



**ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR ACOPLADA CASCAS
CILÍNDRICAS-FLUIDO**

ROGER OTÁVIO PIRES MONTES

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA ANÁLISE DINÂMICA
NÃO LINEAR ACOPLADA CASCAS CILÍNDRICAS-FLUIDO

ROGER OTÁVIO PIRES MONTES

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO
COORIENTADOR: FREDERICO MARTINS ALVES DA SILVA

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO
CIVIL

PUBLICAÇÃO: TD-01A/24
BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2024

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

MM779e

Montes, Roger Otávio Pires

Estudo analítico-numérico para análise dinâmica não linear acoplada cascas cilíndricas-fluido / Roger Otávio Pires Montes; orientador Lineu José Pedroso; co-orientador Frederico Martins Alves da Silva. -- Brasília, 2024.
156 p.

Tese(Doutorado em Estruturas e Construção Civil) --
Universidade de Brasília, 2024.

1. Cascalas cilíndricas. 2. Interação fluido-estrutura. 3. Vibrações livres. 4. Método dos Elementos Finitos. 5. Análise não linear. I. Pedroso, Lineu José, orient. II. Silva, Frederico Martins Alves da, co-orient. III. Título.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA ANÁLISE DINÂMICA
NÃO LINEAR ACOPLADA CASCAS CILÍNDRICAS-FLUIDO

ROGER OTÁVIO PIRES MONTES

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:



Prof. Dr. Lineu José Pedroso (UnB)

(Orientador)



Prof. Dr. Frederico Martins Alves da Silva (UFG)

(Coorientador)



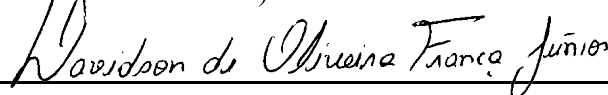
Prof. Dr. Zenón José Guzmán Del Prado (UFG)

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado (UFPR)

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Davidson de Oliveira França Júnior (UNIFAL)

(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 30 DE ABRIL DE 2024

À Cibelle, à Maria e aos familiares com amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me iluminado e guiado nos momentos mais difíceis desta caminhada.

Aos meus pais, pelo amor e dedicação, sempre presentes e apoiando com palavras de estímulo para alcançar todos os objetivos, sendo a base fundamental e o exemplo inspirador de minha formação.

À minha irmã Renata, pelo carinho, companheirismo e incentivo inabaláveis.

À minha esposa Cibelle, por caminhar ao meu lado durante todo o período do doutorado, compreendendo a importância dessa conquista, pela sua paciência e por me fazer acreditar que é possível ir além do que posso imaginar.

À minha filha Maria, este anjo que chegou ao final deste curso, irradiando uma luz inspiradora e motivadora, me fortalecendo para continuar nesta jornada, e lembrando-me o verdadeiro significado da vida.

A todos os professores, em especial ao meu orientador Prof. Lineu José Pedroso, pelas valiosas contribuições no desenvolvimento desta tese. Sua dedicação e incentivo constantes não apenas aumentaram o desafio, mas também aprimoraram a profundidade e a clareza da investigação.

Ao meu coorientador, Prof. Frederico Martins Alves da Silva, que me acompanha desde a graduação, passando pelo mestrado e agora no doutorado. Agradeço pela sua dedicação, disponibilidade e apoio em momentos delicados, que foram fundamentais para superar os desafios relacionados às cascas cilíndricas, além da sua amizade inestimável.

Ao Instituto Federal de Goiás pelo apoio financeiro, de grande importância para a realização deste trabalho.

RESUMO

ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR ACOPLADA CASCAS CILÍNDRICAS-FLUIDO

Autor: Roger Otávio Pires Montes

Orientador: Lineu José Pedroso

Coorientador: Frederico Martins Alves da Silva

Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, 30 de abril de 2024

As cascas cilíndricas preenchidas com fluido são estruturas amplamente utilizadas em diferentes instalações de engenharia, como plataformas de petróleo, usinas nucleares e tanques de armazenamento. Em estruturas *offshore*, a ação das ondas oceânicas deve ser cuidadosamente avaliada, pois a influência do fluido externo às paredes externas dessa estrutura pode modificar seu comportamento dinâmico. Este trabalho apresenta uma abordagem analítico-numérica para analisar as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica engastada-livre, considerando a presença de fluido externo e interno com a inclusão dos efeitos do movimento da superfície livre do fluido interno. Os campos de deformação e as mudanças de curvatura da superfície média da casca cilíndrica são descritos pela teoria não linear de Sanders-Koiter. As expansões modais, que descrevem os campos de deslocamentos da casca cilíndrica engastada-livre, são obtidas a partir dos polinômios de Chebyshev. A ação de ondas oceânicas é desenvolvida a partir da teoria de ondas de Airy e da teoria de difração, onde é feita uma análise paramétrica para avaliar a influência deste carregamento no comportamento dinâmico de cascas cilíndricas. O método de Rayleigh-Ritz, juntamente com o princípio de Hamilton, é usado para obter as equações não lineares de movimento do sistema que, por sua vez, são linearizadas e resolvidas para obter as frequências naturais e os modos de vibração da casca cilíndrica com interação fluido-estrutura. Os resultados obtidos são comparados, sempre que possível, com outros trabalhos encontrados na literatura. A consideração do fluido externo e interno para análise de vibrações livres com aplicação de pressões hidrodinâmicas é importante, pois incorpora massa adicional e reduz os valores de frequências naturais. A influência da superfície livre também altera as vibrações livres da casca cilíndrica e, para estruturas de grandes dimensões, observa-se um efeito considerável que não pode ser desconsiderado. Em seguida, apresenta-se uma análise das vibrações forçadas não lineares da casca cilíndrica, por meio da obtenção das respostas no tempo e planos fase, avaliando a influência da ação de ondas oceânicas nas oscilações do problema. Para avaliar a precisão e a convergência dos resultados analítico-numéricos obtidos, desenvolve-se uma análise numérica via Elementos Finitos, utilizando o *software* comercial ANSYS®. Considerando os parâmetros físicos e geométricos para a casca cilíndrica e o fluido adotados nesta tese, observou uma diferença percentual máxima de 1,79% entre os resultados obtidos pelos modelos analítico e numérico. Portanto, este trabalho contribui em diversos aspectos relacionados à interação fluido-estrutura em cascas cilíndricas, com aplicações na indústria *offshore*.

Palavras-chave: Cascas cilíndricas. Interação fluido-estrutura. Vibrações livres. Método dos Elementos Finitos. Análise não linear.

