

**ESTABILIDADE E CONTROLE  $H_\infty$  DE SISTEMAS DE CONTROLE  
EM REDE COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO  
E INCERTEZAS DE MODELO**

**LUIS FELIPE DA CRUZ FIGUEREDO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ESTABILIDADE E CONTROLE  $H_\infty$  DE SISTEMAS DE CONTROLE  
EM REDE COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO  
E INCERTEZAS DE MODELO**

**LUIS FELIPE DA CRUZ FIGUEREDO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO  
DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSI-  
DADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Adolfo Bauchspiess, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília  
(Orientador)**

---

**Prof. Daniel Oliveira Cajueiro, Depto. de Economia / Universidade de Brasília  
Examinador externo**

---

**Prof. Geovany Araújo Borges, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília  
Examinador Interno**

**BRASÍLIA, 18 DE MARÇO DE 2011.**



## FICHA CATALOGRÁFICA

FIGUEREDO, LUIS FELIPE DA CRUZ

Estabilidade e Controle  $H_\infty$  de Sistemas de Controle em Rede com Atrasos Variantes no Tempo e Incertezas de Modelo [Distrito Federal] 2011.

xi, 111p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2011).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Sistemas de Controle em Rede

2. Sistemas com Atrasos

3. LMI

4. Controle  $H_\infty$

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FIGUEREDO, L.F.C. (2011). Estabilidade e Controle  $H_\infty$  de Sistemas de Controle em Rede com Atrasos Variantes no Tempo e Incertezas de Modelo, Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação xxx, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 111p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Luis Felipe da Cruz Figueredo

TÍTULO: Estabilidade e Controle  $H_\infty$  de Sistemas de Controle em Rede com Atrasos Variantes no Tempo e Incertezas de Modelo.

GRAU: Mestre ANO: 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Luis Felipe da Cruz Figueredo

Departamento de Eng. Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil



*Aos meus queridos pais, Maurilio e Jacinta, à minha pequena irmã, Aninha, e a minha namorada e companheira, Marina.*





## AGRADECIMENTOS

*Finalmente, aos agradecimentos!*

*É com uma misto de tristeza e alívio que escrevo as últimas páginas deste trabalho tão importante para mim. Esta dissertação é o resultado de incríveis e intensos anos de muita dedicação e trabalho que só foram possíveis devido ao apoio incondicional da minha família, da minha namorada e dos meus amigos.*

*Inicialmente, aproveito este espaço para agradecer de todo meu coração aos meus mestres cuja dedicação e ensinamentos não serão esquecidos. Agradeço ao meu orientador de graduação e de mestrado, professor Adolfo Bauchspiess, por todo carinho que sempre teve por mim e por me dar total liberdade com relação aos meus estudos e à minha pesquisa. Agradeço em especial pelo seu apoio e pela confiança que sempre demonstrou em meu trabalho e em mim. Foi um enorme prazer trabalhar todos estes anos com ele. Ao professor João Ishihara, agradeço por ter me acolhido como aluno desde o começo do mestrado, por ser sempre presente e prestativo. Agradeço por sua paciência, por seu grande entusiasmo com os nossos resultados, por seu aconselhamento ao longo deste trabalho e por sua amizade. Ao professor Geovany Borges agradeço por toda sabedoria e aconselhamento ao longo deste trabalho. Ademais, agradeço à seus clones que trabalham por ele enquanto ele dorme ou, mais recentemente, cuida da Audrey. Agradeço também ao professor Daniel Cajueiro por participar da avaliação e defesa desta dissertação. Sou grato também aos funcionários da UnB e do departamento de engenharia elétrica, em especial aos funcionários do SG11 que trabalham com afinco para nos proporcionar melhores condições de pesquisa. Além disso, agradeço aos meus professores por criarem este ambiente incrível de trabalho que é o LARA. Acredito que somos uma pequena parte da revolução científica que ocorre no Brasil.*

*O ambiente de trabalho não existiria sem meus amigos do laboratório, sempre prestativos e dispostos a ajudar nos momentos difíceis. O apoio deles foi fundamental para suportar a carga de trabalho durante estes anos. Agradeço também pelas conversas sem sentido, pelas pizzas genéricas de madrugada, que não foram poucas, e pelos momentos de procrastinação tão importantes para diminuir o desespero causado pelas simulações que não funcionavam. Por fim, obrigado por tornarem este ambiente de trabalho em um ambiente descontraído que sempre tive prazer de estar presente e fazer parte.*

*Aos meus grandes amigos, os quais citarei em ordem alfabética para não causar polêmica, Alexandre, Artur, Fernando, Guilherme, Hugo, Luciano, Luis, Pedro, Victor e Yuri, um agradecimento muito especial. Mesmo tendo me afastado um pouco por conta do trabalho, sempre carrego comigo a amizade deles e sempre que nos encontramos me sinto em casa.*

*Sou grato pelo financiamento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) essencial para que pudesse me dedicar com exclusividade a esta dissertação. Agradeço ainda à Fundação de Empreendimentos Científicos e Tecnológicos (FINATEC) e ao Decanato de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade de Brasília (DPP-UnB) pelo fomento recebido para participação em eventos científicos internacionais.*

*Finalmente e mais importante, gostaria de agradecer as pessoas que mais me apoiaram neste trabalho e em todos que já fiz. Ao meus queridos pais, sempre tão amigos, preocupados e amorosos deixo meus eternos e mais profundos agradecimentos por tudo que fizeram e fazem por mim. Ao meu pai fica o agradecimento por me demonstrar com sua história de vida que tudo podemos quando trabalhamos duro com honestidade e afinco, à minha mãe fica o agradecimento por me fazer crer que amor de pai e de mãe pode ser infinito. Agradeço aos meus tios e tias que sempre cuidaram em mim. À minha pequena irmã, minha primeira amiga, agradeço por sempre acreditar em mim e por tentar me proteger sempre que necessário. Ao amigo e cunhado, Gustavo, agradeço pela amizade e por fazer minha irmã feliz. Por fim, como não poderia deixar de ser, minha namorada, minha melhor amiga, minha confidente, Marina, obrigado por fazer parte da minha vida, por estar sempre ao meu lado (mesmo quando eu apareço às quatro da manhã saindo do laboratório). Obrigado por ser minha companheira. Obrigado por me fazer mais feliz com seu carinho e amor. Você é minha inspiração quando o mundo está difícil. As últimas palavras desta dissertação são de todo meu coração obrigado à você.*

## **RESUMO**

### **ESTABILIDADE E CONTROLE $H_\infty$ DE SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO E INCERTEZAS DE MODELO**

**Autor: Luis Felipe da Cruz Figueredo**

**Orientador: Prof. Adolfo Bauchspiess, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília**

**Co-orientador: Professor João Yoshiyuki Ishihara, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

**Brasília, 18 de março de 2011**

Esta dissertação propõe novas estratégias para a análise de estabilidade robusta e para o projeto de controladores robustos  $H_\infty$  para sistemas de controle em rede com atrasos variantes e sujeitos a perda e/ou desordenamento de pacotes. Visando a melhor compreensão dos teoremas propostos e das contribuições do trabalho, é feita uma introdução sobre as principais questões relativas a sistemas de controle em rede e uma revisão sobre os conceitos básicos que envolvem a análise de estabilidade. A metodologia de análise é baseada na representação de sistemas de controle em rede por equações diferenciais atrasadas o que permite o estudo de sua estabilidade através de teorias de estabilidade para sistemas atrasados. Os critérios de análise desenvolvidos utilizam uma abordagem inédita que envolve o fracionamento do intervalo que delimita o atraso variante e a construção de uma nova função candidata de Lyapunov-Krasovskii que incorpora explicitamente termos dependentes do atraso variante e dos subintervalos resultantes do fracionamento. As condições resultantes estipulam um limite máximo para o atraso variante, para o qual o sistema em malha fechada mantém-se estável. As técnicas de controle desenvolvidas podem ser aplicadas para o controle de diversos sistemas reais através de redes de comunicação. Os critérios são robustos no sentido que consideram a possibilidade da existência de incertezas de modelo e de perturbações aplicadas ao sistema e asseguram o cumprimento de especificações de desempenho  $H_\infty$ . Ademais, consideramos o problema de controle de trajetória através de redes de comunicação. As estratégias de controle desenvolvidas na dissertação são estendidas para assegurar a estabilidade assintótica robusta de sistemas de controle em rede com erro de rastreamento limitado no sentido da norma  $H_\infty$ . Por fim, os critérios desenvolvidos são avaliados através de exemplos numéricos (*benchmarks* típicos da área) em todos os capítulos e simulações, de forma a ilustrar sua eficácia e demonstrar seu bom desempenho em relação aos métodos estado-da-arte conhecidos da literatura.



## **ABSTRACT**

### **STABILITY AND $H_\infty$ CONTROL FOR UNCERTAIN NETWORKED CONTROL SYSTEMS WITH TIME-VARYING DELAYS**

**Author: Luis Felipe da Cruz Figueredo**

**Supervisor: Prof. Adolfo Bauchspiess, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília**

**Co-advisor: Professor João Yoshiyuki Ishihara, Depto. de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

This thesis presents new robust stability analysis and  $H_\infty$  control design strategies for uncertain networked control systems with time-varying delays and packet dropouts. For the full comprehension of the thesis theorems and contributions, an introduction on the main issues related to networked control systems and a review on basic stability concepts are presented. The overall networked control system is modeled by continuous-time delay differential equation and the stability is studied under the framework of systems with time-varying delays. Novel stability criteria are established with the introduction of a new delay-fractioning approach and the development of a new Lyapunov-Krasovskii functional which explicitly considers the delay-dependent and the delay-interval-dependent terms introduced with the delay partitioning. The analysis concerns the establishment of a maximum allowable delay bound for continuous time networked control systems. The control strategies are robust for ensuring stability and  $H_\infty$  performance properties of networked control systems liable to model uncertainties and external disturbances. Furthermore, we consider the problem of synthesize feedback controllers to make the output of a given plant asymptotically tracks a desired reference whereas ensuring disturbances attenuation properties. The analysis is enriched with several numerical examples that illustrate the advantages of our criteria which outperform state-of-the-art criteria in the literature.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE .....	2
1.1.1	QUESTÕES FUNDAMENTAIS ENVOLVENDO SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE .....	4
1.2	CONCEITOS BÁSICOS .....	5
1.2.1	ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS .....	5
1.2.2	SISTEMAS SUJEITOS A ATRASOS NO TEMPO .....	10
1.2.3	DESIGUALDADES MATRICIAIS NA TEORIA DE CONTROLE .....	15
1.3	OBJETIVO E CONTRIBUIÇÕES .....	18
1.4	APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	20
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS SUJEITOS A ATRA- SOS VARIANTES NO TEMPO</b> .....	<b>23</b>
2.1	ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS SUJEITOS A ATRASOS VA- RIANTES NO TEMPO .....	24
2.1.1	ANÁLISE DE ESTABILIDADE – ANÁLISE POR PARTES DO ATRASO .....	25
2.1.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE – ABORDAGEM POR FRACIONAMENTO DO ATRASO .....	32
2.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS INCERTOS SUJEITOS A ATRA- SOS VARIANTES NO TEMPO .....	37
2.2.1	ANÁLISE DE ESTABILIDADE ROBUSTA .....	38
2.2.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE – CASOS PARTICULARES .....	40
2.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	44
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE</b> .....	<b>59</b>
3.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA .....	60
3.1.1	MODELO DO SISTEMA .....	61
3.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE .....	64
3.3	ANÁLISE DE ESTABILIDADE ROBUSTA .....	70
3.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	72
<b>4</b>	<b>PROJETO DE CONTROLADORES <math>H_\infty</math> PARA SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE</b> .....	<b>77</b>
4.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA E PREÂMBULO .....	78
4.2	ANÁLISE DE DESEMPENHO POR $H_\infty$ .....	81
4.3	PROJETO DE CONTROLADOR $H_\infty$ ROBUSTO A INCERTEZAS DE MODELO ....	84

4.3.1	CRITÉRIO DE ESTABILIZAÇÃO BASEADO EM GANHOS PONDERADOS .	86
4.3.2	SOLUÇÃO ITERATIVA ATRAVÉS DO ALGORITMO DE LINEARIZAÇÃO POR COMPLEMENTARIDADE CÔNICA.....	92
4.4	PROJETO DE CONTROLADOR $H_\infty$ ROBUSTO PARA SEGUIMENTO DE TRA- JETÓRIA EM SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE .....	97
4.4.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	98
4.5	ANÁLISE DE DESEMPENHO E SÍNTESE DE CONTROLADORES $H_\infty$ .....	99
4.6	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	101
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>109</b>
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	110
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>111</b>
	<b>ANEXOS .....</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>PROVAS DOS TEOREMAS .....</b>	<b>129</b>
A.1	PROVA DO TEOREMA 2.1.1 – [CAPÍTULO 2 ].....	129
A.2	PROVA DO TEOREMA 2.1.2 – [CAPÍTULO 2 ].....	139
A.3	PROVA DO TEOREMA 2.2.1 – [CAPÍTULO 2 ].....	144
A.4	PROVA DO TEOREMA 3.2.1 – [CAPÍTULO 3 ].....	150
A.5	PROVA DO TEOREMA 4.2.1 – [CAPÍTULO 4 ].....	156
A.6	PROVA DO TEOREMA 4.3.1 – [CAPÍTULO 4 ].....	168
A.7	PROVA DO TEOREMA 4.3.2 – [CAPÍTULO 4 ].....	173
<b>B</b>	<b>FERRAMENTAS MATEMÁTICAS.....</b>	<b>181</b>
<b>C</b>	<b>ARTIGOS PUBLICADOS .....</b>	<b>183</b>



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação genérica de um sistema de controle em rede. ....	2
1.2	Representação de um sistema de controle em rede de sentido único.....	3
1.3	Evolução do estado $x$ no tempo (curva pontilhada) para um sistema com ponto de equilíbrio estável (curva sólida espessa) em $t > 0$ . Figura obtida de [1]. ....	7
1.4	Representação geométrica das curvas de nível de uma função de Lyapunov. Figura obtida de [2]. ....	8
1.5	Sistema com ponto de equilíbrio $x_e = 0$ estável no sentido de Lyapunov. Figura obtida de [2]. ....	9
1.6	Sistema com ponto de equilíbrio $x_e = 0$ assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. Figura obtida de [2].....	9
1.7	[Exemplo 1.2.1] Diagrama esquemático de um chuveiro. Figura obtida de [3].	11
1.8	[Exemplo 1.2.2] Processo de usinagem por meio de um torno (a). Processo de usinagem com vibrações regenerativas (b). Figura obtida de [4]. ....	12
2.1	(Exemplo 2.3.1) Valor máximo de $\tau_{max}$ considerando $\tau_{min}=0$ e vários valores distintos de $d_{min}$ e de $d_{max}$ . ....	45
2.2	(Exemplo 2.3.2) Valor máximo de $\tau_{max}$ considerando $\tau_{min}=0$ e vários valores distintos de $d_{min}$ e de $d_{max}$ . ....	46
2.3	(Exemplo 2.3.5) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários $\tau_{min}$ com $-0, 1 \leq \dot{d}(t) \leq 0, 1$ .	49
2.4	(Exemplo 2.3.5) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários $\tau_{min}$ com $-0, 5 \leq \dot{d}(t) \leq 0, 5$ .	53
2.5	(Exemplo 2.3.5) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários $\tau_{min}$ com $d_{max}$ e $d_{min}$ desconhecidos. ....	53
2.6	(Exemplo 2.3.5) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários $\tau_{min}$ com $d_{max}$ e $d_{min}$ desconhecidos. ....	54
3.1	Sistema de controle em rede sujeito a perda de pacotes e atrasos de transmissão.	60
3.2	Diagrama de tempo para os atrasos de transmissão (se $n=10$ , por exemplo, então $i_k^c = 10, i_{k+1}^c = 12, i_{k+2}^c = 13$ e $i_k^a = 10, i_{k+1}^a = 13$ ). ....	62
3.3	Evolução do atraso variante em sistemas de controle em rede.....	64
4.1	(Exemplo 4.6.5) Evolução do valor do traço $\lambda$ (4.34) com incremento do número de iterações do algoritmo (a). Mesma análise após a eliminação do valor obtido na primeira iteração do algoritmo ( $k=1$ ). ....	106
4.2	Erro de Rastreamento do Teorema 4.3.2 em comparação com o resultado de [5]. ....	108



## LISTA DE TABELAS

2.1	(Exemplo 2.3.1) Valor máximo para o limite superior do atraso, $\tau_{max}$ , para $\tau_{min}=0$ e vários valores de $d_{min}$ e $d_{max}$ .....	44
2.2	(Exemplo 2.3.2) Valor máximo para o limite superior do atraso, $\tau_{max}$ , para $\tau_{min}=0$ e vários valores de $d_{min}$ e $d_{max}$ .....	46
2.3	(Exemplo 2.3.3) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ , $d_{max} = 0, 3$ e $d_{min}$ desconhecido.....	48
2.4	(Exemplo 2.3.3) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ , e para $d_{max}$ e $d_{min}$ desconhecidos.....	48
2.5	(Exemplo 2.3.4) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $d_{max}$ , $\tau_{min}=0$ e para $d_{min}$ desconhecido.....	49
2.6	(Exemplo 2.3.5) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ , e para $d_{max}=0, 1$ e $d_{min} = -0, 1$ .....	50
2.7	(Exemplo 2.3.5) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ , e para $d_{max}=0, 5$ e $d_{min} = -0, 5$ .....	51
2.8	(Exemplo 2.3.5) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ com $d_{max}$ e $d_{min}$ desconhecidos.....	52
2.9	(Exemplo 2.3.6) Valor máximo para o atraso contante $\tau_c$ afetado por uma função ruído de magnitude 0,001 cuja derivada é 0,001 .....	56
2.10	(Exemplo 2.3.7 – sistema incerto) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $d_{max}$ , $\tau_{min}=0$ e para $d_{min}$ desconhecido .....	56
2.11	(Exemplo 2.3.8 – sistema incerto) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $d_{max}$ , $\tau_{min}=0$ e para $d_{min}$ desconhecido .....	58
2.12	(Exemplo 2.3.8 – sistema incerto) Valor máximo do limite superior do atraso, $\tau_{max}$ , para $\tau_{min}=0.1$ e vários valores de $d_{min}$ e $d_{max}$ – Teorema 2.2.1 com $\eta=2$ .....	58
3.1	(Exemplo 3.4.1) Valor máximo para o atraso variante $\tau_{max}$ com $\tau_{min} = 0$ .....	72
3.2	(Exemplo 3.4.1) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ .....	73
3.3	(Exemplo 3.4.2) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ .....	74
3.4	(Exemplo 3.4.2) Valor máximo de $\tau_{max}$ para diversos valores de $\tau_{min}$ utilizando o Teorema 3.2.1 com $\eta = \{1, 2, 6, 12\}$ .....	75
3.5	(Exemplo 3.4.3) Valor máximo de $\tau_{max}$ para vários valores de $\tau_{min}$ .....	75
3.6	(Exemplo 3.4.4) Valor máximo para o atraso variante $\tau_{max}$ com $\tau_{min} = 0$ .....	76
4.1	(Exemplo 4.6.1) Menor valor aceitável de $\gamma$ para o qual o sistema é estável com $\tau_{max} = 0, 8695$ e $\tau_{min} = 0$ .....	101
4.2	(Exemplo 4.6.3) Menor valor aceitável de $\gamma$ para o qual o sistema é estável com $\tau_{max} = 0, 430$ e vários valores distintos para $\tau_{min}$ .....	103

4.3 (Exemplo 4.6.4) Menor valor aceitável de  $\gamma$  para o qual o sistema é estável  
com  $\tau_{max} = 0,430$  e vários valores distintos para  $\tau_{min}$  ..... 104

,

## LISTA DE SÍMBOLOS

No decorrer da dissertação, utilizaremos os símbolos aqui listados. A apresentação de cada símbolo é prontamente acompanhada de uma descrição sucinta de seu significado. Símbolos utilizados com menor frequência ou de escopo limitado serão apresentados sempre que necessário.

$:=$	É definido por
$\equiv$	Equivalente a
$\exists$	Existe
$\in$	Pertence a
$\subset$	Está contido em
$\cup$	União de
$\forall$	Para todos
min	Minimizar
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais não nulos, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \infty\}$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais de $n$ componentes
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto dos matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$I$	Matriz identidade de dimensão apropriada
$0$	Matriz nula de dimensão apropriada
$L_2[0, \infty)$	Espaço de Lebesgue das funções de quadrado integrável no intervalo no intervalo $[0, \infty)$ (espaço dos sinais contínuos de energia limitada)
$\ \cdot\ $	Norma $L_2$ (Euclidiana)
$\gamma$	restrição de projeto para norma $H_\infty$

### Siglas

BMI	Desigualdade Matricial Bilinear (do inglês <i>Bilinear Matrix Inequality</i> )
LARA	Laboratório de Automação e Robótica
LMI	Desigualdade Matricial Linear (do inglês <i>Linear Matrix Inequality</i> )
NCS	Sistema de Controle em Rede (do inglês <i>Networked Control System</i> )
SDP	Programação Semidefinida (do inglês <i>Semidefinite Programming</i> )
SLIT	Sistema Linear Invariante no Tempo



## NOTAÇÃO

Neste trabalho, o transposto de uma matriz  $P$  é descrito por  $P^T$  e sua inversa é descrita por  $P^{-1}$ . Descrevemos uma matriz diagonal como  $diag(\cdot)$ , de forma que  $diag(P_1 \dots P_n)$  denota uma matriz em bloco diagonal formada pelas matrizes  $P_1 \dots P_n$ . O traço de uma matriz  $P$  é representado por  $\text{tr}(P)$ . Denotamos  $P > 0$  (ou  $P < 0$ ) quando a matriz  $P$  for simétrica definida positiva (ou definida negativa) e  $P \geq 0$  (ou  $P \leq 0$ ) quando a matriz  $P$  for simétrica semi-definida positiva (ou semi-definida negativa). As matrizes simétricas terão termos simétricos em relação à diagonal principal representados por  $*$ , por exemplo, a matriz

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

será descrita por

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix}.$$

Notações específicas serão apresentadas sempre que necessário.





# 1 INTRODUÇÃO

A teoria de controle desempenha um papel fundamental na análise de sistemas físicos, químicos e, mais recentemente, na análise de sistemas biológicos, econômicos, sociais, etc [6]. Um sistema de automação consiste em um ou mais dispositivos que gerenciam, comandam, regulam ou investigam outros dispositivos e sistemas, em geral sistemas dinâmicos [7]. Em particular, estudaremos sistemas de controle. Durante vários anos, diversas estratégias de controle foram estabelecidas a partir de teorias clássicas de sistemas e de controle [7]. Neste período, as estratégias de controle evoluíram de simples sistemas de controle em malha aberta até estratégias de controle complexas e sofisticadas, como controle robusto  $H_\infty$ . Contudo, a recente expansão e popularização das redes de comunicação, em especial redes compartilhadas (como a internet) e redes sem fio, impulsionou o surgimento e o desenvolvimento de aplicações de controle caracterizadas por uma atuação remota sobre o sistema dinâmico. Neste contexto, surge o ramo da teoria de sistemas que lida com sistemas cuja malha de realimentação é fechada por uma rede de comunicação compartilhada, os chamados **sistemas de controle em rede**.

Operações de controle através de redes de comunicação não é um problema novo em situações práticas envolvendo sistemas de automação. Há mais de trinta anos, pesquisadores e engenheiros utilizam aplicações de controle teleoperado para a área de exploração espacial ou para a análise de sistemas em ambientes de risco (em especial na indústria química) [8]. Contudo, estas aplicações são fortemente dependentes de redes de comunicação dedicadas e especializadas que forneçam as informações para o controlador em tempos predefinidos de maneira a garantir a estabilidade do sistema, enquanto o conceito atual de sistemas de controle em rede sugere redes de comunicação não-ideais, compartilhadas e de uso genérico, nas quais as propriedades de operação estável não são mais asseguradas [9], principalmente devido ao tráfego variável.

Na medida em que o conceito de sistemas de controle em rede se desenvolve e se populariza, principalmente por conta de seu grande potencial de aplicações, também crescem os desafios inerentes a obtenção de sistemas de controle confiáveis e eficientes [7]. A tarefa de controlar um sistema que pode estar do outro lado do mundo a partir de redes imperfeitas de comunicação, que não são projetadas para lidar com os problemas de controle em tempo real, seguramente não é uma tarefa trivial. A inserção de uma rede de comunicação compartilhada na malha de realimentação de sistemas de controle torna a análise de sistemas de controle em rede em um problema multidisciplinar que exige a integração contínua e coesa de tecnologias de redes de comunicação, de processamento de sinais, de robótica e de tecnologia da informação com as teorias de controle de sistemas dinâmicos. Todas estas áreas do conhecimento em convergência para que possamos controlar um sistema dinâmico do outro lado do mundo (ou do espaço). Neste contexto, alguns dos principais teóricos de sistemas

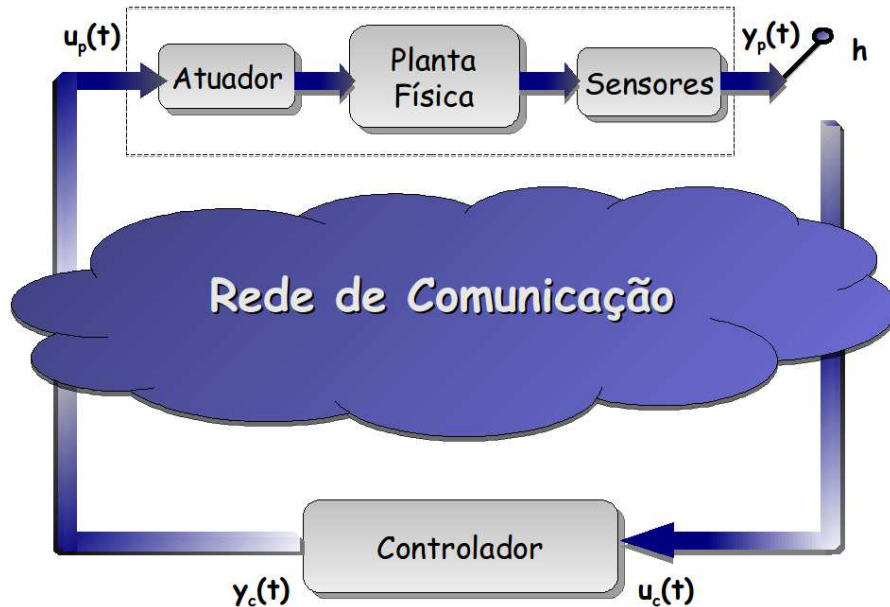


Figura 1.1: Representação genérica de um sistema de controle em rede.

de controle da atualidade, como Murray, Åström, Boyd, Brockett e Stein [10], classificam sistemas de controle em rede como sendo uma das questões fundamentais para o futuro da área de controle.

## 1.1 SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE

Sistemas de controle em rede, NCS (do inglês *networked control systems*), remetem à uma classe de sistemas de controle cujos elementos (planta, controladores, atuadores, sensores, etc) estão interligados por meio de uma rede de comunicação digital em tempo real e as informações são trocadas na forma de pacotes de dados [11, 12, 13, 14, 15]. Uma representação genérica para sistemas de controle em rede é apresentada na Figura 1.1. Observe que os elementos do sistema de controle (planta, controladores, atuadores e sensores) são conectados por meio de uma rede de comunicação compartilhada.

A arquitetura tradicional de comunicação para sistemas de controle é a arquitetura ponto-a-ponto, na qual todos os elementos do sistema são diretamente conectados e os atrasos inerentes a comunicação são desprezíveis [16]. Contudo, a rápida evolução e expansão das tecnologias de comunicação, o aumento de desempenho e a drástica redução dos custos associados aos dispositivos de rede incentivaram a inserção de redes de comunicação compartilhada nas malhas de realimentação de sistemas de controle. A utilização destas redes de comunicação para interligar os elementos de um sistema de controle é vantajosa em vários sentidos. Além da redução dos custos de instalação e manutenção [17], a sua utilização in-

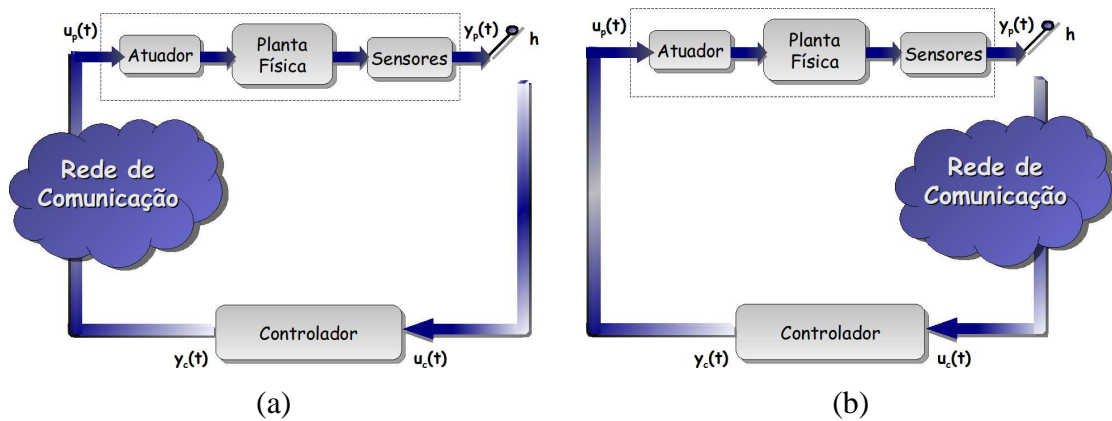


Figura 1.2: Representação de um sistema de controle em rede de sentido único.

crementa a flexibilidade, a modularidade e a confiabilidade do sistema de controle no sentido de facilitar e tornar mais rápida a verificação e o diagnóstico de falhas [16, 18, 19]. Além disso, controladores em rede permitem um rápido e eficiente compartilhamento de dados e informações, incrementando a viabilidade de aplicações teleoperadas [7]. Neste contexto, pesquisadores de grande influência na área de controle como Murray, Åström, Boyd, Brockett e Stein [10] classificam o controle por meio de redes de comunicação como sendo uma das questões fundamentais para o futuro da área de controle (tradução livre do inglês: *key future directions for control*).

É consideravelmente extenso o número de aplicações que se enquadram como sistemas de controle em rede, e.g., sistemas teleoperados, sistemas de larga escala complexos com vários subsistemas, veículos aéreos não-tripuláveis, exploração espacial, robótica colaborativa, automação industrial, processos químicos, controle em rede de sensores e em ambientes inteligentes, etc, [20, 21, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

Além disso, um sistema de controle em rede pode assumir diversas configurações distintas. A arquitetura tradicional é composta por um sistema de controle cujas malhas de realimentação entre os elementos sensores e o controlador e entre o controlador e o atuador são fechadas por meio de uma rede de comunicação compartilhada, conforme apresentado na Figura 1.1. Outra possibilidade é a presença da rede de comunicação em apenas uma das malhas de realimentação, conforme apresentado na Figura 1.2. Esta configuração, conhecida como NCS de sentido único [19], é menos complexa em comparação com a arquitetura tradicional devido à existência de uma conexão direta entre os elementos da rede. Existem uma série de outras configurações mais simples que em sua maioria podem ser analisadas por meio da arquitetura tradicional ou por meio de NCSs de sentido único.

Não obstante, a utilização de uma rede compartilhada em contraste com conexões dedicadas ponto-a-ponto entre os elementos introduz uma série de desafios que tornam a análise e o projeto destes sistemas consideravelmente mais complexos [11, 16]. Por conseguinte, as teorias de controle convencionais que assumem uma série de condições ideais (controle sincronizado, ausência de atrasos, etc) devem ser reavaliadas para que possam ser aplica-

das a NCSs [11]. Devido a maneira significativa como afetam a dinâmica dos sistemas de controle, a rede de comunicação e suas propriedades devem ser explicitamente consideradas [21]. Neste contexto, apresentamos as seguintes questões fundamentais que devem ser abordadas de maneira apropriada para a análise de sistemas de controle em rede.

### 1.1.1 Questões Fundamentais Envolvendo Sistemas de Controle em Rede

#### Atrasos induzidos pela rede

Em um sistema de controle em rede, os sinais em tempo contínuo amostrados pelos módulos sensores são codificados na forma de pacotes de dados digitais e transmitidos pela rede de comunicação; então, finalmente, decodificados por um dispositivo receptor em outra ponta da rede de comunicação [19]. Este processo distingue-se consideravelmente da amostragem periódica de sistemas digitais. Em especial, devido a existência de atrasos induzidos por conta da transmissão de dados através de uma rede de comunicação compartilhada.

Os atrasos de comunicação entre os dispositivos da rede são basicamente constituídos pelo atraso advindo da camada MAC (do inglês *medium access protocol*) de acesso à rede de comunicação, e pelo atraso referente a transmissão de dados sobre o meio físico de transmissão. Não obstante, estes atrasos são dependentes de condições altamente variáveis, e.g., congestionamento da rede ou qualidade dos canais [17]. Assim, o atraso de comunicação induzido é também altamente variável. Alguns autores, visando facilitar a análise consideraram atrasos constantes de comunicação [12]. Contudo, para esta análise ser factível, deve-se considerar o pior caso de atraso como atraso de referência constante. Assim, pacotes recebidos com atrasos menores que o atraso constante deverão ser armazenados e utilizados posteriormente. Outros autores, consideram atrasos de comunicação aleatórios modelados por processos estocásticos específicos [16] Neste trabalho, consideramos atrasos variantes de um maneira genérica. Desta forma, não impomos nenhuma restrição ou hipótese sobre o comportamento do atraso variante de comunicação.

#### Perda de pacotes

Outra importante propriedade que deve ser levada em consideração para a análise de sistemas de controle em rede é a possibilidade de perda de pacotes durante a transmissão de dados pela rede. Geralmente, a ocorrência de perda de pacotes se deve a falhas no meio físico de comunicação (muito mais comum em redes sem fio) ou por conta de estouro de *buffer* (geralmente devido a congestionamentos) [19]. Apesar da maioria dos protocolos de rede (protocolo TCP, por exemplo) estarem equipados com mecanismos de retransmissão, eles só podem retransmitir até um certo limite de tempo. Após este tempo os pacotes serão descartados [11]. Além disso, do ponto de vista de controle é mais interessante que o pacote antigo seja descartado e um novo contendo informações mais recentes do estado da planta ou do sinal de controle seja transmitido, caso esteja disponível para transmissão [11].

O comportamento em tempo real de um sistema de controle em rede irá depender diretamente destas características que por sua vez são dependentes dos parâmetros da rede de comunicação, e.g., taxa de transmissão, protocolo de acesso à camada MAC, tamanho dos pacotes, etc [11]. Tradicionalmente, a análise de sistemas de controle envolve o pressuposto que a conexão entre os elementos do sistema é feita por meio de canais ideais e, portanto, estas características não são devidamente consideradas e investigadas. A análise por meio da teoria de comunicação, apesar de considerar estas características e a transmissão por meio de canais imperfeitos, não leva em conta os efeitos do atraso e da perda de pacotes sobre o sistema dinâmico. Neste sentido, pode-se afirmar que sistemas de controle em rede encontram-se na junção das teorias de controle e de comunicação [19]. Segundo Zhang et al. [11], de acordo com a teoria a ser aplicada, podemos analisar NCSs através de duas abordagens distintas. A primeira é projetar um sistema de controle sem levar em consideração as propriedades de atraso e de perda de pacotes e, então, configurar um protocolo de comunicação que minimize a probabilidade de ocorrência destes eventos. A segunda é assumir que as características da rede de comunicação e suas propriedades são previamente estabelecidas e, então, projetar estratégias de controle que considerem explicitamente estas propriedades. Esta dissertação leva em consideração principalmente a perspectiva de controle, portanto, assumimos propriedades da rede de comunicação conhecidas e assim procuramos estabelecer condições que assegurem a estabilidade e a estabilização do sistema de controle em rede. Estas condições serão estudadas por meio da abordagem de sistemas lineares sujeitos a atrasos variantes no tempo cujas propriedades de estabilidade são estudadas há mais de 50 anos.

## 1.2 CONCEITOS BÁSICOS

### 1.2.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

A teoria de estabilidade desempenha um papel fundamental na teoria e na análise de sistemas de controle. De maneira geral, podemos afirmar que em um sistema de controle o primeiro aspecto e, provavelmente, o aspecto de maior importância a ser determinado refere-se a estabilidade deste sistema [6]. Neste contexto, primeiramente introduziremos o conceito de pontos de equilíbrio.

Pontos de equilíbrio são fundamentais à análise de sistemas dinâmicos, pois eles definem os estados em que as condições de operação de um sistema dinâmico mantêm-se constantes, ou seja, nas situações em que a dinâmica do sistema encontra-se em condição estacionária [1]. Em outras palavras, se existirem condições iniciais  $x(0)$  tais que a trajetória  $x(t)$  permaneça sempre igual (ou seja, igual a  $x(0)$ ), diz-se que  $x(0)$  é um **ponto de equilíbrio** [2].

Neste sentido, considerando um sistema dinâmico

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (1.1)$$

dizemos que um estado  $x_e$  é um ponto de equilíbrio de (1.1) se  $F(x_e) = 0$ , ou seja, se em um determinado instante,  $t_e$ , o sistema dinâmico entrou em um ponto de equilíbrio  $x(t_e) = x_e$ , então

$$x_e \text{ é ponto de equilíbrio} \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \geq t_e, x(t) \equiv x_e. \quad (1.2)$$

Um sistema dinâmico pode ter nenhum, um, vários ou infinitos pontos de equilíbrio. Visando facilitar a análise, sempre que existir um ponto de equilíbrio  $x_e \neq 0$ , efetuaremos uma mudança de variáveis, de forma que

$$\begin{cases} z = x - x_e, \\ \dot{z} = F(z + x_e). \end{cases} \quad (1.3)$$

Assim,  $z_e = 0$  é o ponto de equilíbrio correspondente a  $x = x_e$ .

Em termos intuitivos, o ponto de equilíbrio é o ponto de operação desejado para o sistema dinâmico. Em situações práticas, no entanto, é comum que as condições iniciais não se encontrem neste ponto. Assim, se torna interessante estudar o comportamento do sistema para este caso, i.e., o sistema se aproximará ou se afastará do ponto de equilíbrio. De maneira geral, diremos que um ponto de equilíbrio é estável se todas soluções que começam em pontos em sua vizinhança mantêm-se perto do ponto de equilíbrio, caso contrário i.e., se as soluções se afastarem, o ponto de equilíbrio é instável [28, 1]. Assim, introduzimos a seguinte definição

**Definição 1.2.1.** [28, 2] *O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é **estável** se para qualquer  $R > 0$  existir um  $r > 0$ , o qual depende do valor de  $R$  e é menor que este valor, i.e.,  $0 < r(R) < R$ , tal que se  $\|x(t_0)\| < r$ , em que  $t_0$  é o instante inicial, então  $\|x(t)\| < R$ , para todo  $t \geq t_0$ .* □

A Definição 1.2.1 mencionada acima implica que uma trajetória iniciada perto do ponto de equilíbrio, especificamente dentro de uma bola  $r$  em torno do ponto de equilíbrio, nunca sairá fora de uma bola de raio  $R$  em torno do ponto de equilíbrio [2]. Esta noção de estabilidade é representada na Figura 1.3, na qual observa-se que o estado  $x(t)$  (curva pontilhada) evolui no tempo dentro de um tubo de raio  $R$  (representado pelas curvas sólidas externas) em torno do ponto de equilíbrio (curva sólida mais espessa).

Esta noção de estabilidade também é conhecida como estabilidade no sentido de Lyapunov, por conta do matemático e engenheiro Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov<sup>1</sup> que incentivado por seu orientador P. Tchebyshev foi o primeiro a estudar e deduzir uma teoria sobre

---

<sup>1</sup>Para mais informações sobre a biografia de A. Lyapunov, um dos autores mais importantes da teoria de controle, leia [29].

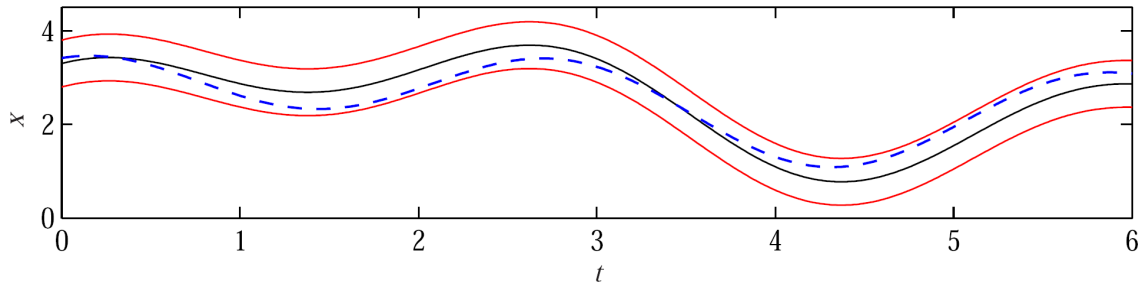


Figura 1.3: Evolução do estado  $x$  no tempo (curva pontilhada) para um sistema com ponto de equilíbrio estável (curva sólida espessa) em  $t > 0$ . Figura obtida de [1].

o comportamento dos pontos na vizinhança dos pontos de equilíbrio. Lyapunov propôs o primeiro trabalho teórico sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos não-lineares que foi publicado em 1892 na sua tese de doutorado (*The General Problem of Motion Stability*) [29]. Em seus trabalhos, Lyapunov propõe dois métodos para investigar a estabilidade de um sistema dinâmico em torno do ponto de equilíbrio. O primeiro método permite a análise e a investigação da estabilidade de sistemas não lineares através de seu modelo linearizado [30]. O segundo método, conhecido como método direto de Lyapunov, permite a análise do comportamento de sistemas dinâmicos em torno de um ponto de equilíbrio com o auxílio de uma função escalar designada por função de Lyapunov [2].

A função de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função semelhante a uma função de energia que pode ser utilizada para determinar a estabilidade de um sistema dinâmico [1]. Considerando o conceito de energia, observamos que um sistema, quer seja mecânico, elétrico ou de outro tipo, tem usualmente dissipação ou amplificação de energia. Assim, sempre que a dissipação for superior à amplificação, a energia do sistema decará e as variáveis do sistema (amplitudes de oscilação, velocidades, tensões elétricas, correntes, etc.) tenderão a evoluir para zero (ponto de equilíbrio). Estudando a energia associada ao sistema, ou outra grandeza mais conveniente se torna possível a análise de seu comportamento, em particular de sua estabilidade [2]. Neste contexto, estamos prontos para caracterizar as condições de estabilidade para um ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  para o sistema (1.1), com  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.2.1.**<sup>2</sup> (*Teorema de estabilidade de Lyapunov*) [28, 1, 2] Dado um ponto de equilíbrio  $x_e = 0$ , se existir uma bola  $B_R$  de raio  $R > 0$  centrada no ponto de equilíbrio, para a qual exista uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida positiva com derivada no tempo sobre a trajetória do sistema dinâmico (1.1),

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} F(x),$$

semi-definida negativa para todo  $x \in B_R$ , então o ponto de equilíbrio é localmente estável no sentido de Lyapunov. Se tal afirmação for válida para todo  $R > 0$ , então o ponto de equilíbrio é globalmente estável no sentido de Lyapunov. Além disso, se  $\dot{V}$  for definida

<sup>2</sup>Uma das provas do Teorema encontra-se em [28, Capítulo 3].

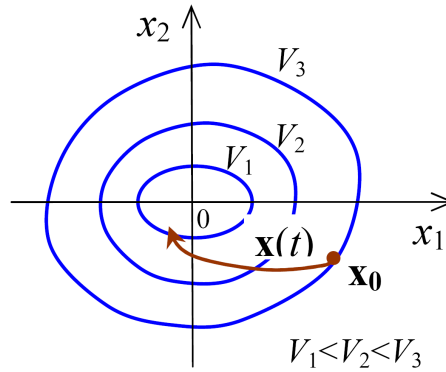


Figura 1.4: Representação geométrica das curvas de nível de uma função de Lyapunov. Figura obtida de [2].

*negativa, então o ponto de equilíbrio será assintoticamente estável no sentido de Lyapunov.*

■

As funções  $V$  que satisfazem as condições estipuladas no Teorema 1.2.1 são denominadas **funções de Lyapunov**. A Figura 1.4 apresenta uma representação geométrica para este resultado. Observe que as curvas de nível para um função de Lyapunov definida positiva são representadas por  $0 < V_1 < V_2 < V_3$ . Assim, a condição  $\dot{V}(x) \leq 0$  implica que a trajetória do sistema deve se aproximar da origem passando por curvas de nível com valores referentes a função de Lyapunov  $V$  cada vez menores. Ademais, se a derivada  $\dot{V}(x)$  for definida negativa, então  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

É interessante ressaltar que o Teorema 1.2.1 refere-se a estabilidade local e global do ponto de equilíbrio  $x_e = 0$ . Um sistema localmente estável implica que o sistema será estável na vizinhança de um determinado ponto de equilíbrio. Assim, um estado de equilíbrio (ponto de equilíbrio) será globalmente estável se este for estável qualquer que seja o valor inicial de seu estado [2].

Além disso, o Teorema 1.2.1 refere-se à estabilidade e à estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio. Em um sistema estável (também chamado de neutramente estável) no sentido de Lyapunov podemos afirmar que para qualquer bola  $B_R$  de raio  $R > 0$  centrada na origem, se o estado inicial estiver dentro da bola  $B_R$ , ou seja,  $\|x(t_0)\| < R$ , em que  $t_0$  é o instante inicial, então  $\|x(t)\| < R$ , para todo  $t \geq t_0$ . Uma representação gráfica desta análise é apresentada na Figura 1.5. Observe que a norma do estado  $\|x(t)\|$ , apesar de não tender a zero, é limitada em  $R$  para qualquer  $t > 0$ . Não obstante, um sistema assintoticamente estável no sentido de Lyapunov implica que, além do estado  $x(t)$  para  $t > t_0$  estar limitado dentro da bola de raio  $R > 0$ , este convergirá ao ponto de equilíbrio  $x_e = 0$ , ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$ . Esta definição pode ser interpretada graficamente através da Figura 1.6.

Pelo restante do trabalho, consideraremos apenas a estabilidade assintótica no sentido de Lyapunov. Desta forma, sempre que mencionarmos a estabilidade de um sistema dinâmico



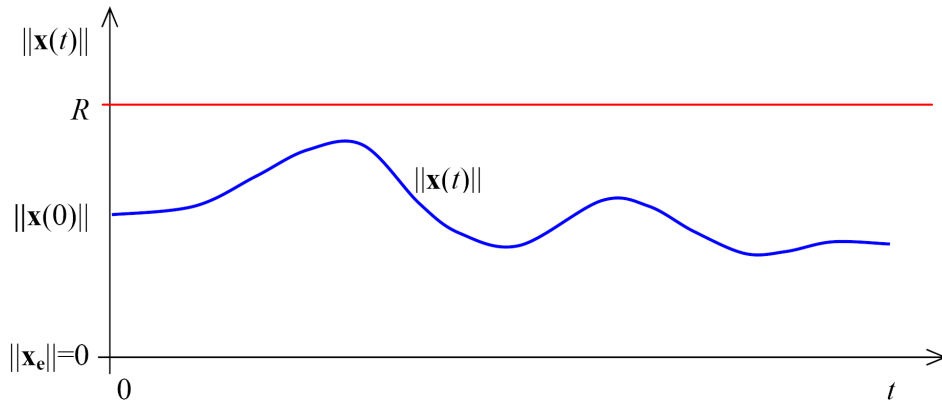


Figura 1.5: Sistema com ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  estável no sentido de Lyapunov. Figura obtida de [2].

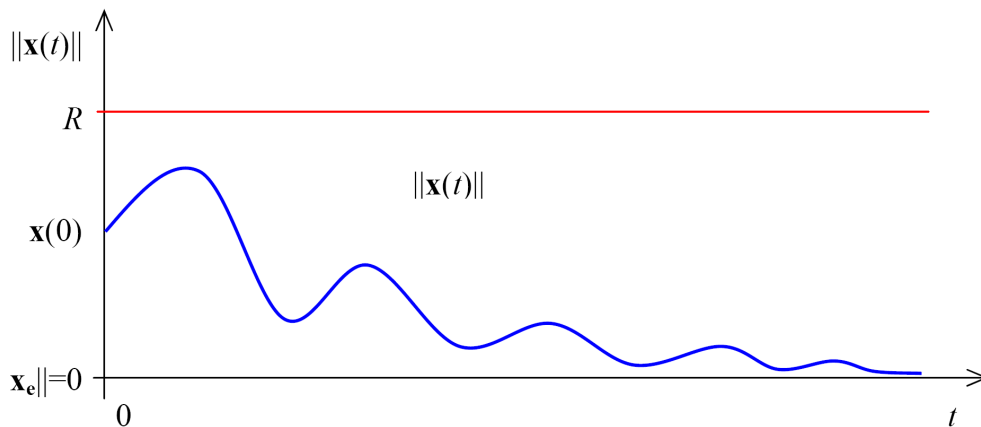


Figura 1.6: Sistema com ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. Figura obtida de [2].

estamos nos referindo a sua estabilidade assintótica (a menos que esteja especificamente indicado o tipo de estabilidade).

*Observação 1.2.1.* [28] O Teorema de Lyapunov 1.2.1 fornece condições suficientes para a estabilidade de sistemas dinâmicos. Contudo, não informa nada sobre se as condições são também condições necessárias.<sup>3</sup>

É importante ressaltar que existem vários outros métodos que podem ser utilizados para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo (SLITs), e.g. o critério de estabilidade de Nyquist, critério de Routh-Hürwitz etc [6]. Todavia, ao alterarmos as configurações destes sistemas seja pela inclusão de não-linearidades, de parâmetros variantes no tempo, ou atrasos contantes ou variantes no tempo estes critérios deixam de ser válidos. Neste sentido, o critério de estabilidade por Lyapunov é robusto e flexível à estas

<sup>3</sup>Existem alguns trabalhos que estabelecem para algumas formas de estabilidade condições que são de fato necessárias, são os chamados Teoremas de Conversão [28].

modificações, não-linearidades e incertezas. Especificamente, no caso de sistemas lineares sujeitos a atrasos constantes ou variantes no tempo que serão tratados neste trabalho, a estabilidade no sentido de Lyapunov fornece as ferramentas que precisamos para estabelecer condições suficientes de estabilidade assintótica, conforme veremos na próxima seção.

### 1.2.2 Sistemas sujeitos a atrasos no tempo

Sistemas sujeitos a atrasos no tempo são também conhecidos como sistemas hereditários, sistemas defasados ou sistemas com tempo morto [4, 31]. De fato, sistemas sujeitos a atrasos no tempo (ou sistemas atrasados) generalizam o conceito de sistemas com diversos tipos de atrasos. Conforme detalhadamente descrito em [4], estes sistemas pertencem a uma classe especial de equações diferenciais funcionais que, ao contrário das equações diferenciais ordinárias, possuem dimensão infinita [31, 32]. Esta classe de equações é conhecida pelo nome de equação diferencial funcional atrasada – RFDE (do inglês *retarded functional differential equation*) [4] ou, simplesmente, por equação diferencial atrasada – DDE (do inglês *delayed differential equation*) [19]. Esta classe de sistemas é definida genericamente da seguinte forma, [4],

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t), \quad (1.4)$$

em que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{C}$  é o conjunto das funções contínuas mapeando o intervalo  $[-\tau, 0]$  em  $\mathbb{R}^n$ . A Equação (1.4) indica que a dinâmica do sistema em cada  $t$  depende do estado no instante  $t$ ,  $x(t)$ , e da história de valores de  $x(t)$  no intervalo  $[t - \tau, t]$ , i.e.,  $x_t$ .

Sistemas sujeitos a atrasos no tempo ocorrem em diversas situações práticas dado que grande parte dos processos e sistemas físicos, químicos e biológicos envolvem reações que não são instantâneas [3]. Assim, considerar a dependência de informações referentes ao histórico temporal destes sistemas é fundamental para um modelamento matemático mais realista de vários sistemas distintos. Desta forma, visando facilitar a análise e ilustrar a ampla gama de aplicações nas quais verifica-se a ocorrência de atrasos, apresentamos os seguintes exemplos

#### **Exemplo 1.2.1.** [3, 33]

*Considere o chuveiro apresentado na Figura 1.7. Neste sistema, o ajuste de temperatura é feito através da mistura de reservatórios contendo água quente e água fria. Portanto, é natural que exista um atraso entre o instante de abertura das válvulas até o instante que a água esteja na temperatura desejada. Assumindo que a água não seja compressível e seja um fluido em regime estacionário, pode-se deduzir uma expressão analítica para calcular o valor do atraso no tempo inerente ao sistema.*

*Com este intuito, investigamos a vazão da água, de acordo com a Lei de Poiseuille,*

$$F = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p,$$

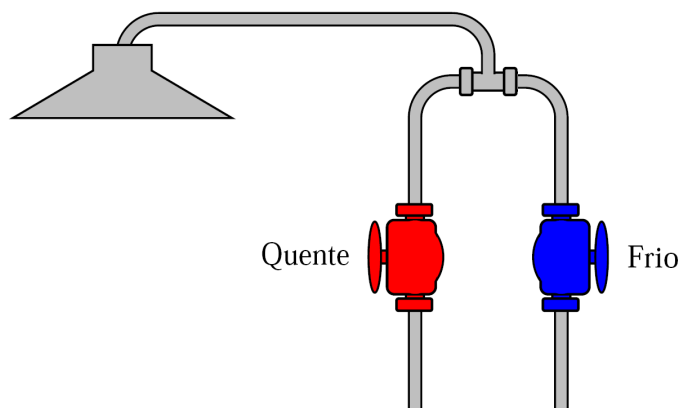


Figura 1.7: [Exemplo 1.2.1] Diagrama esquemático de um chuveiro. Figura obtida de [3].

em que  $v$  representa o coeficiente de viscosidade da água,  $R$  e  $l$  representam respectivamente o raio e o comprimento da tubulação e  $\Delta p$  correspondente a diferença de pressão do fluido entre o início e o fim da tubulação. Assim, o atraso no tempo  $\tau$  inerente ao sistema pode ser calculado como

$$\tau = \frac{8v}{\Delta p} \left( \frac{l}{R} \right)^2. \quad \square$$

**Exemplo 1.2.2.** [4, 34]

Considere a Figura 1.8 (a) que apresenta um processo de usinagem de uma peça cilíndrica por meio de um torno mecânico. A peça com forma geométrica de revolução gira com uma velocidade angular  $\omega$  constante e a ferramenta de corte percorre um trajetória ao longo do eixo desta peça com velocidade constante  $\frac{\omega f}{2\pi}$ , em que  $f$  é uma taxa que corresponde à espessura do cavaco removido. A ferramenta gera uma superfície na medida que o material é removido (região sombreada da figura), e qualquer vibração da ferramenta é refletida nesta superfície. No contexto de usinagem com vibrações regenerativas, a superfície gerada pela passagem anterior da ferramenta se torna a superfície superior do cavaco na passagem seguinte desta ferramenta. Um modelo genérico usualmente utilizado para estudar este tipo de processo baseia-se no processo apresentado na Figura 1.8 (b) e pode ser descrito da seguinte maneira, [4],

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -F_t (f + y(t) - y(t - \tau)),$$

em que  $m$ ,  $c$  e  $k$  correspondem às características de inercia, amortecimento e rigidez da ferramenta, o atraso  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  corresponde ao tempo necessário para a peça fazer uma revolução e, por fim,  $F_t$  representa a força de impulso que é dependente da espessura do cavaco. Maiores detalhes quanto ao modelamento de sistemas de usinagem com vibrações regenerativas através de equações diferenciais atrasadas são apresentados em [35]. □

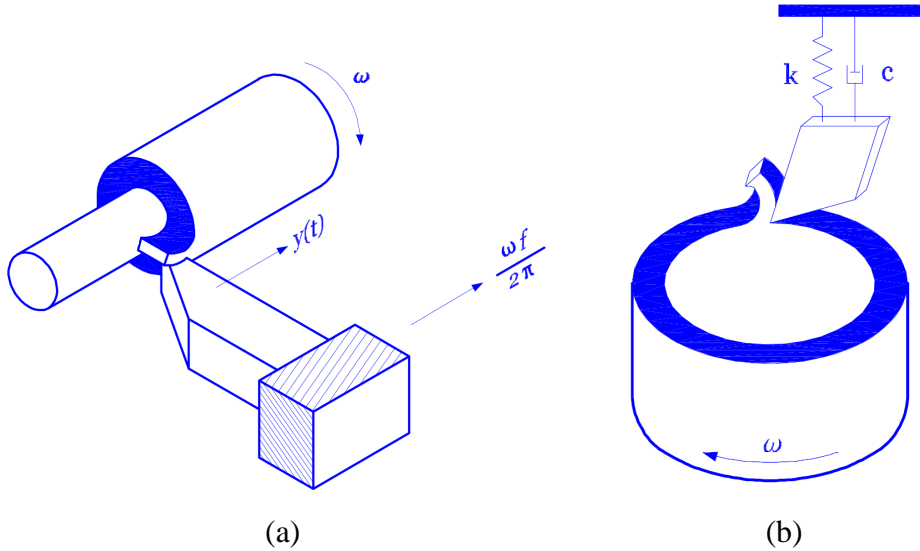


Figura 1.8: [Exemplo 1.2.2] Processo de usinagem por meio de um torno (a). Processo de usinagem com vibrações regenerativas (b). Figura obtida de [4].

No Exemplo 1.2.2, consideramos um sistema autônomo e, portanto, o atraso é resultado das características inerentes ao sistema. A força de impulso  $F_t$  é usualmente considerada linear e técnicas lineares para sistemas atrasados são utilizadas para a análise deste sistema [4]. Recentemente, devido a exigências em usinagem de alta velocidade, houve uma considerável expansão nas pesquisas e no interesse de sistemas não lineares e de sistemas atrasados com aplicações para a indústria [4].

**Exemplo 1.2.3.** [4, 36]

*No controle de motores de combustão interna, é usual a utilização de modelos baseados no torque médio. Neste modelo, a rotação do virabrequim é modelada pela equação de movimento*

$$J\dot{\omega}(t) = T_i(t - \tau_i) - T_f(t) - T_c(t),$$

*em que  $T_i$  indica o torque gerado pelo motor que é atrasado em  $\tau_i$  segundos devido a atrasos do ciclo do motor, sejam estes resultantes do atraso de ignição, de mistura do ar-combustível, ou de propagação sobre os cilindros. Além disso, o termo  $T_f$  representa o atrito de fricção,  $T_c$  representa a carga,  $J$  representa o momento de inércia e,  $\omega$ , a velocidade angular do virabrequim.*

*A dinâmica do sistema e a ação de controle de realimentação aplicada para manipular o torque indicado  $T_i$  são definidos da seguinte forma,*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), \omega(t)), \\ T_i(t) &= h(x(t), \omega(t)). \end{aligned}$$

Então combinando as equações mencionadas, obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(t) &= \frac{1}{J} [h(x(t - \tau_i), \omega(t - \tau_i)) - T_f(t) - T_c(t)], \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), \omega(t)).\end{aligned}\quad \square$$

Ao contrário dos exemplos anteriores, no Exemplo 1.2.3, o atraso é resultado da malha de realimentação. Este tipo de atraso ocorre devido a atrasos no controlador ou atrasos na medição (seja por conta da transmissão de dados ou pelo processo de aquisição destes) e são, geralmente, prejudiciais ao desempenho e à estabilidade do sistema [4].

Além dos exemplos mencionados, existe na literatura uma ampla gama de sistemas que são modelados considerando explicitamente o efeito de atrasos constantes ou variantes no tempo. Por exemplo, podemos citar outros exemplos em sistemas de combustão [37], ou exemplos em processos biológicos, químicos e econômicos ([38, 39, 40] e suas referências).

### 1.2.2.1 Estabilidade de sistemas sujeitos a atrasos no tempo

De maneira análoga ao caso de sistemas sem atrasos, a análise de estabilidade é também fundamental para sistemas sujeitos a atrasos no tempo. As primeiras pesquisas relacionadas a estabilidade deste tipo de sistema surgiram na década de 1940 com os trabalhos sobre a estabilidade de quasi-polinômios (pseudo-polinômios com coeficientes definidos por funções periódicas) de Pontryagin e de Chebotarev [4]. Em 1949, Myshkis formulou pela primeira vez o problema relacionado aos valores iniciais e aos pontos de equilíbrio destes sistemas [4]. No entanto, apenas a partir do trabalho pioneiro de Nikolaï Nikolaevich Krasovskii em 1959, estabeleceu-se uma teoria capaz de analisar a estabilidade destes sistemas de maneira eficaz. Neste trabalho, traduzido para o inglês em 1963 [41], Krasovskii apresenta pela primeira vez uma extensão da teoria de Lyapunov (Teorema 1.2.1) para lidar com sistemas sujeitos a atrasos no tempo. Esta extensão é baseada em seus estudos pioneiros (1956) sobre a importância de se considerar o estado  $x(t)$  em todo o intervalo de atraso, i.e.,  $x_t$ , na construção das funções de Lyapunov [4]. Em outras palavras, Krasovskii enfatiza a importância de se considerar uma função de Lyapunov que leve em conta não só a evolução temporal do sistema dinâmico mas também seu histórico temporal [3]. Assim, consideramos uma função de Lyapunov  $V(t, x(t), x_t)$  que dependa do estado atual  $x(t)$  e, também, de  $x_t$ , que corresponde a  $x(t)$  no intervalo  $[t - \tau, t]$ . Com o intuito de distinguir esta função da função de Lyapunov proposta originalmente, deu-se o nome de função de Lyapunov-Krasovskii. O objetivo é analisar e quantificar o desvio não apenas de  $x(t)$  mas também de  $x_t$  em relação ao ponto de equilíbrio.

Neste contexto, primeiro consideremos um sistema dinâmico atrasado genérico, conforme descrito na Equação (1.4), em que as condições iniciais referentes ao estado são dadas por  $x_0(\theta) = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$ . De maneira análoga ao caso sem atrasos, o sistema atrasado genérico (1.4), terá ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  estável no sentido de Lyapunov-Krasovskii

se para qualquer instante inicial, existir um raio  $R > 0$ , tal que  $\|\rho\|_M = \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\rho(\theta)\| < R$  implica que  $\|x(t)\| < R$  para todo  $t \geq 0$ . A partir desta caracterização, estamos prontos para estabelecer as condições segundo Krasovskii que assegurem a estabilidade de sistemas dinâmicos sujeitos a atrasos no tempo

**Teorema 1.2.2.** <sup>4</sup> (*Teorema de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii*) [4, 39, 30] *Sejam  $u, v, w$  funções contínuas semi-definidas positivas, tal que  $u(s)$  e  $v(s)$  são positivas para  $s > 0$  e nulas para  $s = 0$ . Se existir uma função contínua e diferenciável  $V$  tal que as afirmações*

$$u(\|\rho(0)\|) \leq V(t, \rho) \leq v(\|\rho\|_M) \quad (1.5)$$

e

$$\dot{V}(t, \rho) \leq -w(\|\rho(0)\|) \quad (1.6)$$

*sejam válidas, então o ponto de equilíbrio  $x_e=0$  é estável. Além disso, se  $w(s)$  for definida positiva para  $s > 0$ , então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável no sentido de Lyapunov-Krasovskii.* ■

Se a função  $V$  satisfaz as condições estipuladas no Teorema 1.2.2, ela é denominada **função de Lyapunov-Krasovskii**. A condição apresentada em (1.5) implica que a função de Lyapunov-Krasovskii é definida positiva e que possui limite superior infinitesimal [39], enquanto que a segunda condição (1.6) implica que a derivada da função é definida negativa e, portanto, a função de Lyapunov-Krasovskii não cresce ao longo da trajetória do sistema [4]. A princípio pode-se pensar que a condição (1.6) não permite a análise dependente de parâmetros do atraso (como limites inferiores e superiores, ou sua derivada), contudo podemos analisar estas características a partir da construção de funções candidatas consideravelmente complexas que considerem explicitamente estas características [39].

Em geral, o Teorema de Lyapunov-Krasovskii (Teorema 1.2.2) exige uma complexa manipulação das características do atraso para a formulação de uma função candidata eficiente. Este desafio pode ser significativamente reduzido ao considerarmos uma segunda forma de análise de estabilidade para sistemas sujeitos a atrasos no tempo introduzida por Razumikhin [43]. Não obstante, apesar de sua construção ser mais simples, o método de Razumikhin pode ser obtido através do Teorema de Lyapunov-Krasovskii por meio da imposição de restrições adicionais à análise [4], e, portanto, seus resultados tendem a ser mais conservadores [44, 45]. Assim, o método de Razumikhin não será abordado neste trabalho.

O foco deste trabalho é a análise de estabilidade e estabilização de sistemas lineares sujeitos a atrasos variantes no tempo. Desta forma, a descrição generalizada para sistemas atrasados (1.4) será redefinida considerando um sistema linear contínuo sujeito a atrasos no tempo, da seguinte forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau), \quad t > 0, \quad (1.7)$$

---

<sup>4</sup>A demonstração do Teorema de Lyapunov-Krasovskii encontra-se em [4, 39, 42].

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado da planta,  $A$  e  $A_d$  são matrizes do sistema, conhecidas ou não, com dimensões apropriadas, e  $\tau \geq 0$  representa o atraso no tempo.

Mais precisamente, levaremos em consideração atrasos variantes no tempo ( $\tau = d(t)$ ) incertos, porém limitados da seguinte maneira

$$\tau_{min} \leq d(t) \leq \tau_{max},$$

de forma que o sistema (1.7) possa ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)), & t > 0, \\ x(t) = \rho(t), & t \in [-\tau_{max}, 0], \end{cases}$$

em que  $\rho(t)$  é uma função que descreve as condições iniciais do estado.

