

**“APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO  
E RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE PLASTICIDADE  
2D ORIENTADA A OBJETO”**

**Eng<sup>o</sup>. MSc. GILBERTO GOMES**

**ORIENTADOR: *PAUL WILLIAM PARTRIDGE***

**CO-ORIENTADOR: *GUILLERMO J CREUS***

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

“APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO E  
RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE PLASTICIDADE 2D  
ORIENTADA A OBJETO”

**ENG<sup>o</sup> MSc. GILBERTO GOMES**

ORIENTADOR: PAUL WILLIAM PARTRIDGE  
CO-ORIENTADOR: GUILLERMO J CREUS

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
PUBLICAÇÃO: E.TD – 002A/06

BRASÍLIA  
10 DE MARÇO DE 2006

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**“APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO E  
RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE PLASTICIDADE 2D  
ORIENTADA A OBJETO”**

**ENG<sup>o</sup> MSc. GILBERTO GOMES**

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR.

APROVADA POR:

---

**PAUL WILLIAM PARTRIDGE, PhD (UnB)**  
(ORIENTADOR)

---

**LUCIANO MENDES BEZERRA, PhD (UnB)**  
(EXAMINADOR INTERNO)

---

**WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA, Dr. Ing. (UnB)**  
(EXAMINADOR INTERNO)

---

**SAMIR MAGHOUS, Dr. Ing (UFRGS/RS)**  
(EXAMINADOR EXTERNO)

---

**LEANDRO PALERMO Jr., PhD (UNICAMP/SP )**  
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA/DF, 10 DE MARÇO DE 2006

## FICHA CATALOGRÁFICA

GOMES, GILBERTO

Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em problemas de Plasticidade 2D Orientada a Objeto.

xxi, 168 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas, 2006).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil.

1. Método de Reciprocidade Dual	2. Plasticidade
3. Método dos Elementos de Contorno	4. POO
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GOMES, G. (2006). Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em Problemas de Plasticidade 2D Orientada a Objeto. Tese de Doutorado, Publicação Nº: E.TD- 002A/06, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, DF, 165 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Gilberto Gomes

TÍTULO DA TESE DE DOUTORADO: Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em Problemas de Plasticidade 2D Orientada a Objeto.

GRAU/ANO: Doutor/2006

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Gilberto Gomes

QI 27 – Lt 08 – Ed. Regional – Apt. 215

71210-268 – Guará II - DF / Brasil

[ggomes@fnde.gov.br](mailto:ggomes@fnde.gov.br)

## AGRADECIMENTOS

Nem tudo na vida pode ter o seu contínuo discretizado, como nos modelos matemáticos. Mas, se fosse possível, hoje, discretizaria o contínuo do modelo de vida apresentado pela minha Avó Joanita (Maíta), que não pôde ver este trabalho concluído. Assim, Vó, revelo com a mais densa discretização possível TODO O MEU AGRADECIMENTO à Senhora, por ter me dado forças para concluí-lo.

Agradeço as pessoas que, de uma forma ou de outra, colaboraram na realização deste trabalho, a saber:

- Em especial, a minha Esposa que me acompanha desde o mestrado - éramos noivos na época – e foi de uma compreensão impar, num período tão comprometedor: 2005, início do casamento e encerramento da tese.
- A minha Tia Fátima, por sua acolhida de mãe... “eita Tia, aprendi a lição, realmente aqui não é Natal”. Aos primos Renata e Fábio, pelo carinho sempre compartilhado, e a Renato, Mercedesinha, José e Rau.
- A família distante, minha mãe, meu Avô, meus tios e meus primos, que sempre perguntavam quando ia terminar essa tese.
- Aos meus segundo pais Darcio e Marlene e meus irmãos Allysson, Thiago e Felipe...vocês foram e são responsáveis por tudo isso.
- Ao meu orientador Paul William Partridge e sua Esposa, pela atenção, força e estímulo dados, para eu não desistir jamais. E ainda, por todo o conhecimento me passado acerca do MEC/MRD.
- Ao Professor Creus, pela grande contribuição que deu nos ensinamentos acerca de plasticidade, além da atenção e compreensão prestadas em vários e quaisquer momentos.
- Ao Professor William, que tantas vezes me ajudou, tirando dúvidas e me mostrando os caminhos acadêmicos da vida.
- Aos Amigos, Pedrão, Miguel e Iara, Glaucenir e Walter, Nélvio, Goiano, Marcelo e Raimunda, que me acompanharam em grande parte dessa trajetória.

- Ao Amigo Ricardo Fiúza, pela atenção e presteza dadas quando precisei usar o ANSYS.
- Aos Amigos de trabalho, em especial a Andréa e Cezar pelas vezes que precisei me ausentar para trabalhar na tese, e a Jack, David, Petrócio, Waldete, Doni e Juliana, que tanto torceram por mim.
- Aos grandes amigos (de copo): Suely, Edson, Érika, Pontual, Carla, Cícera, Adriano e Penadinho, pelos momentos de descontração.
- Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

A Deus, meu criador e minha consciência, meu *Muito Obrigado !!!*

## EPÍGRAFE

“Eu já passei por quase tudo nessa vida  
Em matéria de guarida, espero ainda a minha vez  
Confesso que sou de origem pobre  
Mas meu coração é nobre  
Foi assim que Deus me fez...

Só posso levantar as mãos pro céu, agradecer e ser fiel  
Ao destino que Deus me deu  
Se não tenho tudo que preciso, com o pouco que tenho vivo  
De mansinho lá vou eu

Se a coisa não sai do jeito que eu quero  
Também não me desespero  
O negócio é deixar rolar  
E aos trancos e barrancos lá vou eu  
E sou feliz e agradeço  
Por tudo que Deus me deu...

...Deixo a vida me levar.”

*(Zeca Pagodinho)*

“Se você quiser alguém em quem confiar  
Confie em si mesmo  
Quem acredita sempre alcança.”

*(Renato Russo e Flavio Venturini - Mais Uma Vez)*

## RESUMO

Este trabalho visa dar continuidade a estudos inelásticos anteriores, nos quais a análise de problemas viscoelásticos é realizada através do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com o Método de Reciprocidade Dual (MRD). Aqui, o MEC é aplicado em análise de problemas de plasticidade bidimensional, especificamente em modelos elastoplásticos perfeitos, e, tomando vantagem da sua natureza modular, o MEC, bem como o MRD, são inseridos no contexto da Programação Orientada a Objetos (POO).

Visando-se obter uma formulação válida para um material geral, podendo ter comportamento viscoelástico, plástico ou viscoplástico, este trabalho se limita, inicialmente, a estudar a equação integral de contorno para plasticidade em 2D, mais especificamente para problemas elastoplásticos perfeitos e apenas um critério de escoamento, o de von Mises. Uma vez que esta equação inclui uma integral de domínio devido às forças inelásticas, o Método de Reciprocidade Dual é empregado para levar a mesma ao contorno, sendo adotadas as funções de aproximação do tipo *Polyharmonic Spline* acrescidas de termos polinomiais do Triângulo de Pascal.

Devido sua natureza modular, o MEC pode ser inserido dentro do contexto da Programação Orientada a Objeto (POO), permitindo tratar cada conceito envolvido no processo de modelagem (por exemplo nós, elementos, etc...) como objetos com seus próprios atributos (dados) e comportamentos (métodos). Neste aspecto, este trabalho se resume ao desenvolvimento de um programa computacional – escrito em linguagem C++ - capaz de realizar análises bidimensionais de problemas elásticos e plásticos, empregando o Método dos Elementos de Contorno e o Método de Reciprocidade Dual para tratar os termos não-homogêneos.



## ABSTRACT

This thesis is a continuation of previous studies in inelasticity in which the analysis of viscoelastic problems is done using the Boundary Element Method (BEM) with the Dual Reciprocity Method (DRM). Here, BEM is applied to the analysis of plane plasticity problems considering perfectly plastic materials and, taking advantage of the modular nature of the codes, both BEM and DRM are inserted in a context of Object Oriented Programming (OOP).

In order to obtain a formulation valid for a general material, which can be viscoelastic, plastic or viscoplastic, here, the boundary integral equation for 2D plasticity is initially studied, considering specifically perfect elastoplastic problems and using only the yield criteria of von Mises. Since this equation includes a domain integral due to elastic forces the Dual Reciprocity Method is employed to take this integral to the boundary, adopting polyharmonic spline type approximation functions with polynomial augmentation terms from the Pascal Triangle.

Due to its modular nature, the boundary element method may be inserted in the context of object oriented programming allowing each concept involved in the modeling process, (for example, nodes, elements etc) as objects with their own attributes (data) and behaviors (methods). In this respect this thesis can be summarized as the development of a computer code capable of carrying out bidimensional analysis of elastic and plastic problems using the Boundary Element Method and the Dual Reciprocity Method for treating the inhomogeneous terms. The code is written in the C++ language.

# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	GENERALIDADES.....	1
1.2	HISTÓRICO.....	3
1.2.1	Sobre o Método dos Elementos de Contorno.....	3
1.2.2	Sobre Problemas Inelásticos com MEC.....	5
1.2.3	Sobre o Método de Reciprocidade Dual.....	8
1.2.4	Sobre a Programação Orientada a Objetos.....	9
1.3	MOTIVAÇÃO E OBJETIVO.....	10
1.4	CONTEÚDO DO TRABALHO.....	11
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE.....</b>	<b>13</b>
2.1	CONCEITOS BÁSICOS.....	14
2.1.1	Solução Aproximada.....	14
2.1.2	Resíduos Ponderados.....	14
2.1.3	Formulação Fraca.....	16
2.1.4	Soluções de Contorno e de Domínio.....	16
2.1.5	Equação Integral Básica.....	17
2.2	ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL.....	17
2.2.1	Revisão da Teoria da Elasticidade.....	17
2.3	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	21
2.3.1	Demonstração da Equação Integral.....	22
2.3.2	Identidade de Somigliana.....	23
2.3.3	Soluções Fundamentais.....	26
2.3.4	Implementação Numérica.....	27
2.3.5	Elementos de Contorno.....	30
2.3.6	Sistema de Equações.....	31
2.3.7	Cálculo das Tensões no Contorno.....	32

2.3.8	Cálculo das Tensões em Pontos Internos.....	34
2.3.9	Cálculo das Deformações no Contorno e no Interior.....	35
2.3.10	Descontinuidade de Tensões .....	35
2.3.11	Forças de Corpo.....	36
<b>CAPÍTULO 3    MODELO ELASTOPLÁSTICO.....</b>		<b>38</b>
3.1	CONCEITOS BÁSICOS DE PLASTICIDADE.....	39
3.1.1	Comportamento Plástico dos Materiais.....	39
3.1.2	Tipos de Encruamento.....	41
3.1.3	Critérios de Escoamento.....	42
3.1.3.1	Critério de Tresca.....	44
3.1.3.2	Critério de Drucker-Prager.....	45
3.1.3.3	Critério de Mohr-Coulomb.....	46
3.1.3.4	Critério de von Mises.....	48
3.2	FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA .....	50
3.2.1	Cálculo dos Incrementos Plásticos.....	51
<b>CAPÍTULO 4    O MÉTODO DE RECIPROCIDADE DUAL.....</b>		<b>54</b>
4.1	GENERALIDADES.....	55
4.2	IMPLEMENTAÇÃO DE MRD.....	56
4.2.1	MRD para Elasticidade 2D.....	56
4.2.2	Implementação da Função $f = r^2 \log r$ e os termos acrescidos.....	59
4.2.3	Soluções Particulares.....	60
4.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	62
<b>CAPÍTULO 5    FORMULAÇÃO DO MEC/MRD ELASTOPLÁSTICA.....</b>		<b>66</b>
5.1	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.....	66
5.2	EQUAÇÃO INTEGRAL INELÁSTICA.....	68
5.3	FORMULAÇÃO DO MEC PARA MEIOS ELASTOPLÁSTICOS.....	70
5.3.1	Equação Integral de Contorno em Plasticidade .....	70
5.3.2	Cálculo do Tensor de Tensões em Pontos Internos.....	74
5.4	USO DO MRD PARA ELIMINAR A INTEGRAL DE DOMÍNIO.....	75

5.4.1	Avaliação do Tensor de Tensões em Pontos Internos.....	75
5.4.2	Avaliação do Tensor de Tensões no Contorno.....	76
5.4.3	Cálculo da Divergência do Tensor Plástico.....	77
5.5	PROPOSTAS PARA O CÁLCULO DE $b$ NO CASO PLÁSTICO.....	78
5.5.1	Discretização da Equação Integral Plástica.....	79
5.5.2	Cálculo do Vetor $\dot{D}$ .....	80
5.5.2.1	MRD na sua forma clássica.....	80
5.5.2.2	MRD modificado.....	81
5.6	ALGORITMO INCREMENTAL.....	84
<b>CAPÍTULO 6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....</b>		<b>89</b>
6.1	PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETO.....	89
6.1.1	Principais Conceitos da POO.....	91
6.2	CARACTERÍSTICAS DO PROCESSADOR.....	93
6.3	CLASSES E MÉTODOS DO PROCESSADOR.....	95
6.4	ALGORITMO ELASTOPLÁSTICO ORIENTADO A OBJETO.....	98
6.5	EXEMPLOS VISUAIS.....	102
<b>CAPÍTULO 7 EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>		<b>108</b>
7.1	EXEMPLOS ELÁSTICOS.....	108
7.1.1	Exemplo 1.....	108
7.1.2	Exemplo 2.....	109
7.1.3	Exemplo 3.....	112
7.1.4	Exemplo 4.....	117
7.1.5	Exemplo 5.....	120
7.2	EXEMPLOS ELASTOPLÁSTICOS.....	121
7.2.1	Exemplo 1 (grau constante).....	121
7.2.2	Exemplo 2 (grau linear).....	122
7.2.3	Exemplo 3 (grau linear).....	126
7.2.4	Exemplo 4 (grau maior que linear).....	130
7.2.5	Exemplo 5 (grau maior que linear).....	133

<b>CAPÍTULO 8</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	136
8.1	CONCLUSÕES GERAIS.....	136
8.2	CONCLUSÕES ESPECÍFICAS.....	138
8.2.1	Sobre as Funções ATPS.....	138
8.2.2	Sobre os Exemplos Elásticos.....	139
8.2.3	Sobre os Exemplos Plásticos.....	139
8.3	CONTRIBUIÇÃO.....	140
8.4	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	140
 <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>		142
 <b>APÊNDICE A APLICAÇÃO DE CÉLULAS PARA DETERMINAR O VETOR D.....</b>		147
 <b>APÊNDICE B UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE b.....</b>		150
 <b>APÊNDICE C PRÉ-PROCESSADOR GRÁFICO ORIENTADO A OBJETO.....</b>		153
C.1	GENERALIDADES.....	153
C.2	MODELAGEM E APLICAÇÃO DO MEC.....	154
C.3	MODELO DE CLASSES.....	157
C.3.1	Classe <i>CBEMOO_GIView</i> .....	158
C.3.2	Classe <i>GraphicPrimitives</i> e suas derivadas.....	159
C.3.3	Classe <i>GeometricModel</i> .....	160
C.4	CARACTERÍSTICAS DA INTERFACE GRÁFICA.....	162
C.5	IMPLEMENTAÇÕES.....	163
C.6	SINTAXE.....	165
C.7	EXEMPLOS.....	166

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>	<b>Conteúdo</b>	<b>Página</b>
4.1	Tensões devido carregamento térmico quadrático.....	64
4.2	Deslocamentos e Tensão Normal.....	65
6.1	Diagrama da classe <i>BEM_ELASTIC</i> .....	96
6.2	Diagrama da classe <i>BEM_PLASTIC</i> .....	97
6.3	Diagrama da classe <i>BEM_MRD</i> .....	97
6.4	da classe <i>BEM_SYS</i> .....	98
6.5	Instâncias das classes do Processador.....	98
7.1	Deslocamentos no córner superior direito, ponto (A).....	110
7.2	Deslocamentos dos pontos, em mm.....	113
7.3	Tensões radiais dos pontos, em MPa.....	114
7.4	Deformações radiais dos pontos, em mm.....	114
7.5	Tensão <i>ansys x bemoop</i> .....	119
7.6	Resultados para o ponto interno.....	122
7.7	Erro relativo da espessura da zona elástica.....	124

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Legenda</b>	<b>Página</b>
2.1	Tensões internas, Trações de superfície e Forças de Corpo em 2D.....	18
2.2	Região geral contendo o corpo $\Omega + \Gamma$ com as mesmas propriedades elásticas.....	24
2.3	Corpo 2D dividido em elementos.....	31
2.4	Sistema de coordenadas locais sobre o elemento curvo, onde (i) $x'_3$ é normal à superfície e $x'_1$ e $x'_2$ são tangenciais no ponto P; (ii) $x'_2$ é normal ao contorno no ponto P e $x'_1$ é tangencial.....	33
2.5	Conceito de nós duplos com elementos lineares.....	35
3.1	Comportamento plástico dos materiais.....	39
3.2	Diagrama Tensão-Deformação Uniaxial para um material elastoplástico perfeito.....	40
3.3	Tipos de encruamento.....	41
3.4	coeficientes ( $\phi$ e $c$ ) do critério de Mohr-Coulomb, onde $\sigma_{1f}$ e $\sigma_{3f}$ são a maior e menor tensão principal de ruptura.....	47
3.5	Elipse de von Mises para o estado de tensão plana ( $\sigma_3 = 0$ ).....	49
4.1	Esquema de Representação dos termos acrescentados da função adotada.....	56
4.2	Geometria para problema com carregamento cúbico e sinusoidal...	63
4.3	Resultados de deslocamentos para o ponto na extremidade livre da viga.....	63
4.4	Geometria para o problema de carregamento térmico.....	64
4.5	Modelo discreto com 7 pontos internos.....	64
4.6	Resultados de deslocamentos e tensões para carga gravitacional....	65
5.1	Algoritmo para Análise Elastoplástica.....	85
6.1	Um programa constituído de quatro objetos interagindo.....	91
6.2	Diagrama esquemático para representar classes.....	92
6.3	Arquitetura de um sistema de análises de engenharia.....	93
6.4	Diagrama de classes do Processador.....	95
6.5	Interação dos Objetos do Processador.....	99
6.6	Fluxograma de interação dos métodos do Processador.....	100
6.7	Geração do modelo geométrico.....	103
6.8	Imposição das condições de contorno do tipo Newman.....	103
6.9	Imposição das condições de contorno do tipo Dirichler.....	104

6.10	Geração da malha de elementos de contorno.....	104
6.11	Geração da malha de Pontos internos.....	105
6.12	Aplicação das propriedades dos materiais.....	105
6.13	Geração do Arquivo de dados.....	106
6.14	Programa de Análise sendo executado.....	106
6.15	Matlab executando um mapeamento.....	107
7.1	Geometria e Discretização do modelo para o exemplo 1.....	109
7.2	Tensões, Deformações e Deslocamentos sobre a linha AB.....	109
7.3	Geometria e Discretização do modelo para o exemplo 2.....	110
7.4	Mapeamento dos deslocamentos nas direções X e Y, em mm.....	111
7.5	Mapeamento das tensões na direção X, em MPa.....	111
7.6	Mapeamento das deformações na direção X, em mm.....	112
7.7	Placa circular com furo no centro submetida à pressão interna.....	112
7.8	Modelos discretos para o exemplo 3.....	113
7.9	Deslocamentos dos pontos, em mm.....	113
7.10	Gráficos das Tensões radiais dos pontos.....	114
7.11	Gráficos das Deformações radiais dos pontos.....	114
7.12	Discretização com malha interna de pontos.....	115
7.13	Mapeamento das tensões radiais.....	115
7.14	Mapeamento dos deslocamentos radiais.....	116
7.15	Distribuição das tensões elásticas – $\text{kgf/cm}^2$ .....	116
7.16	Deslocamentos radiais – cm.....	117
7.17	Geometria (a) e Discretização (b) do modelo com <i>BEMOOP</i> e malha do MEF (c) com <i>ANSYS</i> .....	118
7.18	Mapeamento das tensões na direção Y.....	118
7.19	Tensão média sobre os pontos da linha AB.....	119
7.20	Mapeamento dos deslocamentos na direção Y.....	120
7.21	Deslocamentos <i>Bemoop X Ansys</i> .....	120
7.22	Geometria e Discretização da placa quadrada com furo.....	121
7.23	Mapeamento de tensões e deslocamentos.....	122
7.24	Modelo discreto para o exemplo 2.....	123
7.25	Distribuição da Tensão de von Mises em relação à Espessura da Zona Elástica.....	123
7.26	Fronteira Plástica para 80 passos de carga.....	124
7.27	Tensões e Deformações no início do escoamento.....	125
7.28	Mapeamento da distribuição de tensões elastoplásticas.....	126



7.29	Tensões e Deslocamentos Radiais no início do escoamento.....	127
7.30	Distribuição de Tensões na direção radial.....	127
7.31	Distribuição de Tensões para o exemplo 3.....	128
7.32	Deslocamentos de um ponto da superfície externa.....	129
7.33	Deslocamentos de um ponto na superfície externa.....	129
7.34	Mapeamento das tensões de von Mises.....	130
7.35	Resultados de Tensão <i>ansys</i> x <i>bemoop</i> .....	130
7.36	Mapeamento dos Deslocamentos.....	131
7.37	Resultados de Deslocamentos <i>ansys</i> x <i>bemoop</i> .....	131
7.38	Mapeamento das Deformações Plásticas.....	132
7.39	Deformação Plástica <i>ansys</i> x <i>bemoop</i> .....	132
7.40	Modelo discreto da placa com furo.....	133
7.41	Tensão (MPa) e Deslocamento (mm) no início do escoamento.....	133
7.42	Distribuição das tensões de von Mises ao longo de AB.....	134
7.43	Mapeamento da tensão de von Mises.....	134
7.44	Geometria e Discretização do exemplo 5.....	135
7.45	Pontos plásticos obtidos para vários valores de $2\sigma_a/\sigma_o$ .....	135
C.1	Representação Esquemática de uma Semi-Aresta.....	155
C.2	a) Armazenamento da hierarquia das entidades na estrutura de dados utilizada; b) utilização de aresta nulas para representar faces contendo furos.....	156
C.3	Características gerais dos modelos planos.....	157
C.4	Diagrama esquemático para representar classes.....	158
C.5	Representação esquemática da classe <i>CBEMOO_GIView</i> .....	159
C.6	Representação hierárquica da classe <i>GraphicPrimitives</i> .....	159
C.7	Representação esquemática da classe <i>Point</i> .....	159
C.8	Representação esquemática da classe <i>Line</i> .....	160
C.9	Representação esquemática da classe <i>Loop</i> .....	160
C.10	Representação esquemática da classe <i>Face</i> .....	160
C.11	Representação esquemática da classe <i>GoemetricModel</i> .....	161
C.12	Arquitetura de um Sistema completo de Engenharia.....	162
C.13	Seqüência de atualização do modelo plano.....	163
C.14	Nível Hierárquico do Programa.....	164
C.15	Esquema de Funcionamento da Interface Gráfica.....	166
C.16	Visualização dos principais elementos do modelo MEC.....	166
C.17	Visualização da atualização do modelo.....	167

C.18	Visualização dos atributos físicos.....	168
C.19	Visualização das propriedades dos materiais.....	168
C.20	Visualização da malha de elementos de contorno.....	168

# LISTA DE SÍMBOLOS

## 1. Letras Maiúsculas como símbolos principais

A	número de termos acrescentados, matriz do sistema elástico
$D_{ijk}^*$	solução fundamental para tensões
$\hat{D}_{ijk}^*$	solução particular para tensões
E	módulo de Young
F	matriz usada em MRD
$I_1, I_2$	primeiro e segundo invariantes de tensão
L	número de pontos internos
N	número de nós no contorno
P	matriz que contém as componentes do vetor tensão
$J_2$	segundo invariante do tensor desviatório
$S_{ijk}^*$	solução fundamental para deformações
$S_{ij}$	tensor desviador
U	matriz que contém as componentes do vetor deslocamento

## 2. Letras Minúsculas como símbolos principais

a, x1	raio interno
b, x2	raio externo
$b_i$	componentes do vetor densidade de força de corpo
$\dot{b}_i^p$	vetor da pseudo-força de corpo
$e_{ij}$	parte desviadora do tensor deformação
$f$	função
$n$	ordem das funções Polyharmonic Spline
$n_i$	componentes do vetor normal a superfície (cossenos diretores)
$p_i$	componentes do vetor de forças de superfícies
$\hat{p}_{ij}$	solução particular para o vetor tensão

$\dot{p}_i^p$	vetor da pseudo-força de superfície
$p_{ij}^*$	solução fundamental para o vetor tensão
$r$	distância entre dois pontos, raio
$s_{ij}$	parte desviadora do tensor de tensões
$u$	deslocamento
$u_i$	componentes do vetor deslocamento
$\tilde{u}_i$	componentes de deslocamento prescrito
$\hat{u}_{ij}$	solução particular para o vetor deslocamento
$u_{ij}^*$	solução fundamental para o vetor deslocamento
$vet\_s$	vetor das componentes de tensão atualizado
$vet\_u$	vetor das componentes de deslocamentos atualizado
$vet\_d$	vetor das componentes de deformação atualizado
$vet\_t$	vetor das componentes de forças de superfície
$x_i$	coordenadas cartesianas
$\dot{w}^p$	função auxiliar para MRD modificado

### 3. Letras Gregas Maiúsculas

$\Omega$	Domínio do Problema Geométrico
$\Gamma$	Contorno da Geometria

### 4. Letras Gregas Minúsculas

$\alpha_h$	vetor dos coeficientes do MRD
$\delta$	função delta de Dirac
$\delta_{ij}$	função delta de Kronecker
$\varepsilon_o$	parte esférica do tensor de deformações
$\varepsilon_{ij}$	componentes do tensor deformação
$\phi^{(n)}$	funções de interpolação
$\lambda$	fator de redução de carga

$\mu$	módulo cizalhante
$\sigma$	tensão
$\sigma_{ij}$	componentes do tensor de tensões
$\sigma_o$	parte esférica do tensor de tensões, tensão de escoamento
$\sigma_{eq}^{\max}$	tensão equivalente máxima de von Mises
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\xi$	coordenada generalizada

## 5. Símbolos Matemáticos

$\int$	integral
$\sum$	somatória
$A_{,i}$	derivada parcial de A com relação a $x_i$
$dx$	diferencial de $x$
$\frac{\partial}{\partial x}$	derivada parcial com relação a $x$
$\frac{\partial r}{\partial n}$	derivada normal

## 6. Abreviaturas

<i>ATPS</i>	<i>Augmented Thin Plate Spline</i>
MRD	Método de Reciprocidade Dual
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRM	Método de Reciprocidade Múltipla
POO	Programação Orientada a Objeto

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 GENERALIDADES

Analisar o comportamento das estruturas submetidas a cargas externas tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores desde o início do século XX. Pela grande complexidade que apresenta este tipo de análise, através da mecânica teórica (Gurtin, 1981 e Sokolnikoff, 1956), recorria-se, freqüentemente, a procedimentos baseados em hipóteses que simplificavam muito os princípios desta ciência. Estes procedimentos eram combinados com formulações empíricas, feitas a partir de uma grande quantidade de resultados experimentais. Assim, na primeira metade do século XX, com estes procedimentos simplificados, somente alguns dos inumeráveis problemas encontrados no projeto estrutural podiam ser resolvidos.

Com o advento do computador, meados dos anos 50, técnicas especiais, baseadas em procedimentos numéricos de aproximação de funções, tornaram a análise estrutural possível, sem, contudo, abrir mão de tantas simplificações. Como exemplos dessas técnicas citem-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia e Dominguez 1989, Kane 1994). Estas técnicas representam atualmente, para alguns casos de projeto e verificação estrutural, uma necessidade de uso em vez de somente uma alternativa, permitindo desenvolver estudos muito mais realistas sobre o comportamento das estruturas do que os realizados no passado com inúmeras simplificações.

O MEF faz a análise de domínio complexo, dividindo-o em pedaços ou elementos cuja geometria é mais simples, em geral de forma triangular ou retangular. Para cada elemento escreve-se uma equação matricial relacionando forças nodais com deslocamentos. Fazendo-se a montagem das equações matriciais para todos os elementos em uma equação global, válida para a estrutura como um todo, e, após aplicação das condições de contorno, obtém-se a solução para deslocamentos a partir dos quais calculam-se as tensões, sendo que estas têm uma ordem de precisão menor.

No MEC, a discretização é feita em elementos apenas no contorno do problema, e estes só servem para realizar a integração das equações para cada ponto, não havendo, pois, uma equação para cada elemento, como no caso do MEF. As variáveis consideradas - deslocamentos e trações de superfícies - são interpoladas independentemente, resultando numa mesma ordem de precisão. As trações de superfície são equivalentes à intensidade de carga aplicada, diferindo do conceito de forças nodais equivalentes empregadas no MEF. Para obter tensões em pontos internos, avalia-se a equação integral sobre o contorno novamente, utilizando valores ora conhecidos de deslocamento e trações de superfície, obtendo-se assim a mesma ordem de precisão dos deslocamentos.

O MEC tem a vantagem de diminuir a dimensionalidade do problema em um, o que leva a trabalhar com um volume menor de dados. As respostas têm uma precisão melhor do que aquelas fornecidas pelo MEF, embora as matrizes consideradas são cheias ao invés de bandas, e portanto, pode haver um aumento no tempo de processamento.

Na sua forma pura, o MEC se restringe a problemas para os quais se conhece uma solução fundamental para o operador diferencial, no intuito de se obter a equação integral equivalente em uma forma “somente no contorno”. Esta restrição limita o método a problemas lineares. Em viscoelasticidade, por exemplo, pode-se obter uma formulação deste tipo empregando a transformada de Laplace, o que limita a aplicação a problemas viscoelásticos sem **envelhecimento** (fenômeno relacionado com a idade de aplicação de tensões ou deformações de materiais como o concreto, por exemplo) (Creus, 1986).

Problemas mais gerais podem ser considerados incluindo uma integral de domínio, isto é, um termo não levado ao contorno pela solução fundamental na formulação. Tais termos incluem as forças de corpo usuais em elasticidade, e também as pseudo forças de corpo devido a efeitos inelásticos e outros.

Nos trabalhos iniciais com MEC, integrais de domínio foram resolvidas usando células internas (Telles, 1981). O uso de células é uma técnica utilizada para realizar o processo de integração dos termos do domínio, mas exige uma discretização do domínio que a torna pouco atrativa, devido à perda do caráter principal do MEC de discretização somente no contorno.

Estes problemas têm sido resolvidos, nos últimos anos, com o desenvolvimento de diversos métodos, dentre eles o Método de Reciprocidade Dual (MRD) (Partridge, Brebbia e Wrobel, 1992) que visam transformar a integral de domínio em integral de contorno, empregando uma solução fundamental correspondente a uma equação simplificada. Em viscoelasticidade, por exemplo, uma equação elástica é empregada e os termos de domínio são tratados mediante um procedimento que envolve o desenvolvimento em séries, empregando funções de aproximação e aplicando os princípios de reciprocidade. Este método foi proposto por Nardini e Brebbia (1982), e desde então diferentes pesquisadores têm estendido o mesmo a diversas aplicações da engenharia.

No presente trabalho, inicialmente estende-se a análise com MRD a problemas de plasticidade. Para tanto é necessário calcular o tensor de tensões em todos os pontos utilizados na discretização, tanto no interior quanto no contorno. Para prosseguir faz-se necessário obter a divergência deste tensor em cada uma dos pontos. Como mostrado em Sensale (1997), o uso de MRD na sua forma clássica permite o cálculo de divergência com precisão apenas para casos onde a pseudo força de corpo, devido os efeitos inelásticos, tem variação até linear. Para problemas com variação maior, é necessário modificar o MRD no intuito de se evitar o cálculo da derivada.

## 1.2 HISTÓRICO

### 1.2.1 Sobre o Método dos Elementos de Contorno

A origem do Método dos Elementos de Contorno (MEC) se deve aos trabalhos extraídos de pequenos grupos de pesquisadores, nos anos 60, sobre aplicação das equações integrais de contorno para problemas de potencial e de análise de tensão. Os primeiros conceitos (Jaswon e Symm, 1963) foram baseados no uso de uma série de fontes sobre o contorno, cujos valores eram assumidos constantes numa dada região ou elemento. Esta representação por fonte, baseada em dipolos, era também conhecida como método indireto do elemento de contorno. Mais recentemente, o método direto, baseado no uso de variáveis físicas tais como potencial e fluxo ou deslocamentos e trações, tem superado a técnica indireta. Porém, em problemas de análise de tensões, ambas as técnicas proporcionavam



resultados pobres, o que levou ao enfraquecimento do uso da formulação original por parte dos engenheiros e cientistas.

Somente em meados de 1970, o método dos elementos de contorno é visto como uma excelente alternativa ao método dos elementos finitos em muitos problemas práticos. A partir desse ponto de vista, nasceu a idéia de se usar elementos de contorno curvilíneos representando variáveis em termos de funções de interpolação, o que possibilitou à técnica o mesmo grau de versatilidade dos elementos finitos, na representação da geometria do problema.

Aplicações de Equações Integrais na Elasticidade têm sido usadas com sucesso, desde o século XIX, no tratamento de problemas de mecânica dos fluidos, como alternativa à resolução de equações diferenciais (Chaves, 1997). Em 1886, Somigliana apresentou a equação integral que estabelece a relação entre força e deslocamento no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos, conhecida como Identidade de Somigliana. Esta formulação é dita direta, pois os deslocamentos e forças do contorno (funções de densidade da equação integral) são tomados com seus valores reais, sem aproximações.

Fredholm propôs em 1903 a formulação indireta, na qual as funções densidades são aproximadas. No seu trabalho sobre a aplicação das equações integrais em problemas de potencial, o contorno é dividido em partes, sobre as quais aproximam-se as funções densidade por funções fictícias (Becker, 1992). Os trabalhos de Somigliana e Fredholm formam a base para o Método dos Elementos de Contorno (MEC), sendo o ponto de partida para muitos pesquisadores no estudo das equações integrais em problemas de potencial e elasticidade, dentre eles Kellog (1929), Muskhelishvili (1953) e Kupradze (1965).

Com o advento dos computadores, o processo numérico é abordado por Jaswon (1963) e Symm (1963), com trabalhos a cerca da solução numérica de problemas regidos pela equação de Laplace. Suas aproximações consistiam em elementos retos onde as funções de potencial eram assumidas constantes no contorno e as integrais de contorno eram avaliadas pela regra de Simpson, com exceção das integrais singulares que eram avaliadas analiticamente. Rizzo (1967) publicou um trabalho explorando a semelhança entre os problemas de potenciais e a teoria clássica da Elasticidade, no qual vários

problemas de elasticidade são resolvidos por uma aproximação numérica idêntica a usada por Jaswon. Este trabalho foi expandido por Cruse (1969) para problemas tridimensionais e, mais tarde por Lachat (1975), que obteve melhores resultados usando, como funções densidade, polinômios de grau mais alto. Isto desencadeou diversos trabalhos com uso de elementos isoparamétricos quadráticos, que permitiam aproximar, tanto a geometria do contorno quanto as funções densidade, através de funções quadráticas.

### 1.2.2 Sobre Problemas Inelásticos com MEC

Os primeiros trabalhos referentes a problemas inelásticos surgiram a partir dos anos 70. A primeira contribuição neste assunto se deve a Sweldlon e Cruse (1971), com a apresentação da equação integral de contorno para formulação direta do MEC, para problemas tridimensionais. Nesta, os autores observaram a existência de uma integral de domínio que levava em conta a contribuição da deformação plástica na formulação. Dando continuidade a este trabalho, Riccardella (1973) implementou o critério de escoamento de von Mises (encruamento isotrópico) e assumiu que as tensões eram constantes nas células de domínio, em um processo de solução não iterativo. Porém, esta solução requeria que o número de nós no contorno fosse igual ao número de nós no domínio (Lee e Fenner, 1986), o que dificultou a extensão da técnica para uso de polinômios de grau mais alto nas células de domínio.

Mendelson (1973), nesse mesmo período, apresentou e discutiu diferentes formulações de integrais para problemas elastoplásticos. Isto contribuiu para que Mendelson e Albers (1975) apresentassem uma formulação para materiais perfeitamente plásticos e com encruamento. Resultados numéricos para um problema de torção de uma barra com secção transversal quadrada foram apresentados dentro do contexto da formulação direta e da teoria de deformações plásticas.

Algumas correções nas formulações para o estado plano de deformação foram concebidas por Mukherjee (1977), onde se sugerem modificações no kernel das integrais de deformações plásticas de Mendelson e Albers (1975). Tais modificações são inteiramente baseadas na incompressibilidade da deformação plástica e, conseqüentemente, não podem ser válidas para problemas de plasticidade nos quais a dilatação plástica é possível ocorrer.

Bui (1978) revelou a maior contribuição direcionada à formulação inelástica do método dos elementos de contorno, apresentando um conceito apropriado para diferenciar a integral singular do termo inelástico. Bui, através de correções em problemas tridimensionais, considerou que as derivadas das funções núcleo só poderiam ser feitas diretamente, se fosse obedecida uma relação entre o número de dimensões do problema e o grau de singularidade, evitando-se a inclusão de termos extras.

Em 1979, Telles e Brebbia produziram a formulação completa do MEC para problemas de plasticidade em duas e três dimensões, considerando tensões em pontos internos e incluindo as derivadas das integrais singulares de domínio (com base no trabalho de Bui). Um ano depois, Telles e Brebbia (1980) empregaram a formulação direta do MEC para resolver alguns problemas elastoplásticos bidimensionais (plano das tensões e das deformações). Nesse, uma forma de “deformação inicial” do termo inelástico foi considerado e a formulação permitia tratar deformação plástica incompressível usando o critério de escoamento de von Mises. Funções de interpolação lineares foram usadas tanto para os elementos de contorno quanto para as células internas na implementação numérica. Este trabalho conferiu a potencialidade dos elementos de contorno para análises inelásticas comparando os resultados com soluções de elementos finitos para os mesmos problemas.

Ainda dos mesmos autores (Telles e Brebbia, 1980), uma formulação em “tensões iniciais” foi apresentada com quatro diferentes critérios de escoamentos, onde a possibilidade de dilatação plástica era considerada, além de outras alternativas de formulações diretas do MEC, empregando forças de corpo e trações de superfície fictícias.

Somente em 1981, a primeira formulação, contendo uma solução fundamental que satisfaz as condições de contorno particulares, é apresentada por Telles e Brebbia (1981). Nesse trabalho, problemas de plasticidade finita e semi-infinita são resolvidos sem a discretização do contorno sobre a superfície de tração livre do semi-plano.

Quanto ao processo de integração numérica, melhorias foram conseguidas com o uso de aproximações quadráticas, tanto no contorno quanto no domínio. Lee (1983) apresentou um estudo sobre o MEC utilizando elementos quadráticos, baseado no trabalho de Axelsson e Samuelsson (1979), propondo vários métodos de integração numérica, os

quais incluíam um tratamento para as integrais singulares de domínio e um algoritmo de aceleração de convergência para as iterações.

Lee e Fenner (1986), tratam o problema plástico realizando integrais sobre o domínio. Através de um processo incremental e iterativo, determina-se a contribuição das deformações plásticas aos deslocamentos e forças no contorno do corpo em estudo. Por outro lado, necessita-se discretizar o interior do corpo para realizar as integrais de domínio, o que torna o procedimento pouco atrativo. Na mesma abordagem, Lou e Zhang (1992) trataram o problema elastoplástico em um meio composto por dois materiais e, Chen e Nisitani (1997) estudaram o efeito da variação do coeficiente de Poisson.

Henry e Banerjee (1988) propuseram uma função particular que satisfaz a equação diferencial dos problemas elastoplásticos. Nesse trabalho, usou-se o conceito de funções complementares e de integrais particulares, e as integrais de domínio eram transformadas em integrais de contorno através destas.

Na análise de problemas viscoelásticos através do MEC (no domínio do tempo) uma formulação empregando forças de corpo e tensões de contorno fictícias, tem sido empregada. Esta formulação se deve a Brebbia, Telles e Wrobel (1984) na qual a inelasticidade do material se traduz no aparecimento de forças de corpo fictícias que levam a integrais de domínio e que podem ser calculadas mediante uma discretização em células ou de alguma maneira levadas ao contorno.

Uma formulação geral do MEC para análises de tensões de corpos, com relações constitutivas viscoelásticas com envelhecimento, tais como o concreto, é apresentada por Sensale, Partridge e Creus (2001). Nesta, os autores mostram que, em casos que se tem módulo de Poisson constante, a integral de domínio desaparece ou é levada ao contorno pelo Método de Reciprocidade Dual. No caso de análises viscoelásticas de materiais sem envelhecimento, a transformada de Laplace é usada. Para o caso de materiais como concreto, compostos de matriz polimérica e outros materiais encontrados em problemas da Bio-engenharia, que são dependentes da idade, a transformada de Laplace não se aplica. Neste caso, uma formulação inelástica geral, dada por Brebbia et al (1984), deve ser empregada.

Os autores optaram por utilizar um dos três métodos dados em Brebbia et al (1984), que é o método das pseudo-forças de corpo e pseudo trações de superfícies. Este método trata os dois termos da formulação integral de contorno, um dos quais é uma integral de domínio, isto é, um termo não levado ao contorno pela solução fundamental, e que requer um tratamento especial, como por exemplo o MRD (Partridge, Brebbia e Wrobel, 1992) , para transformar a integral de domínio em integral de contorno. No entanto, o DRM usado difere dos procedimentos usuais em que o termo de domínio a ser transformado contém tensões em vez de seus gradientes. As funções do tipo *ATPS* (Golberg e Chen, 1994) também são empregadas, em vez das funções radiais usuais.

### 1.2.3 Sobre o Método de Reciprocidade Dual

Uma das dificuldades encontrada pelos pesquisadores e apreciadores do MEC era a extensão da técnica a problemas de natureza não-linear ou de dependência do tempo. Nesses tipos de problemas, havia a necessidade de se discretizar o domínio em uma série de células internas para tratar os termos não levados ao contorno pela aplicação da solução fundamental, tais como os termos não-lineares. Esta discretização adicional requeria um número maior de dados para executar o problema, bem como uma complexidade de operações extras envolvidas, o que tornava a técnica pouco atrativa nestes casos. Surgiram então vários métodos, propostos por diversos autores, com enfoque no tratamento das integrais de domínio, dentre os quais citem-se: Integração Analítica, Expansões de Fourier, Técnica do Tensor de Galerkin, Método de Reciprocidade Múltipla e Método de Reciprocidade Dual.

A Técnica do Tensor de Galerkin talvez seja a primeira técnica proposta com esse objetivo. Embora bastante simples, esse é um procedimento elegante e não exige nenhum tipo de aproximação no domínio para a quantificação do termo. Nessa, uma primitiva, uma solução fundamental de alta ordem e Identidade de Green são usadas para transformar certos tipos de integrais de domínio em integrais de contorno equivalente. Integrais do tipo “força de massa”, onde a densidade é constante, são adequadas para tal procedimento.

O Método da Reciprocidade Múltipla (MRM), é uma extensão da Técnica do Tensor de Galerkin que se utiliza de várias soluções fundamentais de alta ordem. Embora,

em princípio, aplicável a vários tipos de problemas, não tem sido aplicado a problemas de não-linearidade em geral.

O Método de Reciprocidade Dual (MRD) foi apresentado por Nardini e Brebbia em 1982 para problemas elastodinâmicos e estendido por Wrobel e Brebbia para problemas de difusão em 1986. Mais tarde, o método foi estendido a problemas mais gerais por Partridge e Brebbia e Partridge e Wrobel em 1989/90. A essência do MRD é construir soluções particulares para resolver problemas não-lineares ou dependentes do tempo, de forma que estas possam representar qualquer distribuição interna de fonte, seja sobre todo o domínio ou em parte dele.

#### 1.2.4 Sobre a Programação Orientada a Objetos

Durante anos (a programação tem apenas 40 anos de idade) os desenvolvedores de programas de computador usufruíram a conhecida programação procedural, na qual os programas são vistos como uma série de ações efetuadas sobre um conjunto de dados. Após o advento da programação estruturada (C e Pascal são exemplos de linguagem de programação estruturada), que proporcionou uma abordagem sistemática à organização dos “*procedures*” e ao gerenciamento de grandes quantidades de dados, a programação sofreu uma dramática evolução.

A partir da idéia de “reusabilidade”, ou reutilização, surgiu a Programação Orientada a Objetos (POO), cuja essência é tratar os dados e os procedimentos que atuam sobre estes como um “objeto”, uma entidade independente, com uma identidade e certas características próprias. Isto é, na POO, procura-se definir objetos (entidades envolvidas no sistema) e suas relações e, conseqüentemente, os serviços que estes devem prestar e como devem se comunicar para realizar as funções do sistema. Um exemplo de linguagem de programação que suporta totalmente a POO é a conhecida linguagem C++, desenvolvida por Stroustrup (1990 e 1991). Outros autores têm estudado a POO no âmbito da linguagem C++, como Lyberty (1998), Dorfman(1995) e Irvine (1996). Gomes (2000), em sua dissertação de mestrado, desenvolveu um pré-processador gráfico para modelagem bidimensional de elementos de contorno, fundamentado na Programação Orientada a Objeto, que será utilizado na geração das malhas e na montagem do arquivo de entrada de

dados, necessários para alimentar o programa de processamento desenvolvido no trabalho presente.

### 1.3 MOTIVAÇÃO E OBJETIVO

A investigação baseada em qualquer técnica numérica, nutre-se necessariamente de análises experimentais que corroboram sua validade. Desta forma, os estudos numéricos tratam de reproduzir os resultados experimentais desenvolvidos em pequena escala (ensaios de laboratório) e os extrapolam numa escala maior (nível estrutural). Esta possibilidade de estender o conceito de um comportamento físico simples a um complexo é possível graças ao uso de uma formulação matemática, capaz de descrever o funcionamento físico macroscópico dos sólidos, denominado “modelo constitutivo de um material”. Os fundamentos da aplicação prática destes modelos de simulação de comportamento, encontram-se na união da “mecânica teórica” com as “técnicas numéricas”, compreendendo o que se conhece por “mecânica computacional”.

Diversos são os materiais de importância tecnológica que apresentam equações constitutivas dependentes de fatores que influem no seu comportamento. O concreto, por exemplo, que apresenta características mecânicas dependentes do tempo, pode ser modelado com relações constitutivas viscoelásticas (Masuero, 1992), nas quais a resposta do material a uma dada tensão ou deformação depende fundamentalmente do intervalo de tempo entre o instante considerado e o instante de aplicação das tensões ou deformações. E ainda, quando submetido a cargas externas, sofre deformações e tensões que podem alterar a sua configuração original, quando parte da deformação no descarregamento é retida. Este material assume então um comportamento plástico caracterizado pela dependência na história de deformações, consequência do histórico do carregamento.

A Computação Gráfica vem assumindo um papel importante como ferramenta de suporte no desenvolvimento de programas computacionais no campo da engenharia, principalmente na área de modelagem geométrica, onde se requer estudos e desenvolvimentos de algoritmos eficientes e de estruturas de dados sofisticadas (Gomes, 2000). Isto requer inovação tanto na ferramenta de programação utilizada quanto na forma em que se programa. Sob este aspecto, uma nova filosofia de programação vem se

destacando: a Programação Orientada a Objetos (POO) (Booch, 1994), onde se procura definir os objetos – entidades envolvidas no sistema – e suas classes e relações, ao invés de decompor o programa em procedimentos ou funções.

O objetivo deste trabalho é estudar a aplicação do Método dos Elementos de Contorno com o Método de Reciprocidade Dual em problemas específicos de plasticidade bidimensional. Para tanto, considere-se inicialmente o embasamento teórico do Método dos Elementos de Contorno e de Reciprocidade Dual, bem como da teoria da Plasticidade. Paralelamente, o desenvolvimento de um programa de computador, fundamentado nos conceitos da Programação Orientada para Objeto e implementado em linguagem C++ para conferir a validade do estudo, será igualmente discutido.

#### 1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO

A aplicação do Método dos Elementos de Contorno para elasticidade, considerando-se sua formulação integral tanto no contorno quanto no domínio, e do Método de Reciprocidade Dual a problemas de Plasticidade, em duas dimensões, com o uso da Programação Orientada a Objetos, é, inicialmente, apresentada ao longo de sete capítulos, dos quais esta introdução é o primeiro deles.

No segundo capítulo, serão abordados os principais conceitos envolvidos com a técnica numérica do Método dos Elementos de Contorno, iniciando-se dos conceitos que assentam a técnica (as técnicas de aproximação e a teoria da elasticidade), da formulação da equação integral de contorno, da solução fundamental da elasticidade, da implementação numérica da técnica para o cálculo das variáveis de contorno e de domínio e o tratamento de forças de corpo com o tensor de Galerkin.