ABSTRACT

ANALYTICAL-NUMERICAL STUDY FOR NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS COUPLED CYLINDRICAL SHELLS -FLUID

Author: Roger Otávio Pires Montes

Advisor: Lineu José Pedroso

Co supervisor: Frederico Martins Alves da Silva

Postgraduate Program in Structures and Civil Construction

Brasília, April 30th, 2024

Cylindrical shells filled with fluid are widely used structures in various engineering facilities such as oil platforms, nuclear power plants, and storage tanks. In offshore structures, the action of ocean waves must be carefully assessed as the influence of the external fluid on the outer walls of these structures can modify their dynamic behavior. This work presents an analytical-numerical approach to analyze the nonlinear vibrations of a clamped-free cylindrical shell, considering the presence of external and internal fluid with the inclusion of the effects of the movement of the internal fluid's free surface. The deformation fields and curvature changes of the average surface of the cylindrical shell are described by the nonlinear theory of Sanders-Koiter. Modal expansions, describing the displacement fields of the clamped-free cylindrical shell, are obtained from Chebyshev polynomials. The action of ocean waves is developed from Airy wave theory and diffraction theory, where a parametric analysis is performed to assess the influence of this loading on the dynamic behavior of cylindrical shells. The Rayleigh-Ritz method, along with Hamilton's principle, is used to obtain the nonlinear equations of motion of the system, which are then linearized and solved to obtain the natural frequencies and vibration modes of the cylindrical shell with fluid-structure interaction. The results obtained are compared, whenever possible, with other works found in the literature. Considering the external and internal fluid for free vibration analysis with the application of hydrodynamic pressures is important as it incorporates additional mass and reduces the values of natural frequencies. The influence of the free surface also alters the free vibrations of the cylindrical shell, and for large structures, a considerable effect is observed that cannot be neglected. Next, an analysis of the nonlinear forced vibrations of the cylindrical shell is presented by obtaining time and phase plane responses, evaluating the influence of the action of ocean waves on the oscillations of the problem. To assess the accuracy and convergence of the analytical-numerical results obtained, a numerical analysis is developed via Finite Element Method, using the commercial software ANSYS®. Considering the physical and geometric parameters for the cylindrical shell and fluid adopted in this thesis, a maximum percentage difference of 1,79% was observed between the results obtained by analytical and numerical models. Therefore, this work contributes to various aspects related to fluid-structure interaction in cylindrical shells, with applications in the offshore industry.

Keywords: Cylindrical shells. Fluid-structure interaction. Free vibrations. Finite Element Method. Nonlinear analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplos de aplicações de cascas cilíndricas.....	23
Figura 1.2 – Exemplos de aplicações de cascas cilíndricas na engenharia aeronáutica e naval.	24
Figura 1.3 – Chaminé de equilíbrio em uma hidrelétrica.	24
Figura 1.4 – Exemplos de estruturas <i>offshore</i>	25
Figura 1.5 – Sistema tridimensional do problema casca cilíndrica-fluido-fundação.	26
Figura 1.6 – Esquema simplificado do problema acoplado casca cilíndrica-fluido.....	27
Figura 1.7 – Corte transversal com representação ilustrativa genérica do problema acoplado casca cilíndrica-fluido, mostrando as pressões mobilizadas durante a interação entre os diferentes meios.	27
Figura 1.8 – Divisão dos procedimentos metodológicos para cada <i>software</i> utilizado na tese.	31
Figura 1.9 – Fluxograma da pesquisa.	33
Figura 2.1 – Diferentes geometrias para chaminés solares de corrente ascendente (Harte, Graffmann e Krätzig, 2013) – “Adaptada pelo autor”.....	56
Figura 2.2 – Base da estrutura de concreto por gravidade (Amaechi <i>et al.</i> , 2022).	57
Figura 2.3 – Diferentes plataformas por gravidade de concreto e suas respectivas profundidades d’água (Dr.techn, OlavOlsen A.S <i>apud</i> Amaechi <i>et al.</i> , 2022) – “Adaptada pelo autor”.	57
Figura 2.4 –Configuração geométrica de um aerogerador (Ørsted, 2018) – “Adaptada pelo autor”.	58
Figura 3.1 – Geometria da casca cilíndrica com seu sistema de coordenadas e respectivos campos de deslocamentos.....	60
Figura 3.2 – Resultantes dos esforços de membrana (a) e de momentos (b). Convenção positiva das resultantes (Silva, 2008).	63
Figura 3.3 – Esquema da superposição dos efeitos para o potencial de velocidade do fluido.....	68

Figura 3.4 – Diagrama cinemático de ondas pela teoria de Airy (Haritos, 2007) – “Adaptada pelo autor”.	74
Figura 3.5 – Campos cinemáticos das partículas do fluido da onda (Pedroso, 1982a) – “Adaptada pelo autor”.	78
Figura 3.6 – Variação do coeficiente de sustentação em função número de Reynolds (Sarpkaya, 1976).	79
Figura 3.7 – Variação do coeficiente de sustentação em função número de Reynolds (Blevins, 2001).	81
Figura 3.8 – Elemento finito SHELL281 (ANSYS®, 2021).	87
Figura 3.9 – Elemento finito FLUID220 (ANSYS®, 2021).	88
Figura 3.10 – Elemento finito CONTA174 (ANSYS®, 2021).	88
Figura 4.1 – Estudo da convergência do número de termos (N_u , N_v e N_w) da expansão modal.	89
Figura 4.2 – Estudo da convergência da malha de elementos finitos para as frequências naturais da casca cilíndrica vazia. a) $m = 1$; b) $m = 2$.	91
Figura 4.3 – Refinamento da malha de elementos finitos para a casca cilíndrica desacoplada.	91
Figura 4.4 – Quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica vazia obtidos pelo MEF.	92
Figura 4.5 – Comparação de cortes longitudinais ($x = L$) entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica vazia.	93
Figura 4.6 – Comparação de cortes transversais ($x = L$) entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica vazia.	93
Figura 4.7 – Comparação dos espectros de frequências naturais para a casca cilíndrica desacoplada entre os métodos analítico e numérico ($m=1$ e $m=2$).	94
Figura 4.8 – Estudo da convergência da malha de elementos finitos para as frequências naturais da cavidade acústica aberta-aberta e desacoplada.	95
Figura 4.9 – Refinamento da malha de elementos finitos para a cavidade acústica desacoplada.	96

