

**ESCOAMENTO DE POISEUILLE EM UM DUTO
SEMIPARABÓLICO**

RODRIGO GOMES DE SOUZA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**ESCOAMENTO DE POISEUILLE EM UM DUTO
SEMIPARABÓLICO**

RODRIGO GOMES DE SOUZA

Orientador: PROF. ANDRÉ VON BORRIES LOPES, UNB

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

**PUBLICAÇÃO PCMEC - XXX/AAAA
BRASÍLIA-DF, 01 DE JUNHO DE 2026.**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

**ESCOAMENTO DE POISEUILLE EM UM DUTO
SEMIPARABÓLICO**

RODRIGO GOMES DE SOUZA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. André von Borries Lopes, UnB
Orientador

Prof. Edgar Amaral Silveira, UnB
Examinador interno

Prof. Camila de Oliveira Vieira, UFOB
Examinador externo

BRASÍLIA, 01 DE JUNHO DE 2026.

FICHA CATALOGRÁFICA

RODRIGO GOMES DE SOUZA

ESCOAMENTO DE POISEUILLE EM UM DUTO SEMIPARABÓLICO

2026xv, 147p., 201x297 mm

(PCMEC/FT/UnB, Mestre, CIÊNCIAS MECÂNICAS, 2026)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

RODRIGO GOMES DE SOUZA (2026) ESCOAMENTO DE POISEUILLE EM UM DUTO SEMIPARABÓLICO. Dissertação de Mestrado em CIÊNCIAS MECÂNICAS, Publicação xxx/AAAA, Departamento de CIÊNCIAS MECÂNICAS, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 147p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: RODRIGO GOMES DE SOUZA

TÍTULO: ESCOAMENTO DE POISEUILLE EM UM DUTO SEMIPARABÓLICO.

GRAU: Mestre ANO: 2026

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de Mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de Mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

RODRIGO GOMES DE SOUZA

Quadra 16 casa 2D - Jardim das Paineiras - Planaltina-GO.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Rogério César que confiou em mim desde 2009. Agradeço, também, ao professor Dr. André von Borries Lopes por ter prontamente aceitado me orientar em um momento muito importante e delicado desse processo. Estendo meus agradecimentos a Vinícius Coutinho da Silva, Guilherme Pinheiro Tavares e Leonardo Afonso da Silva Inácio que me ajudaram a aprender conceitos da engenharia e da matemática que eu acreditava que jamais chegaria a entender. Por fim, quero, de maneira muito especial, dedicar esse trabalho à minha esposa Raiza de Almeida da Silva e aos meus filhos Benjamin de Almeida Souza e Assussena de Almeida Souza por terem acreditado em mim - muitas vezes - muito mais do que eu mesmo.

Resumo

Esta dissertação investiga o escoamento de Poiseuille estacionário e totalmente desenvolvido de um fluido newtoniano em dutos de seção transversal semiparabólica. O objetivo principal é caracterizar a influência da geometria sobre o campo de velocidades, a vazão volumétrica, o número de Poiseuille e a tensão de cisalhamento na parede, bem como avaliar a eficiência hidráulica dessa geometria em comparação com seções não circulares relacionadas. Partindo das equações de Navier–Stokes sob as hipóteses de escoamento laminar, incompressível e unidirecional, o problema é reduzido a uma equação de Poisson sujeita à condição de não deslizamento nas paredes. Inicialmente, a formulação é desenvolvida em coordenadas cartesianas. Em seguida, para o caso particular da razão de aspecto $\lambda = 1/2$, introduzem-se coordenadas parabólicas que transformam o domínio semiparabólico em um triângulo retângulo isósceles no plano transformado, permitindo a obtenção de uma solução analítica exata por meio da combinação de uma solução particular com expansões em séries obtidas por separação de variáveis. Para pequenas razões de aspecto, desenvolve-se uma expansão assintótica casada capaz de descrever a camada localizada na vizinhança do canto de ângulo reto, fornecendo aproximações explícitas para a vazão volumétrica e para o número de Poiseuille. A análise assintótica recupera o limite $Po \rightarrow 140/9$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Para $\lambda = 1/2$, a solução exata fornece $Po = 14,2508$, enquanto a aproximação assintótica produz $Po = 14,3589$, com erro inferior a 1%. A tensão média de cisalhamento na parede para esse caso é $\bar{\tau} = 0,125891$. Os resultados analíticos são validados por simulações numéricas de alta ordem baseadas no método dos elementos finitos, apresentando excelente concordância com as soluções exata e assintótica. A análise paramétrica mostra que o número de Poiseuille apresenta comportamento suavemente não monotônico, atingindo um mínimo de aproximadamente $Po = 14,2111$ em $\lambda \approx 0,63$. Além disso, os dutos semiparabólicos apresentam valores de número de Poiseuille e tensão média de cisalhamento inferiores aos observados em dutos quarto-elípticos de mesma razão de aspecto, indicando menor resistência hidráulica. Os resultados obtidos ampliam o conjunto de soluções analíticas disponíveis para escoamentos internos em geometrias não circulares e estabelecem o duto semiparabólico como um novo caso de referência para problemas governados pela equação de Poisson, incluindo aplicações em mecânica dos fluidos, transferência de calor e torção de barras prismáticas.

Palavras-chave: escoamento de Poiseuille; duto semiparabólico; coordenadas parabólicas; solução exata; métodos assintóticos; método dos elementos finitos; número de Poiseuille; escoamentos internos; mecânica dos fluidos.

Abstract

This dissertation investigates the steady, fully developed Poiseuille flow of a Newtonian fluid in ducts with a semi-parabolic cross-section. The main objective is to characterize the influence of geometry on the velocity field, volumetric flow rate, Poiseuille number, and wall shear stress, as well as to assess the hydraulic efficiency of this geometry in comparison with related non-circular cross-sections. Starting from the Navier–Stokes equations under the assumptions of laminar, incompressible, and unidirectional flow, the problem is reduced to a Poisson equation subject to the no-slip condition at the walls. The formulation is first developed in Cartesian coordinates. Then, for the particular aspect ratio $\lambda = 1/2$, parabolic coordinates are introduced to transform the semi-parabolic domain into an isosceles right triangle in the transformed plane, allowing the derivation of an exact analytical solution through the combination of a particular solution and series expansions obtained by separation of variables. For small aspect ratios, a matched asymptotic expansion is developed to describe the localized layer arising near the right-angle corner, yielding explicit approximations for the volumetric flow rate and the Poiseuille number. The asymptotic analysis recovers the limit $Po \rightarrow 140/9$ as $\lambda \rightarrow 0$. For $\lambda = 1/2$, the exact solution yields $Po = 14.2508$, whereas the asymptotic approximation gives $Po = 14.3589$, with a relative error below 1%. The mean wall shear stress for this case is $\bar{\tau} = 0.125891$. The analytical results are validated through high-order finite element simulations, showing excellent agreement with both the exact and asymptotic solutions. The parametric analysis reveals that the Poiseuille number exhibits a mildly non-monotonic behavior, reaching a minimum value of approximately $Po = 14.2111$ at $\lambda \approx 0.63$. Furthermore, semi-parabolic ducts exhibit lower Poiseuille numbers and lower mean wall shear stresses than quarter-elliptical ducts with the same aspect ratio, indicating reduced hydraulic resistance. The results expand the catalog of analytical solutions available for internal flows in non-circular geometries and establish the semi-parabolic duct as a new benchmark configuration for problems governed by the Poisson equation, including applications in fluid mechanics, heat transfer, and torsion of prismatic bars.

Keywords: Poiseuille flow; semi-parabolic duct; parabolic coordinates; exact solution; asymptotic methods; finite element method; Poiseuille number; internal flows; fluid mechanics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	4
2	FORMULAÇÃO	5
2.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO	5
2.2	ADIMENSIONALIZAÇÃO	7
2.3	PARÂMETROS DE INTERESSE	8
3	SOLUÇÃO EXATA.....	9
3.1	COORDENADAS PARABÓLICAS	9
3.2	MAPEAMENTO DO DOMÍNIO.....	11
3.3	SOLUÇÃO	13
3.4	VAZÃO VOLUMÉTRICA	16
3.5	NÚMERO DE POISEUILLE	17
3.6	CONVERGÊNCIA DA SÉRIE.....	17
3.7	TENSÃO MÉDIA DE CISALHAMENTO NA PAREDE	17
3.8	ANALOGIAS FÍSICAS	19
4	SOLUÇÃO POR MÉTODOS DE PERTURBAÇÃO	20
4.1	ANÁLISE ASSINTÓTICA	20
4.2	VAZÃO VOLUMÉTRICA	24
4.3	NÚMERO DE POISEUILLE	25
5	SOLUÇÃO NUMÉRICA	27
5.1	MÉTODO NUMÉRICO POR ELEMENTOS FINITOS.....	27
5.2	FORMULAÇÃO VARIACIONAL E DISCRETIZAÇÃO	27
5.3	GERAÇÃO DA MALHA	28
5.4	PÓS-PROCESSAMENTO	28
5.5	CONVERGÊNCIA DE MALHA.....	28
6	RESULTADOS.....	30
6.1	CAMPO DE VELOCIDADES	30
6.2	VAZÃO VOLUMÉTRICA	31
6.3	NÚMERO DE POISEUILLE	32

6.4	CORRELAÇÃO PARA APLICAÇÕES	34
6.5	TENSÃO DE CISALHAMENTO NA PAREDE	35
6.6	COMPACIDADE E FATOR DE CORREÇÃO GEOMÉTRICA	36
7	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	40
	APÊNDICE A	43
	APÊNDICE B.....	44

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação de dutos com seções não circulares	2
2.1	Geometria do problema.	6
3.1	Linhas coordenadas parabólicas: em azul, curvas $\sigma = \text{constante}$, e em vermelho, curvas $\tau = \text{constante}$	10
3.2	Relação biunívoca entre o domínio semiparabólico no plano cartesiano (x, y) e o triângulo retângulo isósceles em coordenadas parabólicas (σ, τ) , com fronteiras e regiões correspondentes indicadas pelas mesmas cores.	12
5.1	Malhas triangulares geradas no domínio semiparabólico para valores crescentes do parâmetro de refinamento: (a) $N = 10$, (b) $N = 30$, (c) $N = 50$ e (d) $N = 70$. Os painéis mostram o refinamento progressivo da discretização e a melhora na representação da fronteira curva.	29
6.1	Contornos de isovelocidade normalizados para dutos semiparabólicos: (a) $\lambda = 0,25$, (b) $\lambda = 0,50$, (c) $\lambda = 0,75$ e (d) $\lambda = 1,00$. Os níveis correspondem a $0,1w_{\max}$, $0,3w_{\max}$, $0,5w_{\max}$, $0,7w_{\max}$ e $0,9w_{\max}$	31
6.2	Vazão volumétrica Q em função da razão de aspecto λ . A solução numérica é comparada com aproximações assintóticas sucessivas obtidas no Capítulo 4.	32
6.3	Número de Poiseuille Po em função da razão de aspecto λ . A curva do duto semiparabólico é comparada com a aproximação assintótica, com os valores analíticos de referência e com os resultados para o duto quarto-elíptico de Bacelar et al. [1].	33
6.4	Distribuição da tensão de cisalhamento na parede para $\lambda = \frac{1}{2}$. A largura das faixas indica a magnitude local da tensão de cisalhamento axial.	35
6.5	Tensão média de cisalhamento na parede $\bar{\tau}$ em função da razão de aspecto λ . A curva do duto semiparabólico é comparada com a do duto quarto-elíptico de Bacelar et al. [1].	36
6.6	Compacidade $\mathcal{C}$ em função do fator de correção geométrica α . A curva do duto semiparabólico é comparada com a do duto quarto-elíptico de Bacelar et al. [1].	37

- 1 Grandezas associadas à torção de Saint-Venant para $\lambda = \frac{1}{2}$: (a) magnitude da tensão de cisalhamento τ , com níveis 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25 e 0,30, do contorno mais interno para o mais externo; (b) função de empenamento φ , com níveis $-0,10$, $-0,05$, 0 , $0,05$, $0,10$, $0,15$ e $0,20$, da esquerda para a direita. 45

LISTA DE TABELAS

3.1	Convergência do número de Poiseuille para $\lambda = \frac{1}{2}$ conforme o nível de truncamento N é dobrado.	17
6.1	Número de Poiseuille Po e razão $w_{\max}/\bar{w}$ para dutos semiparabólicos em função da razão de aspecto λ . Os valores entre parênteses correspondem aos resultados de Bacelar et al. [1] para o duto quarto-elíptico.	33

LISTA DE CÓDIGOS FONTE

1	Simulação em FreeFEM++	46
---	------------------------------	----

Capítulo 1

Introdução

O escoamento de fluidos em dutos é um problema central na mecânica dos fluidos, com aplicações em sistemas de ventilação e ar-condicionado [2], transporte de água, óleo e gás [3, 4], escoamentos biológicos [5, 6], trocadores de calor compactos [7] e dispositivos microfluídicos [8]. Em muitos desses sistemas, o interesse principal não está apenas na existência do escoamento, mas na forma como a geometria da seção transversal controla a distribuição de velocidades, a vazão volumétrica, a tensão de cisalhamento nas paredes e a resistência hidráulica. Assim, mesmo no regime laminar, estacionário e totalmente desenvolvido, em que as equações governantes se reduzem de forma significativa, a geometria permanece como um ingrediente essencial do problema.

No caso do escoamento de Poiseuille de um fluido newtoniano incompressível em um duto retilíneo, a hipótese de escoamento unidirecional reduz as equações de Navier–Stokes a uma equação de Poisson para a velocidade axial na seção transversal. A condição de não deslizamento nas paredes fecha o problema como uma condição de Dirichlet homogênea. Essa formulação, embora simples em aparência, contém a dificuldade central dos escoamentos internos em dutos não circulares: a solução depende fortemente da geometria da seção. Para seções clássicas, como o círculo, as placas paralelas, o retângulo e a elipse, há soluções analíticas ou resultados amplamente consolidados [9]. Para geometrias menos usuais, entretanto, a obtenção de soluções exatas exige uma combinação cuidadosa entre escolha de coordenadas, construção de soluções particulares, separação de variáveis e, em alguns regimes, métodos assintóticos.

A importância desse problema vai além da mecânica dos fluidos. A mesma equação de Poisson com termo fonte constante e condição de Dirichlet homogênea aparece em diferentes contextos da física matemática, como condução de calor com geração uniforme [10], eletrostática [11], problemas de recarga em meios porosos [12] e torção de barras prismáticas [13]. Essa equivalência torna as soluções exatas particularmente valiosas, pois um resultado obtido para um escoamento viscoso pode ser reinterpretado, após reescalonamento adequado, em outros problemas governados pela mesma estrutura matemática. Uma discussão ampla dessas analogias é apresentada por Bazant [14], que organiza problemas de

diferentes áreas dentro de uma mesma estrutura matemática.