Ao considerarmos sistemas dinâmicos lineares, a estabilidade do sistema no sentido de Lyapunov-Krasovskii pode ser investigada e analisada por meio de ferramentas clássicas como as desigualdades matriciais lineares.

### 1.2.3 Desigualdades matriciais na teoria de controle

Nesta subseção, descreveremos de forma sucinta a importância da utilização de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) na teoria de controle. Primeiramente, descreveremos de maneira concisa o histórico desta ferramenta de análise.

#### 1.2.3.1 Histórico das desigualdades matriciais lineares

A aplicação deste tipo de desigualdade à análise de sistemas dinâmicos, mais especificamente à análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, teve início há mais de cem anos com os trabalhos de Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov (1892) e a notória desigualdade

$$A^T P + P A < 0, \quad P > 0$$

que se tornou conhecida como a desigualdade de Lyapunov [29, 46]. Neste caso específico, a desigualdade era resolvida analiticamente através de uma série de equações lineares.

Os avanços na teoria relacionada a desigualdades matriciais lineares são detalhadamente discutidos em [46]. Inicialmente, pesquisadores utilizavam tipos específicos de LMIs para a solução de problemas específicos. Na década de 1940, pesquisadores da antiga União Soviética (Lur'e e Postnikov entre outros) foram os primeiros a aplicar a teoria de Lyapunov para problemas de controle, em especial à análise de estabilidade de sistemas com não-linearidades nos atuadores [46]. Não obstante, as desigualdades matriciais lineares resultantes eram resolvidas analiticamente (manualmente) e, portanto, a análise era reduzida a sistemas pequenos (segunda ou terceira ordem no máximo) [47]. Na década de 1960, pes-

quisadores como Popov, Kalman, Tsytkin entre outros, verificaram que as desigualdades resultantes dos problemas descritos por Lur'e [48] podiam ser resolvidas através de certas ferramentas de análise gráfica, Nyquist, critério de Popov, entre outros [49, 50]. Além disso, nesta época se tornou notória a importância do estudo de LMIs para a teoria de controle [51]. Por fim, em 1971, J.C. Willems demonstrou em seu trabalho sobre controle ótimo quadrático [52], que a LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB + C^T \\ * & R \end{bmatrix} \geq 0,$$

poderia ser resolvida através do estudo de soluções simétricas da equação algébrica de Riccati – ARE (do inglês *algebraic Riccati equation*),

$$A^T P + PA + Q - (PB + C^T) R^{-1} (B^T P + C) = 0,$$

que por sua vez pode ser resolvida por meio da decomposição dos autovalores da matriz Hamiltoniana correspondente [46]. Não obstante, além desta contribuição mais óbvia, Willems em [52] sugere que a utilização destes métodos (equações algébricas de Riccati, ferramentas gráficas, etc) não propiciavam condições ideais para que a teoria referente a desigualdades matriciais lineares se desenvolvesse e que seria interessante explorar sua capacidade por meio de algoritmos computacionais [53]. Neste contexto, Pyatnitskii and Skorodinskii [54], entre outros pesquisadores, observaram que o problema relacionado a construção de uma LMI derivada de uma função de Lyapunov podia ser escrito como um problema de otimização convexa e, portanto, solúvel por meio de certos algoritmos.

Contudo, foi através do desenvolvimento de poderosos e eficientes métodos de pontos interiores para solucionar LMIs que estas finalmente se popularizaram na teoria de controle. Em 1984, Karmarkar introduz um novo algoritmo de programação que resolvia programas lineares em tempo polinomial [46]. A partir deste trabalho, surgem outros vários baseados em métodos de pontos interiores para programação linear. Neste contexto, em 1988, Nesterov e Nemirovskii [55] desenvolveram métodos por pontos interiores que se aplicam diretamente a problemas convexos envolvendo LMIs. A partir de então, vários algoritmos por pontos interiores foram implementados com sucesso para a solução de problemas convexos envolvendo LMIs que surgem na teoria de controle. Para um detalhamento sobre os métodos por pontos interiores veja [46].

### 1.2.3.2 Desigualdades matriciais lineares

Neste trabalho, consideramos uma forma genérica de caracterização dos problemas envolvendo desigualdades matriciais lineares (LMIs), de forma que procuramos encontrar uma solução  $x \in \mathbb{R}^m$  para

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0, \quad (1.8)$$



em que  $x$  é o vetor de variáveis de decisão e  $F_i = F_i^T, i = \{0, \dots, m\}$  são matrizes conhecidas. O sinal da desigualdade em  $F(x) \geq 0$  significa que  $F(x)$  é semi-definida positiva, i.e.,  $z^T F(x) z \geq 0$ , para todo  $z \neq 0$ . A LMI (1.8) é uma restrição convexa em  $x$ , i.e., o conjunto de soluções  $x$  que atende à restrição ( $\{x \mid F(x)\}$ ) é convexo. Encontrar uma solução que denominaremos como **solução factível** ou **solução viável** é encontrar um  $x_{fact}$  tal que  $F(x_{fact}) > 0$ . Caso não encontremos esta solução denominaremos a LMI como sendo **infactível** ou sem solução viável. Observe que desigualdades matriciais formadas pela combinação de um conjunto de variáveis matriciais  $X_1, X_2, \dots, X_m$  são também referidas como LMIs, pois estas podem ser expressas na forma (1.8), em termos das componentes das matrizes  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , [56]. Outro problema envolvendo LMIs que levaremos em consideração neste trabalho é o problema de minimização  $\min \{c^T x\}$  sujeito a  $F(x) \geq 0$ , em que  $c \in \mathbb{R}^m$ . Esse problema é conhecido como problema de programação semi-definida (SDP). Esta classe de problemas refere-se a problemas de otimização convexa, na qual a função objetivo que se deseja minimizar é linear e as restrições são escritas na forma de desigualdades matriciais lineares [57].

Dentre a enorme gama de problemas que podem ser caracterizados por meio de LMIs podemos citar os problemas referentes à análise de estabilidade robusta de sistemas incertos lineares invariantes no tempo [46, 58]; à análise do posicionamento de pólos em regiões convexas do plano convexo, denominada  $\mathcal{D}$ -estabilidade [59, 56]; à análise das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  e seus custos [60]; à síntese de controladores robustos por realimentação de estado [59]; dentre outros.

A formulação destes problemas por meio de LMIs é interessante pelas seguintes razões [56, 61]:

- **Convexidade e solução numérica eficiente:** Os problemas envolvendo LMIs são problemas convexos e, portanto, solucionáveis utilizando métodos de pontos interiores para otimização convexa em problemas de programação semi-definida (SDP) [61]. Estes métodos possuem taxa de convergência polinomial, fornecendo desta maneira uma solução eficiente para problemas que não possuem solução analítica, ou que possuem solução analítica restritiva ou complicada [46].
- **Robustez sobre incertezas:** Baseando-se em uma descrição determinística das incertezas com estrutura e limites conhecidos, pode-se descrever o problema na forma de problemas de programação semi-definida. Desta forma, a abordagem por LMIs é viável para sistemas sujeitos a incertezas muito comuns nos problemas de engenharia onde constantemente erros de medida, modelagem, etc, estão presentes [56].
- **Problemas multi-objetivo:** Esta é uma vantagem significativa quando se compara a abordagem LMI aos métodos clássicos de otimização, que empregam apenas um critério para refletir um conjunto deles. A tarefa de se escolher o critério de otimização mais relevante nem sempre é trivial [56]. Como a abordagem por LMIs permite a im-

posição de diversos objetivos e restrições, conseqüentemente, esta abordagem oferece maior flexibilidade para combinar várias especificações sobre o sistema a ser projetado [46]

- **Amplo escopo de aplicações:** As características da abordagem por LMI permitem uma vasta gama de aplicações que não se limitam à problemas de controle e estimação [56].
- **Programas para solução de LMIs:** Outra vantagem desta abordagem é a disponibilidade de vários programas comerciais ou gratuitos para a solução em tempo polinomial de LMIs, e.g., LMI Control Toolbox [62], SeDuMi [63], a interface YALMIP [64, 65] dentre outros. Neste trabalho, utilizaremos a interface YALMIP com os programas SeDuMi e SDPT3 [66].

Por conta destas características e por sua flexibilidade de aplicações, a abordagem por desigualdades matriciais lineares é ideal para lidar com o problema de estabilidade de sistemas sujeitos a atrasos variantes no tempo, como veremos mais a frente.

### 1.3 OBJETIVO E CONTRIBUIÇÕES

Motivado pelo extenso número de aplicações práticas envolvendo o controle por meio de redes de comunicação, e pela necessidade de se reavaliar as teorias de controle convencionais para a análise desta nova classe de sistemas dinâmicos, esta dissertação visou o estudo e o desenvolvimento de técnicas para a análise de estabilidade de sistemas de controle em rede com incertezas de modelo e de técnicas para a síntese de controladores robustos aos intempéres da rede de comunicação e às perturbações sobre a saída do sistema em malha fechada.

Visando este objetivo, as principais contribuições teóricas desta dissertação na área de controle são:

- A análise teórica de estabilidade de sistemas atrasados com o desenvolvimento de dois critérios de melhor qualidade (em termos da obtenção de limites máximos para o atraso variante) em comparação com os métodos já existentes na literatura;
- A extensão deste método para lidar com sistemas sujeitos a incertezas de modelo;
- A análise teórica de estabilidade de sistemas de controle em rede sujeitos a incertezas de modelo a partir das técnicas de análise de sistemas atrasados e das abordagens desenvolvidas nesta dissertação;
- A análise de desempenho e a síntese de controladores robustos no sentido  $H_\infty$  para

NCSs com o desenvolvimento de um critério de estabilização analisado por meio de duas abordagens inéditas.

- A extensão deste critério e das abordagens correspondentes para o controle robusto  $H_\infty$  de trajetória no sentido de atenuar as perturbações sobre o erro de rastreamento.

As contribuições deste trabalho para a análise de estabilidade e de estabilização de sistemas atrasados e de sistemas de controle em rede deram origem às seguintes publicações científicas

- [67] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Delay-Dependent Robust  $H_\infty$  Output Tracking Control for Uncertain Networked Control Systems*, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, IFAC WC 2011, Agosto, 2011 (aceito para publicação);
- [68] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Robust stability criteria of uncertain systems with delay and its derivative varying within intervals*, American Control Conference, ACC 2011, Junho, 2011 (aceito para publicação);
- [69] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Stability criterion for networked control systems with delay varying within intervals*, 8th IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, ICNSC 2011, Abril, 2011 (aceito para publicação);
- [70] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *New delay-and-delay-derivative-dependent stability criteria for systems with time-varying delay*, Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2010, Dezembro, 2010;
- [71] L.F.C. Figueredo, P.H.R.Q.A. Santana, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Estabilidade e Estabilização de Sistemas de Controle em Rede com Incertezas e Atrasos Variantes no Tempo*, XVIII Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2010, Setembro, 2010;
- [72] P.H.R.Q.A. Santana, L.F.C. Figueredo, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Stability of Networked Control Systems with Dynamic Controllers in the Feedback Loop*, 18th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, MED10, Junho, 2010;
- [73] L.F.C. Figueredo, P.H.R.Q.A. Santana, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Robust Stability of Networked Control Systems*, 7th IEEE Conference on Control and Automation, ICCA 2009, Dezembro, 2009;

- [74] **L.F.C. Figueredo, F.L. Couto e A. Bauchspiess, *An Evaluation of RSSI Based Indoor Localization Systems in Wireless Sensor Networks*, IIX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBAI 2009, Setembro, 2009;**

Ao todo, o período como aluno de mestrado resultou na produção de seis artigos publicados em conferências internacionais e dois artigos publicados em conferência nacional. Todos estes trabalhos são apresentados no Apêndice C.

## 1.4 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos, incluindo esta introdução.

**Capítulo 2 – Análise de Estabilidade para Sistemas Sujeitos a Atrasos Variantes no Tempo:** Neste capítulo, novos critérios de estabilidade assintótica e estabilidade assintótica robusta para sistemas lineares sujeitos a atrasos variantes no tempo são apresentados. Os critérios são desenvolvidos a partir de uma nova abordagem de análise por fracionamento do intervalo de atraso variantes e pela construção de uma nova função candidata de Lyapunov-Krasovskii, a qual incorpora explicitamente termos dependentes do atraso variante e dos subintervalos resultantes do fracionamento. Esta abordagem inédita será detalhadamente analisada no decorrer do capítulo. Ao fim do capítulo, introduzimos exemplos numéricos com o objetivo de avaliar os resultados obtidos em comparação com os resultados dos métodos estado-da-arte conhecidos da literatura de sistemas atrasados.

**Capítulo 3 – Análise de Estabilidade para Sistemas de Controle em Rede:** Neste capítulo, a partir de um modelamento matemático específico que representa sistemas de controle em rede por equações diferenciais atrasadas, estendemos a análise apresentada no capítulo anterior para lidar com sistemas de controle em rede sujeitos a atrasos desconhecidos e variantes no tempo, e a perda e desordenamento de pacotes durante a transmissão. Como resultado, desenvolvemos novos critérios de estabilidade assintótica para sistemas de controle em rede sujeitos a incertezas de modelo. Em seguida, de maneira análoga ao capítulo anterior, apresentamos exemplos numéricos que demonstram a eficácia do nosso método de análise e demonstram as vantagens deste em relação aos mais recentes métodos disponíveis na literatura.

**Capítulo 4 – Projeto de Controladores  $H_\infty$  para Sistemas de Controle em Rede:** Este capítulo apresenta soluções para o problema de análise de desempenho e de síntese de controladores robustos que garantam a estabilidade assintótica e o bom desempenho, no sentido da norma  $H_\infty$ , relativo à atenuação de sinais de perturbação. Apresentamos uma abordagem ordinária de estabilização por meio da escolha prévia de parâmetros constantes e uma abordagem inédita que permite a utilização de algoritmos de linearização por complementaridade cônica em conjunto com a introdução de matrizes de ponderação livre. Além

disso, estendemos o problema de estabilização para a solução do problema de controle robusto  $H_\infty$  de trajetória em sistemas de controle em rede. A análise é então enriquecida por meio de uma série de exemplos numéricos e simulações que ilustram a eficácia dos métodos propostos.

Em seguida, o **Capítulo 5** apresenta as conclusões e discute propostas de continuidade para este trabalho. Por fim, as provas de todos os teoremas desenvolvidos na dissertação são apresentadas no Apêndice A. Além disso, incluímos no Apêndice B, as principais ferramentas matemáticas utilizadas no decorrer do trabalho.



## 2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS SUJEITOS A ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

A existência de atrasos, variantes ou constantes, provoca uma série de modificações, não esperadas por teorias de controle convencionais, nas propriedades de sistemas realimentados. Conforme discutido no Capítulo 1, ignorar os efeitos resultantes da presença de atrasos, ou realizar aproximações com relação a estes atrasos, é uma abordagem potencialmente desastrosa do ponto de vista de estabilidade, especialmente para atrasos variantes no tempo [31]. Neste contexto, houve na última década, uma considerável expansão nas pesquisas referentes à análise de estabilidade de sistemas sujeitos a retardos no tempo (consulte a Subseção 1.2.2, para uma revisão detalhada sobre o assunto).

Neste capítulo, abordaremos o problema de análise de estabilidade para sistemas lineares sujeitos a atrasos desconhecidos e variantes no tempo. A partir do desenvolvimento de uma nova função candidata de Lyapunov-Krasovskii, exploramos de maneira mais eficaz as informações referentes aos limites que delimitam o atraso variante e aos limites que delimitam sua derivada. Os critérios resultantes relativos à estabilidade assintótica e à estabilidade assintótica robusta de sistemas de controle sujeitos a atrasos desconhecidos e variantes no tempo são escritos na forma de um conjunto de desigualdades matriciais lineares. A abordagem desenvolvida é fortemente baseada na aplicação de técnicas avançadas de análise para problemas convexos, como por exemplo, a utilização das desigualdades de Jensen e de Park-Moon, e do Lemma de Finsler. Ademais, incorporamos as técnicas mais recentes de análise de sistemas com atrasos, através da aplicação do método de análise convexa, do método por fracionamento de atrasos e do método de análise por partes do atraso. As condições de estabilidade dependentes-do-atraso e dependentes-da-derivada-do-atraso são obtidas para o caso em que a derivada do atraso é delimitada por um intervalo conhecido, i.e., quando a variação do atraso é limitada e conhecida; para o caso em que apenas o limite superior deste intervalo é conhecido; e por fim, para o caso em que não são impostas restrições sobre esta derivada. Os resultados obtidos estipulam um limite máximo para o atraso variante, para o qual o sistema em mantém-se estável.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. A Seção 2.1 apresenta novos critérios referentes a estabilidade assintótica para sistemas lineares sujeitos a atrasos variantes no tempo. Esta análise é, em seguida, estendida para lidar com sistemas com atrasos variantes sujeitos a incertezas de modelo, na Seção 2.2. Por fim, na Seção 2.3, enriquecemos a análise com uma série de exemplos numéricos que visam ratificar a eficácia de nossos métodos para sistemas sujeitos a atrasos variantes no tempo além de demonstrar as vantagens destes em relação aos mais recentes métodos disponíveis na literatura.

## 2.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS SUJEITOS A ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

Nesta seção, iremos apresentar novos critérios relativos à estabilidade de sistemas lineares contínuos sujeitos a retardos no tempo, conforme apresentado a seguir,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)), & t > 0 \\ x(t) = \rho(t), & t \in [-\tau_{max}, 0] \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^{r_x}$  é o vetor de estado da planta, as matrizes  $A$  e  $A_d$  são conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas; e  $\rho(t)$  é uma função que descreve as condições iniciais do estado. Ademais, a função contínua  $d(t)$  denota o atraso desconhecido e variante que satisfaz:

$$\tau_{min} \leq d(t) \leq \tau_{max}, \quad (2.2)$$

em que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$  são as constantes que delimitam o intervalo de variação do atraso.

O atraso variante pode ser de rápida variação, i.e., quando não se possui informação sobre sua derivada, ou diferenciável com os seguintes limites:

$$d_{min} \leq \dot{d}(t) \leq d_{max}, \quad (2.3)$$

em que  $d_{min} \leq d_{max}$  são as constantes que delimitam o intervalo da velocidade de variação da função de atraso. Nesta seção, especificamente, iremos nos concentrar no caso em que os limites que delimitam a derivada do atraso são conhecidos.

Ao considerarmos sistemas sujeitos a atrasos desconhecidos, (2.1)-(2.3), de maneira análoga à análise de sistemas sem atrasos, uma das maneiras mais efetivas de se analisar a estabilidade é utilizar funções de Lyapunov (Veja a Subseção 1.2.1). As noções de estabilidade não são completamente diferentes para o caso sem e com atraso. Para o primeiro caso, é necessária a construção de uma função de Lyapunov  $V(t, x(t))$ , a qual de alguma maneira deve ser uma medida quantificada do desvio do estado  $x(t)$  em relação a solução de equilíbrio  $x_e(t)=0$  [75, Capítulo 5]. Nesta função, o estado  $x(t)$  é necessário para especificar a evolução futura do sistema além de  $t_i$  inicial. Não obstante, para sistemas sujeitos a retardo no tempo, se faz necessário  $x(t)$  no intervalo  $[t-\tau_{max}, t]$ , i.e.,  $x(t-d(t))$  [4]. Neste contexto, utilizamos o método introduzido por Krasovskii [41] que propõe uma função de Lyapunov  $V(t, x(t), x(t-d(t)))$  que depende de  $x(t-d(t))$  e que também mede o desvio deste em relação a solução de equilíbrio. Desda maneira, buscamos garantir a existência de uma função candidata de Lyapunov  $V$  definida positiva e estritamente decrescente, i.e., com sua derivada  $\dot{V}$  definida negativa, implicando, por conseguinte, que  $x(t)$  e  $x(t-d(t))$  decrescem ao longo de  $t$  (tendendo ao ponto de equilíbrio  $x_e(t) = 0$ ), o que em termos do Teorema 1.2.1 significa que o sistema é assintoticamente estável [4].

Não obstante, apresentaremos dois critérios inéditos de estabilidade assintótica, baseados em funções candidatas de Lyapunov-Krasovskii distintas, para sistemas lineares com atrasos variantes. Na Subseção 2.1.1, apresentaremos o primeiro critério, o qual é fortemente



baseado na análise por partes do atraso. As principais contribuições deste novo critério são apresentadas ao final da subseção. Na Subseção 2.1.2, combinamos os resultados obtidos na Subseção 2.1.1 com uma nova abordagem por fracionamento do atraso, introduzida neste trabalho. As contribuições referentes a esta nova metodologia são apresentadas ao final da subseção.

### 2.1.1 Análise de estabilidade – Análise por partes do atraso

Nesta subseção, apresentaremos condições que se satisfeitas estipulam um limite máximo para o atraso variante  $\tau_{max}$ , para o qual o sistema linear sujeito a retardo no tempo apresentado em (2.1)-(2.3) mantém-se estável. Não obstante, antes de estabelecermos o novo critério dependente-do-atraso e dependente-da-derivada-do-atraso utilizando o método de Lyapunov-Krasovskii, iremos primeiramente considerar o intervalo de variação desde atraso  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ . Este intervalo será dividido em dois segmentos igualmente espaçados  $[\tau_1, \tau_2]$  e  $[\tau_2, \tau_3]$ , em que  $\tau_1 = \tau_{min}$ ,  $\tau_3 = \tau_{max}$  e  $\tau_2 = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}$ . Desda maneira, o sistema sujeito a atrasos no tempo, descrito em (2.1), pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) A_d x(t - d(t)) \\ \quad + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) A_d x(t - d(t)) & t > 0 \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-\tau_{max}, 0] \end{cases} \quad (2.4)$$

em que  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  é a função indicadora de  $[\tau_1, \tau_2]$ , i.e.  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 1$ , se  $d(t) \in [\tau_1, \tau_2]$  e  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 0$ , caso contrário. O principal intuito desta análise, conhecida como análise por partes do atraso, é estabelecer diferentes condições referentes à análise de estabilidade, na forma de desigualdades matriciais lineares, para cada subintervalo.

Desta maneira, estamos prontos para desenvolver o novo critério de estabilidade assintótica para sistemas com atrasos variantes. Este critério é baseado na seguinte função candidata de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(t) = \sum_{i=1}^7 V_i(t), \quad (2.5)$$

em que

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) x^T(t) \left[ \frac{d(t) - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} P_1 + \frac{\tau_2 - d(t)}{\tau_2 - \tau_1} P_2 \right] x(t) \\ &\quad + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) x^T(t) \left[ \frac{d(t) - \tau_2}{\tau_3 - \tau_2} P_3 + \frac{\tau_3 - d(t)}{\tau_3 - \tau_2} P_1 \right] x(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} x^T(s) Q_1 x(s) ds, \\ V_3(t) &= \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix} ds, \\ V_4(t) &= \int_{t-\tau_1}^t x^T(s) M x(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_5(t) &= \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds d\beta \\
V_6(t) &= \left( \int_{-d(t)}^{-\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\beta + \int_{-\tau_2}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\beta \right) \\
&\quad + \left( \int_{-d(t)}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\beta + \int_{-\tau_3}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\beta \right), \\
V_7(t) &= \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) \left[ \int_{-\tau_2}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_1 - R_3) \dot{x}(s) ds d\beta \right] \\
&\quad + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) \left[ \int_{-d(t)}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_3 - R_1) \dot{x}(s) ds d\beta \right] \\
&\quad + \int_{-d(t)}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_1 + R_2) \dot{x}(s) ds d\beta + \int_{-\tau_3}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds d\beta.
\end{aligned}$$

Observe que se as seguintes condições

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{P_3 + P_2}{2}, \quad P_2 > 0, \quad P_3 > 0, \quad Q_1 \geq 0, \quad S_1 \geq 0, \quad Z_1 > 0, \quad Z_2 > 0, \quad M \geq 0, \\
(R_1 + R_2) &> 0, \quad (R_3 + R_4) > 0, \quad (Z_1 + R_1 - R_3) > 0, \quad (Z_2 + R_3 - R_1) > 0, \\
e \quad N &= \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

forem satisfeitas, então a função de Lyapunov  $V(t)$  em (2.5) é definida positiva. Note que as restrições  $(Z_1 + R_1 - R_3) > 0$  e  $(Z_2 + R_3 - R_1) > 0$  na segunda linha de (2.6) são consequência direta da combinação dos termos  $V_6(t)$  e  $V_7(t)$  em (2.5). Ademais, através da maneira específica que estruturamos o termo  $V_7(t)$ , explicitamos a redução dos limites relacionados à restrição de positividade dos termos  $R_k$ ,  $k = \{1, 2, 3, 4\}$ , que podem até assumir valores negativos, caso seja conveniente (no máximo duas das quatro matrizes).

Além disso, pode-se observar que a função candidata de Lyapunov  $V(t)$  é contínua em  $t$ , em todo o escopo relativo ao intervalo que delimita o atraso variante, visto que

$$\begin{aligned}
\lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} V_1(t) &= x^T(t) P_1 x(t), \\
\lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} V_7(t) &= \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_1 + R_2) \dot{x}(s) ds d\beta \\
&\quad + \int_{-\tau_3}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds d\beta.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Desta maneira, assumindo a função descrita em (2.5) como função candidata de Lyapunov, introduzimos condições referentes à estabilidade assintótica de sistemas sujeitos a atrasos variantes no tempo, conforme descritos por (2.1)-(2.3), na forma do seguinte teorema.

**Teorema 2.1.1.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $d_{min}$  e  $d_{max}$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$  e  $d_{min} < d_{max}$ , o sistema apresentado em (2.1) com atraso variante e desconhecido*

satisfazendo (2.2)-(2.3) é assintoticamente estável se existirem as matrizes  $P_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_1$ ,  $S_1$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (2.6), e

$$(Z_1+R_1+U_d) > 0, \quad (Z_2+R_3+U_d) > 0, \quad (S_1+U_1) > 0, \quad (2.8)$$

para  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}$  e  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}$ , e se existirem as matrizes de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  tal que as seguintes afirmações sejam válidas:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\ \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\ \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\ \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_1} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_1 \\ * & -(\tau_2 - \tau_1) (Z_1 + R_1 + R_4) \end{bmatrix}, \\ \Omega_{12} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_2 \\ * & -(\tau_2 - \tau_1) (Z_1 + R_1 + U_d) \end{bmatrix}, \\ \Omega_{21} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_1 \\ * & -(\tau_3 - \tau_2) (Z_2 + R_3 + R_4) \end{bmatrix}, \\ \Omega_{22} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_3} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_2 \\ * & -(\tau_3 - \tau_2) (Z_2 + R_3 + U_d) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$U_d = (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4,$$

$$U_1 = \frac{1}{\tau_1} \left( R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right),$$

$$U_2 = \frac{1}{\tau_3 - \tau_2} (Z_2 + R_3 + R_4),$$

$$U_3 = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( Z_1 + R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right),$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi^{(1)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \frac{d(t) - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} P_1 + \frac{\tau_2 - d(t)}{\tau_2 - \tau_1} P_2 & S_1 + U_1 & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33}^{(1)}(d(t)) + \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44}^{(1)} & N_{12} & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55}^{(1)} & U_2 - N_{12} \\ * & * & * & * & * & -U_2 - N_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Psi^{(2)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \frac{d(t)-\tau_2}{\tau_3-\tau_2}P_3 + \frac{\tau_3-d(t)}{\tau_3-\tau_2}P_1 & S_1+U_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33}^{(2)}(d(t)) + \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44}^{(2)} & N_{12}+U_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55}^{(2)} & -N_{12} & 0 \\ * & * & * & * & * & -N_{22} & 0 \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{\dot{d}(t)}{\tau_2-\tau_1}(P_1-P_2)+M-S_1-U_1, \\ \Psi_{22} &= -\left(1-\dot{d}(t)\right)Q_1, \\ \Psi_{33} &= \tau_2^2 S_1 + (\tau_2-\tau_1)Z_1 + (\tau_3-\tau_2)Z_2 + \tau_2 R_1 + (\tau_3-\tau_2)R_3, \\ \Psi_{33}^{(1)}(d(t)) &= (\tau_3-\tau_2)R_4 + (\tau_2-d(t))R_4 + \tau_2 \frac{(d(t)-\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}R_2 + \tau_1 \frac{(\tau_2-d(t))}{\tau_2-\tau_1}R_2, \\ \Psi_{33}^{(2)}(d(t)) &= (\tau_3-d(t))R_4 + \tau_3 \frac{(d(t)-\tau_2)}{\tau_3-\tau_2}R_2 + \tau_2 \frac{(\tau_3-d(t))}{\tau_3-\tau_2}R_2, \\ \Psi_{44}^{(1)} &= Q_1 + N_{11} - M - S_1 - U_1, \\ \Psi_{55}^{(1)} &= N_{22} - N_{11} - U_2, \\ \Psi_{44}^{(2)} &= Q_1 + N_{11} - M - S_1 - U_1 - U_3, \\ \Psi_{55}^{(2)} &= N_{22} - N_{11} - U_3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

■

## PROVA

A prova detalhada do Teorema 2.1.1 é apresentada na Seção A.1 no Apêndice A visando à melhor concisão da dissertação e evitando a inclusão de um número excessivo de equações que acabam por desviar a atenção de discussões específicas do tema.

□

*Observação 2.1.1.* A aplicação direta do Teorema 2.1.1 é válida apenas para casos em que o limite inferior do intervalo que delimita o atraso é estritamente maior que zero, i.e.,  $\tau_{min} > 0$ . Esta restrição é consequência unicamente da utilização do termo  $U_1$ , em (2.10), que possui termos divididos por  $\tau_{min}$ . Este termo aparece quando derivamos a função candidata de Lyapunov (2.5), especificamente, após a aplicação da desigualdade de Jensen sobre o termo  $-\int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + \left( 1 - \dot{d}(t) \right) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds$ , (Equações (A.10) e (A.24) no Apêndice A). Todavia, é fácil verificar que para o caso em que  $\tau_{min} = 0$ , a integral é nula. Por conseguinte, é direto a extensão do resultado para o caso em que  $\tau_{min} = 0$ . Neste caso, basta considerarmos  $U_1 = 0$ , que o Teorema 2.1.1 se torna válido para o caso em que o limite inferior que delimita o atraso é nulo, i.e.,  $\tau_{min} = 0$ .

O Teorema 2.1.1 estipula condições para a estabilidade assintótica de sistemas sujeitos a retardo no tempo, conforme apresentado em (2.1), com atrasos desconhecidos e variantes satisfazendo (2.2) e (2.3). Para estabelecer este resultado, dividimos os limites conhecidos do intervalo que delimita o atraso variante,  $d(t)$ , em dois subintervalos<sup>1</sup>. Então, apesar de considerarmos uma única função candidata de Lyapunov para todo o escopo no qual o atraso variante está contido, para cada subintervalo resultante, derivamos condições distintas em termos de desigualdades matriciais lineares. Esta abordagem de divisão do intervalo que delimita o atraso variante  $d(t)$  em subintervalos a serem analisados separadamente, conhecida como análise por fracionamento do atraso [76, 70], ou método de análise por partes [77], é consideravelmente nova e, até esta data, existem poucos grupos de pesquisa que apresentem trabalhos relacionados. Dentre os quais, destacam-se Fridman, Shaked e Liu [76]; Orihuela, Millan, Vivas e Rubio [78, 79]; Jiang, Han e Zhang [80, 81]; e Yue, Tian e Zhang [77]. Neste trabalho, denominaremos esta abordagem por *método de análise por partes do atraso*. Não obstante, o presente trabalho apresenta inovações referentes a esta abordagem não consideradas em nenhum destes trabalhos anteriores, conforme veremos a seguir.

Retornando à análise, é interessante ressaltar que, do ponto de vista teórico, poderíamos dividir o intervalo que delimita o atraso em qualquer ponto do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ . Todavia, consideramos intervalos igualmente espaçados, a partir da escolha de  $\tau_2 = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}$ , com o intuito de incrementar a relação do novo vetor de estado auxiliar,  $x(t - \tau_2)$ , com os vetores relacionados aos limites inferior e superior do intervalo do atraso,  $x(t - \tau_1)$  e  $x(t - \tau_3)$ , respectivamente. Esta relação é especificamente explícita na construção do termo  $V_3(t)$  da função candidata de Lyapunov (2.5), no qual o termo  $x(t - 2\tau_2 + \tau_1)$  obtido na derivada do termo é igual ao vetor de estado atrasado  $x(t - \tau_3)$ . Observe que se esta relação não fosse válida, então o termo  $N_{12}$  deveria ser nulo. Não obstante, este termo, que relaciona os vetores  $x(t - \tau_1)$  com  $x(t - \tau_2)$  e  $x(t - \tau_2)$  com  $x(t - \tau_3)$ , é importante para reduzir os efeitos consequentes da existência de termos fora das diagonais das matrizes  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  das LMIs (2.9), conforme pode ser facilmente observado nos termos  $\Psi^{(1)}$  e  $\Psi^{(2)}$  em (2.10). Neste ponto, observa-se que a solução apresentada é análoga à solução utilizada em [76] e difere-se das soluções apresentadas em outros trabalhos que utilizam abordagens de análise por partes do atraso [77, 78, 79, 80, 81]. Observe que se esta relação não fosse válida, então os termos  $M_{12}$ ,  $M_{22}$  e  $M_{32}$  deveriam ser nulos. Não obstante, estes termos são importantes para reduzir o tamanho e, por conseguinte, o efeito dos termos fora das diagonais das matrizes  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  das LMIs (2.9), conforme pode ser observado nos termos  $\Psi_{55}^{(1)}$ ,  $\Psi_{55}^{(2)}$  e  $\Psi_{15}$  em (2.10).

Outra importante contribuição advinda desta abordagem é a introdução de termos na função de Lyapunov que são distintos para cada subintervalo. O único outro trabalho que con-

---

<sup>1</sup>A ideia de se particionar o atraso não é completamente nova e já foi aplicada através do método de discretização de funções de Lyapunov – DLF (do inglês *discretized Lyapunov functional*) [4, 82]. Todavia, os métodos desenvolvidos a partir desta abordagem só eram válidos para a análise sistemas sujeitos a atrasos constantes e, portanto, não eram aplicáveis ao problema em questão.

sidera a introdução deste tipo de termo, que denominaremos aqui por termos *dependentes-do-intervalo*, é [76]. Entretanto, este considera unicamente a utilização destes termos na função de Lyapunov quadrática simples, e não faz nenhuma análise quanto à continuidade da derivada da função de Lyapunov. Neste trabalho, expandimos consideravelmente a utilização e a importância destes termos através da construção de  $V_1(t)$  e  $V_7(t)$ . Os propósitos almejados com os termos dependentes-do-intervalo são a introdução de termos que utilizem explicitamente informações referentes ao subintervalo no qual estão contidos; e a obtenção de valores e expressões distintas na função candidata de Lyapunov e em sua derivada para cada subintervalo, ou seja, expressões que dependam do subintervalo. Não obstante, a construção destes termos incrementa os desafios referentes à análise, pois nem sempre é trivial verificar se estes termos satisfazem as condições necessárias para a aplicação dos métodos de Lyapunov. Devemos, portanto, garantir que, apesar da inclusão destes termos, a função candidata seja definida positiva e decrescente em todo o intervalo de  $t$ . Para tal, devemos também provar a continuidade da função de Lyapunov e de sua derivada em todo o intervalo de  $t$  (ou, ao menos, provar que nos pontos de descontinuidade, a função candidata seja monotonicamente decrescente). Esta condição é facilmente atendida para os termos usuais da função de Lyapunov, todavia para a aplicação dos termos dependentes-do-intervalo devemos garantir que estes sejam contínuos e suas derivadas também. Destarte, é relativamente fácil observar que a função candidata de Lyapunov (2.5) é contínua em  $t$ , conforme explicitado em (2.7). Ademais, pode-se verificar que a derivada desta função é também contínua em  $t$ . Apesar da análise para este caso não ser tão direta, pode-se recorrer às deduções das derivadas de  $V_1(t)$  e  $V_7(t)$  (Apêndice A, Equações (A.1) e (A.7) para o caso em que  $\tau_1 \leq d(t) < \tau_2$  e Equações (A.22) e (A.23) para o segundo intervalo).

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t, x(t-\tau_2)) &= \lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} \dot{V}_1(t, x(t-d(t)))|_{d(t) < \tau_2} = \lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} \dot{V}_1(t, x(t-d(t)))|_{d(t) > \tau_2} \\
&= \frac{\dot{d}(t)}{\tau_2 - \tau_1} x^T(t) (P_1 - P_2) x(t) + \dot{x}^T(t) P_1 x(t) + x^T(t) P_1 \dot{x}(t) \\
&= \frac{\dot{d}(t)}{\tau_3 - \tau_2} x^T(t) (P_3 - P_1) x(t) + \dot{x}^T(t) P_1 x(t) + x^T(t) P_1 \dot{x}(t), \\
\dot{V}_7(t, x(t-\tau_2)) &= \lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} \dot{V}_7(t, x(t-d(t)))|_{d(t) < \tau_2} = \lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} \dot{V}_7(t, x(t-d(t)))|_{d(t) > \tau_2} \\
&= \dot{x}^T(t) [\tau_2 (R_1 + R_2) + (\tau_3 - \tau_2) (R_3 + R_4)] \dot{x}(t) \\
&\quad - \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau_3}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) (R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds.
\end{aligned}$$

É importante ressaltar a equivalência dos termos em  $\dot{V}_1(t, x(t-\tau_2))$ . Esta equivalência é consequência da definição da matriz  $P_1$  em (2.6), que torna a expressão  $(P_1 - P_2) = (P_3 - P_1)$  válida. Ademais, observa-se que  $(\tau_2 - \tau_1) = (\tau_3 - \tau_2)$ , pois definimos subintervalos, derivados de  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ , igualmente espaçados.

Além disso, outro benefício advindo de nossa análise é a construção de termos dependentes-do-atraso  $d(t)$ . Nos primeiros trabalhos envolvendo estabilidade de sistemas sujeitos a

retardo no tempo, estes termos eram evitados por não se saber como tratá-los eficientemente. Uma das soluções adotadas era simplesmente considerar qual seria o pior caso que este atraso poderia assumir para, então, substituir o atraso,  $d(t)$ , por este caso [83, 84, 85, 86, entre outros]. Por exemplo, se a derivada da função candidata de Lyapunov possuísse um termo quadrático positivo ponderado por  $d(t)$ , este seria substituído pelo valor máximo que o atraso pode assumir ( $\tau_{max}$ , se  $d(t) \leq \tau_{max}$ ), pois este é o pior caso considerando que nosso objetivo é que a derivada da função de Lyapunov seja negativa. Não obstante, Park e Ko, [44], introduziram uma nova forma de analisar estes termos, a análise convexa. Esta análise apresenta resultados consideravelmente superiores, pois apesar de duplicar o número de LMIs nas condições de estabilidade, as desigualdades resultantes são menos conservadoras do que as desigualdades que obteríamos considerando a análise pelo pior caso. Seguindo este raciocínio, introduzimos o maior número possível de termos dependentes-do-atraso de forma a obtermos expressões distintas para cada uma das condições resultantes, conforme explicitado nas derivadas de  $V_1(t)$  e  $V_7(t)$ . A utilização do método de análise por partes do atraso resulta em diferentes expressões contendo termos dependentes-do-atraso distintos para cada subintervalo, conforme explicitado na derivação de  $V_6(t)$  e  $V_7(t)$  (Apêndice A, Equações (A.12) e (A.26) para o primeiro subintervalo e para o segundo subintervalo, respectivamente). Estes termos são analisados através da definição das variáveis auxiliares  $\xi_{1d}(t)$ ,  $\xi_{d2}(t)$ ,  $\xi_{2d}(t)$  e  $\xi_{d3}(t)$ , (Equações (A.14) e (A.27) no Apêndice A), seguida da aplicação do método de Finsler. Assim, tornamos viável a introdução de novos termos dependentes-do-atraso ponderados por matrizes de peso livre distintas. É interessante ressaltar que esta combinação de termos dependentes-do-atraso e matrizes de ponderação livre distintas para cada subintervalo juntamente com a aplicação da análise convexa constitui a contribuição mais usual, e algumas vezes a única contribuição, presente nos outros trabalhos que utilizam abordagens similares de análise por partes do atraso [77, 78, 79, 80, 81].

Por fim, uma outra contribuição mais imediata, todavia não menos importante, desta abordagem é a possibilidade de considerar e incluir os novos subintervalos na construção de termos da Lyapunov-Krasovskii com limites menos restritivos. Com o incremento de subintervalos, podemos reduzir os intervalos de integração das integrais resultantes na derivada da função de Lyapunov. Desta maneira, reduzimos consideravelmente o conservadorismo decorrente da aplicação da desigualdade de Jensen (Lema B.0.2, no Apêndice B). Obviamente, os trabalhos que utilizam abordagens por partes do atraso incluem este particionamento do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$  por definição.

Não obstante, estenderemos ainda mais a análise apresentada nesta subseção e a análise por divisão dos intervalos de atraso, através da introdução de divisões referentes ao intervalo  $[0, \tau_{min}]$ . Uma discussão mais profunda desta análise e de seus benefícios com relação a redução do conservadorismo da análise será apresentada na próxima subseção.

### 2.1.2 Análise de Estabilidade – Abordagem por Fracionamento do Atraso

Nesta subsecção, apresentaremos um novo critério de estabilidade assintótica dependente-do-atraso e dependente-da-derivada-do-atraso para sistemas sujeitos a atrasos desconhecidos e variantes, (2.1)-(2.3). Este novo critério é fundamentado no critério desenvolvido na subsecção anterior, o qual é fortemente baseado na utilização do método de análise por partes e do método de análise convexa, introduzida por Park e Ko, [44]. Contudo, através da utilização de variáveis de estado atrasadas auxiliares, introduzidas através do método por fracionamento do atraso e nunca antes consideradas, obtemos uma notável redução do conservadorismo referente a análise de estabilidade em comparação com o critério desenvolvido na subsecção anterior.

O método por fracionamento do atraso consiste em dividir algum dos intervalos de atraso de forma a se obter uma nova variável de estado atrasada auxiliar. Este método já foi utilizado em outros trabalhos [87, 88, 89, 90], porém sem grande efetividade no sentido de reduzir o conservadorismo da análise de estabilidade. Estes trabalhos, em sua grande maioria (inclusive os que utilizam o método de análise por partes do atraso), referem-se à divisão do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$  e, portanto, à introdução de variáveis auxiliares relacionadas às variáveis  $x(t - \tau_{min})$  e  $x(t - \tau_{max})$ , e.g.,  $x_\alpha = x(t - \alpha\tau_{max} - (1-\alpha)\tau_{min})$ , em que  $0 < \alpha < 1$ . Esta divisão, apesar de útil para análise por partes do atraso, não apresenta outras contribuições para a análise, pois as relações entre  $x(t - \tau_{min})$  e  $x(t - \tau_{max})$  já estão bem estabelecidas, conforme pode ser observado em  $V_3(t)$ ,  $V_6(t)$  e  $V_7(t)$ , em (2.5). Ademais, à medida que o intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$  cresce, a análise por partes do atraso se torna mais efetiva, enquanto no caso contrário, em que este intervalo é reduzido, i.e., quando  $\tau_{min} \rightarrow \tau_{max}$ , as contribuições referentes à qualquer divisão  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$  são fortemente reduzidas. Portanto, qualquer outra divisão do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$  além da utilizada na subsecção anterior não apresenta maiores contribuições para a investigação de estabilidade.

Não obstante, a fim de melhorarmos a análise para o caso em que  $\tau_{min} \rightarrow \tau_{max}$ , introduziremos variáveis auxiliares a partir de novas divisões do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ . A principal vantagem desta análise é equilibrar a contribuição referente à análise por partes do atraso, a qual é consideravelmente reduzida quando  $\tau_{min} \rightarrow \tau_{max}$ . No contexto de fracionamento do intervalo referente ao limite inferior do atraso variante, dividimos este intervalo em  $\eta$  subintervalos. Desta maneira, obtemos as seguintes variáveis de estado auxiliares dependentes de  $\tau_1 = \tau_{min}$ ,

$$x\left(t - i\frac{\tau_1}{\eta}\right), \quad \forall i \in \{0, \dots, \eta\}. \quad (2.11)$$

Então, considerando o mesmo atraso variante e desconhecido descrito por (2.2) e (2.3), a divisão do intervalo, conforme apresentada em (2.4), e as novas variáveis auxiliares dependentes de  $\tau_{min}$  (2.11), definimos uma nova função candidata de Lyapunov-Krasovskii, apresentada a seguir.

$$V(t) = \sum_{i=1}^7 V_i(t), \quad (2.12)$$



em que

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) x^T(t) \left[ \frac{d(t)-\tau_1}{\tau_2-\tau_1} P_1 + \frac{\tau_2-d(t)}{\tau_2-\tau_1} P_2 \right] x(t) \\
&\quad + (1-\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) x^T(t) \left[ \frac{d(t)-\tau_2}{\tau_3-\tau_2} P_3 + \frac{\tau_3-d(t)}{\tau_3-\tau_2} P_1 \right] x(t), \\
V_2(t) &= \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} x^T(s) Q_1 x(s) ds, \\
V_3(t) &= \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix} ds, \\
V_4(t) &= \int_{t-\frac{1}{\eta}\tau_1}^t \begin{bmatrix} x(s - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(s - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(s - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} ds, \\
V_5(t) &= \sum_{k=1}^{\eta} \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right) \int_{-\frac{k}{\eta}\tau_1}^{-\frac{k-1}{\eta}\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) S_k \dot{x}(s) ds d\beta, \\
V_6(t) &= \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\beta + \int_{-\tau_3}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\beta, \\
V_7(t) &= \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) \left[ \int_{-\tau_2}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_1 - R_3) \dot{x}(s) ds d\beta \right] \\
&\quad + (1-\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) \left[ \int_{-d(t)}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_3 - R_1) \dot{x}(s) ds d\beta \right] \\
&\quad + \int_{-d(t)}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_1 + R_2) \dot{x}(s) ds d\beta + \int_{-\tau_3}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds d\beta.
\end{aligned}$$

Observe que os termos  $V_1(t)$ - $V_7(t)$  são exatamente iguais aos termos definidos na função candidata de Lyapunov (2.5), com exceção dos termos  $V_4(t)$  e  $V_5(t)$ , os quais foram modificados de forma a levar em consideração as novas variáveis auxiliares introduzidas em (2.11). Assim, a nova função candidata de Lyapunov é uma combinação dos termos  $V_1(t)$ - $V_3(t)$ ,  $V_6(t)$  e  $V_7(t)$  da função candidata definidos em (2.5) com os novos termos de Lyapunov  $V_4(t)$  e  $V_5(t)$ . Desta maneira, analisando os novos termos de Lyapunov introduzidos em (2.12), podemos concluir que se as seguintes condições

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{P_3+P_2}{2}, \quad P_2 > 0, \quad P_3 > 0, \quad Q_1 \geq 0, \quad Z_1 > 0, \quad Z_2 > 0, \quad S_j > 0, \quad j = \{1, \dots, \eta\}, \\
(R_1 + R_2) &> 0, \quad (R_3 + R_4) > 0, \quad (Z_1 + R_1 - R_3) > 0, \quad (Z_2 + R_3 - R_1) > 0,
\end{aligned}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.13)$$

forem satisfeitas, então a nova função candidata de Lyapunov  $V(t)$ , descrita em (2.12), é

definida positiva. Ademais, note que as mesmas afirmações feitas em (2.7) continuam válidas e, portanto, a função de Lyapunov é contínua em  $t$ .

Desta maneira, assumindo a função descrita em (2.12) como função candidata de Lyapunov, introduzimos novas condições referentes a estabilidade assintótica de sistemas sujeitos a atrasos variantes no tempo, (2.1)-(2.3), na forma do seguinte teorema.

**Teorema 2.1.2.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $d_{min}$ ,  $d_{max}$  e  $\eta$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$ ,  $d_{min} < d_{max}$  e  $\eta > 1$ , o sistema apresentado em (2.1) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (2.2)-(2.3) é assintoticamente estável se existirem as matrizes  $P_i$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_1$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (2.13), (2.8) e*

$$(S_j + U_1) > 0, \quad \forall j = \{1, \dots, \eta\}, \quad (2.14)$$

para  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}$  e  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}$ , e se existirem as matrizes de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  tal que as seguintes afirmações sejam válidas:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\ \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\ \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\ \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_1} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_1 & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_2 - \tau_1) \Lambda_{11} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}, \\ \Omega_{12} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_2 & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_2 - \tau_1) \Lambda_{12} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}, \\ \Omega_{21} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_1 & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_3 - \tau_2) \Lambda_{21} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}, \\ \Omega_{22} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_3} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_2 & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_3 - \tau_2) \Lambda_{22} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= - (Z_1 + R_1 + R_4), & \Lambda_{12} &= - \left( Z_1 + R_1 + (1 - d(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right), \\ \Lambda_{21} &= - (Z_2 + R_3 + R_4), & \Lambda_{22} &= - \left( Z_2 + R_3 + (1 - d(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right), \end{aligned}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta(\eta) = \begin{bmatrix} (M_{12}+S_1+U_1) & M_{13} & M_{14} & \dots & M_{1(\eta-1)} & M_{1\eta} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -M_{1\eta}^T & -M_{2\eta}^T & -M_{3\eta}^T & \dots & -M_{(\eta-2)\eta}^T & (-M_{(\eta-1)\eta}^T + S_\eta + U_1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(\eta) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11}-2U_1 \\ -S_1-S_2 \end{pmatrix} & (\phi_{12}+U_1+S_2) & \phi_{13} & \phi_{14} & \dots & \phi_{1(\eta-1)} \\ * & \begin{pmatrix} \phi_{22}-2U_1 \\ -S_2-S_3 \end{pmatrix} & (\phi_{23}+U_1+S_3) & \phi_{24} & \dots & \phi_{2(\eta-1)} \\ * & * & \begin{pmatrix} \phi_{33}-2U_1 \\ -S_3-S_4 \end{pmatrix} & (\phi_{34}+U_1+S_4) & \dots & \phi_{3(\eta-1)} \\ * & * & * & \begin{pmatrix} \phi_{44}-2U_1 \\ -S_4-S_5 \end{pmatrix} & \dots & \phi_{4(\eta-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & * & \begin{pmatrix} \phi_{(\eta-1)(\eta-1)}-2U_1 \\ -S_{(\eta-1)}-S_\eta \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

com

$$\phi_{ij} = M_{(i+1)(j+1)} - M_{ij}, \quad \text{em que } i, j = \{1, 2, \dots, (\eta-1)\},$$

$$U_1 = \frac{\eta}{\tau_1} \left( R_1 + (1-\dot{d}(t))R_2 + \dot{d}(t)R_4 \right),$$

$$U_2 = \frac{1}{\tau_3 - \tau_2} (Z_2 + R_3 + R_4),$$

$$U_3 = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( Z_1 + R_1 + (1-\dot{d}(t))R_2 + \dot{d}(t)R_4 \right),$$

e

$$\Psi^{(1)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \frac{d(t)-\tau_1}{\tau_2-\tau_1} P_1 + \frac{\tau_2-d(t)}{\tau_2-\tau_1} P_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & -(1-\dot{d}(t))Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33}^{(1)}(d(t)) + \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & N_{12} & 0 \\ * & * & * & * & N_{22} - N_{11} - U_2 & -N_{12} + U_2 \\ * & * & * & * & * & -N_{22} - U_2 \end{bmatrix},$$

$$\Psi^{(2)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \frac{d(t)-\tau_2}{\tau_3-\tau_2}P_3 + \frac{\tau_3-d(t)}{\tau_3-\tau_2}P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & -(1-\dot{d}(t))Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33}^{(2)}(d(t)) + \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44}-U_3 & N_{12}+U_3 & 0 \\ * & * & * & * & N_{22}-N_{11}-U_3 & -N_{12} \\ * & * & * & * & * & -N_{22} \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{\dot{d}(t)}{\tau_2-\tau_1}(P_1-P_2) + M_{11} - S_1 - U_1, \\ \Psi_{33} &= \sum_{k=1}^{\eta} \left(\frac{\tau_1}{\eta}\right)^2 S_k + (\tau_2-\tau_1)Z_1 + (\tau_3-\tau_2)Z_2 + \tau_2R_1 + (\tau_3-\tau_2)R_3, \\ \Psi_{33}^{(1)}(d(t)) &= (\tau_3-\tau_2)R_4 + (\tau_2-d(t))R_4 + \tau_2\frac{(d(t)-\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}R_2 + \tau_1\frac{(\tau_2-d(t))}{\tau_2-\tau_1}R_2, \\ \Psi_{33}^{(2)}(d(t)) &= (\tau_3-d(t))R_4 + \tau_3\frac{(d(t)-\tau_2)}{\tau_3-\tau_2}R_2 + \tau_2\frac{(\tau_3-d(t))}{\tau_3-\tau_2}R_2, \\ \Psi_{44} &= Q_1 + N_{11} - U_1 - M_{\eta\eta} - S_{\eta}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

■

#### PROVA

Analogamente a subseção anterior, a prova detalhada do Teorema 2.1.2 é apresentada na Seção A.2 no Apêndice A.

□

*Observação 2.1.2.* Conforme explanado na subseção anterior, as condições de estabilidade apresentadas no Teorema 2.1.2 são válidas apenas para o caso em que o limite inferior do intervalo que delimita o atraso é estritamente maior que zero, i.e.,  $\tau_{min} > 0$ . Esta restrição é consequência da existência do termo  $U_1$  em (2.16), todavia é facilmente eliminada ao considerarmos  $U_1=0$  para o caso particular no qual o limite inferior que delimita o atraso é nulo, i.e.,  $\tau_{min}=0$ .

Os resultados apresentados nesta subseção e no Teorema 2.1.2 ampliam a análise e o desenvolvimento referentes às condições de estabilidade assintótica para sistemas com atrasos variantes no tempo apresentadas na subseção anterior. Os métodos de análise por partes do atraso e de análise da convexidade das matrizes da LMI com relação ao atraso variante e à sua derivada são estritamente baseados na divisão do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ . Não obstante, é notável que caso este intervalo seja reduzido, as contribuições advindas destes métodos são consideravelmente reduzidas. Ademais, observa-se que para um mesmo sistema (2.1) e para mesmas condições referentes a derivada do atraso (2.3), a redução do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ , deve-se obviamente ao incremento de  $\tau_{min}$  ou ao decréscimo de  $\tau_{max}$ . Dado que nosso intuito

é garantir um valor máximo para o limite superior do atraso variante, i.e.,  $\tau_{max}$ , queremos estabelecer condições que reduzam o conservadorismo inerente ao crescimento do limite inferior do atraso variante,  $\tau_{min}$ . Neste contexto, a partir da abordagem por fracionamento do atraso referente ao intervalo  $[0, \tau_{min}]$ , introduzimos novas variáveis auxiliares atrasadas dependentes de  $\tau_{min}$ , em (2.11), que se utilizadas previamente à aplicação da desigualdade de Jensen, permitem a redução dos limites de integração, que por sua vez reduz o conservadorismo inerente à aplicação da referida desigualdade.

É interessante ressaltar que poderíamos dividir o intervalo  $[0, \tau_1]$  em qualquer ponto dentro deste intervalo. Contudo, de maneira semelhante a divisão do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ , em (2.4), dividimos o intervalo em  $\eta$  subintervalos igualmente espaçados. A vantagem desta análise esta relacionada ao incremento da relação das novas variáveis auxiliares com as variáveis referentes à limites adjacentes, e.g., a relação entre  $x(t - \frac{i}{\eta}\tau_1)$  com  $x(t - \frac{i-1}{\eta}\tau_1)$  e  $x(t - \frac{i+1}{\eta}\tau_1)$ ,  $1 < i < \eta$ . Esta relação é explícita na construção dos termos  $V_4(t)$  e  $V_5(t)$ , em (2.12). Ademais, observe que se esta relação não fosse válida, então os termos  $M_{ij}$ ,  $i \neq j$ , deveriam ser nulos.

## 2.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS INCERTOS SUJEITOS A ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

Na seção anterior, derivamos condições para a estabilidade assintótica de sistemas sujeitos a atrasos variantes no tempo, conforme descrito em (2.1). Para tal, assumimos que o modelamento não apresenta erros, ou que estes são insignificantes, em relação ao sistema real. Esta suposição, apesar de satisfatória para alguns casos, é consideravelmente restritiva e não condiz com situações práticas, nas quais uma representação matemática exata para o sistema real é infactível, e representações quase exatas são complexas e de difícil caracterização e modelagem [73, 91]. Seja por conta de perturbações inerentes ao sistema, por não-linearidades, por parâmetros não constantes de variação lenta no tempo, por dinâmicas não modeladas, por uma representação matemática simplificada do problema etc, o modelamento do sistema sempre apresentará incertezas quanto aos parâmetros do modelo [85, 92]. Ademais, a presença destas incertezas provoca uma incompatibilidade entre modelo representado matematicamente e o sistema real que, se não for considerada, pode degradar o desempenho e afetar a estabilidade do sistema [92]. Destarte, é fundamental que a análise de estabilidade considere explicitamente estas incertezas de modelo e verifique se todos os sistemas pertencentes ao domínio de incerteza são assintoticamente estáveis [53]. Com este intuito, nesta seção, analisaremos sistemas com atrasos variantes na presença de incertezas de modelo e apresentaremos um novo critério de estabilidade assintótica robusta para tais sistemas. As condições de estabilidade dependentes-do-atraso e baseadas na solução de um conjunto de LMIs são obtidas para o caso em que a derivada do atraso variante é delimitada por um intervalo conhecido, i.e. quando a variação do atraso é limitada e conhecida; para o caso em que apenas o limite superior desde intervalo é conhecido; e por fim, para o caso de

atrasos-de-variação-rápida, ou seja, quando não são impostas restrições sobre a derivada do atraso variante. Os resultados obtidos estipulam um limite máximo para o atraso variante no tempo, para o qual o sistema mantém-se estável.

O restante da seção está dividida da seguinte maneira. Na Subseção 2.2.1, apresentamos um novo critério de estabilidade assintótica robusta para sistemas de controle com atrasos variantes e desconhecidos e sujeitos a incertezas de modelo. Este novo critério é adaptado para lidar com casos especiais nos quais o conhecimento sobre a derivada do atraso é limitado na Seção 2.2.2.

### 2.2.1 Análise de estabilidade robusta

Nesta subseção, apresentaremos novas condições referentes à estabilidade assintótica robusta de sistemas com atrasos variantes sujeitos a incertezas de modelo. Ao considerarmos incertezas de modelo na descrição de sistemas sujeitos a retardo no tempo, (2.1), devemos assumir que as matrizes  $A$ ,  $A_d$  não são exatamente conhecidas, porém pertencem a conjuntos delimitados:  $A \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$  e  $A_d \in \mathcal{A}_d \subset \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ . Então, o sistema (2.1) pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)), \quad (2.17)$$

em que as incertezas  $\Delta A$  e  $\Delta A_d$  são matrizes variantes no tempo com dimensões apropriadas e que satisfazem

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d \end{bmatrix} = H\Delta(t) \begin{bmatrix} \Xi_A & \Xi_{A_d} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

em que  $H$ ,  $\Xi_A$  e  $\Xi_{A_d}$  são matrizes conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas, e  $\Delta(t)$  representa uma matriz variante no tempo e que, apesar de ser desconhecida, é mensurável à Lebesgue em  $t$  e satisfaz

$$\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I. \quad (2.19)$$

Então, considerando o mesmo atraso variante e desconhecido descrito por (2.2) e (2.3), dividimos o intervalo que delimita este atraso em dois subintervalos, de maneira análoga a (2.4). Ademais, assumindo a mesma função descrita em (2.12) como função candidata de Lyapunov, derivamos o seguinte critério referente à estabilidade robusta de sistemas com atrasos variantes sujeitos a incertezas de modelo.

**Teorema 2.2.1.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $d_{min}$ ,  $d_{max}$  e  $\eta$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$ ,  $d_{min} < d_{max}$  e  $\eta > 1$ , o sistema incerto apresentado em (2.17) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (2.2)-(2.3) e incertezas descritas em (2.18) é assintoticamente e robustamente estável se existirem escalares  $\epsilon_k > 0$ ,  $k = \{1, 2, 3, 4\}$  e matrizes  $P_i$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_1$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (2.13), (2.8) e (2.14) para  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}$  e  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}$ , e se existirem matrizes de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  de forma que as seguintes afirmações sejam*

válidas:

$$\begin{aligned}
\Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\
\Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\
\Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\
\Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} &< 0; & \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

em que

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_1} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_1 & \Theta(\eta) & F_1 \Gamma_3 H & \epsilon_1 \Gamma_{\Xi}^T \\ * & (\tau_2 - \tau_1) \Lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_1 I \end{bmatrix}, \\
\Omega_{12} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_2 & \Theta(\eta) & F_1 \Gamma_3 H & \epsilon_2 \Gamma_{\Xi}^T \\ * & (\tau_2 - \tau_1) \Lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_2 I \end{bmatrix}, \\
\Omega_{21} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_1 & \Theta(\eta) & F_2 \Gamma_3 H & \epsilon_3 \Gamma_{\Xi}^T \\ * & (\tau_3 - \tau_2) \Lambda_{21} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_3 I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix}, \\
\Omega_{22} &= \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_3} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_2 & \Theta(\eta) & F_2 \Gamma_3 H & \epsilon_4 \Gamma_{\Xi}^T \\ * & (\tau_3 - \tau_2) \Lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_4 I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_4 I \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

com  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Psi^{(2)}$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Lambda_{11}$ ,  $\Lambda_{12}$ ,  $\Lambda_{21}$ ,  $\Lambda_{22}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  definidos em (2.16), e

$$\begin{aligned}
\Gamma_3^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
\Gamma_{\Xi} &= \begin{bmatrix} \Xi_A & \Xi_{Ad} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

PROVA

A prova do Teorema relativo a estabilidade robusta de sistemas com atrasos variantes sujeitos a incertezas de modelo possui uma série de similaridades com a prova do Teorema 2.1.2, visto que ambos Teoremas são baseados na mesma função candidata de Lyapunov,

descrita em (2.12). Não obstante, a caracterização do sistema de controle (2.17) considerando incertezas de modelo (2.18) incrementa consideravelmente a complexidade da análise para este tipo de sistema.

Devido a existência de incertezas variantes no tempo, por consequência do termo  $\Delta(t)$  em (2.18), o sistema linear atrasado em questão se torna um sistema variante no tempo e a análise apresentada na Seção 2.1 se torna ineficaz. Contornamos este problema levando em consideração a propriedade descrita em (2.19) e aplicando a desigualdade de Park-Moon, Lema B.0.4 (I), da seguinte maneira

$$2\alpha^T \Delta(t)\beta \leq \frac{1}{\epsilon}\alpha^T \alpha + \epsilon\beta^T \beta.$$

O restante da prova do Teorema 2.2.1 é detalhadamente apresentada na Seção A.3 no Apêndice A.

□

*Observação 2.2.1.* Analogamente ao caso nominal, a aplicação direta do Teorema 2.2.1 é válida apenas para casos em que o limite inferior do intervalo que delimita o atraso é estritamente maior que zero, i.e.,  $\tau_{min} > 0$ . Todavia, para sua aplicação em sistemas cujo o limite inferior que delimita o atraso é nulo, i.e.,  $\tau_{min} = 0$ , basta considerarmos  $U_1 = 0$ .

## 2.2.2 Análise de estabilidade – Casos Particulares

Os resultados obtidos nas seções anteriores com os Teoremas 2.1.1 e 2.1.2 e o Teorema 2.2.1, para o caso robusto, estipulam condições para a estabilidade assintótica dependente-do-atraso de sistemas com atraso variante e desconhecido satisfazendo

$$\tau_{min} \leq d(t) \leq \tau_{max}, \text{ e}$$

$$d_{min} \leq \dot{d}(t) \leq d_{max},$$

como já fora descrito em (2.2) e (2.3). Todavia, na prática nem sempre podemos assumir algum conhecimento prévio sobre a velocidade de variação deste atraso. Consequentemente, é interessante considerarmos dois casos especiais dos resultados obtidos nas seções anteriores. O caso em que conhecemos apenas o limite superior,  $d_{max}$ , do intervalo que delimita a derivada do atraso variante, e o caso em que não impomos nenhuma restrição sobre a derivada do atraso, ou seja, o caso em que não podemos assumir nada sobre o intervalo que delimita a derivada  $\dot{d}(t)$ . Neste contexto, deduziremos condições para estabilidade assintótica de sistemas com atrasos variantes sujeitos a incertezas de modelo para ambos os casos. Para tal, consideraremos o modelo com incertezas descrito em (2.17), pois este engloba o sistema nominal (2.1); e utilizaremos as condições de estabilidade descritas no Teorema 2.2.1, pois



este Teorema também pode ser aplicado para o caso nominal se considerarmos  $\Delta A$  e  $\Delta A_d$ , descritos em (2.18), como matrizes nulas.

No primeiro caso, em que conhecemos apenas o limite superior do intervalo que delimita a derivada do atraso, a única informação que possuímos sobre esta é que

$$\dot{d}(t) \leq d_{max}, \quad (2.22)$$

em que  $d_{max} \geq 0$  é uma constante delimitadora. Não obstante, se adicionarmos as seguintes restrições

$$P_3 > P_2 \text{ e } R_2 \geq R_4, \quad (2.23)$$

nas restrições definidas para a aplicação do Teorema 2.2.1, podemos utilizar exatamente os mesmos argumentos e a mesma análise utilizada na prova deste Teorema. Desta maneira, podemos deduzir o seguinte corolário do Teorema 2.2.1 para o caso em que derivada do atraso satisfaz (2.22).