Figura 4.10 – Comparação dos campos de pressão da cavidade acústica desacoplada, obtidos a partir dos modelos analítico e numérico.	97
Figura 4.11 – Estudo da convergência da malha de elementos finitos para as frequências naturais da casca cilíndrico acoplada com fluido.	101
Figura 4.12 – Refinamento da malha de elementos finitos para a casca cilíndrica acoplado com fluido.	102
Figura 4.13 – Quatro primeiros modos de vibração de <i>sloshing</i>	103
Figura 4.14 – Comparação de cortes longitudinais entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica com fluido interno e externo.....	105
Figura 4.15 – Comparação de cortes transversais ($x = L$) entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica com fluido interno e externo.	106
Figura 4.16 – Cinco primeiros modos da casca cilíndrica engastada-livre para os níveis de fluido interno: $H_i/L = 0,25, 0,50$ e $0,75$, com $H_e/L = 1,00$	107
Figura 4.17 – Espectro de frequências naturais variando o nível do fluido interno para algumas relações H_e/L	108
Figura 4.18 – Variação das frequências naturais em função do nível de fluido interno (a) e externo (b), para o modo fundamental da casca cilíndrica $(m, n) = (1, 4)$	109
Figura 4.19 – Variação das frequências naturais em função do nível de fluido interno e externo, para os modos de <i>sloshing</i>	110
Figura 5.1 – Representação do sistema de coordenadas da casca cilíndrica em contato com as ondas externas.	114
Figura 5.2 – Perfil de onda η ao longo de um período para os três casos analisados...	114
Figura 5.3 – Variação das pressões das ondas oceânicas ao longo do comprimento, segundo a teoria de Airy, da estrutura para os três casos analisados.....	115
Figura 5.4 – a) Modelo numérico com carga oceânica aplicado em 60% do comprimento da estrutura; b) Deslocamentos transversais obtidos via ANSYS®	116
Figura 5.5 – Comparação dos deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico, considerando a teoria de Airy para ondas oceânicas ($h_o/L = 0,60$).	116

Figura 5.6 – a) Modelo numérico com carga oceânica aplicado em 90% do comprimento da estrutura; b) Deslocamentos transversais obtidos via ANSYS®	117
Figura 5.7 – Comparação dos deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico, considerando a teoria de Airy para ondas oceânicas ($h_o/L = 0,90$).	117
Figura 5.8 – a) Modelo numérico com carga oceânica aplicado em todo o comprimento da estrutura; b) Deslocamentos transversais obtidos via ANSYS®	118
Figura 5.9 – Comparação dos deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico, considerando a teoria de Airy para ondas oceânicas ($h_o/L = 1,0$).	118
Figura 5.10 – Representação da função Heaviside para as três relações entre a profundidade d'água e o comprimento da estrutura.	119
Figura 5.11 – Representação de uma onda quadrada com um número crescente de harmônicas: a) $N_q = 10$; b) $N_q = 20$	119
Figura 5.12 – Perfil de onda η ao longo de um período e as divisões a cada 30° de T	121
Figura 5.13 – Pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda – Águas profundas.	123
Figura 5.14 – Pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ e 90° , considerando águas profundas.	124
Figura 5.15 – Pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda – Águas intermediárias.	126
Figura 5.16 – Pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ e 90° , considerando águas intermediárias.	127
Figura 5.17 – Pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda – Águas rasas.	129
Figura 5.18 – Pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ e 90° , considerando águas rasas.	130
Figura 5.19 – Convergência dos planos fase para o caso de águas intermediárias ($T_o = 15$ s).	133
Figura 5.20 – Resposta no tempo da casca cilíndrica considerando o período $T_o = 15$ s.	134

Figura 5.21 – Convergência dos planos fase para o caso de águas intermediárias ($T_o = 20$ s).	134
Figura 5.22 – Resposta no tempo da casca cilíndrica considerando o período $T_o = 20$ s.	135
Figura 5.23 – Convergência dos planos fase para o caso de águas rasas ($T_o = 40$ s).	135
Figura 5.24 – Resposta no tempo da casca cilíndrica considerando o período $T_o = 40$ s.	136
Figura 5.25 – Variação dos deslocamentos e períodos da onda, para algumas alturas de onda ($h_o/L = 0,90$).	137
Figura 5.26 – Variação dos deslocamentos e alturas da onda, para alguns períodos de onda ($h_o/L = 0,90$).	138
Figura 5.27 – Variação dos planos fase para $H_o = 2$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).	139
Figura 5.28 – Variação dos planos fase para $H_o = 6$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).	139
Figura 5.29 – Variação dos planos fase para $H_o = 12$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).	139
Figura 5.30 – Variação dos planos fase para $H_o = 18$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).	140
Figura 5.31 – Variação dos planos fase para $H_o = 24$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).	140
Figura 5.32 – Variação dos deslocamentos transversais para algumas alturas da onda, em função dos períodos de onda ($h_o/L = 0,90$).	142
Figura 5.33 – Variação dos deslocamentos transversais para alguns períodos da onda, em função das alturas de onda ($h_o/L = 0,90$).	143
Figura 5.34 – Comparação dos planos fase para $H_o = 2$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s), com e sem influência do peso próprio da casca cilíndrica.	144
Figura 5.35 – Comparação dos planos fase para $H_o = 24$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s), com e sem influência do peso próprio da casca cilíndrica.	144

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Lista de alguns parques eólicos com as respectivas dimensões dos aerogeradores (Amaechi <i>et al.</i> , 2022) – “Adaptada pelo autor”.....	58
Tabela 3.1 – Classificação das ondas e as aproximações das funções hiperbólicas (Pedroso, 1982a).....	77
Tabela 3.2 – Valores numéricos para os parâmetros físicos e geométricos da casca cilíndrica e do fluido.....	85
Tabela 4.1 – Comparação das frequências naturais de uma casca cilíndrica vazia por diferentes trabalhos.....	90
Tabela 4.2 – Comparação das frequências naturais da casca cilíndrica desacoplada ($m = 1$ e $m = 2$) para a geometria adotada neste trabalho.	92
Tabela 4.3 – Frequências naturais e deformadas modais da cavidade acústica desacoplada obtidos a partir da análise de elementos finitos.	96
Tabela 4.4 – Comparação das frequências naturais para uma casca vazia e para uma casca parcialmente preenchida considerando o movimento de superfície livre.....	98
Tabela 4.5 – Comparação das frequências naturais para uma casca vazia e uma casca cilíndrica em contato com um fluido externo. Casca cilíndrica com diafragma de cisalhamento em ambas as extremidades.	100
Tabela 4.6 – Comparação das frequências naturais da casca com fluido interno e externo, utilizando o modelo analítico e numérico.	104
Tabela 4.7 – Quatro primeiros modos de vibração e os valores das frequências naturais casca cilíndrica com fluido interno e externo ($H_i = H_e = L$)......	104
Tabela 5.1 – Verificações para águas intermediárias em diferentes profundidades d’água, e as respectivas frequências naturais das ondas para cada caso.	113
Tabela 5.2 – Verificações para os três períodos de ondas e sua classificação, além das respectivas frequências naturais para cada caso.	121
Tabela 5.3 – Verificações para os três períodos de ondas e sua classificação, além das respectivas frequências naturais para cada caso.	132
Tabela 5.4 – Intervalos dos períodos de ondas e suas respectivas classificações.	137

Tabela 5.5 – Comparação das frequências naturais, considerando e desconsiderando o peso próprio da casca cilíndrica, incluindo a influência do fluido interno e externo ($H_i = H_e = L$).	141
--	-----

