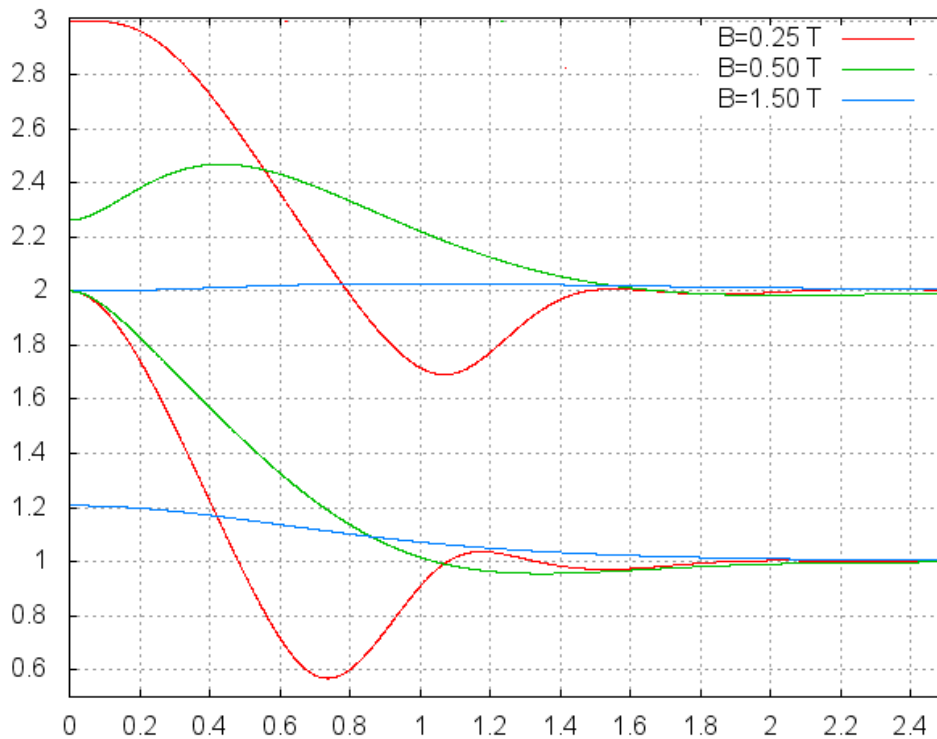


Figura 11: Gráficos de dispersão para diferentes magnitudes do campo magnetostático. Assumimos para a amplitude do campo elétrico da radiação  $E = 10 \text{ V/m}$ .

Verificamos que campos magnéticos intensos são responsáveis por confinar os modos longitudinais próximos aos modos ciclotrônicos  $\Omega \approx n\omega_c$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , o que fica bem nítido na Figura 11 principalmente na curva em azul ( $B = 1,5 \text{ T}$ ) próxima ao segundo harmônico ciclotrônico. Observamos que além de limitar a quantidade de oscilações permitidas no plasma, campos magnetostáticos intensos são responsáveis por diminuir a velocidade de propagação desses modos. Constatamos que plasmas fortemente magnetizados são menos dispersivos em relação aos modos longitudinais, o que fica ilustrado pela atenuação das oscilações nos gráficos da Figura 11. Essa diminuição no número de modos fica mais bem ilustrada nos gráficos das Figuras 12 e 13 onde os gráficos de dispersão são obtidos a

<sup>1</sup>Modo ressonante com o menor número de onda positivo.

partir de “cortes” da superfície em vermelho por planos onde  $B_0 = cte$ . Utilizamos nesses gráficos os mesmos valores de densidade e temperatura empregados nos gráficos da Figura 11. Percebemos que a superfície que contém os modos tendem aos planos  $\bar{\Omega} = 1$  e  $\bar{\Omega} = 2$  à medida que o campo magnetostático aumenta.

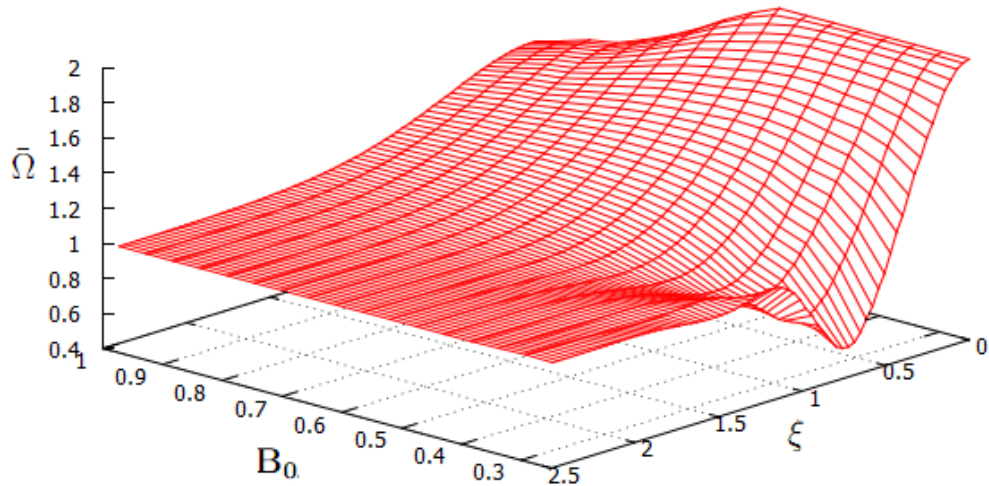


Figura 12: Gráficos de dispersão referente ao primeiro *branch* para valores de  $B_0$  entre  $0.250 T$  e  $1.000 T$  com  $E = 10 V/m$ .