**Corolário 2.2.1.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $d_{max}$  e  $\eta$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$ ,  $d_{max} > 0$  e  $\eta > 1$ , o sistema incerto apresentado em (2.17) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (2.2) e (2.22) e incertezas descritas em (2.18) é assintoticamente robustamente estável se existirem escalares  $\epsilon_k > 0$ ,  $k = \{1, 2, 3, 4\}$  e matrizes  $P_i$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_1$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (2.13), (2.8), (2.14) e (2.8), para  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}$ , e se existirem matrizes de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  de forma que as seguintes afirmações sejam válidas:*

$$\begin{aligned} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; & \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; \\ \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0; & \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}} &< 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  são definidos em (2.20). ■

#### PROVA

Na dedução dos Teoremas 2.1.2 e 2.2.1, demonstramos que as matrizes  $\Omega_{11}(\dot{d}(t))$ ,  $\Omega_{12}(\dot{d}(t))$ ,  $\Omega_{21}(\dot{d}(t))$  e  $\Omega_{22}(\dot{d}(t))$ , dependentes da derivada do atraso, são convexas em  $\dot{d}(t) \in [d_{min}, d_{max}]$  e, portanto, seriam definidas negativas se as matrizes  $\Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$ ,  $\Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$ ,  $\Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$ ,  $\Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$ ,  $\Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$ ,  $\Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$ ,  $\Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$  e  $\Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$  fossem definidas negativas.

Não obstante, no caso presente, não possuímos informações completas sobre os limites que delimitam a derivada do atraso. Portanto, não podemos aplicar a mesma análise. A solução encontrada é analisar o pior caso que a derivada pode assumir (limite superior ou inferior) de acordo com o termo que está sendo ponderado por  $\dot{d}(t)$ . É importante ressaltar que o pior caso sempre será o que induz os maiores termos na derivada da função de Lyapunov. Se a derivada,  $\dot{d}(t)$ , pondera um termo positivo então o pior caso será quando

a derivada assume seu limite superior,  $d_{max}$ , e, da mesma forma, se o termo for negativo o pior caso está relacionado com o limite inferior,  $d_{min}$ . Devido ao fato de não termos informações sobre o limite inferior,  $d_{min}$ , devemos garantir que todos os termos ponderados pela derivada do atraso,  $\dot{d}(t)$ , sejam positivos. De forma que o pior caso seja sempre o limite superior que delimita a derivada, i.e.,  $d_{max}$ . Para tal, iniciaremos a análise de todos os termos que são ponderados por  $\dot{d}(t)$  na derivada da função de Lyapunov (2.12).

As primeiras matrizes que são ponderadas pela derivada do atraso são  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Estas matrizes aparecem nos seguintes termos da derivada da função de Lyapunov  $V_1(t)$ ,

$$\frac{\dot{d}(t)}{\tau_2 - \tau_1} x^T(t) (P_1 - P_2) x(t), \quad \text{e} \quad \frac{\dot{d}(t)}{\tau_3 - \tau_2} x^T(t) (P_3 - P_1) x(t).$$

Observe que, considerando as restrições impostas em (2.6) e sabendo que os subintervalos são equidistantes, as expressões acima são equivalentes. Destarte, ao assumirmos a validade da expressão  $P_3 \geq P_2$ , observamos que  $\dot{d}(t)$  está ponderando um termo positivo (ou nulo, no caso de igualdades). Deste modo, a análise mais conservadora será substituir  $\dot{d}(t)$  pelo seu limite superior, de forma que possamos garantir que as expressões

$$\begin{aligned} \frac{\dot{d}(t)}{\tau_2 - \tau_1} x^T(t) (P_1 - P_2) x(t) &\leq \frac{d_{max}}{\tau_2 - \tau_1} x^T(t) (P_1 - P_2) x(t), \\ \frac{\dot{d}(t)}{\tau_3 - \tau_2} x^T(t) (P_3 - P_1) x(t) &\leq \frac{d_{max}}{\tau_3 - \tau_2} x^T(t) (P_3 - P_1) x(t) \end{aligned}$$

são válidas.

Consideremos agora a matriz semi-definida positiva  $Q_1$  que aparece na derivada de  $V_2(t)$ , em (A.2),

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= x^T(t - \tau_1) Q_1 x(t - \tau_1) - \left(1 - \dot{d}(t)\right) x^T(t - d(t)) Q_1 x(t - d(t)) \\ &= x^T(t - \tau_1) Q_1 x(t - \tau_1) - x^T(t - d(t)) Q_1 x(t - d(t)) + \dot{d}(t) x^T(t - d(t)) Q_1 x(t - d(t)). \end{aligned}$$

é fácil observar que  $\dot{d}(t) [x^T(t - d(t)) Q_1 x(t - d(t))] \leq d_{max} [x^T(t - d(t)) Q_1 x(t - d(t))]$ , pois  $Q_1 \geq 0$ .

Por fim, consideremos as matrizes  $R_2$  e  $R_4$ . Estas matrizes aparecem em (A.7) e em (A.23), como termos da derivada de  $V_7(t)$ , da seguinte maneira

$$\dot{d}(t) \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_2 - R_4) \dot{x}(s) ds.$$

Observe que, similarmente aos casos anteriores, se garantirmos que  $R_2 \geq R_4$ , então o termo ponderado por  $\dot{d}(t)$  será semi-definido positivo e, portanto, podemos substituir  $\dot{d}(t)$  por  $d_{max}$ .

Desta maneira, se as restrições impostas em (2.23) forem satisfeitas, então as condições expressas pelo Corolário 2.2.1 garantem que as matrizes  $\Omega_{11}(\dot{d}(t))$ ,  $\Omega_{12}(\dot{d}(t))$ ,

$\Omega_{21}(\dot{d}(t))$  e  $\Omega_{22}(\dot{d}(t))$  são definidas negativas e que o sistema incerto com atrasos variantes é assintoticamente robustamente estável.

□

Consideremos agora o segundo caso, no qual não impomos nenhuma restrição sobre a derivada do atraso variável. Neste caso, como não podemos inferir nenhuma informação quanto a derivada do atraso e seus limites, não podemos considerar nenhum dos termos contendo explicitamente a derivada do atraso,  $\dot{d}(t)$ , no desenvolvimento das condições de estabilidade para o sistema atrasado. Portanto, se as seguintes restrições

$$P_1=P_2=P_3, \quad Q_1=0, \quad \text{e} \quad R_2=R_4, \quad (2.25)$$

adicionadas nas restrições do Teorema 2.2.1 forem satisfeitas, então podemos utilizar exatamente os mesmos argumentos e a mesma análise utilizada na prova do Teorema 2.2.1 para derivar condições de estabilidade robusta para o sistema atrasado sem imposições quanto a derivada de seu atraso.

**Corolário 2.2.2.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$  e  $\eta$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$  e  $\eta > 1$ , o sistema incerto apresentado em (2.17) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (2.2) e incertezas descritas em (2.18) é assintoticamente robustamente estável se existirem escalares  $\epsilon_k > 0$ ,  $k = \{1, 2, 3, 4\}$  e matrizes  $P_i$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_1$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (2.13) e (2.25), e se existirem matrizes de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$  de forma que as seguintes afirmações sejam válidas:*

$$\Omega_{11} < 0; \quad \Omega_{12} < 0; \quad \Omega_{21} < 0; \quad \Omega_{22} < 0, \quad (2.26)$$

em que  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  são definidos em (2.20). ■

#### PROVA

Neste caso, devido ao fato de não possuímos nenhuma informação sobre os limites que delimitam a derivada do atraso, i.e.,  $d_{min}$  e  $d_{max}$ , a análise é consideravelmente mais objetiva e simples. Todos os termos ponderados pela derivada do atraso,  $\dot{d}(t)$ , devem ser eliminados da análise de estabilidade. Como visto na prova do Corolário 2.2.1, os termos ponderados por  $\dot{d}(t)$  são:  $\dot{d}(t)(P_1 - P_2)$ ,  $\dot{d}(t)(P_3 - P_1)$ ,  $\dot{d}(t)Q_1$ ,  $\dot{d}(t)(R_2 - R_4)$ . Desta maneira, é relativamente simples observar que se as restrições impostas em (2.25) forem satisfeitas então não existirão termos ponderados pela derivada do atraso  $\dot{d}(t)$  nas condições de estabilidade.

□

Tabela 2.1: (Exemplo 2.3.1) Valor máximo para o limite superior do atraso,  $\tau_{max}$ , para  $\tau_{min}=0$  e vários valores de  $d_{min}$  e  $d_{max}$

$d_{max} \setminus d_{min}$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,3	3,064	3,063	3,063	3,063	3,063	3,063	3,062	3,062	3,062	3,062	3,062	3,061	3,061
0,4	2,694	2,689	2,685	2,682	2,680	2,679	2,678	2,677	2,677	2,677	2,677	2,676	2,676
0,5	2,503	2,494	2,486	2,479	2,472	2,466	2,461	2,456	2,452	2,448	2,446	2,442	2,440
0,6	2,395	2,385	2,375	2,366	2,359	2,351	2,345	2,339	2,334	2,329	2,325	2,320	2,317
0,7	2,319	2,307	2,297	2,288	2,281	2,273	2,267	2,261	2,257	2,251	2,247	2,243	2,240
0,8	2,264	2,253	2,244	2,234	2,229	2,223	2,217	2,211	2,208	2,204	2,200	2,196	2,194
0,9	2,225	2,215	2,208	2,201	2,195	2,190	2,185	2,182	2,177	2,175	2,172	2,169	2,167
1,0	2,200	2,192	2,185	2,179	2,174	2,169	2,165	2,162	2,159	2,156	2,153	2,152	2,150
1,1	2,185	2,177	2,171	2,165	2,160	2,155	2,152	2,150	2,147	2,145	2,143	2,142	2,140
1,2	2,177	2,169	2,163	2,158	2,153	2,149	2,146	2,143	2,142	2,140	2,138	2,137	2,136
1,3	2,172	2,165	2,160	2,155	2,151	2,147	2,144	2,142	2,140	2,138	2,136	2,136	2,135
1,4	2,169	2,163	2,159	2,154	2,150	2,146	2,143	2,141	2,139	2,137	2,136	2,134	2,133
1,5	2,167	2,162	2,158	2,153	2,149	2,145	2,142	2,140	2,137	2,136	2,135	2,133	2,132

### 2.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, apresentamos uma série de exemplos numéricos que visam ilustrar a validade dos critérios propostos neste capítulo com referência à análise de estabilidade e à análise de estabilidade robusta de sistemas sujeitos a atrasos variantes no tempo. Primeiramente, investigamos a aplicabilidade e a eficácia dos métodos apresentados na Seção 2.1 para sistemas nominais, i.e., sem incertezas de modelo. Para tal, apresentamos seis exemplos com diferentes condições referentes ao atraso variante e à sua derivada, conforme as definições em (2.2)-(2.3). Além de demonstrar a validade dos critérios e analisar os efeitos resultantes da variação das constantes definidas em (2.2)-(2.3), comparamos nossos resultados obtidos através dos métodos propostos neste capítulo com os resultados dos principais critérios existentes na literatura de sistemas sujeitos a retardos no tempo. Em seguida, apresentamos outros dois exemplos com diferentes condições referentes ao atraso variante e à sua derivada, para sistemas com atrasos variantes sujeitos a incertezas de modelo. Uma análise análoga ao caso nominal é então apresentada para estes exemplos com os resultados de estabilidade robusta obtidos com os critérios apresentados na Seção 2.2.

#### *Exemplo 2.3.1 (Efeitos da variação dos limites da derivada do atraso).*

Considere o seguinte sistema sujeito a atrasos variantes no tempo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - d(t)).$$

Assumindo que o atraso mínimo é desconhecido, ou definido por  $\tau_{min} = 0$ . Aplicamos o Teorema 2.1.1 de forma a obtermos o valor máximo para o limite superior do atraso variante  $\tau_{max}$ , para o qual o sistema descrito mantém-se estável, conforme pode ser ob-

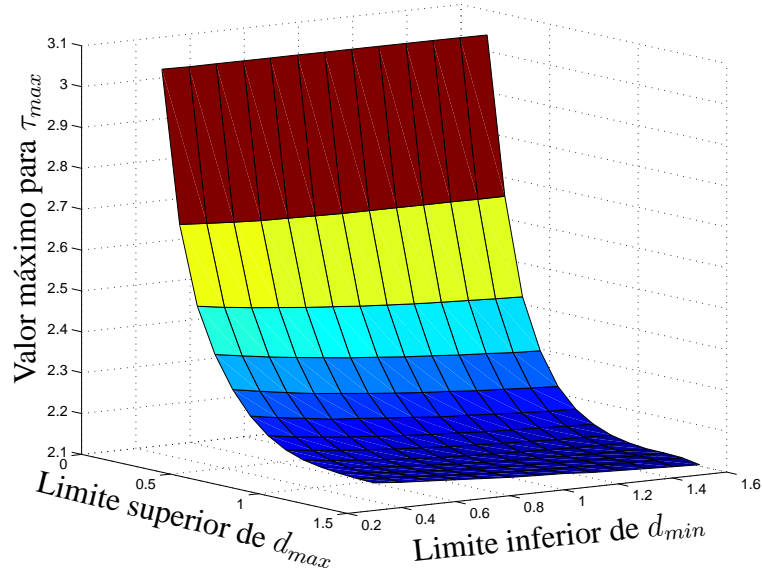


Figura 2.1: (Exemplo 2.3.1) Valor máximo de  $\tau_{max}$  considerando  $\tau_{min}=0$  e vários valores distintos de  $d_{min}$  e de  $d_{max}$ .

servado na Tabela 2.1, para vários valores distintos dos limites que delimitam a derivada do atraso variante,  $d_{min}$  e  $d_{max}$ . Os resultados apresentados na Tabela 2.1 são diretamente dependentes dos limites que definem a derivada do atraso. Visando facilitar esta análise construímos um gráfico, apresentado na Figura 2.1, que relaciona estes limites com o valor máximo de  $\tau_{max}$  obtido com o Teorema 2.1.1.

Como pode ser observado na Tabela 2.1 e na Figura 2.1, o valor máximo para o limite superior do atraso,  $\tau_{max}$ , tende a crescer quando  $d_{min} \rightarrow 0$  e quando  $d_{max} \rightarrow 0$ . Neste caso, o intervalo de variação da derivada do atraso é reduzido e, portanto, o atraso variante se assemelha ao atraso constante, menos prejudicial à estabilidade do sistema. Além disso, ao analisarmos o conjunto formado pelos intervalos, é fácil notar que dadas as constantes  $d_{min}^{(1)} < d_{min}^{(2)}$  e  $d_{max}^{(1)} > d_{max}^{(2)}$ , o intervalo  $[d_{min}^{(2)}, d_{max}^{(2)}]$  está contido no intervalo  $[d_{min}^{(1)}, d_{max}^{(1)}]$ . Portanto, se o sistema é estável para um atraso variante cuja a derivada é delimitada pelo intervalo  $[d_{min}^{(1)}, d_{max}^{(1)}]$ , logo o sistema também será estável para um atraso cuja derivada,  $\dot{d}(t)$ , varia de acordo com o segundo intervalo. Obviamente, não podemos garantir a mesma relação no caso inverso.  $\square$

**Exemplo 2.3.2 (Efeitos da variação dos limites da derivada do atraso (outro sistema)).**

Visando corroborar a análise apresentada no exemplo anterior, consideramos um segundo sistema,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(t - d(t)),$$

Tabela 2.2: (Exemplo 2.3.2) Valor máximo para o limite superior do atraso,  $\tau_{max}$ , para  $\tau_{min}=0$  e vários valores de  $d_{min}$  e  $d_{max}$

$d_{min}$ $d_{max}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,1	6,395	6,390	6,388	6,385	6,384	6,384	6,382	6,381	6,381	6,380	6,378	6,378	6,378	6,378	6,375
0,2	3,785	3,720	3,682	3,675	3,669	3,666	3,667	3,665	3,663	3,660	3,662	3,660	3,660	3,660	3,659
0,3	2,729	2,633	2,561	2,511	2,482	2,472	2,467	2,464	2,462	2,460	2,459	2,456	2,456	2,456	2,454
0,4	2,160	2,058	1,979	1,920	1,878	1,848	1,827	1,814	1,805	1,800	1,796	1,794	1,792	1,790	1,788
0,5	1,841	1,743	1,663	1,600	1,549	1,510	1,480	1,458	1,440	1,427	1,417	1,410	1,404	1,399	1,395
0,6	1,671	1,589	1,520	1,464	1,417	1,378	1,345	1,318	1,296	1,279	1,265	1,254	1,245	1,237	1,231
0,7	1,583	1,511	1,451	1,401	1,359	1,323	1,294	1,270	1,250	1,236	1,224	1,215	1,208	1,203	1,198
0,8	1,541	1,474	1,419	1,372	1,332	1,298	1,270	1,247	1,229	1,216	1,207	1,200	1,194	1,190	1,186
0,9	1,519	1,456	1,402	1,357	1,317	1,283	1,255	1,232	1,216	1,204	1,196	1,190	1,185	1,182	1,179
1,0	1,502	1,442	1,390	1,345	1,306	1,272	1,244	1,221	1,206	1,196	1,189	1,184	1,179	1,176	1,173
1,1	1,490	1,431	1,380	1,336	1,297	1,263	1,234	1,212	1,199	1,190	1,183	1,179	1,175	1,172	1,170
1,2	1,480	1,422	1,371	1,328	1,289	1,255	1,226	1,206	1,193	1,185	1,179	1,174	1,171	1,168	1,166
1,3	1,473	1,415	1,365	1,321	1,282	1,248	1,220	1,200	1,189	1,180	1,175	1,171	1,168	1,166	1,164
1,4	1,467	1,409	1,359	1,315	1,276	1,242	1,214	1,196	1,185	1,177	1,172	1,168	1,165	1,163	1,161
1,5	1,462	1,404	1,353	1,310	1,270	1,236	1,209	1,192	1,181	1,175	1,170	1,166	1,163	1,161	1,159

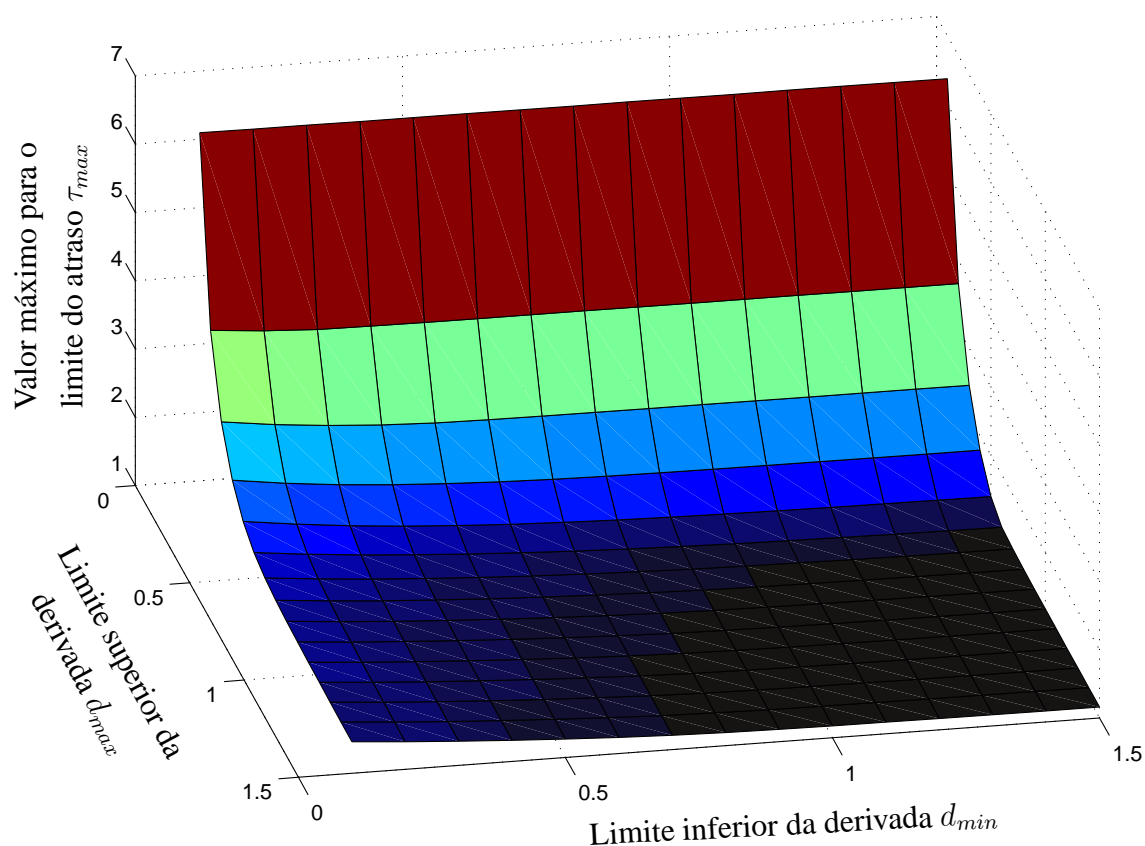


Figura 2.2: (Exemplo 2.3.2) Valor máximo de  $\tau_{max}$  considerando  $\tau_{min}=0$  e vários valores distintos de  $d_{min}$  e de  $d_{max}$ .

o qual é usualmente utilizado como sistema de referência na análise de sistemas com atrasos, e então aplicamos o Teorema 2.1.2, com  $\eta=6$ , para diversas configurações referentes à derivada do atraso variante.

Consideramos o atraso mínimo definido por  $\tau_{min} = 0$ , então, de maneira análoga ao primeiro exemplo, construímos um gráfico que relaciona os valores dos limites que delimitam o intervalo de variação da derivada do atraso variante,  $d_{min}$  e  $d_{max}$ , com os valores obtidos para o limite superior de  $\tau_{max}$ . Os resultados são apresentados na Figura 2.2 e na Tabela 2.2. Observa-se que a mesma relação apresentada no exemplo anterior repete-se, ou seja, como era esperado, o valor máximo para o limite superior do atraso variante,  $\tau_{max}$ , tende a crescer quando  $d_{min} \rightarrow 0$  e quando  $d_{max} \rightarrow 0$ . Em especial para o caso em que  $d_{max} \rightarrow 0$ , pois, neste caso, implica-se que o atraso não cresce subitamente à valores máximos.  $\square$

**Exemplo 2.3.3 (Limite inferior da derivada desconhecido (segundo sistema)).**

Neste exemplo, utilizaremos o mesmo sistema linear atrasado definido no Exemplo 2.3.2. Assumindo que o limite inferior do intervalo da derivada do atraso, i.e.,  $d_{min}$ , é desconhecido, aplicamos os métodos referentes aos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2, através dos Corolários 2.2.1 e 2.2.2, para diversas configurações do limite inferior do atraso variante,  $\tau_{min}$ .

Primeiramente, consideramos o limite superior que delimita a derivada do atraso como  $d_{max}=0, 3$ . Os resultados da aplicação do Corolário 2.2.1, com diversos valores de  $\eta$ , são apresentados e comparados com os resultados dos principais métodos existentes na literatura na Tabela 2.3. É fácil observar que a aplicação de nosso critério resulta em valores consideravelmente menos conservadores do que outros métodos para qualquer número de  $(\eta-1)$  divisões do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ . Ademais, nota-se que o incremento do número de divisões implica em melhores resultados, conforme discutido na Subseção 2.1.2.

Em seguida, apresentamos, na Tabela 2.4, os resultados da aplicação do Corolário 2.2.2 para o caso em que o limite superior que delimita a derivada do atraso também é desconhecido, ou seja, para o caso em que não possuímos nenhuma informação com relação a derivada do atraso variante. Como pode ser observado na Tabela 2.4, nosso método, também, apresenta melhores resultados em comparação com todos os principais métodos existentes na literatura. Além disso, observa-se a redução de conservadorismo com o incremento do número de divisões do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ . As contribuições referentes à esta divisão serão melhor exploradas no Exemplo 2.3.5.  $\square$

**Exemplo 2.3.4 (Variando os valores de  $d_{max}$  para  $d_{min}$  desconhecido).**

---

<sup>1</sup>Resultado não disponibilizado pelo autor.

Tabela 2.3: (Exemplo 2.3.3) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$ ,  $d_{max} = 0,3$  e  $d_{min}$  desconhecido

Métodos	$\tau_{min}$	1	2	3	4	5
He et al. (2007, Automatica) [86]		2,213	2,409	3,334	4,280	5,239
Shao (2009, Automatica) [45]		2,247	2,480	3,389	4,325	5,277
Sun et al. (2010, Automatica) [93]		2,317	- <sup>1</sup>	- <sup>1</sup>	- <sup>1</sup>	- <sup>1</sup>
Zhu & Wang (2010, ACC) [94]		2,340	2,582	3,472	4,394	5,336
Orihuela et al. (2010, ACC) [79]		2,353	2,608	3,490	4,406	5,345
<b>Corolário 2.2.1</b>	$\eta=1$	<b>2,440</b>	<b>2,610</b>	<b>3,491</b>	<b>4,406</b>	<b>5,345</b>
	$\eta=2$	<b>2,454</b>	<b>2,626</b>	<b>3,514</b>	<b>4,437</b>	<b>5,380</b>
	$\eta=6$	<b>2,458</b>	<b>2,631</b>	<b>3,520</b>	<b>4,445</b>	<b>5,389</b>

Tabela 2.4: (Exemplo 2.3.3) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$ , e para  $d_{max}$  e  $d_{min}$  desconhecidos

Métodos	$\tau_{min}$	0,3	0,5	0,8	1	2
Jiang & Han (2005, Automatica) [95]		0,91	1,07	1,33	1,50	2,39
He et al. (2007, Automatica) [86]		0,943	1,099	1,348	1,519	2,400
Shao (2009, Automatica) [45]		1,072	1,219	1,454	1,617	2,480
Sun et al. (2010, Automatica) [93]		- <sup>1</sup>	- <sup>1</sup>	- <sup>1</sup>	1,620	2,488
Zhu & Wang (2010, ACC) [94]		1,123	1,267	1,497	1,658	2,511
Orihuela et al. (2010, Int J Robust Nonlin) [79]		1,223	1,360	1,582	1,738	2,572
<b>Corolário 2.2.1</b>	$\eta=1$	<b>1,299</b>	<b>1,429</b>	<b>1,642</b>	<b>1,792</b>	<b>2,609</b>
	$\eta=2$	<b>1,299</b>	<b>1,430</b>	<b>1,645</b>	<b>1,797</b>	<b>2,624</b>
	$\eta=6$	<b>1,299</b>	<b>1,431</b>	<b>1,646</b>	<b>1,798</b>	<b>2,628</b>

Neste exemplo, visando analisar o mesmo sistema linear atrasado apresentado no Exemplo 2.3.1,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - d(t)),$$

com limite inferior do intervalo da derivada do atraso ( $d_{min}$ ) desconhecido, aplicamos o método desenvolvido no Teorema 2.1.1 através do Corolário 2.2.1 com  $\eta=1$ . Neste caso, consideramos que o limite inferior do atraso é desconhecido, ou definido por  $\tau_{min} = 0$ . Desta forma, para vários valores referentes ao limite superior do intervalo que delimita a derivada do atraso, aplicamos o Corolário 2.2.1 com  $\eta=1$ . Os resultados são apresentados e comparados com os resultados advindos dos principais métodos existentes na literatura na Tabela 2.5. É fácil observar que nosso método mais uma vez apresenta resultados consideravelmente superiores aos principais resultados existentes na literatura. Além disso, observa-se que o valor máximo para o limite superior do atraso,  $\tau_{max}$ , cresce quando  $d_{max} \rightarrow 0$ , conforme esperado e discutido nos Exemplos 2.3.1 e 2.3.2.  $\square$



Tabela 2.5: (Exemplo 2.3.4) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $d_{max}$ ,  $\tau_{min}=0$  e para  $d_{min}$  desconhecido

Métodos	$d_{max}$	0, 1	0, 2	0, 5	0, 9	1, 0
Fridman & Shaked (2002, TAC) [96]		–	–	2, 00	1, 18	–
Fridman & Shaked (2003, Int J Control) [97]		–	–	2, 00	1, 18	–
Wu et al. (2004, Automatica) [98]		3, 604	–	2, 008	1, 180	–
Lien (2005, Control Theory Appl) [99]		3, 604	–	2, 008	1, 180	–
He et al. (2004, TAC) [100]		3, 652	–	2, 008	1, 180	–
He et al. (2007, Automatica) [86]		–	–	2, 04	1, 37	–
He et al. (2007, TAC) [101]		3, 605	3, 039	2, 043	1, 492	1, 345
Zhu & Yang (2008, Control Theory Appl) [102]		3, 915	3, 293	2, 194	1, 642	1, 601
Park & Ko (2007, Automatica) [44]		3, 669	–	2, 337	1, 873	–
<b>Corolário 2.2.1 com <math>\eta=1</math></b>		<b>4, 366</b>	<b>3, 607</b>	<b>2, 410</b>	<b>2, 118</b>	<b>2, 118</b>

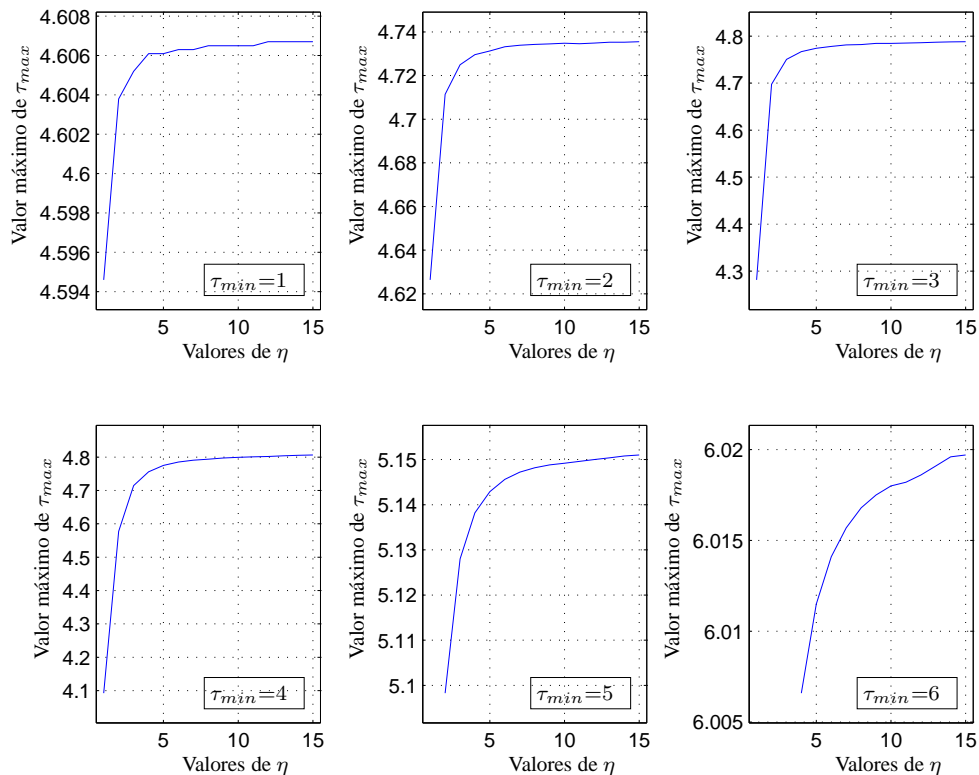


Figura 2.3: (Exemplo 2.3.5) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários  $\tau_{min}$  com  $-0, 1 \leq \dot{d}(t) \leq 0, 1$ .

### Exemplo 2.3.5 (Efeitos do incremento de $\eta$ ).

<sup>1</sup>Nas Tabelas 2.6, 2.7 e 2.8, as células completadas com – indicam que o autor não disponibilizou resultados para o caso específico, enquanto que as células completadas com × indicam que os métodos não possuem solução para o caso específico.

Tabela 2.6: (Exemplo 2.3.5) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$ , e para  $d_{max}=0,1$  e  $d_{min}=-0,1$

Métodos	$\tau_{min}$	0	1	2	3	4	5	6
He et al. (2007, Automatica) [86]		3,605	- <sup>1</sup>	- <sup>1</sup>	3,612	4,064	×	×
Sun et al. (2010, IET CTA) [103]		3,918	- <sup>1</sup>	- <sup>1</sup>	3,918	4,178	5,038	×
Fridman et al. [76] (2009, Automatica)	Teorema 1	4,260	4,571	4,622	4,216	4,090	×	×
	Teorema 2	3,663	4,203	4,456	4,425	4,429	5,097	×
<b>Teorema 2.1.2</b>	$\eta=1$	4,363	4,595	4,626	4,282	4,093	×	×
	$\eta=2$	4,363	4,604	4,711	4,698	4,577	5,098	×
	$\eta=3$	4,364	4,605	4,725	4,750	4,715	5,128	×
	$\eta=4$	4,365	4,606	4,730	4,767	4,756	5,138	6,007
	$\eta=5$	4,365	4,606	4,731	4,774	4,775	5,143	6,011
	$\eta=6$	4,365	4,606	4,733	4,778	4,785	5,146	6,014
	$\eta=7$	4,364	4,606	4,734	4,781	4,791	5,147	6,016
	$\eta=8$	4,364	4,606	4,734	4,782	4,794	5,148	6,017
	$\eta=9$	4,364	4,606	4,734	4,784	4,797	5,149	6,018
	$\eta=10$	4,364	4,606	4,735	4,785	4,799	5,149	6,018
	$\eta=11$	4,364	4,606	4,735	4,785	4,801	5,150	6,018
	$\eta=12$	4,364	4,607	4,735	4,786	4,802	5,150	6,019
	$\eta=15$	4,363	4,607	4,735	4,787	4,804	5,150	6,019
	$\eta=20$	4,364	4,607	4,735	4,788	4,805	5,151	6,020
	$\eta=25$	4,365	4,607	4,736	4,788	4,806	5,151	6,020

Neste exemplo, utilizaremos o mesmo sistema apresentado no Exemplo 2.3.1,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - d(t)).$$

Considerando três configurações distintas para o intervalo que delimita a derivada do atraso variante,

$$\begin{cases} d_1 & \text{para o caso em que, } \dot{d}(t) \in [-0,1; 0,1] \\ d_2 & \text{para o caso em que, } \dot{d}(t) \in [-0,5; 0,5] \\ d_3 & \text{para o caso em que os limites que delimitam o intervalo são desconhecidos,} \end{cases}$$

aplicamos os Teoremas 2.1.1 e 2.1.2 para vários valores de  $\tau_{min}$  e para vários valores de  $\eta$ , ou seja, para várias divisões distintas do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ . Desta maneira, observamos a influência do número de  $\eta$  subintervalos de  $[0, \tau_{min}]$  sobre os resultados e a consequente redução do conservadorismo da análise.

Na Tabela 2.6, apresentamos os resultados obtidos considerando a configuração  $d_1$  referente ao intervalo que delimita a derivada do atraso para distintos valores do limite

Tabela 2.7: (Exemplo 2.3.5) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$ , e para  $d_{max}=0,5$  e  $d_{min}=-0,5$

Métodos	$\tau_{min}$	0	1	2	3	4	5	6
He et al. (2007, Automatica) [86]		2,044	$-^1$	$-^1$	3,223	4,064	×	×
Sun et al. (2010, IET CTA) [103]		2,716	$-^1$	$-^1$	3,341	4,178	5,038	×
Fridman et al. [76] (2009, Automatica)	Teorema 1	2,450	2,430	2,646	3,321	4,090	×	×
	Teorema 2	2,337	2,459	2,724	3,458	4,257	5,097	×
<b>Teorema 2.1.2</b>	$\eta=1$	2,486	2,490	2,672	3,324	4,090	×	×
	$\eta=2$	2,486	2,522	2,786	3,467	4,258	5,098	×
	$\eta=3$	2,485	2,528	2,804	3,489	4,284	5,126	×
	$\eta=4$	2,485	2,530	2,810	3,497	4,292	5,136	6,006
	$\eta=5$	2,485	2,531	2,813	3,500	4,296	5,140	6,011
	$\eta=6$	2,485	2,532	2,815	3,502	4,298	5,143	6,014
	$\eta=7$	2,485	2,532	2,815	3,503	4,300	5,144	6,016
	$\eta=8$	2,485	2,532	2,816	3,504	4,301	5,145	6,016
	$\eta=9$	2,484	2,532	2,817	3,504	4,301	5,146	6,017
	$\eta=10$	2,485	2,532	2,817	3,505	4,302	5,146	6,018
	$\eta=11$	2,485	2,532	2,817	3,505	4,302	5,147	6,018
	$\eta=12$	2,485	2,532	2,817	3,505	4,302	5,147	6,019
	$\eta=15$	2,485	2,533	2,817	3,506	4,302	5,147	6,019
	$\eta=20$	2,485	2,533	2,818	3,506	4,303	5,148	6,019
$\eta=25$	2,485	2,533	2,818	3,506	4,303	5,148	6,020	

inferior de atraso,  $\tau_{min}$ . Os resultados são obtidos através do Teorema 2.1.2 para várias divisões distintas do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ , e então comparados com os resultados advindos dos principais critérios existentes na literatura de sistemas com atrasos variantes. De maneira análoga, apresentamos nas Tabelas 2.7 e 2.8 resultados semelhantes considerando as configurações  $d_2$  e  $d_3$ , respectivamente. Primeiramente, observa-se que ao considerarmos explicitamente os valores da derivada do atraso variante, obtemos limites menos restritivos para o atraso máximo, em especial quando os limites da derivada tendem à zero. Fato que corrobora com as análises apresentadas nos exemplos anteriores. Em seguida, analisando e comparando os resultados das Tabelas 2.6, 2.7 e 2.8 é notável que o critério desenvolvido neste Capítulo apresenta resultados consideravelmente menos conservadores do que os resultados de todos os principais métodos existentes na literatura para qualquer valor de  $\eta$ . Inclusive nenhum dos métodos desenvolvidos anteriormente conseguem apresentar resultados para o caso em que  $\tau_{min} = 6$ . Desta forma, observa-se a importância de nosso resultado em comparação com os outros na literatura.

Não obstante, nota-se que ao incrementarmos o limite inferior do atraso ( $\tau_{min}$ ), as contribuições referentes à análise por partes do atraso são consideravelmente reduzidas.

Tabela 2.8: (Exemplo 2.3.5) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$  com  $d_{max}$  e  $d_{min}$  desconhecidos

Métodos	$\tau_{min}$	0	1	2	3	4	5	6
He et al. (2007, Automatica) [86]		1,345	— <sup>1</sup>	— <sup>1</sup>	3,223	4,064	×	×
Sun et al. (2010, IET CTA) [103]		1,868	— <sup>1</sup>	— <sup>1</sup>	3,341	4,178	5,038	×
Fridman et al. [76] (2009, Automatica)	Teorema 1	2,118	2,169	2,646	3,321	4,090	×	×
	Teorema 2	1,867	2,120	2,724	3,458	4,257	5,097	×
<b>Teorema 2.1.2</b>	$\eta=1$	2,119	2,169	2,646	3,321	4,090	×	×
	$\eta=2$	2,118	2,217	2,751	3,462	4,258	5,098	×
	$\eta=3$	2,118	2,224	2,767	3,484	4,283	5,126	×
	$\eta=4$	2,118	2,227	2,773	3,492	4,292	5,136	6,007
	$\eta=5$	2,118	2,228	2,775	3,495	4,296	5,140	6,011
	$\eta=6$	2,118	2,229	2,777	3,497	4,298	5,143	6,014
	$\eta=7$	2,118	2,229	2,777	3,498	4,299	5,144	6,016
	$\eta=8$	2,117	2,229	2,778	3,499	4,300	5,145	6,017
	$\eta=9$	2,117	2,229	2,778	3,499	4,301	5,146	6,018
	$\eta=10$	2,117	2,230	2,779	3,499	4,301	5,146	6,018
	$\eta=11$	2,117	2,230	2,779	3,500	4,301	5,147	6,018
	$\eta=12$	2,118	2,230	2,779	3,500	4,301	5,147	6,019
	$\eta=15$	2,117	2,230	2,779	3,500	4,302	5,147	6,019
	$\eta=20$	2,117	2,230	2,779	3,501	4,302	5,148	6,020
$\eta=25$	2,117	2,230	2,779	3,501	4,302	5,148	6,020	

Em especial, podemos observar o Teorema 1 em [76], que apresenta uma análise por partes do atraso, e o Teorema 2 do mesmo trabalho, que não utiliza esta abordagem. Para pequenos valores de  $\tau_{min}$  o primeiro teorema é mais efetivo, porém ao incrementarmos o valor de  $\tau_{min}$  o segundo teorema passa ser mais efetivo. Inclusive, em certos pontos da Tabela 2.6, o Teorema 1 em [76] apresenta valores para o atraso máximo ( $\tau_{max}$ ) maiores para valores de  $\tau_{min}$  menores, ou seja,  $\tau_{max}^1 > \tau_{max}^2$  para  $\tau_{min}^1 < \tau_{min}^2$ . Fato que não faz sentido ao analisarmos matematicamente, visto que o intervalo  $[\tau_{min}^2, \tau_{max}^2]$  estaria contido no intervalo  $[\tau_{min}^1, \tau_{max}^1]$  e, portanto, se o sistema atrasado é estável para o maior intervalo então obviamente será estável ao menos para o intervalo  $[\tau_{min}^2, \tau_{max}^1]$ , que ainda está contido no maior intervalo. É interessante então notar o incremento de conservadorismo sobre a análise por partes do atraso quando definimos valores maiores para  $\tau_{min}$ .

Para compensar este efeito e a consequente perda de contribuição da análise por partes do atraso, apresentamos uma abordagem por fracionamento do intervalo de atraso  $[0, \tau_{min}]$ , conforme discutido na Subseção 2.1.2. Desta maneira, conseguimos reduzir o conservadorismo da análise resultante do incremento do valor de  $\tau_{min}$ .

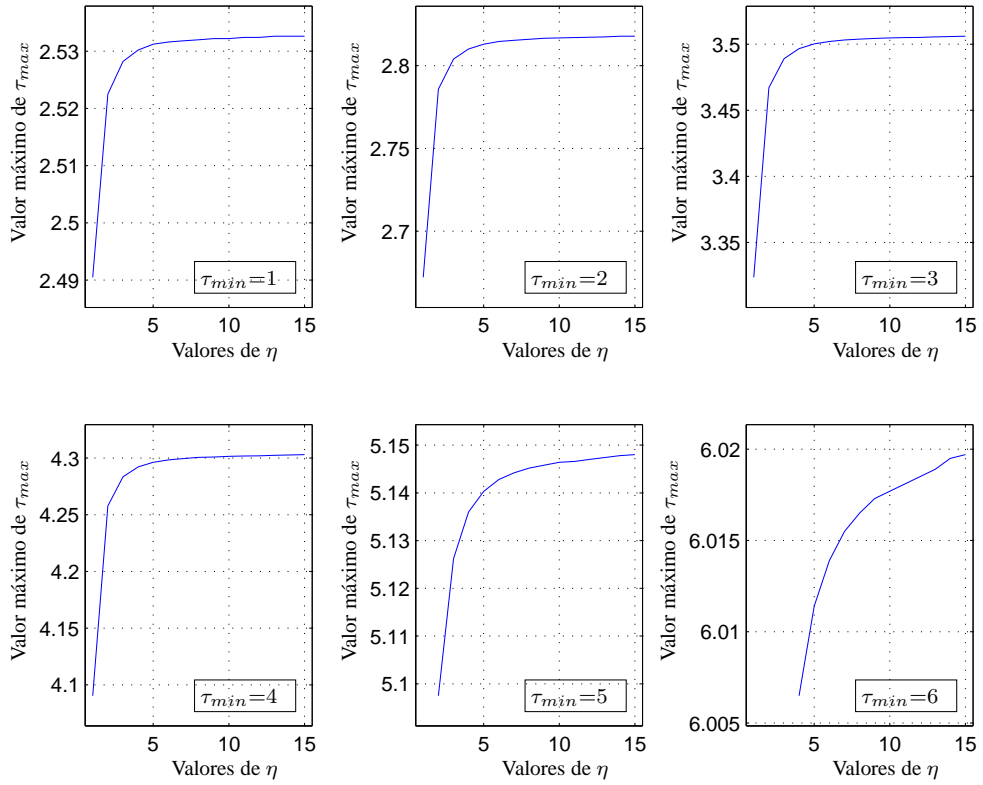


Figura 2.4: (Exemplo 2.3.5) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários  $\tau_{min}$  com  $-0,5 \leq \dot{d}(t) \leq 0,5$ .

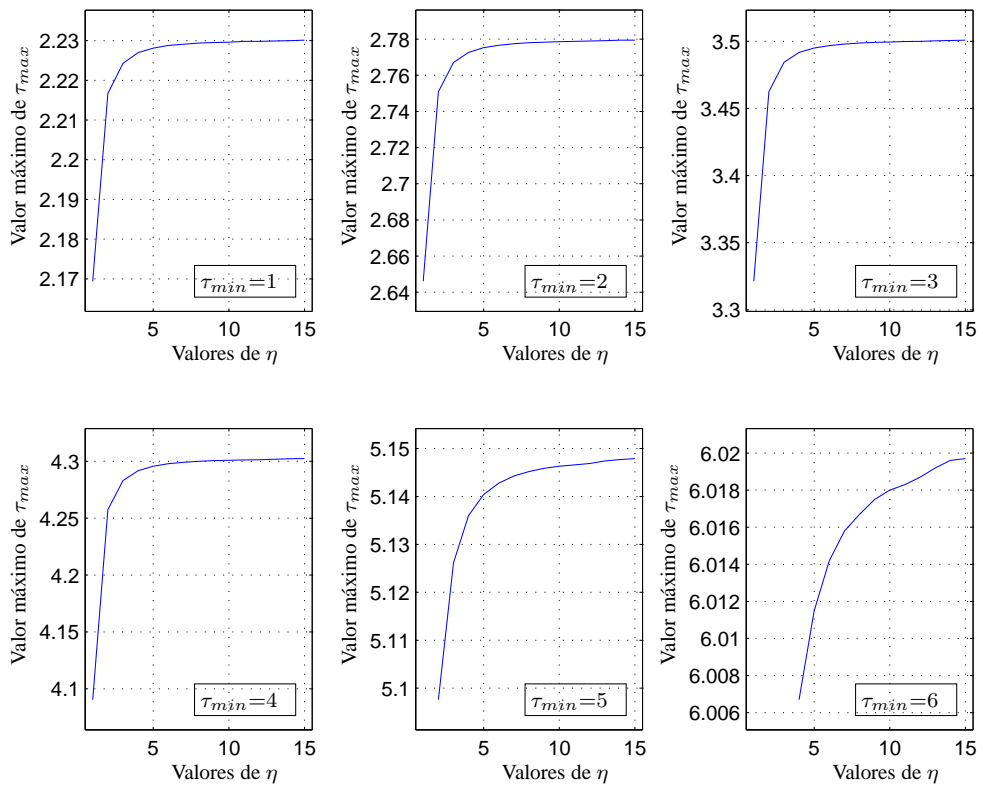


Figura 2.5: (Exemplo 2.3.5) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários  $\tau_{min}$  com  $d_{max}$  e  $d_{min}$  desconhecidos.

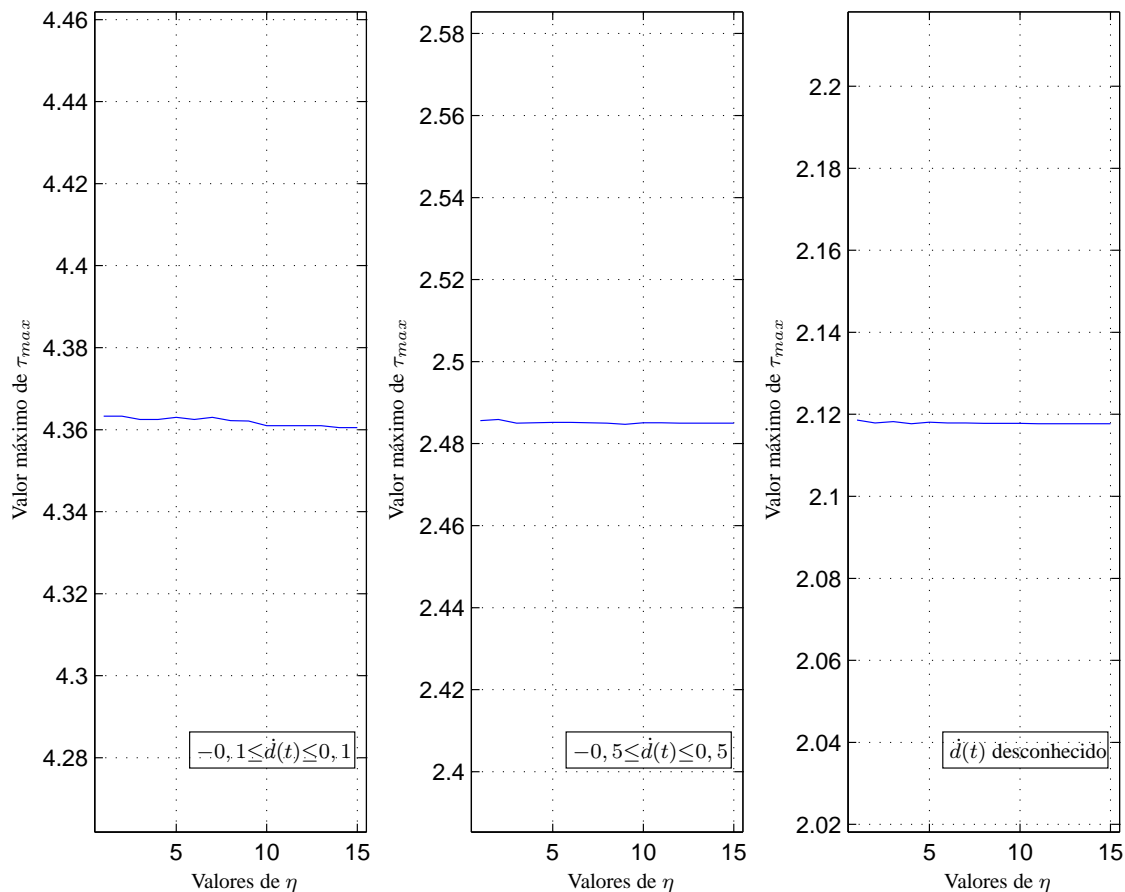


Figura 2.6: (Exemplo 2.3.5) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários  $\tau_{min}$  com  $d_{max}$  e  $d_{min}$  desconhecidos.

Visando facilitar a análise das contribuições referentes ao incremento de  $\eta$ , construímos os gráficos apresentados nas Figuras 2.3, 2.3 e 2.3 que relacionam o valor máximo do atraso variante ( $\tau_{max}$ ) com o incremento do número de  $(\eta-1)$  divisões do intervalo  $[0, \tau_{min}]$  para as três configurações de intervalo da derivada do atraso  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , respectivamente. Como pode ser observado nas Figuras 2.3, 2.3 e 2.3 para  $\tau_{min} > 0$ , as contribuições do incremento de  $\eta$  são semelhantes a funções logarítmicas, no sentido em que são monotonicamente crescentes e crescem rapidamente para pequenos valores de  $\eta$ . Não obstante, estas contribuições tendem a um certo limite com  $\eta \rightarrow \infty$ , como era de se esperar, pois, caso contrário, quando  $\eta \rightarrow \infty$  iríamos garantir a estabilidade para qualquer valor de atraso, o que obviamente não condiz com a realidade. Além disso, pode-se verificar que o incremento de  $\eta$  não produz contribuições significativas para o caso em que  $\tau_{min} = 0$ , o que era esperado, visto que a divisão do intervalo  $[0, \tau_{min}]$  não possui qualquer sentido neste caso. Esta análise é corroborada com a análise gráfica apresentada na Figura 2.3, que relaciona o valor máximo do atraso variante ( $\tau_{max}$ ) para diferentes valores de  $\eta$ , dado  $\tau_{min} = 0$ .  $\square$

**Exemplo 2.3.6 (Atraso quase constante).**

Considerando o mesmo sistema atrasado introduzido no Exemplo 2.3.1,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - d(t)),$$

apresentaremos resultados para o caso em que o atraso variante é praticamente constante. De fato, podemos considerar neste exemplo que o atraso é constante porém com pequenas incertezas e pequenos ruídos. Consideramos, portanto, um atraso constante,  $\tau_c$ , afetado por pequenos ruídos de magnitude 0,001. Desta forma, podemos reescrever este atraso, como um atraso variante definido em (2.2),

$$\tau_c - 0,001 \leq d(t) \leq \tau_c + 0,001.$$

Além disso, consideramos um pequeno intervalo que delimita a velocidade de variação deste ruído, ou seja, o intervalo que delimita a derivada do atraso definido acima (note que no caso perfeitamente constante  $\dot{d}(t)=0$ ),

$$-0,001 \leq \dot{d}(t) \leq 0,001.$$

Os resultados para vários valores de  $\eta$  são apresentados e comparados com os resultados dos principais métodos existentes na literatura de sistemas com atrasos constantes na Tabela 2.9<sup>23</sup>. Analisando os resultados apresentados na Tabela 2.9 é fácil perceber que a partir de um certo número de  $\eta$  subintervalos originados do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ , nosso critério passa a ser consideravelmente menos conservador do que os principais métodos existentes para atrasos constantes, inclusive se aproximando do limite teórico<sup>3</sup>. Fato que ratifica a eficácia de nosso método e a redução de conservadorismo em comparação com outros critérios.

Além disso, nossa análise leva em consideração uma pequena variação para o atraso, sendo desta forma mais abrangente e robusta do que os métodos direcionados para atrasos estritamente constantes. □

**Exemplo 2.3.7 (Sistema incerto – Limite inferior da derivada desconhecido).**

Neste exemplo, consideraremos um sistema linear atrasado sujeito a incertezas de modelo, conforme descrito em (2.17)-(2.18), definido da seguinte maneira,

$$\dot{x}(t) = (A + H\Delta(t)\Xi_A) x(t) + (A_d + H\Delta(t)\Xi_{Ad}) x(t - d(t)),$$

---

<sup>2</sup>O trabalho [82] introduz um método de discretização do atraso constante baseado no trabalho de [4], o qual resulta em vários critérios de estabilidade baseados nesta discretização. Na Tabela 2.9, iremos apresentar os resultados baseados em seu Teorema 1 (Thm 1), o qual não apresenta nenhuma discretização, e em seu Teorema 4 (Thm 4) com o maior número de discretizações apresentadas em [82]. Este resultado é o melhor resultado apresentado em [82], apesar de introduzir mais de 600 novas variáveis à análise.

<sup>3</sup>O resultado referente ao limite teórico apresentado na Tabela 2.9 é definido em [82, 97]. O resultado é obtido através do critério de Nyquist, e representa o limite para o qual o sistema é instável (observe que não há garantias que abaixo deste valor o sistema será estável).

Tabela 2.9: (Exemplo 2.3.6) Valor máximo para o atraso contante  $\tau_c$  afetado por uma função ruído de magnitude 0,001 cuja derivada é 0,001

Métodos	Atraso Máximo $\tau_c$
Xi & Souza (1997, TAC) [104]	0,8571
Niculescu et al. (1995, CDC) [105]	0,99
Moon et al. (2001, Int J Control) [106]	4,3588
Fridman (2002, J Math Analysis Appl) [107]	4,47
Han (2002, Automatica) [108]	4,4721
Xu & Lam (2005, TAC) [109]	4,4721
Gouaisbaut & Peaucelle (2006, IFAC ROCOND06) [82, Thm 1]	4,4721
Gouaisbaut & Peaucelle (2006, IFAC ROCOND06) [82, Thm 4]	6,09
<b>Teorema 2.1.2</b> $\left\{ \begin{array}{l} \eta=1 \\ \eta=2 \\ \eta=4 \\ \eta=6 \\ \eta=12 \\ \eta=20 \\ \eta=30 \end{array} \right.$	4,464
	5,703
	6,040
	6,105
	6,143
	6,150
	6,152
Limite Teórico <sup>3</sup>	6,17

em que

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Xi_A = \begin{bmatrix} 1,6 & 0 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix} \quad e \quad \Xi_{Ad} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix},$$

Assumindo que o atraso mínimo é desconhecido, ou definido por  $\tau_{min} = 0$ , verificaremos a eficácia do método proposto na Seção 2.2 para a determinação do valor máximo do limite do atraso variante  $\tau_{max}$  que mantém a estabilidade assintótica robusta de tal

Tabela 2.10: (Exemplo 2.3.7 – sistema incerto) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $d_{max}$ ,  $\tau_{min}=0$  e para  $d_{min}$  desconhecido

Métodos	$\backslash d_{max}$	0,2	0,4	0,6	0,8
Wu et al. (2004, Automatica) [98]		1,063	0,973	0,873	0,760
Lien (2005, Control Theory Appl) [99]		1,063	0,973	0,873	0,760
Yue & Han (2004, Trans Circ Systems) [110]		1,063	0,973	0,873	0,760
Qian et al. (2009, Appl Math Comp) [111]		1,083	1,023	0,986	0,964
Park & Ko (2007, Automatica) [44]		1,099	1,077	1,070	1,068
<b>Corolário 2.2.1 com <math>\eta=1</math></b>		<b>1,219</b>	<b>1,104</b>	<b>1,089</b>	<b>1,089</b>



sistema. Na Tabela 2.10, apresentamos os resultados da aplicação do Teorema 2.2.1 para vários valores distintos do limite superior do intervalo que delimita a derivada do atraso,  $d_{max}$ . Conforme pode ser observado na Tabela 2.10, e de maneira semelhante ao caso nominal, os resultados são diretamente dependentes do limite superior referente à derivada do atraso, ou seja,  $\tau_{max}$  tende a crescer com  $d_{max} \rightarrow 0$ . Além disso, observa-se que a aplicação de nosso critério resulta em valores consideravelmente menos conservadores do que outros métodos existentes na literatura de sistemas atrasados sujeitos a incertezas de modelo. Em especial para o caso em que  $d_{max} \rightarrow 0$ , pois levamos em consideração uma série de termos e expressões dependentes de  $\dot{d}(t)$  que incorporados à análise reduzem seu conservadorismo. Assim, ilustra-se a validade e a eficácia dos métodos propostos neste capítulo tanto para sistemas nominais como para sistemas incertos.  $\square$

**Exemplo 2.3.8 (Limite inferior da derivada desconhecido (outro sistema incerto)).**

Consideramos um segundo sistema linear atrasado sujeito a incertezas de modelo, conforme descrito em (2.17)-(2.18), definido da seguinte maneira,

$$\dot{x}(t) = (A + H\Delta(t)\Xi_A)x(t) + (A_d + H\Delta(t)\Xi_{Ad})x(t - d(t)),$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -0,5 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0,5 & -1 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Xi_A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \quad e \quad \Xi_{Ad} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix},$$

Assumindo condições semelhantes ao exemplo anterior, i.e., assumindo que o atraso mínimo é desconhecido, ou definido por  $\tau_{min} = 0$ , aplicamos o critério de estabilidade robusto definido no Teorema 2.2.1 de forma a verificarmos os valores máximos de  $\tau_{max}$  para os quais o sistema descrito mantém-se robustamente estável dadas distintas condições referentes a derivada do atraso. Na Tabela 2.11, apresentamos as soluções para o caso em que o limite inferior do intervalo que delimita a derivada,  $d_{min}$ , é desconhecido. Para distintos valores de  $d_{max}$  pode-se observar que nosso critério é sempre menos conservador que os principais critérios existentes na literatura. A contribuição neste caso chega à quase 20% do melhor resultado desenvolvido previamente. Além disso, a fim de ilustrar a validade da análise para distintas condições referentes à derivada do atraso, aplicamos o método desenvolvido na Seção 2.2 para  $\tau_{min}=0.1$  e valores distintos de  $d_{min}$  e  $d_{max}$ , conforme pode ser observado na Tabela 2.12. De maneira análoga ao caso nominal, o valor máximo para o limite superior do atraso,  $\tau_{max}$ , tende a crescer quando  $d_{min} \rightarrow 0$  e quando  $d_{max} \rightarrow 0$ . Neste caso, o intervalo de variação da derivada do atraso é reduzido e, portanto, o atraso variante se assemelha ao atraso constante, menos prejudicial à estabilidade do sistema. Ademais, a mesma análise de conjuntos apresentada no Exemplo 2.3.1 mantém-se válida para o caso robusto.  $\square$

Tabela 2.11: (Exemplo 2.3.8 – sistema incerto) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $d_{max}$ ,  $\tau_{min}=0$  e para  $d_{min}$  desconhecido

Métodos \ $d_{max}$	0,5	0,9	desconhecido
Fridman & Shaked (2002, TAC) [96]	0,182	–	–
Wu et al. (2004, Automatica) [98]	0,243	0,242	0,242
Jing et al. (2004, TAC) [112]	0,243	0,242	0,242
He et al. (2007, TAC) [101]	0,342	0,338	0,336
Qian et al. (2009, Appl Math Comp) [111]	0,379	0,379	0,379
<b>Corolário 2.2.1 com <math>\eta=1</math></b>	<b>0,4471</b>	<b>0,4461</b>	–
<b>Corolário 2.2.2 com <math>\eta=1</math></b>	–	–	<b>0,4461</b>

Tabela 2.12: (Exemplo 2.3.8 – sistema incerto) Valor máximo do limite superior do atraso,  $\tau_{max}$ , para  $\tau_{min}=0.1$  e vários valores de  $d_{min}$  e  $d_{max}$  – Teorema 2.2.1 com  $\eta=2$

$d_{max} \backslash d_{min}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
0,2	0,7374	0,7250	0,7229	0,7226	0,7226	0,7226
0,4	0,6552	0,5884	0,5585	0,5430	0,5330	0,5261
0,6	0,6065	0,5471	0,5221	0,5107	0,5044	0,5004
0,8	0,5846	0,5294	0,5094	0,5016	0,4973	0,4947
1,0	0,5726	0,5197	0,5033	0,4974	0,4941	0,4921
1,2	0,5635	0,5135	0,5000	0,4951	0,4923	0,4904

### 3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE

Sistemas de controle em rede remetem à uma classe de sistemas de controle cujos elementos (plantas, controladores, atuadores e sensores) estão interligados por meio de uma rede de comunicação digital e as informações são trocadas na forma de pacotes de dados [11, 19, 71]. É consideravelmente extenso o número de aplicações que se enquadram como sistemas de controle em rede, e.g., sistemas de controle remoto, sistemas teleoperados, sistemas de larga escala complexos com vários subsistemas, veículos aéreos não-tripulados, robótica colaborativa, automação industrial, processos químicos, controle em rede de sensores e em ambientes inteligentes, etc, [20, 21, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

Não obstante, a inserção de uma rede de comunicação compartilhada na malha de realimentação de sistemas de controle introduz uma série de elementos inesperados, tais como atrasos, perdas e desordenamento de pacotes [11, 18, 13]. Por conseguinte, os desafios referentes à análise de tais sistemas são notavelmente intensificados, visto que estes elementos geralmente induzem à perda de desempenho e, em certos casos, até mesmo à instabilidade [15, 113, 17, 114]. Contudo, visando superar estes desafios, houve na última década uma forte expansão no interesse, na pesquisa e na análise de estabilidade de sistemas de controle em rede na comunidade científica [15, 84, 72].

Neste capítulo, a partir de um modelamento matemático específico que representa sistemas de controle em rede por equações diferenciais atrasadas, torna-se viável a aplicação de técnicas de análise de sistemas sujeitos a atrasos no tempo introduzidas no Capítulo 2. Desta maneira, é apresentado um novo critério de estabilidade assintótica robusta para sistemas de controle em rede sujeitos a atrasos desconhecidos e variantes no tempo, e a perda e desordenamento de pacotes durante a transmissão. As condições de estabilidade são dependentes do atraso e estão escritas na forma de desigualdades matriciais lineares. Os resultados obtidos estipulam um limite máximo para o atraso de transmissão, para o qual o sistema de controle em rede em malha fechada mantém-se estável. A partir da aplicação de técnicas estado-da-arte de análise de sistemas atrasados e da aplicação da nova abordagem de análise introduzida no capítulo anterior, obtemos critérios de estabilidade e de estabilidade robusta superiores aos critérios estado-da-arte existentes na literatura. Esta importante contribuição é demonstrada por meio de exemplos numéricos ao final do capítulo.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. A Seção 3.1 apresenta a descrição dos sistemas de controle em rede através de equações diferenciais atrasadas, levando em consideração atrasos variantes no tempo, perdas e desordenamento de pacotes. Na Seção 3.2, apresentamos um novo critério de estabilidade para tais sistemas, o qual é estendido para lidar com incertezas de modelo na Seção 3.3. Por fim, a análise é enriquecida com uma série de exemplos numéricos que visam ilustrar a eficácia de nossos métodos e demonstrar as vantagens destes em relação aos mais recentes métodos disponíveis na literatura.

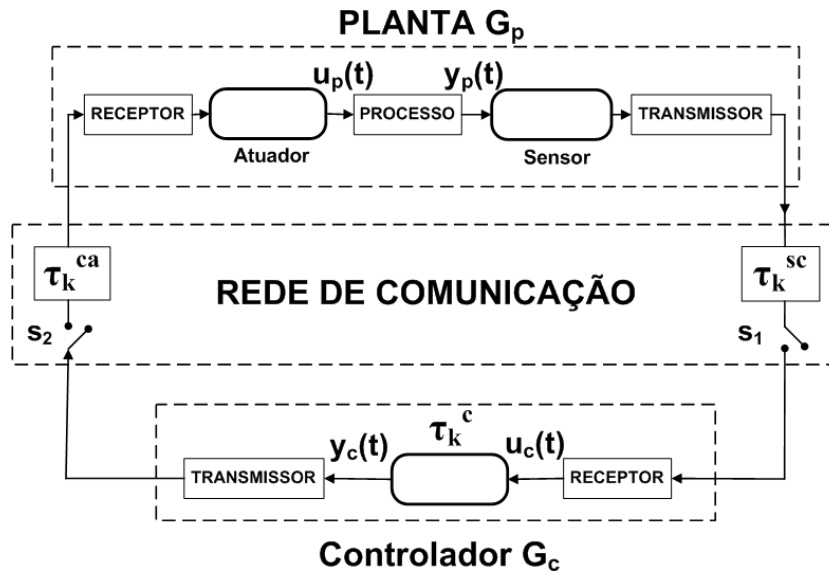


Figura 3.1: Sistema de controle em rede sujeito a perda de pacotes e atrasos de transmissão.