Tabela 5.6 – Comparação dos deslocamentos transversais, considerando e desconsiderando o peso próprio da casca cilíndrica, para três valores de períodos de onda ($h_o/L = 0.90$).	142
--	-----

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos romanos

A	amplitude da onda
$A_{\bar{m}n}$	amplitude modal do potencial de velocidade $\phi^{(1)}$
$B_{\bar{m}n}$	amplitude modal do potencial de velocidade $\phi^{(2)}$
C_{kn}	amplitude modal do potencial de velocidade $\phi^{(s)}$
C	rigidez de membrana da casca cilíndrica
C_D	coeficiente empírico de arraste
C_M	coeficiente empírico de inércia
C_o	celeridade da onda
D	rigidez de flexão da casca cilíndrica
D_c	diâmetro da casca cilíndrica
E	módulo de elasticidade
f_I	força de inércia por unidade de comprimento
f_A	força de arraste por unidade de comprimento
g	aceleração da gravidade
h	espessura da casca cilíndrica
h_o	profundidade da lâmina d'água
H_i	altura do fluido interno à casca cilíndrica
H_e	altura do fluido externo à casca cilíndrica
H_o	altura da onda
$H_o^{(2)'}$	função de Hankel de segunda classe e ordem n_o
I_n	função de Bessel modificada de ordem n
J_n	função de Bessel de primeira classe e ordem n

k_a	parâmetro de espalhamento
k_o	número de onda
K_n	função de Bessel de segunda classe e ordem n
$\mathbf{K}_c$	matriz de rigidez da casca cilíndrica
$\mathbf{K}_{cs}$	matriz de rigidez do acoplamento entre a casca cilíndrica e o <i>sloshing</i>
K_p	constante que considera ou não o encurtamento do deslocamento circunferencial no funcional do peso próprio da casca cilíndrica
$\mathbf{K}_s$	matriz de rigidez que contempla amplitudes modais do <i>sloshing</i>
L	comprimento da casca cilíndrica
$\bar{L}$	funcional de Lagrange
L_o	comprimento de onda
m	número de semiondas longitudinais da casca cilíndrica
$\mathbf{M}_{cf}$	matriz de massa do acoplamento entre a casca cilíndrica e o fluido
$\mathbf{M}_{cs}$	matriz de massa do acoplamento entre a casca cilíndrica e o <i>sloshing</i>
$\mathbf{M}_s$	matriz de massa que contempla amplitudes modais do <i>sloshing</i>
$\bar{m}$	número de modos empregados na discretização de $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$
M_x	momento interno na direção de x
M_θ	momento interno na direção de θ
$M_{x\theta}$	momento torçor no plano $x\theta$
M_A	momento referente ao arraste
M_I	momento referente a inércia
M_T	momento total de tombamento na base da estrutura
n	número de ondas circunferenciais da casca cilíndrica
$\bar{n}$	número de diâmetros da superfície livre do fluido interno
N_{KC}	número de Keulegan – Carpenter
N_f	número de termos da expansão do potencial $\phi^{(1)}$

N_s	número de termos da expansão do potencial $\phi^{(2)}$
N_u	número de termos da expansão modal na direção axial
N_v	número de termos da expansão modal na direção circunferencial
N_w	número de termos da expansão modal na direção radial
N_x	esforço normal interno na direção de x
N_θ	esforço normal interno na direção de θ
$N_{x\theta}$	esforço cisalhante no plano $x\theta$
$\mathbf{q}_c$	vetor de amplitudes da casca cilíndrica
$\mathbf{q}_s$	vetor de amplitudes do <i>sloshing</i>
p_D	campo de pressões de ondas difratadas
p_H	pressão hidrodinâmica equivalente
p_{Hi}	pressão hidrodinâmica referente ao fluido interno
p_{He}	pressão hidrodinâmica referente ao fluido externo
p_{Hs}	pressão hidrodinâmica referente ao <i>sloshing</i>
p_o	pressão das ondas pela teoria de Airy
p_w	pressão das ondas pela teoria da difração
R	raio da casca cilíndrica
R_D	trabalho das forças de dissipação
Re	número de Reynolds
t	tempo
T_m	polinômios de Chebyshev de primeira ordem
T_o	período da onda
u	deslocamento na direção do eixo x
u_o	velocidade horizontal das partículas do fluido
U_c	energia interna de deformação da casca cilíndrica
$U_{m,n}$	amplitude modal na direção axial

v	deslocamento na direção do eixo θ
v_o	velocidade vertical das partículas do fluido
$V_{m,n}$	amplitude modal na direção circunferencial
x	eixo longitudinal do sistema de coordenadas cilíndricas
w	deslocamento na direção do eixo z
$W_{m,n}$	amplitude modal na direção radial
W_{Hi}	massa adicional do fluido interno
W_E	trabalho das cargas externas da casca cilíndrica
W_{He}	massa adicional do fluido externo
W_p	trabalho da carga compressiva do peso próprio da casca cilíndrica
W_w	trabalho das ondas oceânicas nas paredes externas da casca cilíndrica
z	eixo transversal do sistema de coordenadas cilíndricas

Símbolos Gregos

β_x	rotação na direção axial
β_θ	rotação na direção circunferencial
β_1	amortecimento viscoso
β_2	amortecimento viscoelástico
β_3	fator de amortecimento do fluido
$\gamma_{x\theta}$	deformação angular no plano $x\theta$
$\bar{\gamma}_{x\theta}$	deformação angular no plano $x\theta$ em um ponto da casca cilíndrica
ε_{kn}	raízes da condição de contorno do potencial de velocidade do fluido
ε_x	deformação específica na direção de x
$\bar{\varepsilon}_x$	deformação específica axial de um ponto da casca cilíndrica
ε_θ	deformação específica na direção de θ

$\bar{\epsilon}_\theta$	deformação específica circunferencial em um ponto da casca cilíndrica
ζ	deslocamento vertical das partículas do fluido
η	perfil da onda
η_1	coeficientes de amortecimento viscoso
η_2	coeficientes de amortecimento viscoelástico
θ	eixo circunferencial do sistema de coordenadas cilíndricas
θ_f	ângulo de fase da pressão de onda
κ_x	mudança de curvatura longitudinal
κ_θ	mudança de curvatura circunferencial
$\kappa_{x\theta}$	mudança de curvatura do plano $x\theta$
λ	parâmetro de compressibilidade do fluido
ν	coeficiente de Poisson
ξ	deslocamento horizontal das partículas do fluido
ρ_s	densidade do material da casca cilíndrica
ρ_f	densidade do fluido interno
ρ_w	densidade do fluido das ondas oceânicas
$\bar{\sigma}_x$	tensão normal na direção x em um ponto da casca cilíndrica
$\bar{\sigma}_\theta$	tensão normal na direção θ em um ponto da casca cilíndrica
$\bar{\tau}_{x\theta}$	tensão cisalhante no plano $x\theta$
τ	parâmetro adimensional do tempo
ν	viscosidade cinemática do fluido
$\phi^{(1)}$	potencial de velocidade do fluido interno para uma casca cilíndrica flexível e sem <i>sloshing</i>
$\phi^{(2)}$	potencial de velocidade do fluido externo para uma casca cilíndrica flexível e sem <i>sloshing</i>
$\phi^{(s)}$	potencial de velocidade da casca cilíndrica rígida e com <i>sloshing</i>