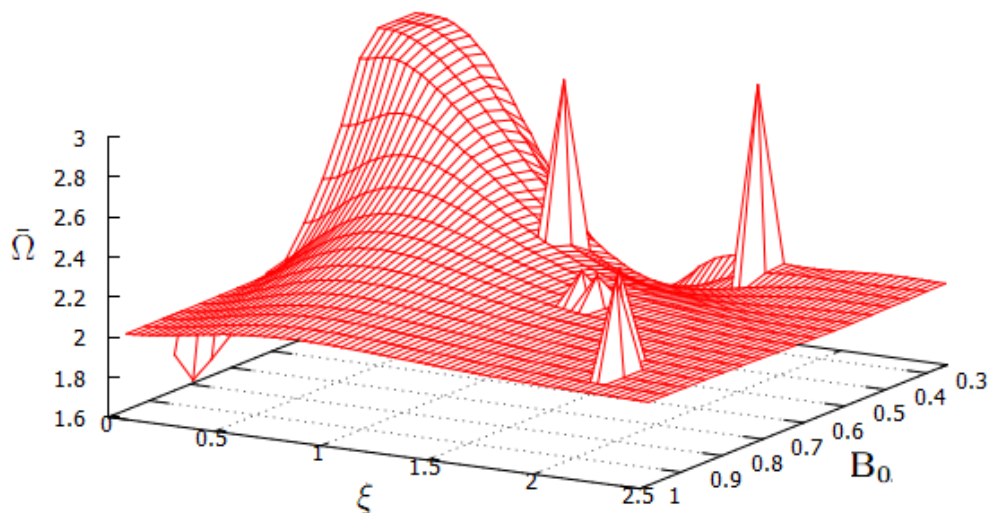


Figura 13: Gráficos de dispersão referente ao segundo *branch* para valores de  $B_0$  entre  $0.250 T$  e  $1.000 T$  com  $E = 10 V/m$ .

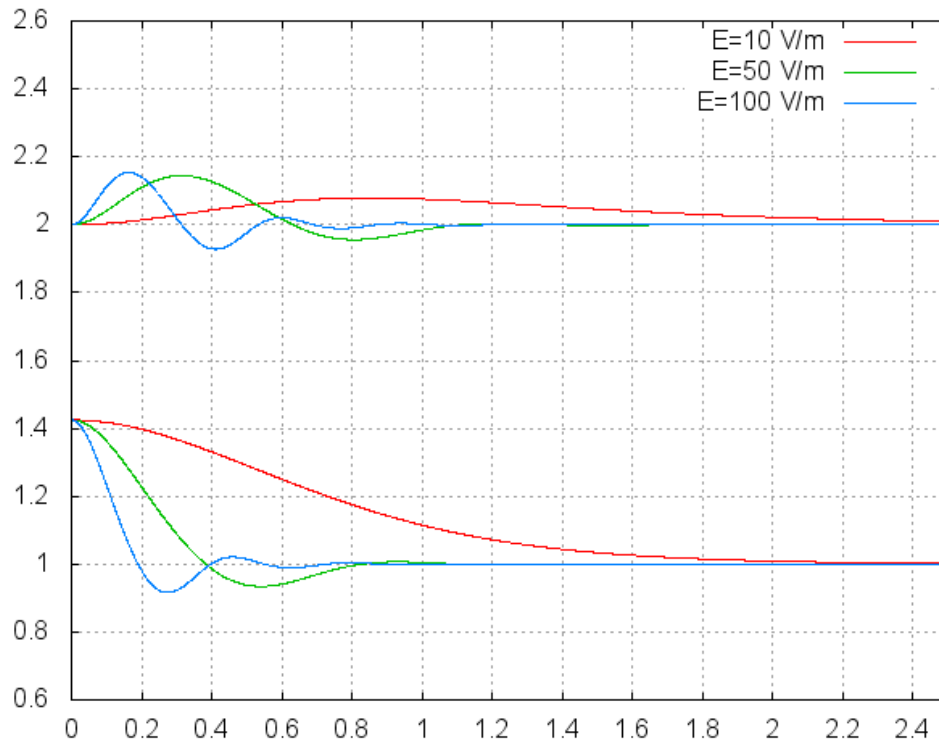


Figura 14: Gráficos de dispersão para diferentes amplitudes do campo elétrico da radiação. Admitimos um campo magnetostático  $B_0 = 1,0 T$ .

A cada pico observado na figura 13 está associado um único ponto  $(B_0, \xi, \bar{\Omega})$ . Esses pontos fora do padrão são gerados por flutuações numéricas no programa durante o cálculo da raiz da função dielétrica e portanto, não há nenhum fenômeno físico de maior interesse associado a eles.

Observamos na Figura 14 que a amplitude do campo externo de radiação não altera o modo estacionário associado a  $\xi = 0$ , porém exerce uma forte influência sobre as demais oscilações coletivas. Verificamos que a radiação externa atua como um mecanismo capaz de intensificar o decaimento dos modos para o modo ciclotrônico e ao mesmo tempo acentuar as oscilações em torno desse harmônico.

## *Conclusão*

Neste trabalho utilizamos ferramentas de mecânica quântica para obter uma equação de dispersão para os modos longitudinais em plasmas magnetizados sujeitos a um campo externo de radiação. A partir da equação obtida, fomos capazes de investigar algumas propriedades dessas oscilações coletivas, como sua dependência em relação aos parâmetros do plasma e dos campos externos.

Iniciamos com o problema de um elétron sujeito a um campo magnético uniforme e estático na direção do eixo-z e um campo externo de radiação na aproximação de dipolo com polarização ao longo do eixo-x. As soluções da equação de Schrödinger para o elétron sujeito exclusivamente aos campos externos foram obtidas em termos de um operador unitário e das soluções de Landau. Em seguida introduzimos no Hamiltoniano eletrônico um termo de energia eletrostática associado aos campos longitudinais auto-consistentes presentes no plasma. Assumindo uma pequena amplitude para esses campos e fomos capazes de determinar, por meio de teoria de perturbação, a nova função de onda para o elétron na presença do potencial eletrostático perturbativo. A partir da função de onda, obtivemos a flutuação na densidade de cargas  $e$ , por meio da equação de Poisson, calculamos o potencial induzido. Com o potencial induzido fomos capazes de obter uma expressão para a função dielétrica do plasma  $\epsilon$ , por fim, obter uma relação funcional entre as variáveis adimensionais  $\xi$  e  $\bar{\Omega}$ . Na ausência de radiação, recuperamos os resultados obtidos anteriormente por Harris(1969) e por Bernstein(1958).

