

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TELETRANSPORTE QUÂNTICO DE  
ESTADOS TÉRMICOS**

THIAGO PRUDÊNCIO DE OLIVEIRA

Brasília, 08 de agosto de 2008

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TELETRANSPORTE QUÂNTICO DE  
ESTADOS TÉRMICOS**

THIAGO PRUDÊNCIO DE OLIVEIRA

ORIENTADOR:

TARCÍSIO MARCIANO DA ROCHA FILHO

Brasília, 08 de agosto de 2008

“Levei a vida mais agitada que um homem pode levar, arrisquei-me centenas de vezes e vi a morte de perto.”

*(Alberto Santos Dumont)*

# Agradecimentos

Sinceros agradecimentos

pelas contribuições para a execução desta dissertação:

Ao prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho, UnB, orientador;

Ao prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana, UnB, co-orientador;

Ao prof. Dr. Ardiley Torres Avelar, UFG;

Ao prof. Dr. Viktor Dodonov, UnB;

À secretária da pós-graduação do IF-UnB, Célia Regina;

Aos estudantes de pós-graduação do Instituto de Física da UnB;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES);

Aos amigos;

Aos meus pais, Teresinha Prudêncio de Oliveira e Paulo Rodrigues de Oliveira;

Aos meus irmãos, Aline Prudêncio de Oliveira e Cleber Prudêncio de Oliveira;

A Deus.

# Resumo

A idéia de teletransporte quântico motivou grande número de trabalhos nas últimas décadas. Desde a proposta original, foram sugeridos muitos outros protocolos de teletransporte, em paralelo com importantes realizações experimentais. Nessa direção, estuda-se neste trabalho o teletransporte quântico via dinâmica de campos térmicos. Dos pontos de vista teórico e experimental, ruído e efeitos de temperatura são importantes questões a serem levadas em consideração, em informação quântica, comunicação quântica e computação quântica. Uma vez que o teletransporte quântico representa um papel significativo nesses domínios e é um importante fenômeno por si mesmo, são relevantes os conhecimentos de como teletransportar estados quânticos na presença de um banho térmico ou de um ruído ou mesmo como esses efeitos interferem no processo de teletransporte. Neste trabalho, é investigado o teletransporte quântico à temperatura finita via dinâmica de campos térmicos. São construídos explicitamente os estados térmicos no teletransporte e os correspondentes operadores densidade a eles associados. São analisados três casos: o teletransporte de estados térmicos, o teletransporte de um estado a temperatura zero com um canal quântico à temperatura finita e um estado térmico teletransportado com o uso de um canal quântico a zero temperatura. Em todos os casos, a fidelidade do processo é calculada.

# Abstract

Quantum teleportation has motivated a great deal of work over the last decade. Since the original propose many other theoretical teleportation protocols have appeared, in parallel with some important experimental achievements. From both experimental and theoretical points of view, on the other hand, noise and temperature effects are also important issues to be taken into account in quantum information, quantum communication and quantum computation. Once teleportation plays a significant role in these areas and is important for itself, knowledge of how to teleport a quantum state in the presence of a heat bath or a noise and how these effects interfere in the process of teleportation are relevant questions. Along this direction, here is investigated the quantum teleportation at finite temperature via thermofield dynamics approach. Thermal states and the corresponding density operators associated to them are constructed explicitly in the teleportation. Three cases are analyzed in this work: quantum teleportation of thermal states, quantum teleportation of a state at zero temperature with a quantum channel at finite temperature, and the quantum teleportation with a thermal state to be teleported with a quantum channel at zero temperature. In all cases, fidelities are calculated.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Estados Térmicos</b>	<b>9</b>
2.0.1	Férmions Livres . . . . .	14
2.0.2	Bósons Livres . . . . .	19
<b>3</b>	<b>O Teletransporte Quântico</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>Teletransporte Quântico de Estados Térmicos</b>	<b>36</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>46</b>

## Capítulo 1

# Introdução

Em mecânica quântica, os possíveis estados que um sistema físico pode assumir são representados por vetores normalizados  $|\psi\rangle$  pertencentes a um espaço de Hilbert<sup>1</sup>. Por sua vez, grandezas físicas mensuráveis são representadas por operadores hermiteanos<sup>2</sup> que atuam sobre o espaço de Hilbert, denominados observáveis. A atuação de um observável sobre um dado estado do sistema corresponde a uma medida da correspondente grandeza física nesse estado. Para um observável  $A$ , o valor médio observado no estado  $|\psi\rangle$ , para a grandeza física associada, é dado pelo número real<sup>3</sup>

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle. \quad (1.1)$$

Dois estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  são equivalentes se suas médias para quaisquer operadores coincidirem [1, 2]. O sistema encontra-se em um estado puro se é possível caracterizá-lo completamente através de um único vetor de estado  $|\psi\rangle$ . Caso contrário, o estado é considerado misto. Neste caso, pode-se apenas especificar a probabilidade  $w_i$  do

---

<sup>1</sup>Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial complexo, dotado de norma, com a propriedade adicional de completeza, que garante a convergência da base para um espaço vetorial de dimensão infinita.

<sup>2</sup>Um operador  $A$  é hermiteano, também denominado auto-adjunto, se coincide com seu adjunto  $A^\dagger$ .

<sup>3</sup>Valores médios e autovalores de operadores hermiteanos são números reais.

sistema se encontrar em um dado estado  $|\alpha^{(i)}\rangle$ . A representação de um estado misto é fornecida pelo operador densidade

$$\rho = \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|, \quad (1.2)$$

correspondendo a uma descrição em termos de ensembles.

Um ensemble misto é uma coleção de cópias do sistema físico tal que os membros com população relativa  $w_1$  são caracterizados pelo estado  $|\alpha^{(1)}\rangle$ , outra fração com população relativa  $w_2$  é caracterizada pelo estado  $|\alpha^{(2)}\rangle$ , e assim por diante, satisfazendo:

$$\sum_i w_i = 1. \quad (1.3)$$

Suponhamos que seja feita uma medida de um observável  $A$  em algum ensemble misto. Uma pergunta natural é qual o número médio de  $A$  quando um grande número de medidas é realizado. A resposta é dada pela média de  $A$  no ensemble, que é definida por:

$$\langle A \rangle = \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle. \quad (1.4)$$

Os autovetores  $|a'\rangle$  do observável  $A$ , tendo autovalores  $a'$ , formam uma base para o espaço de Hilbert e satisfazem a relação de completudeza

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1.$$

Utilizando essa expressão, tem-se

$$\sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_{a', a''} \langle a'' | \left( \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| \right) | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle.$$

Define-se daí o operador densidade

$$\rho = \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|. \quad (1.5)$$

Assim, é possível escrever a média de  $A$  no ensemble como

$$\langle A \rangle = \sum_{a', a''} \langle a'' | \rho | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle = \sum_{a''} \langle a'' | \rho \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| A | a'' \rangle = \sum_{a''} \langle a'' | \rho A | a'' \rangle.$$

Chega-se, então, à relação

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A). \quad (1.6)$$

Portanto, a média de qualquer operador em um dado ensemble pode ser calculada uma vez conhecido o operador densidade. Com efeito, o operador densidade contém toda informação fisicamente significativa acerca do ensemble em questão.

Um sistema quântico composto envolve dois ou mais sistemas quânticos. Sistemas quânticos compostos podem apresentar correlações impossíveis de serem reproduzidas por estados puros associados separadamente a cada subsistema [3]. Esse comportamento, caracterizando um aspecto não local da mecânica quântica, emerge do princípio de superposição, quando dois ou mais sistemas quânticos interagem.

Sejam, por exemplo, um elétron e um próton, a grande distância um do outro, preparados em diferentes laboratórios, nos estados  $|u\rangle$  e  $|v\rangle$ , respectivamente. Esses estados pertencem a diferentes espaços de Hilbert. O estado do conjunto formado por ambas as partículas é fornecido pelo produto direto de seus estados individuais  $|w\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle$ . Uma vez que os estados do sistema composto pertencem a outro espaço de Hilbert, devem obedecer também ao princípio de superposição. Assim, se  $|u_1\rangle$  e  $|u_2\rangle$  são possíveis estados para o elétron e  $|v_1\rangle$  e  $|v_2\rangle$  são possíveis estados para o próton, um possível estado para o sistema elétron-próton é

$$|w\rangle = \alpha|u_1\rangle \otimes |v_1\rangle + \beta|u_2\rangle \otimes |v_2\rangle,$$

onde  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Estados desse tipo não podem ser fatorados em um produto direto de superposições de estados pertencentes a cada espaço, um pertencente ao elétron e outro pertencente ao próton. Nesse estado, nem o próton nem o elétron estão em um estado puro. Estados produto com essa característica são denominados emaranhados ou correlacionados. Um exemplo típico desses estados é a produção de duas partículas de spin 1/2 pelo decaimento de um objeto sem spin [4]. O estado

conjunto dessas dessas partículas<sup>4</sup>,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle),$$

não pode ser reduzido por transformações de base pertencentes a cada uma das partículas.

Outro exemplo interessante é produzido quando um fóton passa através de um cristal de calcita<sup>5</sup> [5]. Sejam  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  dois estados de polarização para o fóton, definidos a partir da orientação do cristal de calcita, e sejam  $|o\rangle$  e  $|e\rangle$  o estado ordinário e extraordinário, respectivamente, de localização do fóton emergente do cristal<sup>6</sup>. Uma base completa para expandir o estado do fóton que sai do cristal é dada por  $|xo\rangle$ ,  $|yo\rangle$ ,  $|xe\rangle$  e  $|ye\rangle$ . Assim, se o fóton incidente no cristal estiver no estado  $|xo\rangle$ , então uma medida de polarização em  $|x\rangle$ , no sentido ordinário  $|o\rangle$ , certamente irá determiná-lo. Por outro lado, se o fóton incidente no cristal estiver no estado  $(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle)|i\rangle$ , onde  $|i\rangle$  é o estado de localização do fóton incidente e  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , então, ao realizar medidas de polarização, os estados de polarização  $|x\rangle$  ou  $|y\rangle$  poderão ser obtidos apenas de modo estatístico. Isto é, após a passagem do feixe pelo cristal de calcita, com estado  $(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle)|i\rangle$ , a probabilidade de medir o fóton no estado  $|xo\rangle$ , correspondente a um feixe ordinário  $|o\rangle$  com estado polarização  $|x\rangle$ , será  $|\alpha|^2$  e a probabilidade de medi-lo no estado  $|ye\rangle$ , correspondente a um feixe extraordinário  $|e\rangle$  com estado polarização  $|y\rangle$ , será  $|\beta|^2$ . Dessa forma, dizemos que o estado do fóton emergente do cristal de calcita é um estado emaranhado.

A existência de estados emaranhados em mecânica quântica levanta questões fundamentais. Um exemplo disso é o artigo seminal de 1935 publicado por Einstein,

<sup>4</sup>Aqui omitimos o símbolo  $\otimes$ , com o uso da notação  $|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ .

<sup>5</sup>A calcita ( $\text{CaCO}_3$ ) é um cristal birrefringente.

<sup>6</sup>Quando o feixe de luz incide sobre a calcita, sofre birrefringência (refração dupla). Um dos feixes de saída do cristal obedece à lei de Snell-Descartes, sendo denominado ordinário, e o outro não obedece a essa lei, sendo denominado extraordinário. Além disso, os feixes ordinário e extraordinário têm polarizações ortogonais.

---

Podolsky e Rosen (EPR) [6], onde a questão do emaranhamento veio efetivamente à tona e um forte argumento em relação à completeza da mecânica quântica foi apresentado. No mesmo ano, N. Bohr [7] replicou esse trabalho, ressaltando que a mecânica quântica, dentro de seu escopo, apareceria como uma descrição completamente racional dos fenômenos físicos, tal como observado nos processos atômicos. As discussões do artigo EPR tiveram importantes conseqüências, culminando, entre outros, na discussão de John S. Bell acerca do problema das variáveis ocultas [8] e no trabalho de 1957, de D. Bohm e Y. Aharonov [9], onde é proposto um experimento de verificação do paradoxo EPR, usando-se as propriedades de polarização de fótons correlacionados, produzidos pela aniquilação de um par elétron-pósitron.

O emaranhamento, poder-se-ia dizer, nasceu como um paradoxo, suscitando grande debate, mas estabeleceu-se como um fato. Realmente, a formulação de John Bell de suas famosas desigualdades [10], que fixam limites para as teorias realísticas baseadas em localidade, tornou possível a realização de experimentos que aprofundaram cientificamente o debate [11].

A medida do emaranhamento entre dois sistemas  $A$  e  $B$  está relacionada à informação que pode ser trocada entre eles por via puramente quântica.

Em 1948, Claude E. Shannon publicou um trabalho intitulado *A Mathematical Theory of Communication* (Uma Teoria Matemática da Comunicação) [12], onde lançou as bases matemáticas para o que se entende hoje como teoria da informação. A comunicação envolve um emissor e um receptor. O emissor encontra-se em um ponto e deseja enviar uma mensagem ao receptor, em outro ponto. Embora a mensagem possa ter um caráter semântico, do ponto de vista da transmissão da mensagem, esse aspecto não é relevante. Shannon define o problema fundamental da comunicação como sendo a reprodução, exata ou aproximada, da mensagem enviada do emissor ao receptor. Conseqüentemente, o problema não é em si a mensagem, mas sua transmissão. Mais especificamente, para que o processo de transmissão seja efetivado, necessitamos de um sistema de comunicação.