$\phi^{(o)}$	potencial de velocidade das ondas oceânicas
ω_N	menor frequência natural da casca cilíndrica
ω_1	frequência natural da casca cilíndrica
ω_2	frequência natural do <i>sloshing</i>
ω_o	frequência natural da onda oceânica
Ω	frequência adimensionalizada entre a frequências de excitação causada pela ação das ondas oceânicas e a natural da casca cilíndrica

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	23
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA	23
1.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	25
1.3. JUSTIFICATIVA	29
1.4. OBJETIVOS	30
1.5. METODOLOGIA	30
1.6. ABRANGÊNCIA E DELIMITAÇÕES	35
1.7. CONTRIBUIÇÕES DA TESE	36
1.8. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	37
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	38
2.1. ESTUDOS SOBRE OS CAMPOS DE DESLOCAMENTOS DA CASCA CILÍNDRICA	39
2.2. MODELOS DE DIMENSÃO REDUZIDA E MÉTODOS NUMÉRICOS	41
2.3. INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA.....	44
2.4. FORÇAS PROVOCADAS POR ONDAS OCEÂNICAS	53
2.5. DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DO MODELO ESTRUTURAL.....	55
3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	59
3.1. HIPÓTESES GERAIS ADOTADAS NAS FORMULAÇÕES	59
3.2. FORMULAÇÃO DA CASCA CILÍNDRICA	60
3.2.1. Resultantes dos esforços de membrana e de flexão.....	62
3.2.2. Campos de deslocamentos.....	64
3.2.3. Funcionais de energia da casca cilíndrica.....	65
3.3. FORMULAÇÃO DOS FLUIDOS INTERNO E EXTERNO	67
3.4. AMORTECIMENTO DA SUPERFÍCIE LIVRE DO FLUIDO INTERNO ...	72
3.5. TEORIA LINEAR DE ONDAS OCEÂNICAS	74
3.6. FORÇAS PROVOCADAS PELA AÇÃO DE ONDAS	78

3.7.	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO LINEARES	82
3.8.	ASPECTOS COMPUTACIONAIS E MODELO NUMÉRICO	85
3.8.1.	Descrição do <i>software</i> ANSYS®	86
3.8.2.	Elementos finitos utilizados no ANSYS®	87
4.	RESULTADOS DA ANÁLISE EM VIBRAÇÕES LIVRES	89
4.1.	ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DA CASCA CILÍNDRICA VAZIA	90
4.2.	ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DA CAVIDADE ACÚSTICA	94
4.3.	ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DA CASCA CILÍNDRICA COM FLUIDO INTERNO E EXTERNO	98
5.	RESULTADOS DA ANÁLISE EM VIBRAÇÕES FORÇADAS	112
5.1.	VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO, A PARTIR DO MODELO ANALÍTICO, OBTIDO UTILIZANDO A TEORIA DE AIRY	113
5.2.	CAMPO DE PRESSÕES OBTIDO PELA TEORIA DA DIFRAÇÃO.....	120
5.3.	ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DA RESPOSTA NÃO LINEAR NO TEMPO.....	131
5.4.	ANÁLISE PARAMÉTRICA DA AÇÃO DE ONDAS OCEÂNICAS.....	136
5.5.	CONSIDERAÇÃO DA CARGA COMPRESSIVA DE PESO PRÓPRIO DA CASCA CILÍNDRICA.....	140
6.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	146
6.1.	CONCLUSÕES	146
6.2.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	148
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	150

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA

O desenvolvimento da engenharia estrutural estimulado por fatores técnicos e econômicos, tem proporcionado grandes avanços nos procedimentos de cálculo e na utilização de novos materiais e processos executivos, permitindo a concepção de estruturas esbeltas e cada vez mais leves. Diante deste cenário, as cascas cilíndricas são exemplos de elementos esbeltos e que possuem diversas aplicações nas engenharias aeronáutica, mecânica, naval e civil, sendo utilizados para armazenamento e transporte de fluidos, reatores nucleares, entre outras aplicações. Na Figura 1.1 são ilustrados alguns exemplos de aplicação para reatores nucleares e tanques de armazenamento.



(a)



(b)

Figura 1.1 – Exemplos de aplicações de cascas cilíndricas.

Fonte: Disponível em: (a) <<https://agenciabrasil.ebc.com.br/en/geral/noticia/2016-06/brazil-environmental-radioactivity-lab-admitted-iaea-international-network>>; (b) <<https://www.fuelsandlubes.com/vopak-divests-stake-yangpu-oil-terminal-hainan-china/>>. Acesso em: 29 de março de 2024.

Nos tanques de armazenamento, as interações entre o fluido e as paredes podem gerar forças significativas. Nos reatores nucleares, ajuda a evitar vibrações excessivas em componentes como barras de controle e tubos de combustível, prevenindo desgaste e falhas. Assim, a análise dinâmica é crucial para projetar, operar e manter esses sistemas, garantindo segurança estrutural e desempenho otimizado.

Na Figura 1.2 são apresentados exemplos de aplicações de cascas cilíndricas na engenharia aeronáutica e naval, incluindo foguetes e submarinos. Nesses exemplos, os conceitos e procedimentos analíticos e numéricos utilizados neste trabalho, podem ser amplamente empregados e adaptados de acordo com as particularidades de cada sistema estrutural.



(a)



(b)

Figura 1.2 – Exemplos de aplicações de cascas cilíndricas na engenharia aeronáutica e naval.
 Fonte: Disponível em: (a) <<https://www.defesaaereanaval.com.br/espaco/plataformas-de-lancamento-novas-ou-reformuladas-em-cabo-canaveral-estao-sendo-consideradas-para-a-spacex-starship>>; (b) <https://as.com/diarioas/2022/05/10/actualidad/1652194622_751836.html>. Acesso em: 24 de maio de 2024.

A Figura 1.3 ilustra outro exemplo de aplicação de cascas cilíndricas com fluido interno: as chaminés de equilíbrio, que desempenham um papel fundamental em usinas hidrelétricas. Essas estruturas são essenciais para a operação segura e eficiente desses sistemas, destacando-se pelos seguintes aspectos: controle de pressão, proteção contra golpe de aríete, estabilidade operacional, segurança estrutural e minimização de riscos ambientais.