Historicamente, o desenvolvimento de soluções exatas para escoamentos internos esteve associado à escolha de sistemas de coordenadas adaptados ao domínio. A seção circular conduz naturalmente a coordenadas polares, enquanto a seção elíptica pode ser tratada por coordenadas elípticas. Esse princípio também orienta estudos mais recentes em geometrias semi-elípticas, quarto-elípticas, parabólicas e em forma de lente. Quando as fronteiras do domínio coincidem com curvas coordenadas ou podem ser transformadas em fronteiras simples, a equação governante se torna mais acessível a métodos analíticos. Por outro lado, pequenas alterações geométricas podem destruir a separabilidade direta e exigir estratégias complementares.

Entre as geometrias não circulares (Figura 1.1), as famílias elípticas foram exploradas de forma relativamente ampla. Desde o trabalho de Alassar e Abushoshah [15], houve um crescimento significativo de estudos sobre dutos semi-elípticos e geometrias relacionadas. Wang [16] obteve soluções para escoamentos viscosos em dutos semi-elípticos, enquanto Lopes e Siqueira [17] analisaram escoamentos de Couette–Poiseuille em canais semi-elípticos. Kundu e Sarkar [18] estudaram o escoamento de Poiseuille em anéis semi-elípticos, e Bancelar et al. [1] trataram o caso quarto-elíptico. Resultados associados à transferência de calor em seções semi-elípticas também foram desenvolvidos por Wang [19], Alassar [20], Sarkar e Kundu [21] e Su et al. [22]. Esses estudos fornecem referências importantes para avaliar novas geometrias, pois permitem comparar vazão, número de Poiseuille, tensão de cisalhamento e distribuição de velocidades em famílias próximas.



Figura 1.1: Representação de dutos com seções não circulares

As geometrias parabólicas, por sua vez, formam uma família menos explorada. Contornos parabólicos aparecem em aplicações ligadas a canais de radiadores [23], escoamentos gradualmente variados em canais abertos [24] e hidráulica rotativa em canais parabólicos [25]. Do ponto de vista analítico, o interesse por essas geometrias remonta ao estudo de Proudman [26] sobre escoamentos viscosos em canais e a formulações posteriores em coordenadas parabólicas para domínios delimitados por arcos parabólicos [27]. Mais recentemente, soluções exatas foram obtidas para dutos em forma de segmento parabólico e lente parabólica [28]. Ainda assim, o catálogo de soluções para domínios parabólicos permanece

reduzido quando comparado ao caso elíptico.

A seção semiparabólica considerada nesta dissertação se insere nesse cenário. Ela combina uma parede curva parabólica com duas paredes retas que se encontram em um canto de ângulo reto, criando uma geometria simples do ponto de vista construtivo, mas suficientemente rica para revelar efeitos geométricos relevantes no escoamento. Além disso, essa geometria permite uma comparação natural com o duto quarto-elíptico, já que ambas as seções possuem duas paredes retas e uma parede curva, diferindo principalmente na distribuição de curvatura ao longo da fronteira.

Nesta dissertação, considera-se o escoamento de Poiseuille estacionário e totalmente desenvolvido em um duto de seção semiparabólica. O problema é inicialmente formulado em coordenadas cartesianas, nas quais a fronteira superior é descrita por uma parábola. Em um caso particular da razão de aspecto, introduzem-se coordenadas parabólicas que transformam o domínio físico curvilíneo em um domínio triangular no plano transformado. Nessa formulação, a equação de Poisson não deixa de ser uma equação de Poisson, mas assume uma forma mais conveniente, com o termo fonte determinado pelo fator métrico do sistema de coordenadas. Essa transformação permite construir uma solução exata por meio da soma de uma solução particular com séries obtidas por separação de variáveis.

Além da solução exata nesse caso particular, o trabalho também considera o limite de pequenas razões de aspecto. Nesse regime, a seção transversal torna-se esbelta e a solução regular externa não satisfaz, em primeira aproximação, a condição de não deslizamento na parede vertical. Surge, então, uma camada localizada próxima ao canto de ângulo reto. Para descrever esse efeito, emprega-se uma expansão assintótica casada, composta por uma solução externa válida longe do canto e uma solução interna válida na vizinhança do canto. Esse tipo de construção é típico de problemas de perturbação singular em domínios esbeltos [29] e fornece aproximações explícitas para a vazão volumétrica e para o número de Poiseuille.

A abordagem analítica e assintótica é complementada por simulações numéricas baseadas no método dos elementos finitos. Essas simulações permitem validar a solução exata no caso particular, verificar a precisão das aproximações assintóticas e obter resultados para razões de aspecto fora dos limites em que as expressões fechadas são diretamente disponíveis. O método dos elementos finitos é uma ferramenta consolidada para problemas de escoamentos internos e transferência de calor em dutos [30], e sua implementação em plataformas como o FreeFem++ permite avaliar a vazão e outras grandezas hidráulicas em geometrias não triviais [31]. Dessa forma, a dissertação combina três níveis de descrição: uma solução exata em coordenadas parabólicas, uma solução assintótica para seções achatadas e uma solução numérica para a família de geometrias semiparabólicas.

O objetivo geral deste trabalho é caracterizar o escoamento de Poiseuille em dutos semiparabólicos, destacando a influência da geometria sobre a vazão, o número de Poiseuille, a distribuição de velocidades e a tensão de cisalhamento nas paredes. Como objetivos específicos, busca-se formular o problema em coordenadas cartesianas e parabólicas, obter uma

solução exata para um caso particular da razão de aspecto, desenvolver uma expansão assintótica casada para o limite de seções esbeltas, validar os resultados por meio de simulações numéricas de alta ordem e comparar a eficiência hidráulica da seção semiparabólica com a de geometrias próximas disponíveis na literatura, em especial o duto quarto-elíptico.

A principal contribuição da dissertação é mostrar que a seção semiparabólica oferece um novo caso de referência para escoamentos internos em dutos não circulares. Além de fornecer expressões para grandezas hidráulicas relevantes, o trabalho evidencia como a combinação entre geometria, coordenadas curvilíneas, métodos assintóticos e simulação numérica pode produzir uma descrição coerente do problema. Os resultados também reforçam a utilidade de soluções exatas e assintóticas como ferramentas de validação para métodos computacionais e como pontos de comparação para estudos futuros em transferência de calor, escoamentos não newtonianos, efeitos de deslizamento e otimização geométrica de dutos.

Os resultados desta dissertação estão associados ao artigo *Poiseuille flow through a semi-parabolic duct* [32], publicado na revista *Mechanics Research Communications*. O trabalho foi desenvolvido por Rodrigo Gomes de Souza, autor desta dissertação, em colaboração com o Prof. André von Borries Lopes, Vinícius Coutinho Silva e Guilherme Pinheiro Tavares, da Universidade de Brasília, e com Prof. Rajai Samih Mousa Alassar, da King Fahd University of Petroleum & Minerals. Nesta dissertação, esses resultados são apresentados de forma expandida, com maior detalhamento da formulação, da solução exata, da análise assintótica e da validação numérica.

1.1 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está organizada em sete capítulos. O Capítulo 2 formula o problema em coordenadas cartesianas, define a geometria semiparabólica, apresenta a equação governante, as condições de contorno e as grandezas hidráulicas de interesse. O Capítulo 3 desenvolve a solução exata para um caso particular da razão de aspecto, utilizando coordenadas parabólicas para transformar o domínio físico em um domínio triangular e aplicar separação de variáveis. O Capítulo 4 apresenta a solução assintótica por métodos de perturbação para pequenas razões de aspecto, incluindo a construção da expansão casada que descreve a camada próxima ao canto de ângulo reto. O Capítulo 5 descreve a solução numérica pelo método dos elementos finitos e compara os resultados numéricos com as soluções analítica e assintótica. O Capítulo 6 apresenta os principais resultados obtidos, integrando a solução exata do Capítulo 3, a aproximação assintótica do Capítulo 4 e os resultados numéricos obtidos no Capítulo 5. Por fim, o Capítulo 7 reúne as principais conclusões, destaca as contribuições do trabalho e indica possíveis extensões.

Capítulo 2

Formulação

Este capítulo apresenta a formulação do problema: o escoamento de Poiseuille, impulsionado por um gradiente de pressão constante, em um duto de seção semiparabólica. Definimos a geometria, as hipóteses e as condições de contorno, introduzimos a adimensionalização e fixamos os parâmetros de interesse que serão utilizados nas análises subsequentes.

2.1 Equações governantes e condições de contorno

Considere o escoamento de Poiseuille, laminar, permanente e totalmente desenvolvido, de um fluido newtoniano incompressível de viscosidade μ , em um duto infinitamente longo cuja seção transversal é semiparabólica, como mostrado na Fig. 2.1. A seção ocupa o primeiro quadrante, sendo limitada pelos eixos $x = 0$ e $y = 0$ e pelo arco parabólico

$$y = \lambda L \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right],$$

de modo que a altura máxima é λL e o comprimento na direção x é L , com λ adimensional. O parâmetro adimensional λ representa a razão de aspecto da seção transversal, sendo definido como a razão entre a altura máxima do duto e o comprimento característico L . Assim, valores pequenos de λ correspondem a seções achatadas, enquanto valores maiores indicam seções mais altas. Ao longo deste trabalho, λ será utilizado como principal parâmetro geométrico para caracterizar a família de dutos semiparabólicos. O escoamento é induzido por um gradiente de pressão uniforme $G = -dp/dz > 0$ ao longo do eixo axial z .

Supomos que o escoamento é laminar, permanente, unidirecional e totalmente desenvolvido, com gravidade e demais forças de corpo desprezíveis. Nessas condições, a velocidade possui apenas componente axial e depende somente das coordenadas transversais,

$$\mathbf{u} = (0, 0, w(x, y)). \quad (2.1)$$

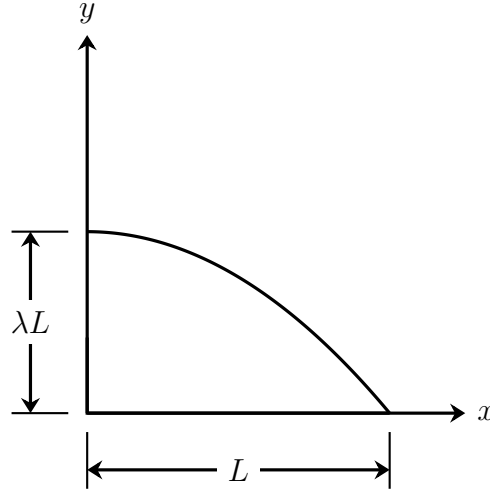


Figura 2.1: Geometria do problema.

A equação da continuidade para fluido incompressível,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

é automaticamente satisfeita. As equações de Navier–Stokes (onde ρ representa a densidade do fluido e μ sua viscosidade dinâmica),

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

reduzem-se, componente a componente, a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.5)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.6)$$

Das Eqs. (2.4) e (2.5), conclui-se que a pressão não depende de x nem de y , isto é,

$$p = p(z). \quad (2.7)$$

Logo, a Eq. (2.6) torna-se

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (2.8)$$

Como o lado esquerdo depende apenas de (x, y) , conclui-se que dp/dz é constante. Como o escoamento ocorre no sentido positivo do eixo z , a pressão diminui ao longo dessa direção. Consequentemente,

$$\frac{dp}{dz} < 0.$$

Por conveniência, define-se a quantidade positiva

$$G = -\frac{dp}{dz} > 0, \quad (2.9)$$

que representa a magnitude do gradiente de pressão responsável por impulsionar o escoamento. Então, as expressões subsequentes podem ser escritas utilizando apenas grandezas positivas. Dessa forma, obtemos a equação de Poisson para o perfil axial,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{G}{\mu}. \quad (2.10)$$

As condições de não deslizamento nas três fronteiras da seção semiparabólica são

$$w(0, y) = 0, \quad (2.11)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (2.12)$$

$$w\left(x, \lambda L \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\right) = 0. \quad (2.13)$$

2.2 Adimensionalização

Para adimensionalizar o problema, tomamos L como comprimento característico e GL^2/μ como velocidade característica:

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad w' = \frac{w}{GL^2/\mu}. \quad (2.14)$$

Como

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{G}{\mu} \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{G}{\mu} \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}, \quad (2.15)$$

a equação governante (2.8) torna-se

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} = -1. \quad (2.16)$$

Abandonando as primas para não sobrecarregar a notação, obtemos a equação de Poisson que governa o escoamento,

$$\nabla^2 w = -1, \quad (2.17)$$

no domínio

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \lambda(1 - x^2)\}. \quad (2.18)$$

As condições de não deslizamento nas três paredes escrevem-se como

$$w(0, y) = 0, \quad (2.19)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (2.20)$$

$$w(x, \lambda(1 - x^2)) = 0. \quad (2.21)$$

2.3 Parâmetros de interesse

As grandezas geométricas adimensionais decorrem diretamente da definição do domínio. A área é

$$A = \int_0^1 \lambda(1 - x^2) dx = \frac{2\lambda}{3}. \quad (2.22)$$

O perímetro molhado resulta da soma da base $0 \leq x \leq 1$, da parede lateral $0 \leq y \leq \lambda$ em $x = 0$ e do arco parabólico $y = \lambda(1 - x^2)$:

$$\begin{aligned} P &= 1 + \lambda + \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} \lambda(1 - x^2) \right]^2} dx \\ &= 1 + \lambda + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\lambda^2} + \frac{\operatorname{arsenh}(2\lambda)}{4\lambda}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A vazão adimensional é

$$Q = \iint_{\Omega} w dA = \int_0^1 \int_0^{\lambda(1-x^2)} w(x, y) dy dx. \quad (2.24)$$

Com essas definições, o número de Poiseuille Po , conforme Shah e London [9], escreve-se, de forma inteiramente adimensional, como

$$Po = \frac{8A^3}{P^2Q}. \quad (2.25)$$

O número de Poiseuille é uma medida adimensional da resistência hidráulica oferecida pela seção transversal ao escoamento. Para uma vazão prescrita, valores maiores de Po indicam maior perda de carga por atrito, enquanto valores menores correspondem a geometrias hidráulicas mais eficientes. Por esse motivo, o número de Poiseuille é amplamente utilizado como parâmetro de comparação entre diferentes seções transversais em problemas de escoamento interno.