Os conceitos básicos da teoria da Plasticidade são descritos no terceiro capítulo, enfatizando o modelo elastoplástico perfeito e o critério de escoamento de von Mises. Dando prosseguimento, será apresentada a formulação para obtenção dos incrementos plásticos, deformação e tensão.



No quarto capítulo, apresentamos a formulação do Método de Reciprocidade Dual (DRM) para eliminar a integral de domínio, devido às pseudo forças. Mostra-se a implementação das funções de aproximação, as chamadas *ATPS*, e alguns exemplos numéricos para atestar o emprego da técnica.

No quinto capítulo, apresenta-se a formulação elastoplástica incremental, baseada na técnica das forças fictícias, na qual mostramos a equação integral inelástica do MEC com os termos das pseudo forças, cuja integral de domínio é tratada com DRM, usual e modificado, usando as funções de aproximação do tipo *ATPS*.

O sexto capítulo trata da implementação computacional. Nesse, o programa de processamento é apresentado dentro do paradigma da POO. Primeiramente, descrevem-se os principais conceitos desta nova filosofia de programação e, em seguida, insere-se o processador, ou programa de análise, dentro deste contexto.

No sétimo capítulo apresentamos os exemplos numéricos em duas etapas: a primeira é relacionada à solução elástica, cujo objetivo é validar o programa de análise quanto ao emprego do Método dos Elementos de Contorno; a segunda, diz respeito à validação do programa no que tange à solução elastoplástica, mais especificamente ao emprego do Método de Reciprocidade Dual no tratamento dos termos não-homogêneos.

As conclusões deste trabalho, bem como as sugestões de continuidade do mesmo, finalizam a parte escrita da tese no capítulo oito.

No Apêndice A, apresentamos o uso de células no tratamento da integral de domínio.

No Apêndice B, apresenta-se uma proposta para aproximação da pseudo força de corpo, baseada no Método das Diferenças Finitas.

No Apêndice C, apresentamos o desenvolvimento do programa de pré-processamento gráfico, fundamentado nos conceitos da Programação Orientada a Objeto, que foi o suporte para alimentar todo o programa de análise desenvolvido neste trabalho.

## CAPÍTULO 2

### O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE

Inicialmente, soluções de equações por integrais de contorno tem sido exclusividade dos matemáticos e físicos, tendo poucos trabalhos voltados para os problemas usuais de engenharia. Desde a publicação do primeiro livro de Elementos de Contorno Brebbia (1978), muitos trabalhos têm aparecido na literatura, alguns tratando de Potencial, outros de problemas elastostáticos e outras aplicações da engenharia. Hess e Smith (1967), dentre outros, foram os primeiros a tratarem esses problemas, como a solução de problemas de valor de contorno tipo Laplace, que fora aplicado para potencial de fluxo e corpos arbitrários, usando a técnica indireta de Elementos de Contorno.

Elementos de Contorno são usualmente associados com a formulação direta, como tratam Jaswon (1963), em problemas de potencial, e Symn (1963), com uma técnica numérica para resolver Equações de Integral de Contorno de Fredholm, na qual o contorno é discretizado em um conjunto de pequenos segmentos, denominados de elementos, nos quais associa-se uma densidade de fonte constante. O método da colocação foi empregado para se obter o sistema de equações que governa o problema e computar a influência dos coeficientes não-singulares usando técnicas numéricas como a regra de Simpson. Uma formulação mais geral foi proposta através da Terceira Identidade de Green com potenciais e derivadas sendo desconhecidos no contorno. Toda a base de Elementos de Contorno está assentada nesta teoria.

Este capítulo abordará os conceitos básicos envolvidos nas técnicas numéricas, uma breve revisão da teoria da elasticidade, da equação integral de contorno para elasticidade bidimensional envolvendo os tópicos principais da técnica, tais como solução fundamental, tipos de elementos de contorno, implementação numérica, cálculo das variáveis de contorno e internas – deslocamentos, trações de superfícies, tensões e deformações – e ainda, sobre o tratamento descontínuo das trações e sobre forças de corpo.

## 2.1 CONCEITOS BÁSICOS

### 2.1.1 Solução Aproximada

Em análises de engenharia, são poucos os casos em que a solução exata é conhecida. Daí a importância de se utilizar funções de aproximação. Estas funções são do tipo  $u = \alpha_1 \cdot \phi_1 + \alpha_2 \cdot \phi_2 + \dots$ , onde  $\alpha_i$  são coeficientes desconhecidos e  $\phi_j$  são séries de funções, linearmente independentes, conhecidas.  $\alpha_i$  são, na maioria das vezes, associados a valores nodais (com significado físico claro) nas diversas formulações, como em Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Elementos de Contorno.

Introduzindo a aproximação na equação que governa o problema, um erro – ou função de erro – é produzido tanto na equação quanto nas condições de contorno correspondentes. Esta função erro ou residual representa o erro que ocorre no domínio ou no contorno, uma vez que a equação não é satisfeita. Assim, a idéia consiste em se buscar técnicas que minimizem este erro, distribuindo ou ponderando o mesmo. A mais comum é forçar a integral dos resíduos ponderados a ser zero e é conhecida como Técnica dos Resíduos Ponderados.

### 2.1.2 Resíduos Ponderados

A idéia básica dos métodos numéricos usados na engenharia, consiste em tentar reduzir os erros, provenientes do tipo de solução adotada na formulação, a um mínimo, através de diferentes técnicas de aplicação. Reduzir o erro é forçar o mesmo a zero em certos pontos ou regiões, ou seja, é distribuí-lo de forma a amenizá-lo. Isto significa forçar a integral dos resíduos ponderados de uma certa função a zero.

Dependendo da aproximação escolhida para a solução de um problema de valor de contorno, podem-se ter três tipos de métodos de Resíduos Ponderados (Brebbia e Dominguez, 1989):

- i) Método do Domínio - quando a solução aproximada assumida, satisfaz todas as condições de contorno, mas não satisfaz a equação no domínio  $\Omega$ .

- ii) Método de Contorno - quando a solução aproximada satisfaz a equação no domínio, mas não as condições de contorno.
- iii) Método Misto - quando a solução aproximada não satisfaz nenhum dos casos.

Os Métodos de Resíduos Ponderados variam de acordo com as funções usadas como funções de ponderação. A idéia é aplicar a função residual  $R$  no campo e nas condições de contorno, de maneira a reduzir seu erro, ou seja, fazendo com que a mesma seja zero para os vários valores da função de ponderação, assim, tem-se,

$$\int_{\Omega} R\psi_j d\Omega = 0$$

Sendo  $\psi_j$  a função de ponderação e linearmente independente.

Dentro desse contexto, três são os métodos de Resíduos Ponderados, a saber:

- a) Subdomínio - neste método, o domínio  $\Omega$  é dividido em  $M$  subdomínios e a integral do erro em cada um de seus subdomínios é zerada. As funções de ponderação são escolhidas de tal maneira que,

$$\Psi_j = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{para } x \notin \Omega_j \end{cases} \quad \text{“j” sendo o subdomínio.}$$

Logo, o resíduo é:

$$\int_{\Omega_j} R dx = 0$$

- b) Galerkin - neste método, temos a função de ponderação igual a função aproximada, isto é,

$$\phi_j = \psi_j$$

e, aplicando o resíduo, tem-se

$$\int_{\Omega} R\phi_j d\Omega = 0$$

Este método é o ponto inicial de muitas formulações de Elementos Finitos para o qual a simetria,  $\phi_j = \psi_j$ , leva a matrizes simétricas.

- c) Colocação - neste método, N pontos são escolhidos no domínio e o resíduo é condicionado a zero nestes pontos. A função de ponderação é interpretada em termos de Delta de Dirac, isto é,

$$\Psi_j = \Delta(x - x_j)$$

no ponto  $x = x_j$ , a função tem valores infinitos e sua integral possui valor unitário.

### 2.1.3 Formulação Fraca

O processo de combinação de uma demonstração de resíduos ponderados com integração por partes, faz reduzir ou “enfraquecer” a ordem da continuidade requerida para uma dada função. Este processo é denominado de Formulação Fraca. O “enfraquecimento” pode ser interpretado de duas maneiras:

- a) a redução da ordem de derivação, uma vez que a ordem de continuidade da função é reduzida;
- b) as condições de contorno natural são satisfeitas de maneira aproximada, e não de maneira exata, o que implica a redução da precisão dos valores de contorno desta variável.

### 2.1.4 Soluções de Contorno e de Domínio

Métodos de contorno foram definidos como aqueles nos quais a solução aproximada assumida satisfaz a equação governante ou equação de campo, de modo que somente variáveis desconhecidas permanecem no contorno. A equação de campo pode ser satisfeita de duas maneiras: através de sua forma homogênea ou através de uma forma especial, com um termo singular no lado direito da equação – como as funções Delta de Dirac – que fornecem um valor em um ponto quando integrado sobre o domínio. Logo, a solução é obtida, neste caso, sem levar em consideração as condições de contorno do problema. A função de ponderação é conhecida como solução fundamental.

Soluções no domínio são obtidas dos Resíduos Ponderados quando a solução aproximada assumida não satisfaz a equação governante. Esta é uma solução típica para Elementos Finitos, uma vez que os pontos no contorno são zero onde a derivada é desconhecida.

### 2.1.5 Equação Integral Básica

A Equação Integral de Contorno, requerida pelo MEC, inicialmente pode ser deduzida de maneira simples a partir das considerações dos Resíduos Ponderados, do teorema de Betti, da Terceira Identidade de Green ou do Princípio Fundamental dos Trabalhos Virtuais. Entretanto, é vantajoso utilizar-se da Técnica dos Resíduos Ponderados, devido sua generalidade, uma vez que esta pode ser estendida para resolução de equações diferenciais parciais mais complexas e, ainda, pode ser usada para relacionar elementos de contorno com outras técnicas.

## 2.2 ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Na Mecânica dos Sólidos, particularmente elasticidade linear – aquela em que se assume um comportamento linear do material e desprezam-se as mudanças na orientação do corpo no estado deformado – faz-se necessário estabelecer uma relação tensão-deformação proveniente do comportamento do material ou da aplicação das equações constitutivas do mesmo.

### 2.2.1 Revisão da Teoria da Elasticidade

As forças externas que atuam sobre um corpo, podem ser classificadas de dois tipos (Fig. 2.1), a saber:

- i) Forças de corpo – aquelas que atuam sobre os elementos de volume ou de massa dentro do corpo, isto é, são as chamadas forças gravitacionais e serão determinadas por unidade de volume;
- ii) Forças de superfície – aquelas que atuam sobre o contorno da superfície do corpo e serão determinadas por unidade de área da superfície transversal a qual estas atuam. Tais forças são conhecidas como trações de superfícies.

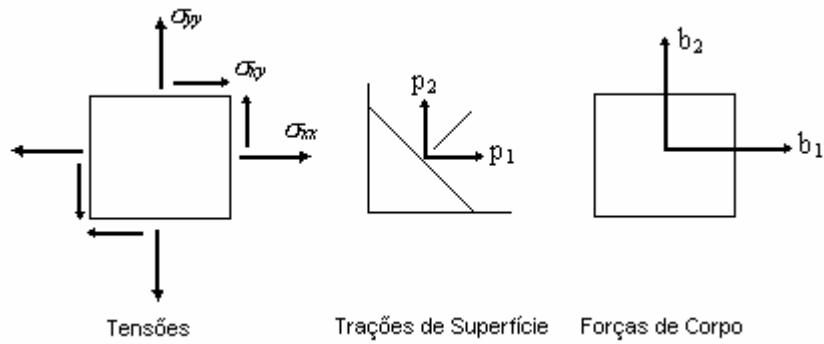


Fig. 2.1 – Tensões internas, Trações de superfície e Forças de Corpo em 2D.

Seja um corpo, finito, em equilíbrio estático, sujeito a um sistema de forças aplicadas em sua superfície e em sua massa. Cada ponto deste corpo estará em equilíbrio, sujeito a um conjunto de tensões internas e forças de massa, segundo a equação

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad i, j = 1,2 \quad (2.1)$$

Esta equação rege o equilíbrio entre as tensões  $\sigma_{ij}$  e as forças de massa  $b_j$ . As derivadas espaciais são indicadas por uma vírgula, isto é,  $\partial\sigma_{ij}/\partial x_i = \sigma_{ij,i}$ . Por outro lado, não havendo momentos aplicados no corpo, as condições de equilíbrio também levam a

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2)$$

Se as três componentes do tensor tensão são assumidas serem conhecidas em um certo ponto, as trações equivalentes  $p_i$ , atuando sobre qualquer plano deste ponto, relacionam-se com as tensões, pelo vetor normal  $n$  a superfície, segundo a expressão abaixo,

$$p_i = \sigma_{ji} \cdot n_j \quad (2.3)$$

onde  $n_j$  representa os cossenos diretores da normal ao contorno neste ponto.

Desconsiderando o estado de tensão em um dado ponto, podemos sempre escolher um conjunto especial de eixos através do ponto, de tal maneira que as componentes da tensão cisalhante desaparecem quando as tensões se referem a este. As direções desses

eixos especiais são chamadas de direções principais e, as tensões normais que atuam sobre cada plano perpendicular às direções principais, são chamadas de tensões principais.

As tensões principais são quantidades físicas, cujos valores não dependem do sistema de coordenadas no qual as componentes de tensão foram inicialmente dadas. Elas são, portanto, invariantes do estado de tensão no ponto. Conseqüentemente, os invariantes são também escalares com respeito a qualquer rotação do eixo cartesiano de referência, daí, se escolhermos o eixo de referência coincidindo com o eixo principal das tensões, obtemos em 2D

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ I_2 &= -\sigma_1 \cdot \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são os invariantes e  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões principais. Neste caso, a terceira tensão principal é considerada como sendo nula, isto é,  $\sigma_3 = 0$ .

É conveniente em muitos casos, como veremos no cálculo das deformações plásticas, dividirmos o tensor tensão em duas partes, uma chamada de tensor tensão esférica e a outra de tensão desviadora. As tensões esféricas se relacionam com as tensões principais pela seguinte expressão,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \quad (2.5)$$

E as componentes do tensor tensão desviador são dadas por,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \quad (2.6)$$

Sobre ação de forças, um corpo é deslocado de sua configuração original. Se  $x_i$  denota a posição de um ponto P do corpo em seu estado inicial e,  $x_i + u_i$  denota a posição do mesmo ponto quando o corpo é deformado,  $u_i$  representa as componentes dos deslocamentos e é uma função de  $x_i$ . Se os deslocamentos são tais que sua primeira derivada é tão pequena que o quadrado e o produto da derivada parcial de  $u_i$  são desprezíveis, então as deformações podem ser representadas pelo tensor de Cauchy, como:



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.7)$$

Durante o processo de deformação, geralmente, qualquer pequeno elemento do corpo sofre mudança de forma, de movimento e de giro (translação e rotação, respectivamente). Evitando movimento de corpo-rígido, o deslocamento relativo de um ponto, na vizinhança de P com coordenadas  $x_i + dx_i$ , com respeito a P é dado por,

$$du_i = u_{ij}dx_j \quad (2.8)$$

Para um material isotrópico, aquele isento de mudança de temperatura, a Lei de Hooke relacionando tensões e deformações, pode ser expressa da seguinte forma,

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.9)$$

Ou inversamente,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \quad (2.10)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é o módulo cisalhante, cuja relação com o módulo de Young é dada por,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

Alternativamente, a equação (2.9) pode ser escrita de forma mais concisa como,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl} \quad (2.12)$$

onde  $C_{ijkl}$  é o tensor isotrópico de quarta ordem das constantes elásticas.

As equações (2.1), (2.7) e (2.9) representam um conjunto de 15 equações para seis tensões, seis deformações e três deslocamentos. Um procedimento direto e usual é substituir a equação (2.7) na equação (2.9) para obter tensões em termos de gradientes de

deslocamentos, e em seguida, substituir o resultado na equação (2.1) para obter duas equações diferenciais parciais de segunda ordem para duas componentes de deslocamentos. O resultado desta operação resulta na bem conhecida equação de Navier que pode ser escrita na forma,

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (2.13)$$

Esta equação é particularmente conveniente quando condições de contorno deslocamentos são especificadas. Assim, usando as equações (2.7) e (2.9) como antes, mas substituindo na equação (2.3) para pontos do contorno, obtemos as condições de contorno trações como,

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = p_i \quad (2.14)$$

onde  $n_j$  representa os cossenos diretores normal à superfície do contorno. Os deslocamentos  $u_i$  são resolvidos da equação de Navier para satisfazer as condições de contorno e, depois de conhecidos, as deformações podem ser obtidas pela equação (2.7), e as tensões são calculadas pela Lei de Hooke.

### 2.3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste na transformação da equação diferencial parcial, que descreve o comportamento das incógnitas tanto no interior quanto sobre o contorno do domínio, em uma equação integral que relaciona apenas valores de contorno na obtenção de sua solução numérica. Se valores em pontos internos são requeridos, estes são calculados de forma direta a partir dos dados ora encontrados no contorno. Uma vez que todas as aproximações numéricas se dão apenas no contorno, a dimensionalidade do problema é reduzida em um, o que permite trabalhar com um sistema de equações bem menor do que aqueles obtidos com métodos diferenciais.

### 2.3.1 Demonstração da Equação Integral

A equação dos resíduos ponderados pode agora ser estendida de forma a considerar a equação de equilíbrio, Eq. (2.1), e as condições de contorno dos tipos tração, ou natural, e deslocamentos. As condições de contorno em tração, Eq. (2.3), são repetidas aqui como sendo,

$$p_i = \sigma_{ji} n_j = \bar{p}_i \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.15)$$

sendo  $\bar{p}_i$  as trações prescritas na parte do contorno  $\Gamma_2$ .

As condições de contorno do tipo deslocamentos, são prescritos numa dada porção de contorno  $\Gamma_1$ , como sendo,

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.16)$$

Ressalte-se que a superfície externa total do corpo é  $\Gamma$ , sendo dado pela soma das porções  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Assim, podemos escrever a equação dos resíduos ponderados como,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (2.17)$$

onde  $u_k^*$  e  $p_k^*$  são deslocamentos e trações correspondentes ao campo de ponderação, isto é,

$$p_k^* = \sigma_{jk}^* n_j \quad (2.18)$$

A relação deformação-deslocamento, Eq. (2.7), e as equações constitutivas (2.9) são assumidas como aplicados em ambos os campos de aproximação e de ponderação. Integrando por partes o primeiro termo da equação (2.17), obtêm-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (2.19)$$

Substituindo o tensor da equação (2.12) na equação (2.19), e integrando por partes novamente o primeiro termo, considerando o principio de reciprocidade devido à simetria de  $C_{ijkl}$ , obtemos,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}) u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \quad (2.20)$$

Levando em consideração que forças de corpo são funções conhecidas, a segunda integral do lado esquerdo da Eq. (2.20) não apresenta desconhecidos. Por outro lado, a primeira integral apresenta deslocamentos desconhecidos no domínio  $\Omega$ , enquanto as integrais de contorno apresentam deslocamentos e trações desconhecidos apenas na superfície externa do corpo.

As funções de campo de ponderação satisfazem as equações de equilíbrio em  $\Omega$ , sendo portanto bastante usuais no tratamento da eliminação de integrais de domínio como a do primeiro termo. Assim, o conceito de resíduos e sua minimização têm sido aplicados para melhor entender os tipos de aproximações envolvidas e estender o método dos elementos de contorno a problemas não lineares, como é o objetivo deste trabalho: utilizar o método de reciprocidade dual para eliminar a integral de domínio devido às deformações plásticas.

### 2.3.2 Identidade de Somigliana

É usual em equações integrais de contorno, na elastostática, começar assumindo a Identidade de Somigliana, deduzida da relação de reciprocidade dada por,

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega \quad (2.21)$$

Considerando um corpo definido por  $\Omega + \Gamma$  que está num estado de equilíbrio sob algum deslocamento e carga prescritos. Este estado é representado pelo conjunto  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $p_i$  e  $b_i$ . Assumindo agora um domínio  $\Omega^*$  com contorno  $\Gamma^*$  contendo o corpo  $\Omega + \Gamma$  sob consideração, conforme Figura 2.2, num estado de equilíbrio e representado pelo conjunto  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $p_i^*$  e  $b_i^*$ .

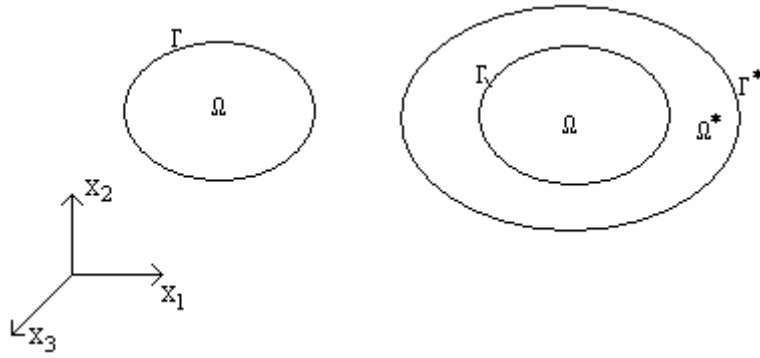


Fig. 2.2 – Região geral contendo o corpo  $\Omega + \Gamma$  com as mesmas propriedades elásticas.

Se as propriedades elásticas permanecem as mesmas em ambos os casos, a integral de reciprocidade de (2.21) pode ser inferida pela simples simetria do tensor envolvido. Desta forma, estamos assumindo que existe uma solução para  $\sigma_{jk}^*$ , a qual satisfaz as equações governantes e, mais, que a solução atual satisfaz o equilíbrio. Esta concepção é válida para soluções aproximadas porque o estado de tensão dentro do corpo será dado pela combinação da solução para o campo \* que é definido como estando em equilíbrio, o que não acontece com a formulação dos resíduos ponderados (Brebbia et al, 1984).

Integrando por partes ambos os lados da Eq. (2.21), obtemos o Teorema de Betti, dado por,

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (2.22)$$

nesta, temos a primeira integral igual àquela, também primeira, da Eq. (2.20) com o sinal trocado.

Considerando que as componentes da força de corpo  $b_k^*$  correspondem a uma carga pontual unitária positiva aplicada num ponto  $\xi \in \Omega^*$  em cada uma das três direções ortogonais dadas pelo vetor unitário  $e_i$ , isto é, definindo  $b_j^* = \Delta(\xi, x) e_j$ , onde  $\Delta(\xi, x)$  representa a função delta de Dirac,  $\xi$  é o ponto singular da carga, e  $x \in \Omega^*$  é o ponto fonte. A função delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\Delta(\xi, x) &= 0 && \text{se } \xi \neq x \\ \Delta(\xi, x) &= \infty && \text{se } \xi = x \\ \int_{\Omega^*} g(x)\Delta(\xi, x)d\Omega(x) &= g(\xi)\end{aligned}$$

Por outro lado, se  $\xi \in \Omega$ , a primeira integral na Eq. (2.22) pode ser representada como,

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi) e_i \quad (2.23)$$

Tomando cada ponto de carga como independente, os deslocamentos e trações podem ser escritos na forma,

$$\begin{aligned}u_j^* &= u_{ij}^*(\xi, x) e_i \\ p_j^* &= p_{ij}^*(\xi, x) e_i\end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  $u_{ij}^*(\xi, x)$  e  $p_{ij}^*(\xi, x)$  representam deslocamentos e trações na direção  $j$  do ponto  $x$  correspondente a uma força pontual unitária atuando na direção  $i$  ( $e_i$ ) aplicada no ponto  $\xi$ . Assim, podemos reescrever a Eq. (2.22) no intuito de representarmos as três componentes separadas de deslocamentos em  $\xi$ , da seguinte forma,

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (2.25)$$

A equação (2.25) é conhecida como Identidade de Somigliana para deslocamentos e foi aqui obtida pela reciprocidade com uma solução singular, conhecida como solução fundamental, que satisfaz a equação de Navier, dada por,

$$G u_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^* + \Delta(\xi, x) e_j = 0 \quad (2.26)$$

A equação (2.25) é uma representação contínua de deslocamentos em qualquer ponto  $\xi \in \Omega$ . Conseqüentemente, o estado de tensão neste ponto pode ser obtido pela

combinação das derivadas da Eq. (2.25) com respeito as coordenadas de  $\xi$  para produzir o tensor de deformação, e então substituir o resultado na Lei de Hooke. Isto resulta na expressão final para as tensões em pontos internos dada por,

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (2.27)$$

Resumidamente, a Identidade de Somigliana não é satisfatória na obtenção de soluções, a menos que se conheçam os deslocamentos e trações no contorno, considerando que forças de corpo são sempre assumidas serem prescritas.

### 2.3.3 Soluções Fundamentais

A formulação das equações de integral de contorno para problemas elastostáticos requer o conhecimento da solução de problemas elásticos, mantendo-se as mesmas propriedades dos materiais do corpo considerado para um domínio infinito com uma carga pontual concentrada unitária, que é a solução de Kelvin ou solução fundamental da elastostática.

A solução de Kelvin é obtida das equações de Navier, em termos de deslocamentos, quando uma carga unitária é aplicada num ponto “j” na direção do vetor unitário  $e_j$ . Esta solução utiliza-se de deslocamentos em termos de vetor de Galerkin. Assim, assumindo que a solução singular da equação de Navier, dada na Eq. (2.26), é válida na região com domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$ , e esta região encontra-se em um meio elástico infinito – correspondendo a solução de Kelvin (Love, 1944) – as expressões apropriadas para deslocamentos e trações fundamentais definidas na Eq. (2.24), são as seguintes (Brebbia, 1978):

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.28)$$

para problemas bidimensionais no estado plano de deformação.

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] \quad (2.29)$$

trações ou forças de superfícies no contorno  $\Gamma$  com normal  $\mathbf{n}$ .

A distância entre o ponto de carga  $\xi$  e o ponto fonte  $x$  é representada por  $r = r(\xi, x)$ . Suas derivadas são tomadas com referencia as coordenadas de  $x$ , isto é,

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \therefore r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \therefore r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} \quad (2.30)$$

As deformações e tensões, em qualquer ponto devido a uma carga pontual unitária aplicada em  $\xi$  na direção “i”, podem ser escritas como,

$$\varepsilon_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left[ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (2.31)$$

$$\sigma_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ki} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (2.32)$$

Estas expressões são válidas para problemas no estado plano das deformações. Para o estado plano de tensão, basta substituir  $\nu$  por  $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ .

#### 2.3.4 Implementação Numérica

Partindo da equação (2.25) da seção anterior, omitindo-se os termos de forças de corpo, um procedimento numérico geral para solução de problemas de valor de contorno, destacando os aspectos principais do processo, será demonstrado de forma resumida. Seja então a equação (2.25), reescrita sem consideração de forças de corpo,

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \quad (2.33)$$



A Equação (2.33) é considerada para cada ponto no contorno. Para executar as integrais, o contorno é dividido em elementos sobre os quais os deslocamentos e trações são aproximados sobre cada elemento através das funções de interpolações, dadas por,

$$u = \Phi^T u^n \quad p = \Phi^T p^n \quad (2.34)$$

onde  $n$  se refere ao número de nós do contorno nos quais os valores nodais de deslocamentos e trações são associados. Desta forma, a Equação (2.33) se torna,

$$c^i u^i = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} u^* \phi^t d\Gamma \right) p^n - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} p^* \phi^t d\Gamma \right) u^n \quad (2.35)$$

onde  $\phi$  é a função de interpolação nos  $N$  elementos de contorno e  $\Gamma_j$  é a superfície do elemento  $j$ .

No caso bidimensional, onde  $i = 1, 2$  e  $j = 1, 2$ , temos que  $h_{ij}^k$  e  $g_{ij}^k$  são submatrizes 2x2 dadas abaixo, onde o índice  $k$  varia sobre o número de nós no elemento. No caso de um elemento linear  $k = 1, 2$ .

$$\begin{aligned} h_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 p^* d\Gamma & h_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 p^* d\Gamma \\ g_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma & g_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma \end{aligned} \quad (2.36)$$

Que, substituindo-as na equação (2.35), obtemos a seguinte equação matricial para o nó  $i$ :

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij} p_j \quad (2.37)$$

Incorporando o termo  $c^i$  na matriz  $H$ , a equação (2.37) se torna,

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} p_j \quad (2.38)$$

Ou, colocando-se a Eq. (2.33) na forma matricial e generalizando  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  como sendo vetores de deslocamentos e trações, respectivamente e, considerando  $\mathbf{u}^*_{ij}$  e  $\mathbf{p}^*_{ij}$  matrizes de deslocamentos e trações, respectivamente, na direção “j” devido a uma força unitária no ponto sob consideração e atuando na direção “i”, temos,

$$\mathbf{c}\mathbf{u} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma \quad (2.39)$$

Que, após aplicação das condições de contorno, obtemos o seguinte sistema,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (2.40)$$

Esta formulação é válida para uma carga pontual no contorno em  $\xi_l$ .  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{u}^*$  são conhecidos e  $\mathbf{c}$  pode ser encontrado analiticamente ou da condição de corpo rígido. Sendo os desconhecidos os valores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  sobre o contorno. A integração da equação (2.39) requer um esquema de integração numérica, por exemplo quadratura gaussiana, que resulta numa série de equações por nó, do tipo:

$$\mathbf{c}_i \mathbf{u}_i + [\hat{\mathbf{h}}_{i1} \hat{\mathbf{h}}_{i2} \dots \hat{\mathbf{h}}_{ii} \dots \hat{\mathbf{h}}_{ir}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = [\mathbf{g}_{i1} \mathbf{g}_{i2} \dots \mathbf{g}_{ii} \dots \mathbf{g}_{ir}] \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

onde  $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{p}_j$  são os desconhecidos nos nós  $j$ .  $\hat{\mathbf{h}}_{ij}$  e  $\mathbf{g}_{ij}$  são os coeficientes de interações que relacionam o nó  $i$  com todos os nós na superfície do corpo. Com exceção dos elementos constantes, mais do que um elemento contribuirá para formação das submatrizes  $\hat{\mathbf{h}}_{ij}$  e  $\mathbf{g}_{ij}$  de ordem 2x2 para o caso bidimensional.

Finalizando, aplica-se a Eq. (2.41), para cada nó do contorno sucessivamente, gerando-se um sistema de 2N equações, que após aplicação das condições de contorno pode ser resolvido por eliminação de Gauss.

Os valores de tensões e deslocamentos em qualquer ponto interno podem ser obtidos facilmente usando equações apropriadas e técnicas de quadratura, por exemplo. Se forças de corpo não são consideradas, um esquema simples de integração numérica pode ser incluído para tratar os termos independentes do sistema de equações, bem como deslocamentos e tensões internas.

Os passos básicos envolvidos nesta técnica são, resumidamente:

- i) discretizar o contorno  $\Gamma$  em uma série de elementos sobre os quais deslocamentos e trações são interpolados entre os pontos nodais dos elementos;
- ii) aplicar a Eq. (2.33) na forma discretizada para cada ponto nodal  $\xi$  do contorno  $\Gamma$  e as integrais são computadas sobre cada elemento de contorno. Isso leva à formação de um sistema linear de  $N$  equações algébricas envolvendo uma série de  $N$  trações nodais e  $N$  deslocamentos nodais;
- iii) enfim, impõem-se condições de contorno prescrevendo-as sobre  $N$  valores nodais. Através de técnicas padrões de resolução de sistemas de equações obtêm-se os demais dados do contorno e, a partir desses, os do interior.

### 2.3.5 Elementos de Contorno

Os elementos de contorno (segmentos que dividem o contorno) podem ser de vários tipos, a saber: constantes, lineares, quadráticos, ou de ordem maior. A Figura 2.3a mostra o contorno dividido em uma série de elementos constantes, onde o nó é colocado no centro do elemento e as incógnitas são constantes sobre o elemento. Na Figura 2.3b, para os elementos lineares, os nós estão localizados nas extremidades do elemento e as incógnitas variam linearmente. Na Figura 2.3c, para os elementos quadráticos usam-se três nós por elemento, podendo-se, neste caso, modelar-se geometrias curvas.

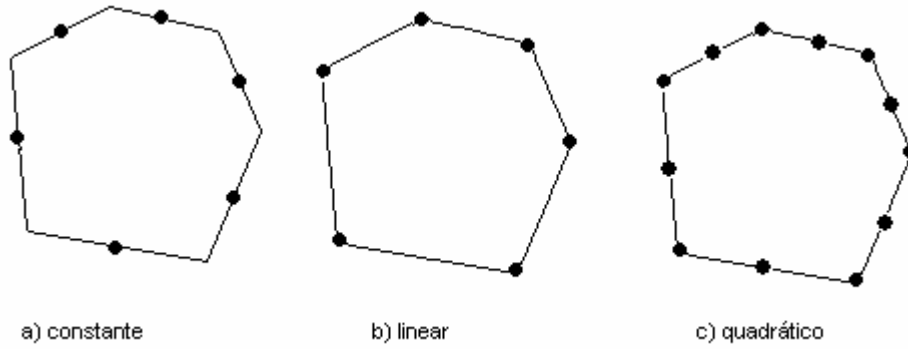


Fig. 2.3 – Corpo 2D dividido em elementos.

### 2.3.6 Sistema de Equações

A equação (2.40) pode ser escrita matricialmente, para cada nó considerado, como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \hat{\mathbf{h}}_{12} & \dots & \hat{\mathbf{h}}_{1i} & \dots & \hat{\mathbf{h}}_{1r} \\ \hat{\mathbf{h}}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \dots & \hat{\mathbf{h}}_{2i} & \dots & \hat{\mathbf{h}}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\mathbf{h}}_{i1} & \hat{\mathbf{h}}_{i2} & \dots & \mathbf{h}_{ii} & \dots & \hat{\mathbf{h}}_{ir} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\mathbf{h}}_{r1} & \hat{\mathbf{h}}_{r2} & \dots & \hat{\mathbf{h}}_{ri} & \dots & \mathbf{h}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_i \\ \dots \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \dots & \mathbf{g}_{1i} & \dots & \mathbf{g}_{1r} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \dots & \mathbf{g}_{2i} & \dots & \mathbf{g}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{g}_{i1} & \mathbf{g}_{i2} & \dots & \mathbf{g}_{ii} & \dots & \mathbf{g}_{ir} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{g}_{r1} & \mathbf{g}_{r2} & \dots & \mathbf{g}_{ri} & \dots & \mathbf{g}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \dots \\ \mathbf{p}_i \\ \dots \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Onde as submatrizes  $\mathbf{h}_{ii}$  nas diagonais são dadas por,

$$\mathbf{h}_{ii} = \hat{\mathbf{h}}_{ii} + \mathbf{c}_i \quad (2.43)$$

As condições de contorno, a serem aplicadas no sistema acima, são de dois tipos, a saber:  $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$  em  $\Gamma_1$  e  $\mathbf{p}_i = \bar{\mathbf{p}}_i$  em  $\Gamma_2$ . Se deslocamentos são conhecidos, as trações podem ser encontradas e vice-versa, o que implica o sistema de equações, dado na Eq. (2.40), poder ser rearranjado de tal maneira que todos os desconhecidos são passados para o lado esquerdo num vetor  $\mathbf{Y}$  e o sistema pode ser reescrito como

$$\mathbf{AY} = \mathbf{F} \quad (2.44)$$

Os coeficientes  $c_i$  da equação (2.39) são obtidos, de forma implícita, considerando um deslocamento de corpo-rígido unitário em qualquer direção. Assim, a equação (2.43) se torna,

$$HI_l = 0 \quad (2.45)$$

Onde  $I_l$  é um vetor definindo um deslocamento de corpo-rígido unitário na direção  $l$ .

Uma vez resolvido o sistema de equações da Eq. (2.44), conhecem-se os deslocamentos e trações sobre a superfície do contorno, e podem-se determinar, agora, os deslocamentos e tensões em qualquer ponto interno, bem como tensões no contorno. As deformações podem ser calculadas pelas relações constitutivas ou a partir dos deslocamentos e forças no contorno, como veremos nos tópicos a seguir.

### 2.3.7 Cálculo das Tensões no Contorno

Como visto nas secções anteriores, a solução numérica das equações governantes produz todos os deslocamentos e forças no contorno. Em muitas aplicações práticas, entretanto, necessita-se de calcular as tensões no contorno. Uma alternativa para se realizar o cálculo destas é aplicar a mesma equação integral, usada para o cálculo das tensões em pontos internos, no contorno, mas isto acarretaria no aparecimento de singularidades de alta ordem e, conseqüentemente, exigiria um tratamento especial nestas.

Uma alternativa usual de se determinar o tensor tensão no contorno é recuperar os deslocamentos e forças de superfícies obtidos no contorno e calcular as componentes do tensor a partir destes. Isto é, a partir dos valores conhecidos no contorno encontram-se as componentes do tensor tensão.

No sistema de coordenadas cartesianas locais nos pontos do contorno, como ilustrado na Figura 2.4, onde se deseja calcular as tensões, pode-se ver que, para problemas bidimensionais, duas das componentes do tensor tensão podem ser obtidas a partir das trações de superfície,

$$\begin{aligned}\sigma'_{12} &= \sigma'_{21} = p'_1 \\ \sigma'_{22} &= p'_2\end{aligned}\tag{2.46}$$

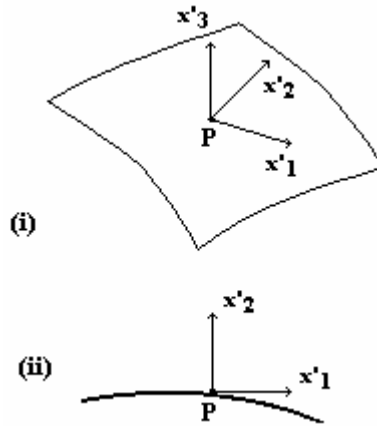


Fig. 2.4 – Sistema de coordenadas locais sobre o elemento curvo, onde  
 (i)  $x'_3$  é normal à superfície e  $x'_1$  e  $x'_2$  são tangenciais no ponto P;  
 (ii)  $x'_2$  é normal ao contorno no ponto P e  $x'_1$  é tangencial.

A terceira componente é oriunda de uma expansão discreta para os deslocamentos no contorno sobre o elemento, dada por

$$U' = R^t \cdot \phi \cdot u^j\tag{2.47}$$

Sendo  $R$  a matriz de transformação do sistema global para o local. Assim, diferenciando  $U'$ , obtém-se uma componente do tensor deformação como,

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1}\tag{2.48}$$

E, a partir desta, calcula-se a última componente do tensor tensão, que no estado plano de deformação é dada por,

$$\sigma'_{11} = \frac{1}{1-\nu} (\nu \sigma'_{22} + 2G \varepsilon'_{11})\tag{2.49}$$

Para o estado plano de tensão, basta substituir  $\nu$  por  $\bar{\nu}$ , dado por,

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (2.50)$$

Após obter o tensor tensão  $\sigma'$  em coordenadas locais, expressões (2.46 e 2.49), é necessário transformar em coordenadas globais usando a seguinte expressão,

$$\sigma = R \sigma' R^T \quad (2.51)$$

### 2.3.8 Cálculo das Tensões em Pontos Internos

As tensões em pontos internos são obtidas a partir dos valores, ora conhecidos, de deslocamentos e forças de superfícies nos nós do contorno. Para tal, partimos da mesma equação integral que gerou a solução no contorno, Eq. (2.25), por ser esta uma representação contínua de deslocamentos em qualquer ponto  $\xi \in \Omega$ . Assim, o estado de tensão neste ponto pode ser obtido a partir da combinação das derivadas da Eq. (2.25) em relação as coordenadas de  $\xi$ , para produzir o tensor de deformação e, então, aplicando a Lei de Hooke neste resultado, obtemos a expressão para as tensões internas, dada pela Eq. (2.27) e repetida aqui como,

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (2.52)$$

Onde, pela solução fundamental de Kelvin, os novos tensores  $u_{ijk}^*$  e  $p_{ijk}^*$ , são dados por,

$$u_{ijk}^* = -\sigma_{ijk}^*$$

$$p_{ijk}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \right. \quad (2.53)$$

$$\left. + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\}$$

$u_{ijk}^*$  é dado na Eq. (2.32).

### 2.3.9 Cálculo das Deformações no Contorno e no Interior

As deformações podem ser obtidas, de maneira análoga ao procedimento para o cálculo das tensões, diretamente das equações integrais de contorno, substituindo o valor dos deslocamentos na expressão da deformação de um ponto, dada pela Eq. (2.7). No entanto, a expressão obtida, idêntica àquela para tensões, possui núcleos diferentes.

Neste trabalho, optou-se por obter as deformações, tanto no contorno quanto no interior, a partir das relações constitutivas que expressam essas em função das tensões que atuam num dado ponto. Para isso, obtidas as tensões em todos os pontos, emprega-se a relação dada na Eq.(2.10).

### 2.3.10 Descontinuidade de Tensões

Em problemas bidimensionais, quando um nó está localizado em um ponto onde o contorno não é suave, isto é, existe um canto, uma descontinuidade em tração é esperada ocorrer nesse nó. Isto é devido, se forças de superfícies são desconhecidas naquele nó, o número de equações naquele nó ser menor do que o número de desconhecidos.

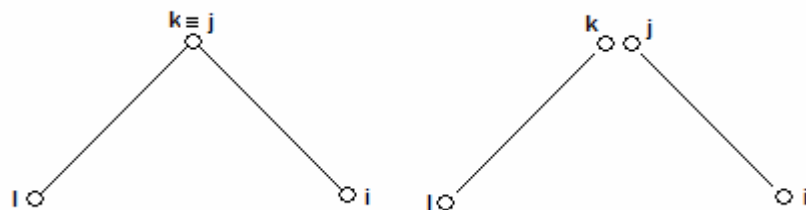


Fig. 2.5 – Conceito de nós duplos com elementos lineares.

Observando a Figura 2.5, podem-se verificar duas situações possíveis no tratamento das descontinuidades, a saber:

- i) quando trações são conhecidas em ambos os lados do nó do canto, apenas as duas componentes de deslocamentos são desconhecidas e, conseqüentemente, não há necessidade de qualquer tratamento nesse nó. Ou ainda, se são conhecidas as duas componentes de deslocamentos e uma das trações, antes ou depois do nó, então a outra tração, antes ou depois do nó, será desconhecida e, portanto, não apresenta dificuldade alguma;



- ii) quando dois diferentes valores (antes e depois do nó) de qualquer componente de tração são desconhecidas e apenas os deslocamentos são conhecidos, um tratamento especial no nó do canto deve ser considerado, uma vez que tal situação levaria a singularidade da matriz  $A$  por violar a condição de continuidade dos deslocamentos.

Uma maneira fácil de resolver o problema, apontado no item “ii” acima, é empregando o conceito de nós duplos, ou seja, nós que possuem a mesma coordenada, conforme posto em Brebbia e Dominguez (1978), no qual, para simular a descontinuidade em trações, optou-se pela associação de valores diferentes para o nó em questão, como descrito no item “i” acima e resumido da seguinte forma: desde que os deslocamentos sejam o mesmo naquele nó, só é aceitável a combinação de duas condições de contorno prescritas em cada direção.

### 2.3.11 Forças de Corpo

Um dos objetivos dos pesquisadores do MEC tem sido buscar técnicas que levam as integrais de domínio ao contorno, procurando preservar a idéia do próprio método. Quando integrais de domínio são incluídas, devido às forças de corpo, por exemplo, o processo de integração tradicional, utilizando células, requer uma discretização adicional do domínio. Em geral, essas células têm forma triangular e usam funções de interpolação lineares ou quadráticas.

Em algumas aplicações práticas, como as que consideram forças de corpo (peso próprio, por exemplo), estas integrais podem ser transformadas em integrais de superfície e, conseqüentemente ficam mais fáceis de serem avaliadas numericamente, assim como as integrais de contorno. Para tal, emprega-se um procedimento que associa o vetor de Galerkin e a solução fundamental de Kelvin. Sendo  $G^*_{ij}$  o tensor de Galerkin e a solução fundamental  $U^*_{ij}$  para duas dimensões, podemos escrever a seguinte relação:

$$U^*_{ij} = G^*_{ij,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} \cdot G^*_{ik,kj} \quad (2.54)$$

E a integral de forças de corpo (vide Eq. 2.22) representada como,

$$B_i = \int_{\Omega} U^*_{ij} b_j d\Omega \quad (2.55)$$

A idéia consiste em transformar a integral de domínio da expressão (2.55), considerando de peso próprio somente, em integral de contorno, empregando para tanto o tensor de Galerkin para duas dimensões, dado por

$$G^*_{ij} = \frac{1}{8\pi G} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} \quad (2.56)$$

Substituindo a solução fundamental dada em (2.54) na equação (2.55), tem-se,

$$B_i = \int_{\Omega} \left( G^*_{ij,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G^*_{ik,kj} \right) b_j d\Omega \quad (2.57)$$

Considerando-se somente cargas gravitacionais, por exemplo, pode-se expressar uma força de corpo constante como diretamente proporcional a uma dada densidade de massa  $\varsigma$ , constante, pelo seu campo gravitacional  $g_j$  também constante. Isto é,  $b_j = \varsigma g_j$ , que, substituindo na equação (2.57), resulta na seguinte integral de contorno

$$B_i = b_j \int_{\Gamma} \left( G^*_{ij,k} - \frac{1}{2(1-\nu)} G^*_{ik,j} \right) n_k d\Gamma \quad (2.58)$$

O mesmo procedimento é válido para carga centrífuga e cargas térmicas, bastando substituir o termo  $b_j$  da equação (2.57) adequadamente.

É comum, portanto, o aparecimento de integrais de domínio que não podem ser levadas ao contorno mediante Galerkin. Nesse caso, muitas técnicas têm sido desenvolvidas para tal tratamento, ou seja, transformar a integral de domínio em integral de contorno. Dentre as principais cite-se o Método de Reciprocidade Dual (DRM) que será apresentado no capítulo 4.

## **CAPÍTULO 3**

### **MODELO ELASTOPLÁSTICO**

Uma carga externa causa deformações e tensões num corpo. Quando esta carga é removida, o corpo pode ou não retornar a sua configuração original. Dizemos que essa deformação é elástica se o material sofre apenas deformação reversível, ou seja, retorna a seu estado inicial quando a carga é removida. Quando o material retém parte da deformação no descarregamento, dizemos ser um material plástico. Assim, o comportamento plástico caracteriza-se pela dependência da historia de deformações e a teoria da plasticidade constitui-se de estudos e análises do comportamento dos materiais que experimentam uma deformação plástica.

Para a formulação de uma teoria que modele a deformação elastoplástica de um material, faz-se necessário o cumprimento de três requisitos básicos:

- i) o relacionamento elástico entre tensões e deformações deve estar explícito antes de iniciar a deformação plástica.
- ii) um critério de escoamento, para indicar o nível de tensão que começa o fluxo plástico, deve ser adotado.
- iii) o relacionamento entre tensão e deformação para o comportamento pós-escoamento.

As seções seguintes tratarão da formulação para obtenção dos incrementos de deformação e de tensão plásticos. Inicialmente serão abordados os conceitos básicos da Teoria da Plasticidade, destacando os modelos elastoplásticos, os critérios de escoamentos – dando ênfase ao de von Mises por ser esse o mais empregado em programas de elementos finitos, como o ANSYS – e a formulação para o cálculo dos incrementos de deformação e tensão plásticos.

### 3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE PLASTICIDADE

#### 3.1.1 Comportamento Plástico dos Materiais

A plasticidade é definida como uma propriedade que permite um dado material se deformar, contínua e permanentemente, sem ruptura durante a aplicação de tensão excedendo o limite elástico do material. Certamente, ocorrerão deformações residuais, quando da remoção das cargas, e conseqüentemente, a deformação final dependerá tanto das tensões finais quanto da história de tensão desde o início do escoamento.

A não-linearidade e a irreversibilidade do processo de deformação, e ainda, um número de fenômenos que ocorrem depois do material se tornar plástico, são, todavia, fatores de complexidade na formulação das relações físicas que descrevem o comportamento real de um material durante o fluxo plástico. As características de escoamento de muitos materiais, por exemplo, são modificadas pela taxa de deformação com a resistência à deformação aumentando consideravelmente com a velocidade de carregamento (efeito visco) ou, a fluência dos metais (efeito *creep*), onde as deformações ocorrem em períodos longos de tempo sob tensão constante.

O comportamento plástico da maioria dos materiais, usualmente empregados em estruturas, pode ser analisado segundo um dos modelos apresentados na Figura 3.1, obtidos de ensaios de tração uniaxial.