Percebemos que o somatório sobre o número de fótons representa a principal alteração na equação de dispersão comparada àquela obtida para os modos de Bernstein. Nesse somatório, as funções de Bessel desempenham um importante papel, pois são responsáveis pelo caráter oscilatório observado nas curvas de dispersão. Assumindo um campo magnetostático forte e parâmetros usuais para densidade e temperatura do plasma, verificamos que a influência da radiação se faz perceptível somente no regime próximo da ressonância. Contudo, para o caso de campos magnetostáticos fracos admitimos a possibilidade da influência da radiação mesmo quando  $\bar{\omega}$  é consideravelmente diferente da unidade.

A partir da resolução numérica da equação implícita para  $\xi$  e  $\bar{\Omega}$ , obtivemos gráficos

da relação de dispersão das oscilações coletivas longitudinais. Primeiramente analisamos a influência do número de fótons  $m$  envolvidos nas transições eletrônicas sobre o aspecto das curvas de dispersão. Constatamos a possibilidade de truncar o somatório em  $m$  em um número máximo de fótons  $M = 5$  para os parâmetros utilizados nos gráficos e no intervalo de definição destes. Observamos no primeiro *branch* que os modos associados a  $M = 1$  (um único fóton) não admitem frequência inferior a  $\omega_c$ . Verificamos que o mesmo fato ocorre para o segundo branch com os modos associados a  $M = 1$  e  $M = 2$  o que nos sugere que esse comportamento se repita para os harmônicos mais energéticos. Observamos que a presença da radiação provoca o surgimento de modos estacionários e modos ressonantes propagativos, ambos com números de onda finitos e não-nulos.

Analisamos também a influência da densidade do plasma sobre o aspecto dos gráficos de dispersão. Verificamos que o primeiro modo ressonante independe da densidade do plasma e que em plasmas mais densos as oscilações em torno dos harmônicos ciclotrônicos ocorrem com amplitudes maiores. Observamos que para baixas temperaturas, as relações de dispersão para diferentes números de fótons ( $M < 4$ ) diferem significativamente. Contudo, para plasmas bastante energéticos ( $k_B T \sim 100 \text{ eV}$ ) essas curvas são praticamente idênticas e muito próximas ao gráfico de dispersão para os modos de Bernstein. Dessa forma, constatamos que em altas temperaturas o principal mecanismo de excitação dos modos longitudinais são as interações elétron-plasmon enquanto que para baixas temperaturas as interações elétron-fótons se mostram bastante significativas.

Verificamos que o campo magnetostático é responsável por confinar as oscilações longitudinais próximas aos modos ciclotrônicos e por limitar suas velocidades de propagação. Observamos a forte dependência dos modos coletivos com a amplitude da radiação externa. Constatamos que quanto maior a intensidade da radiação eletromagnética externa mais acentuadas são as oscilações nos gráficos de dispersão.

Como perspectivas futuras de atuação, pretendemos investigar os gráficos de dispersão em torno de harmônicos ciclotrônicos mais energéticos. Visamos também aperfeiçoar nosso código computacional para evitar problemas de convergência durante o cálculo das raízes da função dielétrica. Esperamos que dessa forma, possamos explorar uma amplitude maior de valores para os parâmetros do plasma e dos campos. Pretendemos ainda obter resultados para campos de radiação em regime fora da ressonância para o caso de campos magnéticos fracos.

## *Referências*

- [1] BERSTEIN, I. B. Waves in a plasma in a magnetic field. *Phys. Rev.* **109**, 10-21, 1958.
- [2] LANGMUIR, I. Scattering of electrons in ionized gases. *Phys. Rev.*, **26**, 585-613, 1925.
- [3] TONKS, L.; LANGMUIR, I. Oscillations in ionized gases. *Phys. Rev.*, **33**, 195-211, 1929.
- [4] VLASOV, A. A. On vibrations properties of electron gas. *J. Exp. Theor. Phys.*, **8**, 291, 1938.
- [5] LANDAU, L. D. On the vibrations of the electronic plasma. *J. Phys. (U.S.S.R.)*, **10**, 25-34, 1946.
- [6] DAWSON, J. On landau damping. *Phys. of Fluids*, **4**, 869-74, 1961.
- [7] ALFVÉN, H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, **150**, 405, 1942.
- [8] GROSS, E. P. Plasma oscillation in a static magnetic field. *Phys. Rev.* **82**, 232-42, 1951.
- [9] CRAWFORD, F. W.; TATARONIS, J. A. Absolute instabilities of perpendicularly propagation cyclotron harmonic plasma waves. *J. Appl. Phys.*, **36**, 2930-34, 1965.
- [10] GRUBER, S.; BEKEFI, G. Excitation of longitudinal waves near electron-cyclotron harmonics. *Phys. of Fluids*, **11**, 122-33, 1968.
- [11] LEUTERER, F. Forward and backward bernstein waves. *Plasma Phys.*, **11**, 615-20, 1969.
- [12] PINES, D.; SCHRIEFFER, J. R. Approach to equilibrium of electrons, plasmons and phonons in quantum and classical plasmas. *Phys. Rev.*, **125**, 804-812, 1962.
- [13] HARRIS, E. G. Classical plasma phenomena from a quantum mechanical viewpoint. *Advances in Plasma Physics*, **3**, 157-241, 1969.
- [14] SEELY, J. F.; HARRIS, E. G. Heating of a plasma by multiphoton inverse bremsstrahlung. *Phys. Rev.*, **7**, 1064-67, 1973.
- [15] SEELY, J. F. Multiphoton cyclotron resonance absorption of laser radiation. *Phys. Rev.*, **10**, 1863-67, 1974.
- [16] AMATO, M. A.; MIRANDA, L. C. M. Plasma wave instability in the field of an intense electromagnetic wave. *Phys. of Fluids*, **10**, 1031-32, 1977.