Capítulo 3

Solução Exata

Neste capítulo, derivamos uma solução em série para o escoamento de Poiseuille em um duto semiparabólico no caso $\lambda = \frac{1}{2}$. Introduzimos coordenadas parabólicas que mapeiam o domínio físico em um triângulo no plano (σ, τ) . A solução é construída pela decomposição em uma parte particular e uma parte harmônica. Esta última é estendida para um domínio quadrangular por reflexão ímpar, permitindo o uso da separação de variáveis. Em seguida, calculamos a vazão volumétrica e, a partir das grandezas geométricas, o número de Poiseuille.

3.1 Coordenadas parabólicas

Empregamos coordenadas parabólicas bidimensionais (σ, τ) , um sistema curvilíneo ortogonal cujas linhas coordenadas formam duas famílias de parábolas confocais com foco na origem, abrindo em sentidos opostos. O mapeamento para as coordenadas cartesianas (x, y) é

$$x = \sigma \tau, \quad y = \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2), \quad (3.1)$$

em que $-\infty < \sigma < \infty$ e $0 \leq \tau < \infty$. Eliminando um dos parâmetros, verifica-se que $\sigma = \sigma_0$ e $\tau = \tau_0$ geram, respectivamente,

$$y = \frac{x^2}{2\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2}{2}, \quad y = -\frac{x^2}{2\tau_0^2} + \frac{\tau_0^2}{2}. \quad (3.2)$$

Assim, fronteiras parabólicas do domínio podem ser alinhadas com linhas coordenadas, o que facilita a imposição das condições de contorno e o uso da separação de variáveis, conforme descrito em textos clássicos de métodos matemáticos, como Arfken, Weber e Harris [33].

A Figura 3.1 exhibe as linhas coordenadas (σ, τ) . As curvas $\sigma = \text{constante}$, em azul, e $\tau = \text{constante}$, em vermelho, são parábolas confocais.

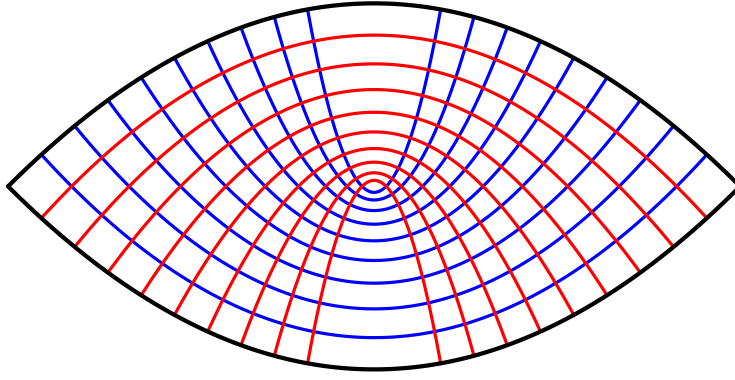


Figura 3.1: Linhas coordenadas parabólicas: em azul, curvas $\sigma = \text{constante}$, e em vermelho, curvas $\tau = \text{constante}$.

A partir de

$$\mathbf{r}(\sigma, \tau) = \left(\sigma\tau, \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \right), \quad (3.3)$$

segue que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = (\tau, -\sigma), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = (\sigma, \tau), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = 0, \quad (3.4)$$

Os vetores $\partial \mathbf{r} / \partial \sigma$ e $\partial \mathbf{r} / \partial \tau$ são tangentes às curvas coordenadas $\sigma = \text{constante}$ e $\tau = \text{constante}$, respectivamente. Como o produto escalar entre eles é nulo, conclui-se que o sistema de coordenadas parabólicas é ortogonal. Os fatores de escala são definidos pelos módulos desses vetores tangentes,

$$h_\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right|, \quad h_\tau = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right|,$$

de modo que

$$h_\sigma = h_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (3.5)$$

Consequentemente, o jacobiano da transformação é

$$J = h_\sigma h_\tau = \sigma^2 + \tau^2, \quad (3.6)$$

e o elemento diferencial de área assume a forma

$$dA = J d\sigma d\tau = (\sigma^2 + \tau^2) d\sigma d\tau. \quad (3.7)$$

O Laplaciano, escrito em coordenadas ortogonais, é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\sigma h_\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{h_\tau}{h_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{h_\sigma}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Como $h_\sigma = h_\tau$, a expressão anterior simplifica-se para

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right). \quad (3.9)$$

Aplicando (3.9) à forma adimensional da equação de Poisson do escoamento de Poiseuille, dada por (2.17), obtemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = -(\sigma^2 + \tau^2). \quad (3.10)$$

Essa forma é particularmente conveniente em domínios limitados por parábolas confocais, como ilustrado em aplicações recentes a dutos segmento-parabólicos e lentes parabólicas [28].

3.2 Mapeamento do domínio

Para $\lambda = \frac{1}{2}$, mostraremos que o domínio Ω , descrito em (2.18), é mapeado, em coordenadas parabólicas (σ, τ) , no triângulo retângulo isósceles

$$\Gamma = \{(\sigma, \tau) : 0 \leq \sigma \leq \tau \leq 1\}. \quad (3.11)$$

De fato, como o domínio físico está no semiplano $y \geq 0$, a parte relevante da fronteira $x = 0$ é dada por $\sigma = 0$. Nessa reta, (3.1) reduz-se a

$$\sigma = 0, \quad x = 0, \quad y = \frac{1}{2}\tau^2, \quad (3.12)$$

e o segmento $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ corresponde a $0 \leq \tau \leq 1$.

Da condição $y = 0$ e de (3.1), segue

$$\tau^2 - \sigma^2 = 0, \quad \tau = |\sigma| \quad (\tau \geq 0). \quad (3.13)$$

Além disso, como $x = \sigma\tau \geq 0$ no domínio físico e $\tau \geq 0$, concluímos que $\sigma \geq 0$. Assim, sobre a base $y = 0$ no primeiro quadrante, vale simplesmente

$$\tau = \sigma, \quad x = \sigma^2, \quad 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (3.14)$$

Por fim, na parábola $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$, substituindo (3.1), obtemos

$$\frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) = \frac{1}{2}(1 - \sigma^2\tau^2), \quad (3.15)$$

isto é,

$$(1 - \tau^2)(1 + \sigma^2) = 0. \quad (3.16)$$

Como $1 + \sigma^2 > 0$, segue necessariamente que

$$\tau = 1, \quad x = \sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (3.17)$$

Portanto, as restrições do domínio físico no primeiro quadrante traduzem-se no domínio descrito em (3.11).

As condições físicas de não deslizamento descritas em (2.19), (2.20) e (2.21) tornam-se

$$w(0, \tau) = 0, \quad (3.18)$$

$$w(\tau, \tau) = 0, \quad (3.19)$$

e

$$w(\sigma, 1) = 0, \quad (3.20)$$

para $0 \leq \tau \leq 1$ e $0 \leq \sigma \leq 1$.

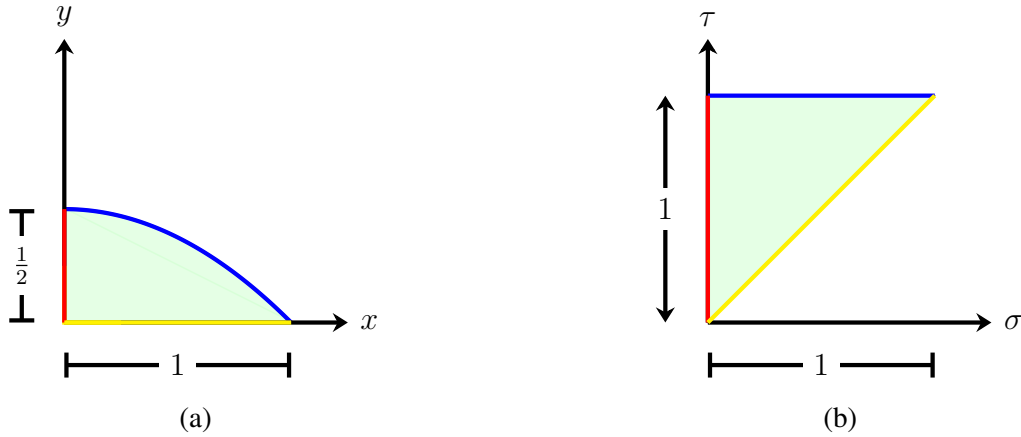


Figura 3.2: Relação biunívoca entre o domínio semiparabólico no plano cartesiano (x, y) e o triângulo retângulo isósceles em coordenadas parabólicas (σ, τ) , com fronteiras e regiões correspondentes indicadas pelas mesmas cores.

A Figura 3.2 mostra o domínio semiparabólico no plano físico (x, y) e o triângulo correspondente no plano (σ, τ) , com fronteiras e regiões sombreadas em cores correspondentes para evidenciar a relação biunívoca entre as duas representações.

3.3 Solução

Nesta seção, apresentamos a solução do problema de Dirichlet descrito pela equação de Poisson (3.10) e pelas condições de contorno (3.18), (3.19) e (3.20).

Primeiramente, note que

$$\nabla^2 \left(-\frac{y^2}{2} \right) = -1. \quad (3.21)$$

Portanto, $-y^2/2$ é uma solução particular da equação de Poisson (2.17). Em coordenadas parabólicas (σ, τ) , usando (3.1), obtemos

$$-\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{8} (\tau^2 - \sigma^2)^2. \quad (3.22)$$

Assim, propomos

$$w = -\frac{1}{8} (\tau^2 - \sigma^2)^2 + W, \quad (3.23)$$

em que W satisfaz a equação de Laplace no triângulo (3.11),

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0. \quad (3.24)$$

As condições homogêneas de Dirichlet em (3.18), (3.19) e (3.20) tornam-se

$$W(0, \tau) = \frac{1}{8} \tau^4, \quad (3.25)$$

$$W(\tau, \tau) = 0, \quad (3.26)$$

e

$$W(\sigma, 1) = \frac{1}{8} (1 - \sigma^2)^2. \quad (3.27)$$

Não é possível aplicar separação de variáveis diretamente em Γ . No entanto, por reflexão ímpar através da diagonal $\sigma = \tau$, que se torna uma linha nodal, o problema em Γ pode ser convertido em um problema de Dirichlet equivalente no quadrado $0 \leq \sigma \leq 1$ e $0 \leq \tau \leq 1$. Assim, resolver (3.24)–(3.27) no triângulo (3.11) é equivalente a resolver a equação de Laplace (3.24) no quadrado, sujeita às condições de contorno

$$W(0, \tau) = \frac{1}{8} \tau^4, \quad (3.28)$$

$$W(\sigma, 1) = \frac{1}{8} (1 - \sigma^2)^2, \quad (3.29)$$

$$W(\sigma, 0) = -\frac{1}{8} \sigma^4, \quad (3.30)$$

$$W(1, \tau) = -\frac{1}{8} (1 - \tau^2)^2. \quad (3.31)$$

A partir desse ponto, podemos adotar estratégias usuais para a solução do problema. Pela linearidade da equação de Laplace, escrevemos W como a soma de quatro soluções harmônicas,

$$W = W_A + W_B + W_C + W_D, \quad (3.32)$$

escolhidas de modo que cada parcela carregue dados não homogêneos em apenas uma aresta e permaneça nula nas demais. Dessa forma, a superposição (3.32) recupera as condições (3.28)–(3.31). Definimos, então, W_A , W_B , W_C e W_D pelos quatro problemas a seguir.

O subproblema W_A é dado por

$$\frac{\partial^2 W_A}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 W_A}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3.33)$$

$$W_A(0, \tau) = 0, \quad (3.34)$$

$$W_A(1, \tau) = 0, \quad (3.35)$$

$$W_A(\sigma, 0) = -\frac{1}{8}\sigma^4, \quad (3.36)$$

$$W_A(\sigma, 1) = 0. \quad (3.37)$$

O subproblema W_B é dado por

$$\frac{\partial^2 W_B}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 W_B}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3.38)$$

$$W_B(0, \tau) = 0, \quad (3.39)$$

$$W_B(1, \tau) = 0, \quad (3.40)$$

$$W_B(\sigma, 0) = 0, \quad (3.41)$$

$$W_B(\sigma, 1) = \frac{1}{8}(1 - \sigma^2)^2. \quad (3.42)$$

O subproblema W_C é dado por

$$\frac{\partial^2 W_C}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 W_C}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3.43)$$

$$W_C(0, \tau) = \frac{1}{8}\tau^4, \quad (3.44)$$

$$W_C(1, \tau) = 0, \quad (3.45)$$

$$W_C(\sigma, 0) = 0, \quad (3.46)$$

$$W_C(\sigma, 1) = 0. \quad (3.47)$$

O subproblema W_D é dado por

$$\frac{\partial^2 W_D}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 W_D}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3.48)$$

$$W_D(0, \tau) = 0, \quad (3.49)$$

$$W_D(1, \tau) = -\frac{1}{8} (1 - \tau^2)^2, \quad (3.50)$$

$$W_D(\sigma, 0) = 0, \quad (3.51)$$

$$W_D(\sigma, 1) = 0. \quad (3.52)$$

As soluções de (3.33)–(3.52) são obtidas por separação de variáveis e expansão em série de senos, como no tratamento padrão do problema de Dirichlet em retângulos, ver, por exemplo, Strauss [34]. Em particular, escrevemos

$$W_A(\sigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi\sigma) \frac{\sinh(n\pi(1-\tau))}{\sinh(n\pi)}, \quad (3.53)$$

$$W_B(\sigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi\sigma) \frac{\sinh(n\pi\tau)}{\sinh(n\pi)}, \quad (3.54)$$

$$W_C(\sigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sinh(n\pi(1-\sigma))}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi\tau), \quad (3.55)$$

$$W_D(\sigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\sinh(n\pi\sigma)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi\tau). \quad (3.56)$$

Os coeficientes são determinados pelas séries de senos dos dados de contorno. Pelas equações (3.36), (3.42), (3.44) e (3.50), obtemos

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \int_0^1 \left(-\frac{1}{8} \sigma^4 \right) \sin(n\pi\sigma) \, d\sigma \\ &= \frac{(-1)^n (\pi^4 n^4 - 12\pi^2 n^2 + 24) - 24}{4\pi^5 n^5} \\ &= \frac{1}{4n\pi} \begin{cases} 1 - \frac{12}{n^2\pi^2}, & n \text{ par}, \\ -\left(1 - \frac{12}{n^2\pi^2} + \frac{48}{n^4\pi^4}\right), & n \text{ ímpar}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
B_n &= 2 \int_0^1 \frac{1}{8} (1 - \sigma^2)^2 \sin(n\pi\sigma) \, d\sigma \\
&= \frac{\pi^4 n^4 + 4\pi^2 n^2 + 24 + (-1)^n (8\pi^2 n^2 - 24)}{4\pi^5 n^5} \\
&= \frac{1}{4n\pi} \begin{cases} 1 + \frac{12}{n^2 \pi^2}, & n \text{ par}, \\ 1 - \frac{4}{n^2 \pi^2} + \frac{48}{n^4 \pi^4}, & n \text{ ímpar}, \end{cases} \quad (3.58)
\end{aligned}$$

$$C_n = 2 \int_0^1 \frac{1}{8} \tau^4 \sin(n\pi\tau) \, d\tau = -A_n, \quad (3.59)$$

$$D_n = 2 \int_0^1 \left(-\frac{1}{8} (1 - \tau^2)^2 \right) \sin(n\pi\tau) \, d\tau = -B_n. \quad (3.60)$$

Finalmente, W é recuperada por superposição conforme (3.32). Usando (3.32) em conjunto com (3.53)–(3.56) e as relações (3.59) e (3.60), obtemos

$$\begin{aligned}
W(\sigma, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sinh(n\pi)} [\sin(n\pi\sigma) \sinh(n\pi(1-\tau)) - \sin(n\pi\tau) \sinh(n\pi(1-\sigma))] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} [\sin(n\pi\sigma) \sinh(n\pi\tau) - \sin(n\pi\tau) \sinh(n\pi\sigma)], \quad (3.61)
\end{aligned}$$

onde A_n e B_n são dados por (3.57) e (3.58).