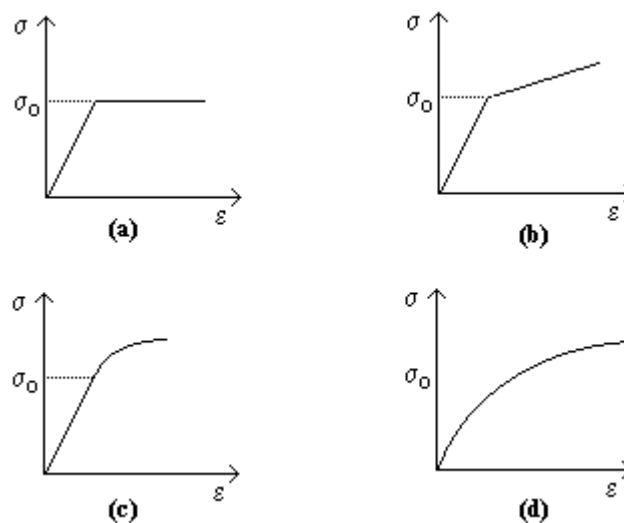


Fig. 3.1 – Comportamento plástico dos materiais.

No modelo elastoplástico perfeito da Figura 3.1.a, o material deforma-se elasticamente até atingir a tensão  $\sigma_0$ , que é a tensão de escoamento. Deste ponto em diante, o material deforma-se indefinidamente sem que haja um acréscimo nas tensões. Alguns aços comportam-se segundo este modelo.

Na Figura 3.1.b observa-se o modelo de plastificação com encruamento linear, tendo o material uma reserva de resistência após a tensão  $\sigma_0$  ter sido alcançada. Neste caso, há um acréscimo de tensões acompanhando o acréscimo da deformação. O comportamento de vários metais, como o alumínio, pode ser representado por este modelo.

Nas duas outras figuras, tem-se o comportamento não-linear dos materiais. Na Figura 3.1.c, a não-linearidade ocorre apenas depois de atingir a tensão de escoamento  $\sigma_0$ . Em 3.1.d, o comportamento é não-linear desde o início do carregamento, não sendo clara a separação das fases elásticas e plástica. A tensão de escoamento para este caso é como o limite de reversibilidade da resposta do material. Estes modelos podem ser empregados para estudo de materiais como o concreto.

Este trabalho se prenderá ao modelo do material perfeitamente elastoplástico, visto na Figura 3.1.a. Neste modelo, visualizado na Figura 3.2 abaixo, temos as tensões aumentando no sentido O-A, e uma deformação elástica recuperável até que a tensão alcance o valor  $\sigma_0$ , quando então, uma deformação plástica é superimposta e ocorrerão, a partir daí, deformações sob tensão constante. Se, após alcançado o ponto B, há descarregamento, o caminho O-A-B não é mais recuperado devido à irreversibilidade da deformação plástica, mas as tensões seguirão a linha B-C, paralela à O-A.

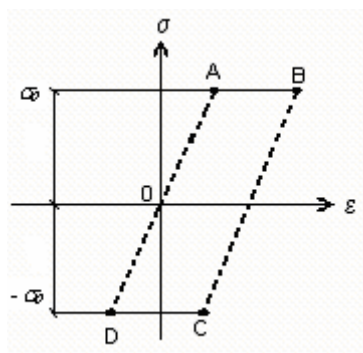


Fig. 3.2 – Diagrama Tensão-Deformação Uniaxial para um material elastoplástico perfeito.

Assumindo que a deformação total  $\varepsilon$ , é subdividida em duas porções, uma elástica e outra plástica, podemos escrever,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad \text{com} \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (3.1)$$

Consideraremos então, apenas o comportamento elástico puro obtido para um carregamento inicial, isto é, quando  $\sigma$  alcança a tensão de escoamento  $\sigma_0$ , resumidamente escrito da seguinte forma, como visto na Figura 3.2,

$$\sigma - \sigma_0 < 0 \quad (3.2)$$

Uma situação mais complexa ocorre quando os efeitos de encruamento são considerados, que não é o caso neste trabalho. Nesta situação, tem-se que, depois que o ponto A é alcançado, onde  $\sigma = \sigma_0$ , as tensões continuam aumentando e, portanto, induzindo o aumento das deformações. Quando há descarregamento, as tensões variarão de acordo com a história da deformação anterior, o que é conhecido na literatura como efeito Bauschinger.

### 3.1.2 Tipos de Encruamento

Como descrito anteriormente, alguns materiais apresentam uma reserva de resistência após terem atingido a tensão de escoamento. Na figura 3.3, ilustra-se o comportamento de um material que, após sofrer escoamento, é solicitado de maneira reversa, podendo se comportar de uma maneira diferente da inicial.

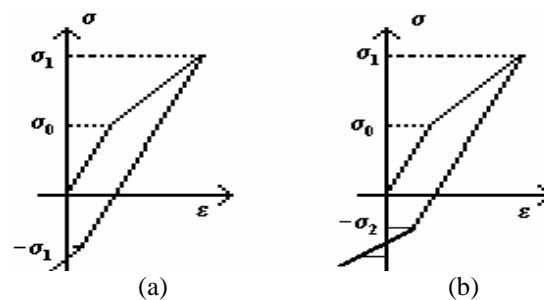


Fig. 3.3 – Tipos de encruamento.

Admitindo-se um material com encruamento, na Figura 3.3a, este é solicitado até uma tensão  $\sigma_1$ , após o escoamento ter ocorrido em  $\sigma_0$ . Em seguida, o carregamento é invertido e o material escoava novamente, sob a ação de uma tensão de módulo  $\sigma_1$ . Neste caso, o encruamento representa um ganho de resistência para o material, caracterizando o encruamento isotrópico.

Na situação da Figura 3.3b, a tensão de escoamento no carregamento reverso é  $-\sigma_2$ , que tem módulo inferior a  $\sigma_0$ . Assim, tem-se que a existência do encruamento representa uma diminuição de resistência para cargas no sentido reverso, caracterizando o encruamento cinemático, ou efeito de Bauschinger. Qualquer outra possibilidade de encruamento pode ser escrita como uma combinação dessas anteriores, sendo conhecido como encruamento misto.

### 3.1.3 Critérios de Escoamento

O critério de escoamento, pode ser definido como o limite de deformação elástica, expresso por uma combinação do estado de tensões. Para um estado unidimensional de tensão pode ser facilmente visualizado, por exemplo, a medida de uma tensão de compressão ou tração uniaxial. Entretanto, para um estado multiaxial de tensão, torna-se complicado, e as expressões matemáticas envolvendo todas as tensões é geralmente necessário. O estabelecimento destas expressões matemáticas é conhecido como critério de escoamento, que é baseado em observações experimentais.

Diversas pesquisas experimentais foram feitas no sentido de determinar e fornecer os parâmetros para se obter a representação matemática da superfície de plastificação. A dificuldade com a interpretação destes experimentos, é devida a diversos fatores, entre eles, a escolha do equipamento, o tipo de ensaio e as simplificações empregadas no mesmo, como por exemplo, a propriedade do material que pode não ser suficientemente isotrópico, dificultando o estabelecimento de uma lei completa. Outra dificuldade existente, convém salientar, é o fato da representação matemática dos critérios existentes, já que o tensor tensão possui seis componentes independentes, em 3D.

Devido à complexidade envolvida na plastificação de materiais sobre o estado de tensão tridimensional, é conveniente definir uma função  $F$ , das componentes de tensão, como um critério de plastificação, dada por

$$F = F(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}) \quad (3.3)$$

No caso mais geral,  $F$  pode ser uma função de seis componentes do tensor tensão. Caso o material seja homogêneo, esta função é válida para toda parte do material. A equação acima pode ser escrita em função de três tensões principais e de seus cossenos diretores, como,

$$F = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, n_1, n_2, n_3) \quad (3.4)$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são as tensões principais e  $n_1, n_2, n_3$ , são os cossenos diretores.

A equação (3.3), como visto, torna-se complicada, uma vez que a mesma é dependente de seis valores independentes. Pode-se introduzir uma simplificação se assumirmos o material como isotrópico, passando a não ter qualquer direção principal. Conseqüentemente, o critério de escoamento na equação (3.4) pode ser escrito só em termo das tensões principais, que para um material isotrópico é dado por,

$$F = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.5)$$

Para uma melhor representação e visualização dos critérios de plastificação, a equação acima pode ser expressa em termos dos invariantes do tensor tensão, como

$$F = F(I_1, I_2, I_3) \quad (3.6)$$

onde  $I_1, I_2$  e  $I_3$  são os invariantes do tensor tensão.

Assim, em um ensaio de carregamento uniaxial, a tensão de escoamento pode ser facilmente encontrada a partir do gráfico tensão-deformação. Um meio de se determinar se um material entra em escoamento, quando sujeito a um estado multiaxial de tensões, a partir de resultados de ensaios uniaxiais, é adotar-se um critério de escoamento, como



vistos nas seções seguintes. Este trabalho se prenderá especificamente ao critério de escoamento de von Mises.

### 3.1.3.1 Critério de Tresca

De acordo com este critério, a plastificação pode ocorrer quando é atingido o valor extremo da tensão de cisalhamento. Qualquer estado de tensão localizado dentro da superfície de escoamento é considerado como estado de tensão elástico. De acordo com essa teoria, a tensão de escoamento para tração e compressão são assumidas iguais, o que é uma limitação para uma série de materiais.

A máxima tensão de cisalhamento sobre condições uniaxial é igual a  $\sigma_0/2$ , onde  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento uniaxial. O critério de Tresca pode ser expresso em termos das tensões principais como segue

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\pm\sigma_0}{2} \quad (3.7a)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{\pm\sigma_0}{2} \quad (3.7b)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{\pm\sigma_0}{2} \quad (3.7c)$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , e  $\sigma_3$  são a maior, a intermediária e a menor tensão principal, respectivamente.

No caso de tensão plana, considere-se  $\sigma_3 = 0$ , conseqüentemente o critério se reduz a,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0 \quad (3.8)$$

Com  $\sigma_2$  e  $\sigma_1$  sendo as tensões principais, máxima e mínima, respectivamente, sendo que uma delas pode ser a  $\sigma_3 = 0$ , se for o caso.

No caso de estado uniaxial pode-se introduzir a simplificação abaixo,

$$\sigma_3 = \sigma_2 = 0 \quad (3.9)$$

E o critério de Tresca se resume a,

$$\sigma_1 = \pm \sigma_0 \quad (3.10)$$

Nota-se que a expressão acima considera que o estado uniaxial de tensão conduz a função constante para superfície de plastificação. Este critério é geralmente adotado para o caso de flexão em barra onde a função de escoamento é igual ao momento de plastificação.

De acordo com o critério de Tresca, a tensão de escoamento para o estado puro de cisalhamento é igual à metade da tensão sobre condições uniaxial, isto é,

$$\tau = \frac{\sigma_0}{2} \quad (3.11)$$

### 3.1.3.2 Critério de Drucker-Prager

Uma generalização para considerar o efeito de todas as tensões principais foi sugerida por Drucker e Prager, usando-se os invariantes do tensor de tensão. Este critério pode ser escrito da seguinte forma,

$$F = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k \quad (3.12)$$

onde  $\alpha$  e  $k$  são os parâmetros do material,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensão e  $J_2$  é o segundo invariante do tensor de tensão desviatório.

Quando o estado de tensão atinge a superfície de ruptura, descrita na equação (3.12), o material sofre deformações plásticas. De acordo com este critério, um estado de tensões fora da superfície não é estável. O material pode experimentar deformações plásticas enquanto a tensão no ponto está se movendo sobre a superfície de ruptura.

Os valores de  $\alpha$  e  $k$  podem ser expressos em termos dos valores do ângulo de atrito interno  $\phi$  e da coesão  $c$ , determinado em laboratório, para um caso de compressão triaxial tem-se,

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (3.13)$$

### 3.1.3.3 Critério de Mohr-Coulomb

O critério de Tresca e o de von Mises, a ser visto na próxima seção, assumem que o material é independente das tensões esféricas ou hidrostáticas. Esta suposição tem sido mostrada como válida para os materiais não friccionais (sem atrito), tais como os metais. Muitos materiais comportam-se diferentemente dos metais e conseqüentemente podem possuir características friccionais como é o caso de solos e do concreto, entre outros, estes materiais sofrem ação das tensões hidrostáticas que devem ser consideradas na formulação do critério de ruptura.

O critério de Mohr-Coulomb tem sido freqüentemente usado como um critério de ruptura para o concreto. Neste critério, a tensão de cisalhamento  $\tau$  na ruptura, ou escoamento do material, é função das propriedades do material, coesão e ângulo de atrito, e varia linearmente com a tensão normal atuante.

De acordo com o critério de Mohr-Coulomb, o aumento das forças de cisalhamento é proporcional ao incremento das tensões normais no plano de ruptura:, segundo a expressão abaixo,

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (3.14)$$

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento no plano de ruptura,  $c$  é coesão do material e  $\phi$  é o ângulo de atrito interno. O critério de Mohr-Coulomb ignora o efeito da tensão principal intermediária e a equação pode ser escrita na forma das tensões principais como,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi + c \cos \phi \quad (3.15)$$

Onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são a maior e menor tensão principal, respectivamente, sendo que uma delas pode ser zero. Na forma geral a equação do critério de ruptura de Mohr-Coulomb no espaço de tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$  é dado por,

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 \leq 0 \quad (3.16)$$

Observa-se, no critério de Mohr-Coulomb, que a resistência ao escoamento na compressão é maior que na tração, isto mostra a dependência do terceiro invariante do tensor de tensão. Ao mesmo tempo o critério é expresso em termos de máxima e mínima tensão principal, não incorporando assim o efeito da tensão principal intermediária.

Os dois parâmetros associados ao critério de Mohr-Coulomb, ângulo de atrito interno  $\phi$  e coesão  $c$ , são determinados em ensaios experimentais. No caso de solos, geralmente em ensaio triaxial de compressão, os resultados são determinados levando-se o material até o limite de ruptura. A linha de ruptura do critério de Mohr-Coulomb, é a que envolve o círculo de Mohr até atingir a ruptura, e os coeficientes  $\phi$  e  $c$  são representados conforme ilustra a Figura (3.4).

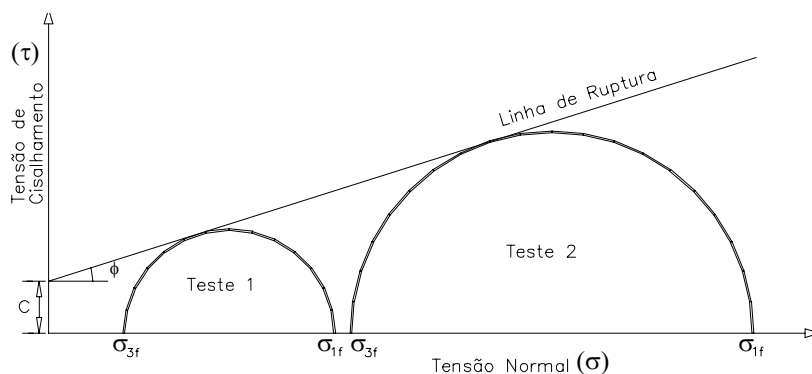


Fig. 3.4 – coeficientes ( $\phi$  e  $c$ ) do critério de Mohr-Coulomb, onde  $\sigma_{1f}$  e  $\sigma_{3f}$  são a maior e menor tensão principal de ruptura.

### 3.1.3.4 Critério de von Mises

De acordo com a teoria descrita anteriormente e os resultados observados em experimentos, o critério de plastificação de von Mises considera que o escoamento pode iniciar quando o segundo invariante do tensor desviador alcança um certo valor. Este critério assume que o escoamento começa quando a energia de distorção atinge um valor que é igual à energia de distorção de escoamento para um ensaio de tração simples. O critério foi sugerido por von Mises em 1913, e é também conhecido como teorema da energia distorcional. De acordo com este critério, tem-se que

$$J_2 < k^2 \quad \text{caso o material esteja elástico} \quad (3.17)$$

$$J_2 = k^2 \quad \text{caso o material esteja plastificando} \quad (3.18)$$

onde  $k$  é a propriedade do material a ser definida em ensaios experimentais, e  $J_2$  o segundo invariante do tensor desviador, que pode ser expresso como,

$$J_2 = I_2 - \frac{1}{6}I_1^2 \quad (3.19)$$

sendo  $I_1$  e  $I_2$  os primeiro e segundo invariantes do tensor de tensão, respectivamente.

Expandindo a equação (3.18), em 3D, pode-se escrever o segundo invariante do tensor desviador como,

$$\frac{1}{6} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = k^2 \quad (3.20)$$

No espaço das tensões principais, a expressão (3.20) pode ser reescrita como,

$$\frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = k^2 \quad (3.21)$$

Considerando que o coeficiente  $k$  é determinado no ensaio de tração direta, tem-se:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (3.22)$$

E que a tensão de escoamento é igual à tensão tração, conforme o critério de von Mises, temos,

$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad (3.23)$$

$\sigma_0$  é a tensão de escoamento. E ainda, admitindo o material isotrópico, a equação (3.21) resulta em,

$$\frac{1}{3}\sigma_1^2 = k^2 = \frac{1}{3}\sigma_0^2 \quad (3.24)$$

onde a constante do material  $k$  pode ser escrita como,

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (3.25)$$

Para um caso especial de tensões planas, onde  $\sigma_3 = 0$ , o critério da superfície de von Mises, em função das tensões principais, resulta em

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (3.26)$$

Substituindo o valor da constante  $k$  dada em (3.25), na expressão acima, chega-se a seguinte equação,

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad (3.27)$$

A Eq. (3.27) pode ser interpretada como definida no espaço de uma elipse em função de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  do plano de tensão, sendo escrita na forma,

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)^2 = 1 \quad (3.28)$$

A Figura 3.5 mostra a elipse de von Mises para o estado plano de tensão.

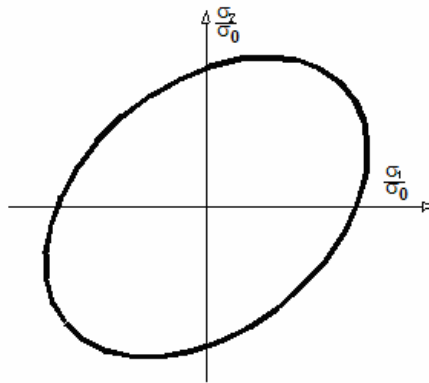


Fig. 3.5 – Elipse de von Mises para o estado de tensão plana ( $\sigma_3 = 0$ )

A equação (3.26), para o caso do estado de tensões planas, onde  $\sigma_3 = 0$ , o critério de superfície de von Mises, pode ser escrito na forma geral como:

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 = \sigma_y^2 \quad (3.29)$$

### 3.2 FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA

Considerando que os problemas elastoplásticos podem ou não apresentar plastificação desde o início do carregamento, admitimos que parte do carregamento resiste em regime elástico e parte em regime elastoplástico. Neste sentido, a idéia é buscar o ponto, ou os pontos, em que passam a existir deformações plásticas no corpo, ou seja, resolve-se o problema em regime elástico e verifica-se se, em algum ponto, o critério de escoamento adotado é alcançado ou superado. Adotando-se o critério de escoamento de von Mises, o corpo estará se deformando em regime elastoplástico quando em algum de seus pontos for verificada a expressão dada pela Eq. (3.18).

Resolvendo-se o problema em regime elástico, a expressão (3.18) pode produzir um valor maior que zero. Neste caso, pode-se definir um fator de redução de carregamento  $\lambda$ , que corresponde a fração do carregamento suportado em regime elástico, dado por,

$$\lambda = \frac{\sigma_0}{\sigma_{eq}^{\max}} \quad (3.30)$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento adotada e  $\sigma_{eq}^{\max}$  é a tensão equivalente máxima.

Assim, tem-se que a fração elástica do vetor resposta é dada por,

$$X_e = \lambda.X \quad (3.31)$$

onde  $X$  corresponde a solução elástica inicial.

Logo, podemos afirmar que, neste momento, existe pelo menos um ponto no limiar da plastificação, ou seja, estamos no início do processo incremental elastoplástico. O restante do carregamento deve ser aplicado em pequenas parcelas de passos de carga. Assumindo-se que os passos de carga são todos do mesmo tamanho e em número total de  $npc$ , podemos escrever a seguinte relação para o vetor resposta elastoplástico,

$$X = X_e + \sum_{i=1}^{npc} \dot{X} \quad (3.32)$$

Para cada passo de carga, a tensão equivalente de von Mises é comparada com a tensão de escoamento, para atestar a plastificação. Para os pontos cuja tensão equivalente alcançou ou superou a tensão de escoamento, calculam-se os incrementos de deformação e tensões plásticas, como descrito na seção seguinte.

### 3.2.1 Cálculo dos Incrementos Plásticos

Vimos, nas seções anteriores, que o comportamento plástico uniaxial é regido pela condição de algum critério de escoamento, isto é,

$$F(\sigma, k) = \sigma - \sigma_0 = 0 \quad (3.33)$$

Onde,  $F(\sigma, k)$  é uma função de escoamento sujeita a seguinte restrição,

$$F(\sigma, k) \leq 0 \quad (3.34)$$



A condição de escoamento, dada em (3.33), é válida para descrever o comportamento uniaxial, mas também pode ser trabalhada de forma generalizada para tratar qualquer combinação possível de tensões.

Adotando-se o critério de von Mises, pode-se escrever a expressão (3.18) da seguinte forma,

$$F(\sigma, k) = \sqrt{3J_2} - \sigma_0 = 0 \quad (3.35)$$

Por ser a plasticidade um fenômeno dependente do caminho, torna-se necessário o cálculo das diferenciais, ou dos incrementos de deformação plástica, através da história de carregamento para se obter as deformações acumuladas. Uma relação para a determinação do incremento de deformação plástica, devido a Simo e Hughes (1998), é a seguinte:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\Lambda} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\|} \quad (3.36)$$

onde  $\dot{\Lambda}$  é o multiplicador plástico, e  $f$  é a função de escoamento, que no caso de von Mises, para o estado plano de tensão, sua derivada com respeito à tensão se relaciona com o tensor das tensões desviadoras, na forma

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2\sigma_0} S \right) \quad (3.37)$$

Reescrevendo a equação (3.1) em termos de incrementos, temos,

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma} = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \bar{E} \dot{\varepsilon} - \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \bar{E} \dot{\varepsilon}^p \quad (3.38)$$

Substituindo o incremento de deformação plástica da equação (3.36), na equação (3.38), e isolando  $\dot{\Lambda}$ , obtemos,

$$\dot{\Lambda} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \bar{E} \dot{\varepsilon}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \bar{E} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)} \quad (3.39)$$

Assim, rearranjando a equação (3.36) e substituindo a equação (3.39) dentro desta, obtemos a expressão para o cálculo do incremento de deformação plástica, como sendo,

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\Lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \bar{E}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \bar{E} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)} \dot{\varepsilon} \quad (3.40)$$

Uma vez obtido o tensor taxa de deformação plástica, pela Lei de Hooke, calcula-se o incremento de tensão plástica, como

$$\dot{\sigma}_{ij}^p = \underline{E} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11}^p + \nu \dot{\varepsilon}_{22}^p \\ \dot{\varepsilon}_{22}^p + \nu \dot{\varepsilon}_{11}^p \\ \frac{1-\nu}{2} \dot{\varepsilon}_{12}^p \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A formulação do Método de Reciprocidade Dual para elastoplasticidade, em sua forma clássica, será apresentada no Capítulo 5. Para tal, faz-se necessário avaliar o tensor de tensões, dado na equação (3.41), em todos os pontos em que se discretizou o problema, contorno e interior, e, a partir daí, calcular a divergência desse tensor em cada um desses pontos. As tensões desviadoras - vide Eq. (2.6) no capítulo 2 – e a matriz elastoplástica no estado plano de tensão, são dadas, respectivamente, por

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \sigma_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{22} \\ \frac{2}{3} \sigma_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade do material e  $\nu$ , o coeficiente de Poisson. Para o Estado Plano de Deformação, basta substituir  $E$  e  $\nu$  por  $E'$  e  $\nu'$ , dados, respectivamente por

$$E' = \frac{1}{1-\nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (3.43)$$

## CAPÍTULO 4

### O MÉTODO DE RECIPROCIDADE DUAL

Uma das idéias centrais do Método dos Elementos de Contorno é a avaliação da equação integral nos pontos de contorno através do uso dos elementos definidos apenas no contorno. Este procedimento se torna mais difícil de aplicar na presença de integrais de domínio. Neste contexto, uma atenção maior tem sido dada à questão da transformação das integrais de domínio para o contorno, evitando-se, assim, a segunda discretização.

O procedimento clássico do MEC é de transformar a equação integral de contorno em representações algébricas através da divisão do contorno em elementos, admitindo-se uma aproximação para deslocamentos e forças de superfície em cada um. De forma análoga, é usual tratar-se os termos de domínio através de sua discretização em sub-regiões, denominadas células, para a obtenção das formas algébricas correspondentes. Em cada célula admite-se uma aproximação para a densidade, por meio de funções de forma, integrando-se individualmente cada uma delas.

A transformação das integrais de domínio em integrais de contorno tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores do MEC. Vários procedimentos para essa transformação têm sido propostos, tais como a técnica do tensor de Galerkin e o Método de Reciprocidade Múltipla, como apresentados no Capítulo 1, e o Método de Reciprocidade Dual apresentado a seguir.

O Método da Reciprocidade Dual (MRD), aparece como um procedimento geral de transformação, podendo ser aplicado a um grande número de problemas. Uma das características deste método é permitir tratar integrais de domínio envolvendo as incógnitas do problema, possibilitando também que diferentes tipos de problemas sejam avaliados de uma forma sistemática. Nas seções seguintes apresentaremos a formulação do DRM para o caso elástico, sendo que a formulação elastoplástica é dada no capítulo 5.

## 4.1 GENERALIDADES

Em elasticidade, os termos de domínio que aparecem devido às forças de corpo usuais, tais como as gravitacionais e as centrífugas, são de grau constante e linear, respectivamente, e facilmente levados ao contorno pelo uso da técnica do vetor de Galerkin. Por outro lado, em problemas de natureza termoelásticos, viscoelásticos, plásticos, dentre outros, aparecem pseudo forças de corpo que podem ser de qualquer tipo e grau e, geralmente, não podem ser tratada usando o vetor de Galerkin.

Uma questão importante em MRD e que tem sido assunto de muitas pesquisas, é a escolha da função de aproximação a usar com o método. Nardini e Brebbia (1982) usaram a função  $r$ , a mesma função que aparece na solução fundamental (Eqs. 2.28 – 2.30). O primeiro estudo desta função foi realizado por Yamada et al (1994), que identificou a função  $r$  como uma função *Radial Basis* de ordem linear. Neste mesmo estudo mostrou-se que esta função tem um comportamento “local” e as interpolações se dão na vizinhança de um ponto particular. Este trabalho deu início ao surgimento de várias outras funções para o uso com MRD.

Cheng et al. (1993), usou pela primeira vez as funções tipo “global” - embora tais funções já haviam sido mencionadas por Nardini e Brebbia (1982) - no qual as interpolações se davam sobre toda a geometria. Karur e Ramachandran (1995) estudaram as funções radiais para problemas de Poisson, considerando  $r$ ,  $r^3$ ,  $r^2 \log r$  (esta última é conhecida como TPS – *Thin Plate Spline*) e outras. Golberg e Chen (1994) sugeriram que uma ótima escolha para as funções de aproximação do MRD seria as *ATPS* (*Augmented Thin Plate Spline*), que consistem das funções *TPS* mencionadas acima, e acrescidas dos três primeiros termos da expansão global do Triângulo de Pascal: 1,  $x$  e  $y$ .

Estas funções foram implementadas em MRD para problemas de potencial por Karur e Ramachandran (1995) e para problemas de elasticidade com forças de corpo por Bridges e Wrobel (1996). Devido à presença das três funções acrescidas, a função *ATPS* é capaz de resolver problemas de forças de corpo de graus constante e linear, sem necessidade de pontos internos, sendo a convergência obtida com o aumento do número de elementos de contorno.

Atualmente, as funções do tipo “*Polyharmonic splines*” ( $f = r^{2n} \log r$ ) têm sido consideradas como a melhor opção para o caso 2D, mostrando convergência linear com o crescimento da ordem  $n$ , (Partridge & Sensale, 1997; Medeiros et al, 2000; Medeiros & Partridge, 2001).

Partridge e Sensale (1997) consideraram a função  $r^2 \log r$  acrescida de dez termos do Triângulo de Pascal, que é utilizada no presente trabalho, dada na expressão abaixo

$$f = r^2 \log r + 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, y^2x, y^3 \quad (4.1)$$

Sendo os dez termos acrescidos, correspondentes às quatro primeiras linhas do Triângulo de Pascal, como podemos ver na Figura 4.1 abaixo,

linha 1:	1
linha 2:	x   y
linha 3:	x <sup>2</sup> xy   y <sup>2</sup>
linha 4:	x <sup>3</sup> x <sup>2</sup> y   y <sup>2</sup> x   y <sup>3</sup>

Fig. 4.1 – Esquema de representação dos termos acrescidos da função adotada.

Foi mostrado que esta função é capaz de obter soluções a problemas com forças de corpo envolvendo funções conhecidas de ordem maior que um, como mostrado nos exemplos no fim do capítulo.

## 4.2 IMPLEMENTAÇÃO DE MRD

### 4.2.1 MRD para Elasticidade 2D

Partindo da formulação de elementos de contorno para elasticidade com forças de corpo, dada no capítulo 2, escrevemos a equação integral usual para um ponto  $i$  no contorno  $\Gamma$ , como sendo

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (4.2)$$

onde, em 2D,  $c_{lk}$  é uma matriz 2x2 obtida pela consideração de movimento de corpo rígido.

Usualmente, nos problemas de análises de tensões, as funções densidade de forças de corpo  $b_k$ , devido a cargas gravitacionais ou centrífugas, são funções constantes ou lineares, respectivamente. Logo, a integral de domínio pode ser levada ao contorno com a técnica do vetor de Galerkin. Por outro lado, em problemas termoelásticos, viscoelásticos e outros tipos de não-linearidade, é comum o aparecimento de forças de corpo tais que suas integrais de domínio não podem ser levadas ao contorno mediante Galerkin. Nesses casos, o MRD se adequa com facilidade para tal tratamento.

Considerando uma integral de domínio devido a uma função densidade de força de corpo  $b_k$  no domínio  $\Omega$ , para aplicar MRD, emprega-se a aproximação

$$b_k = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha_k^j \quad (4.3)$$

onde  $\alpha_k^j$  são coeficientes inicialmente desconhecidos e  $f_j$  são as funções de aproximação mencionadas acima.  $N$  é o número de pontos usados na discretização do contorno e  $L$  o número de pontos internos empregado (Partridge et al, 1992).

A equação (4.3) pode ser expandida da forma seguinte, caso as funções  $f_j$  sejam conhecidas.

$$b_k = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha_k^j = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \delta_{km} \alpha_m^j \quad (4.4)$$

Assim, podemos obter soluções particulares satisfazendo a equação de Navier dada por

$$\mu \hat{u}_{mk,il}^j + \frac{\mu}{1-2\nu} \hat{u}_{lk,lm}^j = \delta_{mk} f^j \quad (4.5)$$

Substituindo as equações (4.4) e (4.5) na equação (4.2) e aplicando o princípio de reciprocidade, obtemos

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left( c_{lk}^i \hat{u}_{mk}^{ij} + \int_{\Gamma} p_{lk}^* \hat{u}_{mk} d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^* \hat{p}_{mk} d\Gamma \right) \alpha_m^j \quad (4.6)$$

Onde  $\hat{p}_{mk}^j$  são as trações de superfície correspondentes às soluções particulares  $\hat{u}_{mk}^j$ .  $\hat{p}_{mk}^j$  podem ser obtidas fazendo

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{mkl} &= \frac{1}{2} (\hat{u}_{mk,l} + \hat{u}_{ml,k}) \\ \hat{\sigma}_{mkl} &= 2\mu \hat{\varepsilon}_{mkl} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \hat{\varepsilon}_{mij} \delta_{kl} \\ \hat{p}_{mk} &= \hat{\sigma}_{mkl} n_l \end{aligned} \quad (4.7)$$

A equação (4.6) é escrita somente com valores no contorno. Escrevendo a equação (4.7) em notação matricial, obtemos

$$c^i u^i = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left( c^i \hat{u}^{ij} + \int_{\Gamma} p^* \hat{u}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{p}^j d\Gamma \right) \alpha^j \quad (4.8)$$

Agora, o contorno  $\Gamma$  é discretizado em elementos como descrito no capítulo 2 e as funções  $u$ ,  $p$ ,  $\hat{u}$  e  $\hat{p}$  são aproximadas sobre os elementos usando funções de interpolação, a equação (4.8) se torna

$$c^i u^i + \sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} p_k = \sum_{j=1}^{N+L} \left[ c^i \hat{u}^{ij} + \sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} \hat{u}_k^j - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{p}_k^j \right] \alpha^j \quad (4.9)$$

Aplicando a equação (4.9) a todos os nós do contorno, obtém-se

$$Hu - Gp = (H\hat{u} - G\hat{p})\alpha \quad (4.10)$$

Conhecendo a função  $\alpha$ , esta equação pode ser resolvida para obtermos valores de  $u$  e  $p$  no contorno. Para isto, fazemos

$$\alpha = F^{-1}b \quad (4.11)$$

Onde a matriz  $F$  é construída usando as funções de aproximação. A matriz  $F$  para a função considerada aqui é dada na próxima seção.

#### 4.2.2 Implementação da Função $f = r^2 \log r$ e os termos acrescidos

Chamando de  $f(r)$  a RBF  $r^2 \log r$  e de  $a^l$  as funções dos termos acrescidos, podemos reescrever a equação (4.3) como,

$$b_k^i = \sum_{j=1}^{N+L} f(r) \delta_{km} \alpha_m^j + \sum_{l=N+L+1}^{N+L+A} a(x_i, y_i)^{l-N-L} \delta_{km} \alpha_m^l \quad (4.12)$$

Onde  $r = \sqrt{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]}$ ,  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas do ponto  $i$  no qual  $b$  está sendo aproximado, e  $(x_j, y_j)$  são as coordenadas dos pontos de colocação  $j$  do contorno ou interior. A função  $f(r)$  depende desses dois pontos e, os termos acrescidos dependem apenas das coordenadas  $(x_i, y_i)$ , uma vez que esses termos são globais. Expandindo a função densidade de forças de corpo no ponto  $P_i$ , em termos da função dada na Eq. (4.1), resulta em,

$$\begin{aligned} b_k(P_i) &= \sum_{j=1}^{N+L+10} f(P_i, Q_j) \alpha_k(Q_j) = f(P_i, Q_j) \alpha_k(Q_j) = \sum_{j=1}^{N+L} r^2 \log(r) \delta_{km} \alpha_m^j + \delta_{km} \alpha_m^{N+L} \\ &+ x_i \delta_{km} \alpha_m^{N+L+2} + y_i \delta_{km} \alpha_m^{N+L+3} + x_i^2 \delta_{km} \alpha_m^{N+L+4} + x_i y_i \delta_{km} \alpha_m^{N+L+5} + y_i^2 \delta_{km} \alpha_m^{N+L+6} \\ &+ x_i^3 \delta_{km} \alpha_m^{N+L+7} + x_i^2 y_i \delta_{km} \alpha_m^{N+L+8} + y_i^2 x_i \delta_{km} \alpha_m^{N+L+9} + y_i^3 \delta_{km} \alpha_m^{N+L+10} \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde  $Q_j$  é o ponto de colocação. Este procedimento gera  $2(N+L)$  equações e  $2(N+L+10)$  incógnitas, o que leva a necessidade de aplicar 20 condições adicionais para calcular os somatórios devido os termos acrescidos, isto é,



$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N+L} \alpha_m^j &= \sum_{j=1}^{N+L} x_j \alpha_m^j = \sum_{j=1}^{N+L} y_j \alpha_m^j = \sum_{j=1}^{N+L} x_j^2 \alpha_m^j = \sum_{j=1}^{N+L} x_j y_j \alpha_m^j = \sum_{j=1}^{N+L} y_j^2 \alpha_m^j = \sum_{j=1}^{N+L} x_j^3 \alpha_m^j = \\
\sum_{j=1}^{N+L} x_j^2 y_j \alpha_m^j &= \sum_{j=1}^{N+L} y_j^2 x_j \alpha_m^j = \sum_{j=1}^{N+L} y_j^3 \alpha_m^j = 0 \quad m = 1, 2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Escrevendo a equação (4.6) na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^{N+L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1(N+L)} & \mathbf{I} & x_1 \mathbf{I} & y_1 \mathbf{I} & x_1^2 \mathbf{I} & x_1 y_1 \mathbf{I} & y_1^2 \mathbf{I} & \cdots & y_1^3 \mathbf{I} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2(N+L)} & \mathbf{I} & x_2 \mathbf{I} & y_2 \mathbf{I} & x_2^2 \mathbf{I} & x_2 y_2 \mathbf{I} & y_2^2 \mathbf{I} & \cdots & y_2^3 \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{(N+L)(N+L)} & \mathbf{I} & x_n \mathbf{I} & y_n \mathbf{I} & x_n^2 \mathbf{I} & x_n y_n \mathbf{I} & y_n^2 \mathbf{I} & \cdots & y_n^3 \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 \mathbf{I} & x_2 \mathbf{I} & \cdots & x_{(N+L)} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 \mathbf{I} & y_2 \mathbf{I} & \cdots & y_{(N+L)} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1^2 \mathbf{I} & x_2^2 \mathbf{I} & \cdots & x_{(N+L)}^2 \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 y_1 \mathbf{I} & x_2 y_2 \mathbf{I} & \cdots & x_{(N+L)} y_{(N+L)} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1^2 \mathbf{I} & y_2^2 \mathbf{I} & \cdots & y_{(N+L)}^2 \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1^3 \mathbf{I} & y_2^3 \mathbf{I} & \cdots & y_{(N+L)}^3 \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{N+L} \\ \alpha^{N+L+1} \\ \alpha^{N+L+2} \\ \alpha^{N+L+3} \\ \alpha^{N+L+4} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha^{N+L+10} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

onde  $b^i = [b_1^i, b_2^i]$ ,  $\alpha^i = [\alpha_1^i, \alpha_2^i]$  e  $I$  é uma matriz de Identidade  $2 \times 2$ . Logo,  $f_{ik} = f(P_i, Q_k)I$ .

Na expressão acima, temos que cada entrada de  $\mathbf{F}$  é composta de submatrizes  $2 \times 2$  do tipo  $f^{ij} \mathbf{I}$  e cada entrada de  $\mathbf{b}$  e  $\alpha$  são de tamanho 2, o que leva  $\mathbf{F}$  a ser de ordem  $2(N + L + A)$  e  $\mathbf{b}$  e  $\alpha$ , de tamanho  $2(N + L + A)$ , para isso, são adicionados  $2A$  zeros no final do vetor  $\mathbf{b}$ . As matrizes  $\hat{U}$  e  $\hat{P}$ , dadas na Eq. (4.13), são de tamanhos  $2(N + L) \times 2(N + L + A)$  e as demais matrizes e vetores possuem os tamanhos convencionais do MEC.

### 4.2.3 Soluções Particulares

O emprego de soluções particulares em problemas de natureza não-linear, sempre foi objeto de estudo de muitos pesquisadores. Esses tipos de soluções são, em muitos casos, obtidas por meio de tentativas e erros, o que leva a uma complexidade a medida em que cresce a ordem das funções.

Em problemas de elasticidade, as soluções particulares para  $\hat{u}$  e  $\hat{p}$  são obtidos como indicados em Bridges & Wrobel (1996). Considerando então a *RBF*  $f(r)$  dada, temos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) \right) \right) = \frac{f(r)}{\mu} \quad (4.16)$$

onde  $\phi(r)$  é obtido integrando-se quatro vezes e colocando as constantes de integração como zero. Em seguida, aplica-se o tensor de Galerkin, para calcular a solução particular para  $\hat{u}$ , da seguinte forma:

$$G_{lk}(r) = \phi(r) \delta_{lk} \quad \hat{u}_{lk} = G_{lk,mm}(r) - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{mk,lm}(r) \quad (4.17)$$

Este procedimento fornece para  $f_{lk} = r^2 \log r \delta_{lk}$ , os seguintes valores para  $\hat{u}$  e  $\hat{p}$ :

$$\hat{u}_{lk} = \frac{1}{576(1-\nu)\mu} \left[ \{3(11-12\nu)\log(r) + 2(9\nu-8)\} \delta_{lk} - (12\log(r)-5)r_{,l}r_{,k} \right] r^4$$

$$\hat{p}_{lk} = \frac{1}{288(1-\nu)} \left[ \begin{aligned} & \{ (18\nu-13) + 12(5-6\nu)\log(r) \} \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{lk} + r_{,l}n_{,k} \right) - \\ & \{ (12\log(r)-5) + 18\nu(1-4\log(r)) \} r_{,k}n_{,l} - 2(1+12\log(r))r_{,l}r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned} \right] r^3 \quad (4.18)$$

Os termos em x da equação (4.19) são escritos na forma da equação (4.17) como,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right) \right) \right) = \frac{f(x)}{\mu} \quad (4.19)$$

Onde, expandindo para os termos acrescidos, por exemplo, para o caso de  $f_{lk} = \delta_{lk}$  ou, para o primeiro termo  $f = 1$ , temos,

$$\hat{u}_{lk} = \frac{1}{32(1-\nu)\mu} \left[ (7-8\nu)\delta_{lk} - 2r_{,l}r_{,k} \right] r^2$$

$$\hat{p}_{lk} = \frac{1}{8(1-\nu)} \left[ (3-4\nu)(r_{,l}n_{,k} + r_{,m}n_{,m}\delta_{lk}) + (4\nu-1)r_{,k}n_{,l} \right] r$$

onde  $r = \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}$ .

Para os termos  $x, x^2$ , etc., um termo genérico em  $x^m$  pode ser adotado para obtenção das soluções particulares, como visto em (4.21). Este procedimento pode ser adotado para os termos  $y, y^2$ , etc., bastando apenas substituir  $x$  por  $y$  e os índices 1 por 2.

$$\hat{u}_{lk} = \frac{x^{m+2}}{\mu(m+2)(m+1)} \left[ \delta_{lk} - \frac{\delta_{1l}\delta_{1k}}{2(1-\nu)} \right] \quad (4.21)$$

$$\hat{p}_{lk} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[ \left( \delta_{lk} - \frac{\delta_{1l}\delta_{1k}}{(1-\nu)} \right) n_1 + \delta_{1l} n_k + \frac{\nu \delta_{1k}}{(1-\nu)} n_l \right]$$

Para o caso do termo  $xy$ , as expressões são dadas por,

$$\begin{aligned} \hat{u}_{lk} &= \frac{1}{12\mu} [(x^3 y + y^3 x) \delta_{lk} - \frac{1}{8(1-\nu)} \{4(x^3 y \delta_{1l} \delta_{1k} + y^3 x \delta_{2l} \delta_{2k}) \\ &\quad + (x^4 + y^4)(\delta_{1l} \delta_{2k} + \delta_{2l} \delta_{1k})\}] \\ \hat{p}_{lk} &= \frac{1}{12(1-\nu)} [3xy(xn_1 \delta_{1l} \delta_{1k} + yn_2 \delta_{2l} \delta_{2k}) + (x^3 \delta_{1l} + y^3 \delta_{2l})(\delta_{1k} n_2 + \delta_{2k} n_1) \\ &\quad + \nu [\delta_{1k} y(3x^2 + y^2) + \delta_{2k} x(3y^2 + x^2)] n_l + \frac{1}{12} [y(3x^2 + y^2)(n_1 \delta_{lk} + \delta_{1l} n_k) \\ &\quad + x(3y^2 + x^2)(n_1 \delta_{lk} + \delta_{1l} n_k)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

#### 4.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, mostraremos alguns resultados de exemplos da literatura que foram utilizados para testar a função considerada e o efeito dos termos acrescidos, discutidos aqui, para forças de corpo como as gravitacionais e as de temperatura. E ainda, o programa implementado será testado com um exemplo que permitirá a análise exclusiva do MRD, uma vez que o problema não possui condição de contorno de carregamento, sendo considerada uma força de corpo  $bx = 1$ .

- Exemplo 1: forças gravitacionais (Sensale, 1997)

Para a viga da Figura 4.2 , considerou-se um Módulo de Elasticidade  $E = 10^4$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . Os resultados, para malhas com 12, 24, 48 e 96 elementos, dos deslocamentos verticais no ponto P, obtidos com as *ATPS*, são comparados com aqueles obtidos por Wrobel e Bridges (1996), como podemos ver no gráfico da Figura 4.3.

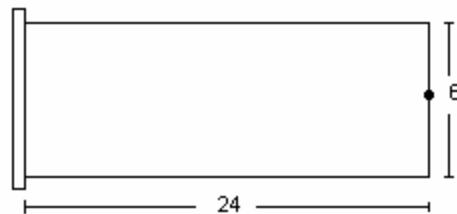


Fig. 4.2 – Geometria para problema com carregamento cúbico e sinusoidal.

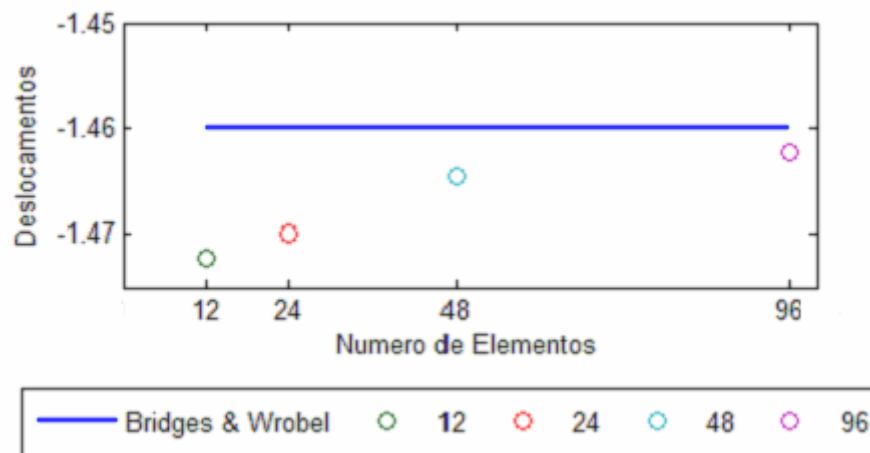


Fig. 4.3 – Resultados de deslocamentos para o ponto na extremidade livre da viga.

- Exemplo 2: forças térmicas (Sensale, 1997)

Para a viga da Figura 4.4, considerou-se uma distribuição de temperatura, dado por De Paula & Nonato (1996), como  $\theta = -200y^2$ , sendo mantido nos lados, inferior e superior, a temperatura de  $-50^\circ$  e uma distribuição normal de tensões dada por  $\sigma_{xx} = -E\alpha\theta$ . O coeficiente de expansão térmica é  $\alpha = 10^{-5}$ , Módulo de Elasticidade  $E = 1000$  e  $\nu = 0.3$ . Os resultados, extraídos de Sensale (1997), são comparados com a solução analítica e com

outras técnicas como células, tensor de Galerkin e MRM, como pode ser visto na Tabela 4.1 abaixo. Observa-se que os resultados obtidos com MRD são idênticos aos analíticos.

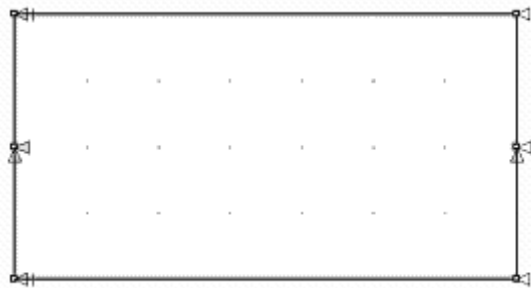


Fig. 4.4 – Geometria para o problema de carregamento térmico.

Tabela 4.1 – Tensões devido carregamento térmico quadrático.

Cord Y	Analítico	Células	Galerkin	MRM	MRD
0	0	-0.0363	-0.0363	-0.0363	0
0.1250	0.3125	0.2772	0.2772	0.2772	0.3125
0.2500	1.2500	1.2087	1.2087	1.2087	1.2500
0.3750	2.8125	2.8077	2.8077	2.8077	2.8125
0.5000	5.0000	4.7816	4.7816	4.7816	5.0000

- Exemplo 3: o exemplo da Figura 4.2 e rodado com o programa *bemoop* desenvolvido aqui, é modelado com 12 elementos quadráticos e 7 pontos internos, conforme visto na Figura 4.5 abaixo. As propriedades do material são  $E = 0.1E5$  e  $\nu = 0.3$ . Os resultados obtidos com o programa *bemoop* são comparados com a solução analítica, conforme Tabela 4.2 e gráfico da Figura 4.6 abaixo.