- [17] BRANDI, H. S. et al. Charged-particles scattering in the presence of homogeneous magnetic field. *Phys. Rev.*, **18**, 1415-19, 1978.
- [18] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of Plasma Physics*. New York: Springer, 2004.
- [19] CHEN, F. F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. New York: Plenum Press, 1985.
- [20] LIBOFF, R. L. *Kinetic Theory: Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions*. 3. ed. [S.l.]: Springer.
- [21] AKHIEZER, A. I. et al. *Plasma Eletrodynamics, Volume 1: Linear Theory*. Oxford: Pergamon Press, 1975.
- [22] BELLAN, P. M. *Fundamentals of Plasma Physics*. London: Cambridge University Press, 2006.
- [23] KLIMONTOVICH, Y. L. *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Process in a Plasma*. Oxford: Pergamon Press, 1967.
- [24] WATSON, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press.
- [25] MEYER-VERNET, N.; MONCUQUET, M.; HOANG, S. Temperature inversion in the io plasma torus. *Icarus*, **116**, 202-213, 1995.
- [26] DICKE, R. H.; WITTKKE, J. P. *Introduction to Quantum Mechanics*. MA: Addison-Wesley, 1960.
- [27] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*. Oxford, England: Pergamon Press, 1977.
- [28] GALVÃO, R. M. O.; MIRANDA, R. C. M. Quantum theory of an electron in external fields using unitary transformations. *Am. J. Phys.*, **51**, 729-33, 1982.
- [29] GUIMARÃES, A. F. *Estudo, utilizando a mecânica quântica, das propriedades dielétricas e do efeito da blindagem dinâmica na taxa de aquecimento de plasmas macroscópicos*. Tese (Tese de Doutorado) — Instituto de Física, UnB, 2006.
- [30] RIBEIRO, B. V. *Modos coletivos em um plasma livre sujeito a um campo de radiação*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Instituto de Física, UnB, Brasília, 2011.
- [31] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. *Physical Kinetics*. Oxford, England: Pergamon Press, 1981.
- [32] LIMA, M. B. S.; LIMA, C. A. S.; MIRANDA, L. C. M. Coulomb screening in the simultaneous presence of a radiation field and a strong dc magnetic field. *J. Phys. C*, **12**, 4469-75, 1978.
- [33] KREMP, D.; SCHLANGES, M.; KRAEFT, W.-D. *Quantum Statistics of Nonideal Plasmas*. Netherlands: Springer, 2005.
- [34] WALTERS, G. M.; HARRIS, E. G. Quantum-mechanical theory of nonlinear plasma phenomena in a strong magnetic field. *Phys. of Fluids*, **11**, 112-22, 1968.

- [35] PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press.
- [36] ARFKEN, G. B. *Mathematical Methods for Physicists*. California, USA: Elsevier.



## *APÊNDICE A – Obtenção do operador unitário*

A teoria sobre transformações unitárias é abordada na maioria dos livros textos sobre mecânica quântica. Em nosso trabalho recorreremos à técnica da utilização desses tipos de transformações para resolver o problema de um elétron sujeito aos campos  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{E}(t)$  ilustrados na figura 4.

Conforme vimos no capítulo 3, para resolver a equação

$$H_0\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

supomos uma solução da forma

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = U\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.2) em (A.1), obtemos

$$H_0U\Phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\left[U\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{i}{\hbar}(\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{r} + \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{p} + \dot{\eta})U\Phi(\mathbf{r}, t)\right]. \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros de (A.3) por  $U^\dagger$  e notando que um observável qualquer  $O(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  transforma-se da forma

$$O(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \longrightarrow U^\dagger O(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)U = O(\mathbf{r} - \boldsymbol{\beta}, \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}, t), \quad (\text{A.4})$$

temos,

$$U^\dagger H_0 U = H_L - [\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\beta}) + \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}) + \dot{\eta}], \quad (\text{A.5})$$

que resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m_e}(p_x + eB_0y)^2 + \frac{1}{2m_e} \left( \alpha_x + \frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) - eB_0\beta_y \right)^2 + \frac{1}{m_e}(p_x + eB_0y) \\ & \left( \alpha_x + \frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) - eB_0\beta_y \right) + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} + \frac{p_y\alpha_y}{m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e} + \frac{\alpha_z^2}{2m_e} + \frac{p_z\alpha_z}{m_e} = H_L + \\ & - \dot{\alpha}_x x - \dot{\alpha}_y y - \dot{\alpha}_z z + \dot{\alpha}_x \beta_x + \dot{\alpha}_y \beta_y + \dot{\alpha}_z \beta_z - \dot{\beta}_x p_x - \dot{\beta}_y p_y - \dot{\beta}_z p_z - \dot{\beta}_x \alpha_x - \dot{\beta}_y \alpha_y - \dot{\beta}_z \alpha_z - \dot{\eta}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Identificando  $H_L$  no primeiro membro de (A.6), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m_e} \left( \alpha_x + \frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) - eB_0\beta_y \right)^2 + p_x \left( \frac{\alpha_x}{m_e} + \frac{eE}{m_e\omega} \text{sen}(\omega t) - \omega_c \beta_y \right) + \omega_c y \alpha_x + \omega_c y \frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \\ & - m_e \omega_c^2 y \beta_y + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} + \frac{p_y \alpha_y}{m_e} + \frac{\alpha_z^2}{2m_e} + \frac{p_z \alpha_z}{m_e} + \dot{\alpha}_x x + \dot{\alpha}_y y + \dot{\alpha}_z z - \dot{\alpha}_x \beta_x - \dot{\alpha}_y \beta_y - \dot{\alpha}_z \beta_z + \dot{\beta}_x p_x + \dot{\beta}_y p_y + \dot{\beta}_z p_z + \\ & \dot{\beta}_x \alpha_x + \dot{\beta}_y \alpha_y + \dot{\beta}_z \alpha_z + \dot{\eta} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

As funções arbitrárias  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\eta(t)$  devem satisfazer (A.7). Para isso, devem ser escolhidas de forma a anular os termos lineares em  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  e os termos que dependem exclusivamente do tempo.