### 3.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Nesta seção, descreveremos e apresentaremos uma representação matemática na forma de equações diferenciais atrasadas para sistemas cuja malha de realimentação é fechada por meio de uma rede de comunicação compartilhada e incerta. Dentre as várias representações possíveis para tais sistemas, e.g., sistemas impulsivos [115, 116, 117, 118], sistemas chaveados [119, 120, 121, 122] etc, optamos pela representação através de equações diferenciais atrasadas, pois esta nos permite analisar questões referentes à estabilidade de sistemas de controle em rede através de abordagens similares às utilizadas para a análise de estabilidade de sistemas de controle sujeitos a atrasos no tempo. Ademais, a modelagem por equações diferenciais atrasadas elimina a restrição, presente em alguns trabalhos, que se refere ao atraso de comunicação como sendo menor do que um período de amostragem [17].

Desta maneira, consideraremos um sistema de controle em rede susceptível a atrasos variantes e desconhecidos, e a perdas e desordenamento de pacotes de transmissão, conforme apresentado na Figura 3.1. Este sistema de controle é constituído por uma planta SLIT e por um módulo controlador conectados através de uma rede de comunicação compartilhada. Toda a comunicação é realizada através de elementos receptores e transmissores, os quais são responsáveis por adquirir e transmitir, respectivamente, os pacotes de dados através da rede de comunicação.

Os módulos de sensoriamento, de atuação e de controle podem ser orientados por relógio ou orientados a evento. Dispositivos orientados por relógio adquirem e/ou transmitem pacotes de dados periodicamente, enquanto os orientados a evento adquirem e/ou transmitem dados de acordo com a ocorrência de eventos específicos. A classificação dos dispositivos por sua orientação depende da estratégia de controle utilizada e das características dos dis-

positivos. Por exemplo, em [123] todos os módulos são orientados por relógio, enquanto em [124, 125], apenas os sensores são orientados por relógio, e em [126, 127] todos os módulos são orientados a evento.

*Hipótese 3.1.1.* Em nosso modelamento, assumiremos módulos sensores orientados por relógio que enviam à rede de comunicação a leitura dos sensores com período de transmissão  $h$ . Os módulos de atuação e de controle são considerados orientados a evento e iniciam o processamento dos novos dados assim que estes são adquiridos pela rede. Ademais, consideraremos a transmissão de pacotes simples, i.e., todos os dados são agrupados em um único pacote a ser transmitido pela rede.  $\square$

No modelamento do sistema de controle em rede consideraremos os seguintes atrasos, conforme apresentados na Figura 3.1:

- $\tau_k^{sc}$ : atraso de transmissão entre o módulo sensor e o módulo de controle para o  $k$ -ésimo pacote;
- $\tau_k^c$ : atraso de computação no módulo de controle para o  $k$ -ésimo pacote;
- $\tau_k^{ca}$ : atraso de transmissão entre o módulo de controle e o módulo de atuação para o  $k$ -ésimo pacote;
- $\tau_k$ : atraso de transmissão total entre o módulo sensor e o módulo de atuação para o  $k$ -ésimo pacote.

Ademais consideraremos a possibilidade de perdas de pacotes, conforme apresentado na Figura 3.1 pelas chaves  $S_1$  e  $S_2$ . Quando a chave está na posição fechada, os pacotes estão aptos a completar a transmissão. Caso contrário, eles serão perdidos.

### 3.1.1 Modelo do sistema

A cada instante de tempo  $nh$ , em que  $h$  é o período de transmissão e  $n \in \mathbb{N}^*$ , o módulo sensor amostra os dados da planta e os envia pela rede para o módulo de controle  $G_c$ . O controlador recebe estes pacotes no instante de tempo  $i_k^c h + \tau_k^{sc}$ , em que o termo  $i_k^c h$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , denota o instante de amostragem do  $k$ -ésimo pacote recebido pelo módulo de controle. Subsequente ao período de computação, o controlador envia o sinal de controle para o atuador a cada instante  $i_k^c h + \tau_k^{sc} + \tau_k^c$ . O termo  $t_k = i_k^a h + \tau_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  determina o instante de tempo no qual o atuador recebe o  $k$ -ésimo sinal de controle, em que  $i_k^a h$  é o instante de amostragem correspondente ao  $k$ -ésimo pacote recebido pelo módulo de atuação e  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}$  é o atraso total de comunicação. O diagrama de tempo mostrado na Figura 3.2 ilustra o fluxo de dados do modelo em questão descrito.

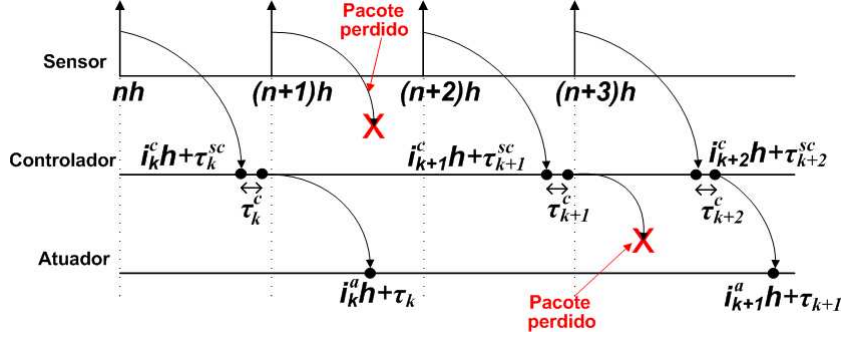


Figura 3.2: Diagrama de tempo para os atrasos de transmissão (se  $n=10$ , por exemplo, então  $i_k^c = 10$ ,  $i_{k+1}^c = 12$ ,  $i_{k+2}^c = 13$  e  $i_k^a = 10$ ,  $i_{k+1}^a = 13$ ).

*Observação 3.1.1.* Não haverá perdas ou desordenamento de pacotes na transmissão de dados entre o módulo sensor e o módulo de atuação se,  $\{i_1^a, i_2^a, \dots, i_n^a, \dots\} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . Todavia, se a  $p$ -ésima amostra foi perdida, então  $\nexists q, q \in \mathbb{N}^*$ , tal que  $i_q^a = p$ . Ademais, nota-se a ocorrência de desordenamento de pacotes quando um pacote chega ao seu destino posteriormente aos seus sucessores, ou seja,  $\exists p, q \in \mathbb{N}^*, p > q$ , tal que  $i_q^a > i_p^a$ . Neste caso, o pacote mais antigo,  $i_p^a$ , é perdido e seus dados são descartados.

O atraso variante de transmissão, o qual engloba os efeitos referentes à perda e/ou desordenamento de pacotes, é suposto desconhecido, porém delimitado de acordo com as premissas descritas na seguinte hipótese.

*Hipótese 3.1.2.* Presume-se a existência das seguintes constantes delimitadoras  $\tau_{max}$  e  $\tau_{min}$ , tal que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tau_{min} \leq \tau_{max}, \\ (i_{k+1}^a - i_k^a)h + \tau_{k+1} &\leq \tau_{max}, \\ \tau_{min} &\leq \tau_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

em que  $\tau_{max}$  denota o limite máximo para o atraso variável induzido pela rede de comunicação entre o módulo sensor e o módulo de atuação. O termo  $\tau_{min}$  denota um limite mínimo para este atraso variável. Ou seja, o atraso variável e desconhecido que engloba atrasos de comunicação e perdas de pacotes é delimitado pelo intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ .  $\square$

A planta é considerada um SLIT com a seguinte representação em espaço de estados

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t), \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t), \quad (3.2)$$

$$x(t) = \rho(t), \quad t \in [-\tau_{max}, 0]$$

em que  $x_p(t) \in \mathbb{R}^{r_x}$  é o vetor de estado da planta,  $u_p(t) \in \mathbb{R}^{r_u}$  e  $y_p(t) \in \mathbb{R}^{r_y}$  são os vetores de entrada e saída da planta, respectivamente, e  $\rho(t)$  é uma função que descreve as condições

iniciais do estado. As matrizes  $A_p$ ,  $B_p$  e  $C_p$  são matrizes conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas.

Considerando o atraso de comunicação entre o módulo sensor e o módulo de controle, o sinal  $u_c(t)$  relativo ao sinal de entrada do controlador pode ser descrito por:

$$u_c(t) = y_p(i_k^c h) = C_p x_p(i_k^c h), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (3.3)$$

em que  $y_p$  é a saída da planta e  $t \in [i_k^c h + \tau_k^{sc}, i_{k+1}^c h + \tau_{k+1}^{sc})$ .

Além disso, utilizaremos estratégia de controle proporcional. Portanto, o ganho constante de realimentação é definido pela matriz  $K$ . Conseqüentemente, o sinal de entrada da planta  $u_p(t)$ , descrito em (3.1), é definido por

$$u_p(t) = y_c(i_k^a h + \tau_k^{sc} + \tau_k^c) = K C_p x_p(i_k^a h), \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (3.4)$$

em que  $y_c$  é a saída do controlador,  $t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$ , e  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}$ .

Não obstante, através da substituição do sinal de entrada da planta, descrito em (3.4), na Equação que descreve o sistema (3.1), podemos inferir sem maiores dificuldades o sistema em malha fechada,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_p K C_p x(i_k^a h) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (3.5)$$

e  $t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$ , em que o atraso  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^c + \tau_k^{ca}$  denota o tempo percorrido entre o instante de amostragem na planta,  $i_{k+1}^a h$ , até o instante no qual o atuador exerce a ação referente ao sinal de controle recebido.

Ademais, ao analisarmos a relação entre o instante de amostragem e o instante no qual o atuador recebe o sinal de controle, observamos que o vetor atrasado em (3.5) pode ser reescrito da seguinte maneira,  $x(i_k^a h) = x(t - [t - i_k^a h])$ . Destarte, podemos definir uma variável de atraso

$$d(t) = t - i_k^a h, \quad (3.6)$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que  $t_k = i_k^a h + \tau_k$ , tal que o sistema (3.1) com malha realimentação fechada por uma rede de comunicação possa ser descrito da seguinte maneira,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)), \quad (3.7)$$

em que  $x(t) = x_p(t)$ ,  $A = A_p$  e  $A_d = B_p K C_p$ . Neste caso, a função  $d(t)$ , definida em (3.6), representa o atraso variante e desconhecido que satisfaz

$$\tau_{min} \leq d(t) \leq \tau_{max}, \quad (3.8)$$

em que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$  são as constantes que delimitam o intervalo de variação do atraso.

É notável que  $d(t)$  é uma função linear diferenciável por partes, cuja derivada

$$\dot{d}(t) = 1, \quad t \neq i_k^a h + \tau_k, \quad (3.9)$$

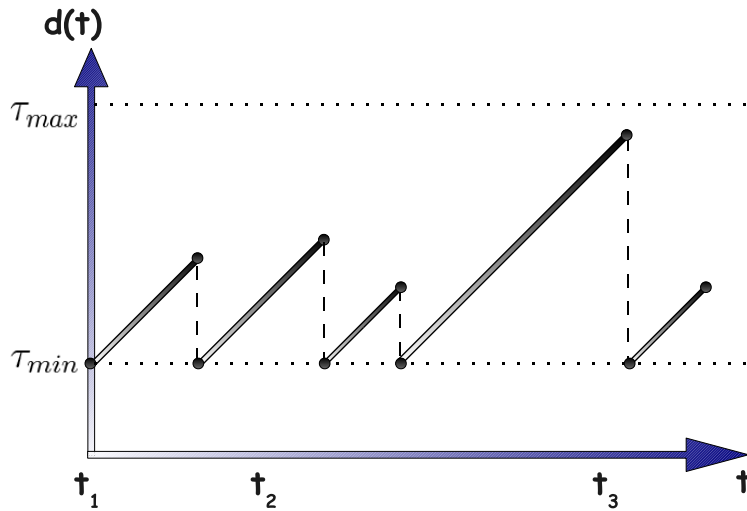


Figura 3.3: Evolução do atraso variante em sistemas de controle em rede.

é definida em todo o intervalo  $[0, \infty)$ , com exceção dos pontos  $t_k = i_k^a h + \tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Portanto, o atraso variante,  $d(t)$ , que satisfaz (3.8) e (3.9) é uma função descontínua nos pontos  $i_k^a h + \tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Desta maneira, considerando as características descritas (3.8) e (3.9) referentes ao atraso variante de transmissão, o qual engloba os efeitos da perda e/ou do desordenamento de pacotes, pode-se concluir que o atraso variante  $d(t)$  em um sistema de controle em rede comporta-se como uma função dente de serra com períodos variantes e limitada por  $\tau_{min}$  e  $\tau_{max}$ , conforme apresentado na Figura 3.3.

### 3.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE

Nesta seção, apresentaremos condições que se satisfeitas estipulam um limite máximo para o atraso variante  $\tau_{max}$ , para qual o sistema de controle em rede em malha fechada mantém-se estável. Ao considerarmos uma representação matemática por equações diferenciais atrasadas para sistemas de controle em rede, conforme apresentado em (3.7), tornamos viável a análise e o desenvolvimento de condições de estabilidade baseadas nos resultados apresentados no capítulo anterior para sistemas com atrasos variantes.

Não obstante, o atraso variante em sistemas de controle em rede possui características distintas e específicas, descritas em (3.8) e (3.9), que não podem ser desconsideradas. Diferentemente da função de atraso  $d(t)$  apresentada no capítulo anterior, a função,  $d(t)$ , referente ao atraso variante de um sistema de controle em rede comporta-se como uma função dente de serra descontínua nos pontos  $i_k^a h + \tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , conforme apresentado na Figura 3.3. Por conseguinte, não podemos utilizar exatamente os mesmos argumentos apresentados no capítulo



anterior para o desenvolvimento de um critério de estabilidade para estes sistemas.

A função candidata de Lyapunov-Krasovskii (2.12), descrita na Subseção 2.1.2, deve ser reavaliada para que possa ser utilizada no contexto de sistemas de controle em rede. Especificamente, os termos que possuem o atraso  $d(t)$  em sua formulação e, por conseguinte, termos cuja derivada apresenta termos ponderados pela derivada do atraso  $\dot{d}(t)$ , i.e.,  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  e  $V_7(t)$ , devem ser reformulados considerando as características específicas do sistema de controle em rede (3.7), e de seu atraso variante (3.8)-(3.9).

Desta maneira, alguns termos, uteis para a análise de sistemas com atrasos variantes, tornam-se desnecessários no contexto de sistemas de controle em rede, como por exemplo,  $V_2(t) = \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} x^T(s)Q_1x(s)ds$ , em (2.12), cuja derivada, considerando as características do atraso variante em um sistema de controle em rede, é definida da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &= x^T(t-\tau_1)Q_1x(t-\tau_1) - \left(1 - \dot{d}(t)\right) x^T(t-d(t))Q_1x(t-d(t)) \\ &= x^T(t-\tau_1)Q_1x(t-\tau_1).\end{aligned}\quad (3.10)$$

Observe que não há nenhuma contribuição para a análise, visto que a derivada de  $V_2(t)$ , em (3.10), resulta em apenas um termo semi-definido positivo. Ademais, a análise similar com a inversão da posição do atraso variante e, portanto, a introdução de termos cuja derivada resulta unicamente em expressões semi-definidas negativas, e.g.,  $\int_{t-\pi}^{t-d(t)} x^T(s)Q_1x(s)ds$ , em que  $\pi \geq d(t)$ , não é factível, pois, não poderíamos assegurar o decréscimo da função de Lyapunov com o tempo. Esta afirmação é ratificada com base na definição da função de atraso  $d(t)=[t-i_k^a h]$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em (3.6), na qual

$$t-d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^-} \Rightarrow i_k^a h, \quad t-d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^+} \Rightarrow i_{k+1}^a h,$$

e, portanto, obtém-se a relação,  $t-d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^+} > t-d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^-}$ . Desta maneira, o termo  $\int_{t-\pi}^{t-d(t)} x^T(s)Q_1x(s)ds$ , para qualquer  $\pi \geq d(t)$ , crescerá monotonicamente nos pontos de interrupção  $t_k$ , ( $k=\{1, 2, \dots\}$ ). Neste mesmo contexto, o termo da função de Lyapunov  $V_1(t)$ , em (2.12), devido a existência das expressões

$$d(t)(P_1 - P_2) \quad \text{e} \quad d(t)(P_3 - P_1), \quad (3.11)$$

só é factível de análise se adicionarmos as restrições,  $P_1 > P_2$  e  $P_3 > P_1$ , pois, caso contrário, o termo  $V_1(t)$  seria monotonicamente crescente nos pontos de interrupção. Não obstante, a maior contribuição deste termo na análise de sistemas com atraso refere-se a inclusão de termos estritamente negativos a partir da derivada de (3.11) para  $P_2 > P_1$  e  $P_1 > P_3$ . Destarte, o termo  $V_1(t)$  será simplificado na análise que se segue para sistemas de controle em rede. Por fim, o último termo contendo expressões ponderadas pelo atraso variante  $d(t)$ , em (2.12), é  $V_7(t)$ . Contudo, a análise deste termo da função de Lyapunov é mais complexa devido a existência das duas classes de termos, descritas anteriormente, os termos que são infactíveis de análise por serem monotonicamente crescentes nos pontos de interrupção e os que não contribuem para a análise no contexto de

sistemas de controle em rede. Primeiramente, ao eliminarmos os termos ineficazes de análise  $\int_{-\tau_2}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_1 - R_3) \dot{x}(s) ds d\beta$  e  $\int_{-\tau_3}^{-d(t)} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds d\beta$ , devemos também eliminar o termo  $\int_{-d(t)}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_3 - R_1) \dot{x}(s) ds d\beta$ , pois, caso contrário, não poderíamos assegurar a continuidade da derivada da função candidata de Lyapunov (2.12), conforme explanado na Subseção 2.1.1, nem fazer suposições acerca dos pontos de descontinuidade. Ademais, analisando o último termo de  $V_7(t)$ , ainda não investigado,  $\int_{-d(t)}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) (R_1 + R_2) \dot{x}(s) ds d\beta$ , observa-se que, ao considerarmos as condições referentes ao atraso variante para sistemas de controle em rede, descritas em (3.8) e (3.9), sua derivada resulta em um único termo estritamente positivo e, portanto, sem contribuições para a análise no contexto de sistemas de controle em rede.

Por conseguinte, dadas as considerações relativas à função candidata de Lyapunov utilizada no capítulo anterior, desenvolveremos uma nova função candidata de Lyapunov-Krasovskii específica para sistemas de controle em rede que considere as características referentes ao seu atraso variante, e a sua derivada, especificadas em (3.8) e (3.9).

Não obstante, antes de apresentarmos a nova função candidata de Lyapunov-Krasovskii, dividiremos o intervalo de variação do atraso  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$  em dois subintervalos igualmente espaçados,  $[\tau_1, \tau_2]$  e  $[\tau_2, \tau_3]$ , em que  $\tau_1 = \tau_{min}$ ,  $\tau_3 = \tau_{max}$ , e  $\tau_2 = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}$ . Desda maneira, o sistema de controle em rede, descrito em (3.7), pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) A_d x(t - d(t)) \\ \quad + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) A_d x(t - d(t)), \\ t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \quad (3.12)$$

em que o atraso  $d(t)$ , definido em (3.6), satisfaz (3.8) e (3.9); e  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  é a função indicadora de  $[\tau_1, \tau_2]$ , i.e.  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 1$ , se  $d(t) \in [\tau_1, \tau_2]$  e  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 0$ , caso contrário. Esta abordagem, conhecida como análise por partes do atraso, segue os mesmos argumentos do método introduzido no capítulo anterior, o qual é detalhadamente analisado na Subseção 2.1.1.

Além disso, a fim de melhorarmos a análise para o caso em que  $\tau_{min} \rightarrow \tau_{max}$ , introduziremos novas variáveis auxiliares estabelecidas por meio do fracionamento do intervalo referente ao limite inferior do atraso variante,  $[0, \tau_{min}]$ . Destarte, definimos as seguintes variáveis de estado auxiliares dependentes de  $\tau_1 = \tau_{min}$ ,

$$x\left(t - i \frac{\tau_1}{\eta}\right), \quad \forall i \in \{0, \dots, \eta\}. \quad (3.13)$$

Desta maneira, considerando a abordagem de análise por partes do atraso, e as características específicas do sistema de controle em rede (3.7), e de seu atraso variante (3.8)-(3.9), introduzimos a seguinte função candidata de Lyapunov-Krasovskii específica para sistemas de controle em rede,

$$V(t) = \sum_{i=1}^6 V_i(t), \quad (3.14)$$

em que

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= x^T(t)Px(t), \\
V_2(t) &= \int_{t-\frac{1}{2}d(t)}^t x^T(s)Q_1x(s)ds, \\
V_3(t) &= \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix} ds, \\
V_4(t) &= \int_{t-\frac{1}{\eta}\tau_1}^t \begin{bmatrix} x(s-\frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(s-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s-\frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(s-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} ds, \\
V_5(t) &= \sum_{k=1}^{\eta} \left(\frac{\tau_1}{\eta}\right) \int_{-\frac{k}{\eta}\tau_1}^{-\frac{k-1}{\eta}\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s)S_k\dot{x}(s)dsd\beta, \\
V_6(t) &= (\tau_2-\tau_1) \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)dsd\beta + (\tau_3-\tau_2) \int_{-\tau_3}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)dsd\beta.
\end{aligned}$$

Observe que se as seguintes condições

$$\begin{aligned}
P > 0, \quad Q_1 \geq 0, \quad Z_1 > 0, \quad Z_2 > 0, \quad S_j > 0, \quad j = \{1, \dots, \eta\}, \\
N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad e \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

forem satisfeitas, então a função candidata de Lyapunov  $V(t)$  em (3.14) é definida positiva,  $t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Desta maneira, assumindo a função descrita em (3.14) como função candidata de Lyapunov, introduzimos novas condições referentes à estabilidade assintótica do sistema de controle em rede descrito em (3.7)-(3.9) com atrasos variáveis e desconhecidos na forma do seguinte teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$  e  $\eta$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$  e  $\eta > 1$ , o sistema de controle em rede apresentado em (3.7) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (3.8)-(3.9) é assintoticamente estável se existirem as matrizes  $P$ ,  $Q_1$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (3.15), e se existirem as matrizes de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{7r_x \times 3r_x}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{7r_x \times 3r_x}$  tal que as seguintes afirmações sejam válidas:*

$$\Omega_{11} < 0; \quad \Omega_{12} < 0; \quad \Omega_{21} < 0; \quad \Omega_{22} < 0; \tag{3.16}$$

em que

$$\Omega_{1m} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_m & \Theta(\eta) \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{2m} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_m & \Theta(\eta) \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix},$$

para  $m = \{1, 2\}$ , e

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta(\eta) = \begin{bmatrix} (M_{12} + S_1) & M_{13} & M_{14} & \dots & M_{1(\eta-1)} & M_{1\eta} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -M_{1\eta}^T & -M_{2\eta}^T & -M_{3\eta}^T & \dots & -M_{(\eta-2)\eta}^T & (-M_{(\eta-1)\eta}^T + S_\eta) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7r_x \times (\eta-1)r_x},$$

$$\Phi(\eta) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ -S_1 - S_2 \end{pmatrix} & (\phi_{12} + S_2) & \phi_{13} & \phi_{14} & \dots & \phi_{1(\eta-2)} & \phi_{1(\eta-1)} \\ * & \begin{pmatrix} \phi_{22} \\ -S_2 - S_3 \end{pmatrix} & (\phi_{23} + S_3) & \phi_{24} & \dots & \phi_{2(\eta-2)} & \phi_{2(\eta-1)} \\ * & * & \begin{pmatrix} \phi_{33} \\ -S_3 - S_4 \end{pmatrix} & (\phi_{34} + S_4) & \dots & \phi_{3(\eta-2)} & \phi_{3(\eta-1)} \\ * & * & * & \begin{pmatrix} \phi_{44} \\ -S_4 - S_5 \end{pmatrix} & \dots & \phi_{4(\eta-2)} & \phi_{4(\eta-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & \begin{pmatrix} \phi_{(\eta-2)(\eta-2)} \\ -S_{(\eta-2)} - S_{(\eta-1)} \end{pmatrix} & \phi_{(\eta-2)(\eta-1)} \\ * & * & * & * & \dots & * & \begin{pmatrix} \phi_{(\eta-1)(\eta-1)} \\ -S_{(\eta-1)} - S_\eta \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

com

$$\phi_{ij} = M_{(i+1)(j+1)} - M_{ij}, \quad \text{em que } i, j = \{1, 2, \dots, (\eta-1)\},$$

$$\Psi^{(1)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{11} - M_{\eta\eta} - S_{\eta} & N_{12} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & N_{22} - N_{11} - Z_2 & -N_{12} + Z_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -N_{22} - Z_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}Q_1 \end{bmatrix},$$

$$\Psi^{(2)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{11} - M_{\eta\eta} - S_{\eta} - Z_1 & N_{12} + Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & N_{22} - N_{11} - Z_1 & -N_{12} & 0 \\ * & * & * & * & * & -N_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}Q_1 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= +M_{11} - S_1 + Q_1, \\ \Psi_{33} &= \sum_{k=1}^{\eta} \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right)^2 S_k + (\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2. \end{aligned} \quad (3.17) \quad \blacksquare$$

#### PROVA

A prova detalhada do Teorema 3.2.1 é apresentada na Seção A.4 no Apêndice A visando à melhor concisão da dissertação e evitando a inclusão de um número excessivo de equações que acabam por desviar a atenção de discussões específicas do tema.

□

*Observação 3.2.1.* Conforme descrito em (3.8)-(3.9), o atraso variante  $d(t)$  em um sistema de controle em rede é diferenciável por partes e, com exceção dos pontos de interrupção, sua derivada é  $\dot{d}(t) = 1$ . Esta informação é ignorada na maioria dos trabalhos que analisam a estabilidade destes sistemas. De fato, apenas os trabalhos de Zhu et al. [84] e Figueredo et al. [72, 73, 71] apresentam resultados que ponderam explicitamente a característica da derivada do atraso em sistema de controle em rede. Não obstante, a fim de considerar explicitamente o atraso variante  $d(t)$  na construção dos termos de Lyapunov-Krasovskii e, por conseguinte, utilizar a informação referente à derivada do atraso, algumas suposições devem ser satisfeitas, incrementando a dificuldade de análise. Neste trabalho, através da abordagem por fracionamento do atraso e da consequente inclusão da variável  $x(t - \frac{d(t)}{2})$ , introduzimos o termo  $V_2(t) = \int_{t - \frac{1}{2}d(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds$ , cuja derivada

$\dot{V}_2(t) = x^T(t)Q_1x(t) - \left(1 - \frac{1}{2}\dot{d}(t)\right) x(t - d(t)/2)^T Q_1x(t - d(t)/2)$  inclui explicitamente a derivada do atraso  $\dot{d}(t) = 1$ . De acordo com a definição de  $d(t) = t - i_k^a h, t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$t - \frac{1}{2}d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^-} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right)t_{k+1} + \frac{1}{2}i_k^a h, \quad t - \frac{1}{2}d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^+} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right)t_{k+1} + \frac{1}{2}i_{k+1}^a h,$$

e, por conseguinte, é fácil verificar que  $t - d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^+} > t - d(t)|_{t \rightarrow t_{k+1}^-}$ . Assim, é notável que o termo  $V_2(t) = \int_{t - \frac{1}{2}d(t)}^t x^T(s)Q_1x(s)ds$ , decresce monotonicamente nos pontos de interrupção  $t_k, (k = \{1, 2, \dots\})$ .

### 3.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE ROBUSTA

Na seção anterior, derivamos condições para a estabilidade assintótica do sistema de controle em rede (3.7), sujeitos a atrasos variantes e desconhecidos, a perdas e desordenamento de pacotes de transmissão. Nas condições de análise, assumimos uma representação matemática exata para o sistema linear descrito. Entretanto, conforme explanado na Seção 2.2, esta suposição é consideravelmente restritiva, visto que representações matemáticas exatas para o sistema real são inactíveis [91, 128]. O modelamento de um sistema real através de uma representação matemática sempre apresentará incertezas quanto aos parâmetros do modelo [92, 129]. Portanto, um sistema de controle deverá sempre possuir alguma propriedade relativa à robustez [128].

Destarte, é fundamental que a análise de estabilidade considere explicitamente estas incertezas de modelo e verifique se todos os sistemas pertencentes ao domínio de incerteza são assintoticamente estáveis [53]. Com este intuito, analisaremos o sistema de controle em rede em malha fechada (3.7) na presença de incertezas de modelo. Neste caso, considere que as matrizes  $A_p, B_p, C_p$  não são exatamente conhecidas, porém pertencem a conjuntos delimitados:  $A_p \in \mathcal{A}_p \subset \mathbb{R}^{r_x \times r_x}, B_p \in \mathcal{B}_p \subset \mathbb{R}^{r_x \times r_u}$  e  $C_p \in \mathcal{C}_p \subset \mathbb{R}^{r_y \times r_x}$ . Então, o sistema (3.7) pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)), \quad (3.18)$$

em que as incertezas  $\Delta A$  e  $\Delta A_d$  são matrizes variantes no tempo com dimensões apropriadas e que satisfazem

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d \end{bmatrix} = H\Delta(t) \begin{bmatrix} \Xi_A & \Xi_{A_d} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

em que  $H, \Xi_A$  e  $\Xi_{A_d}$  são matrizes conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas, e  $\Delta(t)$  representa uma matriz variante no tempo e que, apesar de ser desconhecida, é mensurável à Lebesgue em  $t$  e satisfaz

$$\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I.$$

Por conseguinte, para a análise de estabilidade robusta do sistema de controle em rede sujeito a incertezas de modelo com atraso variante e desconhecido, que engloba os efeitos referentes à perda e desordenamento de pacotes, conforme (3.8) e (3.9), utilizaremos a mesma abordagem de análise por partes do atraso descrita em (3.12). Desta forma, utilizando a função descrita em (3.14) como função candidata de Lyapunov-Krasovskii, derivamos o seguinte critério de estabilidade robusta para sistemas de controle em rede com incertezas de modelo, descrito em (3.18).

**Teorema 3.3.1.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$  e  $\eta$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$  e  $\eta > 1$ , o sistema de controle em rede incerto apresentado em (3.18) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (3.8)-(3.9) e incertezas descritas em (3.19) é assintoticamente robustamente estável se existirem escalares  $\epsilon_i > 0$ ,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  e matrizes  $P$ ,  $Q_1$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (3.15), e se existirem as matrizes de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{7r_x \times 3r_x}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{7r_x \times 3r_x}$  tal que as seguintes afirmações sejam válidas:*

$$\Omega_{11} < 0; \quad \Omega_{12} < 0; \quad \Omega_{21} < 0; \quad \Omega_{22} < 0; \quad (3.20)$$

em que

$$\Omega_{1m} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + F_1 G_1 + (F_1 G_1)^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_m & \Theta(\eta) & F_1 \Gamma_3 H & \epsilon_m \Gamma_{\Xi}^T \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_m I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_m I \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{2m} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)} + F_2 G_2 + (F_2 G_2)^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_m & \Theta(\eta) & F_2 \Gamma_3 H & \epsilon_{(m+1)} \Gamma_{\Xi}^T \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_{(m+1)} I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_{(m+1)} I \end{bmatrix},$$

para  $m = \{1, 2\}$ , e com  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Psi^{(2)}$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  definidos em (3.17), e

$$\Gamma_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\Xi} = \begin{bmatrix} \Xi_A & \Xi_{Ad} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

PROVA

De maneira análoga ao Teorema 2.2.1, o presente Teorema referente à estabilidade assintótica robusta de sistemas de controle em rede é um extensão direta do Teorema 3.2.1

Tabela 3.1: (Exemplo 3.4.1) Valor máximo para o atraso variante  $\tau_{max}$  com  $\tau_{min} = 0$

Métodos	Atraso Máximo $\tau_{max}$
Zhang et al. (2001, Control Syst Magazine) [11]	$4,5 \times 10^{-4}$ s
Park et al. (2002, T Contr Syst Tech) [130]	0,0538 s
Yue et al. (2004, T Circuits-II) [110]	0,8695 s
Naghshabrizi et al. (2008, T I Meas Control) [117]	0,87 s
Yue et al. (2005, Automatica) [83]	0,8871 s
Jiang & Han (2006, Automatica) [131]	0,9412 s
Jiang & Han (2008, Automatica) [80]	1,0081 s
Zhu & Yang (2008, ACC) [124]	1,0081 s
Figueredo et al. (2009, ICCA) [73]	1,0081 s
Zhang et al. (2010, ACC) [81]	1,0239 s
<b>Teorema 3.2.1 com <math>\eta = 1</math></b>	<b>1,0728 s</b>

para o caso em que a representação matemática do sistema não é completamente conhecida. Não obstante, é notável que a dedução do presente Teorema segue os mesmos passos e argumentos apresentados na prova do Teorema 2.2.1, com exceção da análise de convexidade em relação a derivada do atraso (visto que, no contexto de sistemas de controle em rede, a derivada do atraso segue as condições impostas em (3.9)). Por conseguinte, a prova do Teorema 3.3.1 será omitida com o intuito de manter a concisão deste trabalho.

### 3.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, enriquecemos a análise apresentada nas seções anteriores através da utilização de uma série de exemplos numéricos com o objetivo de ilustrar a validade dos critérios propostos neste capítulo referentes à análise de estabilidade e à análise de estabilidade robusta de sistemas de controle em rede sujeitos a atrasos de comunicação variantes e incertos, e a perda e desordenamento de pacotes durante a transmissão.

A seção será dividida em três exemplos numéricos com referência ao método apresentado na Seção 3.2 e ao critério de estabilidade assintótica para sistemas de controle em rede, e em um exemplo adicional com referência ao critério de estabilidade robusta para sistemas de controle em rede incertos apresentado na Seção 3.3. Através destes exemplos, desejamos além de ilustrar a validade dos critérios desenvolvidos para sistemas de controle em rede, comparar nossos resultados com os resultados dos principais critérios existentes na literatura referente à estabilidade de sistemas de controle de rede.

#### *Exemplo 3.4.1.*

*Considere o sistema de controle em rede com atrasos de comunicação variantes e*



Tabela 3.2: (Exemplo 3.4.1) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$

Métodos	$\tau_{min}$	0,01 s	0,05 s	0,10 s	0,15 s	0,20 s
Jiang & Han (2006, Automatica) [131]		0,9421 s	0,9475 s	0,9520 s	0,9586 s	0,9635 s
Jiang & Han (2008, Automatica) [80]		1,0086 s	1,0105 s	1,0132 s	1,0161 s	1,0193 s
Zhang et al. (2010, ACC) [81]		1,0243 s	1,0257 s	1,0274 s	1,0292 s	1,0310 s
<b>Teorema 3.2.1</b>	$\eta=1$	<b>1,0733 s</b>	<b>1,0754 s</b>	<b>1,0784 s</b>	<b>1,0816 s</b>	<b>1,0846 s</b>
	$\eta=2$	<b>1,0733 s</b>	<b>1,0754 s</b>	<b>1,0784 s</b>	<b>1,0817 s</b>	<b>1,0850 s</b>
	$\eta=6$	<b>1,0733 s</b>	<b>1,0754 s</b>	<b>1,0784 s</b>	<b>1,0818 s</b>	<b>1,0851 s</b>

incertos descrito em (3.7)-(3.9), com a seguinte configuração,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,375 & -1,15 \end{bmatrix} x(t - d(t)).$$

Assumindo que o atraso mínimo é desconhecido, ou definido por  $\tau_{min} = 0$ , aplicamos o Teorema 3.2.1 referente à estabilidade assintótica de sistemas de controle em rede. Como resultado, obtemos o valor máximo para o limite superior do atraso variante  $\tau_{max}$ , para o qual o sistema de controle em rede descrito acima mantém-se estável. Na Tabela 3.1, apresentamos este resultado e comparamos com os resultados dos principais métodos existentes na literatura de sistemas de controle em rede. Como pode ser observado a partir dos resultados, nosso critério é menos conservador do que os métodos estado-da-arte conhecidos da literatura.

Não obstante, visando analisar a influência do incremento de  $\tau_{min}$ , aplicamos o critério apresentado no Teorema 3.2.1 para vários valores de  $\tau_{min}$  com vários valores distintos de  $\eta$ , ou seja, com divisões distintas do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ . Na Tabela 3.2, apresentamos os resultados obtidos considerando  $\tau_{min} = \{0,01; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20\}$ , e, então, comparamos estes resultados com os resultados dos principais métodos existentes na literatura de sistemas de controle em rede. É notável que ao incrementarmos os valores de  $\tau_{min}$  as contribuições de outros critérios são mantidas quase que iguais, enquanto que utilizando nosso critério obtemos valores superiores para o valor máximo do atraso variante,  $\tau_{max}$ .

Por fim, comparamos nosso resultado para o caso em que o atraso é praticamente constante, ou seja, para o caso em que  $\tau_{min} \rightarrow \tau_{max}$ . De fato, podemos considerar um atraso constante porém afetado por pequenas incertezas e pequenos ruídos. Neste caso consideraremos pequenos ruídos de magnitude 0,001. Desta forma, podemos reescrever este atraso, como um atraso variante definido em (3.8),

$$\tau_c - 0,001 \leq d(t) \leq \tau_c + 0,001.$$

Os valores máximos para  $\tau_c$  obtidos através da aplicação do Teorema 3.2.1 com  $\eta = \{1, 2, 6, 12\}$  são 1,0747 s, 1,1424 s, 1,1630 s e 1,1649 s, respectivamente. Ao comparar-

Tabela 3.3: (Exemplo 3.4.2) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$

Métodos	$\tau_{min}$	0 s	0,1 s	0,2 s	0,3 s	0,4 s
Yue et al.(2005, Automatica) [83]		0,82 s	0,89 s	0,96 s	1,04 s	1,13 s
He et al. (2007, Automatica) [86]		0,92 s	0,95 s	1,02 s	1,09 s	1,16 s
Zhu & Yang (2008, ACC) [124]		1,09 s	1,10 s	1,12 s	1,14 s	1,17 s
<b>Teorema 3.2.1</b>	$\eta=1$	1,702 s	1,700 s	1,705 s	1,730 s	1,773 s
	$\eta=2$	1,702 s	1,701 s	1,709 s	1,738 s	1,784 s
	$\eta=3$	1,702 s	1,701 s	1,710 s	1,739 s	1,785 s
	$\eta=6$	1,702 s	1,701 s	1,710 s	1,740 s	1,787 s

mos com o melhor resultado na literatura (até o presente momento), 1,0758 s em [132], torna-se claro os benefícios da aplicação de nosso método, o qual além de apresentar resultados superiores, é mais abrangente e robusto do que [132] por considerar pequenas incertezas e variações sobre o atraso constante. Além disso, nota-se que neste caso obtemos o máximo das contribuições advindas da abordagem por fracionamento do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ .  $\square$

#### Exemplo 3.4.2.

Neste exemplo, consideraremos um segundo sistema de controle em rede com atrasos de comunicação variantes e incertos definido da seguinte maneira,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1,4 & 0 \\ -0,8 & -1,5 \end{bmatrix} x(t - d(t)). \quad \square$$

Primeiramente, de maneira análoga ao Exemplo 3.4.1, iremos considerar um conjunto de valores para o limite inferior do atraso variante da seguinte forma,  $\tau_{min} = \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4\}$ . Então, aplicamos o Teorema 3.2.1 com diversos valores distintos para  $\eta$  de forma a obtermos o valor máximo para o limite superior do atraso variante  $\tau_{max}$  que mantém a estabilidade do sistema de controle em rede. Os resultados são apresentados na Tabela 3.3 e comparados com os resultados dos principais métodos existentes na literatura de sistemas de controle em rede. É fácil perceber que nosso critério apresenta resultados consideravelmente superiores do que os resultados advindos dos critérios desenvolvidos anteriormente. O incremento no valor máximo do atraso variante ( $\tau_{max}$ ) ultrapassa os 50% para qualquer valor de  $\tau_{min}$  em comparação com o melhor resultado na literatura atual, conforme pode ser observado na Tabela 3.3.

Em seguida, aplicamos o Teorema 3.2.1 para um conjunto muito maior de valores de  $\tau_{min}$ . Os resultados são apresentados na Tabela 3.4, na qual relacionamos os valores máximos para o atraso variante ( $\tau_{max}$ ) com os valores definidos de  $\tau_{min}$  para quatro valores distintos de  $\eta = \{1, 2, 6, 12\}$ . Desta forma, é fácil verificar que de maneira análoga ao caso de sistemas com atrasos no tempo, o incremento do número de divisões

Tabela 3.4: (Exemplo 3.4.2) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para diversos valores de  $\tau_{min}$  utilizando o Teorema 3.2.1 com  $\eta = \{1, 2, 6, 12\}$

$\tau_{min} \backslash \eta$	0, 1	0, 2	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7	0, 8	0, 9	1, 0
1	1, 700	1, 705	1, 730	1, 773	1, 830	1, 898	1, 977	2, 064	2, 158	2, 257
2	1, 701	1, 709	1, 738	1, 784	1, 843	1, 912	1, 989	2, 073	2, 163	2, 258
6	1, 701	1, 710	1, 740	1, 787	1, 846	1, 915	1, 993	2, 076	2, 166	2, 260
12	1, 701	1, 710	1, 740	1, 788	1, 847	1, 916	1, 994	2, 077	2, 167	2, 261

Tabela 3.5: (Exemplo 3.4.3) Valor máximo de  $\tau_{max}$  para vários valores de  $\tau_{min}$

Métodos	$\tau_{min}$	1 s	2 s	3 s	4 s	5 s
Shao (2009, Automatica) [45]		1, 617	2, 480	3, 389	4, 325	5, 277
Sun et al. (2010, Automatica) [93]		1, 620	2, 488	3, 403	4, 342	5, 297
<b>Teorema 3.2.1</b>	$\eta=1$	1, 792 s	2, 609 s	3, 490 s	4, 406 s	5, 345 s
	$\eta=2$	1, 797 s	2, 624 s	3, 514 s	4, 437 s	5, 380 s
	$\eta=6$	1, 798 s	2, 628 s	3, 520 s	4, 444 s	5, 388 s
	$\eta=12$	1, 798 s	2, 628 s	3, 521 s	4, 445 s	5, 390 s

do intervalo  $[0, \tau_{min}]$  produz resultados superiores, em especial para os casos em que  $\tau_{min} \rightarrow \tau_{max}$ .

### Exemplo 3.4.3.

Considere agora o seguinte sistema de controle em rede sujeito a atrasos de comunicação variantes e incertos,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(t - d(t)).$$

Aplicando o Teorema 3.2.1 para um conjunto de valores de  $\tau_{min} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , obtemos os valores máximos permitidos para o limite superior do atraso variante  $\tau_{max}$  de forma que o sistema continue estável. Os resultados são apresentados na Tabela 3.5 e comparados com alguns métodos existentes na literatura. Observa-se que utilizando o critério desenvolvido neste capítulo obtemos resultados consideravelmente superiores aos resultados apresentados em [45, 93]. Além disso, conforme discutido previamente, é notável a contribuição referente ao acréscimo do número de  $\eta$  subintervalos originados do intervalo  $[0, \tau_{min}]$  introduzida neste trabalho através da abordagem por fracionamento de intervalos, em especial para os casos em que  $\tau_{min} \rightarrow \tau_{max}$ .  $\square$

### Exemplo 3.4.4 (Sistema de controle em rede incerto).

Tabela 3.6: (Exemplo 3.4.4) Valor máximo para o atraso variante  $\tau_{max}$  com  $\tau_{min} = 0$

Métodos	Atraso Máximo $\tau_{max}$
Su & Huang (1992, TAC) [133]	0.1575 s
Xu (1994, TAC) [134]	0.1575 s
Jing (2004, Tese) [135]	0.3916 s
Yan et al. (2008, WCICA) [85]	0.6090 s
Figueredo et al. (2009, ICCA) [73]	0,6847 s
<b>Teorema 3.2.1 com <math>\eta = 1</math></b>	<b>1,345 s</b>

Neste exemplo, consideraremos um sistema de controle em rede sujeito a incertezas de modelo, conforme descrito em (3.18)-(3.19), definido da seguinte maneira,

$$\dot{x}(t) = (A + H\Delta(t)\Xi_A)x(t) + (A_d + H\Delta(t)\Xi_{Ad})x(t - d(t)),$$

em que  $\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I$ , e

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \Xi_A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \quad e \quad \Xi_{Ad} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

Assumindo que o atraso mínimo é desconhecido, ou definido por  $\tau_{min} = 0$ , aplicamos o Teorema 3.3.1, referente à estabilidade robusta de sistemas de controle em rede incertos, de maneira a determinarmos um valor máximo para o limite do atraso variante  $\tau_{max}$ , para o qual o sistema de controle em rede acima mantém-se robustamente estável. Os resultados são então apresentados na Tabela 3.6 onde são comparados com outros métodos na literatura. A partir da análise da Tabela 3.6 é fácil perceber que nosso critério de estabilidade robusta é consideravelmente menos conservador do que os métodos anteriores. Neste caso, a aplicação do Teorema 3.2.1 produz resultados superiores em até 90% em relação aos resultados de métodos estado-da-arte conhecidos da literatura. Desta maneira, verifica-se a validade e a eficácia dos critérios de estabilidade e estabilidade robusta propostos neste capítulo tanto para sistemas de controle em rede com/sem incertezas de modelo.  $\square$

## 4 PROJETO DE CONTROLADORES $H_\infty$ PARA SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE

Neste capítulo, abordaremos o problema de análise de desempenho de sistemas de controle em rede com atrasos variantes no tempo e incertezas de modelo, conforme apresentado na Figura 3.1 e na Seção 3.3. Nosso objetivo é a atenuação de perturbações exógenas de acordo com o critério  $H_\infty$  sobre a saída do sistema em malha fechada. Além disso, desejamos estabelecer um critério para a síntese de controladores robustos que assegurem a estabilidade assintótica e o bom desempenho relativo a atenuação de perturbações no sentido  $H_\infty$ .

No Capítulo 3, desenvolvemos condições para a análise de estabilidade robusta de sistemas de controle em rede com atrasos variantes no tempo e incertezas de modelo. Contudo, assumimos um controlador estabelecido *a priori* à análise de estabilidade. Assim, podemos projetar um controlador ótimo para a análise de um sistema na ausência de uma rede de comunicação, i.e., sem atrasos ou perda de pacotes. Contudo, por mais eficaz que seja o controlador, ao ser utilizado considerando condições não-ideias referentes à rede de comunicação suas propriedades de desempenho e estabilidade não serão válidas. Inclusive, o controlador ótimo projetado para um sistema sem atrasos de comunicação pode levar o sistema à instabilidade dadas certas condições de atraso e perda de pacotes. Neste contexto, é de extrema importância levar em consideração as propriedades da rede de comunicação para a síntese de controladores de estabilização.

A análise de estabilização é, reconhecidamente, um problema fundamental na teoria de controle [136]. O projeto de controladores considerando a análise de desempenho de acordo com o critério  $H_\infty$  é conveniente para garantir estabilidade robusta de sistemas incertos, para rejeição de distúrbios na forma de sinais com energia limitada e para expressar especificações no domínio da frequência tais como faixa de passagem e ganho em baixas frequências [137]. A otimização de sistemas por  $H_\infty$  originou-se do problema de reduzir a sensibilidade à perturbações de sistemas de controle realimentados [138, 139]. De maneira sucinta, o principal objetivo do critério de otimização  $H_\infty$  é a síntese de controladores que estabilizem os pontos de equilíbrio  $x_e$  de um sistema dinâmico e além disso, quando o sistema se encontrar neste ponto de equilíbrio, reduzam os efeitos de perturbações (de qualquer tipo desde que possuam energia finita) sobre uma saída  $z(t)$  regulada [138]. Uma análise mais detalhada sobre este critério foge ao escopo do trabalho, porém pode ser encontrada em [138, 140].

Em particular, o problema de síntese de controladores e de análise de desempenho de acordo com o critério  $H_\infty$  para sistemas de controle em rede é um tema bastante recente. Entre os trabalhos pioneiros, Lin, Zhai, and Antsaklis [141], apresentaram um critério de estabilidade com análise de desempenho utilizando uma abordagem de sistemas chaveados, porém neste trabalho não consideram incertezas de modelo, atrasos entre o controlador e o

atuador, nem a síntese de controladores. Yue et al. [83] apresentam um trabalho pioneiro em que integram o projeto de controladores com análise de desempenho  $H_\infty$ . Jiang et al. [125] apresentam outra importante contribuição à análise de estabilização  $H_\infty$  de NCSs através da introdução técnicas de análise menos conservadoras para a solução do problema envolvendo BMIs (do inglês *bilinear matrix inequalities*).

Neste contexto, apresentamos na Seção 4.2, um novo critério de estabilidade robusta para sistemas de controle em rede com análise de desempenho segundo o critério  $H_\infty$ . A abordagem difere-se dos métodos estado-da-arte conhecidos da literatura no sentido que a análise é baseada em técnicas avançadas de análise para sistemas atrasados e nos resultados apresentados no Capítulo 3 e, portanto, resulta em um critério consideravelmente menos conservador. A partir deste resultado, apresentamos, na Seção 4.3, uma proposta para a síntese de controladores robustos  $H_\infty$  que garantam a estabilidade assintótica e o bom desempenho à atenuação de sinais de perturbação sobre a saída do NCS. Para a solução do problema de estabilização, propomos duas abordagens de análise inéditas. Primeiro, utilizamos a abordagem de análise comumente utilizada na literatura que exige uma seleção de parâmetros previamente à aplicação do método. Porém, inovamos esta análise com a introdução do algoritmo de busca heurística *simulated annealing*. Na segunda abordagem, apresentamos o método poderoso de linearização por complementaridade cônica [142, 143]. Este método é utilizado pela primeira vez para a solução de problemas complexos envolvendo um grande número de variáveis. Além disso, apresentamos na Seção 4.4 uma extensão das estratégias de controle desenvolvidas na Seção 4.3 para a síntese de controladores robustos  $H_\infty$  para seguimento de trajetória com atenuação de perturbações sobre o erro de rastreamento. Por fim, a análise é enriquecida com uma série de exemplos numéricos (*benchmarks* típicos da área) que ilustram a eficácia dos critérios propostos e demonstram as vantagens destes em relação aos principais métodos estado-da-arte da literatura.

## 4.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA E PREÂMBULO

Neste capítulo, deveremos considerar um sistema de controle em rede em malha fechada, conforme apresentado na Figura 3.1, sujeito a perdas e desordenamento de pacotes, atrasos variantes e desconhecidos e a incertezas de modelo. Os elementos transmissores e receptores dos módulos de sensorialmente, de controle e de atuação assumem condições e orientações conforme as premissas estipuladas na Hipótese 3.1.1.

O fluxo referente à transmissão de dados segue a mesma estrutura apresentada na Figura 3.2. O termo  $nh$ , em que  $h$  é o período de transmissão e  $n \in \mathbb{N}^*$ , corresponde ao instante de transmissão da  $n$ -ésima amostra de dados do módulo sensor. Enquanto o termo  $i_k^a$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , é um número inteiro correspondente ao número da  $n$ -ésima amostra carregada pelo  $k$ -ésimo pacote de dados recebido pelo módulo atuador. A ocorrência de perdas e/ou desordenamento

de pacotes de dados é descrita conforme a Observação 3.1.1, e seus efeitos e consequências são englobados na análise do atraso de comunicação. Este atraso, por sua vez, é suposto delimitado por constantes conforme descrito nas premissas da Hipótese 3.1.2.

O sistema que queremos controlar através da rede de comunicação, conforme ilustrado na Figura 3.1, é um SLIT com a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + B_\omega\omega(t), \\ z(t) &= (C + \Delta C)x(t) + (D + \Delta D)u(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^{r_x}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{r_u}$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}^{r_z}$  são os vetores referentes ao estado, à entrada e à saída a ser controlada, respectivamente. O vetor  $\omega(t) \in \mathbb{R}^{r_w}$  refere-se ao sinal de perturbação exógena, o qual assume-se pertencer a  $L_2[0, \infty)$ . As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_\omega$ ,  $C$  e  $D$  são matrizes conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas e as incertezas  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  e  $\Delta D$  correspondem a matrizes variantes no tempo com dimensões apropriadas e que satisfazem

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} &= H_1\Delta(t) \begin{bmatrix} \Xi_A & \Xi_B \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} &= H_2\Delta(t) \begin{bmatrix} \Xi_C & \Xi_D \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{4.2}$$

em que  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $\Xi_A$ ,  $\Xi_B$ ,  $\Xi_C$  e  $\Xi_D$  são matrizes conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas, e  $\Delta(t)$  representa uma matriz variante no tempo e que, apesar de ser desconhecida, é mensurável à Lebesgue em  $t$  e satisfaz

$$\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I.\tag{4.3}$$

O problema de estabilização robusta é então abordado através da utilização da estratégia de controle por realimentação de estados com  $u(t)=Kx(t)$ , em que  $K \in \mathbb{R}^{r_u \times r_x}$ , é o ganho do controlador a ser calculado e que garante a estabilidade robusta do sistema (4.1) sujeito a atrasos variantes que satisfazem as premissas da Hipótese 3.1.2. Por conseguinte, se considerarmos o efeito da rede de comunicação e o atraso de comunicação entre o módulo sensor e o módulo atuador, o sinal de controle aplicado ao sistema, constante nos intervalos  $[i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$ , i.e., nos intervalos entre o recebimento de distintos sinais de controle pela planta, é definido por

$$u(t) = Kx(i_k^a h), \quad t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^*\tag{4.4}$$

Por conseguinte, através da combinação direta de (4.1) e (4.4), o sistema em malha fechada é definido da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)Kx(i_k^a h) + B_\omega\omega(t), \\ z(t) &= (C + \Delta C)x(t) + (D + \Delta D)Kx(i_k^a h),\end{aligned}\tag{4.5}$$

com  $t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Ademais, dada a relação entre o instante de amostragem e o instante no qual o atuador recebe o sinal de controle, observa-se a validade da expressão  $x(i_k^a h) = x(t - [t - i_k^a h])$ . Desta maneira, podemos definir uma variável de atraso

$$d(t) = t - i_k^a h, \quad (4.6)$$

com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que  $t_k = i_k^a h + \tau_k$ , tal que o sistema em malha fechada apresentado em (4.5) possa ser reescrito da seguinte maneira,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A) x(t) + (B + \Delta B) K x(t-d(t)) + B_\omega \omega(t), \\ z(t) = (C + \Delta C) x(t) + (D + \Delta D) K x(t-d(t)), \\ x(t) = \rho(t), \end{cases} \quad t \in [-\tau_{max}, 0] \quad (4.7)$$

em que  $\rho(t)$  é uma função que descreve as condições iniciais do estado; e o atraso variável definido em (4.6) satisfazendo

$$\tau_{min} \leq d(t) \leq \tau_{max}, \quad (4.8)$$

em que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$  são as constantes que delimitam o intervalo de variação do atraso. Além disso, o atraso variante  $d(t)$  é uma função linear diferenciável por partes, cuja derivada

$$\dot{d}(t) = 1, \quad t \neq i_k^a h + \tau_k, \quad (4.9)$$

é definida em todo o intervalo  $[0, \infty)$ , com exceção dos pontos de interrupção  $t_k = i_k^a h + \tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Portanto, o atraso variante de transmissão,  $d(t)$ , o qual engloba os efeitos da perda e/ou do desordenamento de pacotes, é uma função descontínua nos pontos  $i_k^a h + \tau_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  que comporta-se como uma função dente de serra limitada por  $\tau_{min}$  e  $\tau_{max}$ , conforme apresentado na Figura 3.3.

Não obstante, o principal objetivo deste capítulo refere-se a análise de desempenho e a síntese de controladores que garantam a estabilidade assintótica e o bom desempenho relativo à atenuação de sinais de perturbação da saída de sistemas de controle em rede sujeitos a perdas e/ou desordenamento de pacotes, a atrasos variantes e desconhecidos, e a incertezas de modelo. Para tal, a seguinte definição, referente à análise de estabilidade com desempenho garantido segundo o critério  $H_\infty$ , será utilizada no restante do capítulo.

**Definição 4.1.1.** *Para um escalar predefinido  $\gamma > 0$ , o sistema de controle em rede em malha fechada definido em (4.7) é assintoticamente e robustamente estável com norma  $H_\infty$  limitada em  $\gamma$ , se existir uma estratégia de controle  $u(t)$  tal que as seguintes condições sejam satisfeitas*

1. *O sistema em malha fechada (4.7) é assintoticamente e robustamente estável na ausência de perturbações exógenas,  $\omega(t) \equiv 0$ ;*
2. *Considerando condições iniciais nulas, os efeitos da perturbação sobre a saída do sistema (4.7) são atenuados abaixo de um nível desejado,  $\gamma$ , segundo a norma  $H_\infty$ ,  $\|z(t)\| \leq \gamma \|\omega(t)\|$ , para qualquer perturbação não-nula,  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ .  $\square$*



## 4.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO POR $H_\infty$

Nesta seção, derivaremos condições que se satisfeitas garantem a estabilidade assintótica e robusta do sistema de controle em rede (4.7)-(4.9) com matriz de ganho  $K$  previamente estabelecida e desempenho relativo a atenuação de perturbações exógenas sobre sua saída garantido de acordo com o critério  $H_\infty$ . Para tal, utilizaremos a Definição 4.1.1 com as técnicas referentes à análise de estabilidade para sistemas de controle em rede desenvolvidas no Capítulo 3.

Primeiramente, consideremos o atraso variante no intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ . Este intervalo será dividido em dois subintervalos, de maneira análoga a (3.12). Destarte, reescreveremos o sistema (4.7) da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = (A + \Delta A) x(t) + B_\omega \omega(t) + \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) (B + \Delta B) K x(t-d(t)) \\ \quad + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) (B + \Delta B) K x(t-d(t)), \\ z(t) = (C + \Delta C) x(t) + \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) (D + \Delta D) K x(t-d(t)) \\ \quad + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) (D + \Delta D) K x(t-d(t)), \end{array} \right. \quad (4.10)$$

$$t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

em que  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  é a função indicadora de  $[\tau_1, \tau_2]$ , i.e.  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 1$ , se  $d(t) \in [\tau_1, \tau_2]$  e  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 0$ , caso contrário. O cerne desta análise referente a partição do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ , conhecida como análise por partes do atraso, consiste em estabelecer diferentes condições de análise para cada subintervalo. O conceito e os benefícios referentes a esta abordagem foram detalhadamente analisados na Subseção 2.1.1.

Desta maneira, definimos a seguinte função candidata de Lyapunov-Krasovskii,

$$V(t) = \sum_{i=1}^5 V_i(t), \quad (4.11)$$

em que

$$\begin{aligned} V_1(t) &= x^T(t) P x(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau_2+\tau_1) \end{bmatrix} ds, \\ V_3(t) &= \int_{t-\frac{1}{\eta}\tau_1}^t \begin{bmatrix} x(s - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(s - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(s - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} ds, \\ V_4(t) &= \sum_{k=1}^{\eta} \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right) \int_{-\frac{k}{\eta}\tau_1}^{-\frac{k-1}{\eta}\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) S_k \dot{x}(s) ds d\beta, \\ V_5(t) &= (\tau_2 - \tau_1) \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\beta + (\tau_3 - \tau_2) \int_{-\tau_3}^{-\tau_2} \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\beta. \end{aligned}$$

Observe que a função (4.11) é equivalente à função candidata (3.14) apresenta no capítulo anterior, com excessão do termo  $V_2(t)$  em (3.14). Desta maneira, as mesmas restrições impostas em (3.15) implicam na positividade da função candidata (4.11),  $t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Não obstante, desejamos estabelecer uma função candidata contínua em  $t$  para que as condições impostas na Definição 4.1.1 possam ser satisfeitas. Neste contexto, o termo  $V_2(t)$  em (3.14) foi eliminado da análise devido à descontinuidade que este termo impõe sobre a função candidata de Lyapunov, conforme explanado na Observação (3.2.1).

Assim, assumindo a função descrita em (4.11) como a função candidata de Lyapunov, introduzimos condições referentes a estabilidade assintótica robusta do sistema de controle em rede incerto (4.7)-(4.9) com análise de desempenho referente à saída do sistema satisfazendo o critério  $H_\infty$ .

**Teorema 4.2.1.** *Dada a matriz referente ao ganho do controlador em malha fechada  $K$ , e os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$ ,  $\eta > 1$  e  $\gamma > 0$ , o sistema de controle em rede incerto apresentado em (4.7) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (4.8)-(4.9) e incertezas descritas em (4.2) é assintoticamente e robustamente estável com uma norma  $H_\infty$  limitada em  $\gamma$ , se existirem escalares  $\epsilon_{i1} > 0$  e  $\epsilon_{i2} > 0$ ,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  e se existirem matrizes  $P$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo*

$$P > 0, \quad Z_1 > 0, \quad Z_2 > 0, \quad S_j > 0, \quad j = \{1, \dots, \eta\},$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad e \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.12)$$

e se existirem as matrizes de ponderação livre  $\bar{F}_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times r_x}$ ,  $\bar{F}_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times r_x}$ ,  $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$  e  $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$ , tal que as seguintes afirmações sejam válidas:

$$\Sigma_{11} < 0; \quad \Sigma_{12} < 0; \quad \Sigma_{21} < 0; \quad \Sigma_{22} < 0, \quad (4.13)$$

em que

$$\Sigma_{1m} = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + (\mathcal{F}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \mathcal{F}_1^T) + (\bar{F}_1 G + G^T \bar{F}_1^T) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_m & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega & \Gamma_Z^T & \Gamma_{\Delta_m} \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_m \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{2m} = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + (\mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T) + (\bar{\mathcal{F}}_2 \mathcal{G} + \mathcal{G}^T \bar{\mathcal{F}}_2^T) & (\tau_3 - \tau_2) \mathcal{F}_2 \Gamma_m & \Theta(\eta) & \bar{\mathcal{F}}_2 B_\omega & \Gamma_Z^T & \Gamma_{\Delta(m+2)} \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_{(m+2)} \end{bmatrix},$$

para  $m = \{1, 2\}, e$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}; \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \mathcal{G} &= \begin{bmatrix} A & BK & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_Z = \begin{bmatrix} C & DK & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \Gamma_{\Xi_1} &= \begin{bmatrix} \Xi_A & \Xi_B K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_{\Xi_2} = \begin{bmatrix} \Xi_C & \Xi_D K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_H &= \begin{bmatrix} 0 & H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathcal{E}_1 &= -diag\{\epsilon_{11}I, \epsilon_{12}I, \epsilon_{11}I, \epsilon_{12}I\}; & \Gamma_{\Delta_1} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_1 H_1 & 0 & \epsilon_{11} \Gamma_{\Xi_1}^T & \epsilon_{12} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \\ \mathcal{E}_2 &= -diag\{\epsilon_{21}I, \epsilon_{22}I, \epsilon_{21}I, \epsilon_{22}I\}; & \Gamma_{\Delta_2} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_1 H_1 & 0 & \epsilon_{21} \Gamma_{\Xi_1}^T & \epsilon_{22} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \\ \mathcal{E}_3 &= -diag\{\epsilon_{31}I, \epsilon_{32}I, \epsilon_{31}I, \epsilon_{32}I\}; & \Gamma_{\Delta_3} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_2 H_1 & 0 & \epsilon_{31} \Gamma_{\Xi_1}^T & \epsilon_{32} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \\ \mathcal{E}_4 &= -diag\{\epsilon_{41}I, \epsilon_{42}I, \epsilon_{41}I, \epsilon_{42}I\}; & \Gamma_{\Delta_4} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_2 H_1 & 0 & \epsilon_{41} \Gamma_{\Xi_1}^T & \epsilon_{42} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\Theta(\eta) = \begin{bmatrix} (M_{12} + S_1) & M_{13} & M_{14} & \dots & M_{1(\eta-1)} & M_{1\eta} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -M_{1\eta}^T & -M_{2\eta}^T & -M_{3\eta}^T & \dots & -M_{(\eta-2)\eta}^T & (-M_{(\eta-1)\eta}^T + S_\eta) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6r_x \times (\eta-1)r_x},$$

$$\Phi(\eta) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ -S_1 - S_2 \end{pmatrix} & (\phi_{12} + S_2) & \phi_{13} & \phi_{14} & \dots & \phi_{1(\eta-2)} & \phi_{1(\eta-1)} \\ * & \begin{pmatrix} \phi_{22} \\ -S_2 - S_3 \end{pmatrix} & (\phi_{23} + S_3) & \phi_{24} & \dots & \phi_{2(\eta-2)} & \phi_{2(\eta-1)} \\ * & * & \begin{pmatrix} \phi_{33} \\ -S_3 - S_4 \end{pmatrix} & (\phi_{34} + S_4) & \dots & \phi_{3(\eta-2)} & \phi_{3(\eta-1)} \\ * & * & * & \begin{pmatrix} \phi_{44} \\ -S_4 - S_5 \end{pmatrix} & \dots & \phi_{4(\eta-2)} & \phi_{4(\eta-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & \begin{pmatrix} \phi_{(\eta-2)(\eta-2)} \\ -S_{(\eta-2)} - S_{(\eta-1)} \end{pmatrix} & \phi_{(\eta-2)(\eta-1)} \\ * & * & * & * & \dots & * & \begin{pmatrix} \phi_{(\eta-1)(\eta-1)} \\ -S_{(\eta-1)} - S_\eta \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

com

$$\phi_{ij} = M_{(i+1)(j+1)} - M_{ij}, \quad \text{em que } i, j = \{1, 2, \dots, (\eta-1)\},$$

$$\Psi^{(1)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{11} - M_{\eta\eta} - S_\eta & N_{12} & 0 \\ * & * & * & * & N_{22} - N_{11} - Z_2 & -N_{12} + Z_2 \\ * & * & * & * & * & -N_{22} - Z_2 \end{bmatrix},$$

$$\Psi^{(2)} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{11} - M_{\eta\eta} - S_\eta - Z_1 & N_{12} + Z_1 & 0 \\ * & * & * & * & N_{22} - N_{11} - Z_1 & -N_{12} \\ * & * & * & * & * & -N_{22} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= +M_{11} - S_1, \\ \Psi_{33} &= \sum_{k=1}^{\eta} \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right)^2 S_k + (\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2. \end{aligned} \quad (4.14) \quad \blacksquare$$

PROVA

O Teorema 4.2.1 estabelece condições para que todas as questões impostas na Definição 4.1.1 sejam satisfeitas para um controlador por realimentação de estados com ganho proporcional  $K$  previamente conhecido. Para estabelecer este resultado utilizamos uma nova função candidata de Lyapunov-Krasovskii descrita em (4.11). Contudo, utilizaremos as mesmas abordagens por partes do atraso e por fracionamento do atraso introduzidas no Capítulo 3, desta forma, seguindo uma metodologia similar à aplicada no capítulo anterior. Por motivos de concisão, a prova do teorema não será apresentada neste capítulo, mas sim na Seção A.5 no Apêndice A.