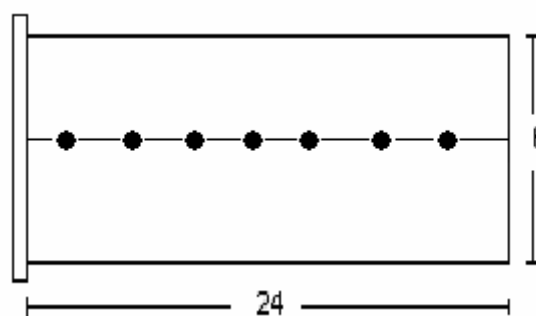


Fig. 4.5 – Modelo discreto com 7 pontos internos.

Tabela 4.2 – Deslocamentos e Tensão Normal

Pontos	u (DRM)	u (Exato)	$\sigma$ (DRM)	$\sigma$ (Exato)
0.25	0.438 e-4	0.469 e-4	1.78	1.78
0.50	0.887 e-4	0.875 e-4	1.51	1.50
0.75	1.230 e-4	1.220 e-4	1.25	1.25
1.00	1.510 e-4	1.500 e-4	1.00	1.00
1.25	1.730 e-4	1.720 e-4	0.75	0.75
1.50	1.880 e-4	1.830 e-4	0.50	0.50
1.75	1.980 e-4	1.970 e-4	0.23	0.25

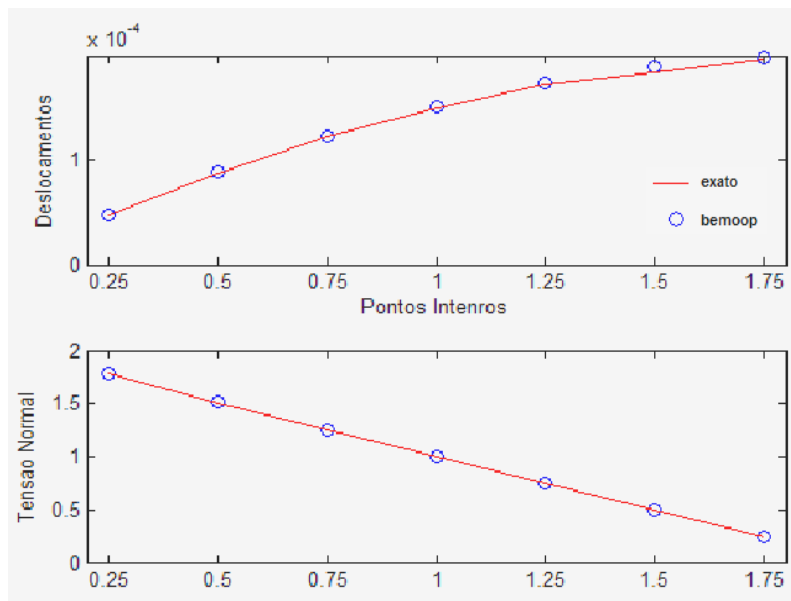


Fig. 4.6 – Resultados de deslocamentos e tensões para carga gravitacional.

## CAPÍTULO 5

### FORMULAÇÃO DO MEC/MRD ELASTOPLÁSTICA

Neste capítulo, tratamos de apresentar uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para meios elastoplásticos, baseada em Brebbia et al (1984). Uma vez que esse tipo de formulação requer o cálculo de uma integral de domínio, o Método de Reciprocidade Dual será empregado para o tratamento dessa integral. Inicialmente, faremos uma breve revisão das equações constitutivas envolvidas e da equação integral inelástica, e em seguida, apresentaremos as formulações para o MEC/DRM e a implementação da análise elastoplástica

#### 5.1 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

No contexto da teoria das pequenas deformações, a deformação total para problemas inelásticos é dada por,

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^a \quad (5.1)$$

onde a soma da última igualdade representa, respectivamente, as porções elásticas e inelásticas da deformação total.

As condições de equilíbrio, válidas no interior de um corpo e no contorno do mesmo, podem ser expressas, respectivamente, por,

$$\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{b}_j = 0 \quad (5.2)$$

$$\dot{p}_i - \dot{\sigma}_{ij}n_j = 0 \quad (5.3)$$

Considerando as deformações inelásticas como deformações iniciais (provenientemente de efeitos plásticos, viscoplásticos, térmicos e outros), a aplicação da lei de Hooke para a parte elástica do tensor deformação total resulta na seguinte expressão para as componentes de tensões:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^a) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\dot{\varepsilon}_{ll} - \dot{e})\delta_{ij} \quad (5.4)$$

sendo  $\dot{e} = \dot{\varepsilon}_{kk}^a$  a deformação inelástica dilatacional. Esta mesma equação pode ser escrita em termos de tensões iniciais como,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a \quad (5.5)$$

onde  $\dot{\sigma}_{ij}^a$  representa as componentes das tensões iniciais.

Substituindo a equação (5.4) dentro das equações (5.2) e (5.3) juntas com a equação (5.1), obtém-se a forma estendida da equação de Navier e a equação que representa suas condições de contorno em tração, que expressas em termos de pseudo forças de corpo e pseudo trações, tem-se, respectivamente,

$$\dot{u}_{j,ll} + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{l,lj} = -\frac{\hat{b}}{G} \quad (5.6)$$

$$\hat{p}_i = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{l,l}n_i + G(\dot{u}_{i,j}\dot{u}_{j,i})n_j \quad (5.7)$$

Sendo as pseudo forças de corpo e de tração de superfície, dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \hat{b}_j &= \dot{b}_j - \dot{\sigma}_{ij,i}^a \\ \hat{p}_i &= \dot{p}_i + \dot{\sigma}_{ij}^a\eta_j \end{aligned} \quad (5.8)$$



A equação (5.6) representa um conjunto de três equações diferenciais parciais quase-linear para as taxas de deslocamentos. Note-se a presença dos termos inelásticos no lado direito.

## 5.2 EQUAÇÃO INTEGRAL INELÁSTICA

Partindo da equação de equilíbrio, dada em (5.2), aplicando-se as condições de contorno de (2.15) e (2.16) e assumindo uma solução  $u_j$ , o erro introduzido pode ser minimizado através de uma demonstração dos resíduos ponderados como,

$$\int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{jk,j} + \dot{b}_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (\dot{p}_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_k - \dot{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (5.9)$$

Considerando as mesmas constantes materiais (E, G e  $\nu$ ) para a aproximação e para o campo de ponderação, e integrando por parte o primeiro termo da equação (5.9), chega-se a seguinte expressão:

$$-\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \dot{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_k - \dot{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (5.10)$$

Substituindo as tensões iniciais, dadas na equação (5.5), na equação (5.10), obtemos,

$$-\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk}^e \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk}^a \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \dot{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_k - \dot{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (5.11)$$

Integrando por partes novamente o primeiro termo, substituindo  $\sigma_{jk,j}^* = -b_k^*$ , onde  $b_k^*$  é dado na seção 2.3.2, pode-se obter para cada carga pontual unitária  $e_i$ , a seguinte equação em termos de tensão inicial:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{p}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{b}_j(x) d\Omega(x) + \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(\xi, x) \dot{\sigma}_{jk}^a(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Esta equação é a contraparte inelástica da equação integral de contorno, onde, para escrevê-la na forma de deformações iniciais basta substituir a última integral por

$$\int_{\Omega} \sigma_{jki}^*(\xi, x) \dot{\varepsilon}_{jk}^a(x) d\Omega(x) \quad (5.13)$$

Muitas são as alternativas de formulação para tratar a integral inelástica. Uma das mais usuais, devido a Telles e Brebbia (1981), é a consideração das pseudo-forças de corpo e pseudo-trações de superfícies, na qual a equação (5.13) pode ser escrita em termos de derivadas de  $u_{ij}^*$ , da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jki}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ G(u_{ij,k}^* + u_{ik,j}^*) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{il,l}^* \delta_{jk} \right\} \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega \quad (5.14)$$

Integrando por partes a equação (5.14) e substituindo-a na equação (5.12), chega-se a seguinte formulação inelástica, na qual trações e forças de corpo são fictícias (podendo haver trações e forças de corpo reais), mas os deslocamentos são reais.

$$c_{ij} \dot{u}_j = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{\hat{p}}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* \dot{\hat{b}}_j d\Omega \quad (5.15)$$

onde  $\dot{\hat{p}}_j$  e  $\dot{\hat{b}}_j$  são dados nas equações de (5.8).

As tensões internas são calculadas da forma usual do MEC, empregando as equações (5.1) e (5.4) na expressão para os deslocamentos de (5.15) e corrigindo devido às tensões fictícias, da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ijk}^* \dot{\hat{p}}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ijk}^* \dot{\hat{b}}_k d\Omega - C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^a \quad (5.16)$$

Os tensores presentes nas equações (5.12) e (5.13) se relacionam com as soluções fundamentais, para o plano das deformações, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ijkl}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \{ & 2(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k}r_{,l} + \delta_{kl}r_{,i}r_{,j}) + 2\nu(\delta_{li}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,l}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,l}r_{,j} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) \\ & - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} + (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{jk}\delta_{li}) - (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{kl} \} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ & (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{jk}\delta_{li} - \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}) + 2\nu(\delta_{li}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,l}r_{,i} \\ & + \delta_{ik}r_{,l}r_{,j} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \} \end{aligned}$$

### 5.3 FORMULAÇÃO DO MEC PARA MEIOS ELASTOPLÁSTICOS

#### 5.3.1 Equação Integral de Contorno em Plasticidade

A partir da Eq. (5.1), considerando como efeito inelástico apenas o plástico, podemos reescrevê-la como,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (5.18)$$

onde os termos do segundo membro correspondem às partes instantânea e diferida da deformação, respectivamente, sendo dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^e &= E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\Lambda} \dot{\varepsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde  $\dot{\Lambda}$  é a matriz elastoplástica dada no capítulo 3.

Aplicando a Lei de Hooke na equação (5.18), temos,

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^p = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (5.20)$$

Se o estado correspondente às forças de corpo  $\dot{b}_j^*$  e de superfícies  $\dot{p}_j^*$ , é elástico, segundo Brebbia et al (1984), é válida a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} p_j \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_j \dot{u}_i d\Omega \quad (5.21)$$

Substituindo a equação (5.20) em (5.21), obtemos a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} p_j \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_j \dot{u}_i d\Omega \quad (5.22)$$

Aplicando-se a simetria do tensor elástico a primeira integral do segundo membro da equação (5.22), tem-se,

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} E_{klij} \varepsilon_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega \quad (5.23)$$

Substituindo o termo  $E_{klij} \dot{\varepsilon}_{ij}$  da equação (5.20) na equação anterior, obtemos

$$\int_{\Omega} E_{klij} \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (5.24)$$

onde a última integral representa o efeito da deformação plástica nos deslocamentos e forças no contorno, como visto na Eq. (5.12).

Substituindo a expressão anterior em (5.22), e o resultado desta na primeira integral da equação (5.21), obtemos a expressão dada por Brebbia et al (1984), como

$$\int_{\Gamma} \dot{p}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* \dot{u}_i d\Omega \quad (5.25)$$

Utilizando novamente a simetria do tensor de tensões, agora sendo aplicada ao tensor plástico  $\dot{\sigma}_{ij}^p$ , e substituindo o resultado na equação anterior, temos

$$\int_{\Gamma} \dot{p}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* \dot{u}_i d\Omega \quad (5.26)$$

Esta equação pode ser modificada, se considerarmos que as componentes das forças de volume  $b_i^*$  correspondem a forças unitárias aplicadas em um ponto  $\xi$  interior ao domínio  $\Omega$  na direção de cada um dos vetores unitários  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ . Desta forma, podemos representar essa força na forma  $b_i^* = \delta(\xi - q)e_i$ , onde  $q$  é qualquer ponto do domínio  $\Omega$  e  $\delta$  é a função delta de Dirac, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma} \dot{p}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i d\Gamma + \dot{u}_i(\xi) e_i \quad (5.27)$$

Aplicando-se uma força concentrada unitária  $b_k^*$  na direção do vetor  $e_k$  e, escrevendo para cada componente  $k$ , a equação (5.27) se torna,

$$\dot{u}_k(\xi) = \int_{\Gamma} \dot{p}_i u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki,j}^* d\Omega - \int_{\Gamma} p_{kl}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (5.28)$$

Nesta equação, o problema elástico representado por um asterisco, encontra-se resolvido nos diversos livros de elasticidade e por diferentes métodos analíticos, tais como a função de Airy (Timoshenko & Goodier, 1968), o tensor de Galerkin, dentre outros.

A equação (5.28) traz uma peculiaridade quando o ponto  $\xi$  de aplicação da carga unitária encontra-se no contorno  $\Gamma$  da região  $\Omega$ , que é o aparecimento do valor do raio  $r(\xi, q)$ , com  $\xi = q$ , na expressão de  $u^*$ , se anulando, isto é, as integrais do contorno tornam-se singular. Esse problema foi resolvido, conforme Brebbia (1984), no qual ele transformou esta equação numa similar, usando para isso o tensor dado na equação (2.29) em que o aparecimento do coeficiente  $c_{ki}$ , que leva em consideração esse problema, é calculado a partir das considerações de corpo rígido. O resultado disso é a seguinte expressão:

$$c_{ki}\dot{u}_i(\xi) = \int_{\Gamma} \dot{p}_i u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki,j}^* d\Omega - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (5.29)$$

Considerando que os efeitos inelásticos são unicamente plásticos, podemos escrever as equações de (5.8) como,

$$\begin{aligned} \dot{b}_i^p &= -\dot{\sigma}_{ij,j}^p \\ \dot{p}_i^p &= \sigma_{ij}^p n_j \end{aligned} \quad (5.30)$$

Pelo teorema da divergência, a integral que contém o termo plástico da equação (5.29), se torna,

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki,j}^* d\Omega = -\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{i,j}^p u_{ki}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki}^* n_j d\Gamma \quad (5.31)$$

Substituindo os termos de (5.30) na equação anterior, obtemos

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b}_i^p u_{ki}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{p}_i^p u_{ki}^* d\Gamma \quad (5.32)$$

Aplicando o resultado da equação (5.32) na solução fundamental para deslocamentos, dada pela equação (2.28), tem-se a seguinte expressão para as variáveis de contorno que incluem as pseudo forças:

$$c_{ki}\dot{u}_i = \int_{\Gamma} (\dot{p}_i + \dot{p}_i^p) u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} (\dot{b}_i + \dot{b}_i^p) u_{ki}^* d\Omega - \int_{\Gamma} \dot{p}_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (5.33)$$

### 5.3.2 Cálculo do Tensor de Tensões em Pontos Internos

A partir da equação (5.33) podemos calcular os deslocamentos internos da forma clássica do MEC usando  $c_{ki} = \delta_{ki}$  e a partir das equações dadas em (5.18), (5.19) e (5.20), de forma que

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (5.34)$$

Do tensor elástico  $E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$  podemos deduzir, na forma clássica do MEC, conforme Brebbia et al (1984), a seguinte expressão:

$$E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* (\dot{p}_k + \dot{p}_k^p) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}^* (\dot{b}_k + \dot{b}_k^p) d\Omega - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma \quad (5.35)$$

Onde os tensores  $D_{ijk}^*$  e  $S_{ijk}^*$  para duas dimensões, são dados respectivamente por,

$$D_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ik} - r_k \delta_{ij}) + 2r_i r_j r_k] \quad (5.36)$$

$$S_{ijk}^* = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} &2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ik} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_i r_j r_{,k}] + 2\nu (n_i r_j r_{,k}) \\ &+ n_j r_i r_{,k} + (1-2\nu)(2n_k r_i r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \end{aligned} \right\}$$

Das equações (5.34) e (5.35) podemos determinar o tensor de tensões para pontos internos ao domínio, pela seguinte expressão:

$$\dot{\sigma}_{ik} = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* (\dot{p}_k + \dot{p}_k^p) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}^* (\dot{b}_k + \dot{b}_k^p) d\Omega - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma - \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (5.37)$$

#### 5.4 USO DO DRM PARA ELIMINAR A INTEGRAL DE DOMÍNIO

No capítulo anterior, vimos o emprego do MRD a problemas onde a integral de domínio é devido a uma função densidade de forças de corpo. Agora, o MRD será empregado usando como função de aproximação a pseudo força de corpo, na ausência de forças de corpo, dada por

$$\dot{b}_i^p = -\dot{\sigma}_{ij,j}^p \quad (5.38)$$

Para tal, emprega-se o MRD em sua forma clássica usando a função de aproximação, dada na equação (4.1), para modelar a equação (5.38). Isto é, para empregar o MRD, faz-se necessário avaliar as tensões em todos os pontos em que se discretizou o problema, contorno e interior, e, em seguida obter a divergência do tensor de tensões em cada um dos pontos.

##### 5.4.1 Avaliação do Tensor de Tensões em Pontos Internos

Para o cálculo do tensor de tensões em pontos internos, utilizamos a equação (5.20), a partir da qual expressamos a imagem do tensor taxa de deformação como sendo,

$$E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (5.40)$$

Segundo Partridge et al. (1992), as tensões em pontos internos pelo MRD usual podem ser calculadas a partir da imagem do tensor taxa de deformação, dada na equação (5.35), pela seguinte equação:



$$E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{lk} = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* (\dot{p}_k + \dot{p}_k^p) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma + \sum_{m=1}^M \left( \hat{D}_{ijh}^m + \int_{\Gamma} S_{ijk}^* \hat{u}_{hk}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} D_{ijk}^* \hat{p}_{hk}^m d\Gamma \right) \dot{\alpha}_h^m \quad (5.41)$$

Logo, das equações (5.20) e (5.41) podemos calcular as tensões nos pontos internos com a seguinte expressão:

$$\dot{\sigma}_{kl} = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* (\dot{p}_k + \dot{p}_k^p) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma - \dot{\sigma}_{ij}^p + \sum_{m=1}^M \left( \hat{D}_{ijh}^m + \int_{\Gamma} S_{ijk}^* \hat{u}_{hk}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} D_{ijk}^* \hat{p}_{hk}^m d\Gamma \right) \dot{\alpha}_h^m \quad (5.42)$$

#### 5.4.2 Avaliação do Tensor de Tensões no Contorno

O MEC calcula com precisão os valores dos vetores taxa de deslocamentos  $\dot{u}_i$ , e trações  $\dot{p}_i$ , nos pontos em que se discretizou o contorno. Também permite calcular as derivadas das taxas de deslocamentos com respeito à coordenada tangencial  $\xi$ , mediante as seguintes funções de forma:

$$\dot{u}_i = \sum \phi^n \dot{u}_i^n \quad \frac{\partial \dot{u}}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial \phi^n}{\partial \xi} \dot{u}_i^n \quad (5.43)$$

Para se determinar o tensor de tensões no contorno, basta aplicar na equação (5.20), a lei de Hooke, a fórmula de Cauchy e a derivação de uma função composta para obter o seguinte conjunto de equações:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^p$$

$$\dot{p}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi}$$

Onde  $\mu$  é o módulo cizalhante,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $n_i$ , as componentes do vetor normal à superfície de contorno.

Segundo Kane (1994), com os cossenos diretores  $n_1 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi}$  e  $n_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial \xi}$  pode-se escrever um sistema composto de sete equações algébricas, da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -\lambda \\ n_1 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\mu & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,1} \\ \dot{u}_{1,2} \\ \dot{u}_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\sigma}_{11}^p \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ -\dot{\sigma}_{22}^p \\ \dot{u}_{1,\xi} \\ -\dot{\sigma}_{12}^p \\ \dot{u}_{2,\xi} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

onde  $a = -\lambda - 2\mu$  e  $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$

A resolução do sistema (5.45) permite calcular o tensor de tensões em cada um dos pontos do contorno discretizado.

### 5.4.3 Cálculo da Divergência do Tensor Plástico

Para avaliar numericamente a divergência do tensor plástico  $\dot{\sigma}_{ij}^p$ , isto é,  $\dot{\sigma}_{i,j}^p$ , empregamos a técnica usual de aproximação do MRD (vide Eq. (4.3)) para  $b_j$  no ponto  $Y$ , da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_{ij}^p \cong \sum_{j=1}^{N+L} f^j \dot{\beta}_{ij} \quad (5.46)$$

Derivando em relação a  $x_j$ , a equação (5.46) se torna,

$$\dot{\sigma}_{ij,j}^p \cong \sum_{i=1}^{N+L} f_{,j} \dot{\beta}_{ij} \quad (5.47)$$

Escrevendo as equações (5.46) e (5.47) na forma matricial, temos, respectivamente

$$\dot{\sigma}^p = F \dot{\beta} \quad (5.48)$$

$$\nabla \dot{\sigma}^p = \nabla F \dot{\beta}$$

Eliminado-se  $\dot{\beta}$  das equações em (5.48), obtemos

$$\nabla \dot{\sigma}^p = \nabla F F^{-1} \dot{\sigma}^p \quad (5.49)$$

Substituindo a equação (5.49) na equação (5.38), podemos calcular  $\dot{b}^p$  como sendo,

$$\dot{b}^p = -\nabla F F^{-1} \dot{\sigma}^p \quad (5.50)$$

Por fim, escrevendo este termo na equação básica do MRD (vide Eq. (4.10)), temos

$$Hu - Gp = -(H\hat{u} - G\hat{p})F^{-1}\nabla F F^{-1}\dot{\sigma}^p \quad (5.51)$$

## 5.5 PROPOSTAS PARA O CÁLCULO DE $b$ NO CASO PLÁSTICO

Observando a equação (5.33), vemos que o comportamento plástico se caracteriza pela presença dos termos  $\dot{\sigma}_{ij}^p \quad \dot{p}_i^p \quad \dot{b}_i^p$ . Nas seções seguintes, veremos como avaliar a integral de domínio e o termo da pseudo força de corpo. No Apêndice B, vemos

uma proposta para a avaliação dos termos de domínio, usando o Método das Diferenças Finitas na aproximação de  $b$ .

### 5.5.1 Discretização da Equação Integral Plástica

Aplicando-se o processo de discretização usual do MEC na equação (5.28), chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$H\dot{U} = G\dot{P} + \dot{B} + \dot{D} \quad (5.52)$$

Onde  $\dot{D}$  dá a influencia das deformações plásticas nos deslocamentos e forças de contorno. Assim, caso não haja plastificação do meio, este será identicamente nulo. Os demais termos têm seus análogos usuais do MEC. Após imposição das condições de contorno, o sistema assume a seguinte forma:

$$A\dot{X} = \dot{F} + \dot{D} \quad (5.53)$$

Onde a matriz  $A$  é a mesma usada na solução do problema em regime elástico e não sofre alteração. O vetor  $\dot{F}$ , que define o passo de carga, é proporcional ao vetor  $F$  do sistema e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{F} = F \cdot \left( \frac{1 - \lambda}{npc} \right) \quad (5.54)$$

onde  $npc$  é o número de passo de carga. Assim, deve-se fazer atualização apenas no vetor  $\dot{D}$  em cada iteração do processo.

### 5.5.2 Cálculo do Vetor $\dot{D}$

Para determinar o vetor  $\dot{D}$ , a seguinte integral deve ser avaliada:

$$\dot{D}_j = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (5.55)$$

No Apêndice A, vemos como obter o vetor  $\dot{D}$  por meio de células. Aqui, o Método de Reciprocidade Dual será demonstrado nas formas usual e modificada, para avaliação dessa integral.

#### 5.5.2.1 MRD na sua forma clássica

Para o cálculo da integral acima, empregamos a técnica usual de aproximação do MRD para o tensor plástico, dada na equação (5.46), e derivamos em relação a  $x$  para obtermos seu divergente como na equação (5.47), isto é, arranjando na forma matricial esta integral e aplicando MRD, temos:

$$\sigma^p = F\alpha \quad (5.56)$$

onde  $F$  é a matriz das funções de aproximação, dada na Eq. (4.15), e  $\alpha$  são coeficientes a determinar.

Derivando a equação anterior em relação a  $x$ , e eliminando-se  $\alpha$ , obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \sigma^p}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \sigma^p \quad (5.57)$$

Sabendo-se que o divergente do tensor plástico, ou pseudo força de corpo, é dado por,

$$b = -\frac{\partial \sigma^p}{\partial x} \quad (5.58)$$

Substituindo este termo na equação básica do MRD e aplicando as soluções particulares dadas no Capítulo 4, obtemos a seguinte expressão para o cálculo de  $\dot{D}$

$$D = -(H\hat{u} - G\hat{p})F^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \sigma^p \quad (5.59)$$

### 5.5.2.2 MRD modificado

Em Sensale (1997) e Sensale et al (2001), demonstrou-se que as pseudo-forças dependem das histórias de cargas das forças regulares, do primeiro invariante do tensor de tensões  $3\sigma_o$  e de seu gradiente  $3\sigma_{o,i}$ . Isto levou a uma nova função de aproximação que dependia apenas do primeiro invariante do tensor de tensões, sendo obtido a partir do tensor de tensões plástico no contorno e no interior, sem a necessidade de se realizar qualquer processo de derivação numérica que gera erros que aumentam com o processo iterativo.

Assim, decompondo o tensor de deformação total, dado na equação (5.18), em suas partes esférica e desviadora, temos

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_o^e &= \frac{1}{3} K^{-1} \dot{\sigma}_o \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^e &= \frac{1}{2} \mu^{-1} S_{ij} \end{aligned} \quad (5.60)$$

onde  $K$  e  $\mu$  são os módulos de elasticidade volumétrico e transversal e  $\sigma_o$  corresponde a parte esférica do tensor de tensões.

Sendo a imagem elástica do tensor  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ , na hipótese de isotropia, dada por,

$$\dot{\sigma}_{ij}^p = \mu \dot{C}_\mu S_{ij} \quad (5.61)$$

onde  $\dot{C}_\mu$  é a componente diferida da função de fluência no modo distorcional. Substituindo  $S_{ij}$  por  $\sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}$  na equação anterior, obtemos

$$\dot{\sigma}_{ij}^p = \mu(\dot{C}_\mu \sigma_{ij}) - \mu(\dot{C}_\mu \sigma_o) \delta_{ij} \quad (5.62)$$

Aplicando este resultado na definição de  $\dot{p}_i^p$  e  $\dot{b}_i^p$ , tem-se, respectivamente

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^p &= \dot{\sigma}_{ij}^p n_j = \mu(\dot{C}_\mu p_i) - \mu(\dot{C}_\mu \sigma_o) n_i \\ \dot{b}_i^p &= -\dot{\sigma}_{ij,j}^p = \mu(\dot{C}_\mu b_i) + \mu(\dot{C}_\mu \sigma_{o,i}) \end{aligned} \quad (5.63)$$

A idéia é aproximar a pseudo-força de corpo  $\dot{b}_i^p$  por uma função baseada no primeiro invariante do tensor de tensões em cada um dos N pontos em que se discretizou o contorno e nos L pontos internos, gerando um vetor cujas componentes são os valores obtidos nos N+L pontos indicados. Assim, de maneira análoga ao que foi feito com o MRD usual, trabalhando na hipótese de ausência de forças de corpo, aproxima-se a seguinte função escalar, segundo Sensale (1997)

$$\dot{w}^p = \mu C_\mu \sigma_o = \sum_{m=1}^M f^{(m)} \dot{\alpha}^{(m)} \quad (5.64)$$

Derivando-se a equação (5.64), temos

$$\dot{w}_{,i}^p = \mu C_\mu \sigma_{o,i} = \sum_{m=1}^M f_{,i}^{(m)} \dot{\alpha}^{(m)} \quad (5.65)$$

Comparando-se a segunda expressão da equação (5.63) e a equação (5.65), conclui-se que

$$\dot{b}_i^p = \dot{w}_{,i}^p = \sum_{m=1}^M f_{,i}^{(m)} \dot{\alpha}^{(m)} \quad (5.66)$$

Assim, escrevendo-se a função de aproximação na forma matricial, temos

$$\dot{w}^p = f(\sigma_o) \quad (5.67)$$

$$\dot{W}^p = \{\dot{w}^p\} = F \dot{\alpha}$$

onde  $F$  tem a mesma forma que a matriz  $F$  dada no capítulo anterior, mas empregando-se as soluções particulares dadas em Sensale (1997).

As soluções particulares do MRD clássico (Eqs. 4.18-22) obedecem à equação (4.5) repetida aqui

$$\mu \hat{u}_{mk,ll}^j + \frac{\mu}{1-2\nu} \hat{u}_{lk,lm}^j = \delta_{mk} f^j \quad (5.68)$$

Enquanto as soluções particulares do MRD modificado satisfazem a equação que segue,

$$\mu \hat{u}_{k,ll}^j + \frac{\mu}{1-2\nu} \hat{u}_{i,lk}^j = f_{,k}^j \quad (5.69)$$

Observa-se que em (5.68) as soluções particulares são em forma de matrizes, enquanto em (5.69), são em forma de vetor. Se considerarmos  $\hat{u}_{mk}^j = \varphi \delta_{mk}$  na equação (5.68) e,  $\hat{u}_k^j = G_k$  na equação (5.69), obtemos  $G_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ , (vide Sensale et al 2001).



Isolando  $\alpha$  da equação (5.67) e substituindo o resultado na equação matricial do MEC/MRD, Eq. (4.10), obtemos

$$HU - GP = (H\hat{U} - G\hat{P})\alpha = (H\hat{U} - G\hat{P})F^{-1}\dot{W}^p \quad (5.70)$$

Calculadas as deformações plásticas, obtemos o valor do primeiro invariante do tensor de tensões  $\dot{w}^p$  para cada ponto que experimentou deformação plástica, construindo assim, o vetor  $\dot{W}^p$  desses valores, e o vetor  $\dot{D}$  como sendo

$$\dot{D} = (H\hat{U} - G\hat{P})F^{-1}\dot{W}^p \quad (5.71)$$

## 5.6 ALGORITMO INCREMENTAL

O algoritmo a seguir, descreve o processo de resolução do problema elastoplástico através do Método dos Elementos de Contorno e do Método de Reciprocidade Dual. O fluxograma da Figura 5.1 segue quatro etapas principais, a saber: cálculo do problema elástico, constatação do regime plástico, redução do carregamento e o processo incremental elastoplástico.

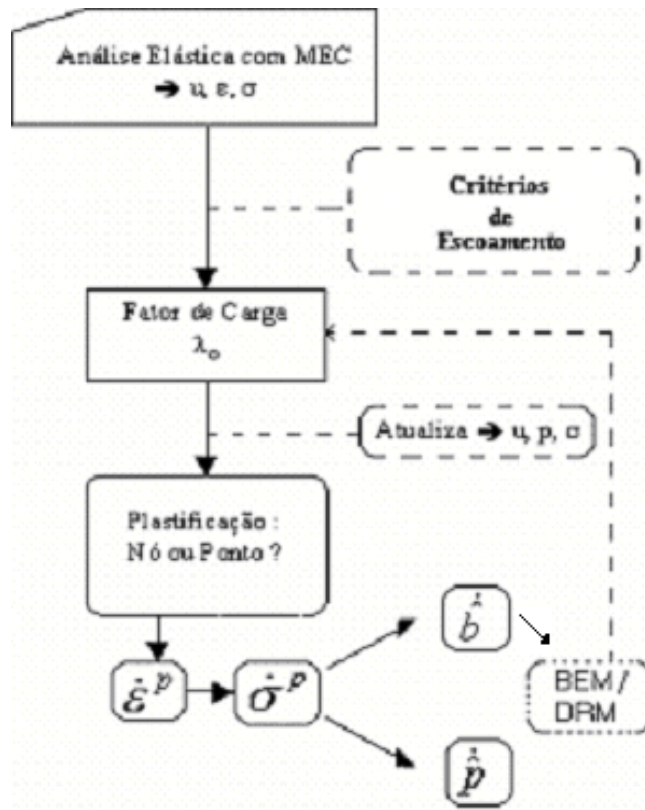


Fig. 5.1 – Algoritmo para Análise Elastoplástica.

A solução numérica para análise elastoplástica, descrita a seguir, explica o fluxograma apresentado na Figura 5.1.

- 1- Parte-se da solução elástica do MEC em todos os pontos (contorno + interior) obtendo-se:

Deslocamentos → vet\_u

Tensões → vet\_s

Deformações → vet\_d

Trações → vet\_t (de superfícies)

- 2- Com as tensões elásticas vet\_s, encontram-se as tensões equivalentes, por von Mises, e obtém-se o fator de redução de carga  $\lambda$  - ver Eq. (3.29) do Capítulo 3.

- 3- Atualiza-se a solução elástica devido a esse fator (redução de carregamento, fração do carregamento suportado em regime elástico). Logo, tem-se:

$$vet\_u = \lambda * vet\_u$$

$$vet\_s = \lambda * vet\_s$$

$$vet\_d = \lambda * vet\_d$$

$$vet\_t = \lambda * vet\_t$$

- 4- Inicia-se o processo incremental, cujo incremento de carga é o vetor dado por:

$$dp = dp + \beta.P_o$$

onde  $\beta$  é o valor do incremento dado com relação à primeira escoada. Resolve-se o sistema devido esse incremento de carga e obtêm-se os correspondentes incrementos elásticos, com os quais atualiza-se a solução anterior, da seguinte forma:

$$vet\_u = vet\_u + du$$

$$vet\_s = vet\_s + ds$$

$$vet\_d = vet\_d + dd$$

$$vet\_t = vet\_t + dt$$

- 5- O restante do carregamento, correspondente a fração complementar de  $\lambda$ , será aplicado em pequenas parcelas de passos de carga. Inicia-se, assim, o processo incremental, verificando se existe algum ponto que alcançou a superfície de von Mises, ou seja, verifica-se se a tensão equivalente em cada ponto alcança ou supera a tensão de escoamento.

Se satisfeita a condição acima, procede-se calculando os incrementos de deformação e tensão plásticos, para os pontos que atendem esta condição. Assim, tem-se que o incremento de deformação plástico é dado pela equação (3.39), onde o denominador dessa equação,

$$stes = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \bar{E} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \rightarrow \text{é um escalar calculado como,}$$

$$stes = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ s_{11} \cdot (s_{11} - \nu \cdot s_{22}) + s_{22} \cdot (s_{22} - \nu \cdot s_{11}) + \frac{1-\nu}{2} \cdot s_{12} \cdot s_{12} \right]$$

onde  $s_{ij}$  são as tensões desviadoras.

O numerador é uma matriz que, multiplicada pelo vetor das deformações elásticas  $\varepsilon_{ij}$ , resulta no vetor das deformações plásticas, cujas componentes são calculadas da seguinte forma:

$$\varepsilon_{11}^p = \frac{\frac{E}{1-\nu^2} \left[ s_{11} \cdot (s_{11} - \nu \cdot s_{22}) \cdot \varepsilon_{11} + s_{11} \cdot (s_{22} - \nu \cdot s_{11}) \cdot \varepsilon_{22} + s_{11} \cdot s_{12} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \varepsilon_{12} \right]}{stes}$$

$$\varepsilon_{22}^p = \frac{\frac{E}{1-\nu^2} \left[ s_{22} \cdot (s_{11} - \nu \cdot s_{22}) \cdot \varepsilon_{11} + s_{22} \cdot (s_{22} - \nu \cdot s_{11}) \cdot \varepsilon_{22} + s_{22} \cdot s_{12} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \varepsilon_{12} \right]}{stes}$$

$$\varepsilon_{12}^p = \frac{\frac{E}{1-\nu^2} \left[ s_{12} \cdot (s_{11} - \nu \cdot s_{22}) \cdot \varepsilon_{11} + s_{12} \cdot (s_{22} - \nu \cdot s_{11}) \cdot \varepsilon_{22} + s_{12} \cdot s_{12} \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \varepsilon_{12} \right]}{stes}$$

O cálculo das tensões plásticas é dado pela equação (3.40). Com as tensões plásticas, usamos MRD para obtermos as Pseudo Forças de Corpo, onde o resultado disso é o vetor  $D = (H\hat{u} - G\hat{p}) \cdot \alpha$ , obtido de duas formas distintas, como visto nas seções anteriores.

As Pseudo Trações de Superfícies são obtidas como  $\hat{t} = \sigma_{ij}^p n$ .

Resolve-se a equação (5.51) e obtêm-se as variáveis no contorno e no interior. Nos pontos que continuam elásticos, as pseudo forças são nulas e não é necessário fazer correção das tensões. Por outro lado, naqueles pontos que plastificaram, calculam-se as pseudo forças e faz-se a correção das tensões elásticas.

- 6- Dar-se um novo incremento de carga e continua-se o processo do item 4, atualizando a solução apenas nos pontos que continuam elásticos.

## CAPÍTULO 6

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O programa desenvolvido aqui, dá continuidade aos trabalhos de Gomes (2000 e 2002), nos quais tratou-se do desenvolvimento do módulo de pré-processamento gráfico, fundamentado na Programação Orientada a Objetos, para modelagem bidimensional de elementos de contorno. Aqui, tratar-se-á unicamente do módulo de processamento, no qual a análise de problemas elastoplásticos 2D, por meio do Método dos Elementos de Contorno e do Método de Reciprocidade Dual, é objeto deste trabalho.

No Apêndice C, mostramos os principais tópicos do desenvolvimento do pré-processador: estrutura de dados implementada, definição do modelo geométrico do problema, associação dos atributos físicos à geometria e geração da malha de elementos de contorno.

Neste trabalho, todo o desenvolvimento do programa de processamento, bem como a linguagem de programação utilizada (linguagem C++), são fundamentados nos conceitos da Programação Orientada a Objetos (POO), cuja essência é tratar os dados como objetos, ou seja, uma entidade independente com identidade e características próprias. Nas seções seguintes, apresentaremos uma breve revisão dos principais conceitos da POO, das características principais do processador, as classes e métodos envolvidos no programa de análise, bem como o procedimento numérico da análise elastoplástica orientada a objeto.

#### 6.1 PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS

A programação estruturada continua sendo uma das principais ferramentas para o desenvolvimento de sistemas computacionais (VCDJ, 1997). Uma das características mais importantes do desenvolvimento estruturado é o desenvolvimento *TOP/DOWN*. Neste tipo de desenvolvimento, parte-se da idéia global do sistema a ser desenvolvido e, a partir dela, vai-se refinando até os níveis fundamentais do sistema. Assim, todo o desenvolvimento

está centrado nas funções do sistema e os dados a serem manipulados pelo mesmo são conseqüências das funções que ele desempenha .

A idéia da orientação a objetos parte do sentido inverso, ou seja, do desenvolvimento *BOTTOM/UP*. Nesta técnica de programação, primeiramente procuram-se identificar os elementos de informação que o sistema deve manipular: os dados. Cada elemento a ser manipulado pelo sistema deve ser visto da maneira mais completa possível, como um objeto completo ou um modelo do objeto da forma que este se comporta no mundo real, com todas as suas características e todas as ações que podem ser realizadas com ele. Esses objetos são definidos como peças de *software* e *hardware* que podem ser manipulados para prestar algum serviço. O sistema é, então, construído a partir da montagem dessas peças.

Ao se iniciar um projeto orientado a objetos, a primeira coisa a ser definida é o conjunto de objetos (entidades) envolvidos no sistema, especificando os seus comportamentos e relações. A partir dos objetos e relações define-se que serviços cada objeto deve prestar e como devem se comunicar para realizar as funções do sistema.

Ao se modelar um objeto, a idéia que não pode ser esquecida é a da reutilização. Um objeto deve ser definido sempre da forma mais completa possível, pensando em todos os atributos que o definem e em todos os serviços que ele pode prestar. Assim, este objeto pode ser reutilizado em outros sistemas sem a necessidade de nova modelagem. Enfim, desenvolver sistemas orientados a objetos não é “reinventar a roda”, já que os conceitos do universo físico à nossa volta são reutilizados na sua forma original ou com pequenas adaptações.

Resumidamente, um sistema orientado a objetos é uma entidade dinâmica. Isto é, a todo o momento estão sendo realizadas ações das quais os objetos participam. Um objeto não é um mero espectador nestas ações. Ele interage com outros objetos enviando e recebendo mensagens, e se comportando adequadamente. A Figura 6.1 ilustra essa idéia.

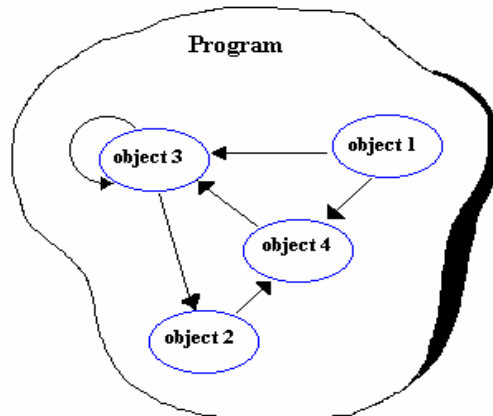


Fig. 6.1 – Um programa constituído de quatro objetos interagindo.

### 6.1.1 Principais Conceitos da POO

Objetos: Um objeto é definido como uma entidade, ou seja, como alguma coisa que existe. Essas entidades são tratadas utilizando abstrações da realidade, ou, em outras palavras, os objetos do mundo real são analisados considerando os aspectos relevantes para o problema analisado e desconsiderando aspectos irrelevantes. Partindo-se desta definição, nota-se que todas as entidades apresentam algumas características em comum:

- pode-se dizer alguma coisa a respeito dessas entidades;
- todas elas possuem características ou atributos que as diferenciam de outras entidades;
- uma entidade é capaz de fazer alguma coisa, ou alguma coisa pode ser feita com ela (entidades possuem comportamento).

Enfim, a modelagem de objetos como abstrações é realizada através de operações abstratas e simples que permitem uma visualização de como os objetos se organizam.

Métodos e Atributos: Os métodos de um objeto são as funções que este objeto desempenha, ou seja, o seu comportamento. Quando um objeto executa um serviço, através do envio e recebimento de mensagens, ele está ativando um de seus métodos. Uma mensagem corresponde à execução de um serviço por parte de um objeto e é a forma como eles se comunicam.



Um atributo é uma propriedade característica de um objeto. O conjunto de atributos define a classe dos objetos, e o conjunto de valores destes atributos define uma instância ou ocorrência destes objetos.

Classes: Uma classe é uma descrição do conjunto de atributos e métodos que definem o grupo de objetos. Tudo o que existe em um objeto, tudo o que ele é capaz de fazer, e todas as classes de objetos com as quais ele consegue interagir estão definidas em sua classe. A representação da classe durante o processo de análise e modelagem geralmente é realizada na forma de um diagrama de classe, para o qual existem várias notações. Neste trabalho será utilizado um diagrama esquemático para representar classes, de acordo com o diagrama mostrado na Figura 6.2 abaixo,

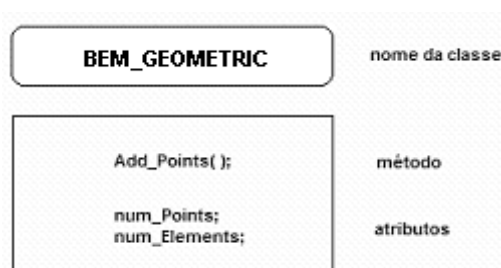


Fig. 6.2 – Diagrama esquemático para representar classes.

Quatro conceitos clássicos (Lybert, 1998) são considerados os pilares de desenvolvimento da programação orientada a objetos: *encapsulamento*, *ocultação de dados*, *herança* e *polimorfismo*.

A idéia de encapsulamento e ocultação de dados está associada à criação de tipos definidos pelo usuário: *classes*. Uma classe bem definida atua como uma entidade completamente encapsulada; ela é usada como uma unidade inteira. Os efetivos funcionamentos internos da classe devem ser escondidos ou ficarem ocultos. Assim, os usuários de uma classe bem definida não precisam saber como a classe funciona, mas apenas como usá-la.

O conceito de herança relaciona-se com a idéia de reutilização. É possível declarar um novo tipo como uma extensão de um tipo existente, gerando uma nova subclasse derivada do tipo existente (ou tipo derivado). Quando uma classe acrescenta novas

funcionalidades a uma classe existente diz-se que ela é derivada da classe original. A classe original é reconhecida como a base da nova classe.

Polimorfismo dá idéia de que diferentes objetos podem executar uma ação de diferentes formas. O polimorfismo refere-se ao mesmo nome de um método ou de uma classe assumindo muitas formas. Polimorfismo de métodos ou funções-membro é um poderoso recurso da linguagem C++, que suporta totalmente a POO. Este conceito é de grande utilidade, fornecendo funcionalidade, flexibilidade e robustez no desenvolvimento de um programa computacional.

## 6.2 CARACTERÍSTICAS DO PROCESSADOR

Um sistema automático completo de análises de engenharia por MECs (ou MEFs) é composto por três módulos principais: o *pré-processador*, o *processador* e o *pós-processador*. O pré- e pós-processamento formam a interface gráfica entre o sistema e o usuário através de um processo interativo que permite ao usuário controlar as partes, estruturas e aparências dos objetos.

O módulo de pré-processamento é responsável pela definição do modelo geométrico do problema, pela associação de atributos físicos à geometria e pela geração da malha de elementos de contorno. As informações da malha e dos atributos são passadas ao processador ou (programa de análises) através de um arquivo de dados gerados na fase de pré-processamento. O módulo de pós-processamento trata de interpretar os dados fornecidos através de um arquivo de saída gerado pelo processador na análise numérica. A Figura 6.3 ilustra a arquitetura de um sistema completo.

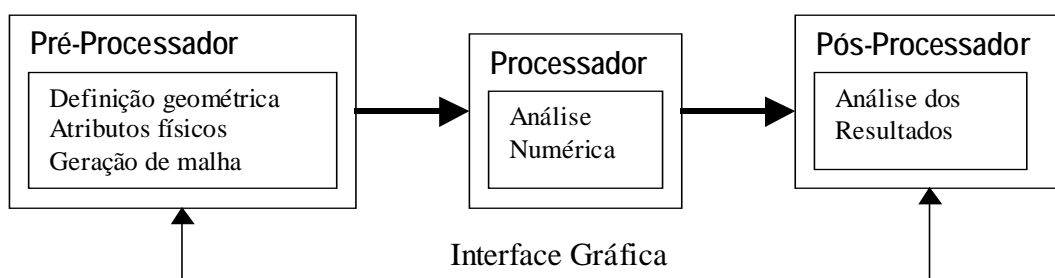


Fig. 6.3 – Arquitetura de um sistema de análises de engenharia.

O programa desenvolvido neste trabalho, possui toda base estrutural do MEC no programa “*ELQUABE.FOR*”, encontrado em Brebbia e Dominguez (1989), para elasticidade bidimensional. As mudanças significativas dizem respeito à forma de programação adotada, à manipulação dos dados, à diversificação da análise (elástica e plástica) e à implementação dos cálculos das tensões no contorno e das deformações em todos os pontos.

As principais características do programa de análise, desenvolvido aqui, são descritas a seguir. Essas características podem ser visualizadas no Apêndice C.

1. Possui interface com um pré-processador gráfico que gera automaticamente um arquivo de dados. As informações da malha, geradas automaticamente, são passadas dinamicamente ao processador quando o mesmo é invocado;
2. Ler arquivo de dados, gerado automaticamente ou não, de qualquer outro programa de análise similar. Este arquivo é então padronizado e seus dados são convertidos e interpretados dentro dos conceitos da POO;
3. Trabalha com alocação dinâmica de memória, possibilitando uma maior flexibilidade nos tamanhos de vetores ou matrizes;
4. Permite análises elástica e plástica, para problemas nos estados planos de tensão e de deformação, usando o MEC e o MRD;
5. Gera um arquivo de saída de dados, no formato de texto, para a análise dos resultados. Este arquivo pode facilmente ser analisado visualmente através de um pós-processador, bastando apenas instanciar um objeto da classe que produz este arquivo. Aqui, uma interface gráfica com o Programa MATLAB é utilizada como pós-processamento;
6. Permite a re-análise com maior densidade de nós ou com algumas mudanças nos atributos, como, por exemplo, as propriedades do material.

### 6.3 CLASSES E MÉTODOS DO PROCESSADOR

O organograma da Figura 6.4 mostra todas as classes envolvidas no sistema completo, mas este trabalho se prenderá unicamente às classes pertinentes ao módulo de processamento. Uma vez concluída a fase de pré-processamento, o arquivo de dados é gerado e, de acordo com o tipo de análise definida pelo usuário, os métodos correspondentes ao tipo definido são invocados pelo objeto da classe *BEMOOP*.