Figura 1.3 – Chaminé de equilíbrio em uma hidrelétrica.
 Fonte: Disponível em: <<https://myedmondsnews.com/2016/04/edmonds-trout-unlimited-hosting-april-27-talk-on-elwha-river-restoration/>>. Acesso em: 24 de maio de 2024.

Além destes exemplos, cita-se a utilização de cascas cilíndricas em estruturas *offshore* como bases de petróleo (Figura 1.4a) e aerogeradores (Figura 1.4b). Nesses casos, as cascas cilíndricas estão submetidas, além dos carregamentos próprios de suas aplicações, à ação de ondas oceânicas e dos efeitos do vento. Em ambos os casos, estas solicitações podem provocar vibrações à estrutura e caso não esteja dimensionada para resistir aos esforços gerados por estas ações, podem sofrer danos indesejáveis e causar sérios danos estruturais e ambientais e, conseqüentemente, comprometer a vida dos usuários e a utilização destas estruturas. No caso das plataformas de petróleo, as cascas cilíndricas ainda têm a função de

armazenamento de fluido interno que interfere no seu comportamento global, incorporando mais um efeito nesta análise.



Figura 1.4 – Exemplos de estruturas *offshore*.

Fonte: Disponível em: (a) <<https://hsesmartolutions.com/5-largest-oil-rigs-in-the-world/>>; (b) <<https://www.energiaestrategica.com/a-la-espera-de-nuevas-subastas-eolicas-offshore-brasil-suma-mas-proyectos-en-desarrollo/>>. Acesso em 29 de março de 2024.

Devido a esbelteza das cascas cilíndricas, a ação de cargas estáticas e dinâmicas podem gerar efeitos de instabilidade estrutural e vibrações excessivas, sendo de fundamental importância conhecer seu comportamento e suas características para elaborar bons projetos. Embora estas estruturas tenham um perfil geométrico simples, ao serem submetidas a carregamentos dinâmicos ou pelo preenchimento de fluido, elas podem apresentar um complexo comportamento não linear. Neste estudo, foi avaliada apenas a não linearidade geométrica, presente nas interações entre deformações e deslocamentos. Entretanto, é importante citar que os sistemas físicos também podem apresentar não linearidades associadas ao material, às condições de contorno, ao amortecimento estrutural e ao tipo de carga aplicada.

Outro fator a ser considerado em estruturas, como as apresentadas na Figura 1.4, é a ação de ondas oceânicas que acarretam forças externas adicionais. Portanto, a interação entre o fluido e a estrutura é de grande relevância na análise dinâmica de cascas cilíndricas, visto que a maioria de suas aplicações estão relacionadas com transporte e armazenamento de fluidos.

1.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

As cascas cilíndricas possuem um complexo comportamento dinâmico não linear, e existem diversas variáveis que interferem na resposta dinâmica acoplada destas estruturas. Løkke e

Chopra (2018) identificaram os fatores que influenciam as análises tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) em barragens, os quais podem ser citados: a dimensão semi-ilimitada do solo em que a estrutura está apoiada; os domínios da rocha de fundação; absorção de onda na fronteira da região considerada; compressibilidade do fluido; interação estrutura-fluido-fundação e variação espacial no movimento do solo na interface estrutura-fundação. Este estudo pode ser aplicado em cascas cilíndricas e, além das variáveis mencionadas, é possível a inclusão do efeito de *sloshing* (pressões convectivas) devido à presença de um fluido interno na casca cilíndrica, pressões impulsivas, local de aplicação da carga dinâmica, a ação das ondas oceânicas, a heterogeneidade do solo com camadas e amortecimentos distintos, entre outros. Essas são possibilidades de análise envolvendo a interação em cascas cilíndricas, conforme ilustrado esquematicamente na Figura 1.5, que aborda o problema da interação entre casca cilíndrica, fluido e fundação.

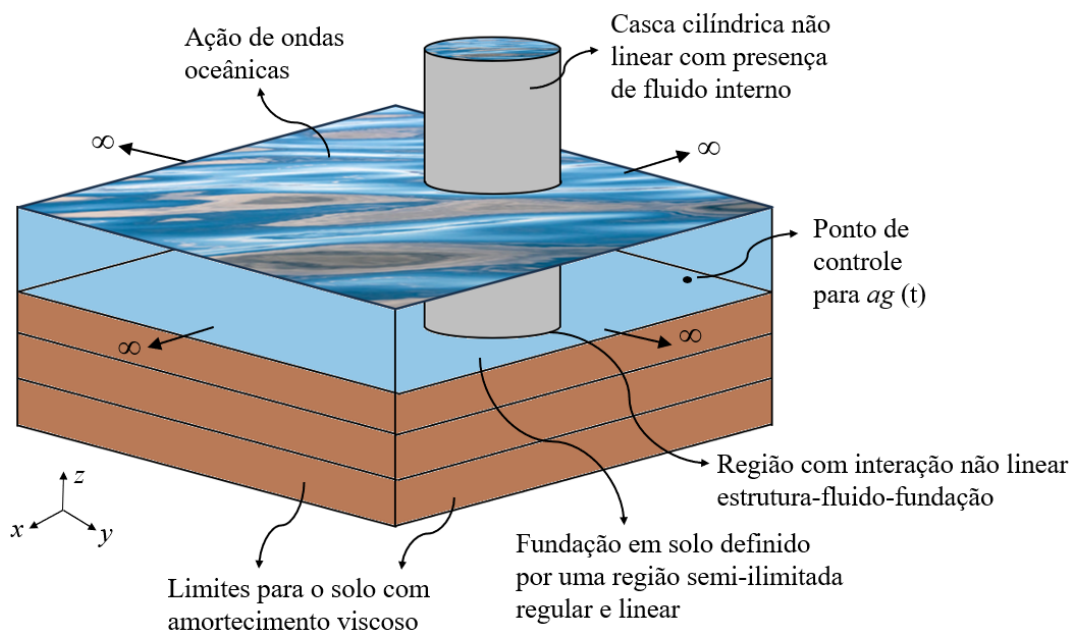


Figura 1.5 – Sistema tridimensional do problema casca cilíndrica-fluido-fundação.

De forma simplificada, a Figura 1.6 apresenta o problema acoplado casca cilíndrica-fluido que é investigado nesta tese. A fundação é assumida como rígida ($K_{fundação} \rightarrow \infty$), e portanto o engastamento entre a casca cilíndrica e a base é tido como perfeito, não levando em consideração os parâmetros geotécnicos do solo no problema. O corte X-X indicado na Figura 1.6 é detalhado na Figura 1.7a, evidenciando a interação fluido-estrutura. Já as pressões externas e internas, p_{He} e p_{Hi} , presentes no problema acoplado casca cilíndrica-fluido estão ilustrados na Figura 1.7b.