□

### 4.3 PROJETO DE CONTROLADOR $H_\infty$ ROBUSTO A INCERTEZAS DE MODELO

Na seção anterior, derivamos condições para a estabilidade assintótica robusta do sistema de controle em rede incerto (4.7)-(4.9) com análise de desempenho satisfazendo a norma

$H_\infty$ . Contudo, o ganho do controlador de realimentação de estado  $K$  deve ser definido a priori, ou seja, antes que as restrições impostas pelo canal de comunicação sejam analisadas. Não obstante, ao projetarmos uma estratégia de controle sem considerar a existência da rede de comunicação, e das restrições que esta impõe, perdemos as garantias referentes à estabilidade e à análise de desempenho do sistema em malha fechada. O controlador projetado pode inclusive levar o sistema à instabilidade dadas certas condições referentes à rede de comunicação. Neste contexto, para a síntese de controladores de estabilização, é de extrema importância considerarmos a influência da rede de comunicação sobre o sistema em malha fechada.

Nesta seção, estamos interessados em encontrar um controlador de realimentação com ganho  $K$  que assegure um bom desempenho relativo à atenuação de perturbações exógenas de acordo com o critério  $H_\infty$  e que estabilize o sistema de controle em rede em malha fechada (4.7)-(4.9) sujeito a perdas de pacote, atrasos variantes e incertezas de modelo. Por conseguinte, procuramos estabelecer um controlador com ganho  $K$  de forma que as condições estipuladas na Definição 4.1.1 sejam satisfeitas. Neste contexto, consideremos a seguinte proposição, baseada no Teorema 4.2.1, referente à estabilização robusta de sistemas de controle em rede satisfazendo o critério  $H_\infty$ .

**Proposição 4.3.1.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$ ,  $\eta > 1$  e  $\gamma > 0$ , o sistema de controle em rede incerto apresentado em (4.7) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (4.8)-(4.9) e incertezas descritas em (4.2) é assintoticamente e robustamente estável com uma norma  $H_\infty$  limitada em  $\gamma$ , se existirem escalares  $\epsilon_{i1} > 0$  e  $\epsilon_{i2} > 0$ ,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  e se existirem matrizes  $P$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $N$  e  $M$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (4.12), e se existirem as matrizes de ponderação livre  $F_{1j} \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ ,  $F_{2j} \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ ,  $j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$ ,  $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$  e  $K \in \mathbb{R}^{r_u \times r_x}$  tal que as seguintes afirmações sejam válidas:*

$$\Sigma_{11} < 0; \quad \Sigma_{12} < 0; \quad \Sigma_{21} < 0; \quad \Sigma_{22} < 0, \quad (4.15)$$

em que

$$\Sigma_{1m} = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + (\mathcal{F}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \mathcal{F}_1^T) + (\bar{F}_1 G + G^T \bar{F}_1^T) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_m & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega & \Gamma_Z^T & \Gamma_{\Delta_m} \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_m \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{2m} = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + (\mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T) + (\bar{F}_2 G + G^T \bar{F}_2^T) & (\tau_3 - \tau_2) \mathcal{F}_2 \Gamma_m & \Theta(\eta) & \bar{F}_2 B_\omega & \Gamma_Z^T & \Gamma_{\Delta(m+2)} \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_{(m+2)} \end{bmatrix},$$

para  $m = \{1, 2\}$ , e com

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= [F_{11}^T \ F_{12}^T \ F_{13}^T \ F_{14}^T \ F_{15}^T \ F_{16}^T]^T & \bar{F}_2 &= [F_{21}^T \ F_{22}^T \ F_{23}^T \ F_{24}^T \ F_{25}^T \ F_{26}^T]^T \\ G &= [A \ BK \ -I \ 0 \ 0 \ 0]; & \Gamma_{\Delta_1} &= [\bar{F}_1 H_1 \ 0 \ \epsilon_{11} \Gamma_{\Xi_1}^T \ \epsilon_{12} \Gamma_{\Xi_2}^T]; \\ \Gamma_Z &= [C \ DK \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; & \Gamma_{\Delta_2} &= [\bar{F}_1 H_1 \ 0 \ \epsilon_{21} \Gamma_{\Xi_1}^T \ \epsilon_{22} \Gamma_{\Xi_2}^T]; \\ \Gamma_{\Xi_1} &= [\Xi_A \ \Xi_B K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; & \Gamma_{\Delta_3} &= [\bar{F}_2 H_1 \ 0 \ \epsilon_{31} \Gamma_{\Xi_1}^T \ \epsilon_{32} \Gamma_{\Xi_2}^T]; \\ \Gamma_{\Xi_2} &= [\Xi_C \ \Xi_D K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; & \Gamma_{\Delta_4} &= [\bar{F}_2 H_1 \ 0 \ \epsilon_{41} \Gamma_{\Xi_1}^T \ \epsilon_{42} \Gamma_{\Xi_2}^T]; \end{aligned} \quad (4.16)$$

e  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_H, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \Theta(\eta), \Phi(\eta), \Psi^{(1)}$  e  $\Psi^{(2)}$  definidos em (4.14). Ademais, se as condições propostas forem satisfeitas, então o ganho do controlador é definido pela matriz  $K$ . ■

*Observação 4.3.1.* A Proposição 4.3.1 é resultado de uma extensão direta do Teorema 4.2.1 para o caso em que o ganho de realimentação  $K$  é desconhecido. Neste contexto, estamos procurando um ganho  $K$  que estabilize o sistema de controle em rede em malha fechada. Todavia, ao considerarmos a matriz  $K$  como sendo uma variável do sistema de desigualdades (4.15), as condições estipuladas na Proposição 4.3.1 passam a ser impraticáveis, i.e., insolúveis por meio de algoritmos de programação convexa, devido à existência dos termos  $\bar{F}_1 G + G^T \bar{F}_1^T$ . A existência destes termos transforma o sistema de desigualdades matriciais lineares (4.13) em um sistema de desigualdades matriciais bilineares (BMIs, do inglês *Bilinear Matrix Inequalities*) que por sua vez não é um problema convexo.

Nas próximas subseções, estabeleceremos diferentes abordagens para solucionar as condições estipuladas na Proposição 4.3.1 de forma a obtermos um controlador de ganho  $K$  que estabilize o sistema de controle em rede em malha fechada (4.7)-(4.9) e que satisfaça as condições de desempenho segundo o critério  $H_\infty$ .

### 4.3.1 Critério de estabilização baseado em ganhos ponderados

Nesta subseção, introduziremos a primeira abordagem aplicada para transformar o problema não convexo apresentado na Proposição 4.3.1 em um problema de solução factível

por meio de algoritmos de programação convexa. O cerne desta abordagem está relacionado à adição de certas restrições às condições estabelecidas no problema não-convexo, apresentado na Proposição 4.3.1, através da substituição de certas matrizes de ponderação livre por matrizes identidades com pesos previamente definidos. Desta forma, podemos transformar o problema não convexo em um problema convexo na forma de desigualdades matriciais lineares conforme apresentado no Teorema a seguir.

**Teorema 4.3.1.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}, \tau_{max}, \eta, \sigma_j, j=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , e  $\gamma$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$ ,  $\eta > 1$  e  $\gamma > 0$ , o sistema de controle em rede incerto apresentado em (4.7) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (4.8)-(4.9) e incertezas descritas em (4.2) é assintoticamente e robustamente estável com uma norma  $H_\infty$  limitada em  $\gamma$ , se existirem escalares  $\hat{\epsilon}_{i1} > 0$  e  $\hat{\epsilon}_{i2} > 0$ ,  $i=\{1, 2, 3, 4\}$  e se existirem matrizes  $\hat{P}, \hat{S}_j, j = \{1, \dots, \eta\}, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{N}$  e  $\hat{M}$  com dimensões apropriadas, satisfazendo*

$$\hat{P} > 0, \hat{Z}_1 > 0, \hat{Z}_2 > 0, \hat{S}_j > 0, j = \{1, \dots, \eta\},$$

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{11} & \hat{N}_{12} \\ \hat{N}_{12}^T & \hat{N}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \text{ e } \hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \dots & \hat{M}_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \hat{M}_{\eta\eta} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.17)$$

e se existirem as matrizes de ponderação livre  $\hat{\mathcal{F}}_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$  e  $\Upsilon \in \mathbb{R}^{r_u \times r_x}$  e a matriz definida positiva  $X = X^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ , tal que as seguintes afirmações sejam válidas:

$$\Upsilon_{11} < 0; \quad \Upsilon_{12} < 0; \quad \Upsilon_{21} < 0; \quad \Upsilon_{22} < 0, \quad (4.18)$$

em que

$$\Upsilon_{1m} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}^{(1)} + (\hat{\mathcal{F}}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T) + (\hat{\sigma} \hat{G} + \hat{G}^T \hat{\sigma}^T) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\Gamma}_{\Delta_m} \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \hat{\Gamma}_{H_m} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_{2m} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}^{(2)} + (\hat{\mathcal{F}}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T) + (\hat{\sigma} \hat{G} + \hat{G}^T \hat{\sigma}^T) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\Gamma}_{\Delta_{(m+2)}} \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \hat{\Gamma}_{H_{(m+2)}} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

para  $m = \{1, 2\}$ , e

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} I & \sigma_1 I & \sigma_2 I & \sigma_3 I & \sigma_4 I & \sigma_5 I \end{bmatrix}^T;$$

$$\begin{aligned}
\hat{G} &= \begin{bmatrix} AX & BY & -X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_Z &= \begin{bmatrix} CX & DY & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
\hat{\Gamma}_{\Xi_1} &= \begin{bmatrix} \Xi_A X & \Xi_B Y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Xi_2} &= \begin{bmatrix} \Xi_C X & \Xi_D Y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\hat{\Gamma}_{H_1} &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{\epsilon}_{12} H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Delta_1} &= \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{11} \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \\
\hat{\Gamma}_{H_2} &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{\epsilon}_{22} H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Delta_2} &= \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{21} \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \\
\hat{\Gamma}_{H_3} &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{\epsilon}_{32} H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Delta_3} &= \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{31} \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \\
\hat{\Gamma}_{H_4} &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{\epsilon}_{42} H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Delta_4} &= \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{41} \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

$$\hat{\Theta}(\eta) = \begin{bmatrix} \left( \hat{M}_{12} + \hat{S}_1 \right) & \hat{M}_{13} & \hat{M}_{14} & \dots & \hat{M}_{1(\eta-1)} & \hat{M}_{1\eta} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{M}_{1\eta}^T & -\hat{M}_{2\eta}^T & -\hat{M}_{3\eta}^T & \dots & -\hat{M}_{(\eta-2)\eta}^T & \left( -\hat{M}_{(\eta-1)\eta}^T + \hat{S}_\eta \right) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6r_x \times (\eta-1)r_x},$$

$$\hat{\Phi}(\eta) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ -\hat{S}_1 - \hat{S}_2 \end{pmatrix} & (\phi_{12} + \hat{S}_2) & \phi_{13} & \phi_{14} & \dots & \phi_{1(\eta-2)} & \phi_{1(\eta-1)} \\ * & \begin{pmatrix} \phi_{22} \\ -\hat{S}_2 - \hat{S}_3 \end{pmatrix} & (\phi_{23} + \hat{S}_3) & \phi_{24} & \dots & \phi_{2(\eta-2)} & \phi_{2(\eta-1)} \\ * & * & \begin{pmatrix} \phi_{33} \\ -\hat{S}_3 - \hat{S}_4 \end{pmatrix} & (\phi_{34} + \hat{S}_4) & \dots & \phi_{3(\eta-2)} & \phi_{3(\eta-1)} \\ * & * & * & \begin{pmatrix} \phi_{44} \\ -\hat{S}_4 - \hat{S}_5 \end{pmatrix} & \dots & \phi_{4(\eta-2)} & \phi_{4(\eta-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & \begin{pmatrix} \phi_{(\eta-2)(\eta-2)} \\ -\hat{S}_{(\eta-2)} - \hat{S}_{(\eta-1)} \end{pmatrix} & \phi_{(\eta-2)(\eta-1)} \\ * & * & * & * & \dots & * & \begin{pmatrix} \phi_{(\eta-1)(\eta-1)} \\ -\hat{S}_{(\eta-1)} - \hat{S}_\eta \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

com

$$\phi_{ij} = \hat{M}_{(i+1)(j+1)} - \hat{M}_{ij}, \quad \text{em que } i, j = \{1, 2, \dots, (\eta-1)\},$$

$$\hat{\Psi}^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{11} & 0 & \hat{P} & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Psi}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{N}_{11} - \hat{M}_{\eta\eta} - \hat{S}_\eta & \hat{N}_{12} & 0 \\ * & * & * & * & \hat{N}_{22} - \hat{N}_{11} - Z_2 & -\hat{N}_{12} + \hat{Z}_2 \\ * & * & * & * & * & -\hat{N}_{22} - \hat{Z}_2 \end{bmatrix},$$



$$\hat{\Psi}^{(2)} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{11} & 0 & \hat{P} & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Psi}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{N}_{11} - \hat{M}_{\eta\eta} - \hat{S}_\eta - \hat{Z}_1 & \hat{N}_{12} + \hat{Z}_1 & 0 \\ * & * & * & * & \hat{N}_{22} - \hat{N}_{11} - \hat{Z}_1 & -\hat{N}_{12} \\ * & * & * & * & * & -\hat{N}_{22} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{11} &= +\hat{M}_{11} - \hat{S}_1, \\ \hat{\Psi}_{33} &= \sum_{k=1}^{\eta} \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right)^2 \hat{S}_k + (\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

e  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  definidos em (4.14). Ademais, se as condições propostas forem satisfeitas, então o ganho do controlador é definido pela matriz  $K = YX^{-1}$ . ■

#### PROVA

A prova detalhada do Teorema 4.3.1 é apresentada na Seção A.6 no Apêndice A visando à melhor concisão da dissertação. □

A solução apresentada no Teorema 4.3.1, apesar de trivial, é relativamente eficaz e para certas circunstâncias e requisitos de projeto, apresentará resultados satisfatórios. O conservadorismo da análise é todavia incrementado devido à substituição das matrizes de ponderação livre  $F_{1j}, F_{2j}, j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , por escalares predefinidos,

$$\begin{aligned} F_{11} &= X^{-1}, F_{12} = \sigma_1 X^{-1}, F_{13} = \sigma_2 X^{-1}, F_{14} = \sigma_3 X^{-1}, F_{15} = \sigma_4 X^{-1}, F_{16} = \sigma_5 X^{-1}, \\ F_{21} &= X^{-1}, F_{22} = \sigma_1 X^{-1}, F_{23} = \sigma_2 X^{-1}, F_{24} = \sigma_3 X^{-1}, F_{25} = \sigma_4 X^{-1}, F_{26} = \sigma_5 X^{-1}, \end{aligned}$$

em que  $\sigma_j, j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , são constantes predefinidas. Não obstante, a maior dificuldade quando da aplicação deste método refere-se exatamente à seleção apropriada de constantes de maneira a reduzir ao máximo este incremento de conservadorismo.

A escolha das constantes,  $\sigma_j, j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , é um desafio adicional à análise, visto que estas são correlacionadas e a escolha de uma afeta diretamente a escolha das outras. Assim, vários autores, e.g., [144, 145], definem todas as constantes como 1, ou seja, substituem todas as matrizes de ponderação livre por uma única matriz de ponderação livre. Esta abordagem, apesar de facilitar a análise, é extremamente conservadora e elimina todos os benefícios

advindos da utilização do método de Finsler em (A.93) e, por conseguinte, da introdução da expressão  $\bar{F}_1 G + G^T \bar{F}_1^T$  e  $\bar{F}_2 G + G^T \bar{F}_2^T$ , explícita em (A.124).

É interessante ressaltar que não existe na literatura de sistemas de controle em rede nenhuma solução fechada para a escolha destas constantes. De fato, a grande maioria dos autores não citam nenhuma técnica para a seleção destes valores, deixando a entender desta maneira que a seleção dos parâmetros deve ser feita através da seleção manual ou através da abordagem por força bruta.

A abordagem por seleção manual dos parâmetros além de tediosa e exaustiva muito provavelmente não apresentará bons resultados e resultará em mínimos locais, devido ao fato que os usuários tendem a investigar poucas regiões do conjunto-solução. A solução por força bruta apesar de provavelmente apresentar bons resultados é consideravelmente tediosa e custosa computacionalmente. Os algoritmos de programação convexa apesar de eficientes não são de rápido processamento, portanto, não é interessante incrementar demais o número de amostras.

Neste contexto, visando facilitar a análise e o tempo de obtenção de resultados satisfatórios, apresentaremos uma proposta inédita para a seleção destes parâmetros através do método de busca estocástico *Simulated Annealing*. Segundo o conhecimento do autor, esta abordagem iterativa nunca foi aplicada para a seleção de parâmetros em projeto de controladores para sistemas de controle em rede. O método correspondente é então apresentado na próxima página no Algoritmo 4.3.1.

É importante ressaltar que o método de busca heurística por *Simulated Annealing* permite a deterioração das estimativas dos parâmetros de forma que esta escape de regiões com mínimos locais [146]. Por isso, o método é muito utilizado para a solução de problemas NP-difícil (do inglês, *NP-hard*) que não possuem solução em tempo polinomial [147]. Além disso, existe na literatura uma série de provas que demonstram que o algoritmo converge no limite para alguma solução ótima global [148, 149]. Rajasekaran [147] faz inclusive uma análise do tempo necessário para a convergência com probabilidade próxima de 1. Desta maneira, poderíamos assumir que o método é ótimo no sentido de convergir para algum ótimo global. Contudo, para tal análise seria necessário um número consideravelmente grande de amostras o que, obviamente, não é realizável devido ao custo computacional proibitivo relacionado a esta análise. Ainda assim, a análise através do Algoritmo 4.3.1 produz resultados satisfatórios (muito superiores a abordagem por seleção manual) com um número de amostras inferior ao número de amostras utilizado pela abordagem por força bruta. Esta análise é exemplificada na Seção 4.6.

### Algoritmo 4.3.1

#### Algoritmo de seleção dos parâmetros $\sigma$ por *Simulated Annealing* para solução do Teorema 4.3.1

- 1) Inicialização:** Defina  $k = 1$ , um conjunto inicial

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{(0)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(0)} & \sigma_2^{(0)} & \sigma_3^{(0)} & \sigma_4^{(0)} & \sigma_5^{(0)} \end{bmatrix},$$

e um valor para a *temperatura* inicial  $T = T^{(0)} > 0$ .

Dadas as constantes  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$  e  $\eta > 1$ , aplique o Teorema 4.3.1 com  $\bar{\sigma}$ , porém considerando  $\bar{\gamma} = \gamma^2$  como sendo um variável a ser obtida pela LMI.

Encontre a solução factível para o Teorema 4.3.1 com o menor valor possível para  $\bar{\gamma}$  e vá para o segundo passo. Caso não exista solução factível, redefina o conjunto inicial  $\bar{\sigma}^{(0)}$ . Se não existir nenhuma solução factível após um número predeterminado de tentativas, defina o problema como *sem solução* e saia do algoritmo.
- 2) Novos parâmetros:** Dada uma função de perturbação  $R(\bar{\sigma})$ , estima-se um novo conjunto de parâmetros  $\bar{\sigma}^{(novo)}$ ,

$$\bar{\sigma}^{(novo)} = R(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \delta ,$$

em que  $\delta \sim N(0, TI)$  e  $I$  é uma matriz identidade.
- 3) Critério de aceitação:** Solucione o problema de minimização de  $\bar{\gamma}^{(novo)}$  sujeito a viabilidade do Teorema 4.3.1 com  $\bar{\sigma}^{(novo)}$ . Caso não exista nenhum  $\bar{\gamma}^{(novo)}$  que produza uma solução factível, volte para o passo 2). Caso contrário, defina uma função  $\Delta E$ ,

$$\Delta E = \bar{\gamma}^{(novo)} - \bar{\gamma}.$$

Determine a aceitação ou não dos novos parâmetros  $\bar{\sigma}$ , de acordo com o seguinte

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \bar{\sigma}^{(novo)}, & \text{se } \Delta E \leq 0; \\ \bar{\sigma}^{(novo)}, & \text{se } \Delta E > 0, \text{ com probabilidade } P = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right) \\ \bar{\sigma} & \text{Caso contrário, (mantém-se } \bar{\sigma} \text{ e exclui } \bar{\sigma}^{(novo)}). \end{cases}$$
- 4) Nova iteração:** Diminui-se a temperatura

$$T = \beta(k)T^{(0)} ,$$

com  $\beta(k)$  sendo o fator de redução de temperatura, usualmente, definido como  $\beta(k) = \exp\left(\frac{-k}{\iota}\right)$ , em que  $\iota$  é uma constante predeterminada. Incrementa-se  $k = k + 1$ .
- 5) Critério de saída:** Se o valor obtido para  $\bar{\gamma}$  estiver abaixo do valor desejado para  $\gamma^2$ , então podemos reconstruir o ganho de realimentação do controlador,  $K = YX^{-1}$ , com os valores obtidos de  $Y$  e  $X$ . Defina o problema como *factível* e saia do algoritmo.

Verifique se  $T < T_{lim}$  ou se  $k > k_{lim}$ , em que  $T_{lim}$  e  $k_{lim}$  definem respectivamente o menor valor aceitável para a *temperatura*  $T$  e o número máximo de iterações que o algoritmo deve percorrer. Caso alguma dessas afirmações sejam verdadeiras defina o problema como *sem solução* e saia do algoritmo. Caso contrário, volte ao passo 2).

### 4.3.2 Solução Iterativa através do algoritmo de linearização por complementaridade Cônica

Na subseção anterior, introduzimos uma abordagem direta e relativamente simples para a análise do problema não convexo apresentado na Proposição 4.3.1, através da transformação deste problema em um problema convexo na forma de desigualdades lineares matriciais. Não obstante, o método proposto no Teorema 4.3.1 implica na introdução de constantes que devem ser definidas de antemão. A utilização destas constantes, além de incrementar o conservadorismo da análise, introduz métodos tediosos de seleção de parâmetros que ao fim não apresentam nenhuma garantia de convergência.

No contexto referente ao problema não convexo apresentado na Proposição 4.3.1, nesta subseção, introduziremos uma abordagem mais sofisticada para sua solução. O cerne desta análise está relacionado à construção de condições especiais que assegurem a possibilidade da aplicação do algoritmo de linearização por complementaridade cônica, desenvolvido por El Ghaoui, Oustry e Rami [142, 143]. Neste trabalho, denominaremos este algoritmo por CCLA, do inglês (*cone complementarity linearization algorithm*).

O algoritmo de linearização por complementaridade cônica, CCLA, é um método poderoso de análise iterativa que permite a solução de problemas conhecidos como problemas de complementaridade cônica, [142]. Neste caso, o problema seria da seguinte forma

$$\min\{\text{tr}(XS)\}, \quad (4.20)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.21)$$

Observe que a restrição (4.21), implica que  $XS \geq I$ , o que pode ser facilmente verificado por meio do complemento de Schur. Ademais, dada a minimização imposta em (4.20) e as propriedades de similaridade referentes ao traço de uma matriz [150], é notável que a resultante do problema (4.20)-(4.21) é  $XS=I$ . A solução para este problema não trivial é então proposta por [142] a partir da extensão do método de linearização de problemas de complementaridade linear – LCP (do inglês *linear complementarity problems*) [151].

A aplicação deste algoritmo, CCLA, no contexto de estabilização de sistemas de controle em rede ou sistemas sujeitos a retardos no tempo não é novidade, visto que outros trabalhos já utilizaram este método anteriormente, e.g., [125, 5, 152, 153], entre outros. Não obstante, a aplicação do algoritmo CCLA sempre esteve relacionado a critérios de estabilização que substituem diretamente a derivada do vetor de estado,  $\dot{x}(t)$ , pela expressão que define a dinâmica do sistema em (4.7), e.g., [125, 5, 152, 153]. Desta maneira, o vetor referente à derivada do vetor de estado,  $\dot{x}(t)$ , é substituído diretamente por outros vetores que definem sua dinâmica, e.g.,  $x(t)$  e  $x(t-d(t))$ . Portanto, neste caso,  $\dot{x}(t)$  não faz parte do vetor de estados utilizado para a construção da LMI, e.g.,  $\bar{\zeta}_1(t)$  e  $\bar{\zeta}_2(t)$  em (A.91) e em (A.110), respectivamente, e, por conseguinte, não podemos utilizar o vetor  $\dot{x}(t)$  (nem a informação referente

à dinâmica do sistema) juntamente com outros métodos mais sofisticados de análise, e.g., método de Finsler ([82, 88]), método por descritores e Leibniz-Newton ([76, 83, 98, 154]), ou outros métodos que incluam novas variáveis de ponderação livre [155].

Nos casos em que há a substituição direta do vetor referente à derivada do estado  $\dot{x}(t)$ , i.e., sem a aplicação das técnicas citadas, o ganho de realimentação  $K$  relaciona-se apenas com os vetores que definem a dinâmica do sistema, e.g.,  $x(t)$  e  $x(t - d(t))$ . Por conseguinte, a matriz  $K$  é ponderada por menos variáveis e, portanto, a análise para estes casos é usualmente mais simples. Por isso, há soluções por meio do algoritmo CCLA para estes casos.

Não obstante, na maioria dos trabalhos recentes relativos à estabilidade e à estabilidade robusta de sistemas de controle em rede e de sistemas com retardos no tempo, a matriz referente ao ganho de realimentação é ponderada por uma série de matrizes de ponderação livre, seja por conta da aplicação do método de Finsler, do método de descritores, Leibniz-Newton, ou por outras técnicas. No trabalho presente, por conta da aplicação do método de Finsler em (A.93)-(A.94) e em (A.112), a matriz  $K$  também é ponderada por uma série de matrizes de ponderação livre, conforme pode ser observado em (A.124).

Além disso, conforme discutido na Subseção 4.3.1, as soluções existentes para o caso em que a matriz referente ao ganho de realimentação  $K$  é ponderada por várias variáveis, ou adicionam uma série de restrições às condições de análise e incrementam consideravelmente seu conservadorismo, [145], ou envolvem um conjunto de parâmetros a ser definido previamente à aplicação do método, o que implica em métodos tediosos e conservadores de seleção de parâmetros, [154, 156, 157]. Neste contexto, a proposta desta subseção é apresentar um método inédito de estabilização que não envolva a seleção de parâmetros e que utilize o algoritmo de linearização por complementaridade cônica [142, 143]. Neste intuito, devemos estruturar as condições apresentadas na Proposição 4.3.1 de maneira específica de forma a viabilizar a aplicação do algoritmo CCLA. O resultado desta abordagem inédita introduzida neste trabalho e referente à estabilização robusta de sistemas de controle em rede é baseado no seguinte Teorema.

**Teorema 4.3.2.** *Dados os seguintes escalares  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\eta$ , e  $\gamma$  tal que  $0 \leq \tau_{min} \leq \tau_{max}$ ,  $\eta > 1$  e  $\gamma > 0$ , o sistema de controle em rede incerto apresentado em (4.7) com atraso variante e desconhecido satisfazendo (4.8)-(4.9) e incertezas descritas em (4.2) é assintoticamente e robustamente estável com uma norma  $H_\infty$  limitada em  $\gamma$ , se existirem escalares  $\hat{\epsilon}_{i1} > 0$  e  $\hat{\epsilon}_{i2} > 0$ ,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  e se existirem matrizes  $\hat{P}$ ,  $\hat{S}_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $\hat{Z}_1$ ,  $\hat{Z}_2$ ,  $\hat{N}$  e  $\hat{M}$  com dimensões apropriadas, satisfazendo (4.17) e se existirem as matrizes de ponderação livre  $\hat{\mathcal{F}}_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$ ,  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{r_u \times r_x}$  e as matrizes definidas positivas  $F_1 = F_1^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ ,  $F_2 = F_2^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$  e  $X = X^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ ,  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ ,  $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ ,  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ ,  $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2^T \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ , tal que as seguintes afirmações sejam válidas:*

$$\bar{\Upsilon}_{11} < 0; \quad \bar{\Upsilon}_{12} < 0; \quad \bar{\Upsilon}_{21} < 0; \quad \bar{\Upsilon}_{22} < 0, \quad (4.22)$$

$$e \quad \begin{bmatrix} \tilde{X} & F_1 \\ F_1 & \tilde{V}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{X} & F_2 \\ F_2 & \tilde{V}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} F_1 & \tilde{X} \\ \tilde{X} & \tilde{U}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} F_2 & \tilde{X} \\ \tilde{X} & \tilde{U}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.23)$$

$$X\tilde{X} = I, \quad \mathcal{V}_1\tilde{V}_1 = I, \quad \mathcal{V}_2\tilde{V}_2 = I, \quad \mathcal{U}_1\tilde{U}_1 = I, \quad \mathcal{U}_2\tilde{U}_2 = I, \quad (4.24)$$

em que

$$\bar{Y}_{1m} = \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\Gamma}_\Delta & (\hat{G}_{AB}^T - \Gamma_X^T) \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & B_w^T \\ * & * & * & * & -I & \hat{\Gamma}_{H2} & \hat{\Gamma}_{H1}^T \\ * & * & * & * & * & \hat{\mathcal{E}}_m & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{V}_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}_{2m} = \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\Gamma}_\Delta & (\hat{G}_{AB}^T - \Gamma_X^T) \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & B_w^T \\ * & * & * & * & -I & \hat{\Gamma}_{H2} & \hat{\Gamma}_{H1}^T \\ * & * & * & * & * & \hat{\mathcal{E}}_{m+2} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathcal{V}_2 \end{bmatrix},$$

para  $m = \{1, 2\}$ , e

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \text{diag}\{0, 0, (X - 4U_1), 0, 0, 0\}; & \hat{\Pi}_2 &= \text{diag}\{0, 0, (X - 4U_2), 0, 0, 0\}; \\ \hat{\sigma} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \\ \hat{G} &= \begin{bmatrix} AX & BY & -X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \Gamma_X &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \hat{G}_{AB} &= \begin{bmatrix} AX & BY & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_Z &= \begin{bmatrix} CX & DY & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \hat{\Gamma}_{\Xi_1} &= \begin{bmatrix} \Xi_A X & \Xi_B Y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Xi_2} &= \begin{bmatrix} \Xi_C X & \Xi_D Y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\Gamma}_{H1} &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\mathcal{E}}_1 &= -\text{diag}\{\epsilon_{11}I, \epsilon_{12}I, I, I\}; \\ \hat{\Gamma}_{H2} &= \begin{bmatrix} 0 & H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\mathcal{E}}_2 &= -\text{diag}\{\epsilon_{21}I, \epsilon_{22}I, I, I\}; \\ \hat{\Gamma}_\Delta &= \begin{bmatrix} \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; & \hat{\mathcal{E}}_3 &= -\text{diag}\{\epsilon_{31}I, \epsilon_{32}I, I, I\}; \\ & & \hat{\mathcal{E}}_4 &= -\text{diag}\{\epsilon_{11}I, \epsilon_{12}I, I, I\}; \end{aligned}$$

$$\mathfrak{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (4.25)$$

e  $\hat{\Theta}(\eta)$ ,  $\hat{\Phi}(\eta)$ ,  $\hat{\Psi}^{(1)}$  e  $\hat{\Psi}^{(2)}$  definidos em (4.19). Ademais, se as condições propostas forem satisfeitas, então o ganho do controlador é definido pela matriz  $K=YX^{-1}$ .

■

#### PROVA

No Teorema 4.3.2 estabelecemos condições que se satisfeitas asseguram o cumprimento das questões estipuladas na Proposição 4.3.1 com referência a estabilidade robusta de sistemas de controle em rede com desempenho garantido segundo o critério  $H_\infty$ , conforme a Definição 4.1.1.

O desenvolvimento deste teorema é detalhadamente apresentado com sua prova na Seção A.7 no Apêndice A.

□

Não obstante, observe que o problema apresentado no Teorema 4.3.2 ainda não é factível de solução por meio de algoritmos de programação convexa, devido à existência das restrições de igualdade impostas em (4.24), as quais não pertencem a um conjunto convexo de condições. Neste contexto e conforme discutido anteriormente, utilizaremos o algoritmo de linearização por complementaridade cônica, CCLA, introduzido em [142]. O cerne fundamental deste algoritmo (CCLA) consiste no fato que a LMI descrita em (4.21) é factível, dadas as matrizes definidas positivas  $X \in \mathbb{R}^{r_x}$  e  $S \in \mathbb{R}^{r_x}$ , apenas se  $XS \geq I$ , o que por sua vez implica que  $\text{tr}(XS) \geq r_x$ . Desta forma, a minimização do traço de  $XS$  implica que  $XS = I$  [142, 143]. Assim, utilizaremos o algoritmo de linearização por complementaridade cônica, CCLA [142], com o objetivo de solucionar o problema não-convexo apresentado no Teorema 4.3.2 através da solução do seguinte problema de minimização

$$\min\{ \text{tr} \left( X\tilde{X} + \mathcal{V}_1\tilde{\mathcal{V}}_1 + \mathcal{V}_2\tilde{\mathcal{V}}_2 + \mathcal{U}_1\tilde{\mathcal{U}}_1 + \mathcal{U}_2\tilde{\mathcal{U}}_2 \right) \}, \quad (4.26)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & \tilde{X} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & I \\ I & \tilde{\mathcal{V}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{V}_2 & I \\ I & \tilde{\mathcal{V}}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 & I \\ I & \tilde{\mathcal{U}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 & I \\ I & \tilde{\mathcal{U}}_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.27)$$

Além disso, de acordo com [142, 143], o problema de minimização mencionado acima pode ser resolvido por meio do seguinte algoritmo iterativo de linearização

### Algoritmo 4.3.2

#### Algoritmo de linearização por complementaridade cônica [142, 143] para solução do Teorema 4.3.2

**1) Inicialização:** Dadas as constantes  $\tau_{min}, \tau_{max}, \eta > 1$ , e  $\gamma > 0$ , aplique o Teorema 4.3.2, substituindo as restrições (4.24) pelas restrições (4.27).

Defina as matrizes

$$\begin{bmatrix} X^{(0)} & \tilde{X}^{(0)} & \mathcal{V}_1^{(0)} & \tilde{\mathcal{V}}_1^{(0)} & \mathcal{V}_2^{(0)} & \tilde{\mathcal{V}}_2^{(0)} & \mathcal{U}_1^{(0)} & \tilde{\mathcal{U}}_1^{(0)} & \mathcal{U}_2^{(0)} & \tilde{\mathcal{U}}_2^{(0)} \end{bmatrix},$$

com base nas variáveis

$$\begin{bmatrix} X & \tilde{X} & \mathcal{V}_1 & \tilde{\mathcal{V}}_1 & \mathcal{V}_2 & \tilde{\mathcal{V}}_2 & \mathcal{U}_1 & \tilde{\mathcal{U}}_1 & \mathcal{U}_2 & \tilde{\mathcal{U}}_2 \end{bmatrix},$$

obtidas através da resolução do Teorema 4.3.2. Caso a análise seja infactível, saia do algoritmo. Caso contrário, defina  $k = 0$ .

**2)** Solucione o problema de minimização

$$\min \left\{ \mathcal{O}_k = \text{tr} \left( \tilde{X}^{(k)} X + X^{(k)} \tilde{X} + \tilde{\mathcal{V}}_1^{(k)} \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1^{(k)} \tilde{\mathcal{V}}_1 + \tilde{\mathcal{V}}_2^{(k)} \mathcal{V}_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{V}_2^{(k)} \tilde{\mathcal{V}}_2 + \tilde{\mathcal{U}}_1^{(k)} \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1^{(k)} \tilde{\mathcal{U}}_1 + \tilde{\mathcal{U}}_2^{(k)} \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_2^{(k)} \tilde{\mathcal{U}}_2 \right) \right\},$$

sujeito às restrições impostas no Teorema 4.3.2 substituindo as restrições (4.24) pelas restrições (4.27).

Então defina as matrizes

$$\begin{bmatrix} X^{(0)} & \tilde{X}^{(0)} & \mathcal{V}_1^{(0)} & \tilde{\mathcal{V}}_1^{(0)} & \mathcal{V}_2^{(0)} & \tilde{\mathcal{V}}_2^{(0)} & \mathcal{U}_1^{(0)} & \tilde{\mathcal{U}}_1^{(0)} & \mathcal{U}_2^{(0)} & \tilde{\mathcal{U}}_2^{(0)} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} X & \tilde{X} & \mathcal{V}_1 & \tilde{\mathcal{V}}_1 & \mathcal{V}_2 & \tilde{\mathcal{V}}_2 & \mathcal{U}_1 & \tilde{\mathcal{U}}_1 & \mathcal{U}_2 & \tilde{\mathcal{U}}_2 \end{bmatrix}.$$

**3)** Verifique se  $(\mathcal{O}_k - \mathcal{O}_{k-1}) < \lambda$ , em que  $\lambda$  é um número positivo definido previamente. Caso a afirmação mencionada seja verdadeira, vá ao próximo passo, caso contrário volte para o passo 2).

**4)** Tente reconstruir o controlador  $K = YX^{-1}$ , com os valores obtidos de  $Y$  e  $X$ . Valide o resultado através do Teorema 4.2.1. Caso o resultado seja válido, o controlador final será dado pelo ganho de realimentação  $K = YX^{-1}$ . Caso contrário, reduza o valor de  $\lambda$  e volte para o segundo passo. Se após um número predeterminado de iterações, as condições citadas não forem satisfeitas, então defina o problema como *sem solução* e saia do algoritmo.

Como pode ser visto pelo algoritmo 4.3.2, todos os passos são factíveis de solução por meio de algoritmos de programação convexa. Além disso, é importante ressaltar que, a partir da prova de convergência demonstrada em El Ghaoui et al. [143], podemos afirmar que a série  $\mathcal{O}_k$ , limitada neste caso em  $10r_x$ , é decrescente e que esta converge para um algum valor  $\mathcal{O}_{opt} \geq 10r_x$ . Sendo que a igualdade  $\mathcal{O}_{opt} = 10r_x$  será válida se e apenas se as igualdades  $X\tilde{X} = I$ ,  $\mathcal{V}_1\tilde{\mathcal{V}}_1 = I$ ,  $\mathcal{V}_2\tilde{\mathcal{V}}_2 = I$ ,  $\mathcal{U}_1\tilde{\mathcal{U}}_1 = I$ , e  $\mathcal{U}_2\tilde{\mathcal{U}}_2 = I$  forem válidas. Note entretanto que este é um resultado teórico e, portanto, sua aplicação através de algoritmos de



programação convexa pode apresentar dificuldades numéricas dependendo de uma série de fatores que fogem ao escopo desta dissertação [158].

#### **4.4 PROJETO DE CONTROLADOR $H_\infty$ ROBUSTO PARA SEGUIMENTO DE TRAJETÓRIA EM SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE**

Nesta seção, estenderemos os resultados de análise de desempenho e de síntese de controladores robustos obtidos em seções anteriores para o controle robusto  $H_\infty$  de trajetória de sistemas de controle em rede. Apesar do controle de trajetória ser uma das questões fundamentais na teoria de controle, em especial em aplicações em robótica, a análise de desempenho  $H_\infty$  do erro de rastreamento e a síntese de controladores de estabilização que assegurem este desempenho receberam pouca atenção na literatura de sistemas de controle em rede [67].

É notório que o problema de controle de trajetória é um problema mais genérico e mais desafiador do que os problemas de estabilidade e estabilização [5]. O principal objetivo do controle de trajetória consiste na síntese de controladores de realimentação que façam com que o sinal de saída de uma planta siga a trajetória de um sinal de referência desejado enquanto assegurando propriedades de atenuação de perturbações. A importância desta ferramenta de controle surge de uma extensa lista de aplicações em robótica [159, 160], controle de vôo [161] entre outras<sup>1</sup>.

Contudo, existem poucos resultados na literatura de controle de trajetória com relação a sistemas de controle em rede. Entre os principais trabalhos na literatura citaremos os seguintes, devido a importância de sua contribuição. Lopez et al. [164] estabeleceram condições para o controle de trajetória através de redes de comunicação porém sem considerar aspectos referentes ao atraso de comunicação. Wang e Yang [165] estudaram a abordagem  $H_\infty$  para o controle de trajetória em termos do protocolo de comunicação e da camada MAC. Li et al. [166] investigaram o problema de controle de trajetória para sistemas chaveados sujeitos a atrasos no tempo porém considerando um controlador acoplado à planta, i.e., uma rede perfeita entre o controlador e o atuador. VandeWouw et al. [167, 168] resolveram o problema de controle de trajetória utilizando a abordagem por sistemas amostrados, contudo o atraso é fortemente dependente do intervalo variante de amostragem apresentando bons resultados apenas para casos em que o atraso é inferior ao intervalo de amostragem. Por fim, os trabalhos de Gao e Chen [169, 5] trataram do problema de controle de trajetória de saída segundo a abordagem  $H_\infty$  para NCSs com atrasos variantes e períodos de amostragem constantes. Não obstante, nenhum dos métodos existentes na literatura atual apresentam resultados para o controle de trajetória de sistemas de controle em rede aplicando técnicas estado-da-arte

---

<sup>1</sup>Para mais aplicações e resultados em controle de trajetória para sistemas sem redes de comunicação, veja [162, 163] e suas referências.

de análise de sistemas atrasados. Neste contexto, ao utilizar técnicas avançadas de análise de sistemas de controle em rede apresentadas neste capítulo, apresentamos uma importante contribuição para a análise e o controle de trajetória de sistemas de controle em rede.

A partir de uma formulação específica para o problema de controle de trajetória dado um modelo de referência demonstraremos que o problema pode ser resolvido por meio das técnicas de controle apresentadas na Seção 4.3.

#### 4.4.1 Formulação do Problema

Consideremos um sistema de controle em rede constituído por uma planta SLIT e um modelo de referência conectados com o controlador de trajetória através de uma rede de comunicação compartilhada. O sistema que queremos controlar através da rede de comunicação é semelhante ao sistema descrito na Seção 4.1,

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = (A_p + \Delta A) x_p(t) + (B_p + \Delta B) u_p(t) + B_\omega \omega(t), \\ y_p(t) = (C_p + \Delta C) x_p(t) + (D_p + \Delta D) u_p(t), \end{cases} \quad (4.28)$$

em que  $x_p(t) \in \mathbb{R}^{r_x}$ ,  $u_p(t) \in \mathbb{R}^{r_u}$ ,  $y_p(t) \in \mathbb{R}^{r_y}$  são os vetores referentes ao estado, à entrada e à saída a ser controlada, respectivamente. O vetor  $\omega(t) \in \mathbb{R}^{r_\omega}$  refere-se ao sinal de perturbação exógena, o qual assume-se pertencer a  $L_2[0, \infty)$ . As matrizes  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $B_\omega$ ,  $C_p$  e  $D_p$  são matrizes conhecidas, reais e constantes com dimensões apropriadas e as incertezas  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  e  $\Delta D$  correspondem à matrizes variantes no tempo com dimensões apropriadas, satisfazendo (4.2) e (4.3).

O sinal de referência,  $y_r(t) \in \mathbb{R}^{m_y}$ , que desejamos que a saída da planta siga é obtido a partir da saída do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + r(t), \\ y_r(t) = C_r x_r(t), \end{cases} \quad (4.29)$$

em que  $x_r(t), r(t) \in \mathbb{R}^{m_x}$  são os vetores referentes ao estado de referência e à entrada de referência com energia limitada, respectivamente.  $A_r$  e  $C_r$  são matrizes com dimensões apropriadas, sendo que  $A_r$  é uma matriz Hurwitz.

Considerando o atraso de comunicação da rede e os ganhos por realimentação de estado  $K_1$  e  $K_2$ , o sinal de controle aplicado ao sistema, constante nos intervalos  $[i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1})$ , i.e., nos intervalos entre o recebimento de distintos sinais de controle pela planta, é definido por

$$u_p(t) = K_1 x_p(i_k^a h) + K_2 x_r(i_k^a h), \quad t \in [i_k^a h + \tau_k, i_{k+1}^a h + \tau_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (4.30)$$

Desta maneira, a partir da combinação de (4.28)-(4.30) e das definições:

$$\bar{x}(t) := \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}(t) := \begin{bmatrix} \omega(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} := \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \bar{B} := \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_\omega := \begin{bmatrix} B_\omega & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{C} := \begin{bmatrix} C_p & -C_r \end{bmatrix}, \quad \bar{D} := D_p,$$

obtemos o seguinte sistema aumentado para o NCS em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A}) \bar{x}(t) + (\bar{B} + \Delta\bar{B}) \bar{K} \bar{x}(t-d(t)) + \bar{B}_\omega \bar{w}(t), \\ e(t) = (\bar{C} + \Delta\bar{C}) \bar{x}(t) + (\bar{D} + \Delta\bar{D}) \bar{K} \bar{x}(t-d(t)), \\ \bar{x}(t) = \rho(t), \end{cases} \quad t \in [-\tau_{max}, 0] \quad (4.31)$$

em que  $\rho(t)$  é uma função que descreve as condições iniciais do estado,

$$\bar{K} := \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix},$$

e  $e(t)$  corresponde ao erro de rastreamento:

$$e(t) := y_p(t) - y_r(t).$$

As matrizes de incerteza são definidas por:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{A} &= \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta(t) \begin{bmatrix} \Xi_A & 0 \end{bmatrix}, & \Delta\bar{B} &= \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta(t) \Xi_B, \\ \Delta\bar{C} &= H_2 \Delta(t) \begin{bmatrix} \Xi_C & 0 \end{bmatrix}, & \Delta\bar{D} &= H_2 \Delta(t) \Xi_D. \end{aligned}$$

#### 4.5 ANÁLISE DE DESEMPENHO E SÍNTESE DE CONTROLADORES $H_\infty$

De maneira análoga à análise apresentada na Seção 4.2, desejamos projetar um controlador de realimentação de estados que estabilize o sistema (4.28). Além disso, desejamos que o controlador assegure o rastreamento de um sinal de referência  $y_r(t)$  com desempenho estipulado pelo critério  $H_\infty$ . Assim, utilizaremos a seguinte definição [5, 67]:

**Definição 4.5.1.** *Para um escalar predefinido  $\gamma > 0$ , o sistema de controle em rede em malha fechada definido em (4.31) é assintoticamente e robustamente estável e o desempenho sobre o erro de rastreamento é assegurado segundo o critério  $H_\infty$  limitado em  $\gamma$ , se existir uma estratégia de controle  $u(t)$  tal que as seguintes condições sejam satisfeitas*

1. *O sistema em malha fechada (4.31) é assintoticamente e robustamente estável na ausência de perturbações exógenas,  $\omega(t) \equiv 0$ ;*
2. *Considerando condições iniciais nulas, os efeitos da perturbação sobre o erro de rastreamento são atenuados abaixo de um nível desejado,  $\gamma$ , segundo a norma  $H_\infty$ ,  $\|e(t)\| \leq \gamma \|\omega(t)\|$ , para qualquer perturbação não-nula,  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ .  $\square$*

A definição mencionada acima é semelhante a Definição 4.1.1 com a exceção de que a definição apresentada na Seção 4.1 assegura a atenuação de perturbações sobre a saída do sistema dinâmico, enquanto a Definição 4.5.1 assegura a atenuação de perturbações exógenas sobre o erro de rastreamento. Além disso, o sistema de controle em rede em malha fechada utilizado na Definição 4.1.1 é análogo ao sistema em malha fechada (4.31). Dito isso, é fácil perceber que a mesma análise aplicada à atenuação de perturbações sobre a saída  $z(t)$  do sistema (4.7) pode ser aplicada à atenuação de perturbações sobre o erro de rastreamento  $e(t)$  do sistema em malha fechada (4.31). Assim, o Teorema 4.2.1 referente à análise de desempenho  $H_\infty$  e os Teoremas 4.3.1 e 4.3.2 referentes à análise e a síntese de controladores robustos  $H_\infty$  podem ser aplicados diretamente à análise do sistema (4.31) de acordo com a Definição 4.5.1.

Tabela 4.1: (Exemplo 4.6.1) Menor valor aceitável de  $\gamma$  para o qual o sistema é estável com  $\tau_{max} = 0,8695$  e  $\tau_{min} = 0$

Métodos	Atraso Máximo $\tau_{max}$
Yue et al. (2005, Automatica) [83]	6,82 s
Jiang et al. (2008, TAC) [125]	1,0005 s
<b>Teorema 4.2.1 com <math>\eta = 1</math></b>	<b>0,7509 s</b>

#### 4.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, apresentamos uma série de exemplos numéricos que visam ilustrar a validade dos critérios propostos neste capítulo com referência à análise de desempenho à atenuação de perturbações e a síntese de controladores robustos  $H_\infty$  para sistemas de controle em rede com atrasos variantes no tempo e incertezas de modelo. Através destes exemplos, desejamos além de ilustrar a validade dos critérios desenvolvidos para sistemas de controle em rede, comparar nossos resultados com os resultados dos métodos estado-da-arte conhecidos da literatura.

##### *Exemplo 4.6.1 (Análise de desempenho $H_\infty$ ).*

*Considere o mesmo sistema de controle em rede com atrasos de comunicação variantes e incertos apresentado no Exemplo 3.4.1 no Capítulo 3, porém na presença de perturbações exógenas, de forma que o sistema seja reescrito por:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \omega(t), \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + 0,1u(t), \end{aligned}$$

*e que o controlador em rede é projetado da seguinte maneira:*

$$K = K_1 = \begin{bmatrix} -3,75 & -11,5 \end{bmatrix}.$$

*Assumindo que o atraso mínimo é desconhecido, ou definido por  $\tau_{min} = 0$  e o atraso máximo é de  $\tau_{max} = 0,8695$  s, aplicamos o Teorema 4.2.1 referente à estabilidade assintótica de sistemas de controle em rede com análise de desempenho segundo o critério  $H_\infty$ . O resultado é apresentado na Tabela 4.1. Note que o resultado obtido com o Teorema 4.2.1 é bastante superior aos métodos estado-da-arte conhecidos. O resultado representa uma melhora de mais de 25% sobre o resultado presente em [125]. Isso significa dizer que o efeito de perturbações exógenas sobre a saída do sistema é no mínimo 25% menor do que o critério apresentado em [125] assegurava.*

*Considerando  $\gamma=1,0005$  e aplicando nosso método para  $\tau_{min} = 0$ , obtemos um valor máximo para o atraso de comunicação, para o qual o NCS se mantém estável e robusto*

à perturbações, igual a  $\tau_{max} = 0,915$  s, o que representa um resultado superior ao apresentado em [125], (0,8695 s).  $\square$

**Exemplo 4.6.2 (Projeto de controlador  $H_\infty$  para o NCS do Exemplo 4.6.1).**

Neste exemplo, consideramos o mesmo sistema de controle em rede mencionado no Exemplo 4.6.1. Contudo, ao invés do controlador  $K_1$ , projetado na ausência de uma rede de comunicação, utilizamos as estratégias de controle desenvolvidas neste capítulo para a síntese de um controlador que considerasse explicitamente o efeito da rede de comunicação.

Desta maneira, visamos projetar um controlador robusto  $H_\infty$  que assegurasse a estabilidade do NCS com atenuação de perturbações exógenas sobre a saída do sistema em malha fechada segundo o critério  $H_\infty$ , com  $\gamma = 0,25 > \frac{\|z(t)\|}{\|\omega(t)\|}$ . Os parâmetros da rede de comunicação não eram conhecidos previamente, portanto, procuramos um controlador que maximizasse o valor de  $\tau_{max}$  para um atraso mínimo  $\tau_{min} = 0$ .

Para a síntese de tal controlador, primeiramente, utilizamos o Teorema 4.3.1 através da aplicação do Algoritmo 4.3.1 (Simulated Annealing). O ganho de realimentação resultante foi:

$$K = K_{21} = \begin{bmatrix} -0,0040 & -3,6449 \end{bmatrix},$$

e o valor máximo do atraso, para o qual o NCS mantém-se estável satisfazendo as condições da Definição 4.1.1 para  $\gamma = 0,25$ , foi  $\tau_{max} = 1,815$  s. A comparação deste resultado com o resultado da aplicação do Teorema 4.2.1 para o controlador  $K_1$  ( $\tau_{max} = 0$ , s), projetado sem levar em consideração a rede de comunicação, demonstra a importância do projeto de controladores para sistemas de controle em rede que considerem explicitamente a rede de comunicação em sua análise.

Além disso, a análise do problema através da aplicação do Teorema 4.3.2 com o Algoritmo 4.3.2 resultou no seguinte controlador:

$$K = K_{22} = \begin{bmatrix} -0,0010 & -3,2446 \end{bmatrix}.$$

O valor máximo para o atraso de comunicação neste caso foi de  $\tau_{max} = 1,835$  s. Valor pouco superior ao obtido com o uso do Teorema 4.2.1.  $\square$

**Exemplo 4.6.3 (Projeto de controlador  $H_\infty$  para NCS com incertezas de modelo).**

Neste exemplo, consideramos um sistema de controle em rede com atrasos variantes

Tabela 4.2: (Exemplo 4.6.3) Menor valor aceitável de  $\gamma$  para o qual o sistema é estável com  $\tau_{max} = 0,430$  e vários valores distintos para  $\tau_{min}$

Método	$\gamma_{min}$	Controlador obtido		
Yue et al. (2005, Automatica) [83]	1,90	-0.5425	-0.0014	-1.3858
Jiang et al. (2008, TAC) [125]	1,62	-0.6085	-0.0072	-1.4456
<b>Teorema 4.3.1</b> ( $\eta = 1$ )	1.615	-0.5922	-0.0212	-1.5268
<b>Teorema 4.3.2</b> ( $\eta = 1$ )	1.605	-0.6200	-0.0141	-1.5306

e sujeito a incertezas de modelo conforme a descrição a seguir

$$\dot{x}(t) = \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0,5 \\ 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} + H_1 \Delta(t) \Xi_A \right) x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t),$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + 0,1u(t),$$

em que  $\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I$ , e

$$H_1 = \Xi_A = 0,1I, \quad H_2=0, \quad \Xi_B=0, \quad \Xi_C=0, \quad \Xi_D=0.$$

Assumindo que o atraso mínimo da rede de comunicação é  $\tau_{min} = 0,1$  s e o atraso máximo é  $\tau_{max} = 0,5$  s, visamos projetar um controlador robusto  $H_\infty$  que maximizasse a atenuação de perturbações exógenas sobre a saída do sistema em malha fechada, ou seja, que minimizasse o valor de  $\gamma$ . Para síntese de tal controlador, utilizamos as estratégias de controle desenvolvidas neste capítulo. Os resultados da aplicação dos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2, em conjunto com os Algoritmos 4.3.1 (Simulated Annealing) e 4.3.2 (CCLA), respectivamente, são apresentados e comparados com os principais métodos encontrados na literatura na Tabela 4.2. Note que os resultados são superiores aos métodos citados. Além disso, observe que a utilização do Teorema 4.3.2 em conjunto com o Algoritmo 4.3.2 (CCLA) apresenta resultados superiores aos apresentados com o Teorema 4.3.1. Este exemplo também ilustra a eficácia de nossa estratégia de controle robusto  $H_\infty$  para sistemas de controle em rede sujeitos a incertezas de modelo.  $\square$

**Exemplo 4.6.4 (Análise de desempenho  $H_\infty$  para o seguimento de trajetória em NCS).**

Visando ilustrar a eficácia das estratégias desenvolvidas neste Capítulo aplicadas à análise de desempenho robusto  $H_\infty$  para o controle de trajetória em sistemas de controle em rede com atenuação de perturbações com relação ao erro de rastreamento, apresentamos o seguinte sistema em malha aberta que desejamos controlar através da rede de

Tabela 4.3: (Exemplo 4.6.4) Menor valor aceitável de  $\gamma$  para o qual o sistema é estável com  $\tau_{max} = 0,430$  e vários valores distintos para  $\tau_{min}$

Método \ $\tau_{min}$	0	0.05	0.1	0.15	0.2
Gao & Chen (2008, TAC) [5]	3.9018	3.1017	2.5700	2.1922	1.9103
<b>Teorema 4.3.2</b> ( $\eta = 1$ )	1.6279	1.5795	1.5297	1.4787	1.4268
<b>Teorema 4.3.2</b> ( $\eta = 10$ )	1.6279	1.5795	1.5293	1.4781	1.4254
Superior em:	(58, 3%)	(49, 07%)	(40, 5%)	(32, 6%)	(25, 4%)

comunicação:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_p(t) + \begin{bmatrix} 0, 2 \\ 0, 1 \end{bmatrix} \omega(t), \\ y_p(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + 0,5u_p(t), \end{aligned} \quad (4.32)$$

O modelo de referência é descrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= -1x_r(t) \\ y_r(t) &= 0,5x_r(t). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Desejamos ilustrar a eficácia de nossa estratégia de análise de desempenho para o seguimento de trajetória em comparação com os resultados apresentados em [5], que representa o principal método conhecido de controle de trajetória em sistemas de controle em rede. Para tanto, consideramos um controlador conhecido e definido por:

$$K = K_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assumindo um atraso máximo de comunicação  $\tau_{max} = 0,430$  s, apresentamos na Tabela 4.3 os valores mínimos para  $\gamma$  que asseguram as propriedades de desempenho  $H_\infty$  para vários valores distintos de  $\tau_{min}$ . Na Tabela 4.3, também comparamos os resultados com os obtidos em [5], que representa o principal método conhecido na literatura. A partir dos resultados apresentados é fácil observar que o critério apresentado no Teorema 4.2.1 é consideravelmente superior ao método de [5]. No caso em que  $\tau_{min} = 0$ , por exemplo, o método de Gao e Chen [5] assegura um erro de rastreamento limitado segundo o critério  $H_\infty$  em  $\gamma = 3.9018$  com relação ao valor da norma do ruído de perturbação, enquanto ao aplicarmos a estratégia de análise desenvolvidas nesta dissertação asseguramos que o erro é limitado segundo o critério  $H_\infty$  em  $\gamma = 1,6283$ . Esta análise ilustra a importância do estudo e do desenvolvimento de novos critérios menos conservadores na área emergente de sistemas de controle em rede.  $\square$

**Exemplo 4.6.5 (Projeto de controlador  $H_\infty$  para o seguimento de trajetória em NCS).**



Neste exemplo consideramos o mesmo sistema de controle em rede apresentado no Exemplo 4.6.4. O sistema que desejamos controlar é definido por (4.32) e o modelo de referência para o seguimento de trajetória é definido por (4.33). Considerando uma rede de comunicação com atraso máximo definido por  $\tau_{max} = 0,750$  s e um atraso mínimo nulo ( $\tau_{min} = 0$ ), desejamos projetar um controlador robusto  $H_\infty$  que minimize o erro de rastreamento do NCS proposto.

A primeira abordagem considerada foi a aplicação do Teorema 4.3.1 com seleção de parâmetros através da abordagem por força-bruta. Para a aplicação desta abordagem foram simuladas uma série de parâmetros durante oito dias em um dos computadores<sup>2</sup> do Laboratório de Automação e Robótica (LARA). A análise envolveu 150.000 simulações com conjuntos de parâmetros  $\bar{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5]$  distintos. Os parâmetros internos  $\sigma_j$ ,  $j=\{1, 2, 3, 4, 5\}$  poderiam variar dentro de uma faixa definida pelo intervalo  $[-0,5; 0,5]$ . O resultado desta abordagem consideravelmente custosa do ponto de vista computacional foi a obtenção de um controlador

$$K = K_{51} = [-1,3902 \quad -0,5833 \quad 0,4036]$$

com um  $\gamma$  mínimo dado por  $\gamma_1 = 0,4048$ .

A segunda abordagem considerada para a análise do problema proposto foi a aplicação do Teorema 4.3.1 em conjunto com o Algoritmo 4.3.1 (Simulated Annealing). Para esta análise consideramos um número máximo de 250 iterações, as quais foram computadas em cerca de 13 minutos com o mesmo computador utilizado na análise anterior. O resultado da aplicação desta abordagem foi a obtenção do seguinte controlador

$$K = K_{52} = [-1,3636 \quad -0,5746 \quad 0,3945]$$

com valor mínimo de  $\gamma$  dado por  $\gamma_2 = 0,4060$ . Observe que a aplicação do Algoritmo 4.3.1 apesar de apresentar um resultado inferior à análise por força-bruta, é consideravelmente menos custosa computacionalmente.

A última abordagem aplicada considerou o uso do Teorema 4.3.2 com o Algoritmo 4.3.2 (CCLA). Para esta análise consideramos um número máximo de 250 iterações do algoritmo, as quais foram computadas em cerca de 20 minutos com o mesmo computador utilizado para as análises anteriores. Como resultado, obteve-se o seguinte controlador

$$K = K_{53} = [-1,4056 \quad -0,5825 \quad 0,4304]$$

com valor mínimo de  $\gamma$  dado por  $\gamma_3 = 0,4040$ . Pode-se observar que a aplicação desta abordagem se mostrou superior às abordagens resultantes do Teorema 4.3.1. O custo

---

<sup>2</sup>O computador utilizado para as simulações foi um Intel(R) Core(TM) i7, CPU 860@2.8GHz, 8GB de memória RAM com sistema operacional Ubuntu 10.04 (Lucid) com Kernel 2.6.32-25 (64-bit)

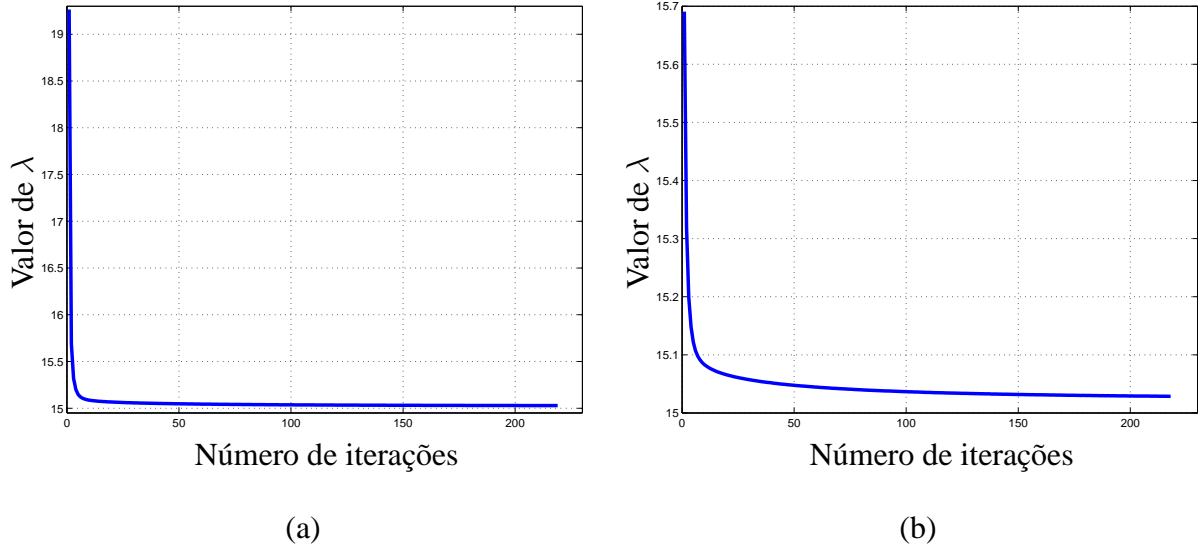


Figura 4.1: (Exemplo 4.6.5) Evolução do valor do traço  $\lambda$  (4.34) com incremento do número de iterações do algoritmo (a). Mesma análise após a eliminação do valor obtido na primeira iteração do algoritmo ( $k=1$ ).