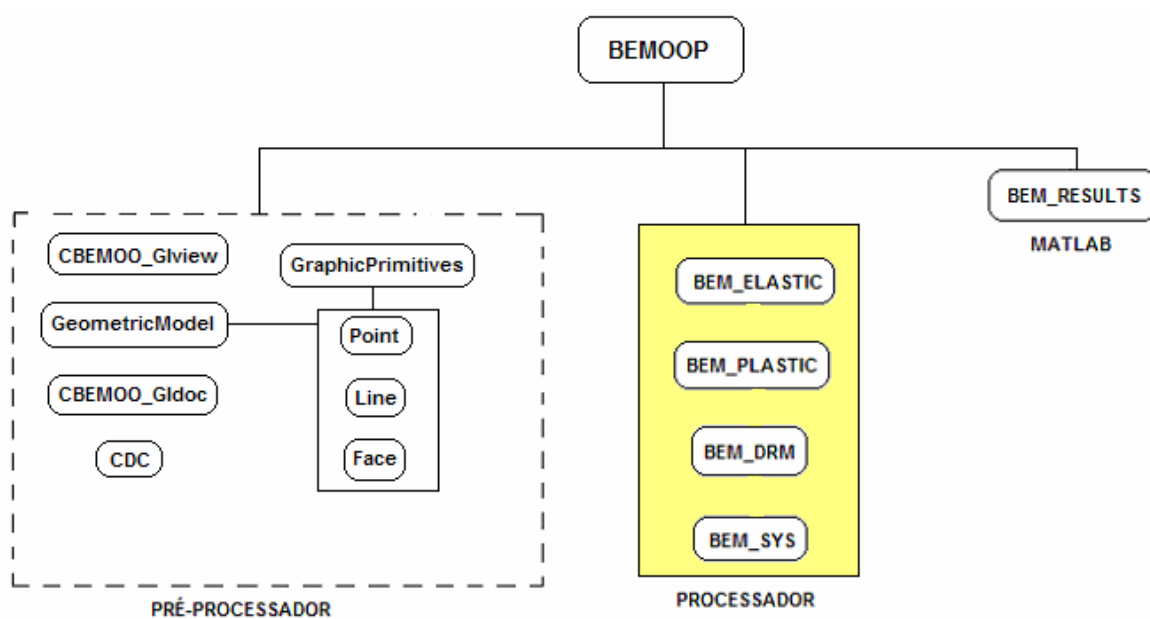
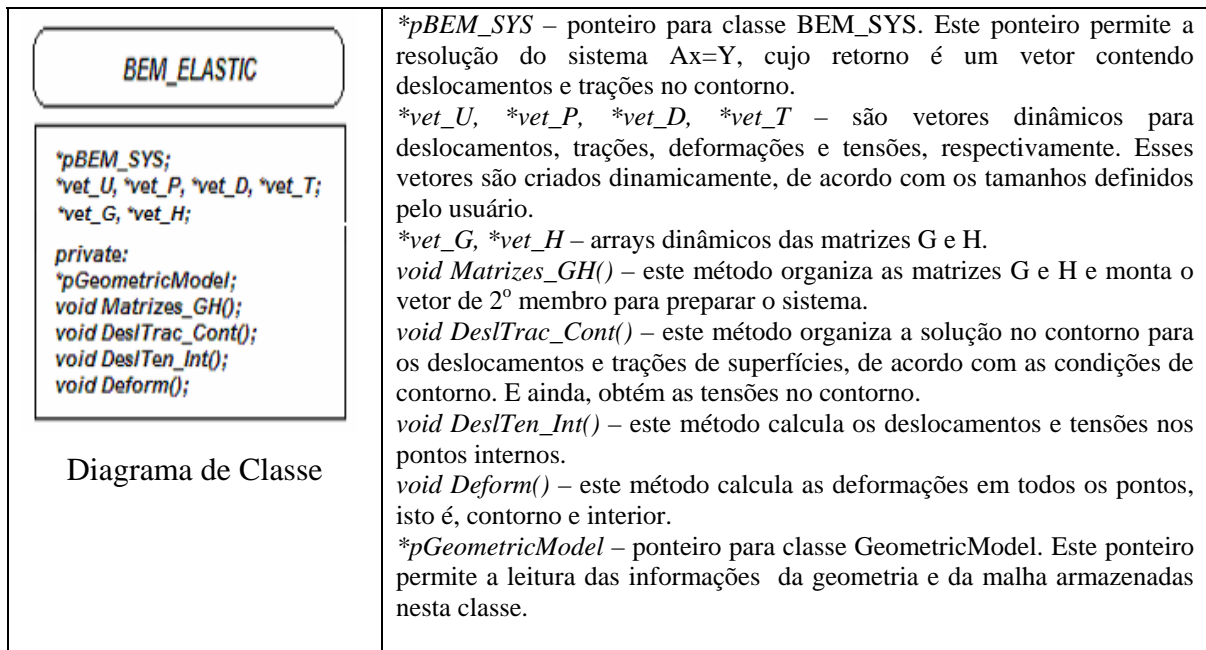


Fig. 6.4 – Diagrama de classes do Processador.

As quatro classes que compõem o programa de análise com seus respectivos métodos e atributos, são explicadas abaixo e nas respectivas tabelas.

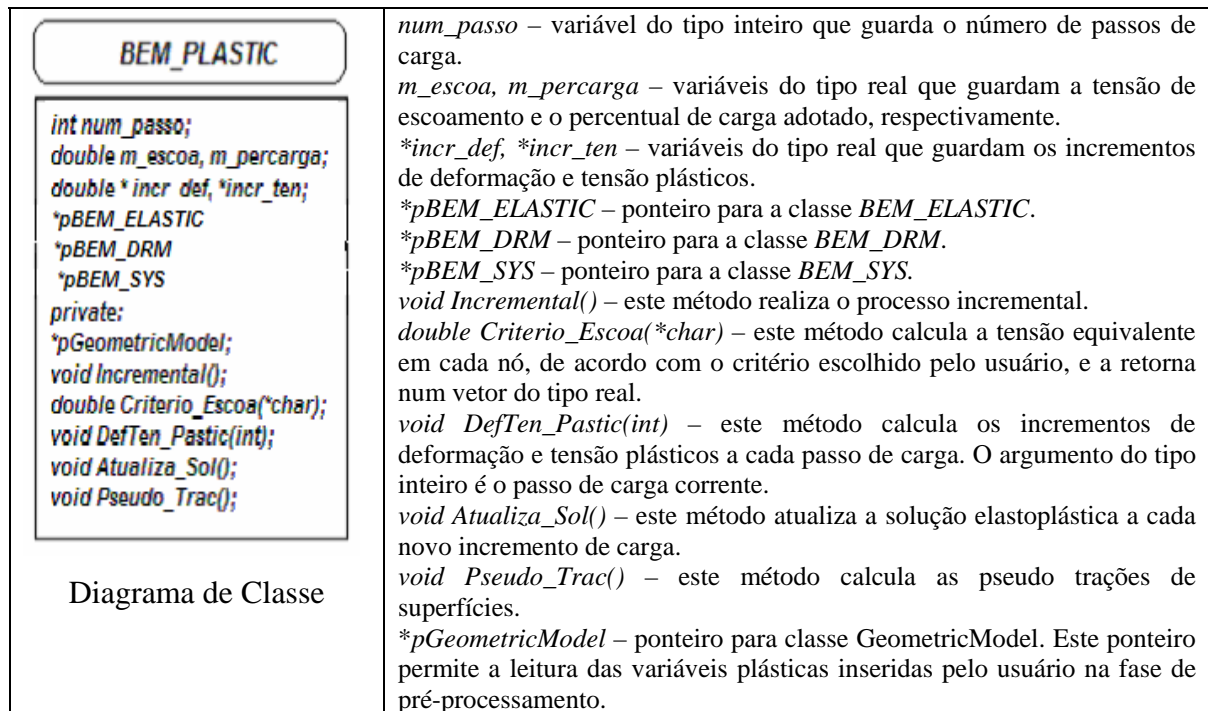
- classe *BEM\_ELASTIC* – esta classe é responsável pela análise elástica. Seus métodos e atributos (ver diagrama desta classe, abaixo) possibilitam o cálculo dos deslocamentos, trações, tensões e deformações, tanto no contorno quanto no interior, por meio do Método dos Elementos de Contorno, como vistos no diagrama abaixo. Esta classe se relaciona com as classes *BEM\_SYS* e *GeometricModel*.

Tab. 6.1 – Diagrama da classe *BEM\_ELASTIC*.

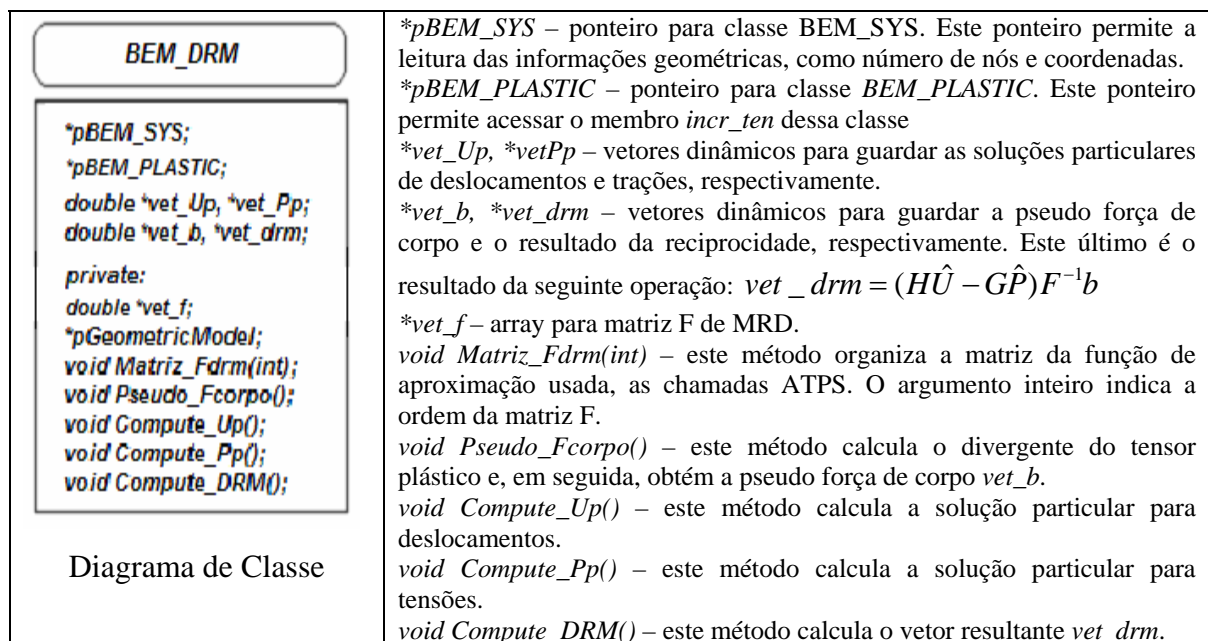


- classe *BEM\_PLASTIC* – esta classe é responsável pela análise plástica. Seus métodos e atributos possibilitam o cálculo dos incrementos de deformação e de tensão plásticos, o cálculo das pseudo trações de superfícies, bem como a escolha do critério de escoamento de acordo com a opção do usuário e o processo incremental como um todo. Esta classe se relaciona com todas as classes envolvidas no programa de análise. Ver seu diagrama de classe na Tabela 6.2.
- classe *BEM\_DRM* – esta classe é responsável pela análise dos termos não-homogêneos, isto é, pela transformação da integral de domínio em integral de contorno. Os método e atributos desta classe possibilitam a montagem da matriz das funções de aproximação utilizadas, dos vetores contendo as soluções particulares ( $\hat{u}$  e  $\hat{p}$ ), do cálculo da divergência do tensor plástico e da pseudo força de corpo. Esta classe permite a introdução das várias *RBFs*, bem como dos vários graus dos termos acrescentados das funções *TPS*. Ver seu diagrama de classe na Tabela 6.3.

Tab. 6.2 – Diagrama da classe *BEM\_PLASTIC*.

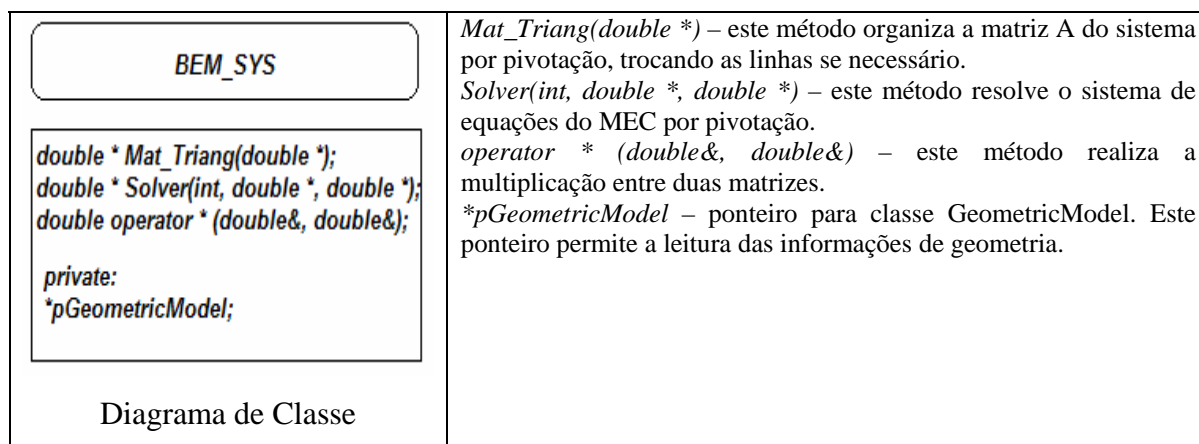


Tab. 6.3 – Diagrama da classe *BEM\_DRM*.



- classe *BEM\_SYS* – esta classe é responsável pela montagem e cálculo dos sistemas de equações algébricas envolvidos nas análises. Nesta classe, temos métodos operadores de multiplicação de arrays, de triangularização de matrizes e resolução de sistemas por Eliminação Gaussiana.

Tab. 6.4 – Diagrama da classe *BEM\_SYS*.



#### 6.4 ALGORITMO ELASTOPLÁSTICO ORIENTADO A OBJETO

O fluxograma da Figura 6.5, representa as etapas envolvidas no processo numérico do programa de análise, dentro de um enfoque orientado a objeto, no qual interagem as instâncias relacionadas na Tabela 6.5, abaixo. Verifica-se, nesta figura, que os objetos pertinentes ao Processador, estão destacados em amarelo.

Tab. 6.5 – Instâncias das Classes do Processador.

Nome da Classe	Denominação do Objeto (instância)
BEM_ELASTIC	<i>elastic</i>
BEM_PLASTIC	<i>plastic</i>
BEM_DRM	<i>drm</i>
BEM_SYS	<i>sys</i>
GEOMETRICMODEL	<i>model</i>

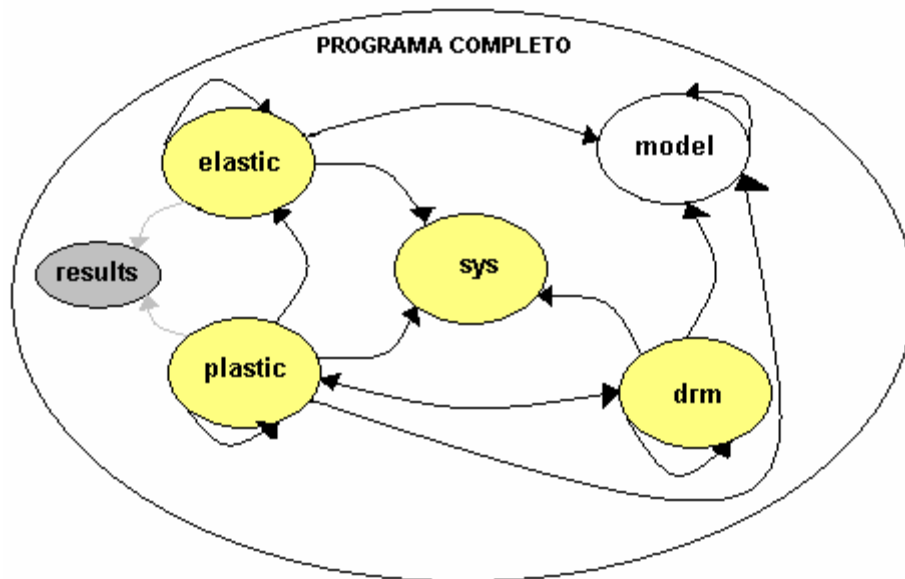


Fig. 6.5 – Interação dos Objetos do Processador.

Para melhor entendermos as interações entre os objetos do programa de análise, procedemos explicando o funcionamento do algoritmo incremental visto no Capítulo 5. Uma vez que o programa completo permite os dois tipos de análise, dependendo da escolha do usuário, temos duas situações: ou se realiza uma análise exclusivamente elástica, ou a análise é elastoplástica e, neste caso, temos a interação entre ambas as análises. Assim, podemos ter:

- a) se a análise é exclusivamente elástica – o objeto *elastic* acessa informações do objeto *model* (informações de geometria, da malha, etc.). Em seguida, monta o sistema de equações *Hu-Gp*, aplica as condições de contorno e forma o sistema  $Ax=y$ . Para resolver esse sistema, o objeto *elastic* invoca o método *Solver(x,y)* da classe *BEM\_SYS* e, daí, interage consigo mesmo, invocando seus métodos para a obtenção da solução elástica pelo MEC. Por fim, gera os resultados num arquivo de saída que é interpretado pelo módulo de pós-processamento, neste caso, o *MATLAB*.
- b) se a análise é plástica – procede-se de maneira idêntica àquela descrita no item acima. De posse das tensões elásticas em todos os pontos, o objeto *elastic* interage com o objeto *plastic*, trocando as tensões elásticas pelas tensões equivalentes, obtendo o fator de redução de carga e atualizando sua solução. Inicia-se assim, o processo incremental pela invocação do método *Incremental()*, explicado a seguir.



O método *Incremental()* é um método da classe *BEM\_PLASTIC* responsável pelo processo incremental. O ponto de partida do processo incremental é a solução elástica das tensões, atualizadas no item b conforme item 3 do algoritmo incremental (Capítulo 5), que se encontram no limiar da plastificação. Assim, para cada passo de carga, o objeto *plastic* incrementa a carga, atualiza a solução, conforme item 4 do algoritmo incremental (Capítulo 5), e verifica a condição de regime plástico.

Caso haja plastificação de algum ponto, o método da própria classe, *DefTen\_Plastic(int)*, se encarrega de calcular os incrementos de deformação e de tensão plásticos. Com os incrementos de tensão plástica, o método *Pseudo\_Trac()* se encarrega de calcular as pseudo trações de superfícies, usando os cossenos diretores do objeto *elastic*. Em seguida, e ainda para aqueles pontos que experimentaram uma deformação plástica, o objeto *plastic* interage com o objeto *drm* para montar a equação dada em (5.59) e, conseqüentemente, obtenção de seu resultado, o vetor *vet\_drm*.

Por fim, substituindo as pseudo-trações e o vetor *vet\_drm* na equação matricial (5.52), tendo-se o cuidado de somar adequadamente as forças regulares, se houver, às pseudo forças, e então, montar o sistema de (5.53). O objeto *plastic* interage com o objeto *sys* para resolução desse sistema, retornando os incrementos de deslocamentos e forças no contorno e, a partir desses, os incrementos de deslocamentos e tensões no interior. Em seguida, faz-se a redistribuição dos esforços, atualizando-se a solução, e incrementa-se a carga para o próximo passo de carga, continuando o processo. Os métodos envolvidos no processo incremental, na forma como eles interagem, são apresentados, no esquema da Figura 6.6

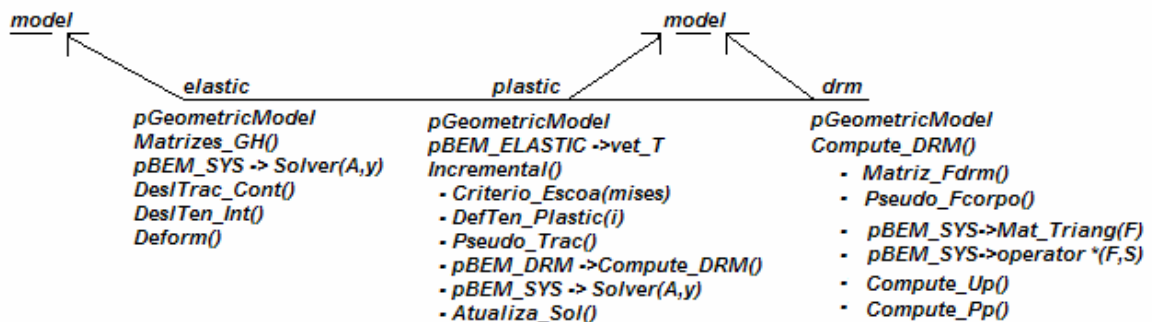


Fig. 6.6 – Fluxograma de interação dos métodos do Processador.

O esquema acima é válido para análise elastoplástica, logo, uma pré-análise elástica é realizada para dar prosseguimento ao algoritmo incremental. Assim, tem-se:

- i) antes de iniciar o processo incremental, o objeto *plastic* acessa as informações pertinentes à análise plástica (tensão de escoamento, número de passos de carga, percentual de carga, etc) através do ponteiro *pGeometricModel*. Em seguida, interage com o objeto *elastic* para acessar as tensões elásticas em todos os pontos, através do ponteiro *pBEM\_ELASTIC*. Neste instante, todos os pontos possuem o status “elastico”.
- ii) inicia-se o processo incremental. O objeto *plastic* interage consigo mesmo para realizar este processo, através do método *Incrmental()*. De posse das tensões elásticas, obtém-se os incrementos elásticos, simplesmente, aplicando o percentual de carga e o fator de carga nessas tensões. Para cada passo de carga “i”, com as tensões atualizadas, o método *Criterio\_Escoa(“mises”)* é invocado para obter a tensão equivalente. Em seguida, verifica-se a condição de regime plástico, comparando essa tensão com a tensão de escoamento, em todos os pontos. Para aqueles pontos que experimentam uma deformação plástica, seu status é modificado para “plasticos”.
- iii) para os pontos considerados plásticos, o método *DefTen\_Plastic(i)* é invocado para obter os incrementos de deformação e de tensão plásticos (ver seção 3.2.1, Eq. 3.39). Com as tensões plásticas no contorno, se houverem, o método *Pseudo\_Trac()* é invocado para o cálculo das pseudo trações de superfícies (ver seção 5.4.2, Eq. 5.44)
- iv) com o ponteiro *pBEM\_DRM*, o método *Compute\_DRM()* é invocado para obter o vetor  $\dot{D}$ , dado na equação (5.55). Inicialmente, o objeto *drm* interage com o objeto *model* para acessar informações de geometria, como número de nós e coordenadas, por exemplo. Em seguida, a matriz *F* de *MRD*, dada na seção 4.2.2, é obtida através do método *Matriz\_Fdrm(int)*, e então, o método *Pseudo\_Fcorpo()* se encarrega de calcular a pseudo

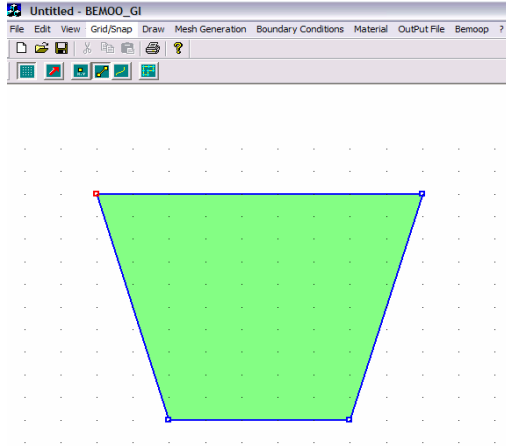
força de corpo  $b$ , primeiramente recuperando as tensões plásticas, por meio do ponteiro  $pBEM\_PLASTIC$ , depois, invertendo a matriz  $F$  através do método  $Mat\_Triang(F)$  e multiplicando pelas tensões plásticas recuperadas, usando o método  $operator *(F,incr\_ten)$ , por meio do ponteiro  $pBEM\_SYS$ . Para obtenção de  $b$ , basta derivar  $F$  com respeito a  $x$  e multiplicar pelo resultado anterior e pela inversa de  $F$  novamente. Por fim, os métodos  $Compute\_Up()$  e  $Compute\_Pp()$  são invocados para obtenção das soluções particulares e, juntamente com o resultado de  $b$ , pode-se escrever a equação (5.59), que será resolvida por meio dos métodos da classe  $BEM\_SYS$ , para obtenção do vetor  $\dot{D}$ .

- v) retornando ao método  $Incremental()$ , escreve-se a equação (5.53) e utiliza-se o ponteiro  $pBEM\_SYS$  para invocar o método  $Solver(A,y)$  e, com o resultado obtido, invocar os métodos da classe  $BEM\_ELASTIC$  para encontrar a solução elástica incremental pelo MEC. Atualiza-se a solução, redistribuindo os esforços devido os novos incrementos, e continua-se o processo.
- vi) encerrado o processo incremental, o arquivo de dados gerado pelo programa de análise, é carregado pelo objeto  $matlab$  e interpretado visualmente, conforme necessidade da análise.

## 6.5 EXEMPLOS VISUAIS

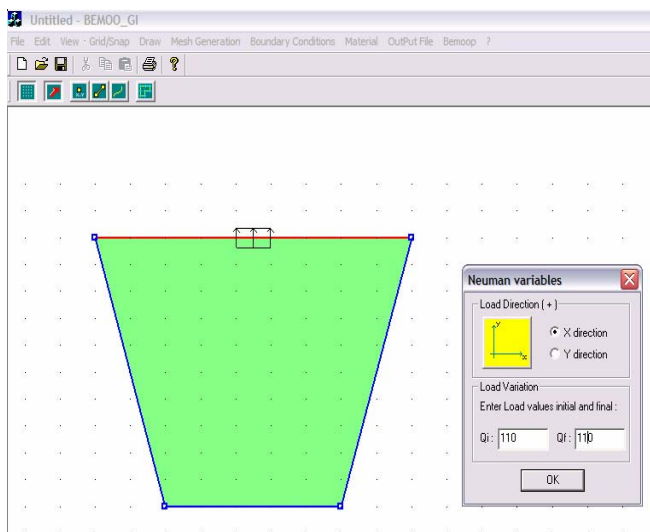
As Figuras seguintes, ilustram todo o processo de análise apresentado aqui, desde a fase de preparação do modelo geométrico e discreto – fase de pré-processamento – passando pela fase de análise, até a fase de pós-processamento. Para isso, será usado como modelo àquele do exemplo 4 e serão apresentadas apenas as características mais importantes, excluindo-se etapas como desenho de grides, seleção de pontos e de arestas, etc..

Fase 1 – pré-processador gráfico : desenho do modelo geométrico, imposição das condições de contorno, definição e geração da malha, aplicação das propriedades do material, geração do arquivo de dados e processamento da análise.



O modelo geométrico é processado de forma bastante amigável e rápida, bastando apenas escolher o objeto *line*, que sabe desenhar primitivas do tipo arestas.

Fig. 6.7 – Geração do modelo geométrico.



Definido o modelo geométrico, a aresta carregada é selecionada e um diálogo para as condições do tipo Newman é aberto. Nesse, o usuário define direções, tipo de carregamento e valor.

O diálogo só é aberto se uma aresta for selecionada.

Fig. 6.8 – Imposição das condições de contorno do tipo Newman.

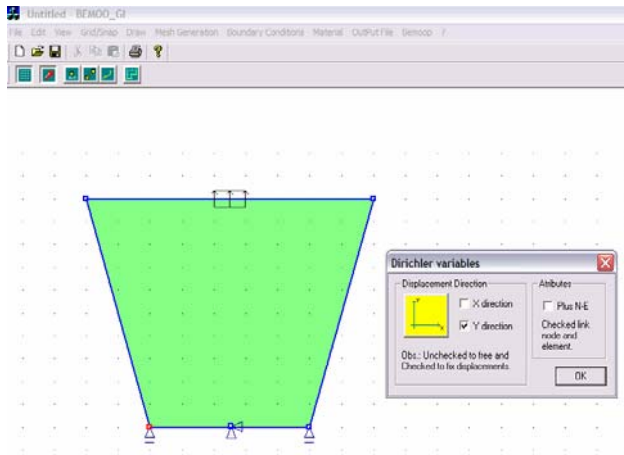


Fig. 6.9 – Imposição das condições de contorno do tipo Dirichler.

Para as condições de contorno do tipo Dirichler, os nós são selecionados de acordo com a condição. Um diálogo para esse tipo de condição é aberto e o usuário define as direções.

Esse diálogo abre tanto para o Nó quanto para a aresta.

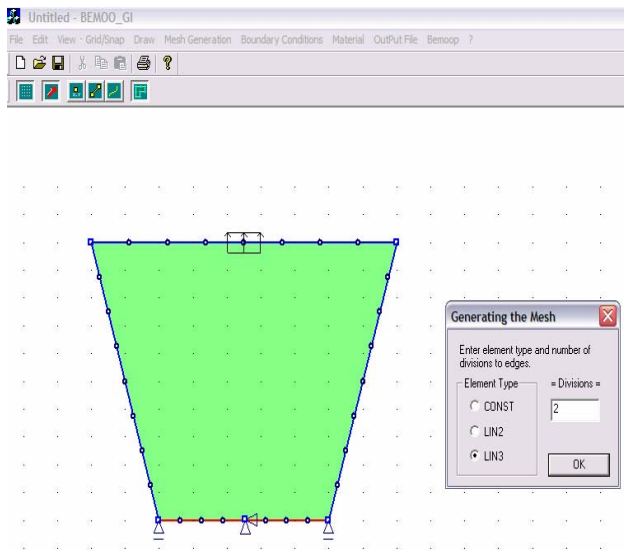


Fig. 6.10 – Geração da malha de elementos de contorno.

Definidas as condições de contorno, um diálogo é aberto para geração da malha de elementos de contorno. Para gerar a malha, pelo menos uma aresta ou a região deve está selecionada. Um diálogo é aberto, permitindo que o usuário defina o tipo de elemento e a quantidade de elementos.

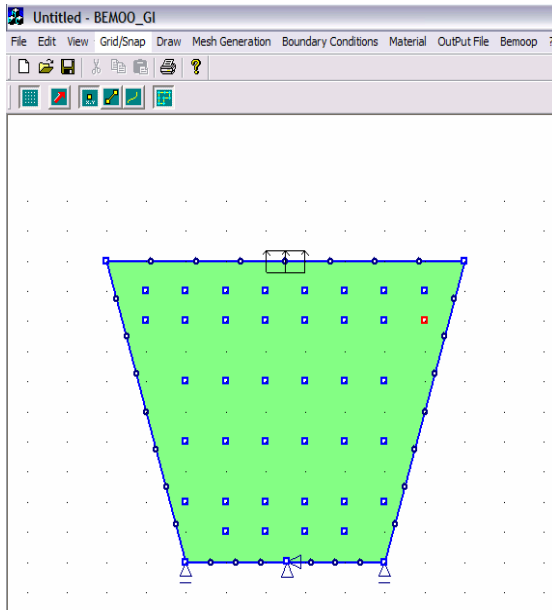


Fig. 6.11 – Geração da malha de Pontos internos.

Para gerar a malha de Pontos internos, o usuário pode optar por definir manualmente, usando a ferramenta de desenho de pontos (como neste caso), ou gerar automaticamente por meio de um diálogo (esse caso está implementado apenas para malhas regulares).

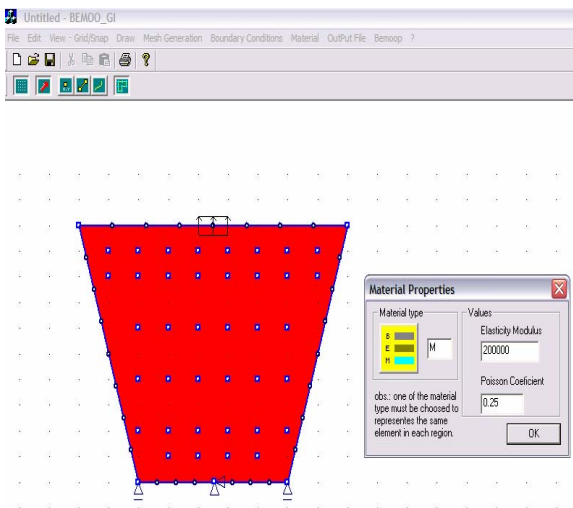


Fig. 6.12 – Aplicação das propriedades dos materiais.

Gerada a malha de elementos de contorno, o usuário pode selecionar a região a qual se aplicarão as propriedades dos materiais. Um diálogo é aberto, permitindo que o usuário defina módulo de Young e de Poisson, além de escolher uma cor apropriada para identificar os vários materiais.

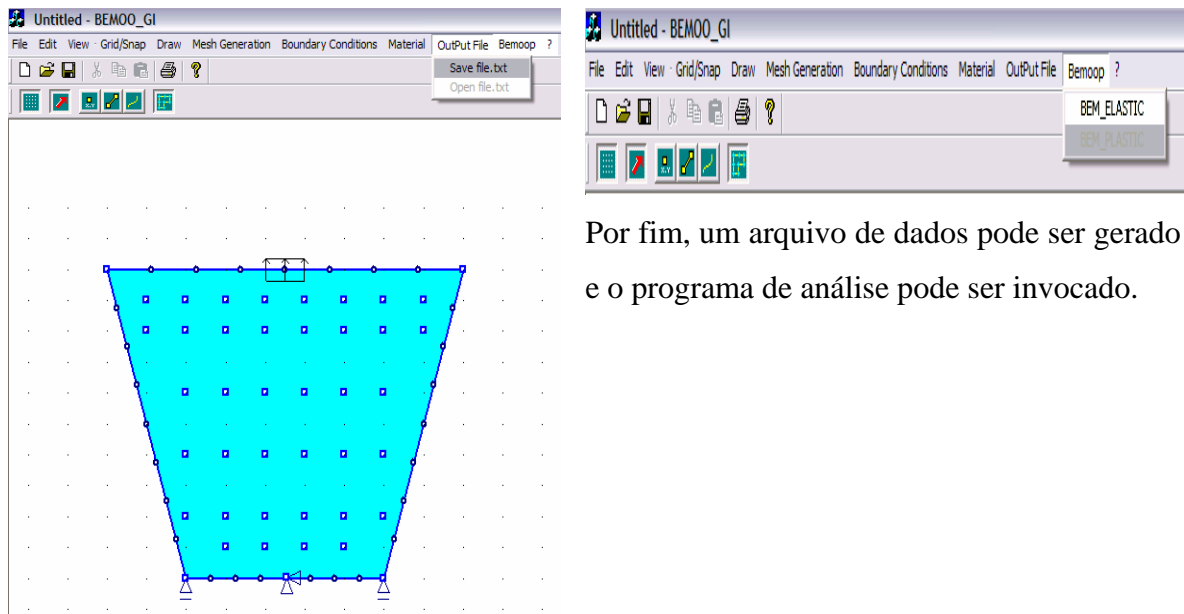


Fig. 6.13 – Geração do Arquivo de dados.

Fase 2 – processador : executar análises elásticas e plásticas por meio do arquivo de dados gerados, ou por meio da interação deste com o pré-processador gráfico, como explicado nas seções anteriores. Neste trabalho, o autor optou por executar a primeira opção, por questões unicamente de tempo e porque a segunda opção foge do objetivo principal, a análise propriamente dita. Assim, apenas se utilizou o arquivo de dados gerado e trabalhou-se com o processador de forma independente, como visto na Figura 6.14 abaixo.

```

c:\ "E:\Meus Documentos\Doutorado\tese\tese final\Projeto_Tese\Debug\Projeto_Tese.exe"
== ORIENTADORES: Paul W Partridge e Gillermo J Creus ==
===== Programa desenvolvido em C++ =====
Nome do arquivo de dados..... furof.dat
Nome do arquivo para impressao....furo.out
...Verificando existencia de Arquivo!!!
Ok...Preparando Montagem do sistema Ax=F
Ok...Calculando Matrices G e H.
Resolvendo Sistema.
Obtendo solucao elastica.
Obtendo Fator de Carga.
Iniciando Processo Incremental.
Calculando Deformacao e Tensao Plastica.
Salvando Arquivo de Dados.
...Programa Terminado !!!
Press any key to continue_

```

Fig. 6.14 – Programa de Análise sendo executado.

Fase 3 – pós processamento : foi utilizado o MATLAB para realizar as várias interpretações gráficas que a análise requeria, tais como o mapeamento de resultados com interpolações quadráticas, curvas de carga-deslocamentos, dentre outros. Para realizar esses gráficos, foi necessário implementar alguns métodos, dentre os principais, cite-se o *Gera\_Celplac()* para gerar células quadrangulares e desenhar o mapeamento. Este método fazia uso da mesma malha de pontos internos gerada no início da análise, bem como de informações da geometria (fase 1). A Figura 6.15 mostra o programa Matlab executando um mapeamento de tensões.

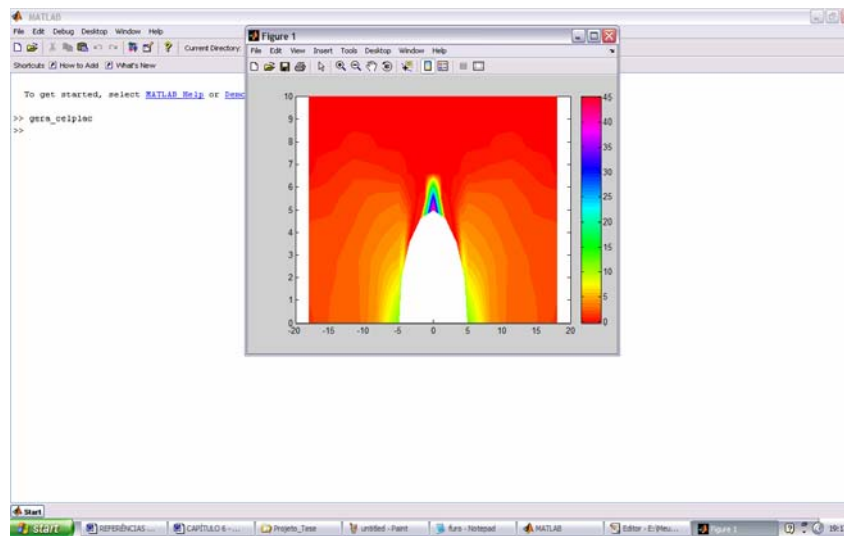


Fig. 6.15 – Matlab executando um mapeamento.



## CAPÍTULO 7

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, serão apresentados exemplos de problemas de estados planos de tensão e de deformação no que tange à solução elástica pelo método dos elementos de contorno – estes, no intuito, unicamente, de validar o programa-base – e no que tange à solução elastoplástica pelo método de reciprocidade dual, devido aos termos não homogêneos. Os cinco exemplos são postos sequencialmente, de acordo com o grau de suas pseudo-forças de corpo, isto é, constante, linear e maior que linear. Em todos os exemplos houve a necessidade da malha de pontos internos, uma vez que as análises que se seguem requerem o cálculo das tensões no interior.

As tabelas e gráficos mostrarão resultados confrontando a solução analítica, quando possível, e a solução numérica encontrada com o programa *BEMOOP* (programa desenvolvido). E ainda, a solução de alguns exemplos será mapeada e plotada através de interpolação quadrática para melhor visualizarmos o comportamento das variáveis tanto no contorno quanto no interior. Tal procedimento possibilitará acompanhar o processo de plastificação em cada passo de carga.

#### 7.1 EXEMPLOS ELÁSTICOS

##### 7.1.1 Exemplo 1

Na Figura 7.1a, temos um corpo de seção quadrada com dimensões unitárias e submetido a um carregamento distribuído também unitário. Seu módulo de elasticidade  $E=1$  e coeficiente de Poisson  $\nu=0.3$ , estando o mesmo sujeito a um estado plano de deformação. Para este modelo foram usados 8 elementos quadráticos e 9 pontos internos, como se pode ver no modelo discreto em 7.1b.

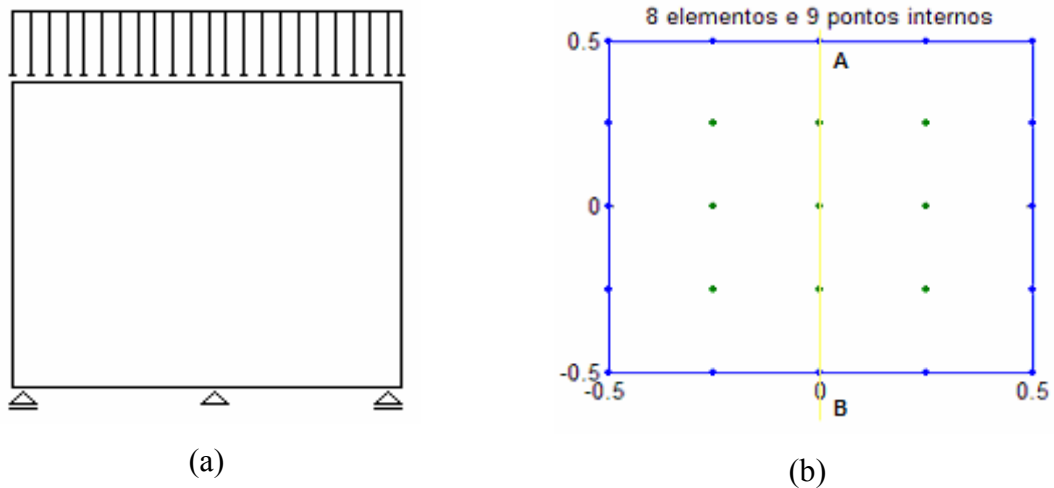


Fig. 7.1 – Geometria e Discretização do modelo para o exemplo 1.

O gráfico da Figura 7.2, a seguir, mostra o resultado na direção do carregamento para deslocamentos, tensões e deformações sobre a linha AB da Figura 7.1.b.

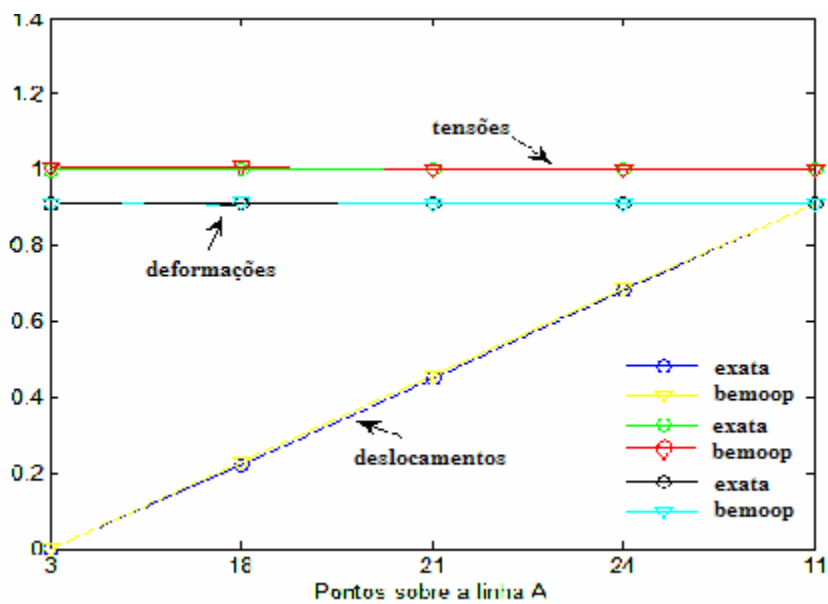


Fig. 7.2 – Tensões, Deformações e Deslocamentos sobre a linha AB.

### 7.1.2 Exemplo 2

Neste exemplo, mostra-se uma placa retangular sujeita a uma carga linearmente distribuída na direção horizontal, representando dois momentos aplicados. A placa é considerada no plano das tensões com Módulo Cisalhante  $\mu=G=80000 \text{ Mpa}$  e Coeficiente

de Poisson  $\nu=0.25$ . A Figura 7.3 ilustra a geometria do modelo, bem como sua discretização em 24 elementos quadráticos e 105 pontos internos.

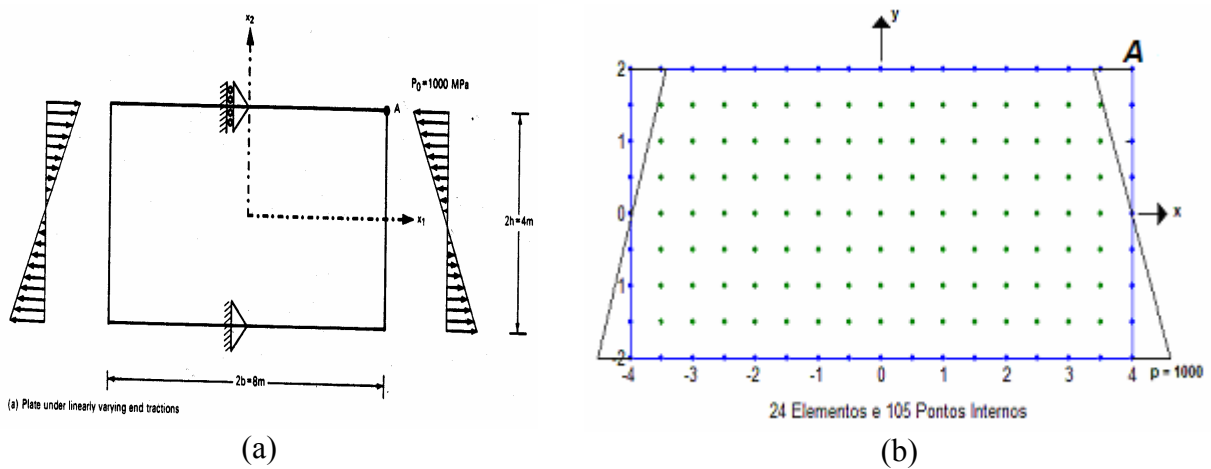


Fig. 7.3 – Geometria e Discretização do modelo para o exemplo 2.

Resultados para deslocamentos, nas duas direções, para o ponto (A) do canto superior direito da Figura 7.3b, são mostrados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Deslocamentos no córner superior direito, ponto (A).

Deslocamentos	Solução Analítica	<i>BEMOOP</i> (C++)	Erro(%)
$U_1$	-0.02	-0.020000005	2.5e-005
$U_2$	0.02	0.019999947	2.65e-004

O mapeamento da solução elástica para deslocamentos pode ser visualizado na Figura 7.4 abaixo. Nesta, percebe-se que os deslocamentos na direção X são maiores nos cantos, enquanto na direção Y os deslocamentos aumentam horizontalmente de dentro para fora, sendo maiores no contorno.

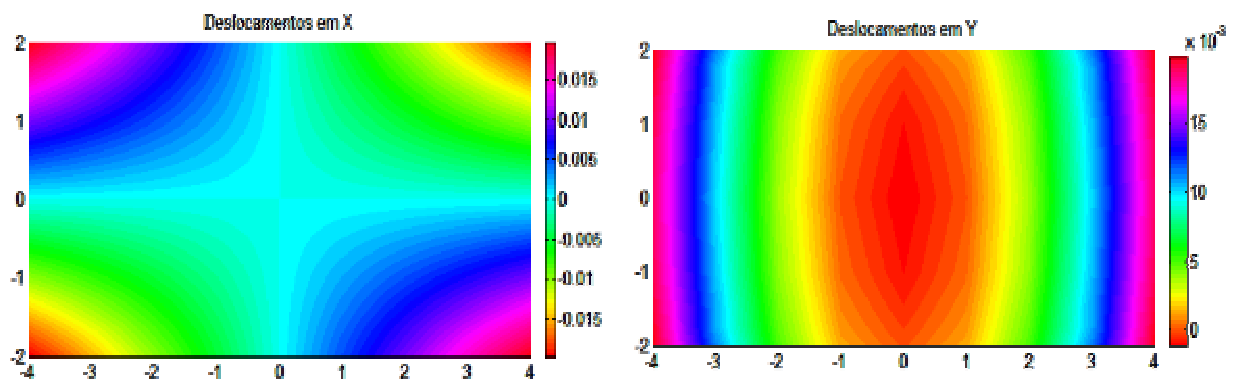


Fig. 7.4 – Mapeamento dos deslocamentos nas direções X e Y, em mm.

O mapeamento da solução elástica para tensões na direção X pode ser visualizado na Figura 7.5 abaixo. Nesta, verifica-se um aumento das tensões verticalmente do centro para as extremidades, sendo maiores nos contornos, superior e inferior.

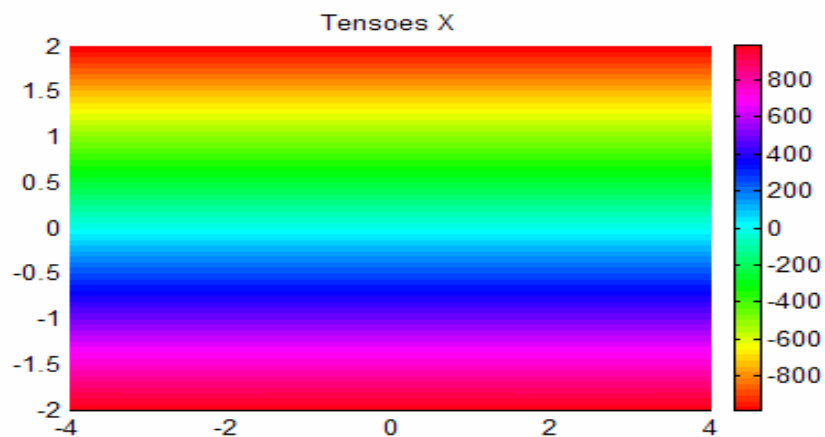


Fig. 7.5 – Mapeamento das tensões na direção X, em MPa.