De (3.23) e (3.61), obtemos a solução do escoamento de Poiseuille em um duto semiparabólico para $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
w(\sigma, \tau) &= -\frac{1}{8} (\tau^2 - \sigma^2)^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sinh(n\pi)} [\sin(n\pi\sigma) \sinh(n\pi(1-\tau)) - \sin(n\pi\tau) \sinh(n\pi(1-\sigma))] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} [\sin(n\pi\sigma) \sinh(n\pi\tau) - \sin(n\pi\tau) \sinh(n\pi\sigma)]. \quad (3.62)
\end{aligned}$$

3.4 Vazão volumétrica

A vazão volumétrica, como visto no Capítulo 2, é dada por

$$Q = \int_0^1 \int_{\sigma}^1 w(\sigma, \tau) (\sigma^2 + \tau^2) \, d\tau \, d\sigma. \quad (3.63)$$

Substituindo (3.62) em (3.63), permutamos soma e integral e integramos termo a

termo. A contribuição polinomial é elementar e fornece $-1/105$. As integrais remanescentes associadas às duas séries foram avaliadas e simplificadas simbolicamente no Wolfram Mathematica 14.0 [35]. Ao final, obtemos

$$Q = \frac{71}{20160} - \frac{1}{8\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi)}{n^5} - \frac{3}{8\pi^7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi)}{n^7} - \frac{9}{32\pi^9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi)}{n^9}. \quad (3.64)$$

3.5 Número de Poiseuille

O número de Poiseuille é definido por (2.25). Para $\lambda = \frac{1}{2}$, substituindo em (2.22) e (2.23), obtemos

$$A = \frac{1}{3} \quad (3.65)$$

e

$$\begin{aligned} P &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\operatorname{arsenh}(1)}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Além disso, a vazão Q é dada por (3.64). Assim, de (2.25), resulta

$$Po \approx 14.2508. \quad (3.67)$$

3.6 Convergência da série

Na expressão (3.64), a vazão volumétrica Q é escrita como uma série infinita. Na prática, essa série deve ser avaliada por truncamento. Denotamos por N o nível de truncamento, isto é, o número de termos retidos na representação em série de Q . A Tabela 3.1 mostra a rápida convergência do número de Poiseuille para $\lambda = \frac{1}{2}$. O valor limite foi calculado a partir de (3.64), usando a expressão (2.25). Observa-se que, com $N = 16$, o valor obtido já coincide com o valor limite quando arredondado a cinco casas decimais.

Tabela 3.1: Convergência do número de Poiseuille para $\lambda = \frac{1}{2}$ conforme o nível de truncamento N é dobrado.

N	1	2	4	8	16	∞
Po	14.17367	14.23935	14.24964	14.25071	14.25080	14.25080

3.7 Tensão média de cisalhamento na parede

Além da vazão volumétrica e do número de Poiseuille, a solução exata permite calcular a tensão de cisalhamento na parede. Para um escoamento unidirecional, a única com-

ponente não nula da tração viscosa na parede é a componente axial. Assim, definimos a magnitude adimensional da tensão de cisalhamento na parede por

$$\tau_w = -\nabla w \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad (3.68)$$

em que $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário exterior à fronteira da seção. A tensão média de cisalhamento ao longo do perímetro molhado é

$$\bar{\tau} = \frac{1}{P} \oint_{\partial\Omega} \tau_w \, ds = -\frac{1}{P} \oint_{\partial\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (3.69)$$

Em coordenadas parabólicas (σ, τ) , tem-se

$$\nabla w \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{\partial w}{\partial \sigma} n_\sigma + \frac{\partial w}{\partial \tau} n_\tau \right). \quad (3.70)$$

Para $\lambda = \frac{1}{2}$, a fronteira corresponde aos três lados do triângulo $0 \leq \sigma \leq \tau \leq 1$, isto é, $\sigma = 0$, $\tau = 1$ e $\sigma = \tau$. Usando o elemento de comprimento físico nas coordenadas parabólicas e os vetores normais exteriores em cada lado, a expressão (3.69) reduz-se à soma de três integrais unidimensionais:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} = \frac{1}{P} & \left[\int_0^1 \left. \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} d\tau - \int_0^1 \left. \frac{\partial w}{\partial \tau} \right|_{\tau=1} d\sigma \right. \\ & \left. + \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) \Big|_{\sigma=\tau=s} ds \right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Essa grandeza também pode ser obtida de forma direta, sem recorrer à série. Como a velocidade satisfaz $\nabla^2 w = -1$, o teorema da divergência fornece

$$-\oint_{\partial\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{n} \, ds = -\iint_{\Omega} \nabla^2 w \, dA = \iint_{\Omega} 1 \, dA = A. \quad (3.72)$$

Portanto,

$$\bar{\tau} = \frac{A}{P}. \quad (3.73)$$

Para $\lambda = \frac{1}{2}$, usando (3.65) e (3.66), obtemos

$$\bar{\tau} = \frac{2}{3 [3 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]} \approx 0.125891. \quad (3.74)$$

A avaliação das três contribuições de fronteira em (3.71), usando a solução em série (3.62), fornece uma verificação independente da expressão (3.73). Numericamente,

$$\int_0^1 \left. \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} d\tau \approx 0.0615, \quad (3.75)$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=1} d\sigma \approx 0.1448, \quad (3.76)$$

e

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) \Big|_{\sigma=\tau=s} ds \approx 0.1270. \quad (3.77)$$

A soma dessas três parcelas é igual a $A = 1/3$, dentro da precisão numérica, recuperando a relação (3.73).

3.8 Analogias físicas

Embora tenha sido obtida para o escoamento de Poiseuille, a solução exata para $\lambda = \frac{1}{2}$ tem alcance mais amplo. O ponto essencial é que w satisfaz um problema de Poisson com termo fonte constante e condição homogênea de Dirichlet. A mesma estrutura matemática aparece em diferentes problemas da física matemática. Em particular, como discutido por Bazant [14], soluções de escoamentos unidirecionais podem ser reinterpretadas, após reescalonamento apropriado, em problemas de condução de calor, eletrostática, transporte difusivo e torção de barras prismáticas.

No caso da torção de Saint-Venant, a solução aqui obtida pode ser interpretada como a função de tensão de Prandtl de uma barra prismática com a mesma seção semiparabólica (Apêndice 7). Assim, além de fornecer uma solução exata para um problema de mecânica dos fluidos, o resultado também constitui uma solução de referência para problemas análogos em elasticidade.

Capítulo 4

Solução por Métodos de Perturbação

No Capítulo 3, obtivemos a solução exata para o caso $\lambda = \frac{1}{2}$. Neste capítulo, consideramos o regime $\lambda \ll 1$ e derivamos aproximações assintóticas para o campo de velocidades $w(x, y)$ e para a vazão volumétrica Q . A análise explora a separação natural do escoamento em uma região externa, na qual a variação longitudinal é suave, e uma camada localizada junto à parede $x = 0$, na qual as variações em x e y ocorrem na mesma escala.

4.1 Análise assintótica

Assumimos $\lambda \ll 1$ e introduzimos a variável vertical esticada

$$\eta = \frac{y}{\lambda}. \quad (4.1)$$

A introdução da variável esticada η permite descrever o domínio utilizando uma coordenada vertical de ordem unitária. Como a fronteira superior é dada por

$$y = \lambda(1 - x^2),$$

segue que

$$0 \leq \eta \leq 1 - x^2.$$

Dessa forma, a dependência explícita de λ é removida da descrição geométrica do domínio, o que facilita a construção da expansão assintótica para $\lambda \ll 1$. Na região externa, em que $x = O(1)$, o domínio fica compreendido entre $\eta = 0$ e $\eta = 1 - x^2$. O balanço dominante na equação governante implica $w = O(\lambda^2)$. Assim, escrevemos a expansão

$$w(x, \eta) = \lambda^2 [w_0(x, \eta) + \lambda^2 w_2(x, \eta) + O(\lambda^4)]. \quad (4.2)$$

Como $\eta = y/\lambda$, as derivadas em relação à coordenada física y podem ser reescritas por meio da regra da cadeia. Em particular,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (4.3)$$

de onde resulta

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + O(\lambda^4). \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) na equação de Poisson (2.17) e igualando potências de λ , obtemos, na ordem dominante,

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} = -1. \quad (4.5)$$

Das condições de contorno (2.20) e (2.21), segue que

$$w_0(x, 0) = 0, \quad (4.6)$$

$$w_0(x, 1 - x^2) = 0. \quad (4.7)$$

A solução de (4.5)–(4.7) é

$$w_0(x, \eta) = \frac{\eta}{2} (1 - x^2 - \eta). \quad (4.8)$$

Na ordem seguinte, obtemos

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \eta. \quad (4.9)$$

As condições de contorno correspondentes são

$$w_2(x, 0) = 0, \quad (4.10)$$

$$w_2(x, 1 - x^2) = 0. \quad (4.11)$$

A solução de (4.9)–(4.11) é

$$w_2(x, \eta) = \frac{\eta}{6} \left[\eta^2 - (1 - x^2)^2 \right]. \quad (4.12)$$

Assim, a aproximação externa, até $O(\lambda^4)$, fica

$$w(x, \eta) = \frac{\eta}{2} (1 - x^2 - \eta) \lambda^2 + \frac{\eta}{6} \left[\eta^2 - (1 - x^2)^2 \right] \lambda^4 + O(\lambda^6). \quad (4.13)$$

A aproximação externa deixa de ser uniformemente válida na vizinhança de $x = 0$, onde a condição de não deslizamento na parede vertical induz variações longitudinais na mesma escala da altura do canal. Introduzimos, então, a variável esticada

$$\xi = \frac{x}{\lambda}, \quad (4.14)$$

mantendo $\eta = y/\lambda$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (4.15)$$

Buscamos uma expansão do tipo

$$w(x, y) = \lambda^2 W_0(\xi, \eta) + O(\lambda^4), \quad \xi = \frac{x}{\lambda}, \quad \eta = \frac{y}{\lambda}. \quad (4.16)$$

Na região $\xi = O(1)$, a parede superior $y = \lambda(1 - x^2)$ escreve-se como $\eta = 1 - \lambda^2 \xi^2$. Portanto, na ordem dominante, o domínio torna-se a faixa semi-infinita $0 < \eta < 1$, $\xi > 0$. Substituindo (4.16) em (2.17) e usando (4.3) e (4.15), obtemos, na ordem dominante,

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} = -1, \quad \xi > 0, \quad 0 < \eta < 1. \quad (4.17)$$

As condições de contorno seguem de (2.19), (2.20) e (2.21). Na parede vertical $x = 0$, isto é, $\xi = 0$,

$$W_0(0, \eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (4.18)$$

Na base $y = 0$, isto é, $\eta = 0$,

$$W_0(\xi, 0) = 0, \quad \xi \geq 0. \quad (4.19)$$

Na parede superior $y = \lambda(1 - x^2)$, isto é, $\eta = 1 - \lambda^2 \xi^2$, obtemos, na ordem dominante,

$$W_0(\xi, 1) = 0, \quad \xi \geq 0. \quad (4.20)$$

Resta impor a condição de casamento com a expansão externa quando $\xi \rightarrow \infty$. Como $x = \lambda\xi \rightarrow 0$, segue de (4.8) que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} W_0(\xi, \eta) = \lim_{x \rightarrow 0} w_0(x, \eta) = \frac{\eta}{2} (1 - \eta). \quad (4.21)$$

Para resolver (4.17), escrevemos

$$W_0(\xi, \eta) = \frac{\eta}{2} (1 - \eta) + U(\xi, \eta), \quad (4.22)$$

de modo que U satisfaz a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0, \quad \xi > 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad (4.23)$$

com condições de contorno homogêneas em $\eta = 0$ e $\eta = 1$,

$$U(\xi, 0) = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (4.24)$$

$$U(\xi, 1) = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (4.25)$$

e decaimento quando $\xi \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi, \eta) = 0. \quad (4.26)$$

Assim, procuramos U na forma de série de senos em η ,

$$U(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi\xi} \sin(n\pi\eta), \quad (4.27)$$

que satisfaz (4.23), (4.24), (4.25) e (4.26). Impomos, então, a condição em $\xi = 0$. De (4.18) e (4.22), segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi\eta) = -\frac{\eta}{2} (1 - \eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (4.28)$$

Pela ortogonalidade das funções seno em $[0, 1]$, obtemos

$$C_n = -2 \int_0^1 \frac{\eta}{2} (1 - \eta) \sin(n\pi\eta) d\eta. \quad (4.29)$$

Logo,

$$C_n = - \int_0^1 \eta (1 - \eta) \sin(n\pi\eta) d\eta = \begin{cases} -\frac{4}{n^3\pi^3}, & n \text{ ímpar}, \\ 0, & n \text{ par}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Substituindo (4.30) em (4.22) e (4.27), obtemos

$$W_0(\xi, \eta) = \frac{\eta}{2} (1 - \eta) - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\pi\xi}}{(2n-1)^3} \sin((2n-1)\pi\eta). \quad (4.31)$$

Na forma original, a contribuição da camada junto a $x = 0$ é

$$w(x, y) = \lambda^2 W_0\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) + O(\lambda^4). \quad (4.32)$$

Para compor uma aproximação uniformemente válida, subtraímos a parte comum das expan-

ções externa e de camada. Pela condição de casamento (4.21), a parte comum é

$$\text{p.c.} = \frac{\eta}{2} (1 - \eta) \lambda^2, \quad \eta = \frac{y}{\lambda}. \quad (4.33)$$