*computacional apesar de maior do que a abordagem pelo uso do Algoritmo 4.3.1 (Simulated Annealing) (devido a inclusão do problema de minimização), ainda é consideravelmente inferior ao custo do método por força-bruta. Outra análise interessante diz respeito ao comportamento do*

$$\lambda = \text{tr} \left( \mathbf{X}\tilde{\mathbf{X}} + \nu_1\tilde{\nu}_1 + \nu_2\tilde{\nu}_2 + \mathcal{U}_1\tilde{\mathcal{U}}_1 + \mathcal{U}_2\tilde{\mathcal{U}}_2 \right), \quad (4.34)$$

*que desejamos minimizar. A evolução deste traço com respeito ao número de iterações é apresentado na Figura 4.1 (a). Para facilitar a visualização, incluímos a Figura 4.1 (b) eliminando o valor obtido na primeira iteração do algoritmo. Note que com o incremento do número de iterações, o traço  $\lambda$  tende a convergir para um valor próximo de 15, sendo que  $\lambda = 15$  corresponde a situação ideal em que  $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$ ,  $\nu_1 = \tilde{\nu}_1$ ,  $\nu_2 = \tilde{\nu}_2$ ,  $\mathcal{U}_1 = \tilde{\mathcal{U}}_1$  e  $\mathcal{U}_2 = \tilde{\mathcal{U}}_2$ .  $\square$*

**Exemplo 4.6.6 (Controle  $H_\infty$  para seguimento de trajetória em um sistema de satélite).**

*Neste exemplo, ilustramos uma situação em que o sistema que desejamos controlar é um sistema de satélite, modelado em [5]. O sistema consiste em dois corpos rígidos unidos por meio de um link flexível, o qual é modelado como uma mola com constante de torque definida por  $k_m=0.09 \text{ Nm}$  e amortecimento viscoso  $f=0.04 \text{ Ns/m}$ . Considerando os dois corpos, denotamos os ângulos de guinada por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e o momento de inércia por  $J_1$  e  $J_2$ . O torque de controle é definido por  $u(t)$  e o ruído de perturbação por  $\omega(t)$ . Assim o sistema dinâmico é definido por:*

$$\begin{aligned} u(t) &= J_1\ddot{\theta}_1(t) + f(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) + k_m(\theta_1(t) - \theta_2(t)), \\ \omega(t) &= J_2\ddot{\theta}_2(t) + f(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) + k_m(\theta_1(t) - \theta_2(t)), \end{aligned}$$

Quando a saída do sistema é a posição angular  $\theta_2$ , o sistema possui a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_m & k_m & -f & f \\ k_m & -k_m & f & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, consideramos o modelo de referência com a seguinte representação

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= -x_r(t) + r(t), \\ y_r(t) &= 0,5x_r(t). \end{aligned}$$

e os parâmetros do sistema com valores conhecidos:  $J_1 = J_2 = 1$ ,  $k_m = 0,09$  e  $f = 0,04$ . Além disso, consideramos uma rede de comunicação que garanta um atraso máximo limitado em  $\tau_{max}=0.030$ . O atraso mínimo da rede de comunicação é estipulado como sendo  $\tau_{min}=0.005$ .

Nestas condições, o Teorema 4.3.2 em conjunto com o Algoritmo 4.3.2 foram utilizados com o intuito de projetar um controlador robusto  $H_\infty$  que minimize o erro de rastreamento do sistema de satélite analisado. Como resultado desta análise, obtemos o seguinte controlador:

$$K_6 = \begin{bmatrix} -61.18 & -68001.18 & -31.96 & -10944.16 & 28888.40 \end{bmatrix}.$$

O valor mínimo de  $\gamma$ , para o qual as condições estipuladas na Definição 4.5.1 são válidas, foi de  $\gamma = 0.0901$ . Os resultados obtidos com esta abordagem são consideravelmente menos conservadores do que os resultados obtidos com outros critérios conhecidos da literatura. Em comparação com o método de Gao & Chen [5] ( $\gamma = 0,1267$ ), a análise teve uma melhora de 29%.

Visando ilustrar as contribuições desta análise, apresentamos uma simulação com os resultados. Para propósitos de simulação, consideramos as seguintes perturbações  $\omega(t) = 1,5\sin(5t)$  e  $r(t) = 10\sin(0,5t)$ . Assume-se que as condições iniciais do sistema de satélite são

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} -0,5 & 1,3 & 0,3 & -0,3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

e do sistema de referência é  $[0,5]$ . O atraso da rede de comunicação foi simulado através de uma distribuição uniforme com limites em 0,005 e 0,030.

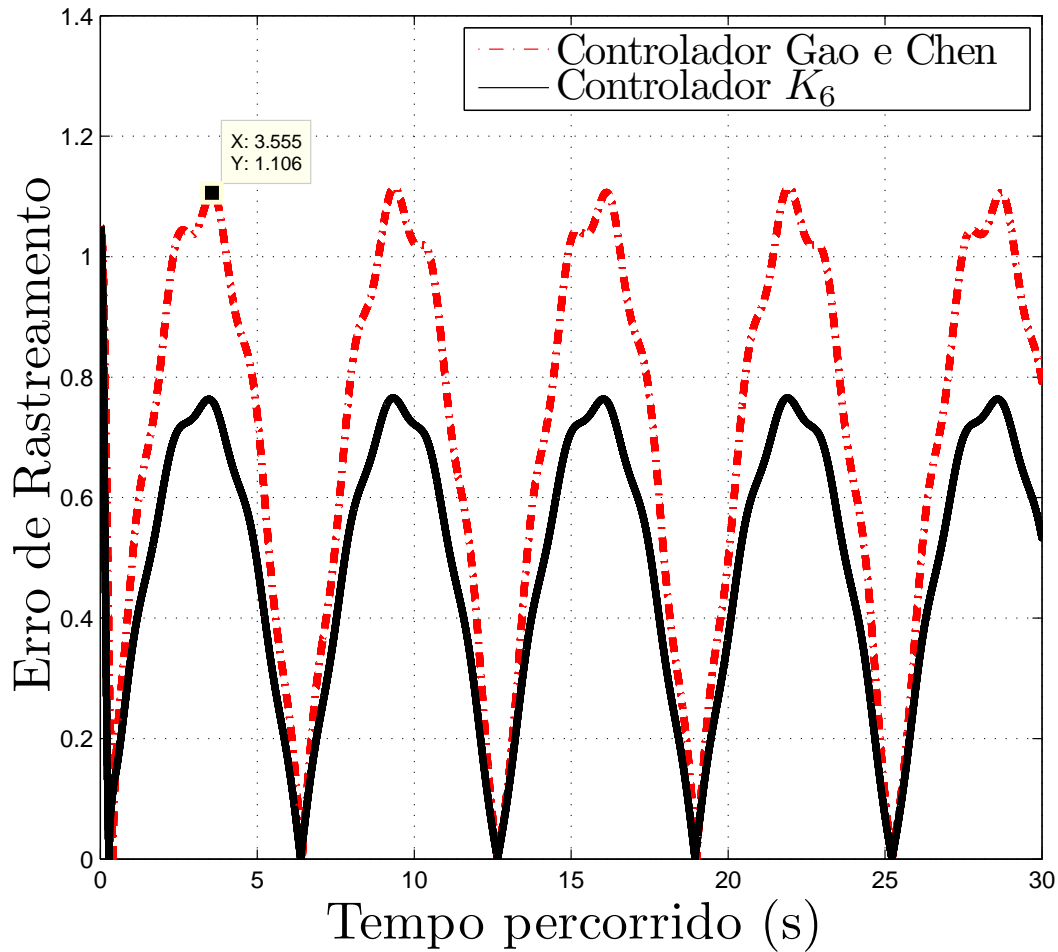


Figura 4.2: Erro de Rastreamento do Teorema 4.3.2 em comparação com o resultado de [5].

*O erro de rastreamento obtido utilizando a abordagem desenvolvida nesta dissertação é comparado com o erro de rastreamento do método estado-da-arte [5]. Esta análise é apresentada na Figura 4.2. Como esperado, o erro de rastreamento com o controlador  $K_6$  projetado a partir do Teorema 4.3.2, fica abaixo do limiar  $\gamma = 0.0901$  obtido com a aplicação do Teorema 4.3.2. De maneira análoga, observe que o erro de rastreamento do método desenvolvido em [5] também fica abaixo do esperado ( $\gamma = 0,1267$ ). Contudo este erro é mais de 30% superior ao erro de rastreamento obtido utilizando nossa abordagem.*

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou técnicas para a análise de estabilidade de sistemas de controle em rede e para a síntese de controladores robustos  $H_\infty$ . A ênfase foi na análise de sistemas de controle em rede a partir da investigação das propriedades de estabilidade de sistemas sujeitos a atrasos no tempo.

Inicialmente, foram apresentadas a definição de sistemas de controle em rede, suas vantagens e as principais questões decorrentes de sua utilização. Em seguida, visando à melhor compreensão dos teoremas propostos, foram apresentados os conceitos fundamentais para a análise de sistemas sujeitos a atrasos no tempo.

No Capítulo 2, foi desenvolvido um novo critério de estabilidade para sistemas atrasados a partir da análise por partes do atraso. Apesar desta contribuição ter se mostrado superior aos métodos estado-da-arte conhecidos da literatura de sistemas atrasados, o método foi aperfeiçoado a partir da incorporação da abordagem por fracionamento do atraso. A nova abordagem foi então estendida para lidar com sistemas sujeitos a incertezas de modelo e com casos especiais nos quais a informação sobre a velocidade de variação da função de atraso é limitada ou indisponível.

As contribuições teóricas para a análise de sistemas atrasados foram em seguida adaptadas para a análise de estabilidade de sistemas de controle em rede representados por equações diferenciais atrasadas. A combinação de técnicas estado-da-arte de análise de sistemas atrasados e as novas abordagens de análise de sistemas atrasados introduzidas nesta dissertação foram fundamentais para o estabelecimento dos novos critérios de estabilidade e de estabilidade robusta para sistemas de controle em rede apresentados no trabalho. Exemplos numéricos foram utilizados para demonstrar a importância desta contribuição para a análise desta classe de sistemas.

A principal contribuição desta dissertação, no entanto, encontra-se no Capítulo 4. Neste capítulo, primeiramente, foi estabelecido um critério de análise de desempenho referente a atenuação de perturbações exógenas de acordo com o critério  $H_\infty$  em sistemas de controle em rede com atrasos variantes no tempo e incertezas de modelo. Em seguida, foi apresentada uma proposta para a síntese de controladores que garantam a estabilidade assintótica e o bom desempenho no sentido  $H_\infty$  relativo à atenuação de sinais de perturbação sobre a saída do NCS. Contudo, a proposta apresentada foi descrita na forma de BMIs e, portanto, sem solução por meio de algoritmos tradicionais. Neste contexto, foram apresentadas duas abordagens para a solução do problema de estabilização robusta  $H_\infty$ . A abordagem trivial normalmente utilizada na literatura e que consiste na substituição de certas matrizes variáveis por escalares constantes foi primeiramente apresentada. Contudo, diferentemente dos métodos encontrados na literatura que não definem critérios para a seleção dos parâmetros, uma

abordagem de seleção por meio do algoritmo de busca heurística *simulated annealing* foi apresentada. Esta abordagem mostrou-se bastante satisfatória em comparação com métodos de seleção manual ou por força-bruta. Além disso, foi apresentada uma segunda abordagem mais sofisticada para a solução do problema de síntese de controladores  $H_\infty$  a partir da aplicação de um algoritmo de linearização por complementaridade cônica. Porém, para a aplicação deste método, o problema teve de ser adaptado por meio de técnicas avançadas de análise para problemas convexos. Esta análise, por sua vez, se mostrou uma importante contribuição teórica para a literatura visto que este algoritmo de linearização não havia sido utilizado para a solução de critérios complexos com várias variáveis.

Outra importante contribuição foi a extensão das estratégias de controle desenvolvidas nesta dissertação para lidar com o problema de controle de trajetória em sistemas de controle em rede com atenuação de perturbações sobre o erro de rastreamento de acordo com o critério  $H_\infty$ . Foi mostrado que o desempenho desta abordagem é satisfatório para o seguimento de um modelo de referência através do controle em rede no sentido de ser robusto aos intempéres da rede de comunicação e atenuar as perturbações sobre o erro de rastreamento.

## 5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A área de pesquisa em sistemas de controle em rede é muito vasta, tanto no que se refere ao desenvolvimento e à aplicação de técnicas de controle como no que se refere à análise dos problemas relacionados ao canal imperfeito de transmissão.

Considerando a perspectiva de controle, novas estratégias de controle poderiam ser desenvolvidas a partir dos resultados desta dissertação. Zheng et al [170] e Lin et al. [171] apresentam uma análise para a síntese de controladores do tipo PID (proporcional-integral-derivativo) através da solução do problema de realimentação de saída com ganhos proporcionais utilizando desigualdades matriciais lineares. Zhang et al. [153] demonstram que esta abordagem pode ser estendida para sistemas de controle em rede a partir da utilização de acumuladores no módulo de controle. A incorporação de controladores do tipo PID com as técnicas de estabilidade robusta  $H_\infty$  desenvolvidas na dissertação tenderiam a melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Outra possível estratégia seria a extensão do critério de estabilidade para sistemas de controle em rede com controladores dinâmicos, já desenvolvida pelos autores [72], para o problema de estabilização robusta  $H_\infty$ . A utilização de controladores dinâmicos seria interessante por considerar separadamente as características particulares do atraso entre os sensores e o controlador e do atraso entre o controlador e o atuador.

Em relação a avaliação experimental, as técnicas desenvolvidas na dissertação poderiam ser aplicadas para a análise e para o controle de diversos sistemas reais através de redes de comunicação. Em especial, o controle de trajetória de veículos aéreos não-tripulados

(VANTs), e.g., os robôs aéreos baseados em VTOL (do inglês *vertical take-off and landing*) pertencentes ao Laboratório de Automação e Robótica (LARA), através de redes sem fio tem potencial para ser uma contribuição relevante à área de robótica aérea.

Por fim, no que se refere à problemas relacionados ao canal imperfeito de transmissão, a utilização de sensores inteligentes que reduzam o tráfego da rede de comunicação se mostra promissora. Em particular, McCann et al. [172] apresentam uma solução de baixo custo computacional para os sensores que envolve a substituição da amostragem periódica tradicional pela amostragem Lebesgue introduzida por Åström e Bernhardsson [173]. Em [172, 127], foi mostrado que esta abordagem apresenta desempenho satisfatório para sistemas lineares com grande redução do número de eventos de comunicação. Apesar dos autores não apresentarem análise de estabilidade, as técnicas apresentadas na dissertação poderiam ser diretamente utilizadas para estabelecer um limite máximo para o intervalo de amostragem dependente do atraso máximo de comunicação.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] K. J. Åström and R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2nd ed. Princeton University Press, 2010.
- [2] G. V. M. da Silva, *Controlo Não Linear*. Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, 2003.
- [3] F. de Oliveira Souza, “Estabilidade e síntese de controladores e filtros robustos para sistemas com retardo no tempo: Novas fronteiras,” Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Minas Gerais, Novembro 2008.
- [4] K. Gu, V. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of time-delay systems*. Boston: Birkhauser, 2003.
- [5] H. Gao and T. Chen, “Network-Based  $H_\infty$  Output Tracking Control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 3, pp. 655–667, Apr. 2008.
- [6] K. Ogata, *Ingenieria de control moderna*, 3rd ed. Prentice-Hall, 1998.
- [7] R. A. Gupta and M.-Y. Chow, “Overview of networked control systems,” in *Networked Control Systems*, F.-Y. Wang and D. Liu, Eds. Springer London, 2008, pp. 1–23.
- [8] F.-Y. Wang, D. Liu, S. Yang, and L. Li, “Guest editorial: Networking, sensing, and control for networked control systems: Architectures, algorithms, and applications,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, vol. 37, no. 2, pp. 157–159, March 2007.
- [9] F.-Y. Wang and D. Liu, *Networked control systems: theory and applications*. London, UK: Springer-Verlag, 2008.
- [10] R. M. Murray, K. J. Åström, S. P. Boyd, R. W. Brockett, and G. Stein., “Control in an information rich world,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 23, no. 2, pp. 20–33, April 2003.
- [11] W. Zhang, M. S. Branicky, and S. M. Phillips, “Stability of networked control systems,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 21, no. 1, pp. 84–99, Fevereiro 2001.
- [12] Y. Halevi and A. Ray, “Integrated communication and control systems: Part 1 analysis,” *J. Dynamic System, Measure, Control*, vol. 110, pp. 367–373, Dec. 1988.
- [13] J. Nilsson, “Real-time control systems with delays,” Ph.D. dissertation, Lund Institute of Technology, Department of Automatic Control., 1998.

- [14] G. C. Walsh, H. Ye, and L. Bushnell, "Stability analysis of networked control systems," in *In Proceedings of the American Control Conference*, 1999, pp. 2876–2880.
- [15] M. S. Branicky, S. M. Phillips, and W. Zhang, "Stability of networked control systems: Explicit analysis of delay," in *In Proceedings of the American Control Conference*, 2000, pp. 2352–2357.
- [16] D. Huang, "Robust control for uncertain networked control systems with random delays," Ph.D. dissertation, Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Auckland, October 2008.
- [17] J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu, "A survey of recent results in networked control systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138–162, Jan. 2007.
- [18] T. Yang, "Networked control system a brief survey," *IEE Proceedings - Control Theory Application*, vol. 153, no. 4, pp. 403–411, Julho 2006.
- [19] P. Naghshtabrizi, "Delay impulsive systems: A framework for modeling networked control systems," Ph.D. dissertation, University of California, Santa Barbara, CA, USA, Sep. 2007.
- [20] Y. Tipsuwan, "Gain scheduling for networked control system," pp. 1–160, 2003.
- [21] P. Antsaklis and J. Baillieul, "Special issue on technology of networked control systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 5–8, Jan. 2007.
- [22] J. Hartman, M. Branicky, and V. Liberatore, "Time-dependent dynamics in networked sensing and control," in *American Control Conference (ACC)*, 2005, pp. 2925–2932.
- [23] G. Alt and W. Lages, "Networked Robot Control with Delay Compensation," in *5th Real-Time Linux Workshop*, 2003.
- [24] E. Kamrani, H. Momeni, and A. Sharafat, "A multi-model adaptive control system for teleoperation via Internet," in *Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications*, no. 1. IEEE, Sept. 2004, pp. 1336–1340.
- [25] E. Slawinski, V. Mut, and J. Postigo, "Teleoperation of mobile robots with time-varying delay," *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 23, no. 5, pp. 1071–1082, 2007.
- [26] D. Schulz, W. Burgard, D. Fox, S. Thrun, and A. Cremers, "Web interfaces for mobile robots in public places," *IEEE Robotics Automation Magazine*, vol. 7, no. 1, pp. 48–56, Mar. 2000.
- [27] A. Stubbs, V. Vladimerou, A. Fulford, D. King, J. Strick, and G. Dullerud, "Multi-vehicle systems control over networks: a hovercraft testbed for networked and decentralized control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 26, no. 3, pp. 56–69, June 2006.

- [28] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed. Prentice-Hall, 1996.
- [29] P. Shcherbakov, “Alexander Mikhailovitch Lyapunov: On the centenary of his doctoral dissertation on stability of motion,” *Automatica*, vol. 28, no. 5, pp. 865 – 871, 1992.
- [30] I. M. F. Ghiggi, “Controle de sistemas com atrasos no tempo na presença de atuadores saturantes,” Ph.D. dissertation, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.
- [31] J.-P. Richard, “Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems,” *Automatica*, vol. 39, no. 10, pp. 1667 – 1694, 2003.
- [32] P. Naghshtabrizi, J. P. Hespanha, and A. R. Teel, “Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems,” *Syst. & Contr. Lett.*, vol. 57, no. 5, pp. 378–385, May 2008.
- [33] Q.-C. Zhong, *Robust Control of Time-delay Systems*. London, UK: Springer-Verlag, 2006.
- [34] F. C. Moon, *Dynamics and Chaos in Manufacturing Process*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1998.
- [35] B. Balachandran, T. Kalmár-Nagy, and D. E. Gilsinn, *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*. Springer-Verlag, 2009.
- [36] M. Kao and J. J. Moskwa, “Turbocharged diesel engine modeling for nonlinear engine control and state estimation,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 117, no. 1, pp. 20 –30, 1995.
- [37] J. Cook and B. Powell, “Modeling of an internal combustion engine for control analysis,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 8, no. 4, pp. 20 –26, Aug. 1988.
- [38] S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, and H. Gorecki, *Analysis and Synthesis of Time-Delay Systems*. John Wiley & Sons, 1989.
- [39] S. Niculescu, *Delay effects on stability: a robust control approach*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2001.
- [40] V. B. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht: Kluwer Academy, 1999.
- [41] N. N. Krasovskii, “Stability of motion,” [*Russian*] Moscow, 1959; Stanford University Press [*English translation*], 1963.
- [42] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, ser. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1993.

- [43] B. S. Razumikhin, “Application of liapunov’s method to problems in the stability of systems with a delay,” *[Russian] Automat. i Telemekh.*, vol. 21, pp. 740–749, 1960.
- [44] P. Park and J. W. Ko, “Stability and robust stability for systems with a time-varying delay,” *Automatica*, vol. 43, no. 10, pp. 1855 – 1858, 2007.
- [45] H. Shao, “New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay,” *Automatica*, vol. 45, no. 3, pp. 744 – 749, 2009.
- [46] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, ser. Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, PA: SIAM, 1994, vol. 15.
- [47] J. R. C. Avelar, “Estabilização Simultânea por Controladores de Ordem Pré-Fixada: Solução Baseada no Método das Projeções Alternadas,” Master’s thesis, Instituto Militar de Engenharia – IME, Dezembro 2007.
- [48] K. R. E, “Lyapunov functions for the problem of lur’e in automatic control,” *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.*, vol. 49, no. 2, pp. 201–205, feb 1963.
- [49] M. Larsen and P. V. Kokotovic, “A brief look at the tsypkin criterion: from analysis to design,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 15, no. 2, pp. 121–128, 2001.
- [50] “Popov and circle criterion,” Lecture notes on Nonlinear Systems and Control, Zurich, 2009.
- [51] V. A. Yakubovich, “The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems, i, ii, iii,” *Automatic and Remote Control*, vol. 25-26, no. 4, April 1967.
- [52] J. Willems, “Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 6, pp. 621 – 634, Dec. 1971.
- [53] E. N. Gonçalves, “Análise e síntese de controladores e filtros robustos para sistemas com domínios politópicos de incerteza,” Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Minas Gerais, Setembro 2006.
- [54] Y. Pyatnitskiy and V. Skorodinskiy, “Numerical methods of lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem,” *Systems & Control Letters*, vol. 2, no. 2, pp. 130 – 135, 1982.
- [55] Y. Nesterov and A. Nemirovsky, *Interior-point polynomial methods in convex programming*. Philadelphia: Studies in Applied Mathematics – SIAM, 1994, vol. 13.

- [56] D. Neumann, “Síntese de controladores robustos  $H_2 \setminus H_\infty$   $\mathcal{D}$ -estáveis via algoritmos evolutivos: Uma abordagem lmi,” Master’s thesis, Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR, 2006.
- [57] L. Vandenberghe and S. Boyd, “Semidefinite programming,” *SIAM Review*, vol. 38, pp. 49–95, March 1996.
- [58] R. C. Oliveira and P. L. Peres, “Lmi conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions,” *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 1, pp. 52 – 61, 2006.
- [59] P. D., “A new robust d-stability condition for real convex polytopic uncertainty,” *Systems and Control Letters*, vol. 40, pp. 21–30(10), 2000.
- [60] Y. He, M. Wu, and J.-H. She, “Improved bounded-real-lemma representation and h inf; control of systems with polytopic uncertainties,” *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 7, pp. 380 – 383, 2005.
- [61] L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, Eds., *Advances in linear matrix inequality methods in control: advances in design and control*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [62] P. Gahinet and A. Nemirovski, “Lmi control toolbox: For use with MATLAB,” The MATH WORKS Inc., Natick, 1995.
- [63] D. Peaucelle, D. Henrion, Y. Labit, and K. Taitz, “User’s guide for SeDuMi interface 1.04,” 2002.
- [64] J. Löfberg, “YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB,” in *CCA/ISIC/CACSD*, Sept. 2004.
- [65] ———, “Nonlinear semidefinite programming in YALMIP,” *SIAM Conference on Optimization*, 2005.
- [66] R. Tutuncu, K. Toh, and M. Toddg, “Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3,” *Mathematical Programming Ser. B*, 95, pp. 189–217, 2003.
- [67] L. F. C. Figueredo, J. Y. Ishihara, G. A. Borges, and A. Bauchspiess, “Delay-Dependent Robust  $H_\infty$  Output Tracking Control for Uncertain Networked Control Systems,” in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, IFAC WC 2011*, Milan, August 2011.
- [68] ———, “Robust stability criteria of uncertain systems with delay and its derivative varying within intervals,” in *American Control Conference*, San Francisco, June 2011.

- [69] ———, “Stability criterion for networked control systems with delay varying within intervals,” in *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*. Delft: IEEE, April 2011.
- [70] ———, “New delay-and-delay-derivative-dependent stability criteria for systems with time-varying delay,” in *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta: IEEE, december 2010.
- [71] L. F. C. Figueredo, P. H. Santana, E. S. Alves, J. Y. Ishihara, G. A. Borges, and A. Bauchspiess, “Estabilidade e estabilização de sistemas de controle em rede com incertezas e atrasos variantes no tempo,” in *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, September 2010.
- [72] P. H. Santana, L. F. C. Figueredo, E. S. Alves, J. Y. Ishihara, G. A. Borges, and A. Bauchspiess, “Stability of networked control systems with dynamic controllers in the feedback loop,” in *18th Mediterranean Conference on Control Automation. MED10.*, 2010, pp. 99–104.
- [73] L. Figueredo, P. Santana, E. Alves, J. Ishihara, G. Borges, and A. Bauchspiess, “Robust stability of networked control systems,” in *IEEE International Conference on Control and Automation. ICCA 2009.*, december 2009, pp. 1535–1540.
- [74] L. Figueredo, F. Couto, and A. Bauchspiess, “An evaluation of rssi based indoor localization systems in wireless sensor networks,” in *IIX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBAI 2009*, September 2009.
- [75] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed., ser. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. New York, NY: Oxford University Press, 1999.
- [76] E. Fridman, U. Shaked, and K. Liu, “New conditions for delay-derivative-dependent stability,” *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2723–2727, 2009.
- [77] D. Yue, E. Tian, and Y. Zhang, “A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 19, no. 13, pp. 1493–1518, September 2009.
- [78] L. Orihuela, P. Millan, C. Vivas, and F. R. Rubio, “Robust stability of nonlinear time-delay systems with interval time-varying delay,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. n/a, 2010.
- [79] ———, “Delay-dependent robust stability analysis for systems with interval delays,” in *American Control Conference (ACC)*. Baltimore: IEEE, june 2010, pp. 4993–4998.
- [80] X. Jiang and Q.-L. Han, “New stability criteria for linear systems with interval time-varying delay,” *Automatica*, vol. 44, no. 10, pp. 2680–2685, Oct. 2008.

- [81] X. Zhang, X. Jiang, and Q.-L. Han, “An improved stability criterion of networked control systems,” in *American Control Conference (ACC)*, june 2010, pp. 586–589.
- [82] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle, “Delay-dependent stability of time delay systems,” in *Proceedings of the 5th IFAC symposium on robust control design – ROCOND 2006*, Toulouse, July 2006.
- [83] D. Yue, Q. Han, and J. Lam, “Network-based robust  $H_\infty$  control of systems with uncertainty,” *Automatica*, vol. 41, no. 6, pp. 999–1007, June 2005.
- [84] X.-L. Zhu and G.-H. Yang, “New results on stability analysis of networked control systems,” *American Control Conference, 2008*, pp. 3792–3797, June 2008.
- [85] H. Yan, M. Q.-H. Meng, and X. Huang, “Modeling and robust stability criterion of uncertain networked control systems with time-varying delays,” *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*, pp. 188–192, June 2008.
- [86] Y. He, Q.-G. Wang, C. Lin, and M. Wu, “Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay,” *Automatica*, vol. 43, no. 2, pp. 371–376, 2007.
- [87] S. Zhu, Z. Li, and C. Zhang, “Delay decomposition approach to delay-dependent stability for singular time-delay systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 11, p. 2613, 2010.
- [88] B. Du, J. Lam, Z. Shu, and Z. Wang, “A delay-partitioning projection approach to stability analysis of continuous systems with multiple delay components,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 3, no. 4, p. 383, 2009.
- [89] Q.-l. Han, “A delay decomposition approach to stability and  $H_\infty$  control of linear time-delay systems – Part I: Stability,” in *7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, no. 1, June 2008.
- [90] ———, “A delay decomposition approach to stability and  $H_\infty$  control of linear time-delay systems – Part II:  $H_\infty$  control,” in *7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, no. 1, June 2008, pp. 289–294.
- [91] G. E. Dullerud and F. Paganini, *A Course in Robust Control Theory A Convex Approach*, 1st ed., ser. Texts in Applied Mathematics. New York, NY: Springer-Verlag, 2000.
- [92] C.-T. Chen and C.-S. Dai, “Robust controller design for a class of nonlinear uncertain chemical processes,” *Journal of Process Control*, vol. 11, no. 5, pp. 469 – 482, 2001.
- [93] J. Sun, G. Liu, J. Chen, and D. Rees, “Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays,” *Automatica*, vol. 46, no. 2, pp. 466–470, 2010.

- [94] X.-L. Zhu and Y. Wang, “Improved Jensen integral inequality approach to stability analysis of continuous-time systems with interval time-varying delay,” *American Control Conference*, pp. 6573–6578, June 2010.
- [95] X. Jiang and Q.-L. Han, “On  $H_\infty$  control for linear systems with interval time-varying delay,” *Automatica*, vol. 41, no. 12, pp. 2099 – 2106, 2005.
- [96] E. Fridman and U. Shaked, “An improved stabilization method for linear time-delay systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 11, pp. 1931 – 1937, Nov 2002.
- [97] ———, “Delay-dependent stability and  $h_\infty$  control: constant and time-varying delays,” *International Journal of Control*, vol. 76, no. 1, pp. 48–60, 2003.
- [98] M. Wu, Y. He, J.-H. She, and G.-P. Liu, “Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems,” *Automatica*, vol. 40, no. 8, pp. 1435 – 1439, 2004.
- [99] C. Lien, “Delay-dependent stability criteria for uncertain neutral systems with multiple time-varying delays via lmi approach,” *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, vol. 152, no. 6, pp. 707 – 714, 2005.
- [100] Y. He, M. Wu, J.-H. She, and G.-P. Liu, “Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 5, pp. 828 – 832, May 2004.
- [101] Y. He, Q.-G. Wang, L. Xie, and C. Lin, “Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 2, pp. 293–299, Feb. 2007.
- [102] X.-L. Zhu and G.-H. Yang, “Jensen integral inequality approach to stability analysis of continuous-time systems with time-varying delay,” *Control Theory Applications, IET*, vol. 2, no. 6, pp. 524 – 534, 2008.
- [103] J. Sun, G. Liu, J. Chen, and D. Rees, “Improved stability criteria for linear systems with time-varying delay,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 4, p. 683, 2010.
- [104] X. Li and C. Souza, “Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a linear matrix inequality approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1144 – 1148, Aug. 1997.
- [105] S.-I. Niculescu, A. Trofino Nito, J.-M. Dion, and L. Dugard, “Delay-dependent stability of linear systems with delayed state: an lmi approach,” in *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, Dec. 1995, pp. 1495 – 1496 vol.2.



- [106] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, and Y. S. Lee, “Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems,” *International Journal of Control*, vol. 74, no. 14, pp. 1447–1455, 2001.
- [107] E. Fridman, “Stability of linear descriptor systems with delay: a lyapunov-based approach,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 273, no. 1, pp. 24 – 44, 2002.
- [108] Q.-L. Han, “Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type,” *Automatica*, vol. 38, no. 4, pp. 719 – 723, 2002.
- [109] S. Xu and J. Lam, “Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 3, pp. 384 – 387, 2005.
- [110] D. Yue, Q.-L. Han, and C. Peng, “State feedback controller design of networked control systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 51, no. 11, pp. 640–644, Nov. 2004.
- [111] W. Qian, S. Cong, Y. Sun, and S. Fei, “Novel robust stability criteria for uncertain systems with time-varying delay,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 215, no. 2, pp. 866–872, Sept. 2009.
- [112] X. J. Jing, D. L. Tan, and Y. C. Wang, “An LMI approach to stability of systems with severe time-delay,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 7, July 2004.
- [113] Y. Tipsuwan and M.-Y. Chow, “Control methodologies in networked control systems,” *Control Engineering Practice*, vol. 11, no. 10, pp. 1099–1111, Oct. 2003.
- [114] M. Cloosterman, N. van de Wouw, M. Heemels, and H. Nijmeijer, “Robust stability of networked control systems with time-varying network-induced delays,” *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pp. 4980–4985, Dezembro 2006.
- [115] P. Naghshtabrizi, J. P. Hespanha, and A. R. Teel, “On the robust stability and stabilization of sampled-data systems: A hybrid system approach,” in *Proc. of the 45th Conf. on Decision and Contr.*, Dec. 2006.
- [116] —, “Stability of delay impulsive systems with application to network control systems,” in *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, july 2007, pp. 4899–4904.
- [117] —, “Stability of delay impulsive systems with application to networked control systems,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, pp. 4899–4904, july 2008.

- [118] Y. Zhang and J. Sun, “Stability of discrete impulsive systems with time delays,” in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, no. 1, Dec. 2009, pp. 7227–7231.
- [119] “Stabilization of networked control systems with data packet and network delays via switching system approach,” in *Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and Control*, Paradise Island, Bahamas, 2004, pp. 3539–3544.
- [120] H. Lin and P. J. Antsaklis, “Stability and persistent disturbance attenuation properties for a class of networked control systems - switched system approach,” *International Journal of Control*, vol. 78, no. 18, pp. 1448–1458, Dezembro 2005.
- [121] H. Lin, G. Zhai, and P. J. Antsaklis, “Asymptotic stability and disturbance attenuation properties for a class of networked control systems,” *IET Control Theory & Applications*, no. 1, pp. 76–85, 2006.
- [122] D. Xie, X. Chen, L. Lv, and N. Xu, “Asymptotical stabilisability of networked control systems: time-delay switched system approach,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, no. 9, p. 743, 2008.
- [123] U. Ozguner, H. Goktas, H. Chan, J. Winkelman, M. Liubakka, and R. Krtolica, “Automotive suspension control through a computer communication network,” in *First IEEE Conference on Control Applications*, Sep 1992, pp. 895–900 vol.2.
- [124] X.-L. Zhu and G.-H. Yang, “Stability analysis and state feedback control of networked control systems with multi-packet transmission,” *American Control Conference, 2008*, pp. 3133–3138, June 2008.
- [125] X. Jiang, Q.-L. Han, S. Liu, and A. Xue, “A new  $H_\infty$  stabilization criterion for networked control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 4, pp. 1025–1032, May 2008.
- [126] Y. Xu and J. Hespanha, “Estimation under uncontrolled and controlled communications in networked control systems,” pp. 842–847, Dec. 2005.
- [127] R. McCann and A. Le, “Lebesgue sampling with a kalman filter in wireless sensors for smart appliance networks,” in *Industry Applications Society Annual Meeting, 2008. IAS '08. IEEE*, Oct. 2008, pp. 1–5.
- [128] S. Ward, *Electrical Engineering*, 1st ed. Global Media, 2007.
- [129] M. Parlakci, “Robust stability of uncertain time-varying state-delayed systems,” *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, vol. 153, no. 4, pp. 469–477, 2006.

- [130] H. S. Park, Y. H. Kim, D. S. Kim, and W. H. Kwon, “A scheduling method for network-based control systems,” *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 3, pp. 318–330, Maio 2002.
- [131] X. Jiang and Q. Han, “Delay-dependent robust stability for uncertain linear systems with interval time-varying delay,” *Automatica*, vol. 42, no. 6, pp. 1059–1065, 2006.
- [132] J. Gao, H. Su, X. Ji, and J. Chu, “Robust stabilization for a class of nonlinear networked control systems,” *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 6, pp. 300–304, 2008, 10.1007/s11768-008-6164-5.
- [133] T. J. Su and C. G. Huang, “Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 10, pp. 1656–1659, Oct 1992.
- [134] B. Xu, “Comments on robust stability of delay dependent for linear uncertain systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 2365–2368, 1994.
- [135] X. J. Jing, “Stability and planning of internet-based tele-robotic systems,” Ph.D. dissertation, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang, China, 2004.
- [136] E. B. Castelan, “Estabilização de sistemas descritores por realimentação de saídas via subespaços invariantes,” *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, vol. 16, pp. 467 – 477, 12 2005.
- [137] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, “Multiobjective output-feedback control via lmi optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 7, pp. 896–911, July 1997.
- [138] C. W. Scherer, “The riccati inequality and state-space  $H_\infty$  optimal control,” Ph.D. dissertation, Mathematical Institute, University of Wurzburg, 1990.
- [139] G. Zames, “Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 2, pp. 301 – 320, Apr. 1981.
- [140] D. Limebeer, “Introductory lectures on  $H_\infty$  optimal control,” Lecture Notes Summer School on  $H_\infty$  Control and Robust Stabilization (Dutch System and Control Theory Network), 1990.
- [141] H. Lin, G. Zhai, and P. Antsaklis, “Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of networked control systems,” in *Proceedings of the IEEE 42nd Conference on Decision and Control*, vol. 2, 2003, pp. 1182 – 1187 Vol.2.

- [142] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami, “A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems,” in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, Sept. 1996, pp. 246–251.
- [143] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami, “A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1171–1176, 1997.
- [144] H. Yan, M. Q.-H. Meng, H. Zhang, and B. Li, “A delay-range-dependent approach to robust  $H_\infty$  control for uncertain linear systems with time-varying delays,” in *IEEE International Conference on Information and Automation*, June 2009, pp. 687–692.
- [145] H. Yan, H. Zhang, and M. Q.-H. Meng, “Delay-range-dependent robust  $H_\infty$  control for uncertain systems with interval time-varying delays,” *Neurocomputing*, vol. 73, no. 7-9, pp. 1235–1243, Mar. 2010.
- [146] D. Paul, “Training of HMM recognizers by simulated annealing,” in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '85.*, vol. 10, Apr. 1985, pp. 13–16.
- [147] S. Rajasekaran, “On the convergence time of simulated annealing,” Department of Computer and Information Science Technical, University of Pennsylvania, Tech. Rep. MS-CIS-90-89, 1990.
- [148] B. Hajek, “Cooling schedules for optimal annealing,” *Mathematics of Operations Research*, vol. 13, pp. 311–329, May 1988.
- [149] V. Granville, M. Krivanek, and J.-P. Rasson, “Simulated annealing: a proof of convergence,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 16, no. 6, pp. 652–656, June 1994.
- [150] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, 2000.
- [151] O. L. Mangasarian and J. S. Pang, “The extended linear complementarity problem,” *SIAM Journal on Matrix Analysis Applications*, vol. 16, pp. 359–368, April 1995. [Online]. Available: <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=201524.201526>
- [152] H. Zhang, Y. Shi, and A. S. Mehr, “Robust  $H_\infty$  PID control for networked control systems with acceptable noise rejection,” in *American Control Conference (ACC)*, Baltimore, 2010, pp. 1356–1361.
- [153] ———, “Robust  $H_\infty$  PID control for multivariable networked control systems with disturbance/noise attenuation,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011.

- [154] T. Li, L. Guo, and Y. Zhang, “Delay-range-dependent robust stability and stabilization for uncertain systems with time-varying delay,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, no. 13, pp. 1372–1387, Sept. 2008.
- [155] O. Kwon and J. Park, “Delay-range-dependent stabilization of uncertain dynamic systems with interval time-varying delays,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 208, no. 1, pp. 58–68, Feb. 2009.
- [156] E. Tian, D. Yue, and Y. Zhang, “Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for t–s fuzzy system with interval time-varying delay,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160, no. 12, pp. 1708–1719, June 2009.
- [157] B. Tang, G.-P. Liu, and W.-H. Gui, “Improvement of state feedback controller design for networked control systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 55, no. 5, pp. 464–468, May 2008.
- [158] E. Prempain., “A comparison of two algorithms for the static  $H_\infty$  loop shaping problem,” in *IFAC World Congress*, Prague, 2005.
- [159] D. Braganza, W. E. Dixon, D. M. Dawson, and B. Xian, “Tracking control for robot manipulators with kinematic and dynamic uncertainty,” *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 23, no. 2, pp. 117–126, 2008.
- [160] D. M. Dawson, Z. Qu, and J. J. Carroll, “Tracking control of rigid-link electrically driven robot manipulators,” *International Journal of Control*, vol. 56, no. 5, pp. 991–1006, Nov. 1992.
- [161] F. Liao, J. L. Wang, and G.-H. Yang, “Reliable robust flight tracking control: an LMI approach,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 1, pp. 76–89, 2002.
- [162] X. Chen and C.-Y. Su, “Robust output tracking control for the systems with uncertainties,” *International Journal of Systems Science*, vol. 33, no. 4, pp. 247–257, 2002.
- [163] N. Shieh, K. Liang, and C. Mao, “Robust Output Tracking Control of an Uncertain Linear System via a Modified Optimal Linear-Quadratic Method,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 117, no. 3, pp. 649–659–659, 2003.
- [164] I. Lopez, C. Abdallah, S. Jayaweera, and H. Tanner, “Conditions for tracking in networked control systems,” in *Proc. of the 47th IEEE Conf. on Decision and Control*, december 2008.
- [165] Y.-L. Wang and G.-H. Yang, “Robust  $H_\infty$  model reference tracking control for networked control systems with communication constraints,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 7, no. 6, pp. 992–1000, Dec. 2009.

- [166] Q.-K. Li, J. Zhao, and G. Dimirovski, “Robust tracking control for switched linear systems with time-varying delays,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, no. 6, p. 449, 2008.
- [167] N. van de Wouw, P. Naghshtabrizi, M. Cloosterman, and J. P. Hespanha, “Tracking control for networked control systems,” in *46th IEEE Conference on Decision and Control*, december 2007, pp. 4441–4446.
- [168] ———, “Tracking control for sampled-data systems with uncertain time-varying sampling intervals and delays,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 20, no. 4, pp. 387–411, 2009.
- [169] H. Gao and T. Chen, “ $H_\infty$  Model Reference Control for Networked Feedback Systems,” in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, Dec. 2006, pp. 5591–5596.
- [170] F. Zheng, Q.-G. Wang, and T. H. Lee, “On the design of multivariable pid controllers via lmi approach,” *Automatica*, vol. 38, no. 3, pp. 517 – 526, 2002.
- [171] C. Lin, Q.-G. Wang, and T. H. Lee, “An improvement on multivariable pid controller design via iterative lmi approach,” *Automatica*, vol. 40, no. 3, pp. 519 – 525, 2004.
- [172] R. McCann, A. Gunda, and S. Damugatla, “Improved operation of networked control systems using lebesgue sampling,” in *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, vol. 2, Oct. 2004, pp. 1211–1216 vol.2.
- [173] K. Åström and B. Bernhardsson, “Comparison of riemann and lebesgue sampling for first order stochastic systems,” in *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, vol. 2, Dec. 2002, pp. 2011–2016 vol.2.
- [174] P. Park, “A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 4, pp. 876–877, April 1999.
- [175] W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 4th ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1992, section 4.9, pp. 256–258.
- [176] R. E. Skelton, T. E. Iwasaki, and K. Grigoriadis, *A unified algebraic approach to control design*. Taylor & Francis, 1997.
- [177] M. C. Oliveira and R. E. Skelton, *Perspectives in robust control*, 1st ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2001, pp. 241–257.

## APÊNDICES





A.1 PROVA DO TEOREMA 2.1.1 – [CAPÍTULO 2]

Para deduzirmos a prova do Teorema 2.1.1, primeiramente, consideremos o caso em que  $d(t) < \tau_2$ . Tomando a derivada da função de Lyapunov candidata (2.5) e considerando o caso corrente em que  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 1$ , obtemos a seguinte expressão <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t)|_{d(t) < \tau_2} &= \frac{\dot{d}(t)}{\tau_2 - \tau_1} x^T(t) (P_1 - P_2) x(t) + \dot{x}^T(t) \left( \frac{d(t) - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} P_1 + \frac{\tau_2 - d(t)}{\tau_2 - \tau_1} P_2 \right) x(t) \\ &+ x^T(t) \left( \frac{d(t) - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} P_1 + \frac{\tau_2 - d(t)}{\tau_2 - \tau_1} P_2 \right) \dot{x}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{V}_2(t) = x^T(t - \tau_1) Q_1 x(t - \tau_1) - (1 - \dot{d}(t)) x^T(t - d(t)) Q_1 x(t - d(t)), \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{V}_3(t) = \begin{bmatrix} x(t - \tau_1) \\ x(t - \tau_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \tau_1) \\ x(t - \tau_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(t - \tau_2) \\ x(t - \tau_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \tau_2) \\ x(t - \tau_3) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{V}_4(t) = x(t) M x(t) - x^T(t - \tau_1) M x(t - \tau_1), \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{V}_5(t) = \dot{x}^T(t) [\tau_1^2 S_1] \dot{x}(t) - \tau_1 \int_{t - \tau_1}^t \dot{x}^T(s) S_1 \dot{x}(s) ds, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t) &= \dot{x}^T(t) [(\tau_2 - \tau_1) Z_1 + (\tau_3 - \tau_2) Z_2] \dot{x}(t) - \int_{t - \tau_2}^{t - \tau_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t - \tau_3}^{t - \tau_2} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_7(t)|_{d(t) < \tau_2} &= \dot{x}^T(t) [(\tau_2 - d(t)) (R_1 - R_3) + d(t) (R_1 + R_2) + (\tau_3 - d(t)) (R_3 + R_4)] \dot{x}(t) \\ &- \int_{t - \tau_2}^{t - d(t)} \dot{x}^T(s) (R_1 - R_3) \dot{x}(s) ds - \dot{d}(t) \int_{t - d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_1 - R_3) \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t - d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_1 + R_2) \dot{x}(s) ds + \dot{d}(t) \int_{t - d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_1 + R_2) \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t - \tau_3}^{t - d(t)} \dot{x}^T(s) (R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds - \dot{d}(t) \int_{t - d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Visando facilitar a análise, iremos agrupar as derivadas de  $V_6(t)$  e  $V_7(t)$ , as quais possuem

---

<sup>1</sup>Para maiores explicações sobre como derivar os termos  $V_5(t)$ ,  $V_6(t)$  e  $V_7(t)$  consulte o Lema B.0.1 no Apêndice B.

vários termos em comum, no seguinte termo:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{6-7}(t)|_{d(t)<\tau_2} &= \dot{x}^T(t) [(\tau_2-\tau_1) Z_1 + (\tau_3-\tau_2) Z_2 + \tau_2 R_1 + d(t)R_2 + (\tau_3-\tau_2) R_3 \\
&+ (\tau_3-d(t))R_4] \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau_3}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \\
&- \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) (R_1-R_3) \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau_3}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) (R_3+R_4) \dot{x}(s) ds \\
&- \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + \left( 1-\dot{d}(t) \right) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Tendo separado todos os termos contendo integrais em um único termo  $\dot{V}_{6-7}(t)|_{d(t)<\tau_2}$ , iremos expandir suas integrais no maior número de termos possíveis. Para tal, devemos levar em consideração o intervalo em que o atraso está contido  $\tau_1 \leq d(t) < \tau_2$ . A ideia é reduzir os intervalos de integração visando diminuir o conservadorismo decorrente da aplicação da desigualdade de Jensen. Como resultado, teremos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
&- \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds = - \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds, \\
&- \int_{t-\tau_3}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) (R_3+R_4) \dot{x}(s) ds = \\
&\quad - \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) (R_3+R_4) \dot{x}(s) ds - \int_{t-\tau_3}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) (R_3+R_4) \dot{x}(s) ds, \\
&- \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + \left( 1-\dot{d}(t) \right) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds = \\
&\quad - \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + \left( 1-\dot{d}(t) \right) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds \\
&\quad - \int_{t-d(t)}^{\tau_1} \dot{x}^T(s) \left( R_1 + \left( 1-\dot{d}(t) \right) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Após a substituição dos termos de (A.9) em (A.8), agrupamos os termos semelhantes de forma a obtermos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{6-7}(t)|_{d(t)<\tau_2} &= \dot{x}^T(t) \left( (\tau_2-\tau_1) Z_1 + (\tau_3-\tau_2) Z_2 + \tau_2 R_1 + (\tau_3-\tau_2) R_3 \right. \\
&\quad \left. + (\tau_3-\tau_2) R_4 + (\tau_2-d(t)) R_4 + \tau_2 \frac{(d(t)-\tau_1)}{\tau_2-\tau_1} R_2 + \tau_1 \frac{(\tau_2-d(t))}{\tau_2-\tau_1} R_2 \right) \dot{x}(t) \\
&- \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + \left( 1-\dot{d}(t) \right) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds \\
&- \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) \left( Z_1 + R_1 + \left( 1-\dot{d}(t) \right) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds \\
&- \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) \left( Z_1 + (R_1-R_3) + (R_3+R_4) \right) \dot{x}(s) ds \\
&- \int_{t-\tau_3}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) \left( Z_2 + R_3 + R_4 \right) \dot{x}(s) ds. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Observe que as integrais em (A.5) e em (A.10) apresentam vetores que não podem ser desassociados e, portanto, não podemos solucionar as integrais. Para resolver este problema, uma das soluções usuais é a introdução de termos cruzados do tipo  $2\alpha^T\beta$  e a utilização das desigualdades de Park-Moon (vide [174, 106] e Lema B.0.4) de forma a introduzir outros termos na Lyapunov e eliminar ou isolar as integrais. Todavia, esta solução não é ideal e é muito mais conservadora do que a utilização da desigualdade de Jensen (Lema B.0.2, no Apêndice B), recentemente introduzida como uma solução para este problema. Por apresentar melhores resultados e não envolver novas variáveis, utilizaremos esta solução no decorrer do trabalho. Aplicando a desigualdade de Jensen em (A.5) e em (A.10), obtemos as seguintes expressões

$$\dot{V}_5(t) = \dot{x}^T(t) [\tau_1^2 S_1] \dot{x}(t) - [x(t) - x(t - \tau_1)]^T S_1 [x(t) - x(t - \tau_1)], \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{6-7}(t)|_{d(t) < \tau_2} = & \dot{x}^T(t) ((\tau_2 - \tau_1) Z_1 + (\tau_3 - \tau_2) Z_2 + \tau_2 R_1 + (\tau_3 - \tau_2) R_3 + (\tau_3 - \tau_2) R_4 \\ & + (\tau_2 - d(t)) R_4 + \tau_2 \frac{(d(t) - \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} R_2 + \tau_1 \frac{(\tau_2 - d(t))}{\tau_2 - \tau_1} R_2) \dot{x}(t) \\ & - [x(t) - x(t - \tau_1)]^T \left( \frac{1}{\tau_1} (R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4) \right) [x(t) - x(t - \tau_1)] \\ & - \frac{1}{\tau_3 - \tau_2} [x(t - \tau_2) - x(t - \tau_3)]^T (Z_2 + R_3 + R_4) [x(t - \tau_2) - x(t - \tau_3)] \\ & - \left[ \frac{1}{d(t) - \tau_1} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds \right]^T (d(t) - \tau_1) (Z_1 + R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4) \left[ \frac{1}{d(t) - \tau_1} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds \right] \\ & - \left[ \frac{1}{\tau_2 - d(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \right]^T (\tau_2 - d(t)) (Z_1 + R_1 + R_4) \left[ \frac{1}{\tau_2 - d(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Neste ponto é interessante ressaltar que para a aplicação correta da desigualdade de Jensen introduzimos as restrições

$$\begin{aligned} & (Z_1 + R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4) > 0, \\ & \left( S_1 + \frac{1}{\tau_1} (R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4) \right) > 0, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

que são satisfeitas se as restrições em (2.8), para o caso em que  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}$  e  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}$ , também forem satisfeitas. Estas restrições são necessárias pois, conforme a definição do Lema B.0.2 no Apêndice B, a matriz central da desigualdade de Jensen deve ser simétrica definida positiva. Todavia, devido à derivada do atraso que pode assumir tanto valores positivos como negativos, e também devido à maior liberdade quanto às restrições sobre a positividade das matrizes  $R_k$ ,  $k = \{1, 2, 3, 4\}$ , não podemos assumir *a priori* que os termos a esquerda de (A.13) são definidos positivos. Quanto aos outros termos, é fácil concluir que são positivos. Analisando termo por termo, de acordo com as restrições impostas em (2.6)

e em (2.8), para  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}$  e  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}$ , tem-se que a soma  $(Z_2 + R_3 + R_4)$  é definida positiva pois  $Z_2 > 0$  e  $(R_3 + R_4) > 0$ ; e que a soma  $(Z_1 + R_1 + R_4)$  é definida positiva pois, de acordo com (2.6),  $(Z_1 + R_1) > R_3$  e  $(R_3 + R_4) > 0$ .

Não obstante, para facilitar a análise, definiremos os seguintes termos:

$$\xi_{1d}(t) := \frac{1}{d(t) - \tau_1} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds \quad \text{e} \quad \xi_{d2}(t) := \frac{1}{\tau_2 - d(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds, \quad (\text{A.14})$$

que são termos contínuos. Observa-se ainda que  $\lim_{d(t) \rightarrow \tau_1} \xi_{1d}(t) = \dot{x}(t - \tau_1)$ , e que  $\lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} \xi_{d2} = \dot{x}(t - \tau_2)$ .

Tendo investigado a derivada da função de Lyapunov candidata (2.5) e estruturado seus termos de maneira específica, definiremos o seguinte vetor de estado de estados:

$$\zeta_1^T(t) := \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) & \xi_{1d}^T(t) & \xi_{d2}^T(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

em que  $\zeta_1^T(t) \in \mathbb{R}^{8r_x}$ . Desta maneira, podemos organizar os termos resultantes de  $\dot{V}_1(t) - \dot{V}_7(t)$  em (A.1)-(A.4), (A.11) e (A.12), combinando-os na forma da seguinte LMI:

$$\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \zeta_1^T(t) (\Omega|_{d(t) < \tau_2}) \zeta_1(t), \quad (\text{A.16})$$

em que

$$\Omega|_{d(t) < \tau_2} = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} & 0 \\ 0 & \Lambda^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8r_x \times 8r_x},$$

$$\Lambda^{(1)} = - \begin{bmatrix} (d(t) - \tau_1) \left( Z_1 + R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) & 0 \\ 0 & (\tau_2 - d(t)) (Z_1 + R_1 + R_4) \end{bmatrix}.$$

e  $\Psi^{(1)}$  é definido em (2.10).

Continuando a análise, suponha agora a existência das matrizes

$$\tilde{G}_{11} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{12} := \begin{bmatrix} (d(t) - \tau_1) I & 0 \\ 0 & (\tau_2 - d(t)) I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

tal que  $\tilde{G}_1 := \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3r_x \times 8r_x}$ . Observe que esta definição foi feita com o intuito específico de obtermos a seguinte propriedade:

$$\tilde{G}_1 \zeta_1(t) = 0.$$

Esta propriedade é necessária para a aplicação do Lema de Finsler (Lema B.0.3 no Apêndice B) sobre a expressão no lado direito da desigualdade (A.16). Para a aplicação do lema, definiremos a matriz de ponderação livre, i.e. sem restrições sobre sua positividade,

$F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$ , tal que possamos obter  $\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1^T & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{8r_x \times 3r_x}$ . Desta maneira, podemos afirmar que a expressão no lado direito da Equação (A.16) é definida negativa somente se a seguinte expressão for válida,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega|_{d(t) < \tau_2} + \tilde{F}_1 \tilde{G}_1 + \tilde{G}_1^T \tilde{F}_1^T \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + F_1 \tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{11}^T F_1^T & F_1 \tilde{G}_{12} \\ * & \Lambda^{(1)} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

É interessante acrescentar que a aplicação do método de Finsler não é a única maneira de se obter a expressão (A.18) a partir de (A.16). Uma outra possibilidade é a introdução de expressões nulas utilizando a fórmula de Leibniz-Newton:

$$2\zeta_1^T(t) \tilde{F}_1 \begin{bmatrix} x(t-d(t)) - x(t-\tau_1) + (d(t)-\tau_1)\xi_{1d}(t) \\ x(t-\tau_2) - x(t-d(t)) + (\tau_2-d(t))\xi_{d2}(t) \\ Ax(t) + A_d x(t-d(t)) - \dot{x}(t) \end{bmatrix} = 0,$$

visto que

$$\begin{bmatrix} x(t-d(t)) - x(t-\tau_1) + (d(t)-\tau_1)\xi_{1d}(t) \\ x(t-\tau_2) - x(t-d(t)) + (\tau_2-d(t))\xi_{d2}(t) \\ Ax(t) + A_d x(t-d(t)) - \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ademais, observe que  $\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t)$  é literalmente igual a  $\zeta_1^T(t) (\Omega|_{d(t) < \tau_2}) \zeta_1(t)$ , visto que  $\zeta_1^T(t) (\tilde{F}_1 \tilde{G}_1 + \tilde{G}_1^T \tilde{F}_1^T) \zeta_1(t) = 0$ . Todavia a aplicação do Lema de Finsler nos traz uma maior flexibilidade quanto as possíveis manipulações sobre a LMI (A.16), incluindo a possibilidade de eliminação das matrizes de ponderação livre obtendo o mesmo resultado.

Retornando à análise inicial, temos que provar que  $\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t) < 0$ . Para tanto, consideremos agora os casos especiais de  $\Omega_1$  em que  $d(t) \rightarrow \tau_1$  e  $d(t) \rightarrow \tau_2$ . Analisando as matrizes resultantes,  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$ , é notável que todos os termos contendo  $(d(t)-\tau_1)$  são eliminados da primeira matriz e são substituídos por  $(\tau_2-\tau_1)$  na segunda matriz, enquanto o inverso ocorre com os termos contendo  $(\tau_2-d(t))$ . Aproveitando-se desta condição, podemos reorganizar a LMI apresentada em (A.18) da seguinte maneira:

$$\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t) = \frac{\tau_2-d(t)}{(\tau_2-\tau_1)} \zeta_1^T(t) (\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}) \zeta_1(t) + \frac{d(t)-\tau_1}{(\tau_2-\tau_1)} \zeta_1^T(t) (\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \zeta_1(t),$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1} &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_1} + F_1 \tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{11}^T F_1^T & F_1 \tilde{G}_{12}|_{d(t) \rightarrow \tau_1} \\ * & \Lambda^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_1} \end{bmatrix}, \\ \Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2} &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} + F_1 \tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{11}^T F_1^T & F_1 \tilde{G}_{12}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} \\ * & \Lambda^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Além disso, analisando os termos derivados de  $\tilde{G}_{12}$  e  $\Lambda^{(1)}$ , observa-se a existência de linhas e colunas de zeros em  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$ . Isto ocorre porque todos os termos

que multiplicam  $\xi_{1d}(t)$  são eliminados quando fazemos  $d(t) \rightarrow \tau_1$  e o mesmo ocorre com os termos de  $\xi_{d2}(t)$  quando fazemos  $d(t) \rightarrow \tau_2$ . Eliminando estas linhas e colunas nulas de  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  obteremos exatamente as matrizes  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$  definidas em (2.9). Nota-se então que podemos reescrever  $\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t)$  da seguinte maneira:

$$\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t) = \frac{\tau_2 - d(t)}{(\tau_2 - \tau_1)} \zeta_{11}^T(t)\Omega_{11}\zeta_{11}(t) + \frac{d(t) - \tau_1}{(\tau_2 - \tau_1)} \zeta_{12}^T(t)\Omega_{12}\zeta_{12}(t), \quad (\text{A.19})$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) & \xi_{d2}^T(t) \end{bmatrix} \\ \zeta_{12}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) & \xi_{1d}^T(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ademais, observa-se que  $\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t)$  é convexo em relação a  $d(t)$ . Como consequência da expressão (A.19) é notável que  $\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t)$  é um termo negativo definido apenas se os vértices  $\zeta_{11}^T(t)\Omega_{11}\zeta_{11}(t)$  e  $\zeta_{12}^T(t)\Omega_{12}\zeta_{12}(t)$  forem definidos negativos.

Não obstante, dada a definição do intervalo válido da derivada do atraso em (2.3), podemos inferir a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}, \\ \Omega_{12} &= \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

de forma que possamos concluir que os termos  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$  são convexos em relação a  $\dot{d}(t) \in [d_{min}, d_{max}]$ . Assim da expressão (A.21) podemos concluir que  $\Omega_{1k}$  é definido negativo apenas se  $\Omega_{1k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$  e  $\Omega_{1k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$  forem definidos negativos para  $k = \{1, 2\}$ . Desta maneira concluímos a primeira parte da prova do Teorema 2.1.1.

Agora, deveremos nos focar no caso em que  $\tau_2 < d(t) \leq \tau_3$ . Provaremos que resultados análogos ao primeiro caso podem ser obtidos utilizando argumentos semelhantes. Considerando o caso corrente, em que  $d(t) > \tau_2$ , a derivada da função de Lyapunov candidata (2.5) resulta em expressões para as derivadas de  $V_2(t)$ ,  $V_3(t)$ ,  $V_4(t)$ ,  $V_5(t)$ ,  $V_6(t)$ , respectivamente, iguais as expressões obtidas em (A.2), (A.3), (A.4), (A.5) e (A.6). Contudo, para as derivadas

de  $V_1(t)$  e  $V_7(t)$ , obtemos as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t)|_{d(t)>\tau_2} &= \frac{\dot{d}(t)}{\tau_3-\tau_2} x^T(t) (P_3-P_1) x(t) + \dot{x}^T(t) \left( \frac{d(t)-\tau_2}{\tau_3-\tau_2} P_3 + \frac{\tau_3-d(t)}{\tau_3-\tau_2} P_1 \right) x(t) \\ &+ x^T(t) \left( \frac{d(t)-\tau_2}{\tau_3-\tau_2} P_3 + \frac{\tau_3-d(t)}{\tau_3-\tau_2} P_1 \right) \dot{x}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_7(t)|_{d(t)>\tau_2} &= \dot{x}^T(t) [(d(t)-\tau_2) (R_3-R_1) + d(t) (R_1+R_2) + (\tau_3-d(t)) (R_3+R_4)] \dot{x}(t) \\ &- \int_{t-d(t)}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) (R_3-R_1) \dot{x}(s) ds + \dot{d}(t) \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_3-R_1) \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_1+R_2) \dot{x}(s) ds + \dot{d}(t) \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_1+R_2) \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-\tau_3}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) (R_3+R_4) \dot{x}(s) ds - \dot{d}(t) \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) (R_3+R_4) \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Observe que, de acordo com as restrições impostas em (2.6) com relação a  $P_1$ , podemos inferir que  $(P_3-P_1) = (P_1-P_2)$ . Ademais, dado que os subintervalos derivados do intervalo  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$  são equidistantes, podemos afirmar que o primeiro termo a direita da expressão (A.22), i.e.,  $\frac{\dot{d}(t)}{\tau_3-\tau_2} x^T(t) (P_3-P_1) x(t)$  é igual ao termo  $\frac{\dot{d}(t)}{\tau_2-\tau_1} x^T(t) (P_1-P_2) x(t)$  que aparece em (A.1). Desta maneira, ao apresentarmos as condições de estabilidade na forma de desigualdades matriciais lineares, em (2.10), este último termo é substituído pelo termo que aparece em (A.1).

Em seguida, de maneira semelhante ao primeiro caso, iremos agrupar os termos  $V_6(t)$  e  $\dot{V}_7(t)|_{d(t)>\tau_2}$  em um único termo  $\dot{V}_{6-7}(t)|_{d(t)>\tau_2}$ . Ademais, iremos expandir suas integrais no maior número de termos possíveis considerando o intervalo corrente em que o atraso está contido, i.e.,  $\tau_2 < d(t) \leq \tau_3$ . Obtemos então o seguinte termo resultante

$$\begin{aligned} \dot{V}_{6-7}(t)|_{d(t)>\tau_2} &= \dot{x}^T(t) ((\tau_2-\tau_1)Z_1 + (\tau_3-\tau_2)Z_2 + \tau_2R_1 + (\tau_3-\tau_2)R_3 \\ &+ (\tau_3-d(t))R_4 + \tau_3 \frac{(d(t)-\tau_2)}{\tau_3-\tau_2} R_2 + \tau_2 \frac{(\tau_3-d(t))}{\tau_3-\tau_2} R_2) \dot{x}(t) \\ &- \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + (1-\dot{d}(t))R_2 + \dot{d}(t)R_4 \right) \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) \left( Z_1 + R_1 + (1-\dot{d}(t))R_2 + \dot{d}(t)R_4 \right) \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-d(t)}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) \left( Z_2 + (1-\dot{d}(t))R_2 + R_3 + \dot{d}(t)R_4 \right) \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-\tau_3}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) (Z_2 + R_3 + R_4) \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

De maneira análoga ao que foi feito em (A.10), utilizaremos a desigualdade de Jensen (Lema B.0.2) para solucionar o problema dos termos que não podem ser desassociados dentro das integrais presentes em (A.5) e em (A.24). Assim, obtemos as seguintes expressões

resultantes,

$$\dot{V}_5(t) = \dot{x}^T(t) [\tau_1^2 S_1] \dot{x}(t) - [x(t) - x(t - \tau_1)]^T S_1 [x(t) - x(t - \tau_1)], \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{6-7}(t)|_{d(t) > \tau_2} &= \dot{x}^T(t) ((\tau_2 - \tau_1) Z_1 + (\tau_3 - \tau_2) Z_2 + \tau_2 R_1 \\ &\quad + (\tau_3 - \tau_2) R_3 + (\tau_3 - d(t)) R_4 + \tau_3 \frac{(d(t) - \tau_2)}{\tau_3 - \tau_2} R_2 + \tau_2 \frac{(\tau_3 - d(t))}{\tau_3 - \tau_2} R_2) \dot{x}(t) \\ &\quad - [x(t) - x(t - \tau_1)]^T \left( \frac{1}{\tau_1} (R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4) \right) [x(t) - x(t - \tau_1)] \\ &\quad - \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} [x(t - \tau_1) - x(t - \tau_2)]^T (Z_1 + R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4) [x(t - \tau_1) - x(t - \tau_2)] \\ &\quad - \xi_{2d}^T(t) (d(t) - \tau_2) (Z_2 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + R_3 + \dot{d}(t) R_4) \xi_{2d}(t) \\ &\quad - \xi_{d3}^T(t) (\tau_3 - d(t)) (Z_2 + R_3 + R_4) \xi_{d3}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

em que  $\xi_{2d}(t)$  e  $\xi_{d3}(t)$  são definidos da seguinte maneira

$$\xi_{2d}(t) := \frac{1}{d(t) - \tau_2} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_2} \dot{x}(s) ds \quad \text{e} \quad \xi_{d3}(t) := \frac{1}{\tau_3 - d(t)} \int_{t-\tau_3}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds. \quad (\text{A.27})$$

Observe ainda que as restrições apresentadas em (A.13) e as restrições seguintes

$$(Z_2 + R_3 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4) > 0, \quad (\text{A.28})$$

devem ser satisfeitas para que possamos utilizar corretamente a desigualdade de Jensen nesta etapa. Para tanto, adicionamos as restrições descritas em (2.8), para  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{\min}$  e  $\dot{d}(t) \rightarrow d_{\max}$ , nas condições do teorema 2.1.1. Quanto ao último termo de (A.24), i.e.,  $(Z_2 + R_3 + R_4)$ , podemos assumir que este é definido positivo pois  $Z_2 > 0$  e  $(R_3 + R_4) > 0$ .