O mapeamento da solução elástica para deformações na direção X pode ser visualizado na Figura 7.6 abaixo. Nesta, observa-se que as deformações aumentam verticalmente do centro para os contornos, superior e inferior.

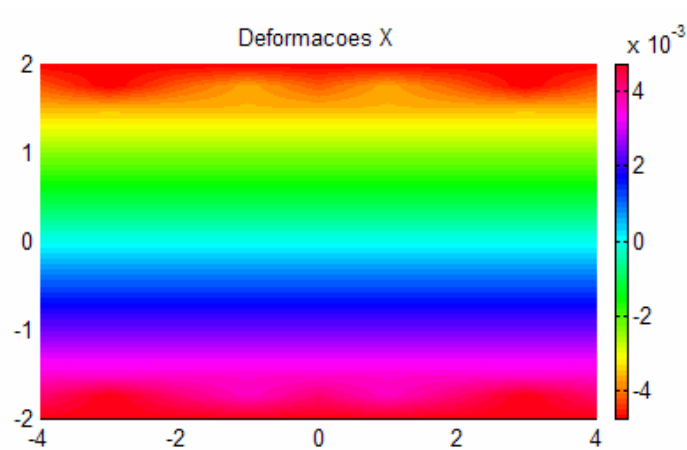


Fig. 7.6 – Mapeamento das deformações na direção X, em mm.

### 7.1.3 Exemplo 3

Na Figura 7.7 temos o problema elástico de uma placa circular com um furo no centro. Para este problema, consideremos uma pressão interna  $P = 100 \text{ N/mm}^2$ ,  $x1 = 20 \text{ mm}$ ,  $x2 = 50 \text{ mm}$ , Módulo de Elasticidade  $E = 200000 \text{ N/mm}^2$  e Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ . Aproveitando a simetria do problema, analisaremos inicialmente  $\frac{1}{4}$  dessa geometria e, em seguida,  $\frac{1}{2}$  geometria, como ilustradas em (7.7a) e (7.7b), respectivamente.

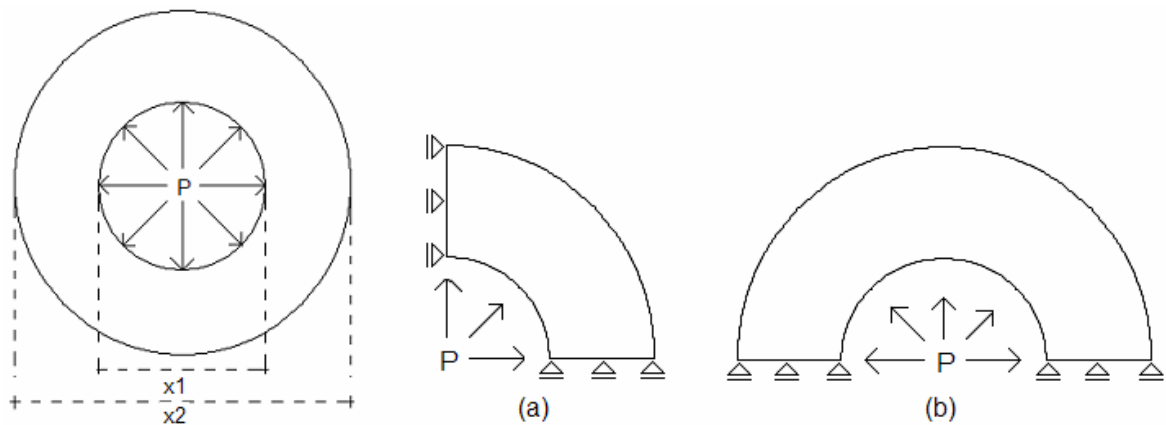


Fig. 7.7 – Placa circular com furo no centro submetida à pressão interna.

A Figura 7.8 mostra a discretização para as geometrias de  $\frac{1}{4}$  e de  $\frac{1}{2}$ , na qual foram utilizados 14 elementos sem pontos internos e, 22 elementos com 1 ponto interno, respectivamente.

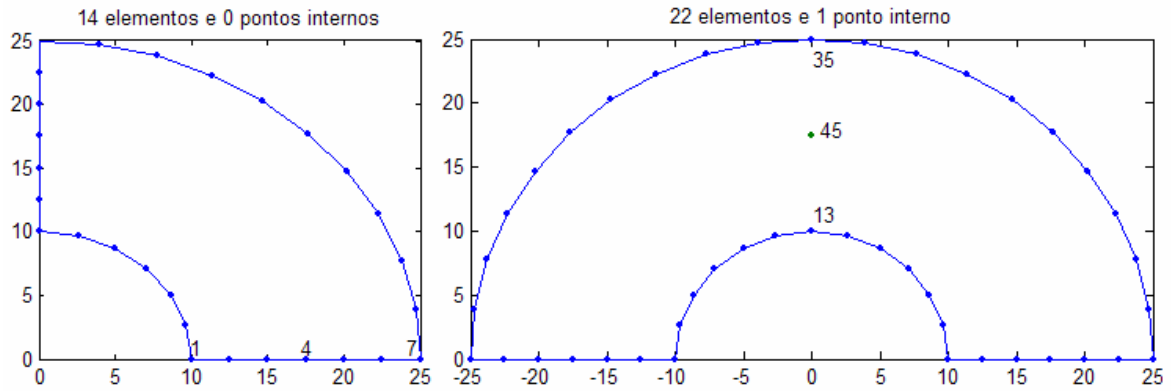


Fig. 7.8 – Modelos discretos para o exemplo 3.

Resultados para deslocamentos, tensões e deformações radiais nos pontos enumerados para ambas as geometrias, podem ser visualizados nos gráficos seguintes e suas respectivas tabelas. O resultado analítico é confrontado com a solução numérica devido a Foltran (1999) e com o programa *Bemoop*.

Tabela 7.2 – Deslocamentos dos pontos, em mm.

exato	pts	Foltran	Bemoop	pts	Foltran	<i>Bemoop</i>
0,00803571428	1	0,0079505431	0,0080338718	13	0,0080632038	0,0080326568
0,00529336735	4	0,0053013131	0,0052918659	45	0,0053198467	0,0052907453
0,00446428571	7	0,0044848779	0,0044630451	35	0,0044892014	0,0044620505

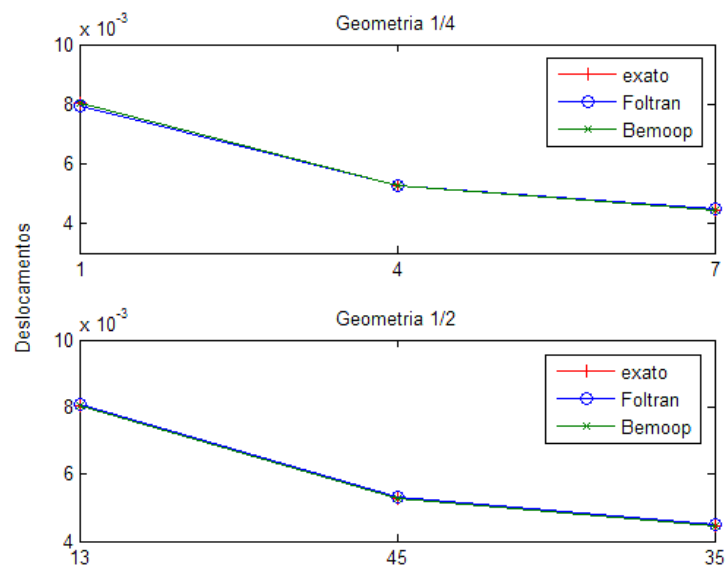


Fig. 7.9 – Deslocamentos dos pontos, em mm.

Tabela 7.3 – Tensões radiais dos pontos, em MPa

exato	pts	Foltran	Bemoop	pts	Foltran	Bemoop
100	1	85,4167623799	95,1294740	13	100,00000000	99,9983430
19,825072886	4	22,2571126075	20,8330140	45	19,8674028258	19,816370
0	7	1,8682435266	0,33828967	35	0,0000000000	0,0000348678

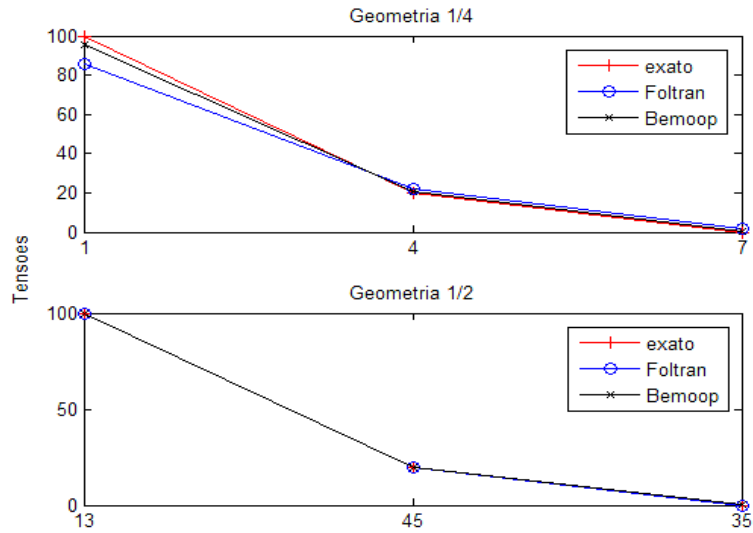


Fig. 7.10 – Gráficos das Tensões radiais dos pontos.

Tabela 7.4 – Deformações radiais dos pontos, em mm.

exato	pts	Foltran	Bemoop	pts	Foltran	Bemoop
-6,8452381E-04	1	-6,0794435E-04	-6,595206E-04	13	-6,8408855E-04	-6,844598E-04
-1,8343051E-04	4	-1,9446000E-04	-1,884581E-04	45	-1,8364898E-04	-1,833579E-04
-5,9523809E-05	7	-5,0686893E-05	-5,783743E-05	35	-5,9735931E-05	-5,949529E-05

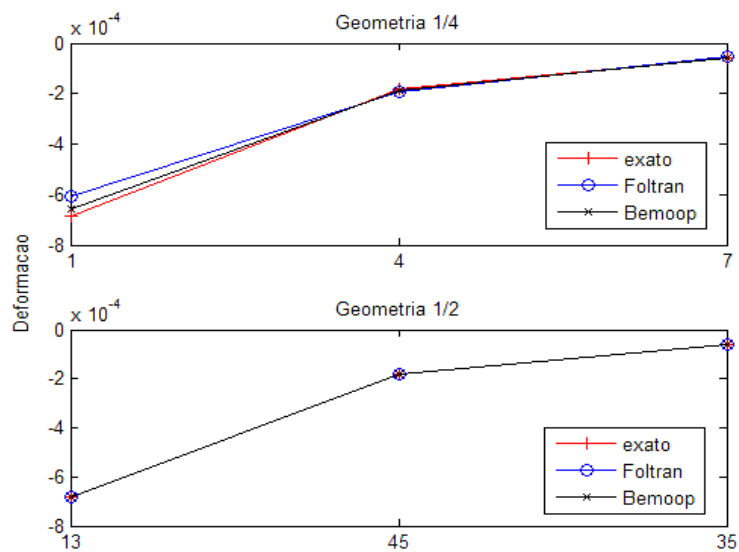


Fig. 7.11 – Gráficos das Deformações radiais dos pontos.

O mesmo exemplo da Figura 7.7b, com 22 elementos quadráticos e 75 pontos internos, é usado para visualizarmos o mapeamento da solução elástica para deslocamentos e tensões radiais, como se pode ver na Figura 7.12 abaixo. Para este problema, considere  $P = 1200 \text{ Kgf/cm}^2$ ,  $x1 = 10 \text{ cm}$ ,  $x2 = 20 \text{ cm}$ , Módulo de Elasticidade  $E = 1200000 \text{ Kgf/cm}^2$  e Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

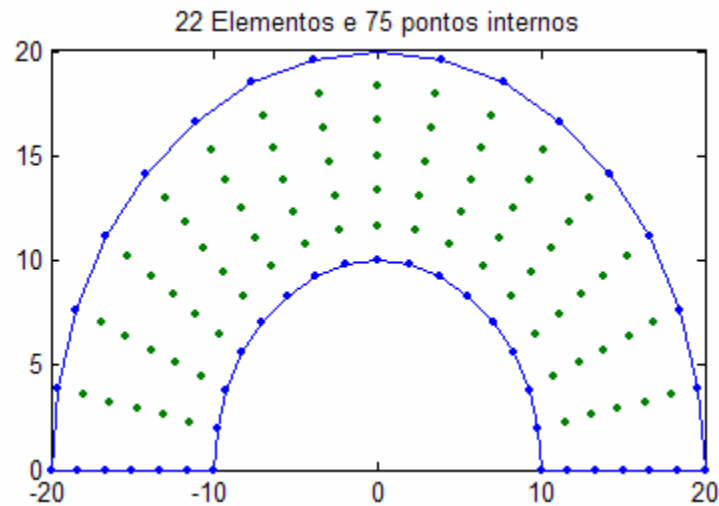


Fig. 7.12 – Discretização com malha interna de pontos.

A Figura 7.13 mostra o mapeamento da solução elástica para tensões radiais, na qual verifica-se que as tensões são máximas sobre a superfície interna de raio 10, e são próximas de zero sobre a superfície externa.

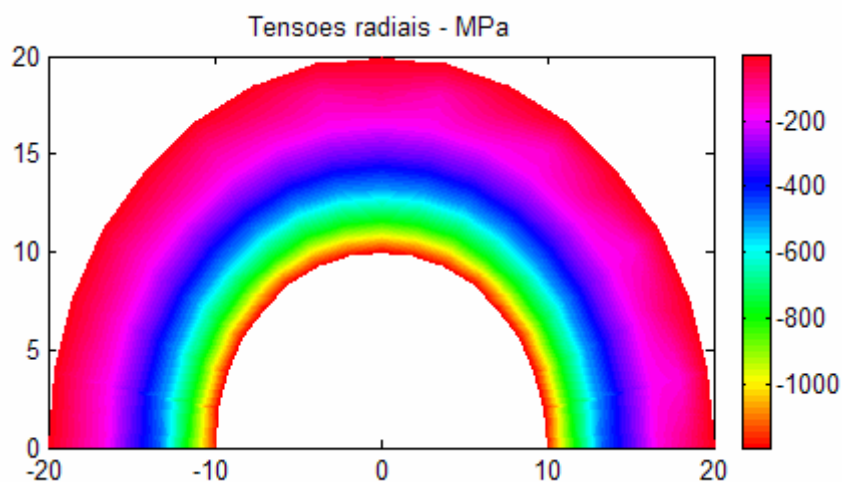


Fig. 7.13 – Mapeamento das tensões radiais.



A Figura 7.14 mostra o mapeamento da solução elástica para os deslocamentos radiais, na qual observa-se que os deslocamentos são maiores na superfície interna, e diminuem com o aumento do raio até a superfície externa.

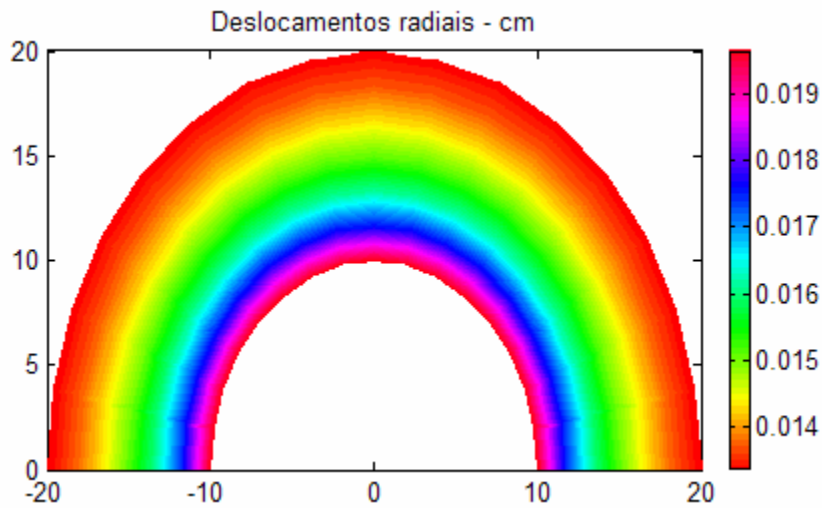


Fig. 7.14 – Mapeamento dos deslocamentos radiais.

Nos gráficos da Figura 7.15, temos a solução elástica numérica para tensões nas direções radiais e tangenciais, sendo confrontadas com a solução analítica.

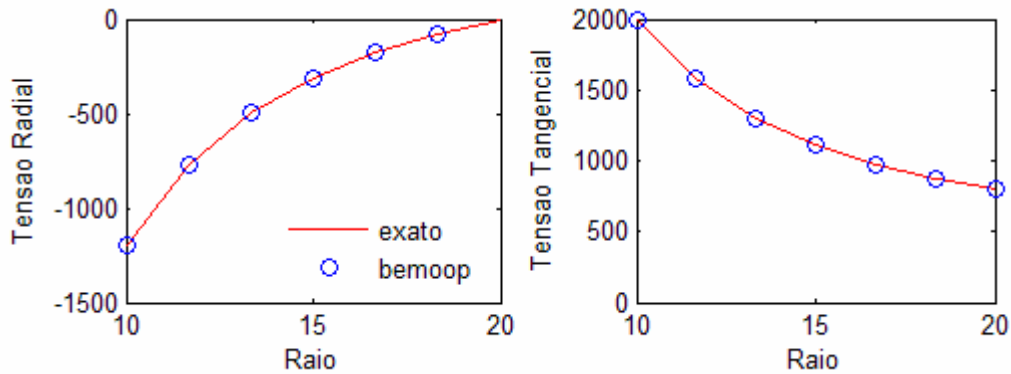


Fig. 7.15 – Distribuição das tensões elásticas –  $\text{kgf/cm}^2$ .

A solução elástica para deslocamentos radiais é confrontada com a solução analítica no gráfico da Figura 7.16 abaixo.

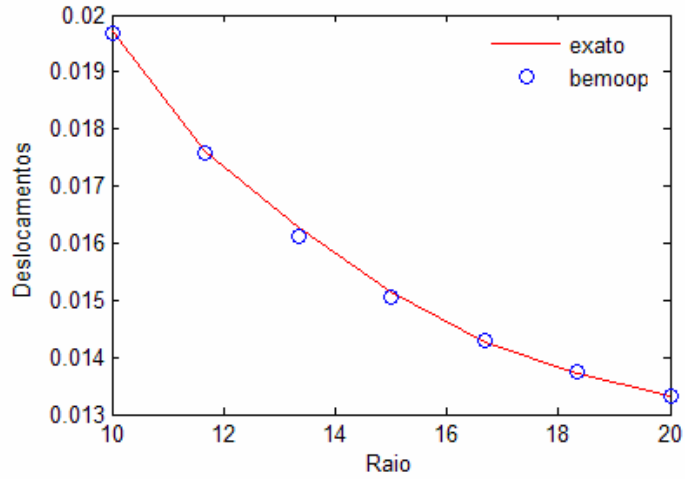
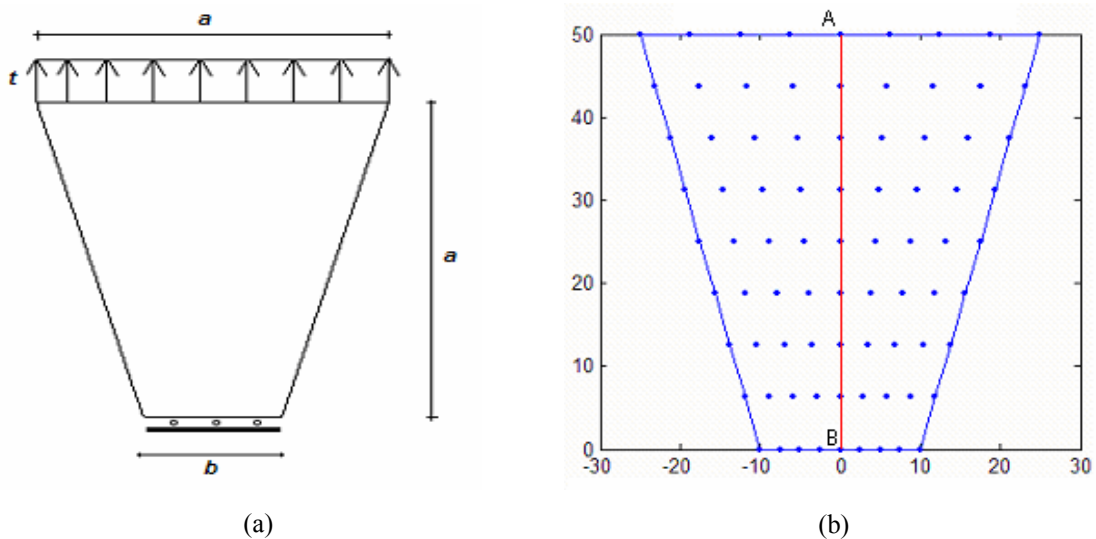
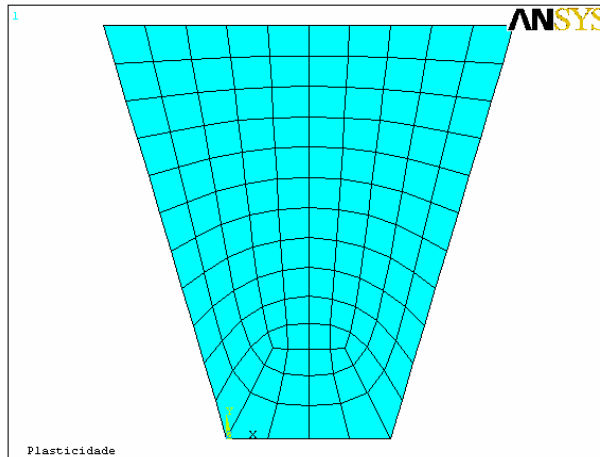


Fig. 7.16 – Deslocamentos radiais – cm

#### 7.1.4 Exemplo 4

Neste exemplo temos uma placa de geometria irregular submetida a um carregamento distribuído, conforme ilustrado na Figura 7.17a. Para este problema, consideremos  $t = 110 \text{ MPa}$ ,  $a = 50 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$ , Módulo de Elasticidade  $E = 200 \text{ GPa}$  e Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . O modelo discreto foi gerado com 16 elementos e 49 pontos internos, como pode ser visualizado em 7.17b. Em 7.17c, temos a malha de elementos finitos gerada pelo Ansys.





(c)

Fig. 7.17 – Geometria (a) e Discretização (b) do modelo com *BEMOOP* e malha do MEF (c) com *ANSYS*.

A Figura 7.18 mostra o mapeamento da solução elástica para tensões na direção Y, obtido com o *BEMOOP* e com o programa *ANSYS*. Nesta, verifica-se que a distribuição de tensão para ambos os programas é a mesma, porém, nos cantos inferiores da geometria de cada modelo, o valor da tensão diverge bastante.

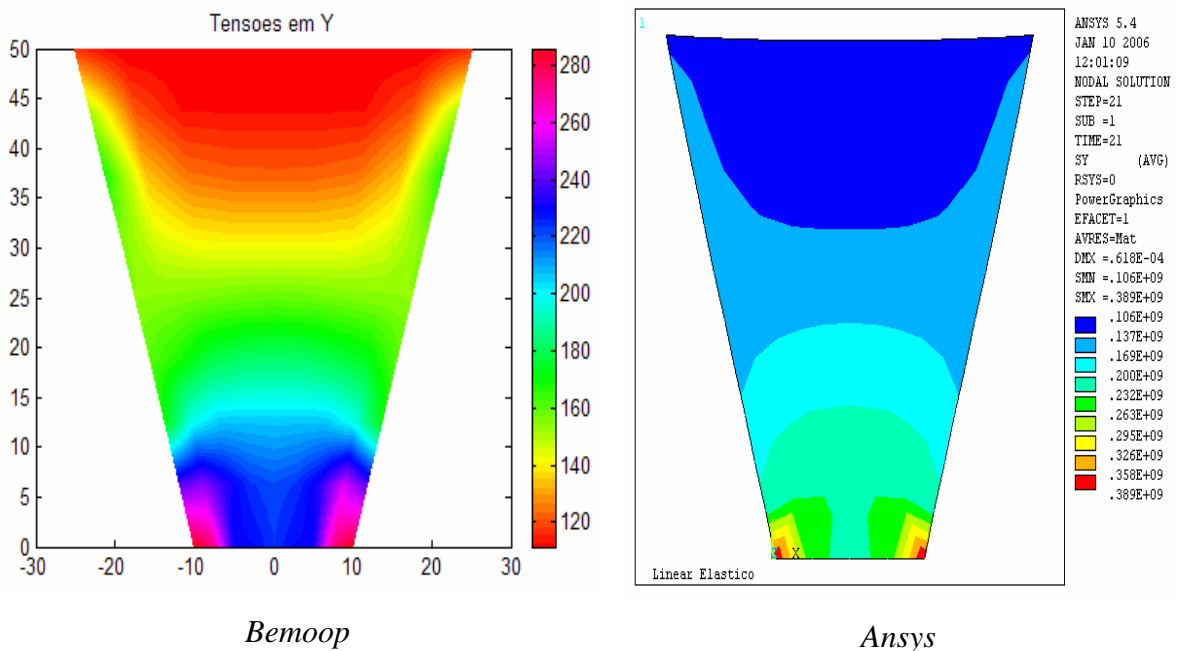


Fig. 7.18 – Mapeamento das tensões na direção Y.

A Tabela 7.5 abaixo mostra os valores de tensão mínimo e máximo, para ambos os modelos, nos cantos onde ocorrem grandes concentrações de tensões.

Tab. 7.5 – Tensão *ansys* x *bemoop*.

$\sigma_{yy}$	<i>Ansys</i>	<i>Bemoop</i>	Diferença (%)
MIN	106	110	1,85
MAX	389	288	14,92

Os resultados sobre a linha AB são visualizados no gráfico da Figura 7.19. Os quatro pontos foram selecionados seguindo a ordem das quatro isofaixas de tensão, predominantes sobre a linha AB, sendo tomados os valores médios de tensão. Neste caso, as isofaixas dos cantos inferiores não foram consideradas por estarem fora do alinhamento AB.

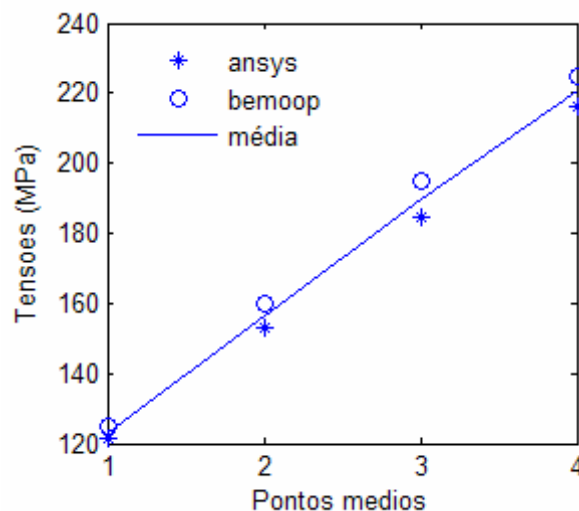
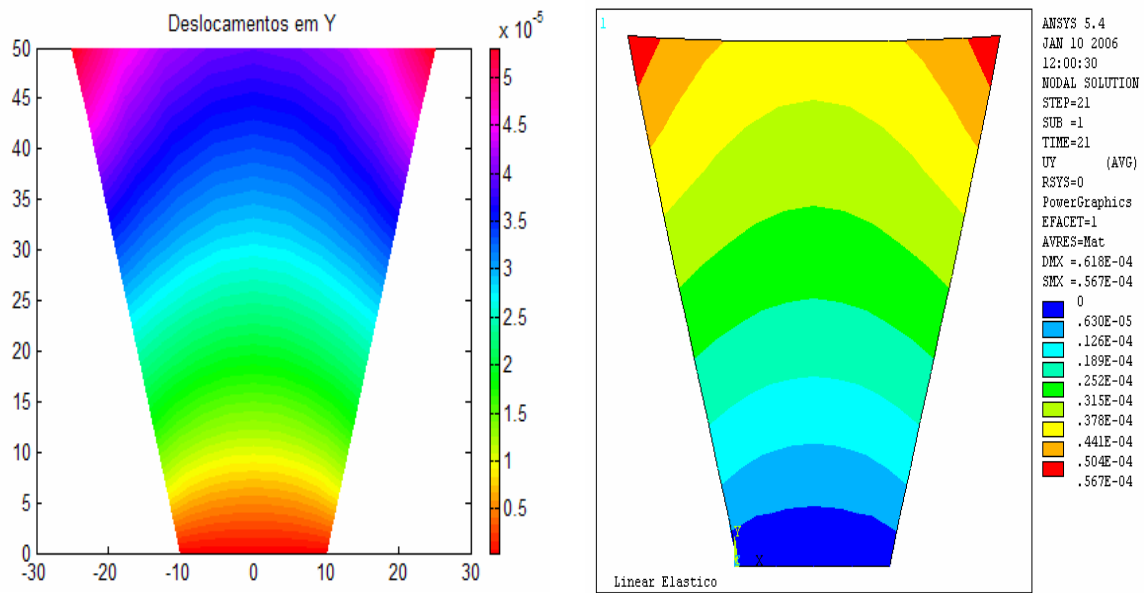


Fig. 7.19 – Tensão média sobre os pontos da linha AB.

A Figura 7.20 mostra o mapeamento da solução elástica para deslocamentos, na direção Y, obtido pelo *BEMOOP* e pelo programa *ANSYS*. Os resultados para deslocamentos máximos sobre cada isofaixa são visualizados no gráfico da Figura 7.21.



Bemoop

Ansys

Fig. 7.20 – Mapeamento dos deslocamentos na direção Y.

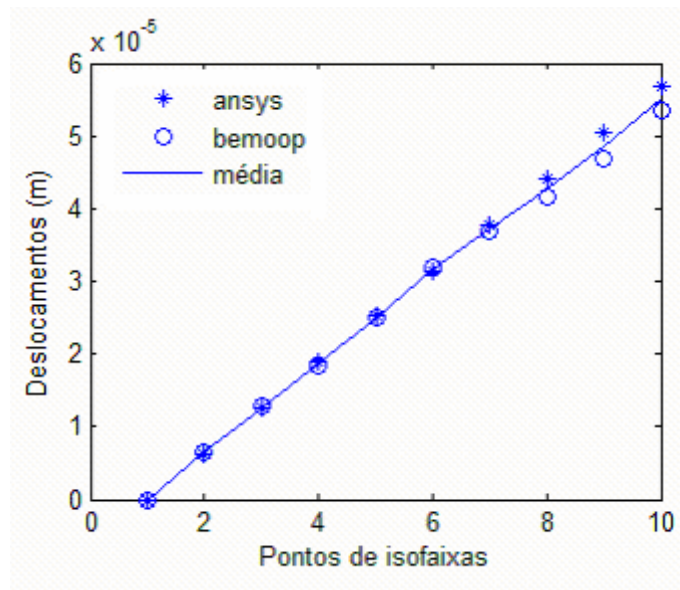


Fig. 7.21 – Deslocamentos Bemoop X Ansys.

### 7.1.5 Exemplo 5

Neste exemplo temos uma placa quadrada com um furo no centro sendo tracionada em suas extremidades superior e inferior, conforme ilustrado na Figura 7.22. Para este problema, consideremos  $t = 100 \text{ N}$ ,  $r = 5 \text{ mm}$  e  $l = 100 \text{ mm}$ , Módulo de Elasticidade

$E = 200 \text{ GPa}$  e Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ . A concentração de tensão ao redor do furo é verificada pelo fator  $K = (\sigma_{yy})_{max}/t$ , cujo resultado experimental vale  $K = 3.03$ .

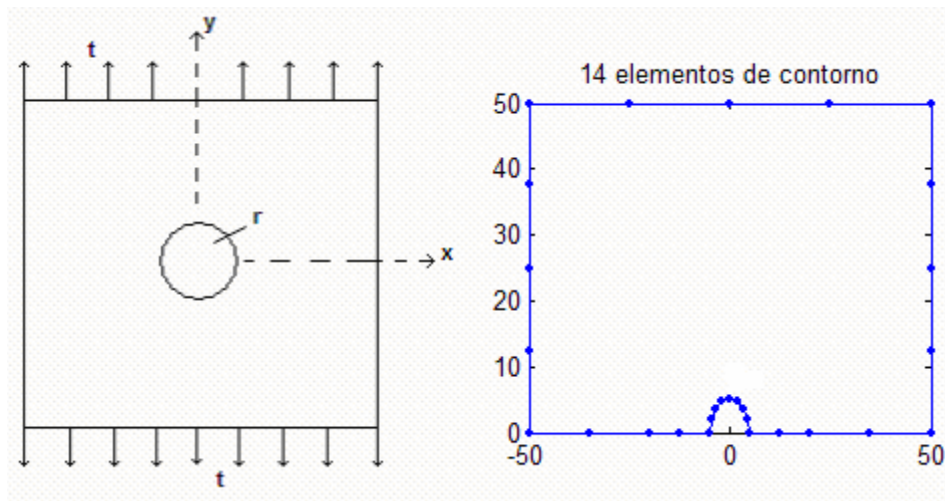


Fig. 7.22 – Geometria e Discretização da placa quadrada com furo.

O resultado de elementos de contorno para a máxima tensão, obtido pelo programa *bemoop*, fornece  $\sigma_{yy} = 302.52 \text{ N/mm}^2$ , resultando num valor de  $K = 3,0252$ .

## 7.2 EXEMPLOS ELASTOPLÁSTICOS

Os exemplos seguintes serão analisados considerando-se apenas a plasticidade ideal. Portanto, o encruamento do material não será aqui discutido. Para analisar os exemplos 4 e 5, cuja variação dos invariantes é importante, faz-se uso do MRD modificado. Os demais exemplos foram resolvidos pelo MRD usual.

Os resultados serão apresentados por figuras demonstrando a solução para tensões no início do escoamento e por gráficos dos tipos: relação carga-deslocamento, movimento da fronteira elastoplástica e mapeamento da distribuição de tensões nos diversos estágios.

### 7.2.1 Exemplo 1 (grau constante)

O mesmo exemplo da Figura 7.1 é agora processado em regime elastoplástico, sem levar em conta o encruamento, considerando-se as seguintes propriedades:  $E = 10$ ,  $\nu = 0.25$

e  $\sigma_o = 0.24$ . Os resultados para o ponto interno no centro da geometria, são comparados com os resultados, analíticos e numéricos, obtidos em Foltran (1999) usando integrais em domínio de célula e considerando encruamento, como vistos na tabela a seguir.

Tabela 7.6 – Resultados para o ponto interno.

Variável	Exato	Foltran (1999)	<i>Bemoop</i>
$u_y$	0.055	0.054999999	0.06033937
$\sigma_y$	1.000	0.99999999	1.00000000
$\varepsilon_y$	0.110	0.10999999	0.11646060
$\varepsilon_y^p$	0.010	0.00999999	0.01036060

O mapeamento da distribuição de tensões e dos deslocamentos, pode ser visualizado na Figura 7.23. Nesta, verifica-se que a estrutura plastifica toda de uma vez, não havendo zona elástica entre a região plastificada.

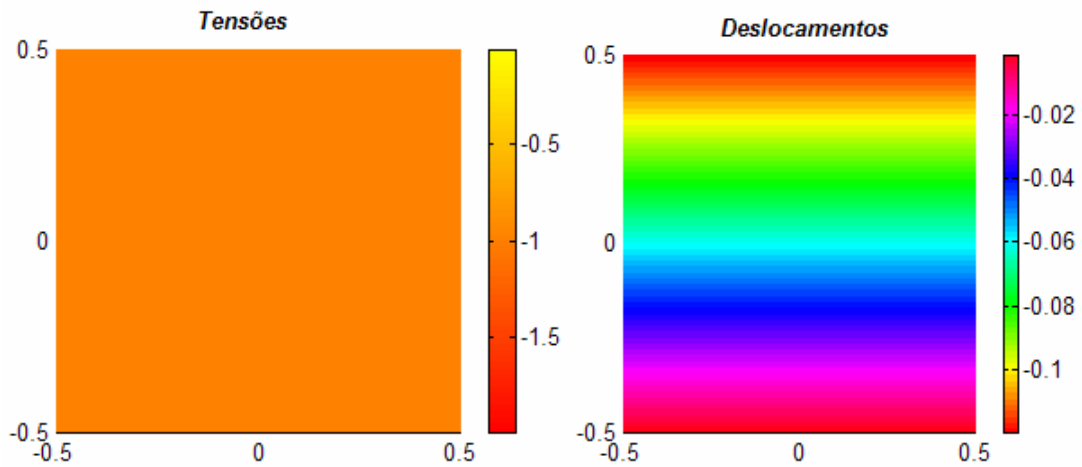


Fig. 7.23 – Mapeamento de tensões e deslocamentos.

### 7.2.2 Exemplo 2 (grau linear)

O mesmo exemplo da Figura 7.3 é agora processado em regime elastoplástico, como indicado na Figura 7.24. Considere para este exemplo, uma tensão de escoamento de 240 MPa.

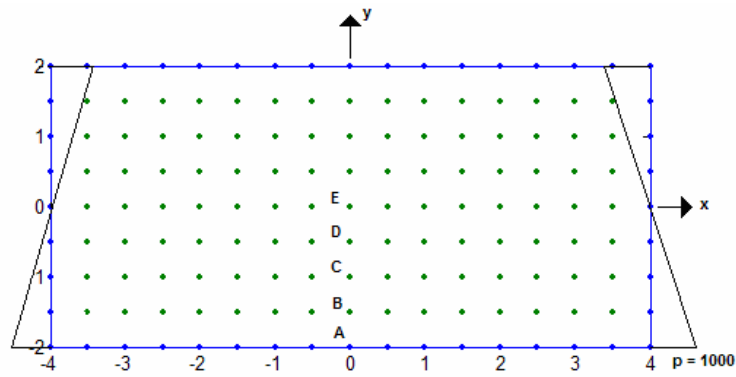


Fig. 7.24 – Modelo discreto para o exemplo 2.

Nos gráficos da Figura 7.25, temos a evolução plástica para 20, 40 e 80 passos de carga dos pontos A, B, C, D e E, indicados na Figura 7.24, representando a metade da geometria.

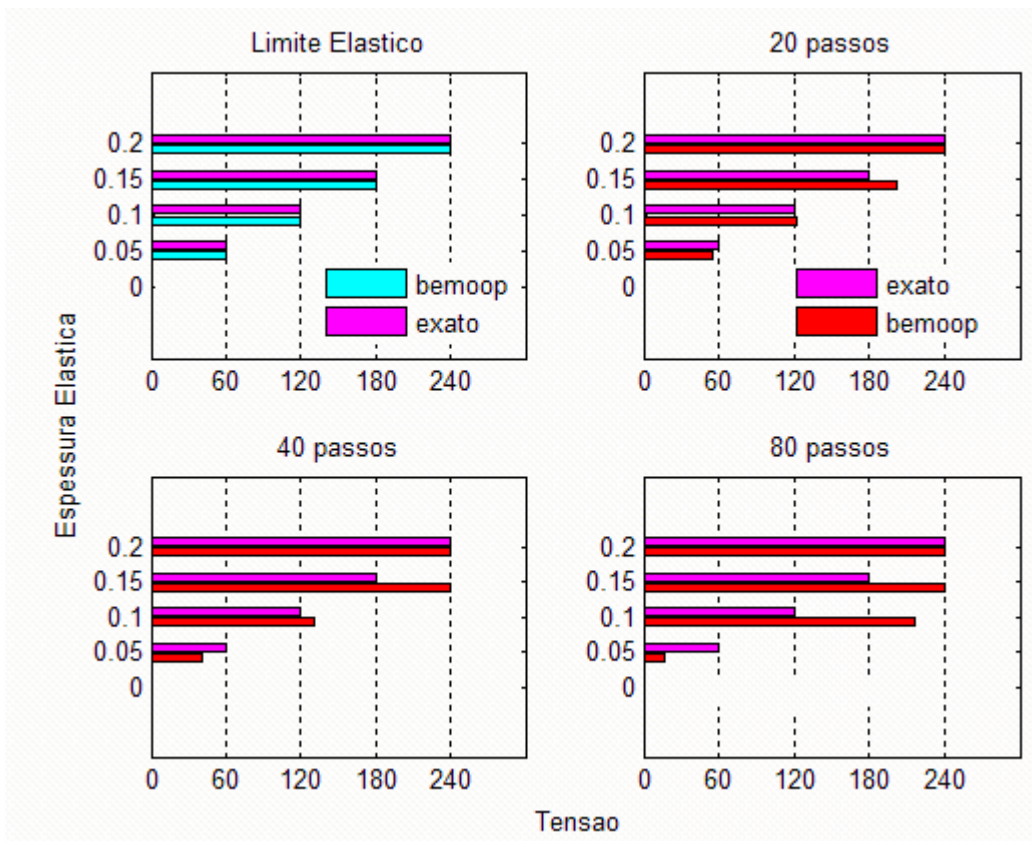


Fig. 7.25 – Distribuição da Tensão de von Mises em relação à Espessura da Zona Elástica.



O gráfico da Figura 7.26 mostra a evolução da fronteira plástica até os 80 passos de carga.

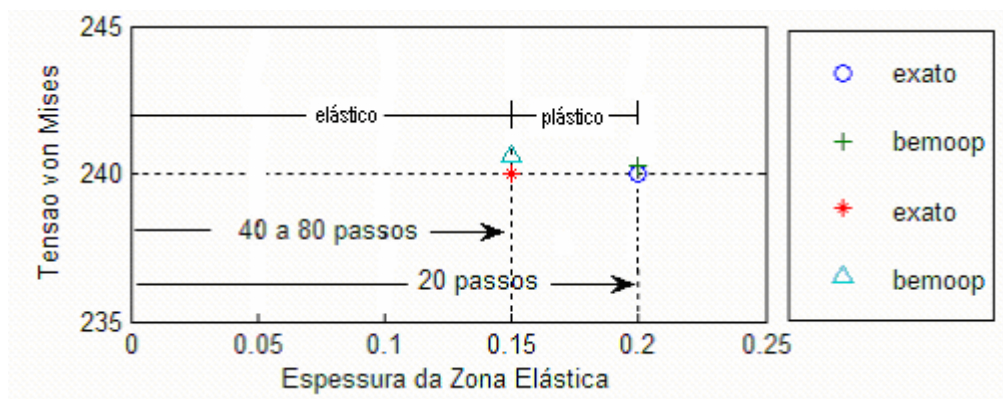


Fig. 7.26 – Fronteira Plástica para 80 passos de carga.

A Tabela 7.7 apresenta o erro relativo da espessura da zona elástica encontrada, em relação à analítica.

Tabela 7.7 – Erro relativo da espessura da zona elástica.

Tensão		Espessura zona elástica		Erro	Passos de carga
exato	<i>bemoop</i>	exato	<i>bemoop</i>		
240.0	240.24	0.20	0.1996	0.20	$\leq 20$
240.0	240.63	0.15	0.1496	0.27	$\leq 80$
240.0	240.24	0.10	0.0999	0.10	$\geq 120$

A Figura 7.27 apresenta o mapeamento da solução elastoplástica para tensões e deformações iniciais, correspondentes à fração elástica e ao limite do regime elástico, a partir dos quais inicia-se o processo incremental. Nesta, observa-se que as tensões normais sobre os contornos, inferior e superior, estão no limiar da plastificação.

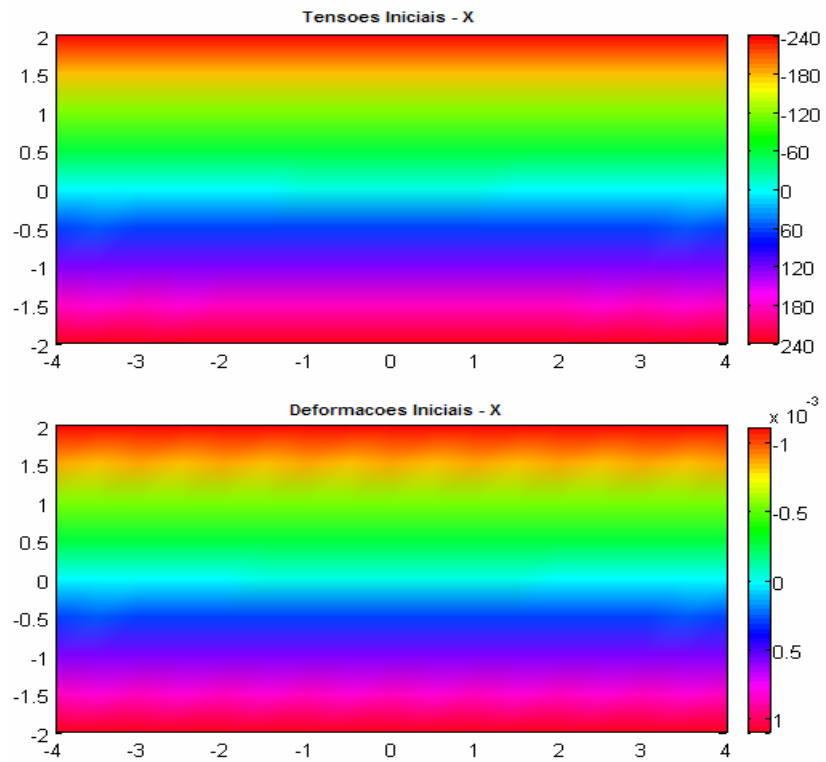


Fig. 7.27 – Tensões e Deformações no início do escoamento.

A Figura 7.28 mostra o mapeamento da distribuição das tensões para 30, 60 e 120 passos de carga. Nesta, pode-se verificar o confinamento da zona elástica devido à expansão da zona plástica. Há claramente o predomínio da faixa vermelha sobre as demais, significando que a tensão normal excedeu a tensão de escoamento, logo, a distribuição de tensões permanece uniforme na faixa vermelha, e linear no miolo da placa.

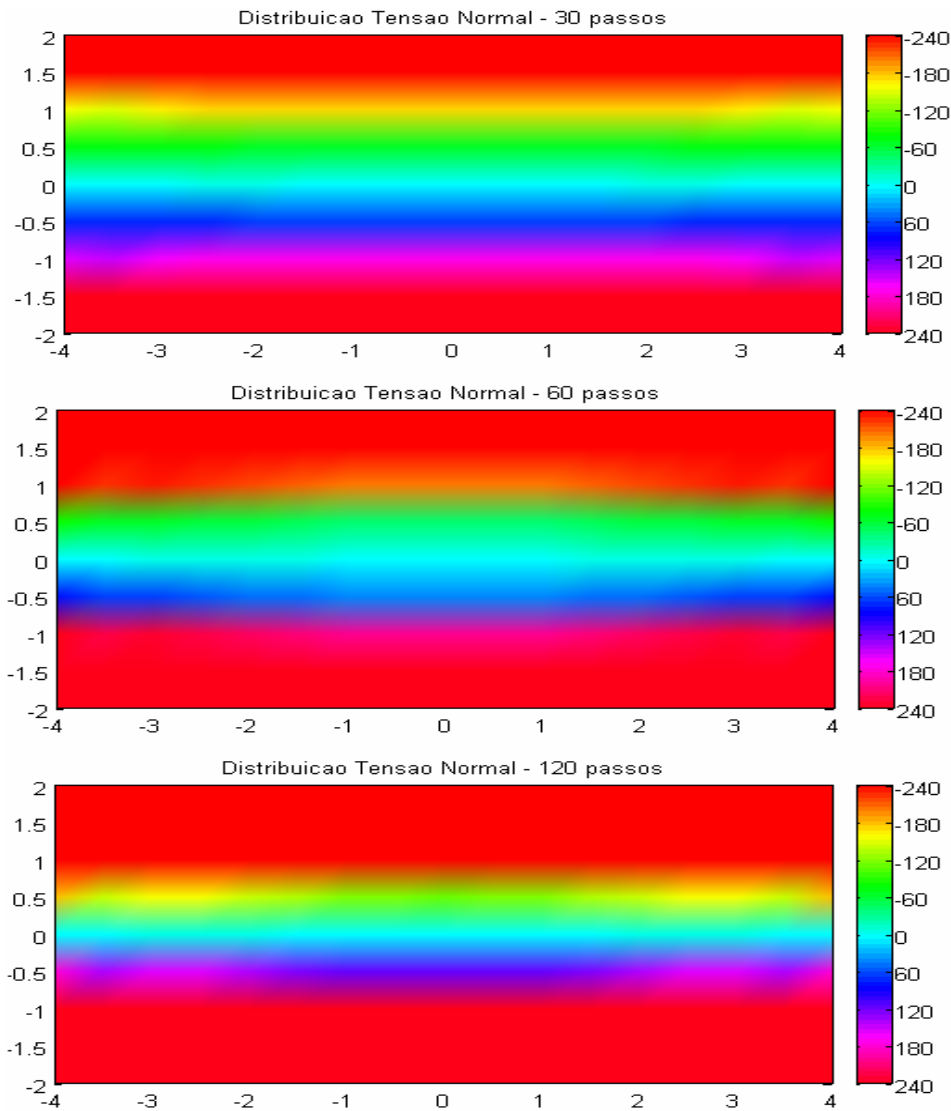


Fig. 7.28 – Mapeamento da distribuição de tensões elastoplásticas.