Um sistema de comunicação é composto por: uma fonte de informação, um

transmissor, um canal, um receptor e um destinatário. Uma fonte de informação produz uma mensagem ou seqüência de mensagens que será comunicada ao terminal receptor. O transmissor é encarregado de realizar uma operação sobre a mensagem de tal modo a colocá-la em forma adequada para transmissão através de um canal. O canal, por sua vez, é o meio usado para transmitir o sinal do transmissor ao receptor. O receptor é encarregado de realizar a operação inversa àquela executada pelo transmissor, colocando a mensagem na condição final para ser recebida pelo destinatário.

Na escala onde as leis da mecânica quântica dominam, a teoria da informação deve ser reformulada para que possa reproduzir a realidade física dos sistemas.

No âmbito da teoria clássica da informação, a medida da correlação entre dois sistemas é fornecida pela informação mútua,  $I(A : B) = H(\rho_A) + H(\rho_B) - H(\rho_{AB})$ , onde  $H(\rho) = -\sum_x \rho(x) \log(\rho(x))$  é a entropia de Shannon e  $\rho_A$  e  $\rho_B$  representam densidades de probabilidade. Esse conceito pode ser generalizado para o âmbito da mecânica quântica utilizando a entropia de von Neumann

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log(\rho)), \quad (1.7)$$

onde  $\rho$  é o operador densidade. Nesse caso, a informação mútua é dada por:

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (1.8)$$

onde  $\rho_{AB}$  é o operador densidade para o sistema composto de  $A$  e  $B$ . Os outros operadores densidade são obtidos dos traços parciais  $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$  e  $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB})$ . A informação mútua representa a quantidade de correlações totais no sistema [13].

A máxima informação transmitida por um canal de comunicação resulta da maximização da informação mútua [14]. O valor máximo da informação mútua é denominado capacidade do canal,  $C = \max I(A : B)$ .

A unidade clássica de informação é o bit. Em teoria quântica da informação a unidade é o qubit, um sistema quântico bidimensional. Um exemplo de qubit é o estado de polarização de um fóton.

---

Ao pensar em computação e informação no domínio do muito pequeno, torna-se forçosamente necessário lançar mão da teoria quântica, simplesmente porque a abordagem clássica já não vale nesse domínio. De fato, como observou Richard P. Feynman [15, 16], quando se está lidando com um circuito de apenas, por exemplo, sete átomos, uma grande quantidade de novos efeitos pode ocorrer de modo completamente distinto do que ocorre na escala dominada pelo clássico. Ao trabalhar com diferentes leis, fenômenos diferentes podem ocorrer. No domínio onde predominam as leis da mecânica quântica, por exemplo, talvez não seja estritamente necessário pensar em circuitos, mas em algum sistema envolvendo níveis de energia quantizados, interação de spins quantizados ou algo do gênero.

Com efeito, o processamento de informação quântica oferece uma forma qualitativamente diferente de pensar a manipulação da informação [17, 18]. Foi voltado para esse aspecto da informação que R. Landauer [19] enfatizou que a informação é física. De fato, as teorias mais recentes de computação quântica, criptografia quântica e comunicação quântica estão apoiadas na representação física da informação. Em cada caso, a representação em um sistema quântico fornece vantagens em relação à situação clássica [20]. Um computador quântico é capaz de quebrar códigos de forma assustadoramente mais eficiente que qualquer computador clássico que se possa imaginar. Um exemplo disso é o algoritmo de Shor, de fatoração de números primos [21]. Além disso, os protocolos quânticos de criptografia são mais seguros que qualquer sistema clássico de criptografia [22, 23, 24].

Outro processo de particular interesse no âmbito da informação quântica é o teletransporte quântico. Esse fenômeno, apresentado pela primeira vez em 1993, foi estudado em vários contextos ao longo dos anos: em óptica quântica [25, 26, 27, 28, 29], em estado sólido [30], em nanoestruturas de pontos quânticos [31, 32], na aniquilação partícula-buraco em um mar de Fermi [33], em estados atômicos [34], em cadeias de spins [35, 36], via qubits carregados [37], envolvendo buracos negros [38], entre outras propostas. Além disso, o processo de teletransporte quântico foi verificado experimentalmente em diferentes contextos [39]. Ba-

sicamente, o teletransporte quântico consiste em destruir um estado quântico em um lugar e reconstruí-lo em outro. Nesta dissertação, reservamos um capítulo para tratar especificamente do teletransporte quântico e em seguida, em outro capítulo, apresentamos uma proposta de teletransporte quântico de estados térmicos.

A teoria quântica da informação tem sido desenvolvida ao longo dos últimos anos e seus conceitos têm fornecido reflexões sobre características fundamentais da mecânica quântica, tais como o princípio de incerteza [40], o fenômeno de interferência entre partículas [41] e o emaranhamento quântico [42], abrindo caminho para novos desenvolvimentos na área [43].

## Capítulo 2

# Estados Térmicos

Apresentado em 1927, por L. Landau [44] e, independentemente, por J. von Neumann [45], o formalismo de operador densidade descreve quantitativamente situações físicas com estados puros e mistos em sistemas quânticos, sendo apropriado para a mecânica estatística quântica. Em 1975, Y. Takahashi e H. Umezawa [46] propuseram uma outra abordagem para os problemas de mecânica estatística quântica, em particular, no âmbito da teoria quântica de campos, baseada em um formalismo de operadores, que denominaram dinâmica de campos térmicos<sup>1</sup>. A idéia central dessa proposta é possibilitar o tratamento algébrico de estados mistos, dentro de uma estrutura de espaço de Hilbert, de tal modo que estados mistos sejam tratados em pé de igualdade com estados puros. Mais especificamente, duplicando os graus de liberdade no espaço de Hilbert, um estado de vácuo térmico é construído de tal forma que a média de qualquer operador nesse estado coincida com a média estatística.

Considere, por exemplo, um operador  $A$ . Sua média em um dado ensemble deve ser expressa por<sup>2</sup>

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A), \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>*Thermofield dynamics*, em inglês.

<sup>2</sup>Essa relação foi demonstrada no capítulo anterior.

onde  $\rho$  é o operador densidade no ensemble correspondente.

No contexto da mecânica estatística, os sistemas são descritos nos ensembles microcanônico, canônico e grande canônico<sup>3</sup>.

O ensemble microcanônico descreve um sistema isolado caracterizado por manter fixos o número de partículas  $N$ , o volume ocupado  $V$  e a energia  $E$ . Nesse caso, o número de estados acessíveis ao sistema é representado por  $\Gamma = \Gamma(N, V, E)$ . Os estados acessíveis ao sistema são considerados eqüiprováveis, tendo assim uma distribuição uniforme, e o operador densidade<sup>4</sup> possui uma representação diagonal  $\rho_{nm} = \rho_n \delta_{nm}$ , onde:

$$\rho_n = \begin{cases} 1/\Gamma & \text{para todos os estados acessíveis.} \\ 0 & \text{para todos os outros estados.} \end{cases} \quad (2.2)$$

O ensemble canônico descreve um sistema em contato com um banho térmico, podendo trocar energia com este, mas não partículas, e é caracterizado pelo número de partículas  $N$ , volume  $V$  e temperatura  $T$ , sendo sua energia variável. Nesse caso, a probabilidade de que o sistema possua energia  $E_r$  é dada pelo fator de Boltzmann  $e^{-\beta E_r}$ , onde  $\beta = 1/k_B T$  e  $k_B$  é a constante de Boltzmann<sup>5</sup>. A matriz densidade em uma representação que diagonaliza a energia  $\rho_{nm} = \rho_n \delta_{nm}$  é

$$\rho_n = e^{-\beta E_n} / \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (2.3)$$

fornecendo a probabilidade  $\rho_n$  de se encontrar o sistema em um estado  $|\psi_n\rangle$  com energia  $E_n$ . O operador densidade pode então ser expresso por

$$\rho = \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \quad (2.4)$$

onde  $H$  é o operador hamiltoniano e  $Z$  é a função partição, dada por

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}). \quad (2.5)$$

---

<sup>3</sup>Às vezes os termos grão-canônico ou grã-canônico são utilizados como sinônimos de grande canônico.

<sup>4</sup>Os termos operador densidade e matriz densidade são muitas vezes utilizados como sinônimos.

<sup>5</sup>No sistema internacional de unidades,  $k_B = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

O ensemble grande canônico descreve um sistema em contato com um banho térmico com o qual pode trocar energia e partículas. Nesse caso, o operador densidade é definido no espaço de Fock e deve comutar não apenas com o hamiltoniano  $H$  do sistema, mas também com o operador número  $N$ , cujos autovalores são  $0, 1, 2, 3, \dots$  [47]. Nesse caso, o operador densidade é escrito como

$$\rho = \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{Z}, \quad (2.6)$$

onde  $\mu$  é o potencial químico e  $Z$  é a função de grande partição:

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)}). \quad (2.7)$$

Em dinâmica de campos térmicos, o valor esperado de um operador  $A$  em um estado de vácuo térmico<sup>6</sup>  $|0(\beta)\rangle$  é escrito como:

$$\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}(Ae^{-\beta H}). \quad (2.8)$$

Contudo, o estado de vácuo térmico  $|0(\beta)\rangle$  não é um vetor no espaço de Hilbert usual. Com efeito, uma vez que, no ensemble grande canônico, hamiltoniano e operador número comutam,  $[H, N] = 0$ , e, portanto, os autoestados de energia podem ser tomados como autovetores do estado número  $|n\rangle$ :

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (2.9)$$

O operador densidade é dado por

$$\rho = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle\langle n|. \quad (2.10)$$

Conseqüentemente,

$$\text{Tr}(\rho A) = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle. \quad (2.11)$$

---

<sup>6</sup>Na verdade, a identificação desse estado com o estado de vácuo térmico somente será completa quando forem definidos, posteriormente, os operadores térmicos de criação e aniquilação, cuja atuação nesse estado permitirá caracterizá-lo como estado de vácuo térmico.

Se supusermos que  $|0(\beta)\rangle$  pertence ao espaço de Hilbert gerado pelos estados número, teremos que:

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n \alpha_n |n\rangle. \quad (2.12)$$

onde  $\alpha_n = \alpha_n(\beta)$  deve ser um número complexo dependente de  $\beta$ . Dessa forma,

$$\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = \sum_{m,n} \alpha_m^* \alpha_n \langle m|A|n\rangle. \quad (2.13)$$

Como essa média deve coincidir com a média estatística na eq.(2.11), a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\alpha_m^* \alpha_n = \frac{e^{-\beta E_m}}{Z(\beta)} \delta_{mn}, \quad (2.14)$$

onde  $\alpha_m^*$  é o complexo conjugado de  $\alpha_m$ . A eq.(2.14), contudo, não é satisfeita por escalares, caso de números complexos, mas apenas por vetores. Isto implica que, para que a eq.(2.14) seja satisfeita,  $\alpha_n$  deve ser um vetor pertencente a um espaço de Hilbert. Conseqüentemente, definimos vetores ortonormais  $|\tilde{n}\rangle$ , tais que

$$\alpha_n(\beta) = |\tilde{n}\rangle \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{Z^{\frac{1}{2}}(\beta)}, \quad (2.15)$$

de maneira que a eq.(2.14) seja satisfeita. Chega-se então ao estado de vácuo térmico escrito em termos de  $|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = |n, \tilde{n}\rangle$ :

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z^{\frac{1}{2}}(\beta)} \sum_n e^{-\beta \frac{E_n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle. \quad (2.16)$$

Desse modo, a construção de um estado de vácuo térmico cujas médias, para quaisquer operadores  $A$ , forneçam as médias estatísticas correspondentes leva à necessidade de duplicação dos graus de liberdade do espaço de Hilbert. Formalmente, o que se faz é estabelecer as denominadas regras de conjugação til [48, 49, 50]:

$$\widetilde{(AB)} = \tilde{A}\tilde{B}, \quad (2.17)$$

$$\widetilde{(aA + bB)} = a^* \tilde{A} + b^* \tilde{B}, \quad (2.18)$$

$$\widetilde{(A^\dagger)} = (\widetilde{A})^\dagger, \quad (2.19)$$

$$\widetilde{(\widetilde{A})} = A, \quad (2.20)$$

$$[A, \widetilde{B}] = 0, \quad (2.21)$$

onde os operadores  $A$  e  $B$  atuam apenas no espaço de Hilbert gerado por  $|n\rangle$ , os  $\widetilde{A}$  e  $\widetilde{B}$  atuam apenas no espaço gerado por  $|\widetilde{n}\rangle$ , os números  $a$  e  $b$  são números complexos e  $a^*$  e  $b^*$  são seus complexos conjugados. Por outro lado, do ponto de vista do espaço de Hilbert original, as regras de conjugação til resultam das relações

$$A|\phi, \widetilde{\phi}\rangle = \mathbf{A} \otimes 1(|\phi\rangle\langle\phi|) = \mathbf{A}|\phi\rangle\langle\phi| \quad (2.22)$$

e

$$\widetilde{A}|\phi, \widetilde{\phi}\rangle = 1 \otimes \mathbf{A}(|\phi\rangle\langle\phi|) = |\phi\rangle\langle\phi|\mathbf{A}^\dagger, \quad (2.23)$$

onde  $A = \mathbf{A} \otimes 1$  e  $\widetilde{A} = 1 \otimes \mathbf{A}$ , mostrando que a duplicação do espaço de Hilbert possibilita tratar como vetores os operadores projeção que atuam no espaço não-duplicado <sup>7</sup>. É essa estrutura que fornece o elo entre estados térmicos e operadores densidade. Com efeito, há uma correspondência entre o estado de vácuo térmico e o operador densidade no ensemble canônico,

$$|0(\beta)\rangle \longrightarrow \rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}.$$

No espaço duplicado, o estado de vácuo é representado por  $|0, \widetilde{0}\rangle$ . O estado de vácuo térmico pode ser obtido dele a partir de uma transformação de Bogoliubov<sup>8</sup>,  $e^{-iG}$ , no estado de vácuo:

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG}|0, \widetilde{0}\rangle, \quad (2.24)$$

<sup>7</sup>Teticamente, esse procedimento é conhecido como uma conjugação modular em uma álgebra do tipo  $C^*$  [51].