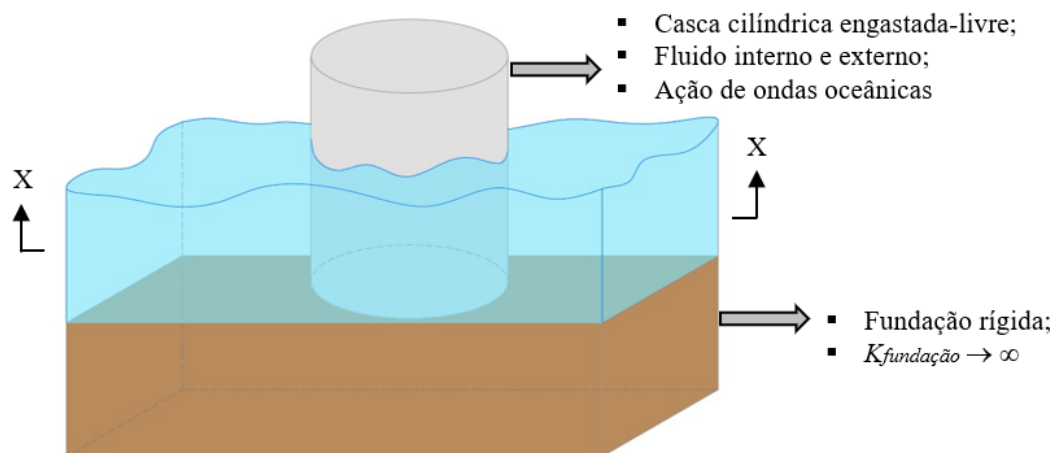


Figura 1.6 – Esquema simplificado do problema acoplado casca cilíndrica-fluido.

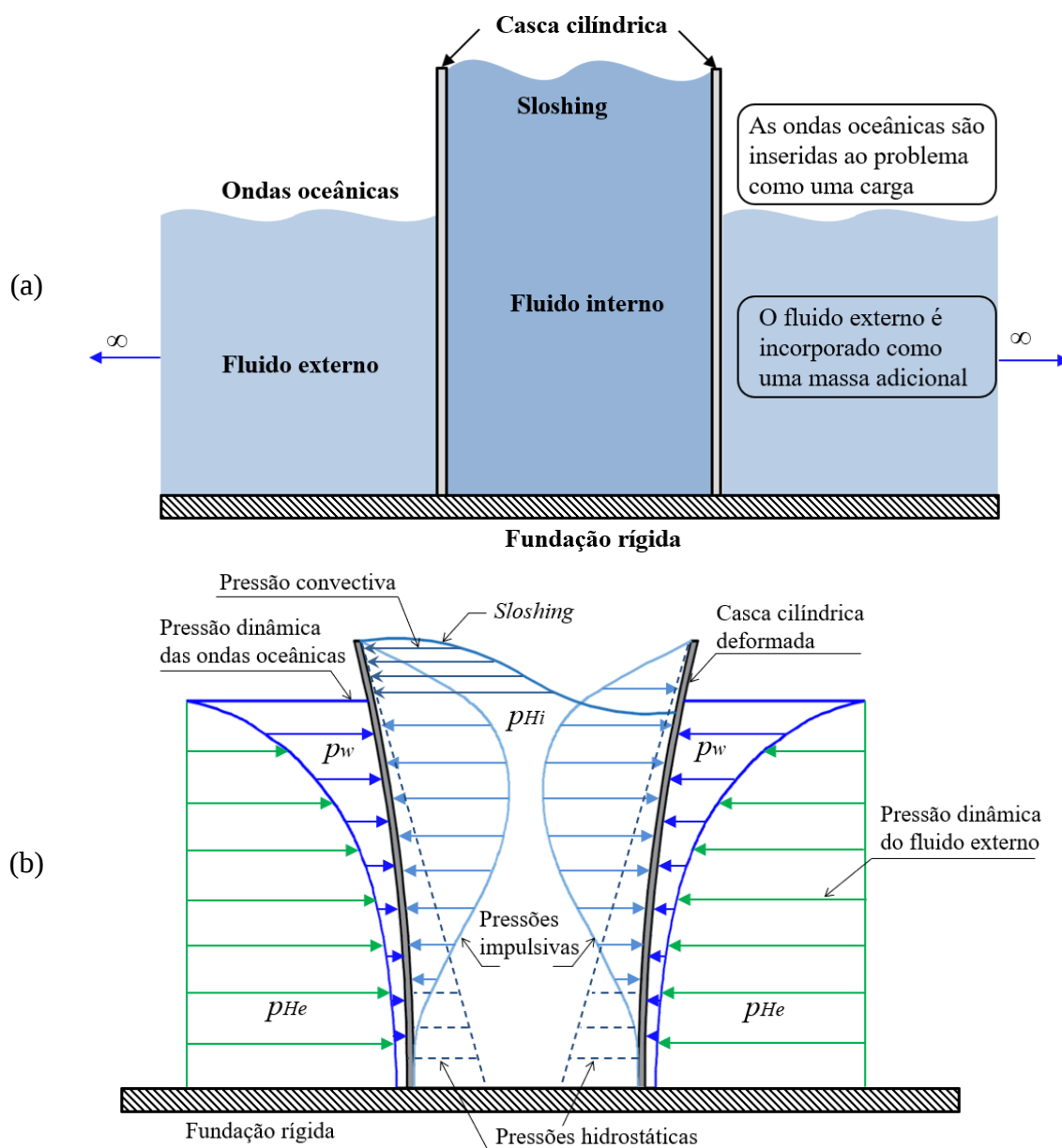


Figura 1.7 – Corte transversal com representação ilustrativa genérica do problema acoplado casca cilíndrica-fluido, mostrando as pressões mobilizadas durante a interação entre os diferentes meios.

A Figura 1.7a ilustra todas as ações do fluido que são propostas neste trabalho e a Figura 1.7b detalha como estas ações são incorporadas ao problema, indicando as pressões aplicadas na casca cilíndrica. O fluido interno (vetores na cor azul claro) gera uma pressão hidrodinâmica impulsiva, descrito por meio de um potencial de velocidade, nas paredes internas da casca. O movimento de superfície livre (*sloshing*) é considerado apenas para o fluido interno e segue o princípio de superposição dos efeitos, com o acréscimo de uma pressão hidrodinâmica convectiva. O fluido externo (vetores na cor verde) é adicionado de forma semelhante ao fluido interno e tem o propósito de promover uma melhor aproximação nas vibrações do sistema visto que é considerada a ação de ondas oceânicas (vetores na cor azul escuro). No acoplamento fluido-casca cilíndrica, os fluidos externo e interno são incorporados ao sistema estrutural como uma massa adicional, promovendo uma análise mais próxima da realidade. Considera-se a pressão hidrostática desprezível, partindo da hipótese de que sua magnitude é menor em comparação com a pressão hidrodinâmica e a componente constante da pressão lateral (Silva, 2008).