### 7.2.3 Exemplo 3 (grau linear)

O mesmo exemplo da Figura 7.7 é agora modelado como um material perfeitamente elastoplástico, considerado no plano das tensões. A geometria está representada na Figura 7.12. Para este problema, considere  $P = 1200 \text{ Kgf/cm}^2$ ,  $x1 = 10 \text{ cm}$ ,  $x2 = 20 \text{ cm}$ , Módulo de Elasticidade  $E = 1200000 \text{ Kgf/cm}^2$  e Coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

A Figura 7.29 apresenta o mapeamento da solução elastoplástica para tensões e deslocamentos no início do escoamento, correspondentes à fração elástica e ao limite do regime elástico, a partir dos quais inicia-se o processo incremental.

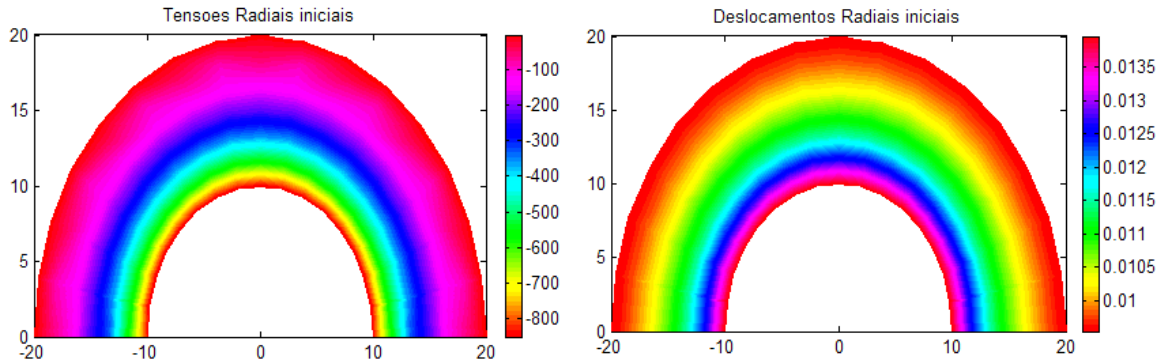


Fig. 7.29 – Tensões e Deslocamentos Radiais no início do escoamento.

A Figura 7.30 mostra o mapeamento da distribuição das tensões radiais para 80 passos de carga. Nesta, observa-se que a fronteira plástica acontece sobre um nível de tensão próximo dos 600 kgf/cm<sup>2</sup>.

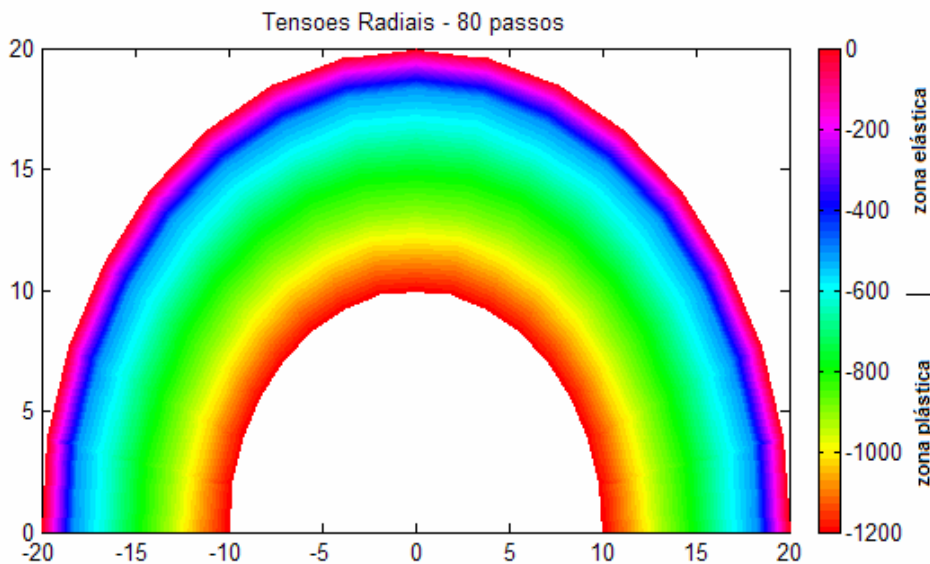


Fig. 7.30 – Distribuição de Tensões na direção radial.

Nos gráficos da Figura 7.31, temos a distribuição das tensões radial e tangencial. O resultado é comparado com a solução analítica modificada do critério de Tresca, na qual alterou-se a tensão de escoamento para aproximar do critério de von Mises (ver as expressões em 7.1).

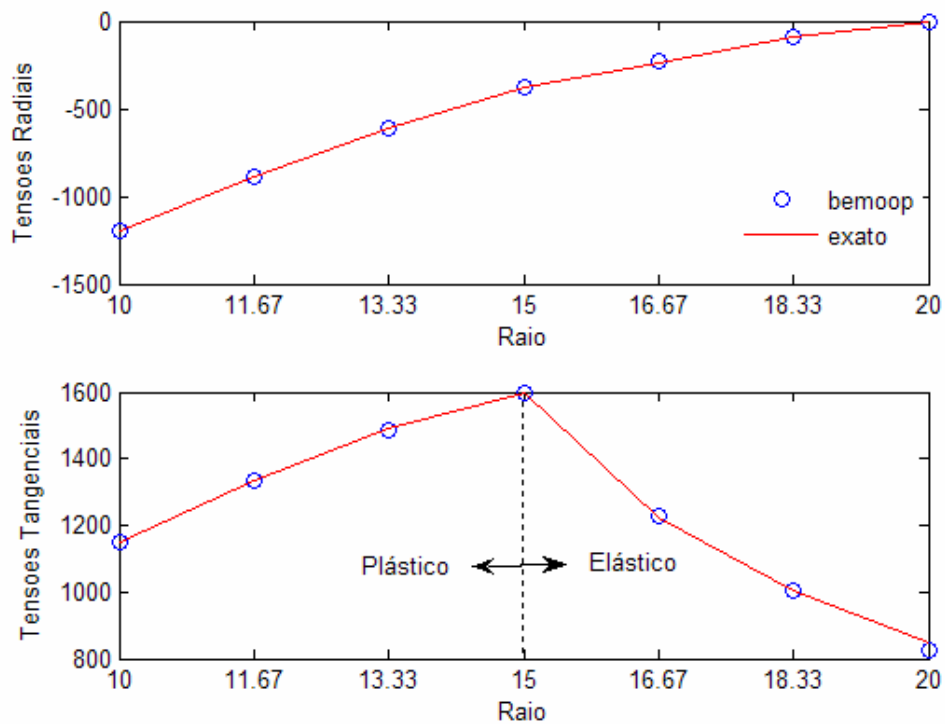


Fig. 7.31 – Distribuição de Tensões para o exemplo 3.

Observa-se no gráfico das tensões tangenciais acima, que a frente plástica ocorre a uma distância de 1.5 do raio interno e a relação  $p/\sigma_0$  vale 0.714. Este resultado pode ser comparado com Brebbia et al (1984), que usou células, onde a fronteira plástica se deu a 1.6 do raio interno e a relação  $p/\sigma_0$  vale 0.755.

Para a solução analítica da Figura 7.28, considerou-se as equações abaixo, para o cálculo das tensões radiais e tangenciais, para as quais alterou-se o valor da tensão de escoamento no intuito de se obter uma aproximação para o critério de von Mises.

$$\sigma_r = \sigma_0' \left[ \ln \frac{r}{c} + \frac{(c^2 - b^2)}{2b^2} \right]$$

$$\sigma_\theta = \sigma_0' \left[ \ln \frac{r}{c} + \frac{(c^2 + b^2)}{2b^2} \right] \quad (7.1)$$

$$\sigma_0' = \sigma_0 \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento.

O gráfico da Figura 7.32 mostra a relação carga-deslocamento de um ponto na superfície externa, no qual os resultados são comparados com a solução analítica devido a Hodge e White (1968).

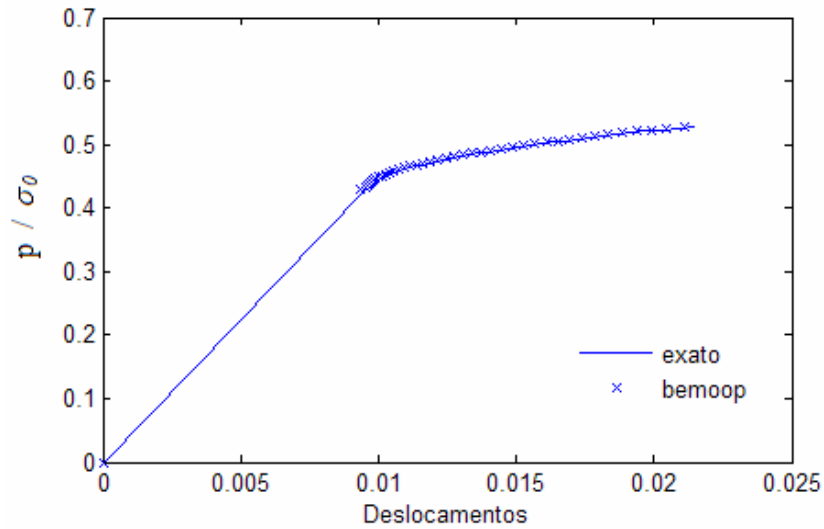


Fig. 7.32 – Deslocamentos de um ponto da superfície externa.

O mesmo exemplo é realizado agora, mudando as propriedades do material e a tensão de escoamento, sendo  $E = 1519000 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\nu = 0.33$  e  $\sigma_0 = 1519 \text{ kgf/cm}^2$ , e mantendo-se a mesma pressão interna. O resultado para 40 passos é comparado com a solução encontrada por Lee e Fenner (1986), como visto na Figura abaixo.

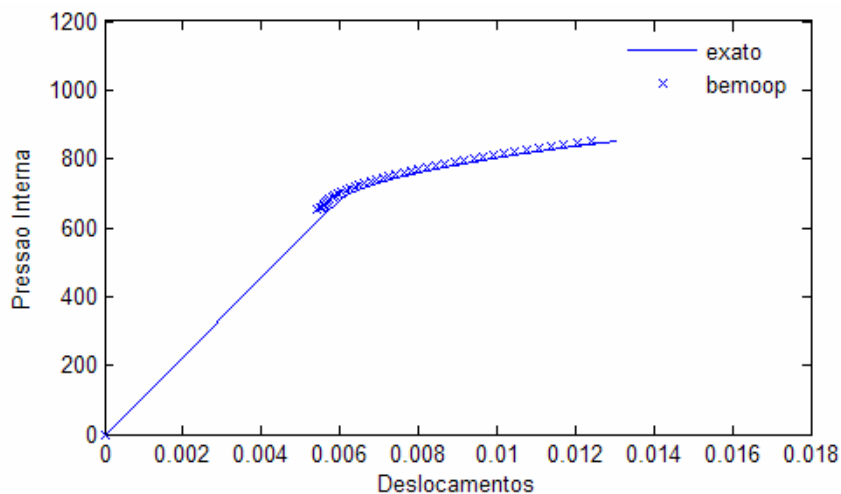


Fig. 7.33 – Deslocamentos de um ponto na superfície externa.

### 7.2.4 Exemplo 4 (grau maior que linear)

O mesmo exemplo da Figura 7.17a, é analisado em regime elastoplástico, mantendo-se a mesma geometria e propriedades, sendo a tensão de escoamento  $\sigma_o = 240$  Mpa. A Figura 7.34 mostra o mapeamento da solução elastoplástica para as tensões de von Mises, obtido com o *BEMOOP* e com o programa *ANSYS*. Os resultados para cada isofaixa de tensão são visualizados no gráfico da Figura 7.35. O critério de convergência adotado no Ansys foi o padrão e a curva de definição do modelo foi a curva tensão deformação para materiais perfeitamente plástico.

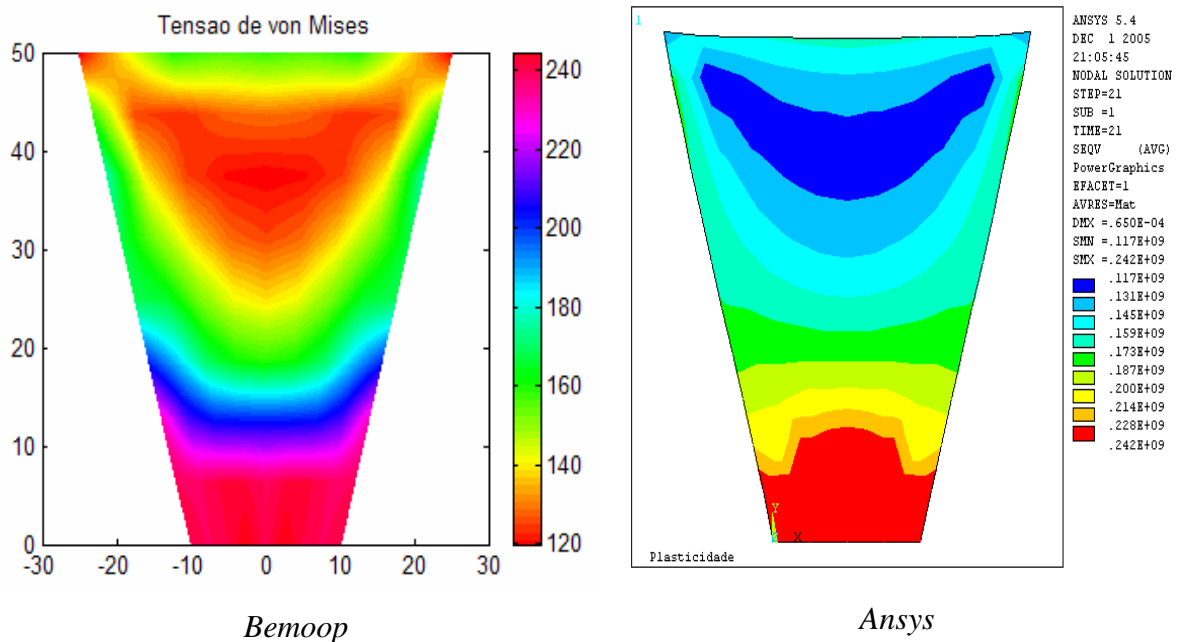


Fig. 7.34 – Mapeamento das tensões de von Mises.

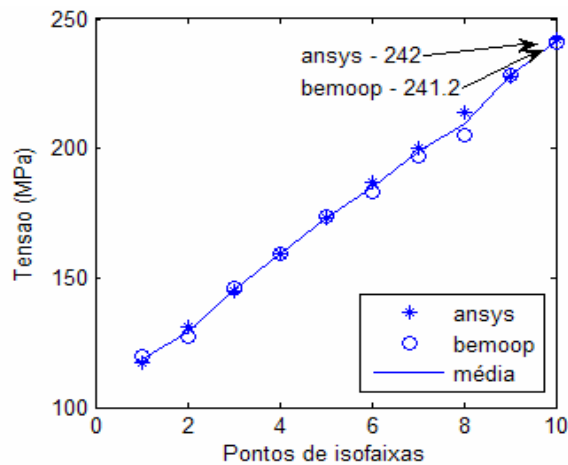


Fig. 7.35 – Resultados de Tensão *ansys* x *bemoop*.

A Figura 7.36 mostra o mapeamento da solução elastoplástica para deslocamentos na direção Y, obtido com o *BEMOOP* e com o programa *ANSYS*. Os resultados para deslocamentos máximos sobre cada isofaixa são visualizados no gráfico da Figura 7.37.

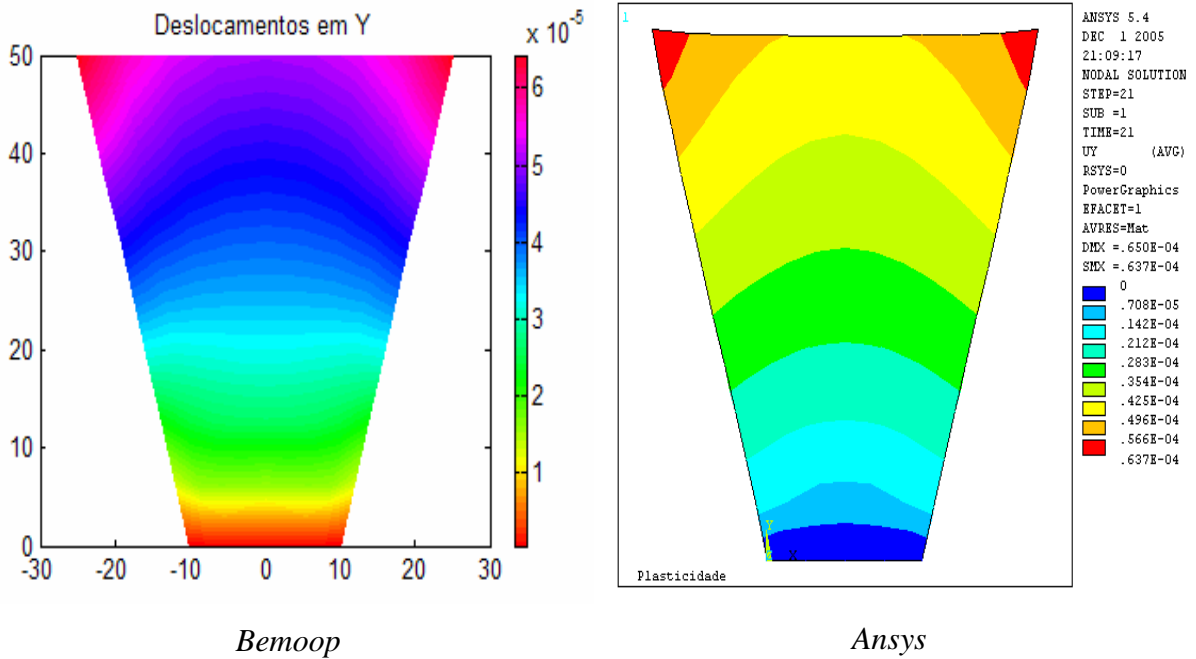


Fig. 7.36 – Mapeamento dos Deslocamentos.

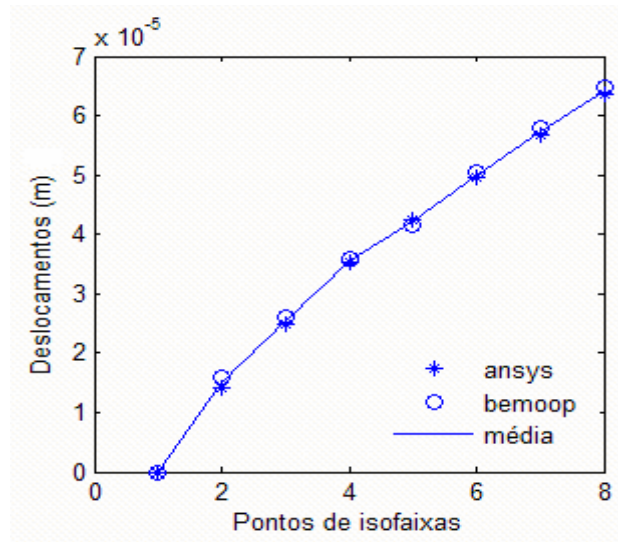


Fig. 7.37 – Resultados de Deslocamentos *ansys* x *bemoop*.



A Figura 7.38 mostra o mapeamento da solução para deformações plásticas na direção Y, obtido com o *BEMOOP* e com o programa *ANSYS*, para 20 passos de carga. Os resultados para os pontos sobre a linha AB são visualizados no gráfico da Figura 7.39.

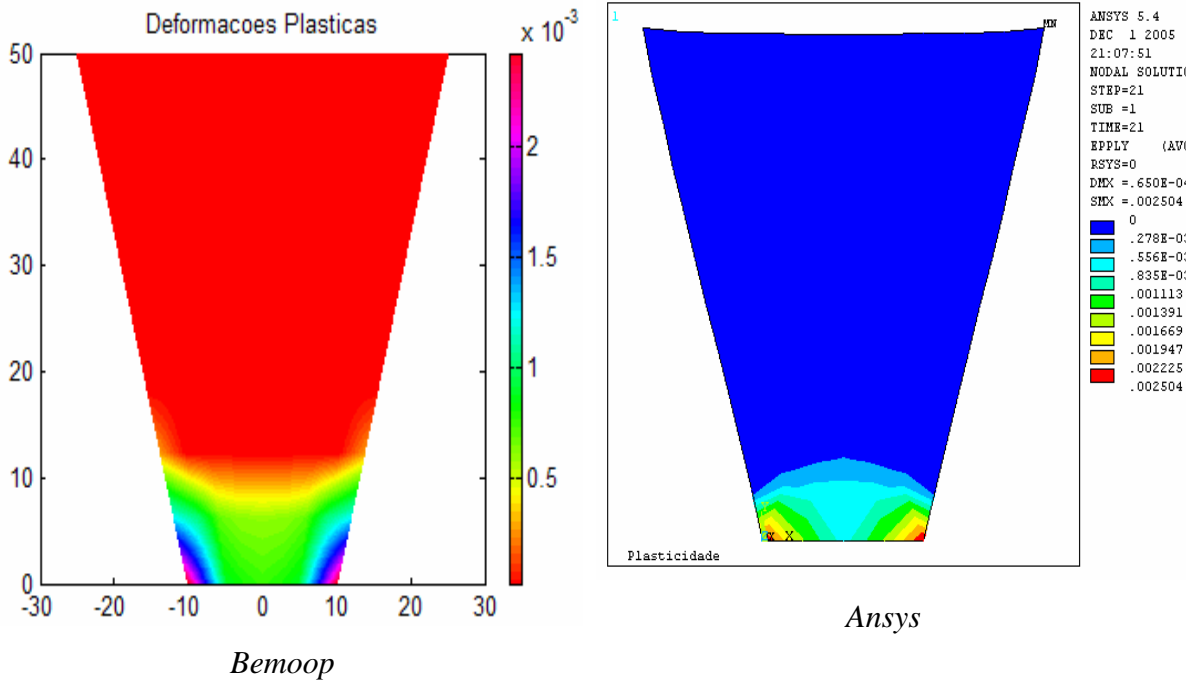


Fig. 7.38 – Mapeamento das Deformações Plásticas.

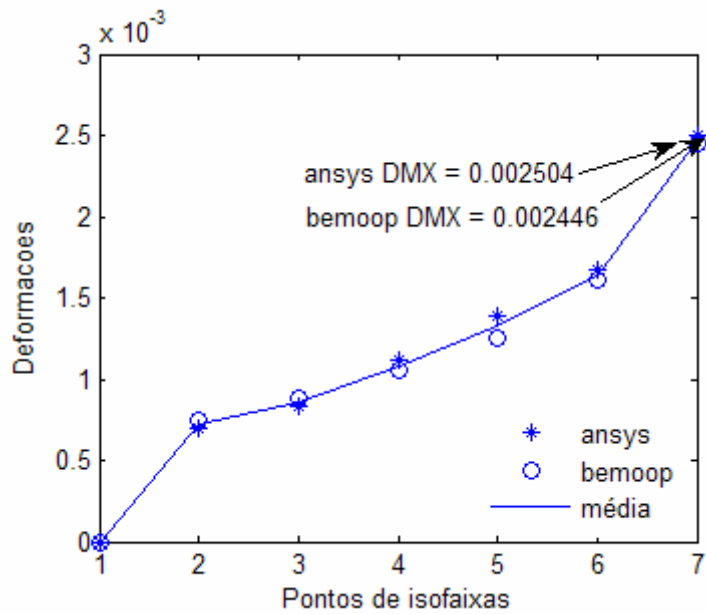


Fig. 7.39 – Deformação Plástica *ansys* x *bemoop* .

### 7.2.5 Exemplo 5 (grau maior que linear)

O mesmo exemplo da seção 7.1.5 é formalizado para análise elastoplástica com as seguintes propriedades :  $E = 70000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.2$  e  $\sigma_o = 243 \text{ N/mm}^2$ , sem considerar o encruamento. O modelo discreto de elemento de contorno é agora representado na Figura 7.40.

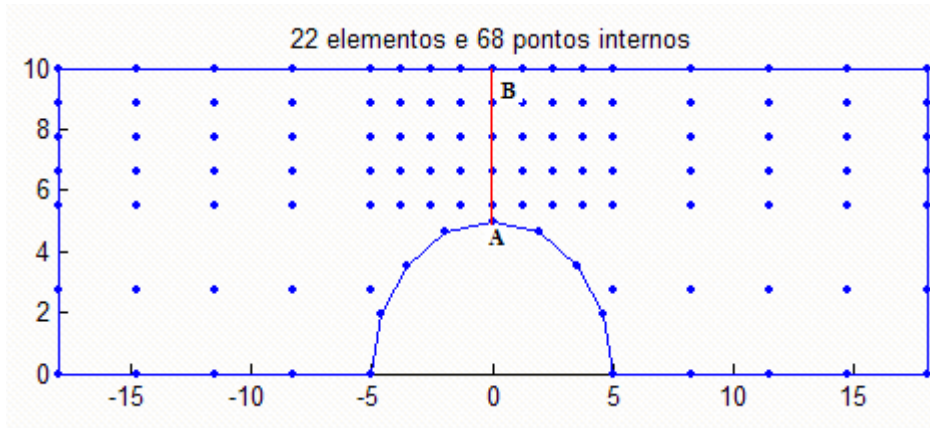


Fig. 7.40 – Modelo discreto da placa com furo.

A Figura 7.41 mostra o mapeamento da solução elástica para tensão e deslocamento no início do escoamento.

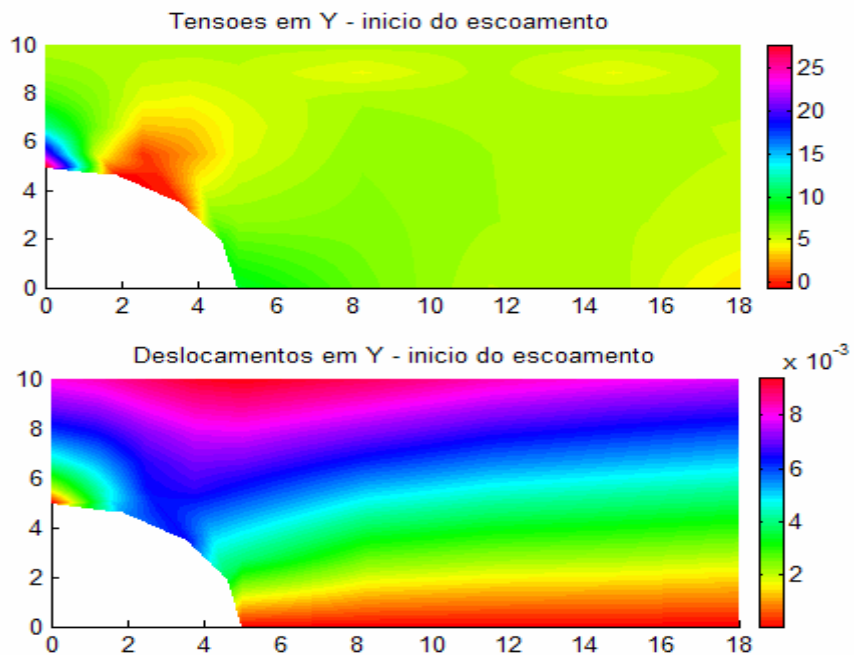


Fig. 7.41 – Tensão (MPa) e Deslocamento (mm) no início do escoamento.

Na Figura 7.42, temos a distribuição de tensões ao longo da linha AB obtida com o programa *bemoop*. Na mesma figura são mostrados os resultados, experimental e numérico, devido a Theocaris e Marketos (1964) e a Banerjee (1981), respectivamente, considerando-se o encruamento de  $h = 224 \text{ N/mm}^2$ . Nesta, pode-se observar que o nível de plastificação ao longo da linha AB encontra-se a 1.325 do raio, abaixo de 1.55 (Banerjee, 1981) que leva em consideração o encruamento do material, o que era de se esperar.

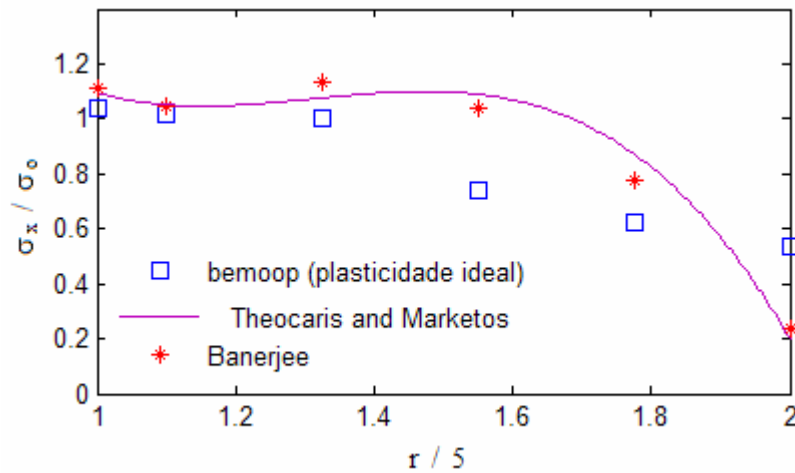


Fig. 7.42 – Distribuição das tensões de von Mises ao longo de AB.

A Figura 7.43 ilustra o mapeamento da tensão de von Mises em  $\frac{1}{4}$  da placa para 40 passos de carga.

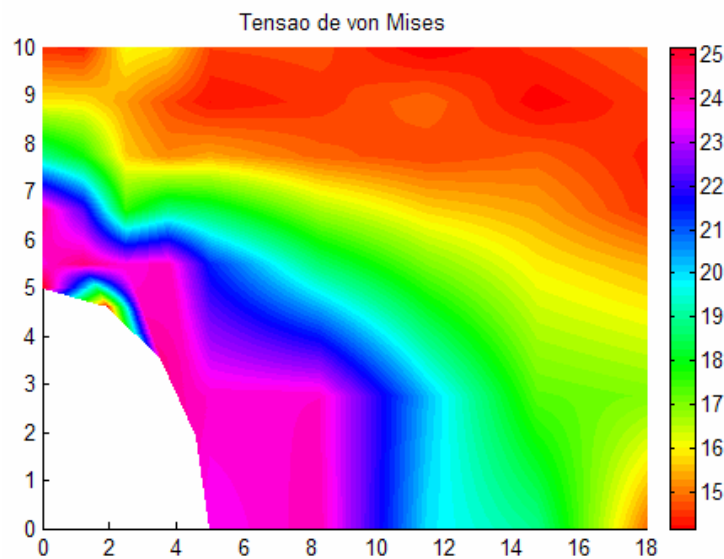


Fig. 7.43 – Mapeamento da tensão de von Mises.

O mesmo problema do exemplo 5 tem sua disposição de carregamento modificada, conforme Figura 7.44 abaixo, buscando uma comparação com o MRM, devido a Kobayashi (1999). A Figura 7.45 mostra a evolução plástica obtida pelo *BEMOOP* e pelo MRM para vários valores de  $2\sigma_a/\sigma_0$  em  $1/4$  da região.

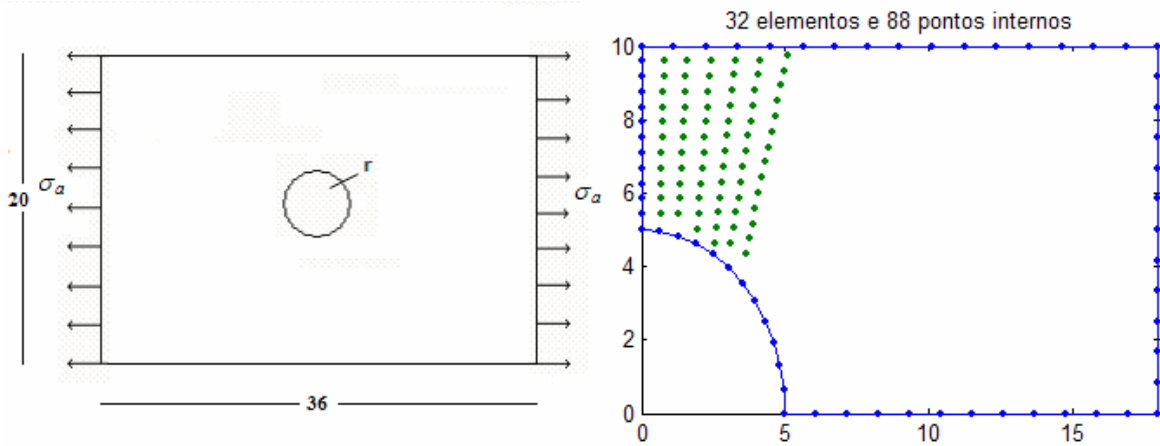


Fig. 7.44 – Geometria e Discretização do exemplo 5.

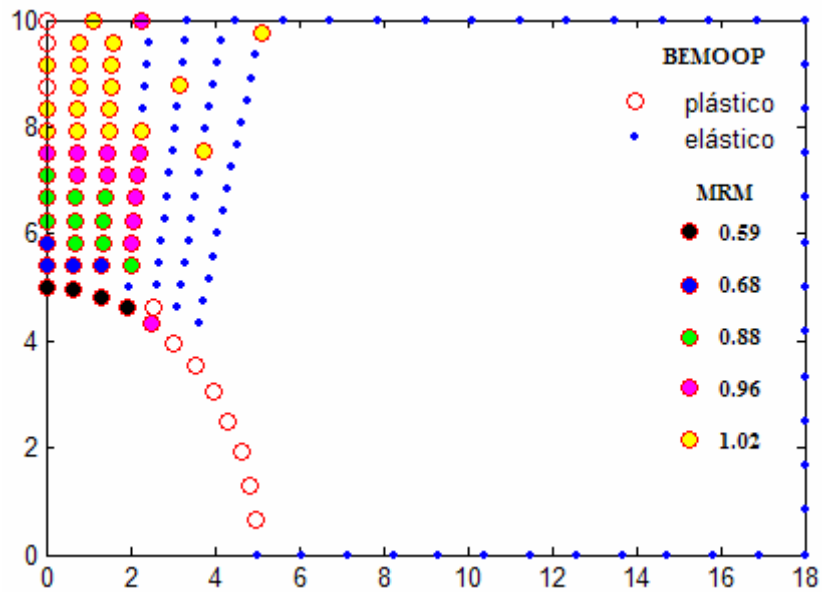


Fig. 7.45 – Pontos plásticos obtidos para vários valores de  $2\sigma_a/\sigma_0$ .

Como pode-se observar na Figura acima, os resultados obtidos com MRD são muito próximos daqueles obtidos com MRM para os mesmos valores de  $2\sigma_a/\sigma_0$ .

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 8.1 CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho teve como objetivo o estudo do Método dos Elementos de Contorno com o Método de Reciprocidade Dual em problemas de plasticidade bidimensional, mas especificamente em problemas elastoplásticos, dentro de um enfoque orientado a objeto, visando o desenvolvimento de um programa de análise que corrobore esse estudo.

Nos capítulos 2, 3 e 4, apresentamos um estudo teórico das técnicas numéricas envolvidas (MEC/DRM), dos principais conceitos da análise elastoplástica, necessários ao embasamento do programa, bem como de novas ferramentas de programação (linguagem orientada a objeto) para dar suporte e concretizar o programa de análise.

Nos três capítulos citados, formamos a base necessária à análise elástica pelo MEC, desde os conceitos da teoria da elasticidade até a formulação da equação integral de contorno para obtenção das variáveis de contorno e internas. Vimos, por exemplo, que no estado de tensão, as componentes do tensor tensão se relacionam através das equações de equilíbrio de momentos e de componentes direta. Essas componentes são projetadas no elemento diferencial do contorno  $d\Gamma$  produzindo trações que devem estar em equilíbrio com as componentes de tração obtidas da tensão interna no contorno. No estado de deformação, as direções, funções de deslocamentos, produzem deformações diretas e de cisalhamento (no caso linear). Através do tensor deformação, as condições de contorno são aplicadas em termos de deslocamentos. E ainda, que os estados de tensão e deformação, em um corpo, se relacionam através das equações constitutivas do material, que geralmente, para materiais elásticos isotrópicos, todo material constante pode ser expresso em função de duas constantes independentes:  $\lambda$  e  $G$  ou  $E$  e  $\nu$ .

Acerca do MEC, vimos que a formulação das equações de integral de contorno para problemas elastostáticos requer o conhecimento da solução de problemas elásticos, mantendo-se as mesmas propriedades dos materiais do corpo considerado e sob consideração de um domínio infinito com uma carga pontual concentrada unitária, que é a solução de Kelvin ou solução fundamental da elastostática. Esta equação permite resolver problemas de valor de contorno gerais na Elastostática, pois resulta em equações integrais apropriadas com as condições de contorno devidas, ou seja, se deslocamentos são conhecidos sobre o domínio ou se trações são conhecidas sobre todo o contorno. E ainda, que os valores de tensões e deslocamentos em qualquer ponto interno podem ser obtidos facilmente usando equações apropriadas e técnicas de quadratura.

Acerca da Plasticidade, vimos que esta é definida como uma propriedade que permite um dado material se deformar, contínua e permanentemente, sem ruptura durante a aplicação de tensão excedendo o limite elástico do material. Assim, quando da remoção das cargas, ocorrerão deformações residuais, e conseqüentemente, a deformação final dependerá tanto das tensões finais quanto da história de tensão desde o início do escoamento. Adotou-se a superfície de von Mises como o critério de escoamento e limite da condição de regime elástico, onde, a cada passo de carga, todos os pontos são testados a experimentar uma deformação plástica.

Acerca do MRD, mostramos como transformar uma integral de domínio em integral de contorno, através de um procedimento geral e sistemático, que trata as integrais de domínio envolvendo-as com as incógnitas do problema.

No capítulo 5, apresentamos a formulação da equação integral inelástica com modificações na forma como se obtém os incrementos plásticos, em especial o incremento de deformação plástica. A partir desse incremento, obtemos o incremento de tensão plástica e, com este, calculamos as pseudo-forças inseridas na formulação.

No capítulo 6, apresentamos a implementação do programa de análise, fundamentada em alguns conceitos da Programação Orientada a Objeto. Neste, podemos

verificar quão elegante é o tratamento do programa na análise elastoplástica quando os objetos interagem entre si e com outros objetos, buscando, recuperando e trocando informações para o cumprimento da análise. Uma característica vantajosa do processador desenvolvido aqui, é a criação dos arrays dinamicamente, não havendo a preocupação com seus tamanhos e com a ocupação de espaços ociosos na memória, uma vez que estes são certos e determinados, de acordo com as informações do modelo discretizado. Outra característica, é a interface com o programa de pós-processamento que permite uma interpretação rápida dos dados. Aqui, o processador lança vários arquivos de saída de dados, de acordo com a necessidade do usuário, para o *MATLAB*, programa usado como pós-processador.

No capítulo 7, atestamos a validação do programa desenvolvido, com a realização de exemplos da literatura para corroborar a análise elástica pelo MEC e, a análise elastoplástica pelo MRD, devido os termos não-homogêneos.

## 8.2 CONCLUSÕES ESPECÍFICAS

### 8.2.1 Sobre as Funções *ATPS*

Vimos que as funções *ATPS* consistem em uma função *TPS* acrescida de três funções globais - 1,  $x$  e  $y$  - do Triângulo de Pascal. Neste trabalho, utilizou-se  $r^2 \log r$  acrescida de dez termos e verificou-se que esta expansão, permite resolver, com ou sem pontos internos, problemas que envolvem funções densidade de massa constante ou linear, como os primeiro, segundo e terceiro exemplos elastoplásticos. Sua convergência é obtida aumentando-se o numero de elementos de contorno. Por essa razão mostramos, nos exemplos, discretizações com uma malha de contorno considerada e poucos pontos internos, distribuídos regularmente, para facilitar a plotagem do mapeamento.

### 8.2.2 Sobre os Exemplos Elásticos

Os exemplos elásticos analisados neste trabalho, tiveram como objetivo único à validação do programa desenvolvido, visando garantir a continuidade da análise plástica. Não atentando, portanto, a discutir detalhes do Método dos Elementos de Contorno, como por exemplo, o uso de nós duplos, problemas de singularidades ou melhorias da técnica.

Todos os exemplos analisados, com exceção do exemplo 4, são clássicos da literatura que já corroboram o poder dos elementos de contorno em problemas elastostáticos. Para o exemplo 4, o parâmetro de estabilidade dos resultados do MEC se deu por meio do programa *Ansys* com os elementos finitos. Uma vez que esse exemplo apresenta grandes concentrações de tensões nos cantos da placa, os resultados pelo MEF mostram um nível de tensão nesses cantos bem superior àqueles encontrado com o MEC, cerca de 14% de diferença.

### 8.2.3 Sobre os Exemplos Elastoplásticos

Os exemplos 1, 2 e 3 foram analisados seguindo-se a forma clássica do DRM, necessitando-se, portanto, da avaliação numérica do divergente do tensor de tensões. Uma vez que a função *ATPS* adotada pode representar corretamente campos gravitacionais que apresentam variação de grau até linear, não houve dificuldade em realizar essas análises.

Nos exemplos 4 e 5, os resultados obtidos da forma como os anteriores foram bastante pobres, falseando a evolução plástica logo nos primeiros incrementos. Isto ocorria em ambos os exemplos, devido a grande variação do primeiro invariante do tensor de tensões a cada passo de carga. E ainda, a avaliação numérica do divergente do tensor de tensões, num processo iterativo como o incremental, produz um erro que aumenta a cada passo de carga. Por esses motivos, esses exemplos não foram apresentados aqui na forma clássica do MRD, mas na forma modificada.



Os resultados dos exemplos 4 e 5 foram obtidos com o MRD modificado, cujo procedimento envolve apenas o cálculo do primeiro invariante, tendo a vantagem de trabalhar apenas com o campo de tensão sem a necessidade de se conhecer ou avaliar seu gradiente.

### 8.3 CONTRIBUIÇÃO

Uma das contribuições principais deste trabalho está voltada à aplicação do MRD em problemas de plasticidade bidimensional. Dá-se aqui, uma pequena parcela de contribuição no estudo e análise de problemas inelásticos, por meio do Método de Reciprocidade Dual, em que se mostra como transformar a integral de domínio, que leva em conta a contribuição da deformação plástica, em integral de contorno, fazendo uso do MRD em sua forma clássica, para exemplos com graus de pseudo forças até linear (exemplos 1, 2 e 3), e em sua forma modificada para exemplos com grau de pseudo forças maior que linear (exemplos 4 e 5), na qual a função a aproximar depende apenas do primeiro invariante do tensor de tensões, que é avaliado a partir das tensões plásticas obtidas em todos os pontos do modelo discretizado.

### 8.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Dando continuidade a este trabalho, seria interessante, primeiramente, expandir a análise plástica com o MRD modificado aos outros modelos, considerando o encruamento do material e os outros critérios de escoamento. O que não é difícil de implementar, tendo em vista que a forma do programa, orientada a objeto, é propícia a inserção de código com versatilidade, bastando apenas inserir a implementação desejada na classe adequada.

Também seria interessante, implementar a proposta do Apêndice B, na qual a pseudo-força de corpo é aproximada por Diferenças Finitas, aproveitando a mesma malha interna de pontos para a função de aproximação do MRD.

Para complementar o programa, seria interessante implementar outras classes de análise, como a viscoelástica, por exemplo, e poder se modelar um material geral, com a combinação dos diversos objetos de análise, isto é, com comportamento viscoplástico, dentre outros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., “Numerical Fracture Mechanics”, Computational Mechanics Publications, Southampton (1991).
- Axelsson, K. e Samuelsson, A., “*Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Materials Displaying Mixed Hardening.*” Int. J. Numer. Meth. In Engng, vol. 14, pp. 211-225, 1979.
- Banerjee, P. K., “*The Boundary Element Methods in Engineering*”, pp. 358-361, McGraw-Hill, 1981.
- Becker, A. A., “*The Boundary Element Method in Engineering: a Complete Course.*”, McGraw-Hill, London – UK – 1992.
- Booch, G., “*Object-Oriented Analysis e Design With Applications*” The Benjamin/Cumming Publishing Company, Inc., 1994.
- Brebbia, C. A., “*The Boundary Element Methods for Engineers*”, Pentech Press, London; Halstead Press, New York, 1978.
- Brebbia, C. A., Dominguez, J., “*Boundary Elements: An Introductory Course.*”, Computational Mechanics Publications, Southampton 1989.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. e Wrobel, L. C., “*Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering.*”, Springer, Berlin, 1984.
- Bridges, T. R., Wrobel L. C., “*A dual reciprocity formulation for elasticity problems with body forces using Augmented Thin Plate Splines.*”, Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 12, 209-220, 1996.
- Bui, H. D., “*Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations.*”, Int. J. Solids Structures, 1978.
- Chaves, E. W. V., “*Análise de Placas com Variação de Espessura Através do Método dos Elementos de Contorno.*”, Escola de Engenharia de São Carlos – USP – Tese de Mestrado, 171 p., São Carlos, 1997.
- Chen, D. H. e Nisitani, H., “*Effect of Poisson’s Ratio on Elastic-Plastic Stress under Plane Deformation*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 20, pp. 17-24, 1997.
- Chen, W. F. E Han, D. J., “*Plasticity for Structural Engineers.*”, Springer-Verlag, New York, 1988.
- Cheng, A. H-D., Grilli, S. e Lafe, O. “*Dual reciprocity BEM based on complete set global shape functions*”, BEM XV, 1993, pp. 343-358.
- Creus, G. J., “*Viscoelasticity. Basic theory and Applications to Concrete Structures.*”, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- Cruse, T. A., “*Numerical Solution in Three Dimensional Elastostatics.*”, Int. J. Solids and Structures, vol. 5, pp. 1259-1274, 1969.
- Dorfman, L., “*C++ by Example: Object-Oriented Analysis, Design & Programming*”, paperback, 1995.

- Fenves, S. J., “*Computer Methods in Civil Engineering*”, Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- Foltran, C. E., “*Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno*”, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – FEC/UNICAMP, São Paulo, 1999.
- Golberg, M. A., Chen, C. S., *The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations.*”, Boundary Elements Communications, vol. 5, 57-61, 1994.
- Gomes, G., “*Estrutura de Dados para Representação de Modelos Bidimensionais de Elementos de Contorno.*”, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – PECC/Unb, Brasília, 2000.
- Gomes, G. e Noronha, M. A. M., “*Estrutura de Dados para Geração de Malhas Bidimensionais de Elementos de Contorno.*”, XXI CILAMCE, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- Gomes, G. e Noronha, M. A. M., “*Pré-processador Gráfico Orientado a Objeto para Modelagem Bidimensional de Elementos de Contorno.*”, XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Universidade de Brasília 2002.
- Gurtin, M. E., “*An Introduction to Continuum Mechanics.*”, Academic Press, 1981.
- Henry, D. P. e Banerjee, P. K., “*A new BEM Formulation for two and three dimensional Elastoplasticity using particular integrals*”, Int. J. Numer. Meth. In Engng, vol. 26, pp. 2079-2096, 1988.
- Hess, J. L., e Smith, A. M., “*Calculation of potential flow about arbitrary bodies*”, Pergamon Press, London, 1967.
- Irvine, K. R., “*C++ e Object Oriented Programming*”, paperback, 1996.
- Jaswon, M. A., “*Integral Equation Methods in Potential Theory - I.*”, Proc. Roy Soc. Lond., vol. A275, pp. 23-32, 1963.
- Kane, J. H., “*Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics.*” Prentice Hall, USA, 1994.
- Karur, S. R. e Ramachandran, P. A., “*Augmented thin plate spline approximation in DRM*”, Bound. Elem. Commun., 6, (1995).
- Kellogg, O. D., “*Fondations of Potential Theory.*” Springer, Berlin, 1929.
- Kupradze, O. D., “*Potential Methods in Theory of Elasticity.*” Daniel Davy, New York, 1965.
- Lachat, J. C., “*A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics.*”, PhD Thesis, University of Southampton, UK, 1975.
- Lee, K. H. e Fenner, R. T., “*A Quadratic Formulation for two-dimensional Elastoplastic Analysis Using the Boundary Integral Equation Method.*”, J. Strain Analysis, vol. 21, pp.159-175, 1986.
- Lee, K. H., “*A Boundary Integral Equation Method for two-dimensional Elastoplastic Analysis*”, PhD Thesis, Imperial College, University of London, 1983.
- Leinecker, R. C., T. Archer, “*Windows 98 Programming Bible*”, News Book, Portland, OR, 1997.