<sup>8</sup>N.N.Bogoliubov (1909-1992), físico teórico com importantes contribuições em teoria quântica de campos e teorias de supercondutividade e superfluidez.

onde  $G$  é um operador hermiteano. Com a transformação de Bogoliubov, podemos definir operadores térmicos de criação e aniquilação em termos dos operadores não-térmicos de criação e aniquilação<sup>9</sup> correspondentes:

$$a(\beta)^\dagger = e^{-iG} a^\dagger e^{iG}, \quad a(\beta) = e^{-iG} a e^{iG}, \quad (2.25)$$

$$\tilde{a}(\beta)^\dagger = e^{-iG} \tilde{a}^\dagger e^{iG}, \quad \tilde{a}(\beta) = e^{-iG} \tilde{a} e^{iG}. \quad (2.26)$$

Esses operadores obedecem, assim como os não-térmicos, relações de anticomutação para férmions e comutação para bósons.

### 2.0.1 Férmions Livres

No caso de férmions livres, que satisfazem, no espaço duplicado, as relações de anticomutação

$$\{a, a^\dagger\} = \{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1, \quad (2.27)$$

$$\{a, a\} = \{\tilde{a}, \tilde{a}\} = 0, \quad (2.28)$$

e

$$\{\tilde{a}^\dagger, a^\dagger\} = \{\tilde{a}, a\} = 0, \quad (2.29)$$

e descritos pelo hamiltoniano<sup>10</sup>:

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (2.30)$$

com o correspondente operador<sup>11</sup> para o espaço dos til:

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \quad (2.31)$$

---

<sup>9</sup>Os termos criação e aniquilação nem sempre são apropriados, pois há, por exemplo, situações onde o operador de aniquilação pode “criar”, ao invés de “aniquilar” [52].

<sup>10</sup>Faz-se aqui  $\hbar = 1$ .

<sup>11</sup>Apenas os operadores sem til têm papel de observáveis.

as equações (2.25) e (2.26) podem ser escritas como

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \quad (2.32)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger, \quad (2.33)$$

onde

$$u(\beta) = \cos \theta, \quad (2.34)$$

$$v(\beta) = \text{sen} \theta, \quad (2.35)$$

e

$$\theta = \tan^{-1}(e^{-\frac{\beta\omega}{2}}). \quad (2.36)$$

O espaço de Hilbert duplicado, para os férmions livres, é gerado pelos vetores  $|0, \tilde{0}\rangle$ ,  $|1, \tilde{0}\rangle = a^\dagger|0, \tilde{0}\rangle$ ,  $|0, \tilde{1}\rangle = \tilde{a}^\dagger|0, \tilde{0}\rangle$  e  $|1, \tilde{1}\rangle = a^\dagger\tilde{a}^\dagger|0, \tilde{0}\rangle$ . De onde segue que o vácuo térmico, dado pela eq.(2.16), pode ser escrito como:

$$|0(\beta)\rangle = Z(\beta)^{-\frac{1}{2}}(|0, \tilde{0}\rangle + e^{-\frac{\beta\omega}{2}}|1, \tilde{1}\rangle). \quad (2.37)$$

Da condição de normalização para o estado térmico  $|0(\beta)\rangle$ , determina-se  $Z(\beta)$ , sendo esta a função partição para férmions livres:

$$Z(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega}.$$

Assim, a equação (2.37) assume a forma

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}}(|0, \tilde{0}\rangle + e^{-\frac{\beta\omega}{2}}|1, \tilde{1}\rangle). \quad (2.38)$$

A média estatística do número de elétrons pode então ser calculada de acordo com a dinâmica de campos térmicos:

$$\langle a^\dagger a \rangle = \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle = \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}},$$

que é a distribuição de Fermi-Dirac.

A transformação de Bogoliubov atuando sobre o estado de vácuo pode ser construída para férmions, com

$$u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}}, \quad (2.39)$$

e

$$v(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega}}}, \quad (2.40)$$

que correspondem aos cosseno e seno expressos pelas equações (2.34) e (2.35), respectivamente. Portanto, a seguinte relação é verificada:

$$u(\beta)^2 + v(\beta)^2 = 1,$$

e o vácuo térmico pode ser escrito como:

$$|0(\beta)\rangle = \cos\theta|0, \tilde{0}\rangle + \text{sen}\theta|1, \tilde{1}\rangle. \quad (2.41)$$

Também conclui-se que a distribuição de Fermi-Dirac para férmions livres é igual a  $\text{sen}^2\theta$ . A expressão (2.41) pode ser obtida por uma transformação de Bogoliubov no estado de vácuo:

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG_F}|0, \tilde{0}\rangle.$$

A idéia é encontrar  $G_F$  de tal modo que a equação acima reduza-se à eq.(2.41). Assim,

$$e^{-iG_F}|0, \tilde{0}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iG_F)^k}{k!}|0, \tilde{0}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k (G_F)^k}{k!}|0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.42)$$

Para que o somatório em (2.42) represente funções seno e cosseno, é preciso que os termos não contenham o termo imaginário  $i$ . Portanto, pode-se estabelecer  $G_F = i|G_F|$ .

$$e^{-iG_F} = e^{|G_F|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|G_F|)^k}{k!}|0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.43)$$

Faz-se agora  $G_F = \theta f$ , onde  $f = f(a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$  é função dos operadores de criação e destruição. Tem-se, desse modo,

$$e^{-iG_F} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} f^k |0, \tilde{0}\rangle \quad (2.44)$$

Como esta expressão deve ser separada e dar origem a senos e cossenos, devemos ter

$$f^{2k} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^k |0, \tilde{0}\rangle$$

e

$$f^{2k+1} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^k |1, \tilde{1}\rangle.$$

Em particular, observa-se que  $f|0, \tilde{0}\rangle = a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle$ ,  $f^2|0, \tilde{0}\rangle = -\tilde{a}a|1, \tilde{1}\rangle$  e sucessivamente. Dessa maneira, são obtidos termos contendo  $\tilde{a}a$  e  $a^\dagger \tilde{a}^\dagger$  atuando sobre  $|0, \tilde{0}\rangle$  e  $|1, \tilde{1}\rangle$ . Tem-se dessa maneira uma expressão para  $f$ :

$$f = -\tilde{a}a + a^\dagger \tilde{a}^\dagger. \quad (2.45)$$

Conseqüentemente,

$$-iG_F = -\theta(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger). \quad (2.46)$$

Assim, o estado de vácuo témico é gerado do vácuo por uma transformação de Bogoliubov  $e^{-iG_F}$ . Pode-se também verificar a atuação da transformação de Bogoliubov sobre as excitações do vácuo no espaço duplicado de férmions livres:

$$e^{-iG_F} \begin{pmatrix} |1, \tilde{1}\rangle \\ |0, \tilde{0}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1, \tilde{1}\rangle \\ |0, \tilde{0}\rangle \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

e

$$e^{-iG_F} \begin{pmatrix} |1, \tilde{0}\rangle \\ |0, \tilde{1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1, \tilde{0}\rangle \\ |0, \tilde{1}\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Segue que a ação da transformação de Bogoliubov em um vetor do plano gerado por  $|0, \tilde{0}\rangle$  e  $|1, \tilde{1}\rangle$  corresponde a uma rotação desse vetor, por um ângulo  $\theta$ . Por outro

lado, a atuação da transformação de Bogoliubov sobre um vetor no plano gerado por  $|1, \tilde{0}\rangle$  e  $|0, \tilde{1}\rangle$  não tem qualquer efeito sobre ele, representando o papel de um operador identidade nesse plano.

Dispondo da transformação de Bogoliubov, pode-se também obter as relações para os operadores térmicos de criação e aniquilação. Os operadores térmicos podem ser escritos numa combinação linear dos não-térmicos. Para mostrar isso, utiliza-se a Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A B e^{-A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \quad (2.49)$$

onde  $A$  e  $B$  são operadores e  $B_m = [A, B_{m-1}]$  é definido recursivamente, com  $B_0 = B$ . Assim, para  $a(\beta) = e^{-iG_F} a e^{iG_F}$ , tem-se a correspondência  $A = -iG_F$  e  $B = a$ .

Como a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff envolve comutadores, e os férmions satisfazem relações de anticomutação, a seguinte expressão é útil

$$[A, B] = 2AB - \{A, B\}. \quad (2.50)$$

Utilizando a equação (2.50), obtemos:

$$B_{2k} = (-1)^k \theta^{2k} a \quad (2.51)$$

e

$$B_{2k+1} = -(-1)^k \theta^{2k+1} \tilde{a}^\dagger. \quad (2.52)$$

Chega-se assim a

$$a(\beta) = \cos \theta a - \text{sen} \theta \tilde{a}^\dagger.$$

Procedendo de modo análogo para os outros operadores térmicos, obtemos as relações correspondentes às equações (2.25) e (2.26). Esses resultados podem ser sinteticamente expressos em forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ a(\beta)^\dagger \\ \tilde{a}(\beta) \\ \tilde{a}(\beta)^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \\ \tilde{a} \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

## 2.0.2 Bósons Livres

De modo bastante semelhante, para o caso de bósons livres, temos:

$$[a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad (2.54)$$

$$[a, a] = [\tilde{a}, \tilde{a}] = 0, \quad (2.55)$$

$$[\tilde{a}^\dagger, a^\dagger] = [\tilde{a}, a] = 0, \quad (2.56)$$

as expressões (2.25) e (2.26) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \quad (2.57)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger, \quad (2.58)$$

onde

$$u(\beta) = \cosh \theta, \quad (2.59)$$

$$v(\beta) = \sinh \theta, \quad (2.60)$$

e

$$\theta = \tanh^{-1}(e^{\frac{\beta\omega}{2}}). \quad (2.61)$$

Temos também que:

$$u(\beta) = \frac{1}{(1 - e^{-\beta\omega})^{1/2}} \quad (2.62)$$

e

$$v(\beta) = \frac{1}{(e^{\beta\omega} - 1)^{1/2}}, \quad (2.63)$$

satisfazendo

$$u(\beta)^2 - v(\beta)^2 = 1. \quad (2.64)$$

As relações entre os operadores de criação e aniquilação para bósons livres e os correspondentes operadores não-térmicos podem, como no caso de férmions, ser expressas em uma representação matricial:

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ a(\beta)^\dagger \\ \tilde{a}(\beta) \\ \tilde{a}(\beta)^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & \sinh \theta \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ \sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \\ \tilde{a} \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

O estado de vácuo térmico correspondente a bósons livres é dado por:

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\beta n \omega / 2} \frac{(a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n}{n!} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.66)$$

onde  $Z(\beta)$  é a função de partição, obtida da condição de normalização do estado de vácuo térmico.

Uma transformação de Bogoliubov pode ser construída de modo análogo para o caso bosônico, tomando:

$$G_B = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger). \quad (2.67)$$

O valor esperado do operador número de  $a^\dagger a$  no estado de vácuo térmico nos dá a distribuição de Bose-Einstein:

$$\langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (2.68)$$

A partir do estado de vácuo, a construção de outros estados é fornecida pela equação:

$$|n, \tilde{m}, (\beta)\rangle = \frac{(a^\dagger(\beta))^n (\tilde{a}^\dagger(\beta))^m}{n! m!} |0(\beta)\rangle. \quad (2.69)$$

Tais estados, por sua vez, podem ser obtidos do vácuo a partir da transformação de Bogoliubov:

$$|n, \tilde{m}, (\beta)\rangle = \frac{(a^\dagger(\beta))^n (\tilde{a}^\dagger(\beta))^m}{n! m!} e^{-iG} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.70)$$

Utilizando as equações (2.25) e (2.26), obtemos os estados térmicos em termos das excitações do vácuo:

$$|n, \tilde{m}, (\beta)\rangle = e^{-iG} |n, \tilde{m}\rangle, \quad (2.71)$$

onde

$$|n, \tilde{m}\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^m}{n! m!} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.72)$$

Assim, os estados térmicos são bem caracterizados no espaço de Hilbert duplicado. Uma vez colocados em uma estrutura de espaço de Hilbert, podemos falar de superposições de estados térmicos e a formação de estados térmicos emaranhados. Isso será analisado em mais detalhe no próximo capítulo.