Assim, a solução composta resulta da soma de (4.13) e (4.32), com subtração de (4.33). Seguindo o procedimento clássico das expansões assintóticas casadas, define-se a solução composta como

$$w_{\text{comp}} = w_{\text{ext}} + w_{\text{int}} - w_{\text{comum}},$$

em que w_{comum} representa o comportamento assintótico compartilhado pelas soluções interna e externa na região de casamento. Essa construção garante que a aproximação resultante permaneça válida tanto próximo quanto longe do canto. Portanto,

$$w = \left[\frac{\eta}{2} (1 - x^2 - \eta) - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\pi(x/\lambda)}}{(2n-1)^3} \sin((2n-1)\pi\eta) \right] \lambda^2 + \frac{\eta}{6} [\eta^2 - (1 - x^2)^2] \lambda^4 + O(\lambda^6). \quad (4.34)$$

4.2 Vazão volumétrica

Pela equação (2.24), a vazão volumétrica é

$$Q = \int_0^1 \int_0^{\lambda(1-x^2)} w(x, y) dy dx = \lambda \int_0^1 \int_0^{1-x^2} w(x, \eta) d\eta dx, \quad (4.35)$$

onde usamos $y = \lambda\eta$ e $dy = \lambda d\eta$. As escalas em (4.34) mostram que a contribuição dominante da região externa é $O(\lambda^3)$, a contribuição dominante da camada junto a $x = 0$ é $O(\lambda^4)$ e a correção externa seguinte fornece $O(\lambda^5)$. Mantendo apenas os termos necessários para reter Q até $O(\lambda^5)$, obtemos, a partir de (4.34),

$$Q = \lambda^3 \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \frac{\eta}{2} (1 - x^2 - \eta) d\eta dx - \lambda^4 \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \int_0^{\infty} \int_0^1 e^{-(2n-1)\pi\xi} \sin((2n-1)\pi\eta) d\eta d\xi + \lambda^5 \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \frac{\eta}{6} [\eta^2 - (1 - x^2)^2] d\eta dx + O(\lambda^6). \quad (4.36)$$

No termo de camada, fizemos $x = \lambda\xi$, de modo que $dx = \lambda d\xi$. No nível de precisão requerido, substituímos a faixa $\xi \in [0, 1/\lambda]$ por $\xi \in [0, \infty)$ e a faixa $\eta \in [0, 1 - \lambda^2\xi^2]$ por $\eta \in [0, 1]$.

A primeira integral em (4.36) é elementar. Com $h = 1 - x^2$,

$$\int_0^h \frac{\eta}{2} (h - \eta) \, d\eta = \frac{h^3}{12}. \quad (4.37)$$

Portanto,

$$\lambda^3 \int_0^1 \frac{(1 - x^2)^3}{12} \, dx = \frac{4}{105} \lambda^3. \quad (4.38)$$

No termo de camada, usamos

$$\int_0^\infty e^{-(2n-1)\pi\xi} \, d\xi = \frac{1}{(2n-1)\pi}, \quad (4.39)$$

e

$$\int_0^1 \sin((2n-1)\pi\eta) \, d\eta = \frac{2}{(2n-1)\pi}. \quad (4.40)$$

Isso fornece

$$-\lambda^4 \frac{8}{\pi^5} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^5} = -\frac{31}{4\pi^5} \zeta(5) \lambda^4, \quad (4.41)$$

pois

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^5} = (1 - 2^{-5}) \zeta(5) = \frac{31}{32} \zeta(5), \quad (4.42)$$

com

$$\zeta(5) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^5}. \quad (4.43)$$

Por fim, o termo $O(\lambda^5)$ da região externa resulta de

$$\int_0^h \frac{\eta}{6} (\eta^2 - h^2) \, d\eta = -\frac{h^4}{24}, \quad (4.44)$$

de modo que

$$\lambda^5 \int_0^1 \left(-\frac{(1 - x^2)^4}{24} \right) \, dx = -\frac{16}{945} \lambda^5. \quad (4.45)$$

Reunindo (4.38), (4.41) e (4.45), obtemos

$$Q = \frac{4}{105} \lambda^3 - \frac{31}{4\pi^5} \zeta(5) \lambda^4 - \frac{16}{945} \lambda^5 + O(\lambda^6). \quad (4.46)$$

4.3 Número de Poiseuille

O número de Poiseuille Po é definido por (2.25). Pela equação (2.22), segue que

$$8A^3 = 8 \left(\frac{2\lambda}{3} \right)^3 = \frac{64}{27} \lambda^3. \quad (4.47)$$

Logo, usando (2.23) e (4.46), temos

$$Po = \frac{64}{27} \frac{\lambda^3}{P^2 Q}. \quad (4.48)$$

Para expandir P em (2.23) quando $\lambda \rightarrow 0$, usamos as expansões de Taylor

$$\sqrt{1 + 4\lambda^2} = 1 + 2\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad (4.49)$$

$$\operatorname{arsenh}(2\lambda) = 2\lambda - \frac{4}{3}\lambda^3 + O(\lambda^5), \quad (4.50)$$

de modo que

$$\frac{\operatorname{arsenh}(2\lambda)}{4\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\lambda^2 + O(\lambda^4). \quad (4.51)$$

Substituindo em (2.23), obtemos

$$P = 2 + \lambda + \frac{2}{3}\lambda^2 + O(\lambda^3). \quad (4.52)$$

Além disso, por (4.46),

$$Q = \lambda^3 \left[\frac{4}{105} - \frac{31 \zeta(5)}{4\pi^5} \lambda - \frac{16}{945} \lambda^2 + O(\lambda^3) \right]. \quad (4.53)$$

Inserindo (4.52) e (4.53) em (4.48) e expandindo em série de Taylor em λ , resulta

$$\begin{aligned} Po &= \frac{140}{9} + \left[-\frac{140}{9} + \frac{37975 \zeta(5)}{12\pi^5} \right] \lambda \\ &+ \left[\frac{665}{81} - \frac{37975 \zeta(5)}{12\pi^5} + \frac{41202875 \zeta(5)^2}{64\pi^{10}} \right] \lambda^2 + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Em particular,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Po = \frac{140}{9} \approx 15.5556. \quad (4.55)$$

É interessante observar que o limite em (4.55) também vale para dutos em segmento parabólico e em forma de lente [28].

Capítulo 5

Solução Numérica

5.1 Método numérico por elementos finitos

Neste capítulo, descrevemos a solução numérica do problema de Poisson formulado no Capítulo 2. O objetivo é obter valores de referência para a vazão volumétrica e para o número de Poiseuille, permitindo validar a solução exata do Capítulo 3 e a aproximação assintótica do Capítulo 4. A resolução numérica foi realizada em coordenadas cartesianas, diretamente no domínio semiparabólico definido em (2.18), com as condições de não deslizamento dadas por (2.19)–(2.21).

5.2 Formulação variacional e discretização

A equação governante é a equação de Poisson adimensional (2.17). Para aplicar o método dos elementos finitos, consideramos a formulação variacional correspondente: encontrar $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dA = \int_{\Omega} \varphi \, dA, \quad (5.1)$$

para toda função teste $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. A condição de Dirichlet homogênea é incorporada ao espaço funcional, representando a condição física de não deslizamento nas paredes do duto.

A discretização foi feita com elementos finitos quadráticos, denotados por $\mathcal{P}_2$, utilizando o software `FreeFem++` [31]. Seja $\mathcal{T}_h$ uma triangulação do domínio Ω . O espaço discreto é tomado como

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega) : v_h|_K \in \mathcal{P}_2(K), \quad K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (5.2)$$

A escolha de elementos quadráticos melhora a aproximação do campo de velocidades e de seus gradientes, o que é particularmente útil no cálculo da vazão volumétrica e da velocidade

máxima.

5.3 Geração da malha

A malha triangular foi gerada no próprio `FreeFem++`. A fronteira curva superior do domínio é descrita por uma parametrização explícita da parábola, enquanto as demais fronteiras correspondem aos segmentos retilíneos $x = 0$ e $y = 0$. A partir dessas três bordas, a função `buildmesh` constrói uma triangulação não estruturada do domínio.

O refinamento da malha é controlado por um parâmetro inteiro N , que representa o número de subdivisões adotadas em cada bordo do contorno. Esse parâmetro não determina diretamente o número total de elementos, pois a triangulação interna é gerada automaticamente pelo algoritmo do `FreeFem++`. Ainda assim, o aumento de N produz um refinamento global da malha e melhora a representação geométrica da parede parabólica.

A Figura 5.1 ilustra esse processo para quatro valores crescentes de N . Observa-se que, à medida que o contorno é mais bem discretizado, a malha representa com maior fidelidade a fronteira semiparabólica e fornece uma discretização mais regular do interior do domínio.

Malhas mais refinadas foram utilizadas para a obtenção dos resultados finais, mas não são mostradas aqui porque a densidade de elementos torna a visualização pouco informativa. Nesses casos, a verificação da qualidade da solução é feita por meio da convergência das grandezas integrais, e não pela inspeção visual da malha.

5.4 Pós-processamento

Após a solução do sistema linear, a vazão volumétrica é calculada por integração numérica do campo de velocidades, conforme a definição (2.24). No `FreeFem++`, essa integração é realizada pela função `int2d`. A área A e o perímetro molhado P são avaliados pelas expressões analíticas (2.22) e (2.23). Em seguida, o número de Poiseuille é obtido pela relação (2.25).

Essa estratégia evita calcular A e P a partir da malha, preservando a precisão geométrica dessas grandezas. Assim, o erro numérico fica essencialmente associado à aproximação do campo de velocidades e, conseqüentemente, da vazão volumétrica.

5.5 Convergência de malha

Foi realizado um estudo de refinamento de malha para o caso $\lambda = \frac{1}{2}$, escolhido por possuir a solução exata apresentada no Capítulo 3. A comparação foi feita a partir do número

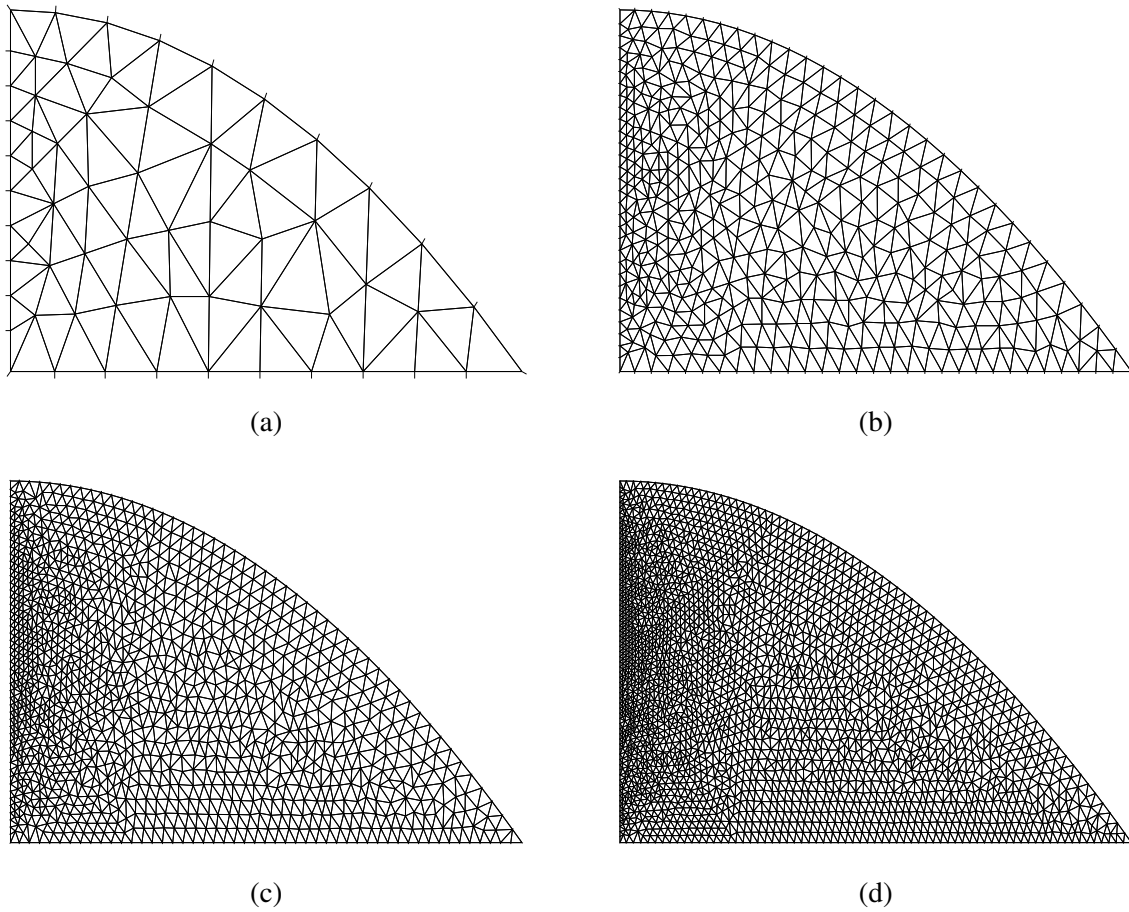


Figura 5.1: Malhas triangulares geradas no domínio semiparabólico para valores crescentes do parâmetro de refinamento: (a) $N = 10$, (b) $N = 30$, (c) $N = 50$ e (d) $N = 70$. Os painéis mostram o refinamento progressivo da discretização e a melhora na representação da fronteira curva.

de Poiseuille, calculado com a vazão numérica e com as expressões analíticas da área e do perímetro.

Observou-se convergência rápida com o refinamento da malha. Para malhas com aproximadamente 10^5 elementos triangulares, o erro relativo no número de Poiseuille já se torna pequeno, e refinamentos adicionais produzem alterações cada vez menos significativas. As malhas mais refinadas foram usadas nos resultados finais e podem ser consideradas independentes da discretização dentro da tolerância adotada.

Além da vazão, a velocidade máxima também foi monitorada como uma métrica local da solução. A estabilização simultânea da vazão, do número de Poiseuille e da velocidade máxima indica que a discretização empregada é suficiente para capturar tanto as grandezas integrais quanto as principais características locais do campo de velocidades.

Capítulo 6

Resultados

Este capítulo apresenta os principais resultados obtidos para o escoamento de Poiseuille em dutos semiparabólicos. A análise combina a solução exata do Capítulo 3, a aproximação assintótica do Capítulo 4 e os resultados numéricos obtidos por elementos finitos no Capítulo 5. Inicialmente, discutimos o campo de velocidades e a influência da razão de aspecto sobre as isovelocidades. Em seguida, comparamos a vazão volumétrica e o número de Poiseuille obtidos pelas diferentes abordagens. Por fim, analisamos grandezas hidráulicas complementares, como a razão entre velocidade máxima e velocidade média, a tensão média de cisalhamento na parede, a compacidade e o fator de correção geométrica.