Agruparemos todos os termos resultantes de  $\dot{V}_1(t) - \dot{V}_7(t)$ , presentes em (A.2)-(A.4), (A.22), (A.25) e (A.26), de maneira a organizar-los conforme a seguinte desigualdade matricial

$$\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} \leq \zeta_2^T(t) (\Omega|_{d(t) > \tau_2}) \zeta_2(t), \quad (\text{A.29})$$

em que

$$\begin{aligned} \Omega|_{d(t) > \tau_2} &= \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} & 0 \\ 0 & \Lambda^{(2)} \end{bmatrix}, \\ \Lambda^{(2)} &= - \begin{bmatrix} (d(t) - \tau_2) (Z_2 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + R_3 + \dot{d}(t) R_4) & 0 \\ 0 & (\tau_3 - d(t)) (Z_2 + R_3 + R_4) \end{bmatrix}, \\ \zeta_2^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t - \tau_1) & x^T(t - \tau_2) & x^T(t - \tau_3) & \xi_{2d}^T(t) & \xi_{d3}^T(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e  $\Psi^{(2)}$  é definido em (2.10).

Não obstante, de maneira semelhante ao primeiro caso, aplicaremos o Lema de Finsler (Lema B.0.3, no Apêndice B) sobre a expressão no lado direito da Equação (A.29). Para



tanto, definiremos a matriz  $\tilde{G}_2 := \begin{bmatrix} \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3r_x \times 8r_x}$ , tal que

$$\tilde{G}_2 \zeta_2(t) = 0,$$

em que

$$\tilde{G}_{21} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{22} := \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_2)I & 0 \\ 0 & (\tau_3-d(t))I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, introduziremos a seguinte matriz de ponderação livre  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$ , tal que possamos obter  $\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2^T & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{8r_x \times 3r_x}$ . Desta maneira, podemos afirmar que a expressão no lado direito da Equação (A.29) é definida negativa (e consequentemente a expressão no lado esquerdo) somente se a seguinte afirmação for válida,

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \Omega|_{d(t) > \tau_2} + \tilde{F}_2 \tilde{G}_2 + \tilde{G}_2^T \tilde{F}_2^T \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + F_2 \tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{21}^T F_2^T & F_2 \tilde{G}_{22} \\ * & \Lambda^{(2)} \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Consideremos agora os casos especiais de  $\Omega_2$  em que  $d(t) \rightarrow \tau_2$  e  $d(t) \rightarrow \tau_3$ . Analisando as matrizes resultantes,  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  e  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}$ , é notável que todos os termos contendo  $(d(t)-\tau_2)$  são eliminados da primeira matriz e são substituídos por  $(\tau_3-\tau_2)$  na segunda matriz, enquanto o inverso ocorre com os termos contendo  $(\tau_3-d(t))$ . Então de maneira análoga ao procedimento realizado em (A.19), iremos reorganizar a LMI apresentada em (A.30) da seguinte maneira:

$$\zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t) = \frac{\tau_3-d(t)}{(\tau_3-\tau_2)} \zeta_{21}^T(t) \Omega_{21} \zeta_{21}(t) + \frac{d(t)-\tau_2}{(\tau_3-\tau_2)} \zeta_{22}^T(t) \Omega_{22} \zeta_{22}(t), \quad (\text{A.31})$$

em que as matrizes  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  são definidas em (2.9) e

$$\begin{aligned} \zeta_{21}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) & \xi_{d3}^T(t) \end{bmatrix} \\ \zeta_{22}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) & \xi_{2d}^T(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que as matrizes  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  são respectivamente equivalentes as matrizes  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  e  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}$  após eliminarmos as linhas e colunas de zeros presentes nestas matrizes. De forma que as expressões  $\zeta_{2k}^T(t) \Omega_{2k} \zeta_{2k}(t)$  e  $\zeta_2^T(t) (\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_{k+1}}) \zeta_2(t)$  sejam equivalentes para  $k=\{1, 2\}$ . Então analisando a convexidade de  $\zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t)$  em relação a  $d(t)$ , verifica-se ser suficiente analisar a viabilidade das expressões  $\Omega_{21} < 0$  e  $\Omega_{22} < 0$  para garantir que a expressão  $\zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t) < 0$  seja válida.

Ademais, conhecendo o intervalo que delimita a derivada do atraso, (2.3), podemos inferir que

$$\Omega_{21} = \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}, \quad (\text{A.32})$$

$$\Omega_{22} = \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}, \quad (\text{A.33})$$

de forma que, semelhantemente a (A.21), podemos concluir que  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  são convexos em relação a  $\dot{d}(t) \in [d_{min}, d_{max}]$  e que a viabilidade das expressões  $\Omega_{21} < 0$  e  $\Omega_{22} < 0$  é garantida se  $\Omega_{1k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$  e  $\Omega_{1k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$  forem definidos negativos para  $k = \{1, 2\}$ .

Finalmente, após investigado a derivada da função de Lyapunov candidata (2.5), estamos preparados para finalizar a prova do Teorema 2.1.1. Para tal, devemos estabelecer condições que garantam que a derivada da função de Lyapunov seja negativa. Considerando o caso, em que  $d(t) \neq \tau_2$ , a seguinte expressão é válida

$$\dot{V}(t)|_{d(t) \neq \tau_2} \leq \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) \zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t) + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) \zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t).$$

Ademais, para o segundo caso, em que  $d(t) = \tau_2$ , considerando a definição de estabilidade de Lyapunov (1.2.1), podemos concluir que

$$\dot{V}(t)|_{d(t) = \tau_2} \leq \max \{ \zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t), \zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t) \}.$$

Por conseguinte, podemos concluir que se as condições apresentadas em (2.9) na forma de LMIs forem satisfeitas, então a função candidata de Lyapunov (2.5) é estritamente decrescente, i.e.,  $\dot{V}(t)$  é definida negativa, para o intervalo de atraso considerado em (2.2),  $d(t) \in [\tau_{min}, \tau_{max}]$ , o que conclui a prova do Teorema 2.1.1. ■

## A.2 PROVA DO TEOREMA 2.1.2 – [CAPÍTULO 2]

Para a prova do Teorema 2.1.2, desejamos derivar condições para as quais a função candidata de Lyapunov-Krasovskii, descrita em (2.12), seja decrescente. Para tal, similarmente a metodologia aplicada na prova do Teorema 2.1.1, utilizaremos o método de análise por partes e realizaremos uma análise separada para cada um dos subintervalos do atraso. Para o primeiro intervalo, tomaremos a derivada da função de Lyapunov candidata (2.12), considerando o intervalo corrente em que  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 1$ . Não obstante, observe que o resultados das derivadas dos termos  $V_1(t)$ - $V_3(t)$ ,  $V_6(t)$  e  $V_7(t)$  já foram obtidos em (A.1)-(A.3) e em (A.12). Portanto, iniciaremos a análise a partir das derivadas dos novos termos de Lyapunov  $V_4(t)$  e  $V_5(t)$ , explicitas a seguir,

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & \begin{bmatrix} x(t - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{V}_5(t) = \sum_{k=1}^{\eta} \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right) \left( \frac{\tau_1}{\eta} \dot{x}^T(t) S_k \dot{x}(t) - \int_{t - \frac{k}{\eta}\tau_1}^{t - \frac{k-1}{\eta}\tau_1} \dot{x}^T(s) S_k \dot{x}(s) ds \right), \quad (\text{A.35})$$

Não obstante, observe que o termo

$$- \int_{t - \tau_1}^t \dot{x}^T(s) \left( R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds$$

presente na derivada da função  $V_7(t)$ , em (A.10) e em (A.24), pode ser expandido em  $\eta$ -vezes, de acordo com a divisão do intervalo  $[0, \tau_{min}]$ , da seguinte maneira,

$$- \sum_{k=1}^{\eta} \int_{t - \frac{k}{\eta}\tau_1}^{t - \frac{k-1}{\eta}\tau_1} \dot{x}^T(s) \left( R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \dot{x}(s) ds. \quad (\text{A.36})$$

Assim, resgatamos este termo para, então, combinarmos este com as integrais em (A.35). Destarte, aplicamos a desigualdade de Jensen no termo resultante e, assim, obtemos a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) \leq & \sum_{k=1}^{\eta} \left( \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right)^2 \dot{x}^T(t) S_k \dot{x}(t) - \left[ x \left( t - \frac{k-1}{\eta}\tau_1 \right) - x \left( t - \frac{k}{\eta}\tau_1 \right) \right]^T \right. \\ & \left. \times \left( S_k + \frac{\eta}{\tau_1} \left( R_1 + (1 - \dot{d}(t)) R_2 + \dot{d}(t) R_4 \right) \right) \left[ x \left( t - \frac{k-1}{\eta}\tau_1 \right) - x \left( t - \frac{k}{\eta}\tau_1 \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Além disso, analogamente a (A.15) e visando facilitar a análise, definimos a variável de estados  $\zeta_1(t) \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x}$ , da seguinte maneira

$$\zeta_1^T(t) := \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{1d}^T(t) & \xi_{d2}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

para  $\eta \geq 2$  (observe que para o caso em que  $\eta=1$ , utiliza-se o mesmo  $\zeta_1^T(t)$  definido em (A.15)). Em seguida, devemos agrupar os termos previamente obtidos  $\dot{V}_1(t)$ - $\dot{V}_3(t)$ ,  $\dot{V}_6(t)$  e  $\dot{V}_7(t)$ , em (A.1)-(A.12), juntamente com os novos termos  $\dot{V}_4(t)$ - $\dot{V}_5(t)$ , em (A.34) e (A.37), a fim de construirmos a seguinte LMI, estabelecida a partir destes resultados prévios.

$$\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \zeta_1^T(t) (\Omega|_{d(t) < \tau_2}) \zeta_1(t), \quad (\text{A.39})$$

em que

$$\Omega|_{d(t) < \tau_2} = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)}(d(t)) & 0 & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x \times (7+\eta)r_x},$$

$$\Lambda^{(1)} = \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_1) \Lambda_2^{(1)} & 0 \\ 0 & (\tau_2-d(t)) \Lambda_1^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.40})$$

e os termos  $\Psi^{(1)}(d(t))$ ,  $\Lambda_1^{(1)}$ ,  $\Lambda_2^{(1)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (2.16).

Continuando a análise, introduzimos a matriz  $\tilde{G}_1 \in \mathbb{R}^{3r_x \times (7+\eta)r_x}$ , definida da seguinte maneira,

$$\tilde{G}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12}(d(t)) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.41})$$

em que

$$\tilde{G}_{11} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3r_x \times 6r_x}, \quad \tilde{G}_{12} := \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_1)I & 0 \\ 0 & (\tau_2-d(t))I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3r_x \times 2r_x}.$$

Observe que  $\zeta_1(t) \in \mathcal{N}\{\tilde{G}_1\}$ , i.e.,  $\zeta_1(t)$  pertence ao espaço nulo da matriz  $\tilde{G}_1$  e, portanto,  $\tilde{G}_1 \zeta_1(t) = 0$ . Esta propriedade, como discutido na subseção anterior, é necessária para a correta aplicação do método de Finsler (Lema B.0.3, no Apêndice B).

Então, a partir da definição do método de Finsler, introduzimos a matriz de ponderação livre, i.e. sem restrições sobre sua positividade,  $F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$ , tal que  $\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1^T & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x \times 3r_x}$ . Destarte, podemos afirmar que a expressão no lado direito da desigualdade (A.39) é definida negativa e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} < 0$ , se a seguinte afirmação for válida

$$\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t) = \zeta_1^T(t) \left( \Omega|_{d(t) < \tau_2} + \tilde{F}_1 \tilde{G}_1 + \tilde{G}_1^T \tilde{F}_1^T \right) \zeta_1(t) < 0.$$

Ademais, visando facilitar a análise, explicitaremos os termos da matriz  $\Omega_1$ , de forma que esta possa ser reescrita da seguinte maneira,

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + F_1 \tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{11}^T F_1^T & F_1 \tilde{G}_{12} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Não obstante, a fim de utilizarmos as propriedades de convexidade da matriz  $\Omega_1$ , consideraremos os limites do atraso para este caso, i.e.,  $d(t) \rightarrow \tau_1$  e  $d(t) \rightarrow \tau_2$ . Analisando as matrizes resultantes,  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$ , observamos que ao eliminarmos as linhas e colunas nulas, advindas das linhas e colunas ponderadas por  $(d(t) - \tau_1)$  e  $(\tau_2 - d(t))$ , obtemos respectivamente as matrizes  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$ , definidas em (2.16). Ademais, podemos reescrever a expressão  $\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t)$  por uma expressão equivalente,

$$\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t) = \frac{\tau_2 - d(t)}{(\tau_2 - \tau_1)} \zeta_{11}^T(t) \Omega_{11} \zeta_{11}(t) + \frac{d(t) - \tau_1}{(\tau_2 - \tau_1)} \zeta_{12}^T(t) \Omega_{12} \zeta_{12}(t), \quad (\text{A.43})$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{d2}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(6+\eta)r_x}, \\ \zeta_{12}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{1d}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(6+\eta)r_x}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Assim, podemos observar melhor a propriedade de convexidade de  $\Omega_1$  com relação a  $d(t)$ . Por conseguinte, conclui-se que a matriz  $\Omega_1$  e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2}$ , são definidas negativas se e somente se  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$  forem definidas negativas. Ademais, a partir do intervalo que delimita a derivada do atraso variante (2.3), podemos reescrever as matrizes resultantes da seguinte maneira

$$\Omega_{11} = \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}, \quad (\text{A.45})$$

$$\Omega_{12} = \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}. \quad (\text{A.46})$$

e, portanto, utilizando a mesma análise de convexidade agora para  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$  com relação a  $\dot{d}(t)$ , podemos inferir que as matrizes são definidas negativas se e somente se  $\Omega_{1k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$  e  $\Omega_{1k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$  forem matrizes definidas negativas, para  $k = \{1, 2\}$ .

Desta maneira concluímos a primeira parte da prova do Teorema 2.1.2. Deveremos agora nos focar no segundo intervalo, em que  $\tau_2 < d(t) \leq \tau_3$ . Primeiramente, devemos analisar a derivada da função candidata de Lyapunov (2.12), considerando o segundo subintervalo. Não obstante, o resultado desta derivada já foi previamente obtido em (A.1)-(A.3), para

$\dot{V}_1(t)-\dot{V}_3(t)$ , em (A.26) para  $\dot{V}_6(t)-\dot{V}_7(t)$ , e em (A.34)-(A.37) para  $\dot{V}_4(t)-\dot{V}_5(t)$ . Por conseguinte, iniciaremos a análise a partir da construção da seguinte desigualdade matricial linear, estabelecida com os resultados previamente obtidos,

$$\dot{V}(t)|_{d(t)>\tau_2} \leq \zeta_2^T(t) \left( \Omega|_{d(t)>\tau_2} \right) \zeta_2(t), \quad (\text{A.47})$$

em que

$$\Omega|_{d(t)>\tau_2} = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)}(d(t)) & 0 & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x \times (7+\eta)r_x},$$

$$\Lambda^{(2)} = \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_2) \Lambda_2^{(2)} & 0 \\ 0 & (\tau_3-d(t)) \Lambda_1^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

e os termos  $\Psi^{(2)}(d(t))$ ,  $\Lambda_1^{(2)}$ ,  $\Lambda_2^{(2)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (2.16).

Similarmente a análise feita para o primeiro intervalo, introduziremos uma matriz  $\tilde{G}_2 \in \mathbb{R}^{3r_x \times (7+\eta)r_x}$ , tal que  $\zeta_2(t) \in \mathcal{N}\{\tilde{G}_2\}$ , i.e.,  $\zeta_2(t)$  pertença ao seu espaço nulo e, portanto,  $\tilde{G}_2 \zeta_2(t) = 0$ . Destarte, definiremos

$$\tilde{G}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22}(d(t)) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.49})$$

em que  $\tilde{G}_{21} \in \mathbb{R}^{3r_x \times 6r_x}$  e  $\tilde{G}_{22}(d(t)) \in \mathbb{R}^{3r_x \times 2r_x}$  são definidos a seguir,

$$\tilde{G}_{21} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{22}(d(t)) := \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_2)I & 0 \\ 0 & (\tau_3-d(t))I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, introduzimos a a matriz de ponderação livre, i.e. sem restrições sobre sua positividade,  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$ , tal que  $\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x \times 3r_x}$ . Assim, verificamos que a expressão no lado direito da desigualdade (A.47) é definida negativa e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t)>\tau_2} < 0$ , se a seguinte afirmação for válida

$$\zeta_2^T(t) \left( \Omega|_{d(t)>\tau_2} + \tilde{F}_2 \tilde{G}_2 + \tilde{G}_2^T \tilde{F}_2^T \right) \zeta_2(t) < 0.$$

Todavia, para facilitar a análise definiremos a matriz  $\Omega_2$  da seguinte maneira,

$$\Omega_2 = \left( \Omega|_{d(t)>\tau_2} + \tilde{F}_2 \tilde{G}_2 + \tilde{G}_2^T \tilde{F}_2^T \right) = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + F_2 \tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{21}^T F_2^T & F_2 \tilde{G}_{22} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.50})$$

Analogamente ao primeiro intervalo, consideremos agora os casos especiais referentes a (A.50) em que  $d(t) \rightarrow \tau_2$  e  $d(t) \rightarrow \tau_3$ . Após a eliminação das linhas e colunas nulas, as matrizes resultantes  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  e  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}$  são equivalentes as matrizes  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$ , definidas

em (2.16). Não obstante, observa-se que devido a convexidade de  $\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t)$  em relação a  $d(t)$ , a seguinte expressão é válida,

$$\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t) = \frac{\tau_3-d(t)}{(\tau_3-\tau_2)}\zeta_{21}^T(t)\Omega_{21}\zeta_{21}(t) + \frac{d(t)-\tau_2}{(\tau_3-\tau_2)}\zeta_{22}^T(t)\Omega_{22}\zeta_{22}(t), \quad (\text{A.51})$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta_{21}^T(t) &:= \left[ x^T(t) \quad x^T(t-d(t)) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t-\tau_1) \quad x^T(t-\tau_2) \quad x^T(t-\tau_3) \right. \\ &\quad \left. \xi_{d3}^T(t) \quad x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) \quad \dots \quad x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \right] \in \mathbb{R}^{(6+\eta)r_x}, \\ \zeta_{22}^T(t) &:= \left[ x^T(t) \quad x^T(t-d(t)) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t-\tau_1) \quad x^T(t-\tau_2) \quad x^T(t-\tau_3) \right. \\ &\quad \left. \xi_{2d}^T(t) \quad x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) \quad \dots \quad x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \right] \in \mathbb{R}^{(6+\eta)r_x}, \end{aligned}$$

Destarte, podemos inferir que  $\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t)$  é definida negativa e, conseqüentemente, a expressão  $\dot{V}(t)|_{d(t)>\tau_2} < 0$  é válida, se e somente se  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  forem definidas negativas. Além disso, dada a convexidade das matrizes resultantes em relação a  $\dot{d}(t)$ , podemos realizar uma análise análoga a (A.46), e, desta forma, concluir que estas matrizes são definidas negativas se e somente se  $\Omega_{2k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$  e  $\Omega_{2k}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$  forem matrizes definidas negativas, para  $k=\{1, 2\}$ .

Finalmente, após investigado a derivada da nova função de Lyapunov candidata, definida em (2.12), estamos preparados para finalizar a prova do Teorema 2.1.2. Neste contexto, estamos procurando condições que garantam que a derivada da função de Lyapunov seja negativa. Considerando o caso, em que  $d(t) \neq \tau_2$ , observamos que se as condições estipuladas no Teorema 2.1.2, então a seguinte expressão é válida

$$\dot{V}(t)|_{d(t) \neq \tau_2} \leq \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) \zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t) + (1-\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) \zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t).$$

Além disso, para o caso em que  $d(t) = \tau_2$ , podemos concluir que

$$\dot{V}(t)|_{d(t)=\tau_2} \leq \max \{ \zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t), \zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t) \}.$$

Desta forma, podemos concluir que a função candidata de Lyapunov (2.5) é estritamente decrescente, i.e.,  $\dot{V}(t)$  é definida negativa, para o sistema com atrasos variantes e desconhecidos satisfazendo (2.2) e (2.3), o que conclui a prova do Teorema 2.1.2. ■

### A.3 PROVA DO TEOREMA 2.2.1 – [CAPÍTULO 2]

A prova do Teorema relativo a estabilidade robusta de sistemas com atrasos variantes sujeitos a incertezas de modelo possui uma série de similaridades com a prova do Teorema 2.1.2, visto que ambos Teoremas são baseados na mesma função candidata de Lyapunov, descrita em (2.12). Não obstante, observa-se que o resultado da derivação desta função de Lyapunov já foi deduzido anteriormente. Para o primeiro subintervalo de atraso, i.e.,  $\tau_1 \leq d(t) < \tau_2$ , as derivadas resultantes são apresentadas em (A.1)-(A.12), (A.34) e (A.37). Enquanto, para o segundo intervalo, as derivadas resultantes são apresentadas em (A.22)-(A.26), (A.34) e (A.37). Desta maneira, iniciaremos a análise, para o caso em que  $d(t) < \tau_2$ , a partir da combinação das derivadas resultantes e da construção da LMI

$$\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \zeta_1^T(t) (\Omega|_{d(t) < \tau_2}) \zeta_1(t), \quad (\text{A.52})$$

em que a matriz  $(\Omega|_{d(t) < \tau_2})$  é definida em (A.39) e  $\zeta_1(t)$  é definido em (A.38).

Observe que apesar de utilizarmos o mesmo vetor de estados auxiliar  $\zeta_1(t)$ , existem diferenças consideráveis entre o caso nominal e o caso corrente, i.e., o caso robusto. Isto por conta da presença das incertezas de modelo definidas em (2.18). Devido a estas incertezas, a dinâmica do sistema incerto com atrasos variantes difere do caso nominal, e é definida em (2.17) por

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)).$$

Por conseguinte, diferentemente do caso nominal, verifica-se que  $\zeta_1(t) \notin \mathcal{N}\{\tilde{G}_1\}$ , i.e.,  $\zeta_1(t)$  não pertence ao espaço nulo da matriz  $\tilde{G}_1$ , definida em (A.41). Como resultado, não podemos utilizar a matriz  $\tilde{G}_1$  para a análise baseada no lema de Finsler. Consideremos então uma nova matriz  $\bar{G}_1 \in \mathbb{R}^{3r_x \times (7+\eta)r_x}$ , tal que  $\zeta_1(t)$  seja uma solução para o sistema homogêneo correspondente. Deste modo, definimos a matriz  $\bar{G}_1 = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & 0 \end{bmatrix}$ , em que

$$\bar{G}_{11} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ (A + \Delta A) & (A_d + \Delta A_d) & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_{12} := \begin{bmatrix} (d(t) - \tau_1)I & 0 \\ 0 & (\tau_2 - d(t))I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.53})$$

Observe que desta maneira verificamos a validade da expressão  $\bar{G}_1 \zeta_1(t) = 0$ .

Então, visando a aplicação do lema de Finsler sobre a expressão no lado direito de (A.52), introduzimos a matriz de ponderação livre  $F_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$ , tal que possamos, de maneira semelhante ao caso nominal, obter  $\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x \times 3r_x}$ . Por conseguinte, podemos afirmar que a expressão no lado direito de (A.52) é definida negativa se a seguinte expressão for válida

$$\Omega|_{d(t) < \tau_2} + \bar{F}_1 \bar{G}_1 + \bar{G}_1^T \bar{F}_1^T = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + F_1 \bar{G}_{11} + \bar{G}_{11}^T F_1^T & F_1 \bar{G}_{12} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.54})$$



em que os termos  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (2.16) e  $\Lambda^{(1)}$  é definido em (A.39).

Não obstante, se considerarmos as definições de  $\Delta A$  e  $\Delta A_d$ , em (2.18), podemos explicitar seus termos em  $\bar{G}_1$ ,

$$\begin{aligned}\bar{G}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= G_1 + \Gamma_3 \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= G_1 + \Gamma_3 H \Delta(t) \Gamma_{\Xi},\end{aligned}$$

em que  $\Gamma_{\Xi} = \begin{bmatrix} \Xi_A & \Xi_{Ad} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Gamma_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix}$  e  $G_1$  é definido em (2.16).

Assim, podemos reescrever a expressão (A.54) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + F_1 G_1 + G_1^T F_1^T & F_1 \bar{G}_{12} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 (\Gamma_3 H \Delta(t) \Gamma_{\Xi}) + (\Gamma_3 H \Delta(t) \Gamma_{\Xi})^T F_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + F_1 G_1 + G_1^T F_1^T & F_1 \bar{G}_{12} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \alpha_1^T \Delta(t) \beta + \beta^T \Delta(t)^T \alpha_1 < 0, \quad (\text{A.55})\end{aligned}$$

em que  $\alpha_1 := \begin{bmatrix} (F_1 \Gamma_3 H)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\beta := \begin{bmatrix} \Gamma_{\Xi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

De maneira semelhante ao caso nominal, consideremos agora as matrizes resultantes de  $\Omega_1$  para  $d(t) \rightarrow \tau_1$  e  $d(t) \rightarrow \tau_2$ , i.e.,  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$ . Eliminando as linhas e colunas nulas resultantes dos termos  $(d(t) - \tau_1)$  e  $(\tau_2 - d(t))$ , podemos reorganizar a LMI apresentada em (A.55) da seguinte maneira:

$$\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t) = \frac{\tau_2 - d(t)}{(\tau_2 - \tau_1)} \zeta_{11}^T(t) (\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}) \zeta_{11}(t) + \frac{d(t) - \tau_1}{(\tau_2 - \tau_1)} \zeta_{12}^T(t) (\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \zeta_{12}(t),$$

em que  $\zeta_{11}(t)$  e  $\zeta_{12}(t)$  são definidos em (A.44), e

$$\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_k} = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_k} + F_1 G_1 + G_1^T F_1^T & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_k & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_2 - \tau_1) \Lambda_{1k} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \alpha_1^T \Delta(t) \beta + \beta^T \Delta^T(t) \alpha_1, \quad (\text{A.56})$$

para  $k = \{1, 2\}$ , com  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Lambda_{11}$  e  $\Lambda_{12}$  definidos em (2.16).

Note que  $\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t)$  é convexo em relação a  $d(t)$ . Então, analogamente ao caso nominal, podemos afirmar que  $\zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t)$  é definido negativo apenas se as expressões  $\zeta_1^T(t) (\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}) \zeta_1(t) < 0$  e  $\zeta_1^T(t) (\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \zeta_1(t) < 0$  forem válidas. Ademais, se aplicarmos a desigualdade de Park-Moon (Lema B.0.4 (I), no Apêndice B) sobre os termos de

(A.56) contendo as matrizes variantes no tempo  $\Delta(t)$ , i.e.,  $\alpha_1^T \Delta(t) \beta + \beta^T \Delta(t)^T \alpha_1$ , obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \zeta_{1k}^T(t) (\alpha_1^T \Delta(t) \beta + \beta^T \Delta(t)^T \alpha_1) \zeta_{1k}(t) &= 2\zeta_{1k}^T(t) \alpha_1^T \Delta(t) \beta \zeta_{1k}(t) \\ &\leq \zeta_{1k}^T(t) \left( \frac{1}{\epsilon_k} \alpha_1^T \alpha_1 + \epsilon_k \beta^T \beta \right) \zeta_{1k}(t), \end{aligned}$$

para  $k=\{1, 2\}$ .

Desta maneira, a seguinte expressão é válida

$$\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_k} \leq \begin{bmatrix} \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_k} + F_1 G_1 + G_1^T F_1^T & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_k & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_2 - \tau_1) \Lambda_{1k} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon_k} \alpha_1^T \alpha_1 + \epsilon_k \beta^T \beta.$$

Não obstante, se analisarmos o complemento de Schur desta expressão, verificamos que o termo a direita da expressão e, por conseguinte,  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_k}$ ,  $k=\{1, 2\}$ , são definidos negativos se e somente se a seguinte expressão for válida

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^{(1)}|_{d(t) \rightarrow \tau_k} + F_1 G_1 + G_1^T F_1^T & (\tau_2 - \tau_1) F_1 \Gamma_k & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_2 - \tau_1) \Lambda_{1k} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} & \alpha_1^T & \epsilon_k \beta^T \\ * & -\epsilon_k I & 0 \\ * & * & -\epsilon_k I \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{A.57})$$

Destarte, é fácil perceber que o termo a esquerda da expressão de (A.57) equivale a  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$ , para  $k=1$  e  $k=2$ , respectivamente. Ademais, dada a definição da derivada do atraso em (2.3) podemos concluir que

$$\Omega_{11} = \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}, \quad (\text{A.58})$$

$$\Omega_{12} = \frac{d_{max} - \dot{d}(t)}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}} + \frac{\dot{d}(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}. \quad (\text{A.59})$$

e, portanto,  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$  são convexos em  $\dot{d}(t) \in [d_{min}, d_{max}]$ .

Agora, nos focaremos no segundo intervalo,  $\tau_2 < d(t) \leq \tau_3$ . Utilizando argumentos semelhantes, provaremos que resultados análogos podem ser obtidos. Por utilizarmos a mesma função candidata de Lyapunov (2.12), podemos derivar esta função e agrupar seus termos de maneira semelhante a (A.47). De forma que iniciaremos nossa análise a partir da construção da LMI

$$\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} \leq \zeta_2^T(t) (\Omega|_{d(t) > \tau_2}) \zeta_2(t), \quad (\text{A.60})$$

em que  $(\Omega|_{d(t) > \tau_2})$  e  $\zeta_2(t)$  são definidos em (A.47).

Observe que analogamente ao caso anterior, não podemos utilizar a matriz  $\tilde{G}_2$  definida na prova do Teorema 2.1.2 para aplicação do método de Finsler. Isto porque, devido a

influência das incertezas de modelo,  $\zeta_2(t)$  não pertence ao espaço nulo desta matriz, i.e.,  $\zeta_2(t) \notin \mathcal{N}\{\tilde{G}_2\}$ . Necessitamos então de uma nova matriz  $\bar{G}_2 \in \mathbb{R}^{3r_x \times (\tau_3 - \tau_2)r_x}$ , tal que  $\zeta_2(t)$  pertença ao seu espaço nulo. Para tal, definimos  $\bar{G}_2 := \begin{bmatrix} \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} & 0 \end{bmatrix}$ , em que

$$\bar{G}_{21} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \\ (A + \Delta A) & (A_d + \Delta A_d) & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{G}_{22} := \begin{bmatrix} (d(t) - \tau_2)I & 0 \\ 0 & (\tau_3 - d(t))I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que para este caso a expressão  $\bar{G}_2 \zeta_2(t) = 0$  é válida.

Assim, introduzimos a matriz de ponderação livre  $F_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 3r_x}$ , de maneira a obtermos  $\bar{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(\tau_3 - \tau_2)r_x \times 3r_x}$ . Então, por conseguinte da aplicação do lema de Finsler, temos que  $\zeta_2^T(t) (\Omega|_{d(t) > \tau_2}) \zeta_2(t)$  é definido negativo se a seguinte expressão for válida

$$\Omega|_{d(t) > \tau_2} + \bar{F}_2 \bar{G}_2 + \bar{G}_2^T \bar{F}_2^T = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + F_2 \bar{G}_{21} + \bar{G}_{21}^T F_2^T & F_2 \bar{G}_{22} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.61})$$

em que os termos  $\Psi^{(2)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (2.16) e  $\Lambda^{(2)}$  é definido em (A.47).

Não obstante, se explicitarmos as matrizes de  $\Delta A$  e  $\Delta A_d$ , de acordo com (2.18), podemos reescrever  $\bar{G}_{21}$  como

$$\begin{aligned} \bar{G}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= G_2 + \Gamma_3 H \Delta(t) \Gamma_\Xi, \end{aligned}$$

em que  $G_2$  é definido em (2.16), e  $\Gamma_3^T$  e  $\Gamma_\Xi$  são definidos em (2.21). Assim, podemos reescrever a expressão (A.61) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + F_2 \bar{G}_{21} + \bar{G}_{21}^T F_2^T & F_2 \bar{G}_{22} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_2 (\Gamma_3 H \Delta(t) \Gamma_\Xi) + (\Gamma_3 H \Delta(t) \Gamma_\Xi)^T F_2^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + F_2 \bar{G}_{21} + \bar{G}_{21}^T F_2^T & F_2 \bar{G}_{22} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \alpha_2^T \Delta(t) \beta + \beta^T \Delta(t)^T \alpha_2 < 0, \quad (\text{A.62}) \end{aligned}$$

em que  $\alpha_2 := \begin{bmatrix} (F_2 \Gamma_3 H)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\beta := \begin{bmatrix} \Gamma_\Xi & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Consideremos agora os casos especiais de  $\Omega_2$  em que  $d(t) \rightarrow \tau_2$  e  $d(t) \rightarrow \tau_3$ . Analisando as matrizes resultantes,  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  e  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}$ , e eliminando as linhas e colunas nulas, podemos reorganizar a LMI apresentada em (A.62) da seguinte maneira:

$$\zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t) = \frac{\tau_3 - d(t)}{(\tau_3 - \tau_2)} \zeta_{21}^T(t) (\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \zeta_{21}(t) + \frac{d(t) - \tau_2}{(\tau_3 - \tau_2)} \zeta_{22}^T(t) (\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}) \zeta_{22}(t),$$

em que  $\zeta_{21}(t)$  e  $\zeta_{22}(t)$  são definidos em (A.51), e

$$\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_{k+1}} = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_{k+1}} + F_2 G_2 + G_2^T F_2^T & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_k & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_3 - \tau_2) \Lambda_{2k} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \alpha_2^T \Delta(t) \beta + \beta^T \Delta^T(t) \alpha_2, \quad (\text{A.63})$$

para  $k = \{1, 2\}$ , com  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Lambda_{21}$  e  $\Lambda_{22}$  definidos em (2.16).

De maneira análoga ao primeiro caso, observa-se que o termo  $\zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t)$  é convexo em relação a  $d(t)$  e que, conseqüentemente, este é definido negativo se os termos  $\zeta_2^T(t) (\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \zeta_2(t)$  e  $\zeta_2^T(t) (\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}) \zeta_3(t)$  forem definidos negativos. Todavia, aplicando a desigualdade de Park-Moon (Lema B.0.4 (I)) sobre  $\alpha_2^T \Delta(t) \beta + \beta^T \Delta^T(t) \alpha_2$  em  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  e  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}$ , separadamente, obtemos a seguinte desigualdade

$$\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_{k+1}} \leq \begin{bmatrix} \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_{k+1}} + F_2 G_2 + G_2^T F_2^T & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_k & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_3 - \tau_2) \Lambda_{2k} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon_{k+2}} \alpha_2^T \alpha_2 + \epsilon_{k+2} \beta^T \beta.$$

Analisando o complemento de Schur desta expressão, verifica-se que as matrizes  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_{k+1}}$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , são definidas negativas se e somente se a seguinte expressão for válida

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^{(2)}|_{d(t) \rightarrow \tau_{k+1}} + F_2 G_2 + G_2^T F_2^T & (\tau_3 - \tau_2) F_2 \Gamma_k & \Theta(\eta) \\ * & (\tau_3 - \tau_2) \Lambda_{2k} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} & \alpha_2^T & \epsilon_{k+2} \beta^T \\ * & -\epsilon_{k+2} I & 0 \\ * & * & -\epsilon_{k+2} I \end{bmatrix} < 0.$$

Ademais, observe que a expressão acima equivale a  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$ , para  $k=1$  e  $k=2$ , respectivamente. Além disso, dada a definição da derivada do atraso em (2.3) podemos concluir que  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$  são convexos em  $\dot{d}(t) \in [d_{min}, d_{max}]$  e, portanto, são definidos negativos se as matrizes  $\Omega_{11}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$ ,  $\Omega_{12}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{min}}$ ,  $\Omega_{21}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$  e  $\Omega_{22}|_{\dot{d}(t) \rightarrow d_{max}}$  forem definidas negativas.

Não obstante, estamos agora preparados para finalizar a prova do Teorema 2.2.1. Analogamente à prova do Teorema 2.1.2, devemos provar que função candidata de Lyapunov (2.12) é estritamente decrescente, considerando o sistema incerto com atrasos variantes e sujeito a incertezas de modelo definidas em (2.18). Para tal, observamos a validade da expressão

$$\dot{V}(t)|_{d(t) \neq \tau_2} \leq \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) \zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t) + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))) \zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t).$$

para o caso em que  $d(t) \neq \tau_2$ , e a validade da expressão

$$\dot{V}(t)|_{d(t) = \tau_2} \leq \max \{ \zeta_1^T(t) \Omega_1 \zeta_1(t), \zeta_2^T(t) \Omega_2 \zeta_2(t) \}.$$

para o caso contrário. Por conseguinte, observa-se que se as condições apresentadas no Teorema 2.2.1 forem satisfeitas então  $\dot{V}(t)$  é definida negativa, ou seja, a função de Lyapunov

(2.12) é estritamente decrescente e, conseqüentemente, o sistema (2.17) com incertezas de modelo definidas em (2.18) e sujeito a atrasos desconhecidos e variantes é assintoticamente e robustamente estável.



#### A.4 PROVA DO TEOREMA 3.2.1 – [CAPÍTULO 3]

Dada a função definida positiva (3.14), descrita como função candidata de Lyapunov-Krasovskii para o sistema de controle em rede (3.7), desejamos estabelecer condições que garantam que a função de Lyapunov seja decrescente. Para tal, devemos primeiramente considerar a derivada dos termos  $V_1(t)$ - $V_6(t)$  em (3.14) para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , ao longo da trajetória de (3.7). Assim, obtemos as seguintes expressões,<sup>2</sup>

$$\dot{V}_1(t) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t), \quad (\text{A.64})$$

$$\dot{V}_2(t) = x(t)Q_1x(t) - \left(1 - \frac{1}{2}\dot{d}(t)\right) x(t - \frac{d(t)}{2})^T Q_1 x(t - \frac{d(t)}{2}), \quad (\text{A.65})$$

$$\dot{V}_3(t) = \begin{bmatrix} x(t-\tau_1) \\ x(t-\tau_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau_1) \\ x(t-\tau_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(t-\tau_2) \\ x(t-\tau_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau_2) \\ x(t-\tau_3) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.66})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &= \begin{bmatrix} x(t - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \frac{0}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & M_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \frac{\eta}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

$$\dot{V}_5(t) = \sum_{k=1}^{\eta} \left(\frac{\tau_1}{\eta}\right) \left(\frac{\tau_1}{\eta} \dot{x}^T(t) S_k \dot{x}(t) - \int_{t-\frac{k}{\eta}\tau_1}^{t-\frac{k-1}{\eta}\tau_1} \dot{x}^T(s) S_k \dot{x}(s) ds\right), \quad (\text{A.68})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t) &= \dot{x}^T(t) [(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2] \dot{x}(t) \\ &- (\tau_2 - \tau_1) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - (\tau_3 - \tau_2) \int_{t-\tau_3}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Em seguida, iremos analisar os resultados considerando a análise por partes do atraso. Considerando o primeiro intervalo em que  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 1$ , queremos expandir as integrais do termo  $\dot{V}_6(t)$  no maior número de termos possíveis. Para tal, devemos levar em consideração o intervalo em que o atraso está contido  $\tau_1 \leq d(t) < \tau_2$ . A ideia é semelhante a utilizada no capítulo anterior, e seu objetivo é reduzir os intervalos de integração visando diminuir o conservadorismo decorrente da aplicação da desigualdade de Jensen. Desta maneira, obtemos a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t)|_{d(t) < \tau_2} &= \dot{x}^T(t) \left( (\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 \right) \dot{x}(t) \\ &- (\tau_2 - \tau_1) \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - (\tau_2 - \tau_1) \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\ &- (\tau_3 - \tau_2) \int_{t-\tau_3}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

<sup>2</sup>Para maiores explicações sobre como derivar os termos  $V_5(t)$  e  $V_6(t)$  consulte o Lema B.0.1 no Apêndice B.

De maneira análoga ao capítulo anterior, resolveremos os termos contendo integrais em  $\dot{V}_5(t)$  e  $\dot{V}_6(t)$ , em (A.68) e (A.70), respectivamente, através da aplicação da desigualdade de Jensen (Lemma B.0.2),  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) \leq & \sum_{k=1}^{\eta} \left( \left( \frac{\tau_1}{\eta} \right)^2 \dot{x}^T(t) S_k \dot{x}(t) - \left[ x \left( t - \frac{k-1}{\eta} \tau_1 \right) - x \left( t - \frac{k}{\eta} \tau_1 \right) \right]^T S_k \right. \\ & \left. \times \left[ x \left( t - \frac{k-1}{\eta} \tau_1 \right) - x \left( t - \frac{k}{\eta} \tau_1 \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t)|_{d(t) < \tau_2} = & \dot{x}^T(t) \left( (\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 \right) \dot{x}(t) \\ & - \left[ \frac{1}{d(t) - \tau_1} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds \right]^T (\tau_2 - \tau_1) (d(t) - \tau_1) Z_1 \left[ \frac{1}{d(t) - \tau_1} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds \right] \\ & - \left[ \frac{1}{\tau_2 - d(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \right]^T (\tau_2 - \tau_1) (\tau_2 - d(t)) Z_1 \left[ \frac{1}{\tau_2 - d(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \right] \\ & - \left[ x(t - \tau_2) - x(t - \tau_3) \right]^T Z_2 \left[ x(t - \tau_2) - x(t - \tau_3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Desta maneira, tendo investigado a derivada da função candidata de Lyapunov (3.14) e estruturado seus termos de maneira específica, definiremos o seguinte vetor de estados,

$$\begin{aligned} \zeta_1^T(t) := & \left[ x^T(t) \quad x^T(t-d(t)) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t-\tau_1) \quad x^T(t-\tau_2) \quad x^T(t-\tau_3) \quad x^T(t-\frac{d(t)}{2}) \right. \\ & \left. \xi_{1d}^T(t) \quad \xi_{d2}^T(t) \quad x(t - \frac{1}{\eta} \tau_1) \quad \dots \quad x(t - \frac{\eta-1}{\eta} \tau_1) \right] \in \mathbb{R}^{(8+\eta)r_x}, \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

em que

$$\xi_{1d}(t) := \frac{1}{d(t) - \tau_1} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds, \quad \text{e} \quad \xi_{d2}(t) := \frac{1}{\tau_2 - d(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds, \quad (\text{A.74})$$

são variáveis auxiliares definidas para facilitar a análise.

Desta maneira, podemos organizar os termos resultantes de  $\dot{V}_1(t) - \dot{V}_6(t)$  em (A.64)-(A.67), (A.71) e (A.72), combinando-os na forma da seguinte LMI:

$$\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \zeta_1^T(t) \left( \Omega|_{d(t) < \tau_2} \right) \zeta_1(t), \quad (\text{A.75})$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\begin{aligned} \Omega|_{d(t) < \tau_2} = & \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} & 0 & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(8+\eta)r_x \times (8+\eta)r_x}, \\ \Lambda^{(1)} = & \begin{bmatrix} -(d(t) - \tau_1) (\tau_2 - \tau_1) Z_1 & 0 \\ 0 & -(\tau_2 - d(t)) (\tau_2 - \tau_1) Z_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e os termos  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (3.17).

Continuando a análise, procuramos definir uma nova matriz  $\tilde{G}_1 \in \mathbb{R}^{3r_x \times (8+\eta)r_x}$ , tal que  $\zeta_1(t) \in \mathcal{N}\{\tilde{G}_1\}$ , ou seja, tal que  $\zeta_1(t)$  pertença ao espaço nulo da matriz  $\tilde{G}_1$  e, portanto,  $\tilde{G}_1 \zeta_1(t) = 0$ . Para tanto, definimos

$$\tilde{G}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12}(d(t)) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.76})$$

em que

$$\tilde{G}_{11} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3r_x \times 7r_x}, \quad \tilde{G}_{12} := \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_1)I & 0 \\ 0 & (\tau_2-d(t))I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, introduzimos a matriz de ponderação livre, i.e. sem restrições sobre sua positividade,  $F_1 \in \mathbb{R}^{7r_x \times 3r_x}$ , tal que  $\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1^T & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(8+\eta)r_x \times 3r_x}$ . Assim, verificamos que a expressão no lado direito da LMI (A.75) é definida negativa e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t)<\tau_2} < 0$ , se a afirmação  $\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t) < 0$  for válida,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega|_{d(t)<\tau_2} + \tilde{F}_1 \tilde{G}_1 + \tilde{G}_1^T \tilde{F}_1^T \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + F_1 \tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{11}^T F_1^T & F_1 \tilde{G}_{12} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Consideremos agora os casos especiais de  $\Omega_1$  em que  $d(t) \rightarrow \tau_1$  e  $d(t) \rightarrow \tau_2$ . Analisando as matrizes resultantes,  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\Omega_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$ , é notável que todos os termos contendo  $(d(t)-\tau_1)$  são eliminados da primeira matriz e são substituídos por  $(\tau_2-\tau_1)$  na segunda matriz, enquanto o inverso ocorre com os termos contendo  $(\tau_2-d(t))$ . Destarte, podemos reescrever  $\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t)$  da seguinte maneira:

$$\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t) = \frac{\tau_2-d(t)}{(\tau_2-\tau_1)} \zeta_{11}^T(t)\Omega_{11}\zeta_{11}(t) + \frac{d(t)-\tau_1}{(\tau_2-\tau_1)} \zeta_{12}^T(t)\Omega_{12}\zeta_{12}(t), \quad (\text{A.78})$$

com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ x^T(t-\frac{d(t)}{2}) & \xi_{d2}^T(t) & x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x}, \\ \zeta_{12}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ x^T(t-\frac{d(t)}{2}) & \xi_{1d}^T(t) & x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x}, \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Assim, podemos observar melhor a propriedade referente a convexidade de  $\Omega_1$  com relação a  $d(t)$ . Portanto, como pode ser observado da expressão (A.78), é notável que o termo  $\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t)$  e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t)<\tau_2}$ , são definidos negativos se e somente se  $\Omega_{11}$  e  $\Omega_{12}$  forem matrizes definidas negativas,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .



Desta maneira concluímos a primeira parte da prova do Teorema 3.2.1. Portanto, devemos agora nos focar na análise do segundo intervalo, em que  $\tau_2 < d(t) \leq \tau_3$ . De maneira análoga ao primeiro intervalo, desejamos estabelecer condições que garantam que a função candidata de Lyapunov (3.14) seja decrescente, para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , considerando  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)) = 1$ . Para tal, utilizaremos argumentos semelhantes aos propostos na primeira parte da análise. Desta forma, iniciaremos a análise a partir da derivada de  $V(t)$  para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , ao longo da trajetória de (3.7), obtida em (A.64)-(A.69). De maneira semelhante a (A.70), expandiremos as integrais de  $\dot{V}_6(t)$  no maior número de integrais possíveis, porém considerando a relação  $\tau_2 < d(t) \leq \tau_3$ . Assim, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t)|_{d(t) > \tau_2} &= \dot{x}^T(t) \left( (\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 \right) \dot{x}(t) \\ &\quad - (\tau_2 - \tau_1) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\ &\quad - (\tau_3 - \tau_2) \int_{t-d(t)}^{t-\tau_2} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds - (\tau_3 - \tau_2) \int_{t-\tau_3}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Então, analogamente ao primeiro intervalo, aplicaremos a desigualdade de Jensen (Lema B.0.2, no Apêndice B) nas integrais presentes em (A.80). Desta maneira, obtemos as seguintes desigualdades, para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t)|_{d(t) > \tau_2} &= \dot{x}^T(t) \left[ (\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 + (\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 \right] \dot{x}(t) \\ &\quad - [x(t-\tau_1) - x(t-\tau_2)]^T Z_1 [x(t-\tau_1) - x(t-\tau_2)] \\ &\quad - \xi_{2d}^T(t) [(\tau_3 - \tau_2)(d(t) - \tau_2) Z_2] \xi_{2d}(t) - \xi_{d3}^T(t) [(\tau_3 - \tau_2)(\tau_3 - d(t)) Z_2] \xi_{d3}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

em que

$$\xi_{2d}(t) := \frac{1}{d(t) - \tau_2} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_2} \dot{x}(s) ds, \quad \xi_{d3}(t) := \frac{1}{\tau_3 - d(t)} \int_{t-\tau_3}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds. \quad (\text{A.82})$$

são variáveis auxiliares definidas para facilitar a análise

Não obstante, agrupamos as derivadas dos termos  $V_1(t) - V_6(t)$ , em (A.64)-(A.67), (A.71) e (A.81), de maneira, a organizar-los conforme a seguinte desigualdade matricial, para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} \leq \zeta_2^T(t) (\Omega|_{d(t) > \tau_2}) \zeta_2(t), \quad (\text{A.83})$$

em que

$$\begin{aligned}\Omega|_{d(t)>\tau_2} &= \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} & 0 & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(8+\eta)r_x \times (8+\eta)r_x}, \\ \Lambda^{(2)} &= \begin{bmatrix} -(d(t)-\tau_2)(\tau_3-\tau_2)Z_2 & 0 \\ 0 & -(\tau_3-d(t))(\tau_3-\tau_2)Z_2 \end{bmatrix}, \\ \zeta_2^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) & x^T(t-\frac{d(t)}{2}) \\ \xi_{2d}^T(t) & \xi_{d3}^T(t) & x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(8+\eta)r_x},\end{aligned}\quad (\text{A.84})$$

com os termos  $\Psi^{(2)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  definidos em (3.17).

Além disso, analogamente a análise feita para o primeiro intervalo, introduziremos uma matriz  $\tilde{G}_2 \in \mathbb{R}^{3r_x \times (8+\eta)r_x}$ , tal que  $\zeta_2(t) \in \mathcal{N}\{\tilde{G}_2\}$ , i.e.,  $\zeta_2(t)$  pertença ao seu espaço nulo e, portanto,  $\tilde{G}_2\zeta_2(t)=0$ . Destarte, definiremos

$$\tilde{G}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22}(d(t)) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.85})$$

em que  $\tilde{G}_{21} \in \mathbb{R}^{3r_x \times 7r_x}$  e  $\tilde{G}_{22}(d(t)) \in \mathbb{R}^{3r_x \times 2r_x}$  são definidos a seguir,

$$\tilde{G}_{21} := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ A & A_d & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{22}(d(t)) := \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_2)I & 0 \\ 0 & (\tau_3-d(t))I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, podemos aplicar o método de Finsler (Lema B.0.3 no Apêndice B) sobre a expressão no lado direito da Equação (A.83). Para tal, introduzimos a matriz de ponderação livre, i.e. sem restrições sobre sua positividade,  $F_2 \in \mathbb{R}^{7r_x \times 3r_x}$ , tal que  $\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2^T & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(8+\eta)r_x \times 3r_x}$ . Desta maneira, podemos inferir que a expressão no lado direito da desigualdade (A.83) é definida negativa e, por conseguinte, a expressão  $\dot{V}(t)|_{d(t)>\tau_2} < 0$  é válida, se a seguinte afirmação for válida

$$\zeta_2^T(t) \left( \Omega|_{d(t)>\tau_2} + \tilde{F}_2 \tilde{G}_2 + \tilde{G}_2^T \tilde{F}_2^T \right) \zeta_2(t) < 0,$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Todavia, para facilitar a análise definiremos a matriz  $\Omega_2$  da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \left( \Omega|_{d(t)>\tau_2} + \tilde{F}_2 \tilde{G}_2 + \tilde{G}_2^T \tilde{F}_2^T \right) \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + F_2 \tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{21}^T F_2^T & F_2 \tilde{G}_{22} & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (\text{A.86})$$

Não obstante, consideremos agora os casos referentes a (A.86) em que  $d(t) \rightarrow \tau_2$  e  $d(t) \rightarrow \tau_3$ . Analisando as matrizes resultantes,  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  e  $\Omega_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}$ , e eliminando as linhas e colunas

nulas é notável que estas são equivalentes as matrizes  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$ , definidas em (3.16). Além disso, a fim de melhor analisar as propriedades referentes a convexidade de  $\Omega_2$  com relação a  $d(t)$ , reescrevemos  $\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t)$  da seguinte maneira:

$$\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t) = \frac{\tau_3-d(t)}{(\tau_3-\tau_2)}\zeta_{21}^T(t)\Omega_{21}\zeta_{21}(t) + \frac{d(t)-\tau_2}{(\tau_3-\tau_2)}\zeta_{22}^T(t)\Omega_{22}\zeta_{22}(t), \quad (\text{A.87})$$

com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\begin{aligned} \zeta_{21}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ x^T(t-\frac{d(t)}{2}) & \xi_{d3}^T(t) & x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x}, \\ \zeta_{22}^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ x^T(t-\frac{d(t)}{2}) & \xi_{2d}^T(t) & x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x}. \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Desta forma, analisando a convexidade de  $\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t)$  em relação a  $d(t)$ , é notável que a expressão  $\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t)$  é definida negativa e, conseqüentemente,  $\dot{V}(t)|_{d(t)>\tau_2} < 0$ , se e somente se  $\Omega_{21}$  e  $\Omega_{22}$  forem matrizes definidas negativas,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Assim, ao verificarmos a viabilidade das expressões  $\Omega_{21} < 0$  e  $\Omega_{22} < 0$  asseguramos que a expressão  $\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t) < 0$  é válida e, portanto,  $\dot{V}(t)|_{d(t)>\tau_2} < 0$ .

Desta forma, concluímos a prova para o segundo subintervalo. Não obstante, após investigarmos as características da função candidata de Lyapunov (3.14) e de sua derivada, para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , e para ambos subintervalos, estamos prontos para finalizar a prova do Teorema referente a estabilidade assintótica de sistemas de controle em rede. Primeiramente, analisemos o caso em que  $d(t) \neq \tau_2$ . Neste contexto, observa-se que a seguinte expressão é válida

$$\dot{V}(t)|_{d(t) \neq \tau_2} \leq \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t))\zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t) + (1-\chi_{[\tau_1, \tau_2]}(d(t)))\zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t).$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Então, considerando o segundo caso, em que  $d(t) = \tau_2$ , pode-se concluir que

$$\dot{V}(t)|_{d(t)=\tau_2} \leq \max \{ \zeta_1^T(t)\Omega_1\zeta_1(t), \zeta_2^T(t)\Omega_2\zeta_2(t) \}.$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Por conseguinte, podemos concluir que se as condições apresentadas em (3.16) na forma de LMIs forem satisfeitas, então a função candidata de Lyapunov (3.14) é estritamente decrescente, i.e.,  $\dot{V}(t)$  é definida negativa, para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Além disso, dado que  $V(t_{k+1}^-) \geq V(t_{k+1}^+)$  para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ , observa-se que a função candidata de Lyapunov é monotonicamente decrescente nos pontos  $t=t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Destarte, a prova do Teorema 3.2.1 está concluída. ■

## A.5 PROVA DO TEOREMA 4.2.1 – [CAPÍTULO 4]

Na prova do Teorema 4.2.1, iremos derivar condições para que todas as questões impostas na Definição 4.1.1 sejam satisfeitas para um controlador por realimentação de estados com ganho proporcional  $K$  conhecido. Para tal, consideraremos o sistema (4.7), reescrito conforme apresentado em (4.10) através da abordagem de análise por partes do atraso. Ademais, utilizaremos a função descrita em (4.11) como a função candidata de Lyapunov. Então, similarmente a metodologia aplicada no capítulo anterior, realizaremos separadamente a análise para cada um dos subintervalos do atraso, de acordo com a abordagem de análise por partes do atraso, detalhada na Subseção 2.1.1. Contudo, primeiramente, analisemos a derivada da função candidata de Lyapunov com  $\chi=1$ , para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que  $t_k = i_k^a h + \tau_k$ . Observe que este resultado já foi obtido em (A.64)-(A.72). Portanto, iniciaremos a análise a partir da construção da seguinte LMI, estabelecida a partir da combinação dos resultados previamente obtidos.

$$\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \zeta_1^T(t) (\Omega|_{d(t) < \tau_2}) \zeta_1(t), \quad (\text{A.89})$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\begin{aligned} \Omega|_{d(t) < \tau_2} &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} & 0 & \Theta(\eta) \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x \times (7+\eta)r_x}, \\ \Lambda^{(1)} &= \begin{bmatrix} -(d(t) - \tau_1)(\tau_2 - \tau_1)Z_1 & 0 \\ 0 & -(\tau_2 - d(t))(\tau_2 - \tau_1)Z_1 \end{bmatrix}, \\ \zeta_1^T(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{1d}^T(t) & \xi_{d2}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(7+\eta)r_x} \end{aligned}$$

e  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (4.14). Ademais,  $\xi_{1d}(t)$  e  $\xi_{d2}(t)$  são definidos, conforme explicitado em (A.74), da seguinte maneira

$$\xi_{1d}(t) := \frac{1}{d(t) - \tau_1} \int_{t-d(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds, \quad \text{e} \quad \xi_{d2}(t) := \frac{1}{\tau_2 - d(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds,$$

$$\lim_{d(t) \rightarrow \tau_1} \xi_{1d}(t) = \dot{x}(t - \tau_1) \quad \text{e} \quad \lim_{d(t) \rightarrow \tau_2} \xi_{d2}(t) = \dot{x}(t - \tau_2).$$

Não obstante, devido a existência do vetor referente ao sinal de perturbação exógena,  $\omega(t)$ , conforme apresentado em (4.1), introduziremos um novo termo  $\bar{\zeta}_1(t) \in \mathbb{R}^{((7+\eta)r_x + r_w)}$  que explicita esta informação, tal que

$$\bar{\zeta}_1^T(t) := \begin{bmatrix} \zeta_1^T(t) & \omega^T(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.90})$$

Por conseguinte, podemos reescrever (A.89) da seguinte maneira

$$\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \bar{\zeta}_1^T(t) (\bar{\Omega}|_{d(t) < \tau_2}) \bar{\zeta}_1(t), \quad (\text{A.91})$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\bar{\Omega}|_{d(t) < \tau_2} = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} & 0 & \Theta(\eta) & 0 \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{[(7+\eta)r_x+r_w] \times [(7+\eta)r_x+r_w]},$$

e  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (4.14), e  $\Lambda^{(1)}$  em (A.89).

Então, procuramos definir uma matriz  $\bar{\mathbf{G}}_1$  tal que  $\bar{\zeta}_1(t) \in \mathcal{N}\{\bar{\mathbf{G}}_1\}$ , i.e., uma matriz  $\bar{\mathbf{G}}_1$  tal que  $\bar{\zeta}_1(t)$  definido em (A.90) pertença ao seu espaço nulo. Diferentemente das matrizes introduzidas no capítulo anterior, as quais pertenciam ao espaço vetorial  $\mathbb{R}^{3r_x \times (7+\eta)r_x}$  e eram subdivididas em três matrizes menores, definiremos uma nova matriz  $\bar{\mathbf{G}}_1 \in \mathbb{R}^{3r_x \times (7+\eta)r_x+r_w}$  subdivida em oito matrizes menores, conforme a definição seguinte

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_{12} & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{G}} & 0 & 0 & B_\omega \end{bmatrix}, \quad (\text{A.92})$$

em que as matrizes  $\mathfrak{G}_1 \in \mathbb{R}^{2r_x \times 6r_x}$ ,  $\mathfrak{G}_{12} \in \mathbb{R}^{2r_x \times 2r_x}$  e  $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{1r_x \times 6r_x}$  são definidas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1 &:= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{G}_{12} := \begin{bmatrix} (d(t) - \tau_1)I & 0 \\ 0 & (\tau_2 - d(t))I \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{G}} &:= \begin{bmatrix} (A + \Delta A) & (B + \Delta B)K & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Observe que para este caso, de acordo com as definições (A.90) e (A.92), a expressão  $\bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\zeta}_1(t) = 0$  é válida. Esta propriedade é necessária para a correta aplicação do Lema de Finsler (Lema B.0.3, no Apêndice B) sobre a expressão no lado direito da Equação (A.91). De forma que esta expressão é definida negativa e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} < 0$ , se a seguinte expressão for válida

$$\bar{\Omega}|_{d(t) < \tau_2} + \bar{\mathbf{F}}_1 \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{G}}_1^T \bar{\mathbf{F}}_1^T < 0, \quad (\text{A.94})$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que a matriz  $\bar{\mathbf{F}}_1$  é definida da seguinte maneira

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & \bar{\mathbf{F}}_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{[(7+\eta)r_x+r_w] \times 3r_x}, \quad (\text{A.95})$$

em que  $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$  e

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^T & \mathbf{F}_{12}^T & \mathbf{F}_{13}^T & \mathbf{F}_{14}^T & \mathbf{F}_{15}^T & \mathbf{F}_{16}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6r_x \times r_x}, \quad (\text{A.96})$$

com  $F_{1i} \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ , para  $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , são matrizes de ponderação livre, i.e. sem restrições sobre sua positividade. Então, através de (A.95), podemos explicitar os termos de (A.94) da seguinte maneira

$$\bar{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{F}_1 \bar{G} + \bar{G}^T \bar{F}_1^T & \mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_{12} & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.97})$$

e  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  são definidos em (4.14), e  $\Lambda^{(1)}$  em (A.89).

Por conseguinte, se a condição em (A.97) for satisfeita então a expressão no lado direito de (A.89) e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2}$  são definidas negativas. Este resultado é semelhante ao obtido na Seção 2.2 (com exceção do termo  $B_\omega$  ponderado por  $\bar{F}_1$ ). Portanto, ao invés de aplicarmos o método de Finsler com termos contendo várias matrizes, poderíamos definir um único termo para (A.92) e uma única matriz de ponderação livre de dimensão apropriada correspondente a combinação direta de  $\mathcal{F}_1$  e  $\bar{F}_1$ , definidos em (A.95), conforme proposto no capítulo anterior. Entretanto, resolvemos dividir os termos em várias matrizes menores com o intuito de explicitarmos os termos de  $\bar{F}_1$ , em (A.96), que ponderam os termos de  $\bar{G}$ , em (A.93). A necessidade de se explicitar estes termos será diretamente observada nas próximas seções, nas quais o ganho  $K$  será considerado como sendo uma das variáveis desconhecidas da LMI.

Observe que, até este ponto, podemos inferir sem maiores dificuldades que a expressão  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \bar{\zeta}_1^T(t) \bar{\Omega}_1 \bar{\zeta}_1(t)$  é válida,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Não obstante, a partir da definição de

$$\bar{\Gamma}_Z := \begin{bmatrix} (C + \Delta C) & (D + \Delta D) & K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_x \times 6r_x}, \quad (\text{A.98})$$

iremos introduzir e adicionar o seguinte termo

$$\bar{\zeta}_1^T(t) \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_Z^T \bar{\Gamma}_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \bar{\zeta}_1(t)$$

em  $\bar{\zeta}_1^T(t) \bar{\Omega}_1 \bar{\zeta}_1(t)$ , de forma que se a expressão resultante for definida negativa, isto é, se a expressão  $\bar{\zeta}_1^T(t) \bar{\Sigma}_1 \bar{\zeta}_1(t) < 0$ , em que

$$\bar{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{F}_1 \bar{G} + \bar{G}^T \bar{F}_1^T + \bar{\Gamma}_Z^T \bar{\Gamma}_Z \right) & \mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_{12} & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega \\ * & \Lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (\text{A.99})$$

for válida,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , então podemos através da definição de  $z(t)$ , em (4.7), dire-

tamente afirmar que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)|_{d(t)<\tau_2} + z^T(t)z(t) - \gamma^2\omega^T(t)\omega(t) < 0, \\ t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

Não obstante, continuando a análise, consideremos agora os casos especiais de  $\bar{\Sigma}_1$  em que  $d(t) \rightarrow \tau_1$  e  $d(t) \rightarrow \tau_2$ . Analisando as matrizes resultantes,  $\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$ , é notável que todos os termos contendo  $(d(t) - \tau_1)$  são eliminados da primeira matriz e são substituídos por  $(\tau_2 - \tau_1)$  na segunda matriz, enquanto o inverso ocorre com os termos contendo  $(\tau_2 - d(t))$ . Então, de maneira análoga ao procedimento realizado nas provas do Capítulo 3, iremos reorganizar o termo  $\bar{\zeta}_1^T(t)\bar{\Sigma}_1\bar{\zeta}_1(t)$  da seguinte maneira:

$$\bar{\zeta}_1^T(t)\bar{\Sigma}_1\bar{\zeta}_1(t) = \frac{\tau_2 - d(t)}{(\tau_2 - \tau_1)} \bar{\zeta}_{11}^T(t) (\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}) \bar{\zeta}_{11}(t) + \frac{d(t) - \tau_1}{(\tau_2 - \tau_1)} \bar{\zeta}_{12}^T(t) (\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \bar{\zeta}_{12}(t),$$

com  $t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_{11}(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{d2}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) & \omega^T(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((6+\eta)r_x+r_w)}, \\ \bar{\zeta}_{12}(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{1d}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) & \omega^T(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((6+\eta)r_x+r_w)}, \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

e

$$\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_i} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{F}_1 \bar{G} + \bar{G}^T \bar{F}_1^T + \bar{\Gamma}_Z^T \bar{\Gamma}_Z \right) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (\text{A.102})$$

para  $i = \{1, 2\}$ , com  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  definidos em (4.14).