## Capítulo 3

# O Teletransporte Quântico

Conhecido no âmbito da ficção científica e popularizado em *Jornada nas Estrelas*<sup>1</sup>, o termo teletransporte remete ao processo de fazer algo desaparecer de um lugar e aparecer em outro. Junção do prefixo grego *tele*, que significa distante, e do verbo latino *portare*, que significa levar, esse termo foi cunhado em 1931, pelo escritor norte-americano Charles Hoy Fort (1874-1932), em seu livro intitulado *Lo!* (Olhe!<sup>2</sup>), embora a idéia seja anterior a ele, tendo aparecido em 1877, em um conto de Edward Page Mitchell (1852-1927), *The Man Without a Body* (O Homem Sem um Corpo), e em 1927, em um livro de Arthur Conan Doyle (1859-1930), *The Disintegration Machine* (A Máquina de Desintegração) [60].

Em sua versão científica, o teletransporte é mais apropriadamente denominado teletransporte quântico. Uma das primeiras observações que se deve fazer quanto a esse processo é que, na versão científica do teletransporte, nem matéria nem energia são teletransportados, o que há aqui é uma transferência de informação que possibilita a reconstrução do estado de um sistema quântico em outro lugar com a conseqüente destruição do estado original de onde se partiu. Outra observação que deve ser feita é que esse é um fenômeno estritamente quântico.

---

<sup>1</sup>Jornada nas Estrelas (Star Trek) é uma série da década de 1960, concebida pelo roteirista e produtor norte-americano Gene Roddenberry (1921-1991).

<sup>2</sup>Aqui essa interjeição indica surpresa.

Mais especificamente, a possibilidade de uma versão científica de teletransporte decorre, primeiramente, do teorema da não-clonagem, de acordo com o qual não existem operações quânticas capazes de duplicar perfeitamente um estado arbitrário. Esse teorema foi proposto em 1982, para estados puros, por W. K. Wootters e W. H. Zurek [61] e posteriormente, em 1996, estendido a estados mistos por H. Barnum, C. Caves, C. Fuchs, R. Jozsa e B. Schumacher [62].

Suponha uma máquina de clonagem, por exemplo, um amplificador perfeito, em um estado  $|A_0\rangle$  e um estado que se deseja clonar, por exemplo, um estado de polarização de um fóton,  $|s\rangle$ . A clonagem então seria um processo do tipo

$$|A_0\rangle|s\rangle \longrightarrow |A_s\rangle|ss\rangle, \quad (3.1)$$

onde  $|A_s\rangle$  é o estado final da máquina, que pode ou não depender da polarização do fóton, e  $|ss\rangle$  é o estado final, isto é, estado do campo de radiação onde há dois fótons cada um com estado  $|s\rangle$ .

Seja, então, essa amplificação realizada para polarizações vertical  $|\uparrow\rangle$  e horizontal  $|\leftrightarrow\rangle$ .

$$|A_0\rangle|\uparrow\rangle \longrightarrow |A_{vert}\rangle|\uparrow\uparrow\rangle \quad (3.2)$$

e

$$|A_0\rangle|\leftrightarrow\rangle \longrightarrow |A_{hor}\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle. \quad (3.3)$$

De acordo com a mecânica quântica, essa operação deve ser representada por uma operação linear (e unitária). Assim, se o estado de polarização é uma superposição das polarizações horizontal e vertical,

$$\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\rangle, \quad (3.4)$$

o resultado da operação com o aparato de medida será:

$$|A_0\rangle(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\rangle) \longrightarrow \alpha|A_{vert}\rangle|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|A_{hor}\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle. \quad (3.5)$$

Se os estados do aparato  $|A_{hor}\rangle$  e  $|A_{vert}\rangle$  não são idênticos, então os dois fótons emergentes do aparato estão em um estado misto. Por outro lado, se os estados do aparato são idênticos, então  $\alpha|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$  é o estado emergente. Em nenhum dos casos, portanto, o estado clonado emerge como  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\rangle$ . Conseqüentemente, para um estado arbitrário, a clonagem não é possível.

Dada a impossibilidade de clonar um estado quântico arbitrário, resta a possibilidade de mover de algum modo um estado de um lugar para outro, de onde segue a idéia de teletransporte. Como analogia, poder-se-ia dizer que o teorema da não-clonagem expressa algo como: é proibido *copiar e colar*, mas é permitido *cortar e colar*. Isto é, o teorema da não-clonagem afirma que, para se copiar um estado, é, em geral, preciso destruir o original.

Uma outra via é não violar o teorema da não-clonagem, copiando um estado de modo imperfeito, mas o menos imperfeito possível. Esse procedimento é denominado clonagem quântica, proposto em 1996, por V. Bužek e M. Hillery [63]. A proposta experimental desse processo foi efetuada em 2002, por A. Lamas-Linares, C. Simon, J. C. Howell e D. Bouwmeester [64], com a clonagem quântica de fótons por emissão estimulada. Em 1999, M. Muraio, D. Jonathan, M. B. Plenio e V. Vedral [65] propuseram a ligação entre a proposta de clonagem quântica e o teletransporte, o que veio a ser denominado teleclonagem quântica. Nesse processo, clonagens quânticas são feitas e em seguida são efetuados os teletransportes de vários estados quanticamente clonados, possibilitando o teletransporte de um estado (embora não idêntico) para mais de um destinatário. Em 2001, P. van Loock e S. L. Braunstein [66] propuseram a teleclonagem para variáveis contínuas. Em 2006, S. Koike, H. Takahashi, H. Yonezawa, N. Takei, S. L. Braunstein, T. Aoki e A. Furusawa [67] realizaram a demonstração experimental da teleclonagem quântica de estados ópticos coerentes. A teleclonagem generaliza o teletransporte quântico para múltiplos receptores. Embora nesse caso não se tenha um estado teletransportado exatamente igual ao original, esse processo, do ponto de vista da transferência de informação, é muitas vezes útil.

Além do teorema da não-clonagem, outro aspecto ainda mais relevante para o processo de teletransporte quântico é a propriedade característica de sistemas quânticos de apresentarem correlações não-locais, ou emaranhamento. É essa propriedade, aliás, que fundamenta as teorias de informação e computação quânticas. Com efeito, o emaranhamento quântico é um ponto chave para a realização do teletransporte quântico, bem como para a construção de algoritmos quânticos e correção quântica de erros [68].

Em 1993, C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters [69] propuseram o primeiro protocolo de teletransporte quântico, também denominado protocolo original. Nesse protocolo, tem-se um sistema de comunicação composto de um canal clássico de comunicação e outro quântico, partilhados entre um emissor e um receptor. Costuma-se denominar o emissor por Alice e o receptor por Bob. O canal quântico é representado por um estado maximalmente emaranhado, sendo esse um canal puramente quântico. O procedimento utiliza também um canal clássico.

Alice pretende enviar a Bob informação completa sobre um estado quântico  $|\phi\rangle$ . Embora possua esse estado, ela não o conhece propriamente, do contrário ela poderia relatar a Bob tudo o que ele necessitaria para construir esse estado. Alice divide a informação, codificada em  $|\phi\rangle$  em duas partes, uma puramente clássica e outra puramente quântica, por meio de dois diferentes canais. Tendo recebido essas duas transmissões, Bob pode reconstruir uma réplica acurada de  $|\phi\rangle$ . Nesse processo, o estado  $|\phi\rangle$  de Alice é destruído, obedecendo assim ao teorema da não-clonagem. Aqui nenhuma lei física é violada. Em particular, esse evento não ocorre instantaneamente ou em um intervalo do tipo espaço, porque requer, entre outras coisas, o envio de uma mensagem clássica entre Alice e Bob.

O estado que Alice possui é um estado de superposição de, por exemplo, uma partícula de spin 1/2:

$$|\phi_1\rangle = a|\uparrow\rangle_1 + b|\downarrow\rangle_1, \quad (3.6)$$

onde  $a$  e  $b$  são números complexos satisfazendo a relação

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (3.7)$$

O estado maximalmente emaranhado partilhado entre Alice e Bob é aqui um estado EPR singleto:

$$|\Psi_{23}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3), \quad (3.8)$$

onde 2 representa uma partícula pertencente a Alice e 3 representa uma pertencente a Bob.

O estado total da Alice é então representado por

$$|\Psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle|\Psi_{23}^{(-)}\rangle. \quad (3.9)$$

Esse estado pode ser escrito da seguinte maneira

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 - |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3).$$

Definindo os vetores da base de Bell por:

$$|\Psi_{12}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \quad (3.10)$$

e

$$|\Phi_{12}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2), \quad (3.11)$$

podemos reescrever (3.9) como:

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle = & |\Psi_{12}^{(+)}\rangle\left(-\frac{a}{2}|\uparrow\rangle_3 + \frac{b}{2}|\downarrow\rangle_3\right) + |\Phi_{12}^{(+)}\rangle\left(-\frac{a}{2}|\uparrow\rangle_3 - \frac{b}{2}|\downarrow\rangle_3\right) \\ & + |\Psi_{12}^{(-)}\rangle\left(\frac{a}{2}|\downarrow\rangle_3 - \frac{b}{2}|\uparrow\rangle_3\right) + |\Phi_{12}^{(-)}\rangle\left(\frac{a}{2}|\downarrow\rangle_3 + \frac{b}{2}|\uparrow\rangle_3\right). \end{aligned}$$

Alice deve então fazer a partícula 1 interagir com sua partícula 2. Esse objetivo é atingido quando ela realiza uma medida do tipo von Neumann<sup>3</sup> no sistema conjunto

---

<sup>3</sup>A medida de um dado observável  $A$  em um sistema  $S$  em  $t = 0$  é denominada medida de von Neumann ou ideal se, ao repetir a medida em um tempo seguinte, o mesmo valor é encontrado. Caso contrário, a medida é denominada medida de Landau ou não-ideal [70].

constituído pelas partículas 1 e 2, projetando assim seu sistema em uma das bases de Bell, o que leva a partícula de Bob a um de quatro estados possíveis:

$$\langle \Psi_{12}^{(\pm)} | \Psi_{123} \rangle = -\frac{a}{2} | \uparrow \rangle_3 \pm \frac{b}{2} | \downarrow \rangle_3$$

e

$$\langle \Phi_{12}^{(\pm)} | \Psi_{123} \rangle = +\frac{a}{2} | \downarrow \rangle_3 \mp \frac{b}{2} | \uparrow \rangle_3.$$

Essa medida também é denominada medida de Bell. Alice precisa, em seguida, comunicar a Bob o resultado de sua medida, para que ele possa realizar a operação unitária correspondente que lhe permitirá obter o estado teleportado. Matricialmente, isso equivale a realizar uma das quatro seguintes operações:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = -I \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \sigma_x \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = i\sigma_y \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = -\sigma_z \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são as matrizes de Pauli<sup>4</sup>:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

<sup>4</sup>Essas matrizes são uma representação do grupo  $SU(2)$ , satisfazendo às regras de comutação

$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$  e as relações  $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ ,  $\det(\sigma_i) = -1$ ,  $\sigma_i^2 = I$ .

e

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Ao realizar a operação unitária correspondente à medida feita por Alice, Bob obtém então o estado teleportado:

$$|\phi_3\rangle = a|\uparrow\rangle_3 + b|\downarrow\rangle_3, \quad (3.15)$$

que é idêntico ao estado que Alice queria transferir. Nesse processo, portanto, o estado de Alice foi destruído e reconstruído por Bob, daí a justificativa para o uso do termo teletransporte.

Como consequência dessa proposta, uma grande quantidade de trabalhos interessantes usando teletransporte apareceu nos últimos anos.

Em 1994, L. Vaidman [71] explorou mais a fundo o teletransporte de estados quânticos, propondo o teletransporte no âmbito de variáveis contínuas. No mesmo ano, L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche [72] propuseram um protocolo experimental de teletransporte, onde um átomo, enviado através de uma cavidade, tem seu estado replicado em outro átomo através de outra cavidade.

Em 1995, S. L. Braunstein e A. Mann [73] propuseram um esquema para a medida de uma versão óptica do operador de Bell, usando uma generalização do interferômetro de Hong-Ou-Mandel<sup>5</sup> [74], mostrando a possibilidade de teletransporte do estado de polarização de um fóton com eficiência condicional de aproximadamente 100%.

Em 1996, S. L. Braunstein [75] desenvolveu uma descrição reversível do aparato de medida envolvido no esquema de teletransporte. Ele fez isso ao expressar o processo de teletransporte em termos de uma evolução unitária sem nenhum

---

<sup>5</sup>Geralmente usado para medir o intervalo de tempo entre dois fótons produzidos por conversão paramétrica descendente.

---

colapso da função de onda. A descrição usual de teletransporte envolve somente um canal clássico e um par de partículas completamente emaranhadas, sem ocorrência de emaranhamento com o meio ambiente. Ao enfatizar que essa descrição não pode ser unitária, porque uma evolução unitária não permite que um estado geral seja mapeado em um produto de dois estados, nenhum dos quais contendo qualquer informação sobre o estado original, Braunstein procura uma descrição unitária, tratando o aparato de detecção como um objeto mecânico quântico. Dessa maneira, os sinais usualmente clássicos são por ele tratados como estados ortogonais de um sistema quântico.