6.1 Campo de velocidades

A Figura 6.1 mostra contornos normalizados de velocidade axial para diferentes valores da razão de aspecto λ . Em todos os painéis, os níveis variam de $0,1w_{\max}$ a $0,9w_{\max}$, com incrementos de $0,2w_{\max}$, em que $w_{\max}$ é a velocidade máxima na seção transversal.

Para $\lambda = 0,25$, o duto é bastante achatado e os contornos refletem o forte confinamento imposto pela pequena altura da seção. A variação dominante ocorre na direção transversal curta, de modo que a estrutura do escoamento se aproxima daquela típica de domínios esbeltos. À medida que λ aumenta, o núcleo de maior velocidade se expande e passa a ocupar uma fração maior da seção transversal. Os contornos também se aproximam progressivamente da parede parabólica, indicando uma redistribuição mais ampla do escoamento no interior do domínio. Esse comportamento mostra que o aumento da razão de aspecto reduz o confinamento vertical e altera a maneira como as paredes controlam a dissipação viscosa.

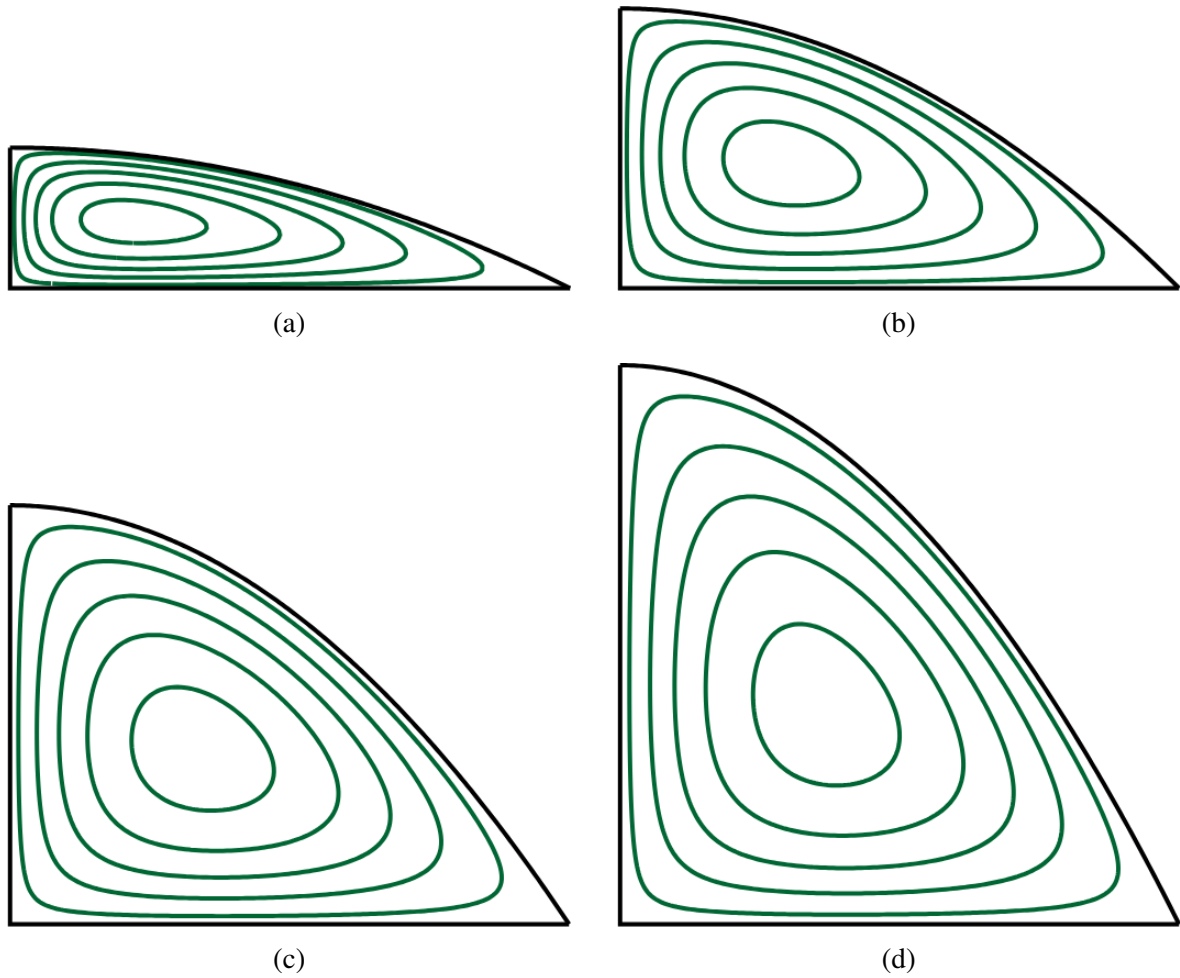


Figura 6.1: Contornos de isovelocidade normalizados para dutos semiparabólicos: (a) $\lambda = 0,25$, (b) $\lambda = 0,50$, (c) $\lambda = 0,75$ e (d) $\lambda = 1,00$. Os níveis correspondem a $0,1w_{\max}$, $0,3w_{\max}$, $0,5w_{\max}$, $0,7w_{\max}$ e $0,9w_{\max}$.

6.2 Vazão volumétrica

A Figura 6.2 compara a vazão volumétrica obtida numericamente com as aproximações assintóticas deduzidas no Capítulo 4. A aproximação dominante, de ordem $O(\lambda^3)$, captura a escala principal da vazão em dutos achatados. A inclusão do termo de ordem $O(\lambda^4)$, associado à camada localizada próxima ao canto de ângulo reto, melhora de forma significativa a aproximação no regime de pequenas razões de aspecto. O termo de ordem $O(\lambda^5)$ fornece a próxima correção formal da expansão.

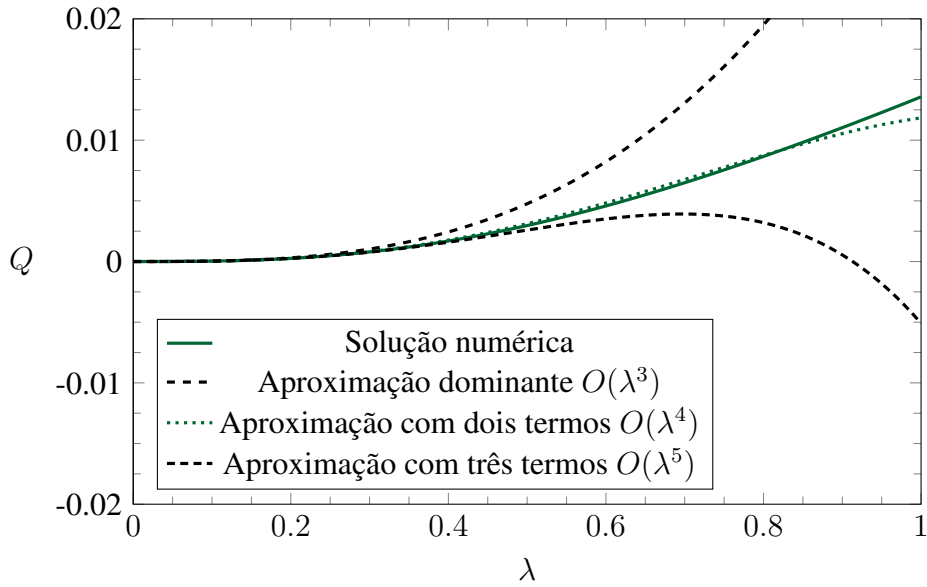


Figura 6.2: Vazão volumétrica Q em função da razão de aspecto λ . A solução numérica é comparada com aproximações assintóticas sucessivas obtidas no Capítulo 4.

Como esperado em expansões assintóticas, a inclusão de termos adicionais não deve ser interpretada como uma sequência necessariamente convergente para todo o intervalo de λ . A expansão descreve corretamente o comportamento para $\lambda \ll 1$, mas sua precisão se deteriora gradualmente à medida que a seção deixa de ser esbelta. Ainda assim, a aproximação permanece útil em uma faixa moderada de razões de aspecto, mostrando que a estrutura assintótica captura os mecanismos dominantes do escoamento.

6.3 Número de Poiseuille

A Figura 6.3 apresenta o número de Poiseuille Po em função da razão de aspecto. A curva numérica é comparada com a solução assintótica (4.54), com os valores analíticos obtidos para $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, e com os resultados correspondentes ao duto quarto-elíptico de Bacelar et al. [1].

No limite $\lambda \rightarrow 0$, o número de Poiseuille tende a $140/9$, conforme obtido em (4.55). Para $\lambda = \frac{1}{2}$, a solução exata em coordenadas parabólicas fornece $Po \approx 14,2508$, em excelente concordância com a solução numérica. A solução assintótica acompanha a curva numérica no regime de pequenas razões de aspecto e, mesmo em $\lambda = \frac{1}{2}$, fornece $Po = 14,3589$, com erro relativo inferior a 1%. Isso mostra que a expansão perturbativa permanece quantitativamente útil além de sua faixa formal estrita.

A curva numérica apresenta uma variação suave e não monotônica. O valor de Po diminui inicialmente com o aumento de λ , atinge um mínimo raso em torno de $\lambda \approx 0,63$, com $Po \approx 14,2111$, e volta a crescer para razões de aspecto maiores. Essa tendência resulta do balanço entre o aumento da área efetiva disponível ao escoamento e a redistribuição das

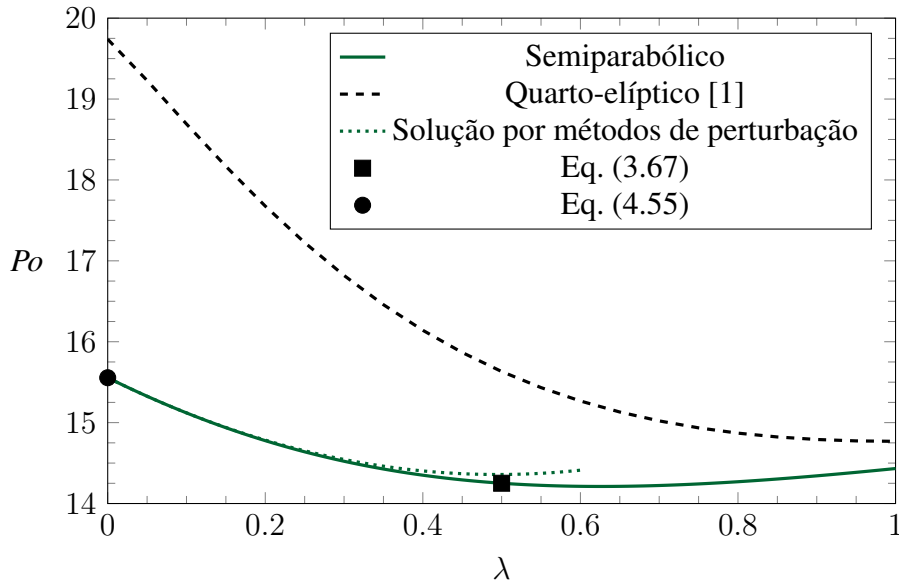


Figura 6.3: Número de Poiseuille Po em função da razão de aspecto λ . A curva do duto semiparabólico é comparada com a aproximação assintótica, com os valores analíticos de referência e com os resultados para o duto quarto-elíptico de Bacelar et al. [1].

tensões viscosas ao longo da fronteira.

A comparação com o duto quarto-elíptico é particularmente informativa, pois as duas seções possuem duas paredes retas e uma parede curva. Em todo o intervalo considerado, o duto semiparabólico apresenta menor número de Poiseuille do que o duto quarto-elíptico, indicando menor resistência hidráulica para razões de aspecto equivalentes.

Tabela 6.1: Número de Poiseuille Po e razão $w_{\max}/\bar{w}$ para dutos semiparabólicos em função da razão de aspecto λ . Os valores entre parênteses correspondem aos resultados de Bacelar et al. [1] para o duto quarto-elíptico.

λ	Po	$w_{\max}/\bar{w}$
0	15,5556 (19,7392)	2,1875 (2,0000)
0,1	15,1201 (18,6916)	2,2292 (2,0477)
0,2	14,7771 (17,6764)	2,2219 (2,0652)
0,3	14,5225 (16,8191)	2,2066 (2,0755)
0,4	14,3501 (16,1413)	2,1917 (2,0834)
0,5	14,2508 (15,6318)	2,1790 (2,0898)
0,6	14,2126 (15,2672)	2,1689 (2,0948)
0,7	14,2228 (15,0214)	2,1612 (2,0984)
0,8	14,2695 (14,8700)	2,1556 (2,1007)
0,9	14,3422 (14,7916)	2,1517 (2,1020)
1	14,4325 (14,7687)	2,1492 (2,1023)

A razão $w_{\max}/\bar{w}$, também apresentada na Tabela 6.1, mede o grau de não uniformidade do perfil de velocidades. Valores maiores indicam um perfil mais concentrado em torno da região de maior velocidade, enquanto valores próximos de 1 indicam um perfil mais

uniforme. Para a família semiparabólica, essa razão diminui conforme λ se aproxima de 1, mostrando que o perfil se torna progressivamente menos concentrado. Em comparação com o duto quarto-elíptico, o duto semiparabólico apresenta menor resistência hidráulica, mas um perfil axial mais pronunciado, com valores maiores de $w_{\max}/\bar{w}$ em todo o intervalo analisado.

Observa-se que o número de Poiseuille não varia monotonicamente com a razão de aspecto da seção transversal. Em vez disso, existe um valor intermediário de λ para o qual a resistência hidráulica é minimizada.

Esse comportamento pode ser interpretado como resultado da competição entre dois mecanismos distintos. Para valores muito pequenos de λ , a seção torna-se excessivamente achatada, fazendo com que uma parcela significativa do fluido permaneça sob forte influência das condições de não deslizamento impostas pelas paredes. Como consequência, os gradientes de velocidade aumentam e a dissipação viscosa torna-se mais intensa, elevando o número de Poiseuille.

Por outro lado, quando λ assume valores elevados, a seção transversal torna-se progressivamente mais alta e parte da área adicional passa a contribuir de forma menos eficiente para o transporte de fluido. Nessa situação, surgem regiões relativamente afastadas do núcleo do escoamento principal, caracterizadas por velocidades menores e menor aproveitamento hidráulico da área disponível. Esse efeito também conduz a um aumento da resistência hidráulica.