Dos termos lineares em  $\mathbf{r}$ , obtemos

$$\dot{\alpha}_x = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\alpha}_y + \omega_c \alpha_x + \omega_c \frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) - m_e \omega_c^2 \beta_y = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{\alpha}_z = 0. \quad (\text{A.10})$$

Da mesma forma, dos termos lineares em  $\mathbf{p}$ , obtemos

$$\dot{\beta}_x + \frac{\alpha_x}{m_e} + \frac{eE}{m_e\omega} \text{sen}(\omega t) - \omega_c \beta_y = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{\beta}_y + \frac{\alpha_y}{m_e} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{\beta}_z + \frac{\alpha_z}{m_e} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Dos termos que dependem exclusivamente do tempo, temos

$$\dot{\eta} + \frac{1}{2m_e} \left[ \alpha_x + \frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) - eB_0\beta_y \right]^2 + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} + \frac{\alpha_z^2}{2m_e} - \dot{\alpha}_y\beta_y + \dot{\beta}_x\alpha_x + \dot{\beta}_y\alpha_y + \dot{\beta}_z\alpha_z = 0. \quad (\text{A.14})$$

Para resolver o sistema de equações (A.8)-(A.14) devemos recorrer à condição inicial para o operador unitário

$$U(t = 0) = 1, \quad (\text{A.15})$$

que fornece, juntamente com (A.8) e (A.10),

$$\alpha_x(t) = \alpha_z(t) = 0 \quad (\text{A.16})$$

e, conseqüentemente,

$$\beta_z = 0. \quad (\text{A.17})$$

Da derivada de (A.12) e de (A.9), temos

$$\ddot{\beta}_y + \omega_c^2\beta_y = \frac{\omega_c eE}{\omega m_e} \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.18})$$

que admite uma solução do tipo

$$\beta_y = A \text{sen}(\omega t). \quad (\text{A.19})$$

Substituindo (A.19) em (A.18), obtemos

$$\beta_y = \gamma_1 \frac{\omega_c}{\omega} \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.20})$$

onde  $\gamma_1 = eE/m_e(\omega_c^2 - \omega^2)$ .

Substituindo (A.20) em (A.9) e (A.11) e em seguida integrando no tempo, temos

$$\alpha_y = -m_e\gamma_1\omega_c[\cos(\omega t) - 1] \quad (\text{A.21})$$

$$\beta_x = -\gamma_1[\cos(\omega t) - 1], \quad (\text{A.22})$$

onde as constantes de integração foram determinadas a partir de (A.15).

Substituindo os resultados obtidos para  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  em (A.14) e agrupando os termos em  $\text{sen}^2(\omega t)$ ,  $\text{cos}^2(\omega t)$  e os termos constantes, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\dot{\eta} + \frac{\omega^2 e^2 E^2}{2m_e(\omega_c^2 - \omega^2)^2} \text{sen}^2(\omega t) + \frac{\omega_c^2 e^2 E^2}{2m_e(\omega_c^2 - \omega^2)^2} \text{cos}^2(\omega t) - \frac{\omega_c^2 e^2 E^2}{m_e(\omega_c^2 - \omega^2)^2} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\text{cos}^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}, \quad \text{sen}^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}, \quad (\text{A.24})$$

podemos reescrever (A.23) de uma forma ainda mais simples:

$$\dot{\eta} = \frac{e^2 E^2}{4m_e(\omega_c^2 - \omega^2)} [1 - \cos(2\omega t)], \quad (\text{A.25})$$

que integrada de 0 a  $t$ , fornece

$$\eta = \frac{e^2 E^2}{4m_e(\omega_c^2 - \omega^2)} t - \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega (\omega_c^2 - \omega^2)} \text{sen}(2\omega t), \quad (\text{A.26})$$

onde novamente recorremos à condição inicial para o operador unitário.

Calculadas as funções  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\eta(t)$ , o operador unitário é finalmente dado por

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_e \omega_c \gamma_1 (\cos(\omega t) - 1) y\right) \exp(-i\gamma_1 (\cos(\omega t) - 1) k_x) \cdot \\ \exp\left(i\frac{\omega_c}{\omega} \gamma_1 \text{sen}(\omega t) k_y\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} 2\gamma_2 \omega t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \gamma_2 \text{sen}(\omega t)\right), \quad (\text{A.27})$$

onde  $\gamma_2 = e^2 E^2 / 8m_e \omega (\omega_c^2 - \omega^2)$ .

## *APÊNDICE B – Cálculo numérico das Funções de Bessel*

As funções de Bessel de primeira espécie,  $J_n(x)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , utilizadas diversas vezes em nossos cálculos, surgem como soluções para a parte radial da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas [36]. A equação de Helmholtz, por sua vez, é obtida a partir da equação diferencial para a parte espacial das equações de onda e de difusão. Por esse motivo, as funções de Bessel aparecem em uma ampla variedade de fenômenos físicos.

Essas funções especiais são definidas por meio da seguinte expansão em série de potências:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}. \quad (\text{B.1})$$

Nosso objetivo aqui não é deduzir a expressão anterior, mas discutir como podemos implementar essas funções do ponto de vista computacional. Uma primeira e imediata possibilidade seria elaborar uma subrotina para calcular a expansão (B.1) para valores de  $n$  e  $x$  fornecidos. Contudo, o uso da definição para o cálculo das funções de Bessel, apesar de fornecer valores acurados para pequenos valores de  $x$ , apresenta problemas em relação à convergência para argumentos maiores.

Para evitar divergências numéricas durante os cálculos, utilizaremos o fato de que as funções de Bessel decrescem à medida que sua ordem  $n$  aumenta. Essa característica está ilustrada na Figura 15, onde é possível perceber a existência de um inteiro  $N > 0$  tal que  $J_N(x) \approx 0$  para  $x \leq X$ . Para as ordens ilustradas na figura, este fato fica bastante nítido para  $X = 2$ , por exemplo.