Em 1997, D. Bouwnmeester, J-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger [76], produzindo um par de fótons emaranhados por conversão paramétrica descendente<sup>6</sup> e utilizando interferometria de dois fótons para analisar o emaranhamento, transmitiram o estado de polarização de um fóton para outro, realizando o primeiro experimento de teletransporte quântico. Há ainda uma certa polêmica desse experimento com relação ao experimento de teletransporte de D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy & S. Popescu [77], publicado em 1998, mas submetido antes, em 1997, antes do experimento de D. Bownmeester et al. ser submetido.

Em 1998, S. L. Braunstein e H. J. Kimble propuseram um teletransporte para variáveis quânticas contínuas [79], extendendo o trabalho anterior, de Vaidman [71]. No mesmo ano, o teletransporte de variáveis contínuas em sua versão experimental foi realizado por A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. Polzik [80], que propuseram o teletransporte de estados ópticos coerentes usando emaranhamento de estados comprimidos. O experimento

---

<sup>6</sup>Nesse processo, um cristal não-linear divide o fóton incidente em pares de fótons de mais baixa energia, cujas energias e momentos combinados são iguais à energia e momento do fóton incidente. Para mais detalhes, ver o trabalho de E. M. Nagasako, S. J. Bentley, R. W. Boyd e G. S. Agarwal [78].

consiste de uma estação emissora, operada por Alice, e uma estação receptora, operada por Bob, e uma estação para produzir feixes de fótons emaranhados EPR. Alice e Bob, recebem cada um, metade dos estados EPR emaranhados. A estação de Alice consiste de dois detectores homodinos. Nesse experimento, uma terceira parte, que os autores denominaram Victor, prepara um estado coerente do campo eletromagnético, passando-o para Alice. Ainda em 1998, M. A. Nielsen, E. Knill e R. Laflamme [81] propuseram um experimento de teletransporte usando ressonância magnética nuclear. Nesse experimento, uma molécula de tricloroetileno ( $C_2HCl_3$ ) tem o estado do núcleo do carbono ligado aos dois cloros teletransportado para o estado do núcleo do átomo de hidrogênio, ligado ao outro carbono, pelo uso de descoerência de fase do núcleo de carbono. As descoerências de fase do carbono próximo ao hidrogênio e do outro são de aproximadamente 0,4 e 0,3 segundos, respectivamente, e para o hidrogênio o tempo é de aproximadamente 3 segundos. Eles teletransportaram o estado do carbono para o hidrogênio, verificando que a taxa de decaimento do estado final ocorre de acordo com o hidrogênio e não de acordo com o carbono.

Em 1999, D. Gottesman e I. L. Chuang [82] utilizaram o processo de teletransporte para implementar, teoricamente, um computador quântico. No mesmo ano, G. J. Milburn e S. L. Braunstein [83] propuseram o teletransporte com estados de vácuo comprimidos. Nesse protocolo, Alice e Bob compartilham, além de um canal clássico, um estado comprimido de dois modos como um canal quântico:

$$|\epsilon\rangle_{AB} = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B. \quad (3.16)$$

Este estado pode ser escrito pela ação de um operador de compressão  $e^{-r(a^\dagger b^\dagger - ab)}$  sobre o estado de vácuo:

$$|\epsilon\rangle_{AB} = e^{-r(a^\dagger b^\dagger - ab)} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B. \quad (3.17)$$

onde  $\lambda = \tanh r$  e  $a$  e  $b$  são modos acessíveis a Alice e Bob, respectivamente. O estado de vácuo comprimido bimodal serve como uma aproximação de um estado

---

EPR, reduzindo-se a um estado EPR exatamente nos limites  $\lambda \rightarrow 1$  e  $r \rightarrow \infty$ . Eles mostraram com esse trabalho que o emaranhamento parcial inerente a um estado comprimido de dois modos admite dois diferentes protocolos de teletransporte.

Em 2000, D. Vitali, M. Fortunato e P. Tombesi [84] apresentaram um esquema de teletransporte de um estado de polarização de um fóton, empregando não-linearidade Kerr.

Em 2001, Y-H. Kim, S. P. Kulik e Y. Shih [85] realizaram um experimento de teletransporte em que interações não-lineares são usadas para a medida de Bell. No mesmo ano, outro experimento, proposto por J-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni, G. Weihs e A. Zeilinger [86], demonstrou o emaranhamento de quatro fótons e o teletransporte de alta fidelidade utilizando esse resultado.

Em 2002, E. Lombardi, F. Sciarrino, S. Popescu e F. De Martini [87] realizaram um experimento de teletransporte de um qubit de uma partícula emaranhada. Esse qubit foi implementado fisicamente por um subespaço bidimensional dos estados de um modo do campo eletromagnético, o subespaço gerado pelos estados de vácuo e um fóton.

Em 2003, um teletransporte de feixes de luz, estados coerentes, foi verificado experimentalmente, por T. C. Zhang, K. W. Goh, C. W. Chou, P. Lodahl & H. J. Kimble [88], utilizando o emaranhamento de estados comprimidos, sendo assim outro experimento envolvendo variáveis contínuas. Nesse mesmo ano, D. Kumar e P. N. Pandey [89] apresentaram um trabalho considerando o efeito de ruído no teletransporte de uma partícula de spin-1/2, calculando a evolução temporal das matrizes densidade das três partículas envolvidas no processo, devido ao seu acoplamento com os graus de liberdade do meio.

Em 2004, M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James e R. Blatt [90] realizaram um experimento de teletransporte entre um par de íons de cálcio ( $^{40}\text{Ca}^+$ ) armadilhados em uma armadilha de Paul<sup>7</sup>, com fidelidade de 75%.

---

<sup>7</sup>W. Paul, Nobel de 1989 com H. Dehmelt, pelas técnicas de confinamento de íons.

Na mesma edição da mesma revista, M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri e D. J. Wineland [91] propuseram o experimento de teletransporte de partículas massivas, usando íons de berílio ( ${}^9\text{Be}^+$ ) confinados em um segmento de uma armadilha de íons (uma armadilha de Paul), com 78% de fidelidade. Esses foram os dois primeiros experimentos de teletransporte com partículas massivas. Ainda em 2004, Z. Zhao, Y-A. Chen, A-N. Zhang, T. Yang, H. J. Briegel e J-W. Pan [92] realizaram a demonstração experimental de um emaranhamento de cinco fótons e o teletransporte com destinatário indeterminado (um de três fótons), isto é, o destinatário somente é determinado após uma medida de polarização nos fótons restantes que não serão destinatários. Também em 2004, R. Ursin, T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, P. Walther e A. Zeilinger [93] efetuaram um teletransporte quântico através do Danúbio<sup>8</sup> a uma distância de 600 metros. Eles conseguiram implementar esse teletransporte usando uma fibra ótica de 800 metros instalada em um sistema público de esgoto localizado em um túnel debaixo do rio Danúbio, com exposição a flutuações de temperatura e outros fatores ambientais. Eles realizaram o teletransporte para três estados de polarização distintos, atingindo fidelidades de 84, 86 e 90%. Com esse experimento, eles demonstraram o teletransporte para longas distâncias e com alta fidelidade sob condições reais.

Em 2005, W. B. Cardoso, A. T. Avelar, B. Baseia e N. G. de Almeida propuseram um protocolo de teletransporte sem a utilização de medida de Bell[94], semelhante a uma proposta anterior de Shi-Biao Zheng, que foi que primeiro propôs, em 2004, um teletransporte sem medida de Bell [95].

Em 2006, foi proposto o primeiro experimento de teletransporte entre luz e matéria, por J. F. Sherson, H. Krauter, R. K. Olsson, B. Julsgaard, K. Hammerer, I. Cirac e E. S. Polzik [96]. Nesse experimento, um estado quântico codificado em um pulso de luz é teletransportado para um objeto macroscópico (um ensemble atômico contendo  $10^{12}$  átomos de Césio). O teletransporte é atingido para conjuntos de

---

<sup>8</sup>Segundo rio mais longo da Europa (depois do Volga).

estados coerentes, com fidelidades de  $58\% \pm 2\%$  e  $60\% \pm 2\%$ , para o número médios de fótons de 20 e 5, respectivamente.

Em 2007, L. C. Venuti, C. E. Boschi e M. Roncaglia [97] propuseram o teletransporte e a transferência de qubits através de uma cadeia antiferromagnética com simetria global  $SU(2)$ . Tipicamente, a simetria rotacional nesses sistemas nunca é quebrada. Como consequência, a matriz densidade de duas partículas  $\rho_{AB}$ , obtida ao efetuar o traço sobre todo o espaço de Hilbert, exceto nos sítios A e B, mantém a invariância  $SU(2)$ . A matriz densidade  $\rho_{AB}$  é um estado de Werner<sup>9</sup>, que é descrito um parâmetro único  $\langle \sigma_A^z \sigma_B^z \rangle = Tr(\rho_{AB} \sigma_A^z \sigma_B^z) \in [-1, 1/3]$ . Para o intervalo  $[-1, 1/3)$ , o estado  $\rho_{AB}$  é um estado emaranhado. À temperatura  $T = 0$ , a matriz densidade é  $\rho = |G\rangle\langle G|$ , onde  $|G\rangle$  é o estado fundamental. À temperatura finita, contudo, têm-se o operador densidade canônico  $\rho = Z^{-1}e^{-\beta H}$ . Para baixas temperaturas, pode-se aproximar o operador densidade ao reter apenas o estado fundamental e os primeiros estados excitados. Em bases gerais, o estado fundamental é um singlete total, ao passo que as excitações são tripletos de spin 1  $|m\rangle$ , com magnetização total  $S_{tot}^z = m$ , onde  $m = -1, 0, 1$ . Assim, para baixas temperaturas

$$e^{-\beta H} \simeq e^{-\beta E_0} (|G\rangle\langle G| + e^{-\beta \Delta} \sum_{m=-1,0,1} |m\rangle\langle m|), \quad (3.18)$$

onde  $E_0$  é a energia do estado fundamental e  $\Delta$  é o primeiro gap de excitação. Essa aproximação mantém a invariância rotacional. A matriz térmica reduzida  $\rho_{AB}(T)$  depende somente do valor médio

$$\langle \sigma_A^z \sigma_B^z \rangle_T = \frac{1}{1 + 3e^{-\beta \Delta}} [\langle G | \sigma_A^z \sigma_B^z | G \rangle + e^{-\beta \Delta} (\langle 1 | \sigma_A^z \sigma_B^z | 1 \rangle + 2 \langle 1 | \sigma_A^z \sigma_B^z | 1 \rangle)]. \quad (3.19)$$

O emaranhamento em  $\rho_{AB}(T)$  é mantido até que a temperatura  $T$  seja da ordem do gap  $\Delta$ , o que leva a escolha de sistemas com gap  $\Delta$  grande.

---

<sup>9</sup>Do trabalho de Reinhard F. Werner, de 1989, [98]. Estados invariantes por simetria  $SU(2)$  são muito úteis quando usados como uma fonte de emaranhamento para dispositivos de informação quântica.

A idéia desse esquema de teletransporte é a seguinte. Um estado desconhecido  $\xi$  em um sítio  $S$  é teletransportado para o sítio  $B$  ao se fazer uma medida conjunta de Bell nos sítios  $S$  e  $A$  e transmitindo o resultado da medida para  $B$ , onde uma transformação unitária é aplicada. Se  $A$  e  $B$  partilham um estado puro maximalmente emaranhado,  $|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle_{AB} - |\downarrow\uparrow\rangle_{AB})$ , então o estado é transferido exatamente para  $B$ . Em uma situação realística, um ruído externo de qualquer natureza leva  $|\psi^-\rangle_{AB}$  em um estado misto não-maximalmente emaranhado  $\rho_{AB}$ . Em muitos protocolos, o estado emaranhado  $\rho_{AB}$  deve ser criado imediatamente antes da ocorrência do teletransporte. Ao invés disso, nesse protocolo, o par de estados emaranhados é considerado permanentemente em equilíbrio. Se o teletransporte é realizado suficientemente rápido, o fenômeno de descoerência não tem chance de ocorrer. Usando esse protocolo, com os estados de Werner como fonte, a fidelidade do teletransporte não depende nem do resultado da medida de Bell efetuada nem do estado a ser teletransportado. O processo de teletransporte é assim representado como uma aplicação do estado de entrada  $\xi$ , no sítio  $S$ , no estado teletransportado  $\Lambda(\xi)$ , dado por:

$$\Lambda(\xi) = \vartheta\xi + \frac{1}{2}(1 - \vartheta)I. \quad (3.20)$$

O fator  $\vartheta$ , que identifica o canal, é dado por  $\vartheta = -\langle\sigma_A^z\sigma_B^z\rangle$ .  $\Lambda$  torna-se um canal ideal quando  $\vartheta = 1$ , isto é, quando  $\rho_{AB}$  é um singlete  $|\psi^-\rangle_{AB}$ . A fidelidade do teletransporte é

$$f = \text{Tr}(\xi\Lambda(\xi)) = \frac{(1 + \vartheta)}{2} = \frac{(1 - \langle\sigma_A^z\sigma_B^z\rangle)}{2}. \quad (3.21)$$

Quando a temperatura é aumentada a partir de zero, alcança um valor  $T^*$  acima do qual, o operador densidade  $\rho_{AB}$  é separável. Da equação (3.19), vemos que isso ocorre quando  $\langle\sigma_A^z\sigma_B^z\rangle = -\frac{1}{3}$ , o que leva a:

$$T^* = \Delta / \log\left(\frac{\langle 1|\sigma_A^z\sigma_B^z|1\rangle + 2\langle 1|\sigma_A^x\sigma_B^x|1\rangle + 1}{-\langle G|\sigma_A^z\sigma_B^z|G\rangle - \frac{1}{3}}\right). \quad (3.22)$$

Em 2008, G. Adesso e G. Chiribella [99] estabeleceram critérios para a verificação do teletransporte de estados comprimidos de um modo, com deslocamento

zero e um grau de compressão completamente desconhecido ao longo de uma dada direção.