Por conseguinte, observa-se que  $\bar{\zeta}_1^T(t)\bar{\Sigma}_1\bar{\zeta}_1(t)$  é convexo em relação a  $d(t)$  e, desta maneira, a expressão é definida negativa se os vértices  $\bar{\zeta}_{11}^T(t) (\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}) \bar{\zeta}_{11}(t)$  e  $\bar{\zeta}_{12}^T(t) (\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \bar{\zeta}_{12}(t)$  forem definidos negativos,  $t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Além disso, podemos analisar a positividade dos termos  $\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_i}$ ,  $i = \{1, 2\}$ , através da utilização do complemento de Schur sobre o termo  $\bar{\Gamma}_Z^T \bar{\Gamma}_Z$ . Destarte, podemos concluir que os termos  $\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_1}$  e  $\bar{\Sigma}_1|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  são definidos negativos se e somente se a seguinte expressão for válida,

$$\bar{\Sigma}_{1i} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{F}_1 \bar{G} + \bar{G}^T \bar{F}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega & \bar{\Gamma}_Z^T \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.103})$$

para  $i = \{1, 2\}$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Ainda, se considerarmos a definição das incertezas variantes no tempo  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$ ,  $\Delta D$  em (4.2), podemos explicitar os termos de  $\bar{\Sigma}$  e  $\bar{\Gamma}_Z$ . De forma que possamos reescrever (A.103), para  $i = \{1, 2\}$ , da seguinte forma

$$\bar{\Sigma}_{1i} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{F}_1 G + G^T \bar{F}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega & \Gamma_Z^T \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_1 (H_1 \Delta(t) \Gamma_{\Xi_1}) + (H_1 \Delta(t) \Gamma_{\Xi_1})^T \bar{F}_1^T & 0 & 0 & 0 & (H_2 \Delta(t) \Gamma_{\Xi_2})^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.104})$$

em que  $\Gamma_{\Xi_1} := [\Xi_A \quad \Xi_B K \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ ,  $\Gamma_{\Xi_2} := [\Xi_C \quad \Xi_D K \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$  e  $G$  e  $\Gamma_Z$  são definidos em (4.14). Ademais, se definirmos as matrizes,

$$I_\Delta := \text{diag}\{\Delta(t), \Delta(t)\}, \quad \alpha_1 := \begin{bmatrix} (\bar{F}_1 H_1)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_2^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta := \begin{bmatrix} \Gamma_{\Xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{\Xi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.105})$$

podemos reescrever a  $\bar{\Sigma}_{1i}$ , em (A.104), da seguinte maneira

$$\bar{\Sigma}_{1i} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{F}_1 G + G^T \bar{F}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_1 B_\omega & \Gamma_Z^T \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} + \alpha_1^T I_\Delta \beta + \beta^T I_\Delta^T \alpha_1. \quad (\text{A.106})$$

Por conseguinte, se aplicarmos a desigualdade de Park-Moon (Lema B.0.4 (I), Apêndice B), com matriz de ponderação  $I_{\epsilon_i} = \text{diag}\{\epsilon_{i1} I, \epsilon_{i2} I\}$ ,  $i = \{1, 2\}$ , sobre a expressão mais a direita de (A.106), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_{1i}^T(t) (\alpha_1^T I_\Delta \beta + \beta^T I_\Delta^T \alpha_1) \bar{\zeta}_{1i}(t) &= 2 \bar{\zeta}_{1i}^T(t) \alpha_1^T I_\Delta \beta \bar{\zeta}_{1i}(t) \\ &\leq \bar{\zeta}_{1i}^T(t) (I_{\epsilon_i}^{-1} \alpha_1^T \alpha_1 + I_{\epsilon_i} \beta^T \beta) \bar{\zeta}_{1i}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

em que os escalares  $\epsilon_{i1}$  e  $\epsilon_{i2}$  são positivos, para  $i = \{1, 2\}$ . Então, introduzindo a desigualdade (A.107) em (A.106), e aplicando o complemento de Schur no resultado obtido, observamos que a matriz  $\bar{\Sigma}_{1i}$  é definida negativa para  $i = \{1, 2\}$ , se e somente se, a seguinte desigualdade



for válida

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \left( \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{\mathcal{F}}_1 \mathcal{G} + \mathcal{G}^T \bar{\mathcal{F}}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{\mathcal{F}}_1 B_\omega & \Gamma_Z^T & \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 & \alpha_1^T \quad I_{\epsilon_i} \beta^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & \\ * & * & * & * & -I & \\ & * & & & & -I_{\epsilon_i} \quad 0 \\ & * & & & & * \quad -I_{\epsilon_i} \end{array} \right] < 0, \quad (\text{A.108})$$

com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . É fácil perceber que o termo a esquerda da desigualdade apresentada (A.108) equivale a  $\Sigma_{11}$  e  $\Sigma_{12}$ , definidos em (4.14), para  $i=1$  e  $i=2$ , respectivamente.

Por conseguinte, é interessante ressaltar que se as matrizes  $\Sigma_{11}$  e  $\Sigma_{12}$  forem definidas negativas, então a expressão apresentada (A.100) será válida, i.e.,  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} + z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) < 0$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Neste ponto, estamos prontos para analisarmos as condições estipuladas na Definição 4.1.1. Primeiramente, consideremos a questão referente a estabilidade robusta do sistema em malha fechada (4.7) na ausência de perturbações  $\omega(t)$ , ou seja, com  $\omega(t) \equiv 0$ . Neste caso, considerando (A.100), tem-se  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} \leq \dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} + z^T(t)z(t) \leq 0$ , para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que  $z^T(t)z(t) \geq 0$ . Além disso, a partir da LMI definida em (A.103) e da relação de convexidade com  $\bar{\Sigma}_1$ , é fácil deduzir que na ausência de perturbações a matriz  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2}$  será definida negativa se as matrizes  $\Pi_{1i}$ , para  $i = \{1, 2\}$  forem definidas negativas, em que

$$\Pi_{1i} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(1)} + \mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \mathcal{F}_1^T + \bar{\mathcal{F}}_1 \bar{\mathcal{G}} + \bar{\mathcal{G}}^T \bar{\mathcal{F}}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{F}_1 \Gamma_i & \Theta(\eta) \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 Z_1 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix},$$

com  $\bar{\mathcal{G}}$  definido em (A.93).

Não obstante, é facilmente notável que, devido a aplicação da desigualdade de Park-Moon, a expressão obtida em (A.108) é maior (no sentido de positividade) do que a expressão em (A.106) e, conseqüentemente, maior do que a expressão em (A.103), ou seja, a desigualdade  $\bar{\Sigma}_{1i} \leq \Sigma_{1i}$ , é válida para  $i = \{1, 2\}$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Por conseguinte, se as condições de negatividade referente as matrizes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ , forem satisfeitas, então as matrizes  $\bar{\Sigma}_{11}$  e  $\bar{\Sigma}_{12}$  também serão definidas negativas,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Ademais, é notável que as matrizes  $\bar{\Sigma}_{1i}$ ,  $i = \{1, 2\}$  podem ser estruturadas como matrizes blocos da seguinte maneira,

$$\bar{\Sigma}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1i} & \mathbf{A}_2 \\ * & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \text{em que } \mathbf{A}_{1i} = \Pi_{1i}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_1 B_\omega & \bar{\Gamma}_Z^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

e, portanto, assumindo as condições sobre positividade (ou negatividade), é fácil inferir que  $\bar{\Sigma}_{1i}$ ,  $i = \{1, 2\}$  são definidas negativas somente se  $\mathbf{A}_{1i}$  e  $\mathbf{A}_3$  forem matrizes definidas negati-

vas. Destarte, se as condições impostas no Teorema (4.2.1) forem satisfeitas, então as matrizes  $\Sigma_{1i}$ ,  $i = \{1, 2\}$  serão definidas negativas e, por conseguinte, as matrizes  $\bar{\Sigma}_{1i}$ ,  $i = \{1, 2\}$  também serão,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Assim, satisfazendo as condições impostas no Teorema (4.2.1), garantimos que  $\dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2}$  será definida negativa na ausência de perturbações exógenas,  $\omega(t) \equiv 0$ , com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Analisaremos então a segunda questão imposta nas diretrizes da Definição 4.1.1. Procuramos, portanto, assegurar que, considerando condições iniciais nulas, a desigualdade  $\mathcal{J} \leq 0$  seja satisfeita, em que

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt. \quad (\text{A.109})$$

Para tal, observa-se a validade da expressão em (A.100), caso as condições do Teorema (4.2.1) sejam satisfeitas. Integrando todos os termos da expressão de  $t_k$  a  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^t \left( \dot{V}(t)|_{d(t) < \tau_2} + z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) \right) dt = \\ & V(t)|_{d(t) < \tau_2} - V(t_k)|_{d(t) < \tau_2} + \int_{t_k}^t (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0. \end{aligned}$$

Ademais, dado que  $V(t)$ ,  $\dot{V}(t)$  e  $x(t)$  são contínuos em  $t$ , e tomando  $\bigcup_{k=1}^\infty [t_k, t_{k+1}) = [0, \infty)$ , observa-se

$$V(t)|_{d(t) < \tau_2} - V(0)|_{d(t) < \tau_2} + \int_0^t (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0.$$

Então, considerando  $t \rightarrow 0$ , sob condições iniciais nulas, e sabendo que a função de Lyapunov é positiva decrescente, pode-se inferir sem maiores dificuldades que

$$\int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0,$$

e, portanto,  $\mathcal{J} < 0$ . Então, podemos concluir que  $\|z(t)\| \leq \gamma \|\omega(t)\|$  para qualquer perturbação não nula,  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ . Desta maneira, concluímos a primeira parte da prova do Teorema (4.2.1).

Neste ponto, deveremos nos focar no caso em que  $\tau_2 < d(t) \leq \tau_3$ . Utilizando argumentos semelhantes, podemos derivar resultados análogos aos obtidos para o primeiro subintervalo. Primeiramente, consideremos a derivada da função candidata de Lyapunov (4.11) para o segundo subintervalo, com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Observe que este resultado já foi obtido em (A.64)-(A.67), (A.71) e (A.81). Portanto, iniciaremos a análise a partir da construção da seguinte LMI, estabelecida a partir da combinação dos resultados previamente obtidos.

$$\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} \leq \bar{\zeta}_2^T(t) (\Omega|_{d(t) > \tau_2}) \bar{\zeta}_2^T(t), \quad (\text{A.110})$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\Omega|_{d(t) > \tau_2} = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} & 0 & \Theta(\eta) & 0 \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{[(7+\eta)r_x+r_w] \times [(7+\eta)r_x+r_w]},$$

$$\Lambda^{(2)} = \begin{bmatrix} -(d(t)-\tau_2)(\tau_3-\tau_2)Z_2 & 0 \\ 0 & -(\tau_3-d(t))(\tau_3-\tau_2)Z_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\zeta}_2^T(t) := \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{2d}^T(t) & \xi_{d3}^T(t) & x(t-\frac{1}{\eta}\tau_1) & \dots & x(t-\frac{\eta-1}{\eta}\tau_1) & \omega^T(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((7+\eta)r_x+r_w)}$$

com  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  definidos em (4.14),  $\xi_{2d}^T(t)$  e  $\xi_{d3}^T(t)$  são definidos em (A.82).

Similarmente ao primeiro caso, definiremos uma matriz  $\bar{\mathbf{G}}_2 \in \mathbb{R}^{3r_x \times [(7+\eta)r_x+r_w]}$ , tal que  $\bar{\zeta}_2(t) \in \mathcal{N}\{\bar{\mathbf{G}}_2\}$ , i.e., tal que  $\bar{\zeta}_2(t)$  pertença ao espaço nulo de  $\bar{\mathbf{G}}_2$ . Para tanto, definiremos as matrizes  $\mathfrak{G}_2 \in \mathbb{R}^{2r_x \times 6r_x}$ , e  $\mathfrak{G}_{22} \in \mathbb{R}^{2r_x \times 2r_x}$  da seguinte maneira

$$\mathfrak{G}_2 := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{G}_{22} := \begin{bmatrix} (d(t)-\tau_2)I & 0 \\ 0 & (\tau_3-d(t))I \end{bmatrix},$$

de forma que

$$\bar{\mathbf{G}}_2 = \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_2 & \mathfrak{G}_{22} & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{G}} & 0 & 0 & B_\omega \end{bmatrix}, \quad (\text{A.111})$$

em que  $\bar{\mathbf{G}}$  é definida em (A.92). Assim, observamos que a expressão  $\bar{\mathbf{G}}_2 \bar{\zeta}_2(t) = 0$  é válida e, portanto,  $\bar{\zeta}_2(t) \in \mathcal{N}\{\bar{\mathbf{G}}_2\}$ . Não obstante, introduziremos uma matriz  $\bar{\mathbf{F}}_2 \in \mathbb{R}^{[(7+\eta)r_x+r_w] \times 3r_x}$ , tal que obtenhamos

$$\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} \leq \bar{\zeta}_2^T(t) (\bar{\Omega}|_{d(t) > \tau_2} + \bar{\mathbf{F}}_2 \bar{\mathbf{G}}_2 + \bar{\mathbf{G}}_2^T \bar{\mathbf{F}}_2^T) \bar{\zeta}_2(t), \quad (\text{A.112})$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\bar{\mathbf{F}}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_2 & \bar{\mathbf{F}}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.113})$$

e

$$\bar{\mathbf{F}}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{21}^T & \mathcal{F}_{22}^T & \mathcal{F}_{23}^T & \mathcal{F}_{24}^T & \mathcal{F}_{25}^T & \mathcal{F}_{26}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6r_x \times r_x}; \quad (\text{A.114})$$

com as matrizes de ponderação livre, i.e. sem restrições sobre sua positividade,  $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}$  e  $\mathcal{F}_{2i} \in \mathbb{R}^{r_x \times r_x}$ , para  $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Destarte, podemos reescrever a desigualdade em (A.112) como  $\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} \leq \bar{\zeta}_2^T(t) \bar{\Omega}_2 \bar{\zeta}_2(t)$ , em que

$$\bar{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} \Psi^{(2)} + \mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T + \bar{\mathbf{F}}_2 \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_2^T & \mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_{22} & \Theta(\eta) & \bar{\mathbf{F}}_2 B_\omega \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.115})$$

com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , e os termos  $\Psi^{(2)}$ ,  $\Theta(\eta)$  e  $\Phi(\eta)$  definidos em (4.14), e  $\Lambda^{(2)}$  em (A.110).

Não obstante, a partir da definição de  $\bar{\Gamma}_Z$  em (A.98), introduziremos o seguinte termo

$$\bar{\zeta}_2^T(t) \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_Z^T \bar{\Gamma}_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \bar{\zeta}_2(t)$$

em (A.115), de forma que se a expressão resultante  $\bar{\zeta}_2^T(t) \bar{\Sigma}_2 \bar{\zeta}_2(t)$ , para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\bar{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)} + \mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T + \bar{F}_2 \bar{G} + \bar{G}^T \bar{F}_2^T + \bar{\Gamma}_Z^T \bar{\Gamma}_Z \right) & \mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_{22} & \Theta(\eta) & \bar{F}_2 B_\omega \\ * & \Lambda^{(2)} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (\text{A.116})$$

for definida negativa, então podemos, analogamente ao primeiro caso, afirmar que

$$\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} + z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) \leq 0, \quad (\text{A.117})$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Consideremos agora as matrizes resultantes de  $\bar{\Sigma}_2$  para  $d(t) \rightarrow \tau_2$  e  $d(t) \rightarrow \tau_3$ , i.e.,  $\bar{\Sigma}_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}$  e  $\bar{\Sigma}_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}$ . Eliminando as linhas e colunas nulas resultantes dos termos  $(d(t) - \tau_2)$  e  $(\tau_3 - d(t))$ , podemos reorganizar a expressão  $\bar{\zeta}_2^T(t) \bar{\Sigma}_2 \bar{\zeta}_2(t)$  da seguinte maneira:

$$\bar{\zeta}_2^T(t) \bar{\Sigma}_2 \bar{\zeta}_2(t) = \frac{\tau_3 - d(t)}{(\tau_3 - \tau_2)} \bar{\zeta}_{21}^T(t) (\bar{\Sigma}_2|_{d(t) \rightarrow \tau_2}) \bar{\zeta}_{21}(t) + \frac{d(t) - \tau_2}{(\tau_3 - \tau_2)} \bar{\zeta}_{22}^T(t) (\bar{\Sigma}_2|_{d(t) \rightarrow \tau_3}) \bar{\zeta}_{22}(t),$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que

$$\bar{\Sigma}_2|_{d(t) \rightarrow \tau_{i+1}} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)} + \mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T + \bar{F}_2 \bar{G} + \bar{G}^T \bar{F}_2^T + \bar{\Gamma}_Z^T \bar{\Gamma}_Z \right) & (\tau_3 - \tau_2) \mathcal{F}_2 \Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_2 B_\omega \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (\text{A.118})$$

para  $i = \{1, 2\}$ , com  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  definidos em (4.14), e

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_{21}(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{d3}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta} \tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta} \tau_1) & \omega^T(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((6+\eta)r_x + r_w)}, \\ \bar{\zeta}_{22}(t) &:= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-d(t)) & \dot{x}^T(t) & x^T(t-\tau_1) & x^T(t-\tau_2) & x^T(t-\tau_3) \\ \xi_{2d}^T(t) & x(t - \frac{1}{\eta} \tau_1) & \dots & x(t - \frac{\eta-1}{\eta} \tau_1) & \omega^T(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((6+\eta)r_x + r_w)}, \end{aligned} \quad (\text{A.119})$$

Analogamente ao primeiro caso, observa-se que o termo  $\bar{\zeta}_2^T(t)\bar{\Sigma}_2\bar{\zeta}_2(t)$  é convexo em relação a  $d(t)$  e que, por conseguinte, este é definido negativo se  $\bar{\zeta}_{21}^T(t)(\bar{\Sigma}_2|_{d(t)\rightarrow\tau_2})\bar{\zeta}_{21}(t)$  e  $\bar{\zeta}_{22}^T(t)(\bar{\Sigma}_2|_{d(t)\rightarrow\tau_3})\bar{\zeta}_{22}(t)$  forem definidos negativos,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Além disso, aplicando o complemento de Schur a fim de desassociar as matrizes  $\bar{\Gamma}_Z^T\bar{\Gamma}_Z$  em (A.118), obtemos a seguinte LMI

$$\bar{\Sigma}_{2i} = \begin{bmatrix} \left(\Psi^{(2)} + \mathcal{F}_2\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T\mathcal{F}_2^T + \bar{F}_2\bar{G} + \bar{G}^T\bar{F}_2^T\right) & (\tau_3 - \tau_2)\mathcal{F}_2\Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_2B_\omega & \bar{\Gamma}_Z^T \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.120})$$

que é válida para  $i = \{1, 2\}$  se e somente se as matrizes  $\bar{\Sigma}_2|_{d(t)\rightarrow\tau_{i+1}}$ ,  $i = \{1, 2\}$ , forem definidas negativas,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Contudo, observe que as matrizes  $\bar{G}$  e  $\bar{\Gamma}_Z$  são variantes no tempo. Destarte, considerando a definição das incertezas variantes no tempo  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$ ,  $\Delta D$  em (4.2), reescrevemos a LMI (A.120), explicitando os termos referentes as incertezas, conforme abaixo

$$\bar{\Sigma}_{2k} = \begin{bmatrix} \left(\Psi^{(2)} + \mathcal{F}_2\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T\mathcal{F}_2^T + \bar{F}_2\bar{G} + \bar{G}^T\bar{F}_2^T\right) & (\tau_3 - \tau_2)\mathcal{F}_2\Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_2B_\omega & \Gamma_Z^T \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} + \alpha_2^T I_\Delta \beta + \beta^T I_\Delta^T \alpha_2 < 0, \quad (\text{A.121})$$

em que

$$I_\Delta := \text{diag}\{\Delta(t), \Delta(t)\}, \quad \alpha_2 := \begin{bmatrix} (\bar{F}_2 H_1)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_2^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta := \begin{bmatrix} \Gamma_{\Xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{\Xi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.122})$$

com  $\Gamma_{\Xi_1}$ ,  $\Gamma_{\Xi_2}$ ,  $G$  e  $\Gamma_Z$  definidos em (4.14).

Por conseguinte, ao aplicarmos a desigualdade de Park-Moon (Lema B.0.4 (I), Apêndice B), com matriz de ponderação  $I_{\epsilon_{i+2}} = \text{diag}\{\epsilon_{(i+2)1}I, \epsilon_{(i+2)2}I\}$ ,  $i = \{1, 2\}$ , sobre a expressão  $\alpha_2^T I_\Delta \beta + \beta^T I_\Delta^T \alpha_2$  e, em seguida, aplicarmos o complemento de Schur sobre o resultado obtido, verificamos que as matrizes  $\bar{\Sigma}_{21}$  e  $\bar{\Sigma}_{22}$  serão definidas negativas se e somente se a

seguinte LMI for válida

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \left( \Psi^{(2)} + \mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T + \bar{F}_2 G + G^T \bar{F}_2^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) \mathcal{F}_2 \Gamma_i & \Theta(\eta) & \bar{F}_2 B_\omega & \Gamma_Z^T & \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & \Phi(\eta) & 0 & 0 & \alpha_2^T I_{\epsilon_{(i+2)}} \beta^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & \\ * & * & * & * & -I & \\ & * & & & & -I_{\epsilon_{(i+2)}} 0 \\ & * & & & & * -I_{\epsilon_{(i+2)}} \end{array} \right] < 0, \quad (\text{A.123})$$

com  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , em que os escalares  $\epsilon_{31}$ ,  $\epsilon_{32}$ ,  $\epsilon_{41}$  e  $\epsilon_{42}$  são positivos. Observe ainda que a matriz a esquerda da LMI (A.123) equivale a  $\Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{22}$ , definidos em (4.14), para  $i=1$  e  $i=2$ , respectivamente.

Por conseguinte, é interessante ressaltar que se as matrizes  $\Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{22}$  forem definidas negativas, então a expressão apresentada (A.117) será válida, i.e.,  $\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2} + z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) < 0$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Não obstante, é interessante neste ponto analisarmos as condições estipuladas na Definição 4.1.1. Primeiramente, analisemos a questão referente a estabilidade robusta do sistema em malha fechada (4.7) na ausência de perturbações,  $\omega(t) \equiv 0$ . Consideremos, então, a LMI definida em (A.120) e a relação de convexidade desta com  $\bar{\Sigma}_2$ . É possível inferir que para  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , na ausência de perturbações, i.e.,  $\omega(t) \equiv 0$ , a função  $\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2}$  será definida negativa se as matrizes  $\Pi_{21}$  e  $\Pi_{22}$  forem definidas negativas, em que

$$\Pi_{2i} = \begin{bmatrix} \left( \Psi^{(2)} + \mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T + \bar{F}_2 \bar{G} + \bar{G}^T \bar{F}_2^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) \mathcal{F}_2 \Gamma_i & \Theta(\eta) \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 Z_2 & 0 \\ * & * & \Phi(\eta) \end{bmatrix},$$

com  $i = \{1, 2\}$ , e  $\bar{G}$  definido em (A.93).

Além disso, é válido afirmar que se as condições do Teorema 4.2.1 forem satisfeitas, então as matrizes  $\Sigma_{21}$ ,  $\Sigma_{22}$  e, por conseguinte,  $\bar{\Sigma}_{21}$  e  $\bar{\Sigma}_{22}$ , deverão ser definidas negativas,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Ademais, é notável que as matrizes  $\bar{\Sigma}_{2i}$ ,  $i = \{1, 2\}$  podem ser estruturadas como matrizes blocos da seguinte maneira,

$$\bar{\Sigma}_{2i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1i} & \mathbf{A}_2 \\ * & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \text{em que } \mathbf{A}_{1i} = \Pi_{2i}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \bar{F}_2 B_\omega & \bar{\Gamma}_Z^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

e, portanto, é fácil concluir que se as matrizes  $\bar{\Sigma}_{21}$  e  $\bar{\Sigma}_{22}$  forem definidas negativas então, obrigatoriamente,  $\mathbf{A}_{1i}$  e  $\mathbf{A}_3$  deverão ser definidas negativas. Destarte, se as condições impostas no Teorema (4.2.1) forem satisfeitas, então as matrizes  $\bar{\Sigma}_{1i}$ ,  $i = \{1, 2\}$  serão definidas negativas e, por conseguinte,  $\dot{V}(t)|_{d(t) > \tau_2}$  será definida negativa com  $\omega(t) \equiv 0$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Analisaremos agora condições que assegurem a validade da segunda questão imposta nas diretrizes da Definição 4.1.1, ou seja, procuramos assegurar que, considerando condições iniciais nulas, a desigualdade  $\mathcal{J} = \int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0$  seja satisfeita. Então, analogamente ao primeiro caso, verificamos a validade da expressão em (A.117),  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Em seguida, integrando todos os termos da expressão em (A.117) de  $t_k$  até  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , obtemos

$$V(t)|_{d(t) > \tau_2} - V(t_k)|_{d(t) > \tau_2} + \int_{t_k}^t (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0.$$

Então, dado que  $V(t)$ ,  $\dot{V}(t)$ , e  $x(t)$  são contínuos em  $t$ ,  $\bigcup_{k=1}^\infty [t_k, t_{k+1}) = [0, \infty)$ , fazemos  $t \rightarrow \infty$ , de forma que

$$V(\infty)|_{d(t) > \tau_2} - V(0)|_{d(t) > \tau_2} + \int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0.$$

Ademais, sob condições iniciais nulas, e sabendo que a função de Lyapunov é positiva decrescente, pode-se concluir

$$\int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0,$$

e, portanto,  $\mathcal{J} < 0$ . Então, podemos concluir que  $\|z(t)\| \leq \gamma \|\omega(t)\|$  para qualquer perturbação não nula,  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ .

Não obstante, estamos agora prontos para fazer as afirmações finais sobre o Teorema 4.2.1. Provamos que se as condições estipuladas no Teorema forem satisfeitas, então a função candidata de Lyapunov com  $\omega(t) \equiv 0$  é estritamente decrescente para ambos subintervalos e, portanto, também é decrescente para  $d(t) = \tau_2$ , ou seja, a derivada da função de Lyapunov,  $\dot{V}(t)$ , é contínua definida negativa com  $\omega(t) \equiv 0$ . Deste modo, o sistema é assintoticamente e robustamente estável na ausência de perturbação exógenas. Além disso, observamos que, considerando condições iniciais nulas, a seguinte desigualdade é válida  $\mathcal{J} = \int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)) dt \leq 0$  e, portanto,  $\|z(t)\| \leq \gamma \|\omega(t)\|$  para qualquer perturbação não nula,  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ . Por conseguinte, o sistema de controle em rede em malha fechada definido em (4.7) é assintoticamente e robustamente estável com critério  $H_\infty$ , referente a saída do sistema de controle, limitado em  $\gamma$ . Assim, concluímos a prova do Teorema 4.2.1. ■

## A.6 PROVA DO TEOREMA 4.3.1 – [CAPÍTULO 4]

Para deduzirmos o Teorema 4.3.1, devemos primeiramente considerar as questões estipuladas na Proposição 4.3.1. De acordo com a Proposição, as condições para encontrarmos um controlador de realimentação de estados com ganho  $K$  que estabilize o sistema e garanta bom desempenho de acordo com a norma  $H_\infty$  estão definidas na forma de BMIs, por conta da existência de termos cruzados entre as matrizes  $F_{1j}$  e  $K$ ,  $j=\{1, \dots, 6\}$ , e entre as matrizes  $F_{2j}$  e  $K$ ,  $j=\{1, \dots, 6\}$ . Estes termos aparecem nas seguintes expressões  $\bar{F}_1 G + G^T \bar{F}_1^T$ , e  $\bar{F}_2 G + G^T \bar{F}_2^T$ , cuja decomposição resulta em

$$\bar{F}_j G + G^T \bar{F}_j^T = \begin{bmatrix} F_{j1}A + A^T F_{j1}^T & F_{j1}BK + A^T F_{j2}^T & -F_{j1} + A^T F_{j3}^T & A^T F_{j4}^T & A^T F_{j5}^T & A^T F_{j6}^T \\ * & F_{j2}BK + K^T B^T F_{j2}^T & -F_{j2} + K^T B^T F_{j3}^T & K^T B^T F_{j4}^T & K^T B^T F_{j5}^T & K^T B^T F_{j6}^T \\ * & * & -F_{j3} - F_{j3}^T & -F_{j4}^T & -F_{j5}^T & -F_{j6}^T \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}, \quad (\text{A.124})$$

para  $j=\{1, 2\}$ . Observe que os desafios da análise são incrementados pelo fato das variáveis não se multiplicarem diretamente, i.e., devido a existência de termos entre as variáveis. Destarte, para eliminarmos estes termos cruzados, primeiramente, iremos considerar a multiplicação à esquerda e à direita de  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{22}$ , por

$$\bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} = \text{diag}\{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{X}\eta}, I, I, I, I, I, I\} \in \mathbb{R}^{[(11+\eta)r_x + r_w] \times [(11+\eta)r_x + r_w]},$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} &= \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}\} \in \mathbb{R}^{6r_x \times 6r_x}, \\ \mathcal{D}_{\mathbf{X}\eta} &= \text{diag}\{\mathbf{X}, \dots, \mathbf{X}\} \in \mathbb{R}^{(\eta-1)r_x \times (\eta-1)r_x}, \end{aligned}$$

e  $\mathbf{X}^T = \mathbf{X} > 0$  e, portanto,  $\bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} > 0$ . Não obstante, como resultado desta operação obtemos os seguintes termos

$$\bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}^T \Sigma_{11} \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}^T \Sigma_{12} \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}^T \Sigma_{21} \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}^T \Sigma_{22} \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}, \quad (\text{A.125})$$

Ademais, devido ao fato de  $\bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}$  ser uma matriz definida positiva podemos afirmar que as matrizes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{22}$  são matrizes definidas negativas se e somente se as matrizes em (A.125) também forem definidas negativas. Assim, procuramos condições que satisfaçam esta condição. Visando facilitar a análise, primeiramente, explicitaremos todos seus termos,



a partir da definição de  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{22}$  em (4.15)-(4.16),

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{1m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} &= \\
&\left[ \begin{array}{cccccc}
\left( \begin{array}{c} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Psi^{(1)} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \mathcal{F}_1^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\overline{\mathcal{F}}_1 \mathcal{G} + \mathcal{G}^T \overline{\mathcal{F}}_1^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \end{array} \right) & (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_1 \Gamma_m \mathbf{X} & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Theta(\eta) \mathcal{D}_{\mathbf{X} \eta} & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathcal{F}}_1 B_\omega & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Delta_m} \\
* & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \mathbf{X} Z_1 \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \mathcal{D}_{\mathbf{X} \eta} \Phi(\eta) \mathcal{D}_{\mathbf{X} \eta} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -I & \Gamma_H \\
* & * & * & * & * & \mathcal{E}_m
\end{array} \right], \\
\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{2m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} &= \\
&\left[ \begin{array}{cccccc}
\left( \begin{array}{c} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Psi^{(2)} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\overline{\mathcal{F}}_2 \mathcal{G} + \mathcal{G}^T \overline{\mathcal{F}}_2^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \end{array} \right) & (\tau_3 - \tau_2) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_2 \Gamma_m \mathbf{X} & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Theta(\eta) \mathcal{D}_{\mathbf{X} \eta} & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathcal{F}}_2 B_\omega & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Delta_{(m+2)}} \\
* & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \mathbf{X} Z_2 \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \mathcal{D}_{\mathbf{X} \eta} \Phi(\eta) \mathcal{D}_{\mathbf{X} \eta} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -I & \Gamma_H \\
* & * & * & * & * & \mathcal{E}_{(m+2)}
\end{array} \right],
\end{aligned} \tag{A.126}$$

para  $m = \{1, 2\}$ .

Não obstante, analisemos as seguintes expressões,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\mathcal{F}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \mathcal{F}_1^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} &= \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_1 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \mathfrak{G}_1 + (\mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_1 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \mathfrak{G}_1)^T; \\
\mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\mathcal{F}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \mathcal{F}_2^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} &= \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_2 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \mathfrak{G}_2 + (\mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_2 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \mathfrak{G}_2)^T; \\
(\tau_2 - \tau_1) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_1 \Gamma_m \mathbf{X} &= (\tau_2 - \tau_1) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_1 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \Gamma_k; \\
(\tau_3 - \tau_2) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_2 \Gamma_m \mathbf{X} &= (\tau_3 - \tau_2) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \mathcal{F}_2 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \Gamma_k.
\end{aligned}$$

Observe que estas são as únicas expressões nas quais as matrizes de ponderação livre  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  aparecem. Portanto, podemos, sem nenhuma restrição, definir novas matrizes de ponderação livre da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{F}}_1 &= \mathcal{D}_{\mathbf{X}_1} \mathcal{F}_1 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x} \text{ e} \\
\hat{\mathcal{F}}_2 &= \mathcal{D}_{\mathbf{X}_1} \mathcal{F}_2 \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} \in \mathbb{R}^{6r_x \times 2r_x}.
\end{aligned} \tag{A.127}$$

Ademais, analisando as matrizes  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Psi^{(2)}$ ,  $\Theta(\eta)$ , e  $\Phi(\eta)$ , observa-se que estas são matrizes blocos constituídas pelas matrizes  $P$ ,  $S_j$ ,  $j = \{1, \dots, \eta\}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $N$  e  $M$ . Portanto, ao multiplicarmos matrizes bloco diagonais constituídas por  $\mathbf{X}$  à esquerda e à direita destas matrizes blocos, na realidade estamos multiplicando a variável  $\mathbf{X}$  à esquerda e à direita de todas as matrizes que formam  $\Psi^{(1)}$ ,  $\Psi^{(2)}$ ,  $\Theta(\eta)$ , e  $\Phi(\eta)$ . Além disso, é interessante notar

que estas matrizes só existem nas matrizes blocos citadas e nos termos  $-(\tau_2-\tau_1)^2\mathbf{X}Z_1\mathbf{X}$  e  $-(\tau_3-\tau_2)^2\mathbf{X}Z_2\mathbf{X}$ , conforme pode ser observado em (A.126). Destarte, visto que não existem termos cruzados entre as matrizes citadas, podemos definir as seguintes novas variáveis,

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \mathbf{X}P\mathbf{X}, \quad \hat{Z}_1 = \mathbf{X}Z_1\mathbf{X}, \quad \hat{Z}_2 = \mathbf{X}Z_2\mathbf{X}, \quad \hat{S}_j = \mathbf{X}S_j\mathbf{X}, \quad j = \{1, \dots, \eta\} \\ \hat{N}_{11} &= \mathbf{X}N_{11}\mathbf{X}, \quad \hat{N}_{12} = \mathbf{X}N_{12}\mathbf{X}, \quad \hat{N}_{22} = \mathbf{X}N_{22}\mathbf{X}, \quad \hat{M}_{ji} = \mathbf{X}M_{ji}\mathbf{X}, \quad j = \{1, \dots, \eta\}, \quad i = \{j, \dots, \eta\},\end{aligned}$$

Observe que as restrições quanto a positividade dos novos termos é determinada pelas matrizes originais, ou seja, se uma dada matriz  $W$  for definida positiva então  $\mathbf{X}W\mathbf{X}$  será também uma matriz definida positiva. Assim, podemos multiplicar  $\mathbf{X}$  à esquerda e à direita de todas as restrições impostas em (4.12), de forma a obtermos as restrições estipuladas em (4.17). Assim se estas últimas forem satisfeitas, então as restrições em (4.12) também serão satisfeitas.

Por conseguinte, feito esta análise, reescrevemos (A.126) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{1m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\overline{\mathcal{F}}_1 \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \overline{\mathcal{F}}_1^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \end{array} \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathcal{F}}_1 B_\omega & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Delta_m} \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_m \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{2m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} (\overline{\mathcal{F}}_2 \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \overline{\mathcal{F}}_2^T) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \end{array} \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathcal{F}}_2 B_\omega & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Delta_{(m+2)}} \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_{(m+2)} \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{A.128}$$

para  $m = \{1, 2\}$ , em que  $\hat{\Psi}^{(1)}$ ,  $\hat{\Psi}^{(2)}$ ,  $\hat{\Theta}(\eta)$  e  $\hat{\Phi}(\eta)$  são definidos em (4.19).

Não obstante, as matrizes em (A.128) ainda apresentam termos cruzados entre matrizes variáveis e, portanto, questões referentes a sua positividade (ou negatividade) não podem ser analisadas por meio de algoritmos convexos. Primeiramente, analisemos aos termos  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Delta_j}$ , com  $j = \{1, 2, 3, 4\}$ , nos quais aparecem os termos cruzados  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathcal{F}}_1$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathcal{F}}_2$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}} I \epsilon_{j1}$  e  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}} I \epsilon_{j2}$ , com  $j = \{1, 2, 3, 4\}$ . Podemos então simplificar a análise multiplicando  $\text{diag}\{I, \dots, I, \mathcal{E}_m^{-1}\} \in \mathbb{R}^{[(11+\eta)r_x+r_w] \times [(11+\eta)r_x+r_w]}$ , à esquerda e à direita de  $\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{1m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}$  e multiplicando  $\text{diag}\{I, \dots, I, \mathcal{E}_{m+2}^{-1}\} \in \mathbb{R}^{[(11+\eta)r_x+r_w] \times [(11+\eta)r_x+r_w]}$ , à esquerda e à direita de

$\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{2m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}}$ ,  $m=\{1, 2\}$ . Destarte, obtemos

$$\Upsilon_{1m} = \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_1 B_\omega & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \hat{\Gamma}_{\Delta_m} \\ \left( + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \left( \overline{\mathbf{F}}_1 \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \overline{\mathbf{F}}_1^T \right) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \right) & & & & & \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \hat{\Gamma}_{H_m} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_{2m} = \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_2 B_\omega & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \hat{\Gamma}_{\Delta_{(m+2)}} \\ \left( + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \left( \overline{\mathbf{F}}_2 \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \overline{\mathbf{F}}_2^T \right) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \right) & & & & & \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \hat{\Gamma}_{H_{(m+2)}} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}, \quad (\text{A.129})$$

para  $m=\{1, 2\}$ , com  $\hat{\Gamma}_{H_j} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{j2}^{-1} H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $j=\{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$\hat{\Gamma}_{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_1 H_1 & 0 & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_1}^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \quad \hat{\Gamma}_{\Delta_2} = \begin{bmatrix} \epsilon_{21}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_1 H_1 & 0 & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_1}^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix};$$

$$\hat{\Gamma}_{\Delta_3} = \begin{bmatrix} \epsilon_{31}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_2 H_1 & 0 & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_1}^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}; \quad \hat{\Gamma}_{\Delta_4} = \begin{bmatrix} \epsilon_{41}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_2 H_1 & 0 & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_1}^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}.$$

Por fim, falta analisarmos os termos cruzados resultantes  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{F}}_1$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{F}}_2$  e  $K\mathbf{X}$ . Para tal, redefiniremos o ganho  $K$  da seguinte forma,  $K = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$ . Então, utilizaremos a solução mais ordinária para a resolução deste problema, a qual apesar de relativamente ingênua apresenta bons resultados. Adicionaremos as seguintes restrições sobre as matrizes de ponderação livre  $\mathbf{F}_{1j}$ ,  $\mathbf{F}_{2j}$ ,  $j=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,

$$\mathbf{F}_{11} = \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{12} = \sigma_1 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{13} = \sigma_2 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{14} = \sigma_3 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{15} = \sigma_4 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{16} = \sigma_5 \mathbf{X}^{-1},$$

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{22} = \sigma_1 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{23} = \sigma_2 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{24} = \sigma_3 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{25} = \sigma_4 \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_{26} = \sigma_5 \mathbf{X}^{-1}, \quad (\text{A.130})$$

em que  $\sigma_j$ ,  $j=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , são constantes predefinidas.

Desta maneira, podemos definir as seguinte matrizes

$$\hat{\sigma} := \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_1 = \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_2 = \begin{bmatrix} I & \sigma_1 I & \sigma_2 I & \sigma_3 I & \sigma_4 I & \sigma_5 I \end{bmatrix}^T;$$

$$\hat{\mathbf{G}} := \mathbf{G} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} & \mathbf{B}\mathbf{Y} & -\mathbf{X} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{\Gamma}_Z := \Gamma_Z \mathcal{D}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}\mathbf{Y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\Gamma}_{\Xi_1} := \Gamma_{\Xi_1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \Xi_A \mathbf{X} & \Xi_B \mathbf{Y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_{\Xi_2} := \Gamma_{\Xi_2} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \Xi_C \mathbf{X} & \Xi_D \mathbf{Y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\text{A.131})$$

Então substituindo os termos obtidos em (A.131) nas matrizes  $\Upsilon_{1m}$  e  $\Upsilon_{2m}$ ,  $m=\{1, 2\}$ , em (A.129), obtemos as matrizes definidas em (4.18). Desta maneira, se as condições do

Teorema 4.3.1, escritas na forma de LMIs, forem satisfeitas, então as condições apresentadas na Proposição 4.3.1 serão satisfeitas. Assim, concluímos a prova do Teorema 4.3.1.



## A.7 PROVA DO TEOREMA 4.3.2 – [CAPÍTULO 4]

No Teorema 4.3.2 estabelecemos condições que se satisfeitas asseguram o cumprimento das questões estipuladas na Proposição 4.3.1 com referência a estabilidade robusta de sistemas de controle em rede com desempenho garantido segundo o critério  $H_\infty$ , conforme a Definição 4.1.1. A Proposição 4.3.1 está escrita na forma de BMIs (desigualdades matriciais bilineares) e, portanto, a análise para este caso deixa de ser convexa devido a existência de termos cruzados entre as matrizes  $F_{1j}$  e  $K$ ,  $j=\{1, \dots, 6\}$ , e entre as matrizes  $F_{2j}$  e  $K$ ,  $j=\{1, \dots, 6\}$ , conforme apontado em (A.124). Inicialmente, para a solução deste problema, iremos utilizar algumas das soluções previamente descritas na Subseção 4.3.1.

Primeiramente, consideramos a multiplicação à esquerda e à direita das matrizes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{22}$  (definidas na Proposição 4.3.1), por

$$\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} = \text{diag}\{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{X}\eta}, I, I, I, I, I, I\} \in \mathbb{R}^{[(11+\eta)r_x+r_w] \times [(11+\eta)r_x+r_w]},$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{X}} &= \text{diag}\{\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}\} \in \mathbb{R}^{6r_x \times 6r_x}, \\ \mathcal{D}_{\mathbf{X}\eta} &= \text{diag}\{\mathbf{X}, \dots, \mathbf{X}\} \in \mathbb{R}^{(\eta-1)r_x \times (\eta-1)r_x}, \end{aligned}$$

e  $\mathbf{X}^T = \mathbf{X} > 0$  e, portanto,  $\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} > 0$ . Analisando os termos resultantes desta operação de maneira exatamente igual a apresentada na subseção anterior, obtemos os seguintes termos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{1m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_1 B_w & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Delta_m} \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \left( \overline{\mathbf{F}}_1 \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \overline{\mathbf{F}}_1^T \right) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} & & & & & \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_m \end{bmatrix}, \\ \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} \Sigma_{2m} \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{F}}_2 B_w & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_Z^T & \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \Gamma_{\Delta_{(m+2)}} \\ + \mathcal{D}_{\mathbf{X}} \left( \overline{\mathbf{F}}_2 \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \overline{\mathbf{F}}_2^T \right) \mathcal{D}_{\mathbf{X}} & & & & & \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & \Gamma_H \\ * & * & * & * & * & \mathcal{E}_{(m+2)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para  $m=\{1, 2\}$ , em que  $\hat{\Psi}^{(1)}$ ,  $\hat{\Psi}^{(2)}$ ,  $\hat{\Theta}(\eta)$  e  $\hat{\Phi}(\eta)$  são definidos em (4.19).

Em seguida, definiremos o ganho de realimentação como  $K = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$ , dada a matriz de

ponderação livre  $Y \in \mathbb{R}^{r_u \times r_x}$ . Então, multiplicaremos

$$\begin{aligned} \text{diag}\{I, \dots, I, I, I, (\epsilon_{m1}^{-1}I), (\epsilon_{m2}^{-1}I)\} &\in \mathbb{R}^{[(11+\eta)r_x+r_w] \times [(11+\eta)r_x+r_w]} \text{ e} \\ \text{diag}\{I, \dots, I, I, I, (\epsilon_{(m+2)1}^{-1}I), (\epsilon_{(m+2)2}^{-1}I)\} &\in \mathbb{R}^{[(11+\eta)r_x+r_w] \times [(11+\eta)r_x+r_w]}, \end{aligned}$$

à esquerda e à direita das matrizes resultantes  $\overline{\mathcal{D}}_X \Sigma_{1m} \overline{\mathcal{D}}_X$  e  $\overline{\mathcal{D}}_X \Sigma_{2m} \overline{\mathcal{D}}_X$ ,  $m=\{1, 2\}$ , respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1m} &= \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_X \overline{F}_1 B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \mathcal{D}_X \overline{F}_1 H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \\ \left( + \mathcal{D}_X \overline{F}_1 \hat{G} + \left( \mathcal{D}_X \overline{F}_1 \hat{G} \right)^T \right) & & & & & & & & \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_{m1} I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{m2} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \\ \Upsilon_{2m} &= \begin{bmatrix} \left( \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \mathcal{D}_X \overline{F}_2 B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \mathcal{D}_X \overline{F}_2 H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \\ \left( + \mathcal{D}_X \overline{F}_2 \hat{G} + \left( \mathcal{D}_X \overline{F}_2 \hat{G} \right)^T \right) & & & & & & & & \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_{(m+2)1} I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{(m+2)2} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{A.132}$$

para  $m=\{1, 2\}$ , e com

$$\begin{aligned} \hat{G} &:= G \mathcal{D}_X = \begin{bmatrix} AX & BY & -X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Xi_1} &:= \Gamma_{\Xi_1} \mathcal{D}_X = \begin{bmatrix} \Xi_A X & \Xi_B Y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \hat{\Gamma}_Z &:= \Gamma_Z \mathcal{D}_X = \begin{bmatrix} CX & DY & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{\Gamma}_{\Xi_2} &:= \Gamma_{\Xi_2} \mathcal{D}_X = \begin{bmatrix} \Xi_C X & \Xi_D Y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{A.133}$$

Não obstante, neste ponto a análise difere-se completamente da análise apresentada na subseção anterior. Primeiramente, devemos observar que os termos cruzados aparecem exclusivamente em  $\mathcal{D}_X \overline{F}_1$  e  $\mathcal{D}_X \overline{F}_2$ , ou mais especificamente, em  $X F_{1j}$  e em  $X F_{2j}$ , para  $j=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Desta maneira, redefiniremos  $F_{11}$  e  $F_{21}$  como

$$F_{11} = X^{-1}, \quad F_{21} = X^{-1}. \tag{A.134}$$

Observe que a única restrição adicionada neste ponto refere-se ao fato que  $F_{11} = F_{21} > 0$ . Contudo, devemos incluir novas restrições à análise para tornar o problema factível. Assim,

eliminaremos os termos  $F_{1j}$  e  $F_{2j}$  para  $j=\{2, 4, 5, 6\}$ . Ou seja, as matrizes de ponderação livre  $\bar{F}_1$  e  $\bar{F}_2$  são redefinidas como

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & F_{13}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{F}_2 &= \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & F_{23}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.\end{aligned}\tag{A.135}$$

Obviamente, há um acréscimo de conservadorismo em relação à Proposição 4.3.1, todavia este acréscimo é consideravelmente inferior em comparação com a abordagem por substituição das matrizes por escalares predefinidos, introduzida na Subseção 4.3.1. Continuando a análise, redefinimos as matrizes de ponderação livre  $F_{13}$  e  $F_{23}$  como  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente. Assim, observamos que os termos cruzados  $\mathcal{D}_X \bar{F}_1$  e  $\mathcal{D}_X \bar{F}_2$ , são conseqüentemente redefinidos como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_X \bar{F}_1 &= \begin{bmatrix} I & 0 & (XF_1)^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathcal{D}_X \bar{F}_2 &= \begin{bmatrix} I & 0 & (XF_2)^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Então, visando facilitar a descrição da solução, separaremos as matrizes descritas em  $\mathcal{D}_X \bar{F}_1$  e  $\mathcal{D}_X \bar{F}_2$  em duas matrizes blocos da seguinte maneira

$$\mathcal{D}_X \bar{F}_1 = \hat{\sigma} + \bar{F}_{X1}, \quad \mathcal{D}_X \bar{F}_2 = \hat{\sigma} + \bar{F}_{X2},$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{F}_{X1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & (XF_1)^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{F}_{X2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & (XF_2)^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.\end{aligned}\tag{A.136}$$

Desta maneira, podemos reescrever as matrizes  $\Upsilon_{1m}$  e  $\Upsilon_{2m}$ ,  $m = \{1, 2\}$ , em (A.132), da

seguinte forma

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{1m} = & \left[ \begin{array}{cccccccc}
\left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \\ + \hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}} + (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}})^T + \overline{\mathbb{F}}_{X1} \hat{\mathcal{G}} + (\overline{\mathbb{F}}_{X1} \hat{\mathcal{G}})^T \end{array} \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & (\overline{\mathbb{F}}_{X1} B_\omega + \hat{\sigma} B_\omega) & \hat{\Gamma}_Z^T & (\overline{\mathbb{F}}_{X1} H_1 + \hat{\sigma} H_1) & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi}^T \\
* & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\epsilon_{m1} I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{m2} I & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 & -I
\end{array} \right], \\
\Upsilon_{2m} = & \left[ \begin{array}{cccccccc}
\left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \\ + \hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}} + (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}})^T + \overline{\mathbb{F}}_{X2} \hat{\mathcal{G}} + (\overline{\mathbb{F}}_{X2} \hat{\mathcal{G}})^T \end{array} \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & (\overline{\mathbb{F}}_{X2} B_\omega + \hat{\sigma} B_\omega) & \hat{\Gamma}_Z^T & (\overline{\mathbb{F}}_{X2} H_1 + \hat{\sigma} H_1) & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi}^T \\
* & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\epsilon_{(m+2)1} I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{(m+2)2} I & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 & -I
\end{array} \right],
\end{aligned} \tag{A.137}$$

em que  $\hat{\Gamma}_{\Xi}^T = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{\Xi_1}^T & \hat{\Gamma}_{\Xi_2}^T \end{bmatrix}$ .

Observe que ainda temos que solucionar o problema dos termos cruzados em  $\overline{\mathbb{F}}_{X1}$ , além da multiplicação deste termo com as variáveis  $X$  e  $Y$  em  $\hat{\mathcal{G}}$ . Neste intuito, iremos primeiramente separar as matrizes (A.137) de maneira a explicitar estes termos da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{1m} = & \alpha^T \beta_1 + \beta_1^T \alpha + \left[ \begin{array}{cccccccc}
\left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \\ + \hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}} + (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}})^T + \overline{\mathbb{F}}_{X1} \hat{\mathcal{G}}_X + (\overline{\mathbb{F}}_{X1} \hat{\mathcal{G}}_X)^T \end{array} \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi}^T \\
* & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\epsilon_{m1} I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{m2} I & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 & -I
\end{array} \right], \\
\Upsilon_{2m} = & \alpha^T \beta_2 + \beta_2^T \alpha + \left[ \begin{array}{cccccccc}
\left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \\ + \hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}} + (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}})^T + \overline{\mathbb{F}}_{X2} \hat{\mathcal{G}}_X + (\overline{\mathbb{F}}_{X2} \hat{\mathcal{G}}_X)^T \end{array} \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_{\Xi}^T \\
* & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\epsilon_{(m+2)1} I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{(m+2)2} I & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 & -I
\end{array} \right],
\end{aligned} \tag{A.138}$$



em que

$$\begin{aligned}\alpha &= \begin{bmatrix} \hat{G}_{AB} & 0 & 0 & B_\omega & 0 & H_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \beta_1 &= \begin{bmatrix} \overline{F_{X1}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \beta_2 &= \begin{bmatrix} \overline{F_{X2}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (\text{A.139})$$

$\overline{F_{X1}}$  e  $\overline{F_{X2}}$  são definidos em (A.136), e

$$\begin{aligned}\hat{G}_{AB} &= \begin{bmatrix} AX & BY & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{G}_X &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (\text{A.140})$$

de forma que  $\hat{G} = \hat{G}_{AB} + \hat{G}_X$ .

Assim, podemos aplicar a desigualdade de Park-Moon [174] (descrita no Lema B.0.4 (II), Apêndice B) sobre os termos cruzados  $\alpha$  e  $\beta$  em (A.138), de tal forma a obtermos a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned}\alpha^T \beta_1 + \beta_1^T \alpha &\leq (\alpha^T + \beta_1^T M_1) X_1 (\alpha + M_1 \beta_1) + \beta_1^T X_1^{-1} \beta_1 + 2\beta_1^T M_1 \beta_1, \\ \alpha^T \beta_2 + \beta_2^T \alpha &\leq (\alpha^T + \beta_2^T M_2) X_2 (\alpha + M_2 \beta_2) + \beta_2^T X_2^{-1} \beta_2 + 2\beta_2^T M_2 \beta_2.\end{aligned}$$

Em seguida, definindo  $M_1 = -F_1^{-1}$ ,  $M_2 = -F_2^{-1}$ ,  $X_1 = F_1 X F_1$  e  $X_2 = F_2 X F_2$ , podemos reescrever as desigualdades da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\alpha^T \beta_1 + \beta_1^T \alpha &\leq (\alpha^T - \overline{\Gamma}_X^T) F_1 X F_1 (\alpha - \overline{\Gamma}_X) + \overline{\Gamma}_I^T (\Pi_X - 2\Pi_1) \overline{\Gamma}_I \\ \alpha^T \beta_2 + \beta_2^T \alpha &\leq (\alpha^T - \overline{\Gamma}_X^T) F_2 X F_2 (\alpha - \overline{\Gamma}_X) + \overline{\Gamma}_I^T (\Pi_X - 2\Pi_2) \overline{\Gamma}_I.\end{aligned}\quad (\text{A.141})$$

em que

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_X &= \begin{bmatrix} \Gamma_X^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \overline{\Gamma}_I &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_X &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Pi_X &= \text{diag}\{0, 0, X, 0, 0, 0\}, \\ \Pi_1 &= \text{diag}\{0, 0, X F_1 X, 0, 0, 0\}, \\ \Pi_2 &= \text{diag}\{0, 0, X F_2 X, 0, 0, 0\}.\end{aligned}$$

Desta maneira, substituindo os termos obtidos pela desigualdade (A.141) em (A.138), podemos analisar a positividade das matrizes resultantes através do complemento de Schur. Assim, tem-se que os termos  $\Upsilon_{1m}$  e  $\Upsilon_{2m}$  em (A.138) são definidos negativos somente se as

matrizes  $\bar{\Upsilon}_{1m}$  e  $\bar{\Upsilon}_{2m}$  para  $m = \{1, 2\}$  forem definidas negativas, em que

$$\begin{aligned}
& \bar{\Upsilon}_{1m} = \bar{\Gamma}_I^T (\Pi_X - 2\Pi_1) \bar{\Gamma}_I + \\
& \left[ \begin{array}{ccccccc} \left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \\ + \hat{\sigma} \hat{G} + (\hat{\sigma} \hat{G})^T + \overline{F_{X1}} \hat{G}_X + (\overline{F_{X1}} \hat{G}_X)^T \end{array} \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_\Xi^T \\ * & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_{m1} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{m2} I & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & -I \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ (\alpha^T - \bar{\Gamma}_X^T) \\ \\ \\ \\ \\ \\ -(\mathbf{F}_1 \mathbf{X} \mathbf{F}_1)^{-1} \end{array}, \\
& \bar{\Upsilon}_{2m} = \bar{\Gamma}_I^T (\Pi_X - 2\Pi_2) \bar{\Gamma}_I + \\
& \left[ \begin{array}{ccccccc} \left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \\ + \hat{\sigma} \hat{G} + (\hat{\sigma} \hat{G})^T + \overline{F_{X2}} \hat{G}_X + (\overline{F_{X2}} \hat{G}_X)^T \end{array} \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_\Xi^T \\ * & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_{(m+2)1} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{(m+2)2} I & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & -I \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ (\alpha^T - \bar{\Gamma}_X^T) \\ \\ \\ \\ \\ \\ -(\mathbf{F}_2 \mathbf{X} \mathbf{F}_2)^{-1} \end{array}, \\
\end{aligned} \tag{A.142}$$

Não obstante, este termo pode ser consideravelmente simplificado se observarmos que as expressões  $\bar{\Gamma}_I^T (\Pi_X - 2\Pi_1) \bar{\Gamma}_I$  e  $\bar{\Gamma}_I^T (\Pi_X - 2\Pi_2) \bar{\Gamma}_I$  resultam em termos apenas na primeira matriz bloco de  $\bar{\Upsilon}_{1m}$  e  $\bar{\Upsilon}_{2m}$ , respectivamente. Desta maneira, podemos definir novas matrizes a partir da seguinte operação,

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_1 &= \overline{F_{X1}} \hat{G}_X + (\overline{F_{X1}} \hat{G}_X)^T + \Pi_X - 2\Pi_1 \\
&= \text{diag}\{0, 0, (\mathbf{X} - 4\mathbf{X}\mathbf{F}_1\mathbf{X}), 0, 0, 0\}, \text{ e} \\
\hat{\Pi}_2 &= \overline{F_{X2}} \hat{G}_X + (\overline{F_{X2}} \hat{G}_X)^T + \Pi_X - 2\Pi_2 \\
&= \text{diag}\{0, 0, (\mathbf{X} - 4\mathbf{X}\mathbf{F}_2\mathbf{X}), 0, 0, 0\}.
\end{aligned} \tag{A.143}$$

Além disso, tomando as definições em (A.139), (A.141) e (A.143), podemos reescrever

as matrizes  $\bar{\Upsilon}_{1m}$  e  $\bar{\Upsilon}_{2m}$ , em (A.142), da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\bar{\Upsilon}_{1m} = & \left[ \begin{array}{cccccccccc}
\left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{F}}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1^T \hat{\mathcal{F}}_1^T \\ + \hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}} + (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}})^T + \hat{\Pi}_1 \end{array} \right) & (\tau_2 - \tau_1) \hat{\mathcal{F}}_1 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_\Xi^T & (\hat{\mathcal{G}}_{AB}^T - \Gamma_X^T) \\
* & -(\tau_2 - \tau_1)^2 \hat{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & B_\omega^T \\
* & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\epsilon_{m1} I & 0 & 0 & H_1^T \\
* & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{m2} I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 & -I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -(\mathbf{F}_1 \mathbf{X} \mathbf{F}_1)^{-1}
\end{array} \right], \\
\bar{\Upsilon}_{2m} = & \left[ \begin{array}{cccccccccc}
\left( \begin{array}{c} \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\mathcal{F}}_2 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2^T \hat{\mathcal{F}}_2^T \\ + \hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}} + (\hat{\sigma} \hat{\mathcal{G}})^T + \hat{\Pi}_2 \end{array} \right) & (\tau_3 - \tau_2) \hat{\mathcal{F}}_2 \Gamma_m & \hat{\Theta}(\eta) & \hat{\sigma} B_\omega & \hat{\Gamma}_Z^T & \hat{\sigma} H_1 & 0 & \hat{\Gamma}_\Xi^T & (\hat{\mathcal{G}}_{AB}^T - \Gamma_X^T) \\
* & -(\tau_3 - \tau_2)^2 \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \hat{\Phi}(\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & B_\omega^T \\
* & * & * & * & -I & 0 & H_2 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\epsilon_{(m+2)1} I & 0 & 0 & H_1^T \\
* & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_{(m+2)2} I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 & -I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -(\mathbf{F}_2 \mathbf{X} \mathbf{F}_2)^{-1}
\end{array} \right], \tag{A.144}
\end{aligned}$$

Por fim, introduziremos as novas variáveis  $\mathcal{V}_m > 0$ ,  $\mathcal{U}_m > 0$ ,  $m = \{1, 2\}$ , a partir da imposição das seguintes restrições

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{F}_1 \mathbf{X} \mathbf{F}_1)^{-1} &\leq -\mathcal{V}_1, & -\mathbf{X} \mathbf{F}_2 \mathbf{X} &\leq -\mathcal{U}_1, \\
-(\mathbf{F}_2 \mathbf{X} \mathbf{F}_2)^{-1} &\leq -\mathcal{V}_2, & -\mathbf{X} \mathbf{F}_1 \mathbf{X} &\leq -\mathcal{U}_2.
\end{aligned}$$

Note entretanto que estas restrições podem ser reescritas através da aplicação direta do complemento de Schur da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} & \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 & \tilde{\mathcal{V}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_2 & \tilde{\mathcal{V}}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}} & \tilde{\mathcal{U}}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}} & \tilde{\mathcal{U}}_2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

em que

$$\mathbf{X} \tilde{\mathbf{X}} = I, \quad \mathcal{V}_1 \tilde{\mathcal{V}}_1 = I, \quad \mathcal{V}_2 \tilde{\mathcal{V}}_2 = I, \quad \mathcal{U}_1 \tilde{\mathcal{U}}_1 = I, \quad \mathcal{U}_2 \tilde{\mathcal{U}}_2 = I.$$

Assim, é fácil observar que as matrizes resultantes em (A.144) equivalem as matrizes definidas no enunciado do Teorema 4.3.2, e, por conseguinte, a prova do Teorema 4.3.2 está completa. ■



## B. FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Neste capítulo, introduzimos as principais ferramentas matemáticas utilizadas no decorrer do trabalho e para a prova dos Teoremas apresentados no Apêndice A.

### Lema B.0.1. (Regra de Leibniz para a derivada de integrais duplas)

Dadas quaisquer funções  $A(y)$ ,  $B(y)$ ,  $C(y, x)$ ,  $D(y, x)$  e  $f(s)$ , a função

$$G = \int_{B(y)}^{A(y)} \int_{D(y,x)}^{C(y,x)} f(s) ds dx$$

possui derivada em  $y$ , dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} G &= \frac{d}{dy} \int_{B(y)}^{A(y)} \int_{D(y,x)}^{C(y,x)} ds dx \\ &= \int_{B(y)}^{A(y)} \left[ \frac{d}{dy} [C(y, x)] f(C(y, x)) - \frac{d}{dy} [D(y, x)] f(D(y, x)) \right] dx \\ &\quad + \frac{d}{dy} [A(y)] \int_{D(y,A(y))}^{C(y,A(y))} f(s) ds + \frac{d}{dy} [B(y)] \int_{D(y,B(y))}^{C(y,B(y))} f(s) ds. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

PROVA A prova deste lema é baseada na regra da integral de Leibniz e na teoria fundamental do cálculo e pode facilmente ser deduzida a partir de [175].  $\square$

### Lema B.0.2. (Lema de Jensen) [4]

Dados os escalares  $r_1, r_2$  e a matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que  $(r_2 - r_1) \geq 0$  e  $M = M^T > 0$ , então dada qualquer função vetorial  $x : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tem-se que

$$(r_2 - r_1) \int_{r_1}^{r_2} x^T(s) M x(s) ds \geq \left( \int_{r_1}^{r_2} x(s) ds \right)^T M \left( \int_{r_1}^{r_2} x(s) ds \right). \quad \blacksquare$$

### Lema B.0.3. (Lema de Finsler) [176, 177]

Dados o vetor  $x \in \mathbb{R}^m$  e as matrizes  $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$  com  $\text{rank}(B) < m$  e seja  $B^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $B$ , i.e.,  $B B^\perp = 0$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes

- I.  $x^T \Omega x < 0, \quad \forall x \neq 0 : Bx = 0$
- II.  $(B^\perp)^T \Omega B^\perp < 0,$
- III.  $\exists \mu \in \mathbb{R} \quad : \Omega - \mu B^T B < 0,$
- IV.  $\exists F \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad : \Omega + FB + B^T F^T < 0. \quad \blacksquare$

**Lema B.0.4. (Lemas de Park-Moon) [174, 106]**

Dados os vetores  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  e  $\beta \in \mathbb{R}^m$ , as seguintes afirmações são válidas para qualquer matriz definida positiva  $X = X^T > 0$  e para qualquer matriz de ponderação livre  $M$

$$(I) \quad -2\alpha^T \beta \leq \alpha^T X \alpha + \beta^T X^{-1} \beta,$$

$$(II) \quad -2\alpha^T \beta \leq (\alpha + M\beta)^T X (\alpha + M\beta) + \beta^T X^{-1} \beta + 2\beta^T M \beta,$$

além disso, para qualquer matriz semidefinida positiva  $\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$ , a seguinte relação é válida

$$(III) \quad -2\alpha^T \beta \leq \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & (Y - I) \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

## C. ARTIGOS PUBLICADOS

Neste capítulo, apresentamos todos os trabalhos científicos publicados durante o período do mestrado. Os artigos são apresentados na seguinte ordem:

- [67] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Delay-Dependent Robust  $H_\infty$  Output Tracking Control for Uncertain Networked Control Systems*, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, IFAC WC 2011, Agosto, 2011;
- [68] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Robust stability criteria of uncertain systems with delay and its derivative varying within intervals*, American Control Conference, ACC 2011, Junho, 2011;
- [69] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Stability criterion for networked control systems with delay varying within intervals*, 8th IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, ICNSC 2011, Abril, 2011;
- [70] L.F.C. Figueredo, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *New delay-and-delay-derivative-dependent stability criteria for systems with time-varying delay*, Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2010, Dezembro, 2010;
- [71] L.F.C. Figueredo, P.H.R.Q.A. Santana, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Estabilidade e Estabilização de Sistemas de Controle em Rede com Incertezas e Atrasos Variantes no Tempo*, XVIII Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2010, Setembro, 2010;
- [72] P.H.R.Q.A. Santana, L.F.C. Figueredo, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Stability of Networked Control Systems with Dynamic Controllers in the Feedback Loop*, 18th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, MED10, Junho, 2010;
- [73] L.F.C. Figueredo, P.H.R.Q.A. Santana, E.S. Alves, J.Y. Ishihara, G.A. Borges e A. Bauchspiess, *Robust Stability of Networked Control Systems*, 7th IEEE Conference on Control and Automation, ICCA 2009, Dezembro, 2009;