Esse comportamento das funções de Bessel nos permite estabelecer uma ordem de corte na subrotina, a qual denotamos por  $N$ . Tomamos  $J_N(x) = 1.0 \times 10^{-30}$  e utilizando a relação de recorrência para as funções de Bessel de primeira espécie

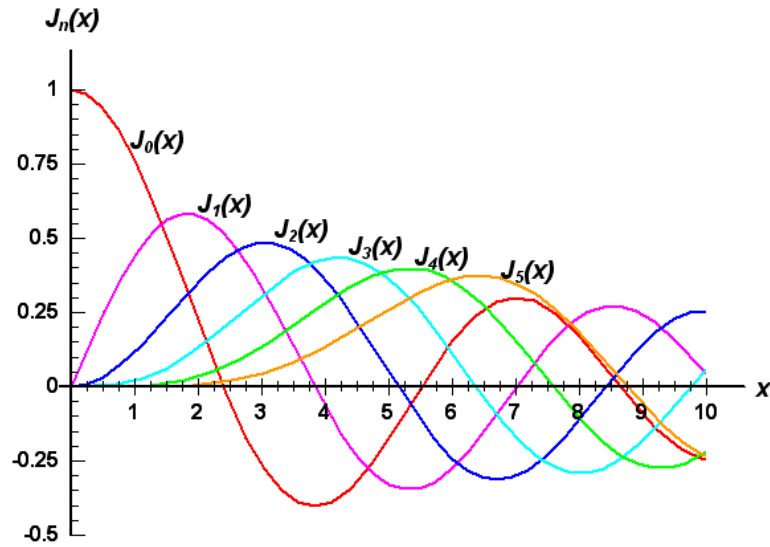


Figura 15: Comportamento das funções de Bessel para seis ordens distintas.

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x), \quad (\text{B.2})$$

fomos capazes de calcular as ordens menores a partir das maiores.

As funções geradas através desse procedimento guardam as proporções entre si, pois satisfazem (B.2), porém não correspondem aos valores corretos das funções de Bessel, pois não satisfazem a relação de normalização

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x). \quad (\text{B.3})$$

Para garantir sua normalização, dividimos todas as funções  $J_n(x)$  calculadas em (B.2) pelo segundo membro de (B.3), que foi denotado na subrotina pela variável *sum*. A subrotina para o cálculo numérico das funções de Bessel está apresentada a seguir:

```
double *Jarray(int N,double x)
{
    int k;
    double *J,*JNEG,sum;
```

```

J=(double*)calloc(N+2,sizeof(double));
JNEG=(double*)calloc(2*N+1,sizeof(double));

J[N+1]=0.;
J[N]=1.e-30;

for(k=N;k>=2;k--) J[k-1]=-J[k+1]+2.*(k-1)*J[k]/x;
for(k=1;k<=N+1;k++) J[k-1]=J[k];

sum=0.;
for(k=1;k<=N/2;k++) sum+=2*J[2*k];
sum+=J[0];
for(k=0;k<=N;k++) J[k]/=sum;

for (k=-N;k<0;k++) JNEG[N+k]=pow(-1,-k)*J[-k];
for (k=0;k<=N;k++) JNEG[N+k]=J[k];

return JNEG;
}

```

Os parâmetros de entrada são a ordem de corte  $N$  e o valor do argumento  $x$  para o qual se deseja calcular as funções de Bessel. Como parâmetro de saída, a função retorna o vetor  $JNEG$  que, em suas  $2 \cdot N + 1$  entradas, armazena os valores das funções de Bessel de ordens positivas e negativas da seguinte forma:  $JNEG[N + k] = J_k(x)$ , onde  $-N \leq k \leq N$ .

A precisão das funções  $JNEG[n]$  está intimamente relacionada aos valores dos parâmetros de entrada  $N$  e  $x$ . Dessa forma, variando a ordem de corte  $N$  somos capazes de controlar a precisão dessas funções em um intervalo de interesse. Pela Figura 16 vemos que  $0 < x < 25$  representa um intervalo confiável, pois nele as funções geradas numericamente possuem valores precisos.

As funções de Bessel modificadas de primeira espécie  $I_n(x)$  relacionam-se com as funções de Bessel  $J_n(x)$  da seguinte forma:

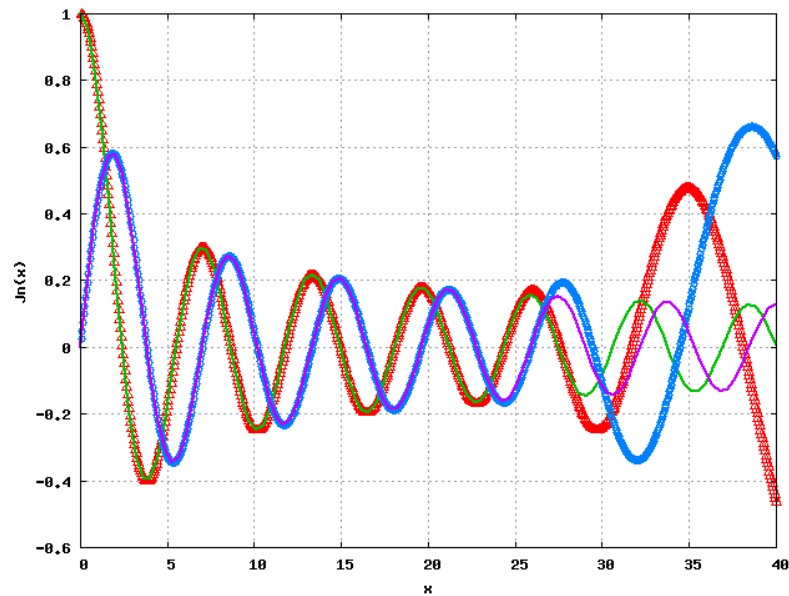


Figura 16: Funções de Bessel  $J_0(x)$  e  $J_1(x)$  para  $N = 30$ . Os pontos representam os gráficos gerados pela subrotina e as linhas correspondem aos gráficos fornecidos pelo Gnuplot 4.6.0.