Um número bem maior de trabalhos que os aqui citados foi proposto de 1993, quando surgiu a primeira proposta, até 2008. Atualmente, grandes esforços têm levado os pesquisadores da área a desbravar os domínios tanto do lado experimental quanto teórico. Procurou-se nesse capítulo mostrar um pouco da diversidade dos trabalhos de teletransporte quântico. Avanços no campo da óptica quântica [100] e em outras áreas cuja aplicação nos domínios da teoria quântica da informação e computação quântica são possíveis serão cruciais para a implementação dessas idéias como tecnologias do cotidiano.

## Capítulo 4

# Teletransporte Quântico de Estados

## Térmicos

Neste capítulo apresentamos protocolos de teletransporte quântico envolvendo estados térmicos, utilizando-nos do formalismo de dinâmica de campos térmicos. Serão analisados três casos: teletransporte de estados térmicos, teletransporte de um estado não-térmico para um ambiente térmico e, por fim, um teletransporte de um estado térmico para um ambiente não-térmico.

No espírito do protocolo original, mas lidando com superposições de estados térmicos, Alice e Bob partilham um canal quântico (um estado quântico emaranhado) e um canal clássico. O sistema como um todo, Alice e Bob, está a uma temperatura finita  $T = (k_B\beta)^{-1}$ . Aqui, o sistema é considerado permanentemente em equilíbrio e o processo de teletransporte é realizado suficientemente rápido de tal modo que o fenômeno de descoerência possa ser desprezado. Certamente, haverá uma temperatura crítica para a qual tais condições não serão mais satisfeitas. Essa questão, no entanto, não terá impacto no procedimento que se segue e poderá ser analisada em outra oportunidade.

O estado térmico a ser teleportado por Alice é dado por

$$|\phi_1(\beta)\rangle = a|1(\beta)\rangle_1 + b|0(\beta)\rangle_1, \quad (4.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são números complexos satisfazendo

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

O canal quântico é um estado térmico emaranhado do tipo estado EPR:

$$|\psi_{23}^{(-)}(\beta)\rangle = \frac{|1(\beta)\rangle_2|0(\beta)\rangle_3 - |0(\beta)\rangle_2|1(\beta)\rangle_3}{\sqrt{2}}. \quad (4.2)$$

A base térmica de Bell é definida por:

$$|\Psi_{12}^{(\pm)}(\beta)\rangle = \frac{|1(\beta)\rangle_1|0(\beta)\rangle_2 \pm |0(\beta)\rangle_1|1(\beta)\rangle_2}{\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

e

$$|\Phi_{12}^{(\pm)}(\beta)\rangle = \frac{|1(\beta)\rangle_1|1(\beta)\rangle_2 \pm |0(\beta)\rangle_1|0(\beta)\rangle_2}{\sqrt{2}}. \quad (4.4)$$

O estado total de Alice é, portanto,

$$|\Psi_{123}\rangle = |\phi_1(\beta)\rangle|\psi_{23}^{(-)}(\beta)\rangle. \quad (4.5)$$

Ao realizar uma medida de Bell sobre esse estado, Alice projeta o sistema, e a partícula de Bob, em um dos quatro seguintes estados:

$$\langle\Psi_{12}^{(\pm)}(\beta)|\Psi_{123}\rangle = -\frac{a}{2}|1(\beta)\rangle_3 \pm \frac{b}{2}|0(\beta)\rangle_3, \quad (4.6)$$

$$\langle\Phi_{12}^{(\pm)}(\beta)|\Psi_{123}\rangle = +\frac{a}{2}|0(\beta)\rangle_3 \mp \frac{b}{2}|1(\beta)\rangle_3. \quad (4.7)$$

Alice então comunica a Bob, por meio de um canal clássico, qual o resultado de sua medida. Bob, então, realiza a correspondente operação unitária de acordo com a medida de Alice, revertendo a operação para obter o estado teleportado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ \pm b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Assim, Bob obtêm o estado térmico teleportado:

$$|\phi_3(\beta)\rangle = a|1(\beta)\rangle_3 + b|0(\beta)\rangle_3. \quad (4.10)$$

Esse processo de teletransporte equivale ao teletransporte de operadores densidade. De fato, para cada estado térmico, existe um correspondente operador densidade, que pode ser construído por meio da média de um operador  $A$  num estado térmico.

Para  $|\phi(\beta)\rangle = c_1|1(\beta)\rangle + c_2|0(\beta)\rangle$ , onde  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle\phi(\beta)|A|\phi(\beta)\rangle &= |c_1|^2\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle + |c_2|^2\langle 1(\beta)|A|1(\beta)\rangle + \\ & c_1c_2^*\langle 1(\beta)|A|0(\beta)\rangle + c_2c_1^*\langle 0(\beta)|A|1(\beta)\rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Da relação

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta),$$

chega-se a

$$|1(\beta)\rangle = \frac{a^\dagger}{u(\beta)}|0(\beta)\rangle \quad (4.12)$$

e

$$\langle 1(\beta)| = \langle 0(\beta)|\frac{a}{u(\beta)}. \quad (4.13)$$

E da dinâmica de campos térmicos:

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = Tr(\rho A).$$

A equação (4.12), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle\phi(\beta)|A|\phi(\beta)\rangle &= |c_1|^2Tr(\rho A) + |c_2|^2Tr(\rho\frac{aAa^\dagger}{u(\beta)^2}) + \\ & c_1c_2^*Tr(\rho\frac{aA}{u(\beta)}) + c_2c_1^*Tr(\rho\frac{Aa^\dagger}{u(\beta)}). \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades do traço, podemos escrever que:

$$\langle\phi(\beta)|A|\phi(\beta)\rangle = Tr(\rho_\phi A) \quad (4.14)$$

onde

$$\rho_\phi = \frac{|c_1|^2}{u(\beta)} a^\dagger \rho a + |c_2|^2 \rho + \frac{c_1^* c_2}{u(\beta)} \rho a + \frac{c_1^* c_2}{u(\beta)} a^\dagger \rho. \quad (4.15)$$

Esse é o operador densidade teleportado no processo de teletransporte.

Também é possível construir o operador densidade para o estado EPR utilizado como canal quântico por Alice e Bob:

$$|\psi_{23}^{(-)}(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1(\beta)\rangle_2 |0(\beta)\rangle_3 - |0(\beta)\rangle_2 |1(\beta)\rangle_3).$$

Utilizando o mesmo procedimento anterior, chega-se a

$$\rho_{23} = \frac{1}{2u^2} (a_2^\dagger - a_3^\dagger) \rho (a_2 - a_3). \quad (4.16)$$

Os operadores densidade associados às bases térmicas de Bell podem também ser obtidos pelo mesmo procedimento, o que leva a

$$\rho_{12\Psi}^{(\pm)} = \frac{(a_1^\dagger \pm a_2^\dagger) \rho (a_1 \pm a_2)}{2u^2} \quad (4.17)$$

e

$$\rho_{12\Phi}^{(\pm)} = (1 \pm \frac{a_1^\dagger a_2^\dagger}{u^2}) \rho (1 \pm \frac{a_2 a_1}{u^2}). \quad (4.18)$$

A fidelidade do teletransporte é calculada por meio da relação:

$$F = \langle \phi_{in} | \rho_{out} | \phi_{in} \rangle, \quad (4.19)$$

onde

$$|\phi_{in}\rangle = |\phi(\beta)\rangle = c_1 |1(\beta)\rangle + c_2 |0(\beta)\rangle$$

é o estado térmico da Alice, a ser teletransportado, e  $\rho_{out} = \rho_{\phi_3}$  é a matriz densidade do estado final de Bob:

$$\rho_{out} = \rho_{\phi_3} = \frac{|c_1|^2}{u(\beta)} a_3^\dagger \rho_3 a_3 + |c_2|^2 \rho_3 + \frac{c_1^* c_2}{u(\beta)} \rho_3 a_3 + \frac{c_1^* c_2}{u(\beta)} a_3^\dagger \rho_3.$$

Temos então que:

$$\langle \phi_1(\beta) | \rho_{\phi_3} | \phi_1(\beta) \rangle = \text{Tr}(\rho_{\phi_1} \rho_{\phi_3}). \quad (4.20)$$

Por outro lado,

$$\text{Tr}(\rho_{\phi_1} \rho_{\phi_3}) = \text{Tr}(\rho_{\phi_1}) \text{Tr}(\rho_{\phi_3}).$$

Mas

$$\text{Tr}(\rho_{\phi_1}) = \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

e

$$\text{Tr}(\rho_{\phi_3}) = \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Portanto, a fidelidade é máxima:

$$F = \langle \phi_1(\beta) | \rho_{\phi_3} | \phi_1(\beta) \rangle = 1. \quad (4.21)$$

Nesse processo, a fidelidade independe da temperatura, o que ocorre devido ao fato de teletransportarmos o estado térmico e não o estado não-térmico em presença de temperatura, o que levaria a um resultado diferente.

Com efeito, como seria o processo onde o estado a ser teleportado por Alice é um estado não-térmico, do tipo:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle, \quad (4.22)$$

onde  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ? Considere o caso onde Bob e o canal quântico que ele partilha com Alice estejam a uma temperatura finita, mas o estado a ser teleportado por Alice está à temperatura zero (não-térmico).

O estado a ser teleportado por Alice é dado por

$$|\phi_1\rangle = a|1\rangle_1 + b|0\rangle_1, \quad (4.23)$$

onde  $a$  e  $b$  são números complexos<sup>1</sup> satisfazendo:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

O canal quântico terá a mesma expressão anterior (4.2), mas a base térmica de Bell terá de considerar o termo da partícula a ser teleportada sem temperatura:

$$|\Psi_{12}^{(\pm)}(\beta)\rangle = \frac{|1\rangle_1|0(\beta)\rangle_2 \pm |0\rangle_1|1(\beta)\rangle_2}{\sqrt{2}} \quad (4.24)$$

e

$$|\Phi_{12}^{(\pm)}(\beta)\rangle = \frac{|1\rangle_1|1(\beta)\rangle_2 \pm |0\rangle_1|0(\beta)\rangle_2}{\sqrt{2}}. \quad (4.25)$$

O estado total de Alice é assim obtido das equações (4.23) e (4.2):

$$|\Psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle|\psi_{23}^{(-)}(\beta)\rangle.$$

Ao realizar uma medida de Bell sobre esse estado, Alice obtém um dos quatro estados idênticos às expressões anteriores (4.6) e (4.7), fazendo com que Bob tenha de realizar, após Alice ter comunicado a ele em qual base ela fez a medida, uma das operações expressas em (4.8) e (4.9), o que faz com que Bob obtenha o seguinte estado teletransportado:

$$|\phi_3(\beta)\rangle = e^{-iG}(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3). \quad (4.26)$$

Assim, Bob obtém o estado teletransportado, porém sob a ação de um operador de termalização. A diferença que o estado terá em relação ao estado original será tanto maior quanto maior for o efeito desse operador.

Considere o caso em que as partículas de Alice e Bob sejam férmions. O problema da duplicação do espaço de Hilbert, que foi abstraído nas linhas anteriores com a notação

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle,$$

---

<sup>1</sup>Às vezes  $a$  representará o operador de aniquilação, outras vezes um número complexo. Em cada caso, o contexto permite não confundir a utilização.

entrará exatamente neste ponto.