O mínimo observado para o número de Poiseuille corresponde, portanto, a uma configuração geométrica de compromisso, na qual o confinamento imposto pelas paredes e o aproveitamento da área transversal encontram-se balanceados. Essa geometria pode ser interpretada como a mais eficiente da família de seções semiparabólicas analisadas, pois produz a menor perda de carga para uma mesma vazão volumétrica.

A existência de um valor ótimo da razão de aspecto está em concordância com resultados observados em outras famílias de dutos não circulares, nos quais a minimização da resistência hidráulica também decorre do balanço entre os efeitos de confinamento viscoso e de distribuição espacial da área transversal.

6.4 Correlação para aplicações

Para facilitar o uso dos resultados em aplicações de engenharia, ajusta-se uma correlação polinomial de quinto grau para o número de Poiseuille no intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$Po = \frac{140}{9} (1 - 0,3091\lambda + 0,2893\lambda^2 + 0,0550\lambda^3 - 0,1648\lambda^4 + 0,0574\lambda^5). \quad (6.1)$$

Essa expressão recupera exatamente o limite $Po = 140/9$ quando $\lambda \rightarrow 0$ e aproxima os resultados numéricos com erro relativo máximo da ordem de 0,0030%. Na escala da Figura 6.3, a

correlação é praticamente indistinguível da curva numérica, tornando-se útil para estimativas rápidas sem a necessidade de resolver novamente o problema de Poisson.

6.5 Tensão de cisalhamento na parede

A distribuição local da tensão de cisalhamento na parede também fornece uma leitura física importante da resistência hidráulica. Para $\lambda = \frac{1}{2}$, a Figura 6.4 mostra a magnitude da tensão de cisalhamento ao longo das três porções da fronteira. A largura das faixas representa a intensidade local da tração viscosa axial sobre a parede.

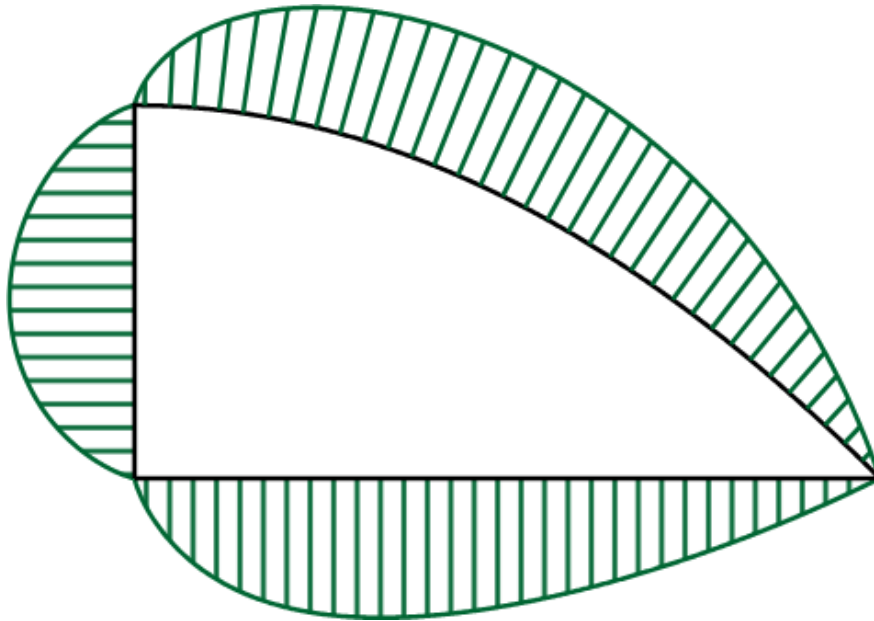


Figura 6.4: Distribuição da tensão de cisalhamento na parede para $\lambda = \frac{1}{2}$. A largura das faixas indica a magnitude local da tensão de cisalhamento axial.

A tensão média de cisalhamento na parede pode ser obtida diretamente pela relação (3.73). A Figura 6.5 mostra a variação de $\bar{\tau}$ com a razão de aspecto para o duto semiparabólico e para o duto quarto-elíptico. Em ambos os casos, $\bar{\tau}$ cresce com λ , mas os valores correspondentes à seção semiparabólica permanecem abaixo daqueles da seção quarto-elíptica em todo o intervalo considerado.

Esse comportamento é consistente com a comparação baseada no número de Poiseuille. A seção semiparabólica apresenta menor resistência hidráulica e, simultaneamente, menor tensão média de cisalhamento na parede quando comparada à seção quarto-elíptica de mesma razão de aspecto.

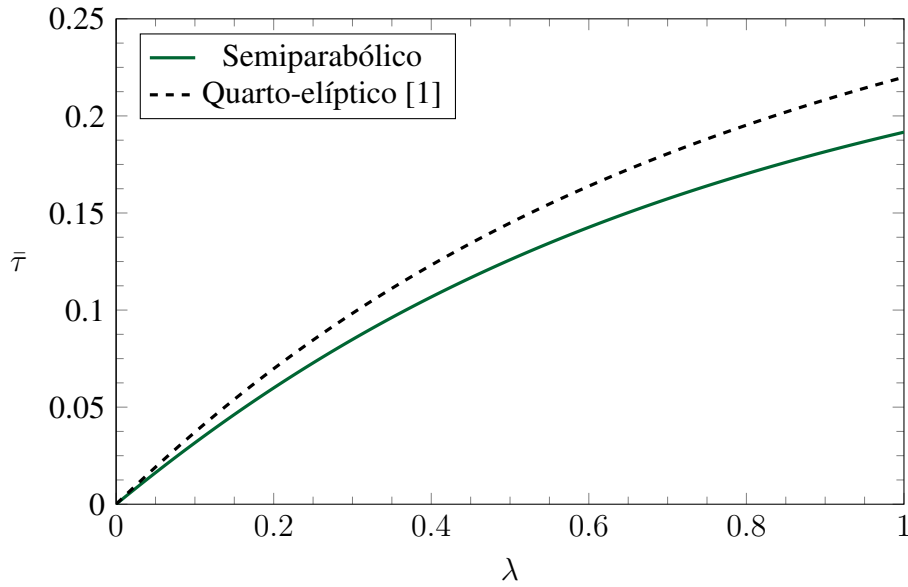


Figura 6.5: Tensão média de cisalhamento na parede $\bar{\tau}$ em função da razão de aspecto λ . A curva do duto semiparabólico é comparada com a do duto quarto-elíptico de Bacelar et al. [1].

6.6 Compacidade e fator de correção geométrica

Duas grandezas geométricas e hidráulicas úteis para comparar famílias de dutos são a compacidade $\mathcal{C}$ e o fator de correção geométrica α , definidos por

$$\mathcal{C} = \frac{P^2}{A}, \quad (6.2)$$

e

$$\alpha = \frac{A^2}{Q}. \quad (6.3)$$

Combinando essas definições com a expressão do número de Poiseuille, obtém-se a identidade

$$\alpha = \frac{\mathcal{C}}{8} Po. \quad (6.4)$$

Essa relação explica por que α e $\mathcal{C}$ tendem a apresentar comportamento quase linear dentro de uma mesma família geométrica: a compacidade captura a variação dominante do perímetro em relação à área, enquanto o número de Poiseuille varia de forma relativamente suave.

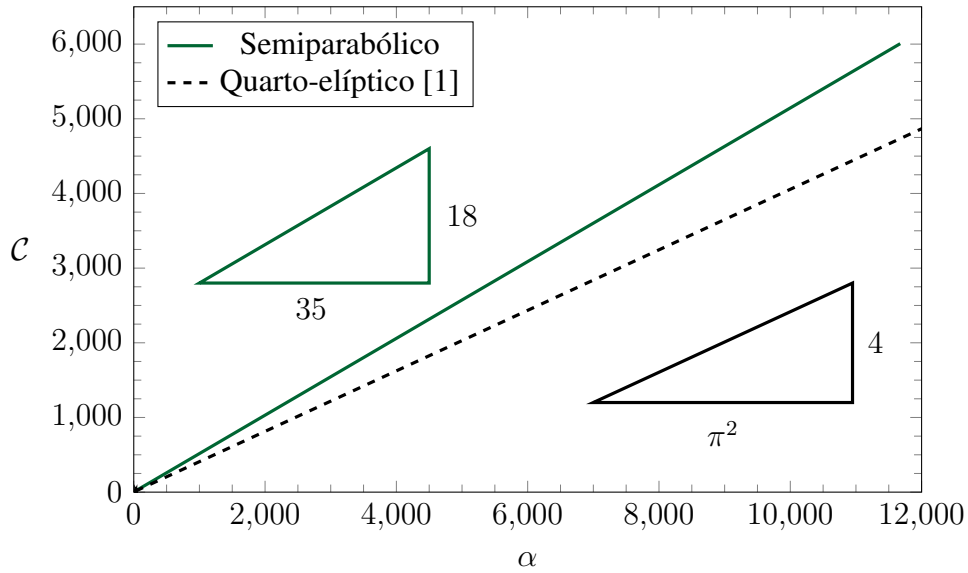


Figura 6.6: Compacidade $\mathcal{C}$ em função do fator de correção geométrica α . A curva do duto semiparabólico é comparada com a do duto quarto-elíptico de Bacelar et al. [1].

No limite $\lambda \rightarrow 0$, tanto o duto semiparabólico quanto o duto quarto-elíptico tornam-se esbeltos. Nessa situação, a área decresce linearmente com λ , enquanto o perímetro molhado permanece de ordem unitária. Como consequência, a compacidade diverge como $1/\lambda$. Para o duto semiparabólico, a análise assintótica fornece

$$\mathcal{C} \sim \frac{6}{\lambda}, \quad \alpha \sim \frac{35}{3} \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (6.5)$$

Logo,

$$\alpha \sim \frac{35}{18} \mathcal{C}, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (6.6)$$

A Figura 6.6 mostra que essa tendência assintótica organiza bem os resultados ao longo de uma ampla faixa de razões de aspecto. Desse modo, a compacidade fornece uma forma simples de relacionar a geometria da seção transversal com a resistência hidráulica, sem a necessidade de resolver novamente o problema diferencial para cada nova configuração.

Capítulo 7

Conclusão

Esta dissertação apresentou uma análise do escoamento de Poiseuille estacionário e totalmente desenvolvido de um fluido newtoniano em dutos de seção semiparabólica. O problema foi formulado a partir das equações de Navier–Stokes, reduzindo-se, sob as hipóteses de escoamento unidirecional e incompressível, a uma equação de Poisson para a velocidade axial na seção transversal. A geometria semiparabólica foi então investigada por três abordagens complementares: uma solução exata em coordenadas parabólicas para um caso particular da razão de aspecto, uma expansão assintótica casada para seções esbeltas e uma solução numérica por elementos finitos para a família completa de geometrias considerada.

A solução exata obtida para $\lambda = \frac{1}{2}$ mostrou o papel central da escolha adequada do sistema de coordenadas. A transformação para coordenadas parabólicas converte o domínio físico curvilíneo em um domínio triangular no plano transformado, preservando a natureza de Poisson do problema, mas tornando sua estrutura mais adequada ao uso de técnicas analíticas. A partir de uma solução particular, a correção harmônica foi construída por reflexão ímpar e separação de variáveis, resultando em uma representação em série para o campo de velocidades. Essa solução permitiu calcular explicitamente a vazão volumétrica, o número de Poiseuille e a tensão média de cisalhamento na parede, além de fornecer uma verificação interna por meio do teorema da divergência.

No limite de pequenas razões de aspecto, a análise assintótica revelou que a aproximação externa regular não é suficiente para satisfazer a condição de não deslizamento na parede vertical. Surge, nesse regime, uma camada localizada próxima ao canto de ângulo reto, na qual as variações nas direções longitudinal e transversal ocorrem na mesma escala. A construção da expansão casada permitiu incorporar essa contribuição de canto e obter expressões assintóticas para a vazão volumétrica e para o número de Poiseuille. O limite $Po \rightarrow 140/9$ foi recuperado quando $\lambda \rightarrow 0$, em concordância com resultados conhecidos para outras geometrias parabólicas.

As simulações numéricas por elementos finitos forneceram uma validação independente das soluções analítica e assintótica. O estudo de convergência mostrou que os resul-

tados para a vazão e para o número de Poiseuille tornam-se estáveis com o refinamento da malha. A solução numérica reproduziu o valor exato obtido para $\lambda = \frac{1}{2}$ e permitiu descrever o comportamento hidráulico da seção semiparabólica em todo o intervalo de razões de aspecto analisado. A comparação com a aproximação assintótica mostrou que, embora sua validade formal esteja restrita ao regime $\lambda \ll 1$, ela permanece precisa em uma faixa mais ampla, apresentando erro inferior a 1% mesmo para $\lambda = \frac{1}{2}$.

Os resultados também permitiram caracterizar a influência da geometria sobre o escoamento. À medida que a razão de aspecto aumenta, o núcleo de maiores velocidades se expande e o perfil axial torna-se menos concentrado. O número de Poiseuille apresenta uma variação suave e não monotônica, com um mínimo raso próximo de $\lambda = 0,63$. Em comparação com o duto quarto-elíptico, a seção semiparabólica apresentou menores valores do número de Poiseuille e da tensão média de cisalhamento na parede ao longo de todo o intervalo estudado, indicando menor resistência hidráulica para razões de aspecto equivalentes. Por outro lado, a razão $w_{\max}/\bar{w}$ mostrou que o perfil de velocidades no duto semiparabólico é mais pronunciado que no caso quarto-elíptico.

Além das grandezas clássicas, foram discutidas a compacidade e o fator de correção geométrica, que fornecem uma leitura complementar da relação entre geometria e resistência hidráulica. A identidade entre essas grandezas e o número de Poiseuille permitiu interpretar a quase linearidade observada entre compacidade e fator de correção geométrica. Essa relação reforça a utilidade de descritores puramente geométricos na estimativa de perdas hidráulicas, especialmente em estudos paramétricos de seções não circulares.

De modo geral, a dissertação amplia o catálogo de soluções para escoamentos internos em geometrias não convencionais e mostra que a seção semiparabólica constitui um caso de referência útil para a mecânica dos fluidos. A combinação entre solução exata, análise assintótica e simulação numérica oferece uma descrição coerente do problema e fornece resultados que podem ser utilizados como base para validação computacional e comparação com outras famílias de dutos. Como extensões naturais, destacam-se o estudo dos problemas de transferência de calor associados, a inclusão de efeitos de entrada, a consideração de condições de deslizamento, a análise de fluidos não newtonianos e a otimização geométrica de seções transversais sob restrições de área e perímetro.

Parte dos resultados aqui apresentados foi publicada na revista *Mechanics Research Communications* [32], em colaboração com pesquisadores da Universidade de Brasília e da King Fahd University of Petroleum & Minerals, reforçando a relevância e a inserção internacional do trabalho desenvolvido.