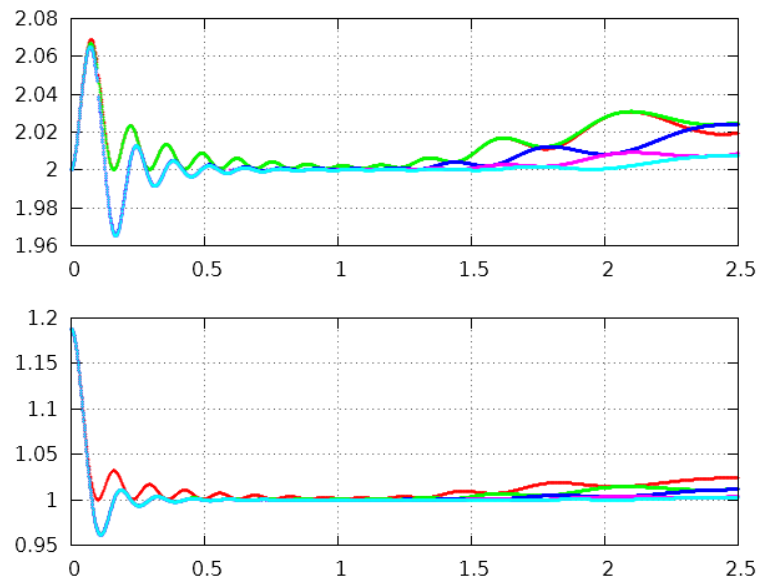


Figura 17: Exemplos de gráficos de dispersão em que os argumentos das funções de Bessel extrapolam seu intervalo de confiabilidade. Utilizamos para a plotagem  $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ ,  $k_B T = 1 \text{ eV}$ ,  $B_0 = 0,5 \text{ T}$  e  $E = 10 \text{ V/m}$ . Em cada gráfico as curvas representam as diferentes quantidades de fótons.

$$I_n(x) \equiv (i)^{-n} J_n(ix), \quad (\text{B.4})$$

que apresentam a propriedade de paridade em relação a sua ordem  $I_{-n}(x) = I_n(x)$ .



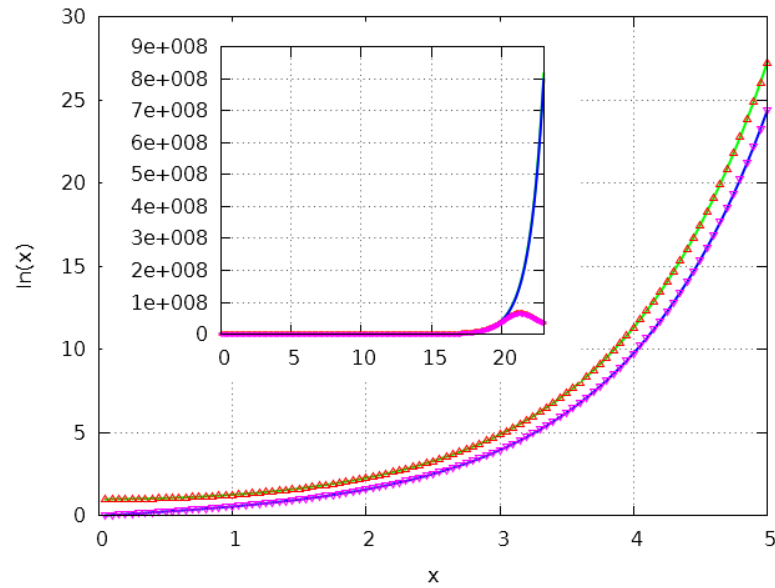


Figura 18: Funções de Bessel  $I_0(x)$  e  $I_1(x)$  para  $L = 30$ . Os pontos representam os gráficos gerados pela subrotina e as linhas correspondem aos gráficos fornecidos pelo Maple 13.

Trocando a variável  $x$  por  $-ix$ , podemos isolar  $J_n(x)$  em (B.4) e em seguida substituí-la em (B.2) para obter a fórmula de recorrência para as funções de Bessel modificadas

$$I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x}I_n(x). \quad (\text{B.5})$$

Da mesma forma, podemos obter a partir de (B.3) a relação de normalização para essas funções

$$1 = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n}(x). \quad (\text{B.6})$$

As relações de recorrência e normalização em (B.5) e (B.6) nos permitem implementar computacionalmente as funções de Bessel modificadas. A seguir apresentamos a subrotina para o cálculo numérico dessas funções.

```
double *Iarray(int L,double x)
{
    int k;
    double *I,sum;

    I=(double*)calloc(L+2,sizeof(double));
```

```

I[L+1]=0.;
I[L]=1.e-30;

for(k=L;k>=2;k--) I[k-1]=I[k+1]+2.*(k-1)*I[k]/x;
for(k=1;k<=L+1;k++) I[k-1]=I[k];

sum=0.;
for(k=1;k<=L/2;k++) sum+=2*pow(-1,k)*I[2*k];
sum+=I[0];

for(k=0;k<=L;k++) I[k]/=sum;//Normalizacao

return I;
}

```

A subrotina recebe como parâmetros de entrada a ordem de corte  $L$  e o valor do argumento  $x$  para o qual se deseja calcular o valor das funções de Bessel modificadas. Como parâmetro de saída a subrotina fornece um vetor  $I$  com  $L + 1$  entradas tal que  $I[k] = I_k(x)$ .

Da mesma forma como verificamos para as funções de Bessel  $J_m(x)$ , o cálculo das funções de Bessel modificada pelo artifício de considerar uma ordem de corte  $L$  implica em uma restrição quanto ao intervalo de confiabilidade para os valores de  $x$  utilizados com argumento da função. Para  $L = 30$ , a subrotina fornece resultados precisos somente para  $0 \leq x \leq 18$ .