Ao preparar o estado de superposição anterior, há quatro possíveis escolhas:

$$|\psi\rangle_{00} = a|1, \tilde{0}\rangle + b|0, \tilde{0}\rangle, \quad (4.27)$$

$$|\psi\rangle_{11} = a|1, \tilde{1}\rangle + b|0, \tilde{1}\rangle, \quad (4.28)$$

$$|\psi\rangle_{01} = a|1, \tilde{0}\rangle + b|0, \tilde{1}\rangle, \quad (4.29)$$

ou

$$|\psi\rangle_{10} = a|1, \tilde{1}\rangle + b|0, \tilde{0}\rangle. \quad (4.30)$$

Cada escolha corresponderá a uma influência específica sobre o estado teletransportado de Bob. De fato, das expressões (2.47) e (2.48), obtêm-se os seguintes estados teleportados de acordo com a escolha do estado a ser teleportado:

$$|\psi\rangle_{00} \longrightarrow |\phi_3(\beta)\rangle_{00} = a|1, \tilde{0}\rangle_3 + b(\cos\theta|0, \tilde{0}\rangle_3 + \text{sen}\theta|1, \tilde{1}\rangle_3), \quad (4.31)$$

$$|\psi\rangle_{11} \longrightarrow |\phi_3(\beta)\rangle_{11} = a(-\text{sen}\theta|0, \tilde{0}\rangle_3 + \cos\theta|1, \tilde{1}\rangle_3) + b|0, \tilde{1}\rangle_3, \quad (4.32)$$

$$|\psi\rangle_{01} \longrightarrow |\phi_3(\beta)\rangle_{01} = a|1, \tilde{0}\rangle_3 + b|0, \tilde{1}\rangle_3, \quad (4.33)$$

e

$$|\psi\rangle_{10} \longrightarrow |\phi_3(\beta)\rangle_{10} = (a \cos\theta + b \text{sen}\theta)|1, \tilde{1}\rangle_3 + (b \cos\theta - a \text{sen}\theta)|0, \tilde{0}\rangle_3. \quad (4.34)$$

Da equação (4.19), obtemos as fidelidades em cada um dos casos:

$$F_{00} = |a|^4 + |b|^4 \cos^2\theta + 2(|a||b|)^2 \cos\theta, \quad (4.35)$$

$$F_{11} = |a|^4 \cos^2\theta + |b|^4 + 2(|a||b|)^2 \cos\theta, \quad (4.36)$$

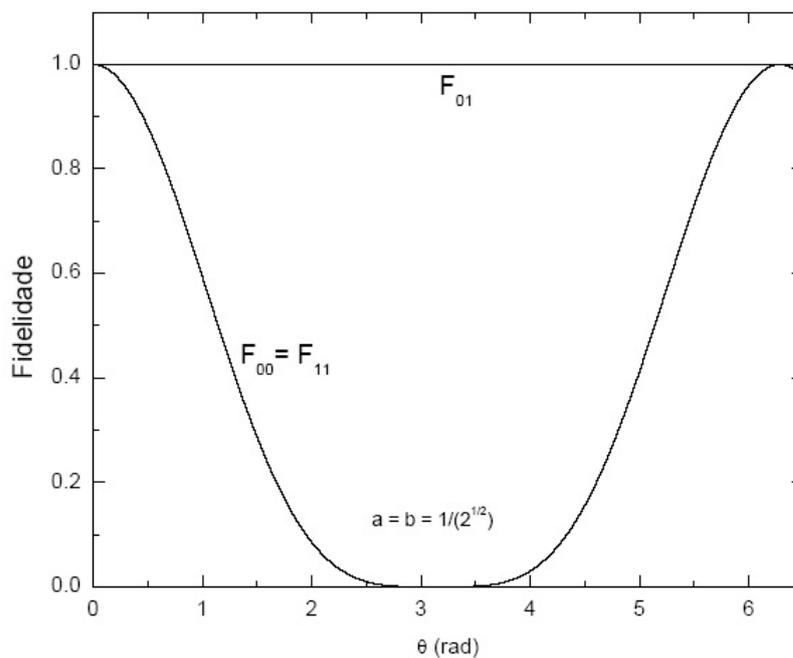


Figura 4.1: Fidelidades  $F_{00} = F_{11}$  e  $F_{01}$

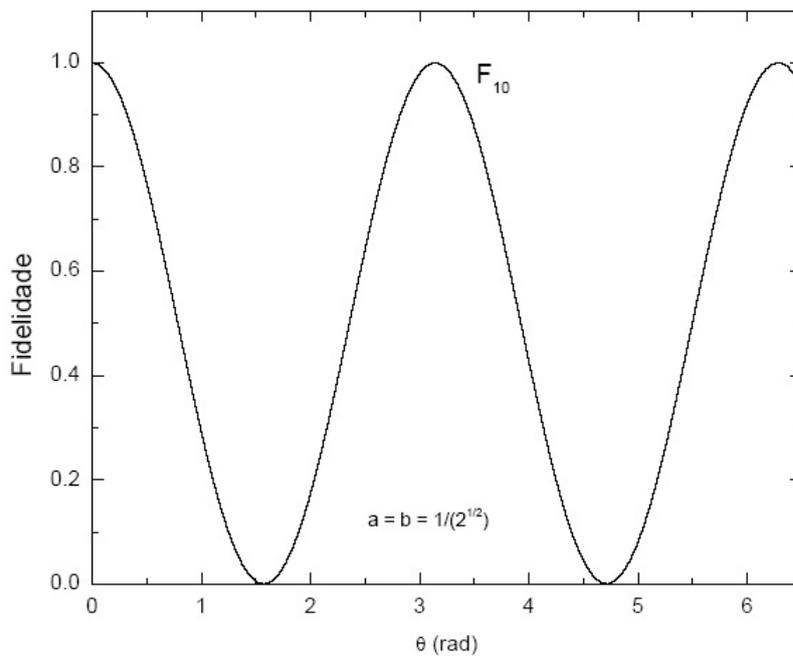


Figura 4.2: Fidelidade  $F_{10}$

$$F_{01} = 1, \quad (4.37)$$

$$F_{10} = \cos^2 \theta + 2(|a|^2|b|^2 - \text{Re}[(ba^*)^2]) \sin^2 \theta. \quad (4.38)$$

Assim, o efeito da temperatura está presente, exceto para a escolha do estado  $|\psi\rangle_{01}$ , para o qual a fidelidade é máxima. Para as outras escolhas de estados, a fidelidade sofre o efeito da temperatura. Para temperatura nula ( $\cos \theta = 1$ ), a fidelidade, como esperado, torna-se 100% em todos os casos. De fato, em geral o teletransporte quântico de um estado a temperatura zero, para um ambiente com temperatura finita diferente de zero, ocasiona um efeito na fidelidade do teletransporte. As figuras 4.1 e 4.2 representam cada uma das fidelidades (4.35), (4.36), (4.37) e (4.38) para  $a = b = 1/\sqrt{2}$ .

Cada escolha específica do estado a ser teletransportado correspondente a diferentes escolhas de operadores densidade, a temperatura zero, para o estado inicial a ser teletransportado. Cada escolha, portanto, levará a um efeito diferente no estado teleportado.

Por último, considere o caso do teletransporte de um estado térmico, onde o canal quântico não tem temperatura (a temperatura zero). Nesse caso, considerando o caso de férmions, se o estado de Alice a ser teletransportado é:

$$|\psi(\beta)\rangle = a|1(\beta)\rangle + b|0(\beta)\rangle = e^{-iG}(a|1, \tilde{0}\rangle + b|0, \tilde{0}\rangle), \quad (4.39)$$

então o estado teletransportado obtido por Bob será:

$$|\psi(\beta)\rangle = a|1, \tilde{0}\rangle + b|0, \tilde{0}\rangle. \quad (4.40)$$

Aqui, das relações (4.8) e (4.9), obtemos então a fidelidade:

$$F = |a|^4 + |b|^4 \cos^2 \theta + 2|a|^2|b|^2 \cos \theta. \quad (4.41)$$

Nesse caso, portanto, o efeito da temperatura também terá um papel significativo. Para temperatura zero ( $\cos \theta = 1$ ), a fidelidade, como esperado, torna-se 100%.

## Capítulo 5

# Conclusão

Neste trabalho foi estudado o processo de teletransporte quântico de estados térmicos, com base no formalismo de dinâmica de campos térmicos.

A abordagem de dinâmica de campos térmicos já foi estudada, ao longo dos anos, em vários contextos, com estudos em supersimetria [101], supercondutividade [102], efeito Casimir [103], óptica quântica [104], podendo também ser estudado no contexto da violação das desigualdades de Bell [105], entre outros. Porém, nenhuma proposta em teoria quântica de informação, em particular, em teletransporte quântico, havia sido feita até então. Este trabalho, portanto, procurou lançar-se nessa direção, um caminho natural da aplicação de dinâmica de campos térmicos no campo da óptica quântica.

O modelo proposto teve como base o protocolo original de teletransporte. Embora existam versões mais elaboradas, em diferentes contextos, pelo critério da simplicidade, a escolha de um protocolo no espírito do original tem a vantagem de permitir enxergar o efeito causado pela termalização, segundo o formalismo de dinâmica de campos térmicos. Na versão térmica, foi possível a construção de três casos. No primeiro, o ambiente como um todo está a uma só temperatura, e o teletransporte é realizado com fidelidade de 100%. No segundo caso, um estado a temperatura zero é teletransportado com o uso de um canal quântico a temperatura finita. E no terceiro caso, um estado a temperatura finita é teletransportado com o

uso de um canal quântico a temperatura zero. Nesses dois últimos casos, a fidelidade sofre o efeito da temperatura. Como esperado, a fidelidade torna-se 100% quando a temperatura do canal quântico é igualada a do estado a ser teleportado.

Como perspectivas de avanço dos estudos aqui realizados, tem-se a possibilidade de abordagem de modelos mais elaborados e realistas de teletransporte quântico a temperatura finita, levando-se em conta detalhes que não foram considerados neste trabalho, como, por exemplo, a questão da descoerência [106, 107] e questões mais físicas envolvidas no processo. Outros estudos em informação quântica também são possíveis, como estudos de criptografia e computação quântica em versões a temperatura finita, via dinâmica de campos térmicos.

## Referências Bibliográficas

- [1] J. R. Klauder & E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics* (Dover, New York, 1996).
- [2] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Longman, 1994).
- [3] K. Wódkiewicz, *Nonlocality of the Schrödinger cat*, New Journal of Physics, **2** (2000) 21.
- [4] A. Peres, W. K. Wootters, *Optimal Detection of Quantum Information* Phys. Rev. Lett., **66** (1991) 1119.
- [5] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (USA, Kluwer, 2002).
- [6] A. Einstein, B. Podolsky & N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev., **47** (1935) 777.
- [7] N. Bohr, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev., **48** (1935) 696.
- [8] J. S. Bell, *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics, **38** (1966) 447.
- [9] D. Bohm & Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Phys. Rev., **108** (1957) 1070.
- [10] J. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Physics, **1** (1964) 195.

- 
- [11] A. Aspect, *To be or not to be local*, Nature, **446** (2007) 866.
- [12] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical Journal, **27** (1948) 379-423.
- [13] M. M. Wolf, F. Verstraete, M. B. Hastings, J.I.Cirac, *Area Laws in Quantum Physics: Mutual Information and Correlations*, Phys.Rev.Lett., **100** (2008) 070502.
- [14] C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin, A. V. Thapliyal, *Entanglement-Assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem*, IEEE Transactions on Information Theory, **48** (2002) 2637.
- [15] R. P. Feynman, *There's Plenty of Room at the Bottom*, Journal of Microelectromechanical Systems, **1** (1992) 60.
- [16] R. Feynman, *Infinitesimal Machinery*, Journal of Microelectromechanical Systems, **2** (1993) 4.
- [17] I. Walmsley & P. Knight, *Quantum Information Science*, Optics & Photonics News (2002) 43.
- [18] P. Shor, *Quantum Information: Results and Open Problems*, Geom.Funct.Anal(GAFA), Special Volume - GAFA 2000 (2000) 816-838.
- [19] R. Landauer, *Is quantum mechanics useful?*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **353** (1995) 367.
- [20] D. A. Meyer, *Quantum Strategies*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 1052.
- [21] P. Shor, *Algorithms for quantum computation, discrete logarithms and factorin*, In *Proceedings, 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, p124-134, IEEE Press, Los Alamos, CA, 1994.

- 
- [22] C. H. Bennett & G. Brassard, *Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing*, International Conference on Computers, Systems & Signal Processing, Bangalore, India, December 10-12, 1984.
- [23] A. K. Ekert, *Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 661.
- [24] G. Rigolin & A. A. Rieznik, *Introdução à criptografia quântica*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **27** (2005) 517.
- [25] N. G. Almeida, L. P. Maia, C. J. Villas-Boas, M. H. Y. Moussa, *One-cavity scheme for atomic-state teleportation through GHZ states*, Phys. Lett. A, **241** (1998) 213.
- [26] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida & M. H. Y. Moussa, *Teleportation of a zero- and one-photon running-wave state by projection synthesis*, Phys. Rev. A, **60** (1999) 2759.
- [27] G.P. da Silva, *Teletransporte de estados de superposição e de emaranhados de zero e um fóton de campos armadilhados em cavidades supercondutoras*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal de Goiânia, 2006.
- [28] G. Pires, N. G. de Almeida, A. T. Avelar & B. Baseia, *Teleporting entanglements of cavity-field states*, Phys. Rev. A, **70** (2004) 025803.
- [29] G. Pires, A. T. Avelar, B. Baseia, N. G. de Almeida, *Teleporting a state inside a single bimodal high-Q cavity* Phys. Rev. A **71** (2005) 060301.
- [30] J. H. Reina & N. F. Johnson, *Quantum teleportation in a solid-state system*, Phys. Rev. A, **63** (2000) 012303.
- [31] D. Fattal, E. Diamanti, K. Inoue & Y. Yamamoto, *Quantum Teleportation with a Quantum Dot Single Photon Source*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 037904.