Referências Bibliográficas

- [1] BACELAR, M. D. et al. Hagen-Poiseuille flow in a quarter-elliptic tube. *Fluids*, v. 8, n. 9, 2023. ISSN 2311-5521. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2311-5521/8/9/247>>.
- [2] SHAH, V.; PATIL, M. Duct designing in air conditioning system and its impact on system performance. *International Research Journal of Engineering and Technology*, v. 6, n. 07, p. 1392–1397, 2019.
- [3] FERRARI, A.; VENTO, O. Influence of frequency-dependent friction modeling on the simulation of transient flows in high-pressure flow pipelines. *Journal of Fluids Engineering*, v. 142, n. 8, p. 081205, 2020.
- [4] GUILIZZONI, M. et al. Numerical simulation of oil-water two-phase flow in a horizontal duct with a venturi flow meter. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 1224, n. 1, p. 012008, 2019.
- [5] OLSON, D.; DART, G. A.; FILLEY, G. F. Pressure drop and fluid flow regime of air inspired into the human lung. *Journal of Applied Physiology*, v. 28, n. 4, p. 482–494, 1970.
- [6] MAZO, A. et al. Simulation of a pulsating flow in a pipe with local constrictions as applied to hemodynamics of blood vessels. *Thermophysics and Aeromechanics*, v. 29, n. 2, p. 249–265, 2022.
- [7] TU, S.-T.; ZHOU, G.-Y. Compact heat exchangers in clean energy systems. In: *Handbook of Clean Energy Systems*. [S.l.]: s.n., 2015. p. 1–20.
- [8] FÜTTERER, C. et al. Injection and flow control system for microchannels. *Lab on a Chip*, v. 4, n. 4, p. 351–356, 2004.
- [9] SHAH, R. K.; LONDON, A. L. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. New York: Academic Press, 1978.
- [10] KORIC, S.; ABUEIDDA, D. W. Data-driven and physics-informed deep learning operators for solution of heat conduction equation with parametric heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 203, p. 123809, 2023.

- [11] YILDIRIM, S. Exact and numerical solutions of Poisson equation for electrostatic potential problems. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2008, n. 1, p. 578723, 2008.
- [12] MURDOCH, L. C.; FRANCO, J. The analysis of constant draw-down wells using instantaneous source functions. *Water Resources Research*, v. 30, n. 1, p. 117–124, 1994.
- [13] EL-SHENAWY, A. The approximate solution of the elastic torsion problem of uniform bar with arbitrary cross-section. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 131, n. 1, p. 2, 2021.
- [14] BAZANT, M. Z. Exact solutions and physical analogies for unidirectional flows. *Physical Review Fluids*, v. 1, p. 024001, 2016.
- [15] ALASSAR, R. S.; ABUSHOSHAH, M. Hagen-Poiseuille flow in semi-elliptic microchannels. *Journal of Fluids Engineering*, v. 134, p. 124502, 2012.
- [16] WANG, C. On viscous flow in semi-elliptic ducts. *Journal of Fluids Engineering*, v. 137, n. 11, p. 114502, 2015. American Society of Mechanical Engineers.
- [17] LOPES, A. B.; SIQUEIRA, I. R. Couette-Poiseuille flow in semi-elliptic channels. *Journal of Fluids Engineering*, v. 144, n. 10, p. 101302, 2022.
- [18] KUNDU, K.; SARKAR, U. Analytical and numerical investigation of Poiseuille flow through semi-elliptic annulus. *Physics of Fluids*, v. 34, n. 8, p. 083603, 2022.
- [19] WANG, C. Y. H1 and H2 forced convection in semi-elliptic ducts. *Journal of Heat Transfer*, v. 144, n. 10, p. 104501, 2022.
- [20] ALASSAR, R. Fully developed forced convection through semi-elliptic ducts. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 37, p. 37–44, 2016.
- [21] SARKAR, U.; KUNDU, K. Study of conduction heat transfer in semi-elliptic cross sections using analytical and bivariate Chebyshev pseudospectral methods. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, v. 149, n. 1, p. 243–264, 2024.
- [22] SU, L. et al. Analytical solutions of slip flow and H1 heat transfer in elliptical microchannels. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 184, p. 108017, 2023.
- [23] KARABULUT, H.; IPCI, D.; CINAR, C. Numerical solution of fully developed heat transfer problem with constant wall temperature and application to isosceles triangle and parabolic ducts. *Applied Thermal Engineering*, v. 102, p. 115–124, 2016.
- [24] VATANKHAH, A. R. Direct integration of gradually varied flow equation in parabolic channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, v. 22, n. 3, p. 235–241, 2011.
- [25] BORENÄS, K.; LUNDBERG, P. Rotating hydraulics of flow in a parabolic channel. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 167, p. 309–326, 1986.

- [26] PROUDMAN, J. Notes on the motion of viscous liquids in channels. *Philosophical Magazine, Series 6*, v. 28, n. 163, p. 30–36, 1914.
- [27] MOSHINSKII, A. I. Liquid flow in prismatic channels resting on a parabolic contour. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, v. 97, p. 1246–1256, 2024.
- [28] SILVA, V. C.; MOREIRA, G. G.; LOPES, A. B. Poiseuille flow through parabolic segment and lens-shaped ducts. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2025.
- [29] WANG, C. Y. *Essential Perturbation Methods*. 1. ed. Cham: Springer, 2023. (Synthesis Lectures on Engineering, Science, and Technology). ISSN 2690-0300. ISBN 978-3-031-26544-0, 978-3-031-26547-1, 978-3-031-26545-7.
- [30] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. 7. ed. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2014.
- [31] HECHT, F. New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*, v. 20, n. 3-4, p. 251–265, 2012. ISSN 1570-2820.
- [32] SILVA, V. C. et al. Poiseuille flow through a semi-parabolic duct. *Mechanics Research Communications*, v. 155, p. 104700, 2026. ISSN 0093-6413. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009364132600090X>>.
- [33] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists*. 7. ed. Oxford: Academic Press, 2013.
- [34] STRAUSS, W. A. *Partial Differential Equations: An Introduction*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 9780470054567.
- [35] Wolfram Research, Inc. *Mathematica, Version 14.0*. 2024. Wolfram Research, Inc., Champaign, IL.

Apêndice A

Torção de uma Barra Prismática por Analogia

A solução obtida para o escoamento de Poiseuille também pode ser reinterpretada em outros problemas governados pela equação de Poisson com termo fonte constante e condição de Dirichlet homogênea. Neste apêndice, exploramos essa analogia no contexto da torção de Saint-Venant de uma barra prismática com a mesma seção semiparabólica.

Considere uma barra prismática homogênea e isotrópica, de módulo de cisalhamento S , cuja seção transversal coincide com o domínio semiparabólico estudado nos capítulos anteriores. A barra é submetida a uma taxa de torção uniforme θ em torno do eixo axial z . Adotamos a mesma escala de comprimento L utilizada na formulação do escoamento. As tensões de cisalhamento são adimensionalizadas por $S\theta L$, e a função de tensão de Prandtl é adimensionalizada por $S\theta L^2$.

Para $\lambda = \frac{1}{2}$, usamos as coordenadas parabólicas (σ, τ) definidas em (3.1), de modo que o domínio físico é transformado no triângulo (3.11). Seja $\psi(\sigma, \tau)$ a função de tensão de Prandtl adimensional. Na teoria de Saint-Venant, as únicas componentes não nulas da tensão de cisalhamento são

$$\tau_{\sigma z} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad \tau_{\tau z} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}. \quad (1)$$

A magnitude adimensional da tensão de cisalhamento é, portanto,

$$\tau = \sqrt{\tau_{\sigma z}^2 + \tau_{\tau z}^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2}. \quad (2)$$

A função de tensão de Prandtl satisfaz

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = -2(\sigma^2 + \tau^2), \quad (3)$$

com condições de contorno

$$\psi|_{\sigma=0} = \psi|_{\sigma=\tau} = \psi|_{\tau=1} = 0. \quad (4)$$

Comparando (3) e (4) com (3.10) e com as condições de contorno do problema de Poiseuille, conclui-se imediatamente que

$$\psi = 2w. \quad (5)$$

Assim, a solução exata para a função de tensão de Prandtl é obtida diretamente da solução de Poiseuille dada em (3.62), bastando multiplicá-la por 2.

Também é útil introduzir a função de empenamento adimensional $\varphi(\sigma, \tau)$, definida de modo que o deslocamento axial seja $u_z = \theta L^2 \varphi$. Em coordenadas parabólicas, as relações cinemáticas de Saint-Venant fornecem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \sigma \tau, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2). \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6) e usando a solução em série (3.62), obtemos, por integração termo a termo,

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2} \sigma \tau (\sigma^2 - \tau^2) \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sinh(n\pi)} [\cos(n\pi\sigma) \cosh(n\pi(1-\tau)) + \cosh(n\pi(1-\sigma)) \cos(n\pi\tau)] \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} [\cos(n\pi\sigma) \cosh(n\pi\tau) + \cosh(n\pi\sigma) \cos(n\pi\tau)] + \varphi_0, \end{aligned} \quad (7)$$

em que A_n e B_n são dados por (3.57) e (3.58). A constante φ_0 é arbitrária e pode ser fixada, por exemplo, pela condição $\varphi(0, 0) = 0$. Essa escolha não altera as tensões, pois apenas as derivadas de φ entram em (6).

Finalmente, seja T o torque adimensional, escalado por $S\theta L^4$. Em termos da função de tensão de Prandtl, tem-se

$$T = 2 \int_0^1 \int_{\sigma}^1 \psi(\sigma, \tau) (\sigma^2 + \tau^2) d\tau d\sigma. \quad (8)$$

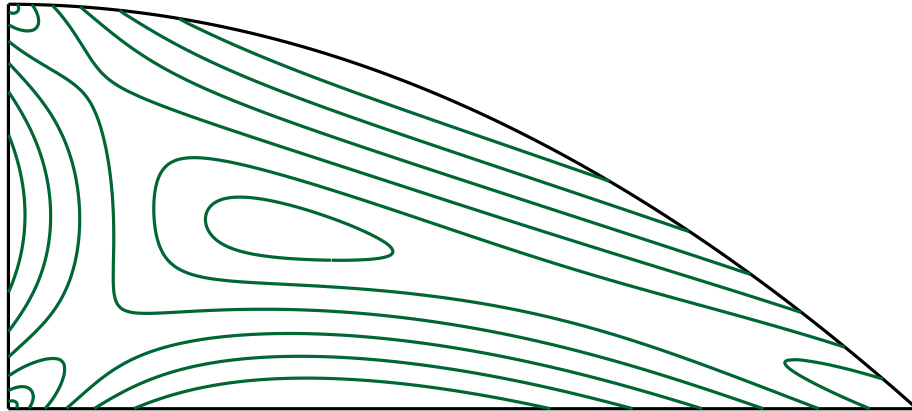
Usando (5) e a definição da vazão em coordenadas parabólicas, dada por (3.63), segue que

$$T = 4Q. \quad (9)$$

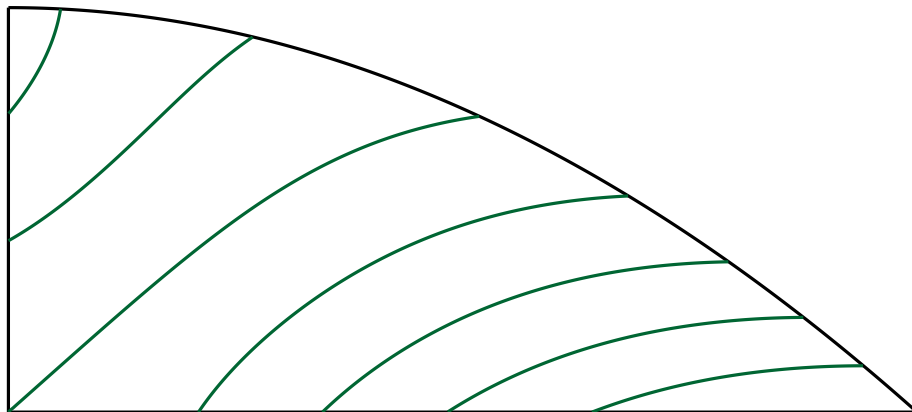
Portanto, a partir de (3.64),

$$T = \frac{71}{5040} - \frac{1}{2\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi)}{n^5} - \frac{3}{2\pi^7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi)}{n^7} - \frac{9}{8\pi^9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi)}{n^9}. \quad (10)$$

A Figura 1 mostra, para $\lambda = \frac{1}{2}$, os contornos da magnitude da tensão de cisalhamento τ e da função de empenamento φ .



(a)



(b)

Figura 1: Grandezas associadas à torção de Saint-Venant para $\lambda = \frac{1}{2}$: (a) magnitude da tensão de cisalhamento τ , com níveis 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25 e 0,30, do contorno mais interno para o mais externo; (b) função de empenamento φ , com níveis $-0,10$, $-0,05$, 0 , $0,05$, $0,10$, $0,15$ e $0,20$, da esquerda para a direita.

Apêndice B

Código Numérico

Listagem 1: Simulação em FreeFEM++

```
1  for (real alpha = 0.5; alpha <= 1; alpha += 1.005){
2
3  // Parameters
4
5  cout.precision(9);
6  func f = -1.;
7
8  // Mesh
9
10 border C01(t=0, 1){x=t; y=(-t^2+1)*alpha; label=1;}
11 border C02(t=0, alpha){x=0; y=t; label=2;}
12 border C03(t=1,0){x=t; y=0; label=3;}
13
14 int n11 = 100;
15
16 mesh Th = buildmesh(C01(-n11) + C02(-n11) + C03(-n11*2));
17
18 // Fespace
19 func Pk = P2;
20 fespace Uh(Th, Pk);
21 Uh u, uh;
22
23 // Macro
24 macro grad(A) [dx(A), dy(A)]
25
26 // Problem
27 problem vPoisson (u, uh, solver = sparsesolver)
28     = int2d(Th) (
29         grad(u)' * grad(uh)
30     )
```

```

31     + int2d(Th) (
32         f * uh
33     )
34     + on(1, 2, 3, u=0)
35     ;
36 vPoisson;
37
38 // Plot
39
40 plot(u);
41
42 // Output
43
44 Uh ff = 1;
45 real areaf = 2*alpha/3;
46 real Pf = 1 + alpha + sqrt(1 + 4*alpha*alpha)/2 + asinh(2*alpha)
47     /(4*alpha);
48 real vaz = int2d(Th) (u);
49 real fre = 8*areaf^3/Pf^2/vaz;
50
51 cout << alpha << " " << maxi << " " << vaz << " " << fre << endl;
52
53 }

```