- Lienhardt, P., “*Topological Models for Boundary Representation: a Comparison with n-Dimensional Generalized Maps*”, Research Report R90-10 Department d’Informatique, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1990.
- Love, A. E. H., “*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”, Dover, New York, 1944.
- Lou, Z. W. e Zhang, M., “*Elaastoplastic Boundary Element Analysis with Hetenyi’s Fundamental Solution.*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 10, pp. 231-239, 1992.
- Lybert, J., “*Apreda em 24 Horas C++*”, ed. Campus, Rio de Janeiro, 1998.
- Masuero, J. R., “*Análise de Problemas de Fratura em Materiais Viscoelásticos via Elementos Finitos.*” Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – CPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 1992.
- Medeiros, G. C. e Partridge, P. W., “*The Method of fundamental solution with Dual Reciprocity for Potential problems of the type  $\nabla^2 u = b(x, y, u)$* ”, BETECH XIV, Southampton e Boston, pp 335-344, 2001.
- Medeiros, G. C., Sensale, B. e Partridge, P. W., “*O Método das soluções fundamentais com Reciprocidade Dual para problemas de Potencial com condições mistas de contorno*”, CILAMCE XXI – Rio de Janeiro, 2000.
- Mendelson, A. e Albers, L. U., “*Application of boundary integral equations to elastoplastic problems.*” in Boundary Integral Equations Methods: Computational Applications in Applied Mechanics, New York, 1975.
- Mendelson, A., “*Boundary integral methods in elasticity and plasticity.*” Report No. NASA TND-7418, NASA, 1973.
- Mukherjee, S., “*Corrected boundary integral equations in planar thermoelastoplasticity.*” Int. J. Solids Structures, 1977.
- Muskhelishvili, N. I., “*Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.*” Noordhoff, Holland, 1953.
- Nardini, D., Brebbia, C. A., “*A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements.*” BEM in Engineering, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1982.
- Ochiai, Y. e Kobayashi, T., “*Initial stress formulation for elastoplastic analysis by improved multiple-reciprocity boundary element method*”, Engineering Analysis with Boundary Elements 23 (1999) 167-173.
- O’Rourke, J., “*Computational Geometry in C*”, Cambridge University Press, 1998.
- Partridge, P. W. e Brebbia, C. A., “*Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of Poisson Type Equations*”, Software for Engineering Workstations, vol. 5, No. 4, pp 199-206, 1989.
- Partridge, P. W. e Brebbia, C. A., “*Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of General Field Problems*”, Communications in Applied Numeric Methods, vol. 6, No. 2, pp 83-92, 1990.
- Partridge, P. W. e Brebbia, C. A., “*The BEM Dual Reciprocity Method for Diffusion Problems*”, in Computational Methods in Water Resources VIII, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York, 1990.

- Partridge, P. W. e Brebbia, C. A., “*On Derivatives of the Problem Unknowns in BEM Analysis*”, Technical Note, Engineering Analysis, vol. 7, No. 1, pp 50-52, 1990.
- Partridge, P. W. e Brebbia, C. A., “*The Dual Reciprocity Boundary Element Method for the Helmholtz Equation*” in European Boundary Element Symposium, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York, 1990.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A. e Wrobel, L. C., “*The Dual Reciprocity Boundary Element Method*”, Computational Mechanics Publications: Southampton, 1992.
- Partridge, P. W. e Wrobel, L. C., “*The Dual Reciprocity Boundary Element Method for Spontaneous Ignition*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, 1990.
- Partridge, P. W. e Sensale, B., “*Hybrid Approximation functions in the Dual Reciprocity Boundary Element Method*”, Communications in Numeric Methods in Engineering, vol. 13, pp 83-94, 1997.
- Prager, W., e Hodge, P. G., “*Theory of Perfectly Plastic Solids*”, Dover, New York, 1968.
- Preparata, F.P. & Shamos, M.I., “*Computational Geometry: an Introduction*”, New York, Springer-Verlag,
- Ricardella, P. C., “*An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity.*” Report No. SM-73-10, Dept. Mech Engng, Carnegie Mellon University, Pittsburg, 1973.
- Rizzo, F. J., “*An Integral Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics.*” Q. Appl. Math., vol. 25, pp. 83-95, 1967.
- Sensale, B., “*On the solution of viscoelastic problems using boundary elements techniques.*” DSc. Thesis, CEMACOM, UFRGS, Porto Alegre, 1997.
- Sensale, B., Partridge, P. W. e Creus G. J., “*The Dual Reciprocity Method in Viscoelasticity*”, in Boundary Element XVIII, 343-352, Computational Mechanics Publication, Southampton (1996).
- Sensale, B., Partridge, P. W. e Creus G. J., “*General boundary elements solution for ageing viscoelastic structures*”, Int. J. Numer. Meth. Engng. 2001, 1455-1468.
- Simo, J. C., e Hughes, T. J. R., “*Computational Inelasticity*”, Springer, 1998.
- Sokolnikoff, I. S., “*Mathematical Theory of Elasticity.*” McGraw-Hill, New York, 1956.
- Stroustrup, B. & Ellis, M. A., “*The Annotated C++, Reference Manual*”, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 1990.
- Swedlon, J. L, e Cruse, T. A., “*Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elastoplastic flow*”, Int. J.Solids Structures, 1971.
- Symm, G. T., “*Integral Equation Methods in Potential Theory - I.*”, Proc. Roy Soc. Lond., vol. A275, pp. 33-46, 1963.
- Telles, J. C. F., “*The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems.*”, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1981.
- Telles, J. C. F. e Brebbia, C. A., “*Boundary Elements: New developments in elastoplastic analysis*”, Appl. Math. Modelling, 1981.

- Telles, J. C. F. e Brebbia, C. A., “*Elastoplastic boundary element analysis.*”, in proc. Europe, pp. 403-434, Springer-Verlag Berlin, 1980.
- Telles, J. C. F. e Brebbia, C. A., “*On the applications of the boundary element method to plasticity.*” Appl. Math. Modelling, 1979.
- Telles, J. C. F. e Brebbia, C. A., “*The boundary element method in plasticity.*”, in New Developments in Boundary Element Methods (C.A. brebbia, Ed.) pp. 295-317, CML Publications. Southampton, 1980.
- Telles, J. C. F., Mansur, W. J., e Halbritter, A. L., “*The boundary method applied to two dimensional linear elasticity*”, in Proc. 2<sup>nd</sup> Symposium on Computational Systems in Civil Engineering, pp. 303-304, CESP, São Paulo, 1978.
- VCDJ, “*Migração para Programação Orientada para Objetos*”, artigo publicado pela revista Visual C Developer Jornal , para programadores de c++, 1997.
- Theocaris, P. S. e Marketos, E., “*Elastic-plastic Analysis of Perforated Thin Strips of a Strain-hardening Material*”, J. Mech. Phys Solids, vol 12, pp 377-390, 1964.
- Timoshenko, S. e Goodier, J. N., “*Teoria de la Elasticidad*”, Ediciones Urmo, Bilbao (1968).
- Weiler, K. J., “*Topological Structures for Geometric Modeling*”, Ph.D. Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, Univ. Microfilms Intl., Ann Arbor, MI, 1986.
- Yamada, T., Wrobel, L. C., Power, H., “*On the convergence of the Dual Reciprocity Boundary Element Method.*” Enginnering Analysis with Boundary Elements, 13, 291-298, 1994.

## APÊNDICE A

### APLICAÇÃO DE CÉLULAS PARA DETERMINAR O VETOR $\dot{D}$

Para determinar o valor do vetor  $\dot{D}$ , a seguinte integral deve ser avaliada sobre as células do domínio:

$$\dot{D}_j = \int_{\Omega} \sigma_{jki}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^p d\Omega \quad (\text{A.1})$$

Esta avaliação pode ser feita por quadratura numérica, sobre o domínio das células ou sobre seu contorno. A avaliação sobre o domínio demanda um maior tempo computacional, além de necessitar de um tratamento especial para a singularidade do núcleo  $\sigma^*$ .

A integração sobre o contorno das células traz um ganho considerável de tempo computacional, no entanto devem-se efetuar algumas alterações no núcleo da integral. Neste caso particular, tem-se a seguinte aproximação para as deformações plásticas no interior das células:

$$\varepsilon_{ij}^p = A_{ij\nu} r r_{,\nu} + b_{ij}^0 \quad (\text{A.2})$$

onde  $A_{ij\nu}$  e  $b_{ij}^0$  são os tensores formados pelas constantes que definem os planos usados para aproximar cada componente do tensor  $\varepsilon_{ij}^p$  nos pontos internos da célula. Sendo assim, manipulando-se as equações (A.1) e (A.2), chega-se a seguinte aproximação para  $\dot{D}$ :

$$\begin{aligned} \dot{D}_j &= \int_{\Gamma_c} R_{,i} \eta_i \Psi_j d\Gamma \\ \Psi_j &= \sigma_{ijk}^* \left( A_{ij\nu} \frac{R}{2} R_{,\nu} + b_{ij}^0 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$



Esta integral não apresenta problemas com singularidade, pois quando o ponto de colocação está sobre um dos lados da célula, o produto  $R_i \eta_i$  é nulo e dispensa qualquer tipo de tratamento especial. No entanto, deve-se notar que existe uma instabilidade nos resultados quando o ponto de colocação está próximo de um lado da célula, semelhante àquela originada de uma quase singularidade.

Na discretização do domínio, a coordenada cartesiana  $\mathbf{x}^{(j)}$  dos pontos localizados dentro de cada célula pode ser representada por,

$$\mathbf{x}^{(j)} = M \mathbf{x}^{(m)} \quad (\text{A.4})$$

Onde  $M$  representa as funções de interpolação dadas por  $M = [I_{\xi_1} \ I_{\xi_2} \ I_{\xi_3}]$ , com  $I$  uma identidade de ordem 2, e  $\mathbf{x}^{(m)}$  as coordenadas de alguns pontos especiais que definem a geometria da célula.

A taxa de deformação inelástica é assumida como interpolada dentro da célula, na forma,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{a(j)} = N \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{a(n)} \quad (\text{A.5})$$

Onde  $N$  representa as funções de interpolação dada por  $N = [I_{\xi_1} \ I_{\xi_2} \ I_{\xi_3}]$ , com  $I$  uma identidade de ordem 3 e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{a(n)}$ , os valores da taxa de deformação inelástica num certo número de pontos “i” de tensões.

Assumindo  $L$  elementos de contorno e  $Z$  células internas, a versão discretizada da equação (A.1) para um nó do contorno  $S_i$  é dado por,

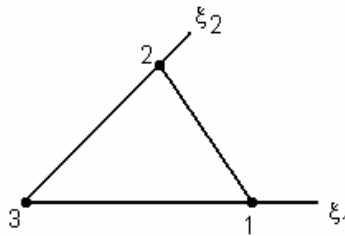
$$\sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Omega_j} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* N d\Omega \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{a(n)} \quad (\text{A.6})$$

Usando-se um esquema de integração numérica para as células, pode-se aproximar essa integral pela fórmula de integração de Hammer, como

$$\int_{\Omega_j} \hat{\sigma}^* N d\Omega = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\hat{\sigma}^* N)_k \quad (\text{A.7})$$

Onde  $K$  é o número de pontos de integração,  $W_k$  é o fator de ponderação associado e  $|J|$  é o Jacobiano da coordenada transformada. Nota-se que estas integrais apresentam singularidades integráveis quando o nó coincide com o ponto da célula. O Jacobiano é simplesmente 2 vezes a área da célula.

Para uma célula triangular mostrada no sistema de coordenadas homogêneo:



Sendo  $\mathbf{i}$ , o ponto no qual a função se refere e,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , constantes que representam as abscissas e ordenadas respectivamente, tem-se para esta célula,

$$a_i = x_1^k - x_1^j \quad b_i = x_2^j - x_2^k \quad (\text{A.8})$$

Onde a área é dada por,

$$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \quad (\text{A.9})$$

## APÊNDICE B

### UMA PROPOSTA PARA O CÁLCULO DE $\mathbf{b}$

A equação integral de contorno, considerando as parcelas referentes às pseudo-trações de superfície e pseudo-forças de corpo, pode ser escrita na forma matricial como

$$c_{ij}\dot{u}_j = \int_{\Gamma} u_{ij}^* (\dot{p}_j + \hat{p}_j) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^* (\dot{b}_j + \hat{b}_j) d\Omega \quad (\text{B.1})$$

Arranjando na forma matricial a equação anterior, e aplicando o Método de Reciprocidade Dual (DRM), tem-se

$$Hu - Gp = (H\hat{u} - G\hat{p})\alpha \quad (\text{B.2})$$

Como não se conhece, a priori, os termos não homogêneos (funções das incógnitas do problema),  $\alpha$  pode ser escrito em termos destes, da seguinte forma

$$Hu - Gp = (H\hat{u} - G\hat{p})F^{-1}b \quad (\text{B.3})$$

Aplicando o DRM em sua forma clássica, a função a ser aproximada, no caso de ausência de forças de corpo, é dada por

$$\hat{b}_j = -\dot{\sigma}_{ij,j}^p \quad (\text{B.4})$$

Para o cálculo de  $b$ , foram apresentadas duas propostas, uma baseada no divergente do tensor plástico, e outra baseada no primeiro invariante de tensões. Aqui,  $b$  é baseado apenas nas tensões plásticas e aproximado por Diferenças Finitas.

Para ambas as propostas, o procedimento que antecede o cálculo de  $b$  é o mesmo (ver algoritmo no capítulo 5), dado como segue:

- a) parte-se da solução elástica para  $u$ ,  $\varepsilon$  e  $\sigma$ , obtidos tanto no contorno quanto no domínio;
- b) iniciado o processo de plastificação, calculam-se as deformações plásticas e, a partir destas, com a lei de Hooke, as tensões plásticas. Nesta etapa escolhe-se o critério de escoamento e, através do incremento de carga, que relaciona a tensão de escoamento com a máxima das tensões plásticas encontrada, inicia-se a plastificação, ou seja, encontra-se um ou mais pontos (internos ou do contorno) plastificados;

Com as tensões plásticas obtidas, pode-se calcular as pseudo-trações de superfície  $\hat{p}_j$  e as pseudo-forças de corpo  $\hat{b}_j$  pelas expressões da equação (5.30) e/ou equação (5.60). Essas forças fictícias podem ser adicionadas às forças regulares. Isto é, as pseudo-trações são adicionadas às trações regulares e, se houverem forças de corpo regulares, estas serão somadas também às pseudo-forças de corpo.

Pelo Método das Diferenças Finitas temos que um domínio contínuo é substituído por uma malha de pontos discretos e as derivadas são substituídas por uma aproximação de diferenças finitas. Assim, considerando a equação (5.30) para pseudo-força de corpo, podemos aproximar  $b$  por,

$$b = \frac{\Delta\sigma_{ij}^p}{\Delta x_j} \quad i,j = 1,2 \quad (\text{B.5})$$

E decompondo o tensor tensão, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Cada termo é calculado empregando a equação para aproximação por Diferenças Finitas, dada por Fenves (1967), como

$$\left( \frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} \right)_k = \frac{\sigma_{ij}^{k+1} - \sigma_{ij}^{k-1}}{2h} + \epsilon \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{B.7})$$

Onde o erro de truncamento é da ordem de  $h^2$ , dado por,

$$\epsilon = -\frac{h^2}{6} \sigma_{ij}'''(\xi) \quad (\text{B.8})$$

O operador de diferença finita, usado na equação (B.7), pode ser mais bem representado pela molécula computacional da forma,

$$\left( \frac{d}{dx} \right)_i = \frac{1}{2h} [ \textcircled{1}_{i-1} \quad \textcircled{0}_i \quad \textcircled{1}_{i+1} ] + O(h^2) \quad (\text{B.9})$$

Para as duas direções, a molécula de (B.9) deve ser montada como

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ -1 & 0 & 1 \\ & -1 & \end{array} \quad (\text{B.9})$$

A discretização com MDF utiliza a mesma discretização do MEC, tanto no contorno quanto no interior, para a aproximação da pseudo-força de corpo. No entanto, essa proposta não chegou a ser implementada, sendo uma sugestão de trabalhos futuros.

## APÊNDICE C

### PRÉ-PROCESSADOR GRÁFICO ORIENTADO A OBJETO

Uma das principais vantagens do Método dos Elementos de Contorno (MEC), cuja característica mais importante se resume à definição da estrutura da sua malha apenas no contorno, é a facilidade em se representar o modelo geométrico. Esta característica facilita, consideravelmente, a representação e manipulação da geometria, da geração de malha e das informações dos atributos à mesma. Embora muitos modelos planos de elementos de contorno possam ser gerados através de pré-processadores simples, existem alguns casos especiais nos quais o processo de modelagem não é uma tarefa trivial, requerendo o uso de programas de pré-processamento mais sofisticados. Como exemplos de casos especiais podem ser citados os casos de modelos com formas geométricas complexas, regiões infinitas ou semi-infinitas, regiões múltiplas e desconexas, arestas desconexas (fissuras) e furos. Neste contexto, este trabalho apresenta um pré-processador gráfico fundamentado na Programação Orientada a Objeto (POO) que possibilita a geração do modelo de elemento de contorno a partir de uma seqüência de ações comandadas pelo usuário. Essas ações traduzem o comportamento dos objetos em relação aos seus atributos. O programa foi desenvolvido em linguagem C++, suportando totalmente a POO.

#### C.1 GENERALIDADES

Atualmente os métodos numéricos utilizados pela Mecânica Computacional em análises de problemas físicos e de engenharia encontram-se bastante sedimentados. Por outro lado, a forma de representar e manipular um modelo geométrico genérico com condições de contorno e atributos físicos arbitrários tem se revelado um dos procedimentos mais críticos em uma análise de engenharia.

Dentre os diversos métodos numéricos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia & Domingues,1989) vem se destacando nos últimos anos como uma ferramenta bastante eficiente em análises usuais de engenharia. O MEC pode ser aplicado praticamente em todos os tipos de análises que envolvem equações diferenciais elípticas lineares, apresentando resultados com boa precisão. Entre as diversas aplicações em que a utilização do MEC é indicada, destacam-se alguns casos especiais como, por exemplo, problemas que envolvem concentração de tensões, aparecimento de fissuras, ou cujo domínio é infinito ou semi-infinito, como requerido em algumas aplicações da Geotecnia.

A grande vantagem do MEC é que a representação da geometria do modelo requer, geralmente, discretização apenas do contorno do mesmo. Isto facilita a sua implementação computacional e propicia maior versatilidade aos programas de modelagem geométrica e de geração de malha. Uma outra característica é a possibilidade de se usar elementos descontínuos, que também facilita o processo de discretização.

Neste contexto, dando continuidade aos trabalhos de Gomes (2000) e Gomes & Noronha (2000), nos quais tratou-se da questão da modelagem, representação e manipulação de modelos bidimensionais genéricos de elementos de contorno, através de estrutura de dados, apresentamos o desenvolvimento de um programa de interface gráfica para pré-processamento, baseado nos trabalhos citados e fundamentado nos conceitos da Programação Orientada a Objetos (POO). Este programa, denominado *BEMOO\_GI*, foi desenvolvido em ambiente Visual C++, na versão 6.0, através da linguagem C++ que suporta totalmente a POO.

## C.2 MODELAGEM E APLICAÇÃO DO MEC

Em sua dissertação de mestrado, Gomes (2000) tratou a representação da topologia do modelo utilizando uma estrutura de dados, baseada na bem conhecida estrutura de Se mi-Arestas (*Half-Edge*) (Mäntylä, 1988), capaz de registrar todos os passos intermediários que descrevem o modelo de forma seqüencial. Nesse trabalho, os

modelos geométricos consistem de entidades topológicas do tipo vértices, arestas, faces e *loops*, sendo topologicamente igual a estrutura de Semi-Arestas. A diferença básica entre as duas estruturas de dados está no tratamento dado às faces do modelo: Gomes optou por ter uma lista global de *loops*, pela conveniência de se tratar diretamente com os *loops* em um modelo planar, ao invés de uma lista global de faces em que cada face continha uma lista local de seus *loops*. A Figura C.1 ilustra o esquema de representação da estrutura desenvolvida por Gomes, a qual faz uso de ponteiros para *loops* e arestas.

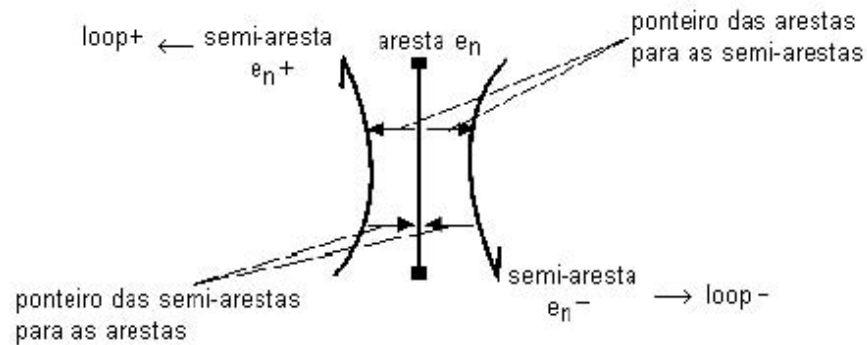


Figura C.1 - Representação Esquemática de uma Semi-Aresta.

No trabalho de Gomes & Noronha (2000), os autores introduziram algumas modificações na estrutura original de semi-arestas. Estas modificações foram baseadas no conceito de dualidade, objetivando fornecer relações semelhantes para as faces e vértices de um modelo. Uma primeira modificação consiste na desconsideração dos ciclos (*loops*) na hierarquia do modelo. Tem-se assim que a estrutura de dados resultante possui uma forma reduzida (Figura C.2a), sendo que a analogia entre as relações de faces e vértices pode ser verificada, já que ambas entidades relacionam-se diretamente com semi-arestas. Por outro lado, fez-se necessária a utilização de arestas especiais, denominadas de arestas nulas, para a representação conveniente de faces contendo furos (Figura C.2b). Embora estas arestas desempenhem um papel semelhante ao dos ciclos da estrutura de dados de Mäntylä, as mesmas são consideradas como sendo entidades do tipo arestas cujos vértices não são identificados.



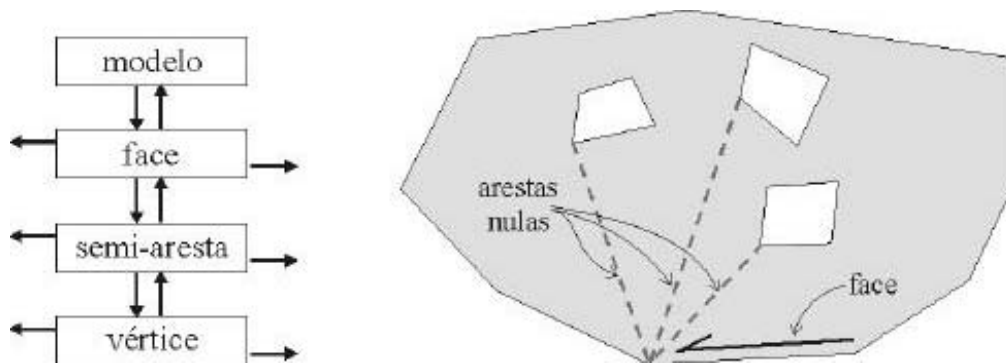


Figura C.2 – a) Armazenamento da hierarquia das entidades na estrutura de dados utilizada; b) utilização de aresta nulas para representar faces contendo furos.

O tipo de técnica de representação usado neste trabalho é a técnica de representação pelo contorno (*Boundary Representation* ou *B-Rep*), devido a Lienhardt (1990), onde as superfícies do modelo (com suas arestas e vértices) são representadas explicitamente. Neste tipo de modelagem, o contorno de um sólido tridimensional é uma superfície bidimensional que é usualmente representada como uma coleção de faces. Por sua vez, as faces do modelo são representadas em termos de curvas unidimensionais que definem os seus contornos.

Os modelos de contorno normalmente representam faces em termos de nós explícitos de uma estrutura de dados de contorno, possibilitando assim, muitas alternativas para representar a geometria e a topologia de um modelo de contorno.

A maioria dos sistemas de modelagem sólida, baseados no contorno, tem usado representação do tipo “*2-manifold*” ou de variedade de dimensão 2, segundo Weiler (1986). Logo, pode-se facilmente empregar a modelagem geométrica de variedade de dimensão 2 em modelos cuja representação é feita através do contorno, como no modelo de elementos de contorno. Assim, os modelos de elementos de contorno serão processados através da modelagem geométrica, a qual permitirá a identificação imediata de todos os elementos do modelo que o caracterizam, como fissuras, furos, região infinita, etc. Essas características estão ilustradas na Figura C.3 (Gomes, 2000).

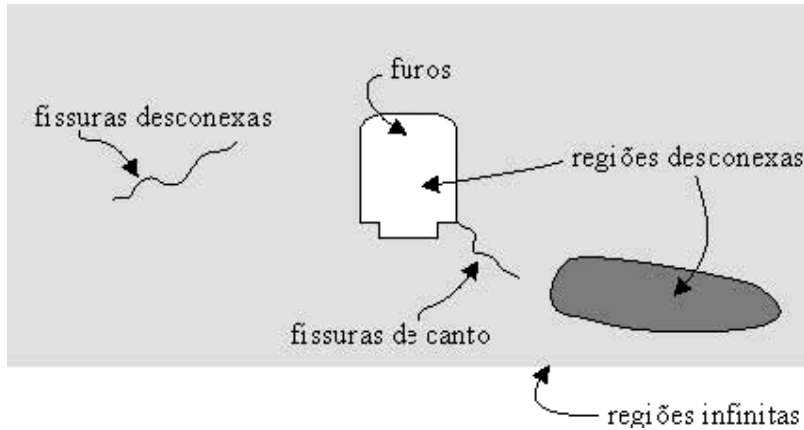


Figura C.3 – Características gerais dos modelos planos.

Após a realização da modelagem geométrica, a modelagem de elementos de contorno consiste de duas etapas:

1. atribuição de propriedades físicas (ações físicas e propriedades do material);
2. atribuição das características da malha:
  - definição do número de divisões de cada aresta do modelo;
  - definição do tipo dos elementos;
  - tratamento de descontinuidades (tipo nó duplo) na malha de elementos de contorno;
  - tratamento de fissuras ou trincas no modelo;
  - definição dos pontos internos do modelo de MEC.

A modelagem em questão é realizada através da introdução das arestas e vértices do modelo de forma seqüencial. Neste caso, a verificação da consistência geométrica do modelo representa um importante procedimento no processo da modelagem. Basicamente, esta verificação consiste de testes de interseção entre as arestas e vértices do modelo, sendo que estes vértices e arestas devem ser definidos uma única vez.

### C.3 MODELO DE CLASSES

Uma classe é uma descrição do conjunto de atributos e métodos que definem o grupo de objetos. Tudo o que existe em um objeto, tudo o que ele é capaz de fazer, e

todas as classes de objetos com as quais ele consegue interagir estão definidas em sua classe.

A representação da classe durante o processo de análise e modelagem geralmente é realizada na forma de um diagrama de classe, para o qual existem várias notações. Neste trabalho será utilizado um diagrama esquemático para representar classes, de acordo com o diagrama mostrado na Figura C.4

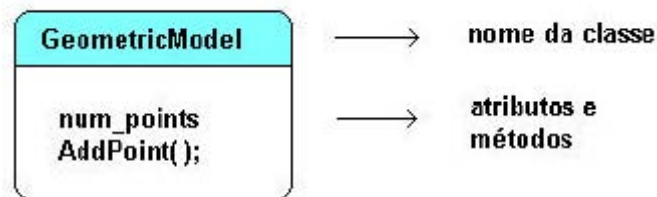


Figura C.4 - Diagrama esquemático para representar classes.

Neste sentido, um modelo de classes foi projetado para representar todas as entidades envolvidas no processo de modelagem. Este modelo é constituído pelas seguintes classes, cuja representação de seus objetos serão esquematizadas a seguir - para um melhor entendimento o leitor deve se reportar ao trabalho de Gomes (2000).

### C.3.1 Classe *CBEMOO\_GIView*

A principal característica desta classe é a possibilidade de visualização do documento, ou seja, um objeto desta classe é responsável pela visão do documento. Logo, é responsável pelo controle de execução das seqüências de ações realizadas pelo próprio objeto e pelos objetos derivados de outras classes, como a classe *GeometricModel*, através do método *LButtonDown( )*. A Figura C.5 mostra a representação dos seus objetos, bem como suas referências.

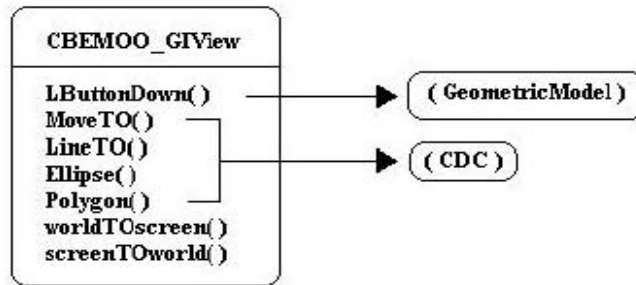


Figura C.5 - Representação esquemática da classe *CBEMOO\_GView*

### C.3.2 Classe *GraphicPrimitives* e suas derivadas

Esta é uma classe base que representa todas as primitivas geométricas do modelo. Os objetos derivados desta herdam os dois únicos métodos desta: *Draw( )* e *Select( )*, possibilitando-os de se desenharem e de se selecionarem, respectivamente. Os objetos derivados desta classe são do tipo *Points*, *Lines*, *Loops* e *Faces*, como pode ser visualizada na Figura C.6.

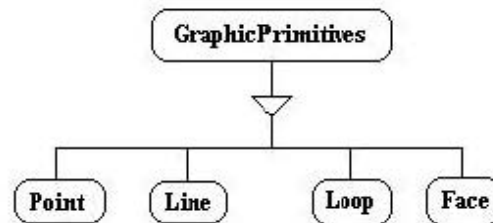


Figura C.6 - Representação hierárquica da classe *GraphicPrimitives*.

Os objetos da classe *Point* possuem referências para objetos *Loop* e *HalfEdge*, necessárias para a representação topológica do modelo através da estrutura de dados proposta. A Figura C.7 ilustra a representação de seus objetos e suas referências.

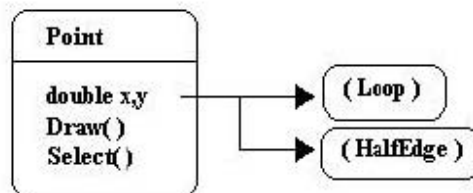


Figura C.7 - Representação esquemática da classe *Point*.

Objetos do tipo *Line* possuem referências para os tipos *HalfEdge* e *Point*, como mostra a Figura C.8.

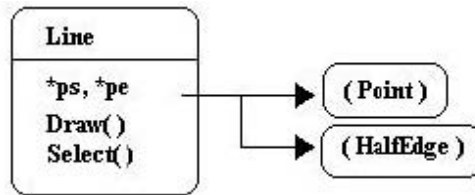


Figura C.8 - Representação esquemática da classe *Line*.

Os objetos de *Loop* possuem referências para os objetos da classe *HalfEdge* e *Point*, como exigido pela estrutura de dados adotada. A Figura C.9 ilustra a representação da classe *Loop*.

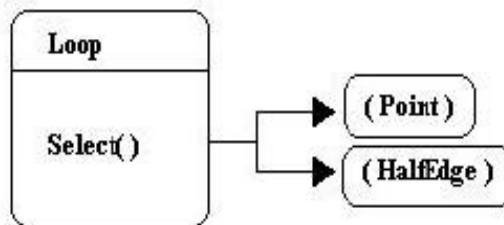


Figura C.9 - Representação esquemática da classe *Loop*.

Objetos da classe *Face* possuem uma referência para os objetos do tipo *Loop*. A Figura C.10 ilustra sua representação e sua referência.

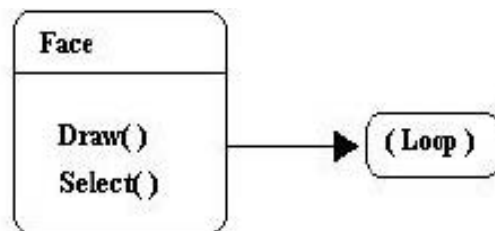


Figura C.10 - Representação esquemática da classe *Face*.

### C.3.3 Classe *GeometricModel*

Esta classe possui métodos e atributos próprios que a definem. Sua funcionalidade está diretamente relacionada à definição da geometria do modelo. Um objeto desta classe tem por objetivo executar as ações necessárias ao processo de construção da geometria.

Estas ações, que são realizadas sobre as primitivas gráficas, são representadas pelos vários métodos desta classe que se relacionam com o propósito de definir a geometria, dentro de um processo de associação e armazenamento das primitivas através de seus atributos.

A estrutura de dados proposta também é implementada nesta classe, permitindo que seu objeto possa se atualizar a cada modificação durante o processo de construção. Isto é, a estrutura de dados possibilita a atualização da geometria e da topologia do modelo em tempo de execução.

Os objetos desta classe possuem referências para todos os objetos derivados de *GraphicPrimitives* com a finalidade única de armazenamento dos mesmos. Uma representação gráfica de *GeometricModel* com seus principais membros, bem como suas referências, pode ser visualizada na Figura C.11.

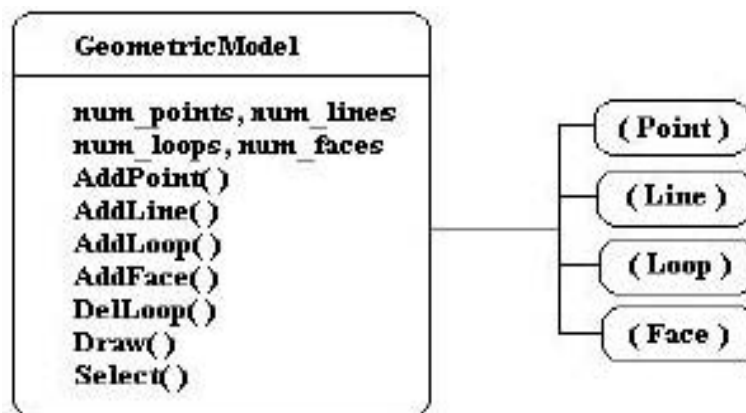


Figura C.11 - Representação esquemática da classe *GeometricModel*.

A classe *HalfEdge* é uma classe base que não possui métodos, apenas dados membros que referenciam as demais entidades topológicas do modelo. Esta é a classe que define os objetos semiarestas e cujos objetos possuem referências para *loops*, arestas e faces. Logo, nenhuma implementação de métodos é feita nesta classe.

A classe *CBEMOO\_GIDoc* é derivada da classe *CDoc* fornecida pela biblioteca da MFC. Esta classe é responsável pelo armazenamento do documento (os dados) do programa. Nesta classe, um objeto de *GeometricModel* é armazenado.

#### C.4 CARACTERÍSTICAS DA INTERFACE GRÁFICA

Um Sistema automático completo de análises de engenharia por MECs (ou MEFs) é composto por três módulos principais: o *pré-processador*, o *processador* e o *pós-processador*. O pré- e pós-processamento formam a interface gráfica entre o sistema e o usuário através de um processo interativo que permite ao usuário controlar as partes, estruturas e aparências dos objetos.

O módulo de pré-processamento é responsável pela definição do modelo geométrico do problema, pela associação de atributos físicos à geometria e pela geração da malha de elementos de contorno. As informações da malha e dos atributos são passadas ao processador, ou programa de análises, através de um arquivo de dados gerados na fase de pré-processamento. O módulo de pós-processamento trata de interpretar os dados fornecidos através de um arquivo de saída gerado pelo processador na análise numérica. A Figura C.12 ilustra a arquitetura de um sistema completo.

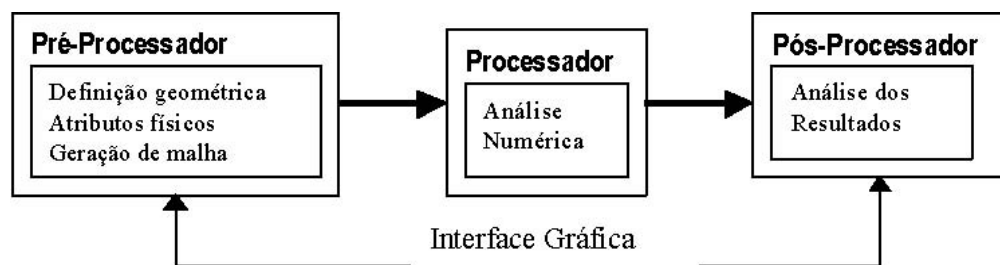


Fig. C.12 – Arquitetura de um Sistema completo de Engenharia.

As características principais da interface gráfica para pré-processamento são:

- geração de modelos planos quaisquer;
- identificação automática da topologia do modelo (reconhecimento de vértices, arestas e faces) através da estrutura de semi-arestas implantada;

- manipulação do modelo em tempo de execução por intermédio de comandos comuns de edição (adicionar, selecionar, remover, etc...);
- associação de atributos físicos à geometria (condições de contorno e material);
- geração de malhas de elementos de contorno;

## C.5 IMPLEMENTAÇÕES

A interface gráfica apresentada aqui, tem por objetivo permitir a geração de modelo a partir de uma seqüência de ações acionadas pelo usuário. A interface consiste de um programa gráfico baseado em sistemas de janelas, onde as ações são controladas por menus, botões de ferramentas, teclado e *mouse*. Nesta interface, o usuário fornece como elemento básico um ponto através do *mouse*, sendo que a cada nova inserção todo o modelo é atualizado de forma a garantir a consistência do mesmo através da estrutura de dados. A Figura C.13 ilustra um passo seqüencial com sua respectiva atualização na geração de um modelo plano.



Fig. C.13 – Seqüência de atualização do modelo plano.

O armazenamento das primitivas do modelo (vértices, arestas e faces) foi realizado através de listas duplamente encadeadas. Esse tipo de armazenamento é vantajoso, uma vez que essas listas não requerem um tamanho definido, sendo limitadas apenas pela memória disponível do sistema computacional usado.



Os seguintes algoritmos gráficos foram implementados:

1. área de atração das primitivas, vértices e arestas, para tratar a seleção das mesmas;
2. interseção de segmentos (O'Rourke, 1998), para tratar o problema de interseção entre arestas;
3. *ray crossing* (Preparata,1985), para verificar interseção entre vértices e faces;
4. algoritmo de setor de áreas, para tratar a orientabilidade das semi-arestas de cada face;
5. algoritmo de ordenação angular, para tratar múltiplas arestas ligadas a um vértice.

O programa desenvolvido é organizado em cinco níveis hierárquicos, como a Figura C.14 ilustra.



Fig. C.14 – Nível Hierárquico do Programa.

O primeiro nível possibilita ao usuário fornecer primitivas do tipo vértices e arestas, que são possíveis candidatos a serem introduzidas no modelo. Antes de introduzir os vértices e arestas candidatos, o nível de verificação de consistência realiza as seguintes tarefas:

1. verificar se a primitiva candidata já existe no modelo;
2. verificar possíveis interseções com as primitivas existentes no modelo.

Após a verificação de consistência, as primitivas podem ser armazenadas em suas listas específicas. O nível seguinte trata as descrições topológicas através dos Operadores de Euler, e algumas funções que auxiliam na chamada adequada do operador. Por último,

o nível mais baixo considera a estrutura de dados topológica e os atributos de cada elemento. O acesso a estas informações é realizado através dos Operadores de Euler, no nível imediatamente superior.

## C.6 SINTAXE

O modelo do programa de Interface baseia-se no conceito de Ações. Uma ação requer um objeto de uma dada classe e requer que o botão esquerdo do *mouse* seja pressionado na área cliente para que a mesma seja executada. Essas ações são definidas nas funções de tratamento dos botões (localizados na barra de ferramenta), e implementadas na classe *View* do programa (*CBEMOO\_GIView*).

Tem-se que cada botão está associado a um método de tratamento do mesmo e, para cada método são descritos o número de ações, o objeto e a função que este deve executar correspondente a cada ação. Todas essas funções devem possuir o mesmo formato, ou seja, um argumento tipo *CPoint* e um retorno tipo *void*.

A execução da seqüência de ações é controlada pelo objeto da classe *CBEMOO\_GIView* através do identificador de ações corrente "*IdCurAction*". Cada vez que um botão de ferramentas é pressionado, a função de tratamento inicializa o identificador da ação corrente. Todas as ações são executadas através da função *LButtonDown* ( ) do objeto da classe *CBEMOO\_GIView*, ou seja, a execução de cada ação requer que o botão esquerdo do mouse seja pressionado. A Figura C.15 ilustra o esquema de funcionamento da Interface através do conceito de ações.

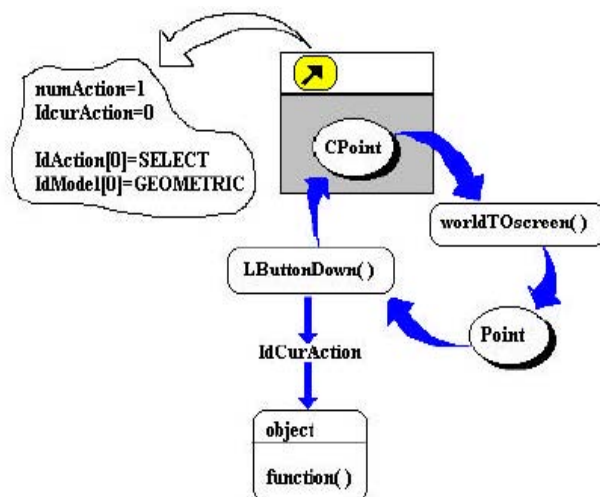


Fig. C.15 – Esquema de Funcionamento da Interface Gráfica.

## C.7 EXEMPLOS

Os exemplos a seguir apresentam as principais características do programa:

1. Geração de modelos geométricos: no exemplo da Figura C.16, pode -se observar os principais elementos do modelo de MEC, como regiões desconexas e arestas desconexas, representando, respectivamente, furos e trincas de uma face.

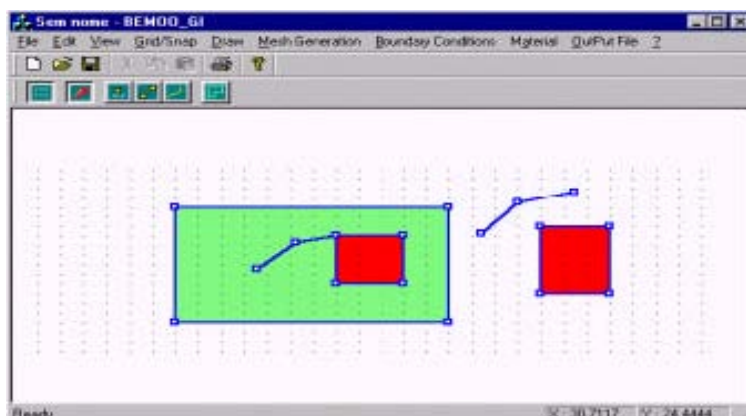


Fig. C.16 – Visualização dos principais elementos do modelo MEC.

2. Verificação de consistência relacionada a problemas de interseção: no exemplo da Figura C.17, observa-se a atualização do modelo quando uma nova aresta intercepta alguma primitiva do mesmo.

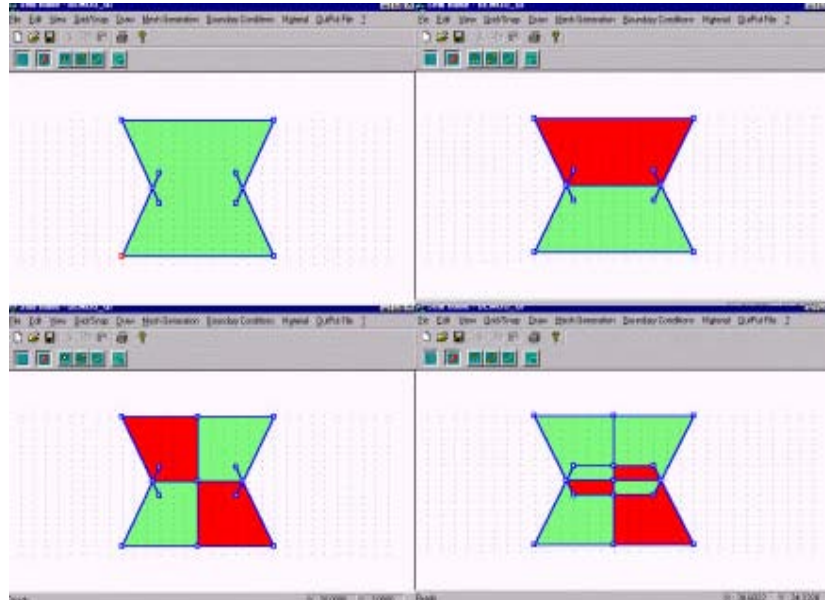


Fig. C.17 – Visualização da atualização do modelo.

3. Atributos: Nos exemplos das Figuras C.18, C.19 e C.20, pode-se observar o processo de atribuição das propriedades físicas e de material, bem como o processo de geração de malhas de elementos de contorno através da subdivisão das arestas do modelo. O processo de geração de malha consta de duas etapas:

- selecionar faces ou arestas para discretização;
- escolha do tipo do elemento e do número de divisões das arestas.

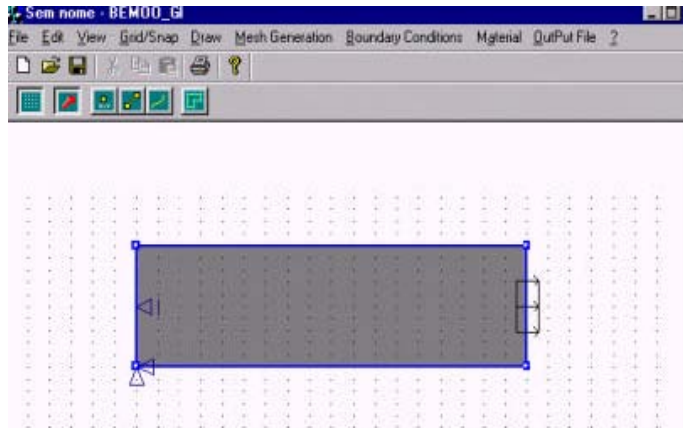


Fig. C.18 – Visualização dos atributos físicos.

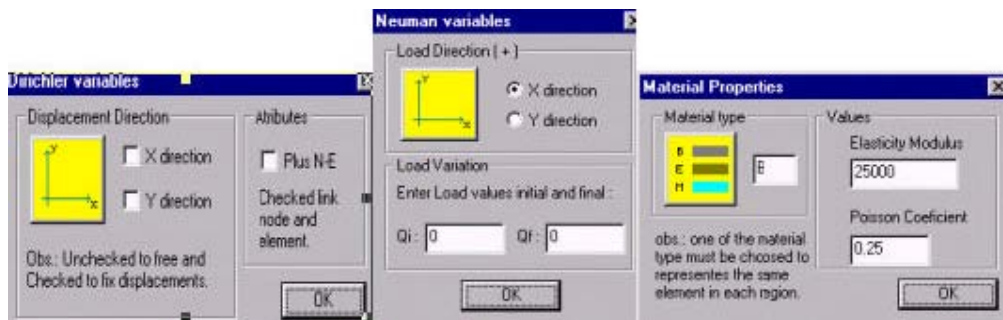


Fig. C.19 – Visualização das propriedades dos materiais.

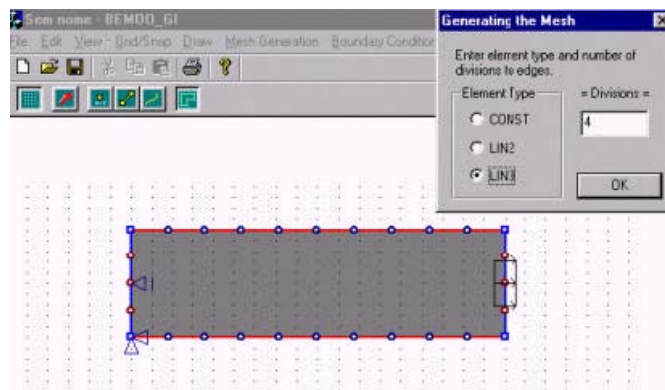


Fig. C.20 – Visualização da malha de elementos de contorno.