- 
- [32] R. L. de Visser & M. Blaauboer, *Deterministic Teleportation of Electrons in a Quantum Dot Nanostructure*, Phys. Rev. Lett., **96** (2006) 246801.
- [33] C. W. J. Beenakker & M. Kindermann, *Quantum Teleportation by Particle-Hole Annihilation in the Fermi Sea*, Phys. Rev. Lett., **92** (2004) 056801.
- [34] J. I. Cirac, *Schemes for atomic-state teleportation*, Phys. Rev. A, **50** (1994) R4441.
- [35] G-F. Zhang, *Thermal entanglement and teleportation in a two-qubit Heisenberg chain with Dzyaloshinski-Moriya anisotropic antisymmetric interaction*, Phys. Rev. A **75** (2007) 034304.
- [36] C-X. Li, C-Z. Wang, G-C. Guo, *Entanglement and teleportation through thermal equilibrium state of spins in the XXZ model*, Optics Communications **260** (2006) 741.
- [37] Y. N. Chen, C. M. Li, D. S. Chuu & T. Brandes, *Proposal for teleportation of charge qubits via super-radiance*, New Journal of Physics, **7** (2005) 172.
- [38] S. Lloyd, *Almost Certain Escape from Black Holes in Final State Projection Models*, Phys. Rev. Lett., **96** (2006) 061302.
- [39] Q. Zhang, A. Goebel, C. Wagenknecht, Y-A. Chen, B. Zhao, T. Yang, A. Mair, J. Schmiedmayer & J-W. Pan, *Experimental quantum teleportation of a two-qubit composite system*, Nature, **2** (2006) 678.
- [40] C. A. Fuchs & A. Peres, *Quantum-state disturbance versus information gain: Uncertainty relations for quantum information*, Phys. Rev. A, **53** (1996) 2038.
- [41] D. Kaszlikowski, L. C. Kwek, M. Zukowski, *Information-Theoretic Approach to Single-Particle and Two-Particle Interference in Multipath Interferometers*, Phys. Rev. Lett., **91** (2003) 037901.

- 
- [42] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert & A. Buchleitner, *Experimental determination of entanglement with a single measurement*, Nature, **440** (2006) 1022.
- [43] A. Kalev & I. Hen, *No-Broadcasting Theorem and Its Classical Counterpart*, Phys. Rev. Lett., **100** (2008) 210502.
- [44] L. Landau, *Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik* Z. Phys., 45 (1927) 430-441. [Traduzido para o inglês em: *The damping problem in wave mechanics*. Em: *Collected papers of L.D. Landau* (D. Ter Haar, ed.), pp. 8–18. Gordon & Breach, New York, 1965].
- [45] J. von Neumann, *Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik*. Göttingen. Nachr. (1927) 245-272. [Traduzido para o inglês em: *Collected Works of J. von Neumann* (A.H. Taub, ed.), vol. 1, pp. 208-235. Pergamon, New York, 1961].
- [46] Y. Takahashi, H. Umezawa, *Thermo Field Dynamics*, Collect. Phenom., **2** (1975) 55.
- [47] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003).
- [48] I. Ojima, *Gauge Fields at Finite-“Thermo Field Dynamics” and the KMS Condition and Their Extension to Gauge Theories*, Annals of Physics, **137** (1981) 1-32.
- [49] M. Matsumoto & H. Umezawa, *Thermo Field Dynamics of a Quantum Algebra* Phys.Lett.A, **103** (1984) 405-407.
- [50] A. E. Santana, J. M. C. Malbouisson, A.P.C. Malbouisson & F.C. Khanna, *Algebraic aspects and applications to confined systems*, F.Khanna and D. Matrasulov (eds.), Non-linear Dynamics and Fundamental Interactions, 187-213, 2006 Springer.

- 
- [51] T. Kopf, A. E. Santana, F. C. Khanna, *Quantum Symmetries and Thermal Field Dynamics*, Czechoslovak Journal of Physics, **48** (1998) 1401-1405.
- [52] S. S. Mizrahi, V. V. Dodonov, *Creating quanta with 'annihilation' operator* J. Phys. A: Math.Gen. **35** (2002) 8847.
- [53] S. M. Barnett & S. J. D. Phoenix, *Entropy as a measure of quantum optical correlation*, Phys.Rev.A, **40**(1989)2404-2409.
- [54] S. M. Barnett & P. L. Knight, *Thermofield analysis of squeezing and statistical mixtures in quantum optics*, J.Opt. Soc. Am. B, **2** (1985) 467
- [55] S. M. Barnett & P. L. Knight, *Squeezing in correlated quantum systems*, Journal of Modern Optics, **34** (1987) 841.
- [56] V. V. Dodonov, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko & A. Voudas, *Squeezed states and uncertainty relations since 1991*, Journal of Russian Laser Research, **28** (2007) 404-428.
- [57] S. Chaturvedi, R. Sandhya, V. Srinivasan & R. Simon *Thermal counterparts of nonclassical states in quantum optics*, Phys. Rev. A, **41** (1990) 3969.
- [58] A. E. Santana, F. C. Khanna & M. Revzen, *Entropy entangled states and  $SU(1,1)$  and  $SU(2)$  symmetries*, Phys.Rev.A, **65** (2002) 032119.
- [59] F. C. Khanna, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana & E. S. Santos, *Maximum entanglement in squeezed boson and fermion states* , Physical Review A **76** (2007) 022109.
- [60] D. Darling, *Teleportation: the impossible leap*, (John Wiley & Sons, 2005).
- [61] W. K. Wootters & W. H. Zurek, *A single quantum cannot be cloned*, Nature, **299** (1982) 802.

- 
- [62] H. Barnum, C. Caves, C. Fuchs, R. Jozsa & B. Schumacher, *Noncommuting Mixed States Cannot Be Broadcast*, Phys.Rev.Lett., **76** (1996) 2818.
- [63] V. Bužek & M. Hillery, *Quantum Copying: Beyond the no-cloning theorem*, Phys. Rev. A, **50** (1996) 1844.
- [64] A. Lamas-Linares, C. Simon, J. C. Howell & D. Bouwmeester, *Experimental Quantum Cloning of Single Photons*, Science, **296** (2002) 712.
- [65] M. Mura, D. Jonathan, M. B. Plenio & V. Vedral *Quantum telecloning and multiparticle entanglement*, Phys.Rev.A, **59** (1999) 156.
- [66] P. van Loock & S. L. Braunstein, *Telecloning of Continuous Quantum Variables*, Phys.Rev.Lett., **87** (2001) 247901.
- [67] S. Koike, H. Takahashi, H. Yonezawa, N. Takei, S. L. Braunstein, T. Aoki & A. Furusawa *Demonstration of Quantum Telecloning of Optical Coherent States*, Phys.Rev.Lett., **96** (2006) 060504.
- [68] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [69] C.H.Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres & W. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett., **70** (1993) 1895.
- [70] A. A. Grib & W. A. Rodrigues Jr. *Nonlocality in Quantum Physics* (Kluwer Academic-Plenum Publishers, New York, 1999).
- [71] L. Vaidman, *Teleportation of quantum states*, Phys. Rev. A, **49** (1994) 1473.
- [72] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond & S. Haroche, *Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwaves fields*, Phys. Rev. A, **50** (1994) R895.

- 
- [73] S.L.Braunstein & A. Mann, *Measurement of the Bell operator and teleportation*, Phys. Rev. A, **51** (1995) R1727.
- [74] C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, Phys. Rev. Lett., **59** (1987) 2044.
- [75] S. L. Braunstein, *Quantum teleportation without irreversible detection*, Phys. Rev. A, **53** (1996) 1900.
- [76] D. Bouwnmeester, J-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter & A. Zeilinger, *Experimental Quantum Teleportation*, Nature, **390** (1997) 575.
- [77] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy & S. Popescu, *Experimental Realization of Teleportin an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels* Phys. Rev. Lett., **80** (1998) 1121.
- [78] E. M. Nagasako, S. J. Bentley, R. W. Boyd & G. S. Agarwal, *Parametric down-conversion vs optical parametric amplification: a comparision of their quantum statistics*, Journal of Modern Optics, **49** (2002) 529.
- [79] S. L. Braunstein & H. J. Kimble, *Teleportation of Continuous Quantum Variables*, Phys. Rev. Lett., **80** (1998) 869.
- [80] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble & E. Polzik, *Unconditional Quantum Teleportation*, Science, **282** (1998) 706.
- [81] M. A. Nielsen, E. Knill & R. Laflamme, *Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance*, Nature, **396** (1998) 52-55.
- [82] D. Gottesman & I. L. Chuang, *Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations*, Nature, **402** (1999) 390.
- [83] G. J. Milburn & S. L. Braunstein, *Quantum teleportation with squeezed vacuum states*, Phys. Rev. A, **60** (1999) 937.

- 
- [84] D. Vitali, M. Fortunato & P. Tombesi, *Complete Quantum Teleportation with a Kerr Nonlinearity*, Phys. Rev. Lett., **85** (2000) 445.
- [85] Y-H. Kim, S. P. Kulik & Y. Shih, *Quantum Teleportation of a Polarization State with a Complete Bell State Measurement*, Phys. Rev. Lett., **86** (2001) 1370.
- [86] J-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni, G. Weihs & A. Zeilinger, *Experimental Demonstration of Four-Photon Entanglement and High-Fidelity Teleportation*, Phys. Rev. Lett., **86** (2001) 4435.
- [87] E. Lombardi, F. Sciarrino, S. Popescu & F. De Martini, *Teleportation of a Vacuum-One-Photon Qubit*, Phys. Rev. Lett., **88** (2002) 070402.
- [88] T. C. Zhang, K. W. Goh, C. W. Chou, P. Lodahl & H. J. Kimble, *Quantum teleportation of light beams*, Phys.Rev. A, **67** (2003) 033802.
- [89] D. Kumar & P. N. Pandey, *Effect of noise on quantum teleportation*, Phys. Rev. A, **68** (2003) 012317.
- [90] M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James & R. Blatt, *Deterministic quantum teleportation with atoms*, Nature, **429** (2004) 734.
- [91] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri & D. J. Wineland, *Deterministic quantum teleportation of atomic qubits*, Nature, **429** (2004) 737.
- [92] Z. Zhao, Y-A. Chen, A-N. Zhang, T. Yang, H. J. Briegel & J-W. Pan, *Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation*, Nature, **430** (2004) 54.

- 
- [93] R. Ursin, T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, P. Walther & A. Zeilinger, *Quantum teleportation across the Danube*, Nature, **430** (2004) 84.
- [94] W. B. Cardoso, A. T. Avelar, B. Baseia, N. G. de Almeida, *Teleportation of entangled states without Bell-state measurement*, Phys. Rev. A, **72** (2005) 045802.
- [95] S-B. Zheng, *Scheme for approximate conditional teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement*, Phys. Rev. A **69** (2004) 064302.
- [96] J. F. Sherson, H. Krauter, R. K. Olsson, B. Julsgaard, K. Hammerer, I. Cirac & E. S. Polzik *Quantum teleportation between light and matter* Nature, **443** (2006) 557-560.
- [97] L. C. Venuti, C. E. Boschi & M. Roncaglia, *Qubit Teleportation and Transfer across Antiferromagnetic Spin Chains*, Phys. Rev. Lett., **99** (2007) 060401.
- [98] R. F. Werner, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Phys. Rev. A, **40** (1989) 4277.
- [99] G. Adesso & G. Chiribella, *Quantum Benchmark for Teleportation and Storage of Squeezed States*, Phys. Rev. Lett., **100** (2008) 170503.
- [100] H. Vahlbruch, M. Mehmet, S. Chelkowski, B. Hage, A. Franzen, N. Lastzka, S. Gossler, K. Danzmann & R. Schnabel, *Observation of Squeezed Light with 10-dB Quantum-Noise Reduction*, Phys. Rev. Lett., **100** (2008) 033602.
- [101] P. Roy, R. Roychoudhury, *Remarks on the finite temperature effect in supersymmetric quantum mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen., **21** (1988) 3187-3192.

- 
- [102] L. M. Abreu, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson & A. E. Santana, *Large- $N$  transition temperature for superconducting films in a magnetic field*, Phys. Rev. B, **67** (2003) 212502.
- [103] J. C. da Silva, F. C. Khanna, A. Matos Neto & A. E. Santana, *Generalized Bogoliubov Transformation for Confined Fields: Applications for the Casimir Effect*, Phys. Rev. A, **66** (2002) 052101.
- [104] N. S. Pereira, *Dinâmica de Campos Térmicos Aplicada à Análise de Distribuições de Estados de Fock*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- [105] M. Kobayashi, F. Khanna, A. Mann, M. Revzen & A. Santana, *Maximal Bell's inequality violation for non-maximal entanglement*, Phys. Lett. A, **323** (2004) 190.
- [106] V. V. Dodonov & L. A. de Souza, *Decoherence of superpositions of displaced number states*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **7** (2005) S490.
- [107] V. V. Dodonov & L. A. de Souza, *Decoherence of multicomponent symmetrical superpositions of displaced quantum states*, J. Phys. A: Math. Theor., **40** (2007) 13955.