## *APÊNDICE C – Códigos utilizados para obtenção dos gráficos*

```

#include "BessJ_BessI.h"
#include "txtvar.h"
//-----
//-----CONSTANTES(no SI)-----
//-----
#define KB 1.38e-23 // Constante de Boltzmann
#define e_0 8.85e-12 // Permissividade Eletrica do Vacuo
#define me 9.11e-31 // Massa do Eletron
#define e 1.60e-19 // Carga do Eletron
//-----
//-----PARAMETROS UTILIZADOS-----
//-----
#define B0 2. // Magnitude do Campo Magnetostatico (T)
#define E 10. // Amplitude do Campo de Radiação (V/m)
#define omegabar 1.000001 // Freq. da Radiação : Freq. Ciclotronica

#define n0 1.e20 // Densidade dos Eletrons (m-3)
#define Te (1)*11600 // Temperatura dos Eletrons (K)

#define wp e*sqrt(n0/(e_0*me)) // Freq. de Plasma
#define wc (e*B0/me) // Freq. Ciclotronica
#define vth sqrt(2*KB*Te/me) // Velocidade Termica dos Eletrons

#define gamma1 (e*E/(me*wc*wc))*(1/(1-omegabar*omegabar))
#define gamma3 sqrt(2)*wc*gamma1/vth

```

```

//-----
#define MAXIT 1000

typedef void (f_e_df)(double x, double c, int M, int L, double *fx, double *Dfx);

// A função abaixo retorna o valor da função dieletrica(fx) e de sua derivada(Dfx)
// para um dado nº de onda(q) e uma dada freq.(W).
// Os somatorios em "m" e em "l", presentes na funcao dieletrica, sao truncados
// em m=mmax e l=lmax, respectivamente.

void F_dielet(double W, double q, int mmax, int lmax, double *fx, double *Dfx)
{
    int m,l;
    double *besj,*besi,sum,dsum;

    besi=Iarray(30,q*q);

    besj=Jarray(30,(gamma3*q));

    sum=0.0;
    dsum=0.0;
    for(m=-mmax;m<=mmax;m++)
    {
        for(l=1;l<=lmax;l++)
        {
            sum+=(1/(1*l-(W-m*omegabar)*(W-m*omegabar)))*besj[30+m]*
                besj[30+m]*besi[l];
            dsum+=2.0*l*(W-m*omegabar)/pow(1*l-(W-m*omegabar)*
                (W-m*omegabar),2)*besj[30+m]*besj[30+m]*besi[l];
        }
    }

    *fx=1+2*pow(wp/wc,2)*(exp(-q*q)/(q*q))*sum;
    *Dfx=2*pow(wp/wc,2)*(exp(q*q)/(q*q))*dsum;
}

```

```

//Algoritmo de Newton Raphson para obtencao de zeros de funcoes
double rtsafe(f_e_df (*funcd), double q, int mmax, int lmax, double x1,
             double x2, double xacc)
{
int j;
double df,dx,dxold,f,fh,fl,fhaux,flaux;
double temp,xh,xl,rts,x1aux,x2aux;
double aux;

(*funcd)(x1,q,mmax,lmax,&fl,&df);
(*funcd)(x2,q,mmax,lmax,&fh,&df);

    if (fl == 0.0) return x1;
if (fh == 0.0) return x2;
if (fl < 0.0) {
xl=x1;
xh=x2;
} else {
xh=x1;
xl=x2;
}

    rts=0.5*(x1+x2);
dxold=fabs(x2-x1);
dx=dxold;
    (*funcd)(rts,q,mmax,lmax,&f,&df);
    for (j=1;j<=MAXIT;j++) {
if (((((rts-xh)*df-f)*((rts-xl)*df-f) > 0.0)
|| (fabs(2.0*f) > fabs(dxold*df))) {
dxold=dx;
dx=0.5*(xh-xl);
rts=xl+dx;
if (xl == rts) return rts;
} else {

```

```

dxold=dx;
dx=f/df;
temp=rts;
rts -= dx;
if (temp == rts) return rts;
}
if (fabs(dx) < xacc) return rts;
(*funcd)(rts,q,mmax,lmax,&f,&df);
if (f < 0.0)
xl=rts;
else
xh=rts;
}
printf("Maximum number of iterations exceeded in rtsafe\n");
return 0.0;
}

int main()
{
    int branch=1; //Informe o branch em que esta interessado

    int M=5;
    int L=30;

    int i;
    double num_onda,aux[M];
    double inf_down,inf_up,sup_down,sup_up;
    FILE *fp[M];

    inf_down=(branch-1)+.3999999999;
    inf_up=branch+.00000000001;
    sup_down=branch-.00000000001;
    if(branch==1)
    {
        if(sqrt(1+wp*wp/(wc*wc))<2.) sup_up=sqrt(1+wp*wp/(wc*wc));
    }
}

```

```

        else sup_up=1+.9999999999;
    }
    else sup_up=branch+.9999999999;

    for(i=0;i<=M;i++) fp[i]=fopen(n_arq("b1_n1e20_T1eV_m",i),"w");

    num_onda=.001;
    while(num_onda<=2.5)
    {
        for(i=0;i<=M;i++)
        {
            aux[i]=rtsafe(F_dielet,num_onda,i,L,inf_up,sup_up,.000000001);

            if(fabs(aux[i]-inf_up)>.00001)
            {
                fprintf(fp[i], "%.18lf  %.18lf\n", num_onda,
                    rtsafe(F_dielet,num_onda,i,L,inf_up,sup_up,.000000001));
            }
        }
    }
    else
    {
        fprintf(fp[i], "%.18lf  %.18lf\n", num_onda,
            rtsafe(F_dielet,num_onda,i,L,inf_down,sup_down,.000000001));
    }
    }
    num_onda+=.001;
}
for(i=0;i<=M;i++) fclose(fp[i]);

printf("fim");
getchar();

return 0;
}

#undef MAXIT

```