A interação entre fluido e estrutura pode ser descrita por duas hipóteses principais: a de que o fluido é incompressível ou compressível. Quando o fluido é considerado incompressível, isso está relacionado com a vibração acoplada em frequências baixas. Nesse caso, as moléculas do fluido se movem quase em sincronia, resultando em um efeito de massa adicional na interface com a estrutura. À medida que as frequências aumentam e se aproximam da frequência da cavidade acústica, o efeito da compressibilidade do fluido também cresce, permitindo que as ondas de pressão acústicas se propaguem pelo fluido (Pedroso, 2003; Pedroso, 2005a; Ribeiro, 2010; França Jr., 2022).

As ondas oceânicas têm a formulação baseada na teoria de Airy e da difração, sendo aplicada uma pressão nas paredes externas da casca cilíndrica. Em todas as análises, a condição de contorno da casca cilíndrica é engastada-livre, não sendo avaliado a influência dos parâmetros geotécnicos do solo no problema.

Diante do problema exposto, este trabalho procura desenvolver um modelo analítico, o qual foi validado por um modelo numérico obtido a partir do Método dos Elementos Finitos, utilizando o *software* comercial ANSYS®, e observar a influência de todas as ações apresentadas no comportamento dinâmico não-linear de cascas cilíndricas. Além disso, é avaliado de forma analítica como as ações das ondas oceânicas interferem na estabilidade dinâmica, por meio da obtenção de respostas no tempo e planos fase.

1.3. JUSTIFICATIVA

Vários pesquisadores têm demonstrado interesse no estudo do comportamento dinâmico não linear de cascas cilíndricas, devido às inúmeras possibilidades de sua aplicação e à sua resposta complexa a carregamentos estáticos e dinâmicos. A maioria dos estudos encontrados na literatura concentra-se em cascas no vácuo, apesar de que a interação fluido-estrutura para cascas cilíndricas tem adquirido considerável atenção por parte dos pesquisadores. Nos trabalhos que abordam a influência do fluido nas vibrações de cascas cilíndricas, são empregadas diferentes metodologias e procedimentos de cálculo.

Observa-se que a maior parte das pesquisas não consideram os efeitos do movimento de superfície livre (*sloshing*). Isto ocorre em função dos parâmetros geométricos adotados, gerarem frequências devido ao *sloshing*, muito menores do que as frequências naturais da casca cilíndrica, e não provocam grande influência no comportamento dinâmico. Entretanto, isto não é regra geral, e depende dos valores das frequências de cada sistema.

A análise concomitante de todas as ações em conjunto, com a consideração do fluido interno e externo, além da presença do *sloshing*, tem uma carência de pesquisas com esta abordagem, com raros trabalhos publicados nesta perspectiva. Diante deste cenário, este trabalho tem a proposta de avaliar a influência do fluido interno, considerando o *sloshing*, e do fluido externo na análise das vibrações do problema. A incorporação do fluido externo é justificada por ter a expectativa de gerar resultados mais próximos da realidade, visto que é considerada a ação de ondas oceânicas aplicadas nas paredes externas da casca cilíndrica, e a presença do fluido externo incrementa uma massa adicional ao problema, que interfere nas vibrações do conjunto casca cilíndrica-fluido.

Nota-se também que a geometria da casca cilíndrica considerada pelos autores, na maior parte dos trabalhos, é definida por pequenas dimensões com uso voltado para sistemas mecânicos e com baixa utilização em estruturas na área da Engenharia Civil. Outra questão é em relação a condição de contorno da casca cilíndrica com uma massiva quantidade de estudos para cascas simplesmente apoiadas. Neste trabalho, foi avaliada uma casca cilíndrica de grandes dimensões, engastada na base e livre no topo, com grande potencial de aplicação em estruturas *offshore*. Somado a todos estes fatores, o uso dos polinômios de Chebyshev para descrever os campos de deslocamentos da casca cilíndrica, na análise da interação

fluido-estrutura é um diferencial do presente estudo, visto que dos poucos trabalhos com esta abordagem, normalmente são utilizados para cascas sem a presença de fluido.

Portanto, neste trabalho é proposto um estudo do problema acoplado da casca cilíndrica-fluido, em que foi feita uma análise do comportamento dinâmico não linear desta estrutura sob as ações de ondas oceânicas, em contato com um fluido externo e interno, considerando a movimentação da superfície livre do fluido interno. Espera-se que os resultados desta tese de Doutorado possam contribuir para a formação do conhecimento nesta linha de pesquisa.

1.4. OBJETIVOS

Os objetivos que devem ser alcançados no desenvolvimento da tese de doutorado consistem em desenvolver estudos relacionados à dinâmica não linear de cascas cilíndricas e à interação fluido-estrutura, proveniente da ação de ondas oceânicas e do fluido interno e externo. Dentre as principais metas, têm-se:

- a) Desenvolver um modelo analítico para analisar o comportamento de uma casca cilíndrica engastada em uma extremidade e livre na outra, levando em conta a interação entre a estrutura e o fluido interno e externo. Esse modelo será validado por meio de outro modelo numérico, desenvolvido utilizando o Método dos Elementos Finitos;
- b) Utilizar expansões modais para os campos de deslocamentos da casca cilíndrica que descrevam, corretamente, o acoplamento não linear entre os modos de alta ordem;
- c) Avaliar a influência do fluido interno, considerando o efeito de *sloshing* da superfície livre, e do fluido externo nas oscilações não lineares da casca cilíndrica;
- d) Estudar a influência de ondas oceânicas no comportamento dinâmico não linear da estrutura.

1.5. METODOLOGIA

Este trabalho aborda a análise do problema envolvendo a interação entre estrutura e fluido, avaliando as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica. Inicialmente, realiza-se uma revisão bibliográfica que abrange os principais conceitos e técnicas empregadas por diversos pesquisadores na área. Posteriormente, é desenvolvida uma formulação analítica necessária para investigar o comportamento dinâmico não linear, levando em consideração tanto o

fluido externo quanto interno, juntamente com a influência das ondas oceânicas. Além disso, é conduzida uma modelagem numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos, com o intuito de analisar de maneira abrangente todas as variáveis em conjunto e compreender como esses fatores impactam na estabilidade da estrutura.

É importante ressaltar que neste trabalho, o modelo analítico é o principal produto a ser desenvolvido, visto que o intuito é gerar uma ferramenta que permita realizar um estudo aprofundado das vibrações não lineares, por meio da obtenção das respostas no tempo e planos fase. Para a obtenção das equações não lineares de equilíbrio da casca cilíndrica foi utilizada a teoria de Sanders-Koiter para descrever o campo de deformação e as mudanças de curvatura da superfície média da casca. Os campos de deslocamentos são descritos a partir dos polinômios de Chebyshev os quais são ajustados conforme as condições de contorno do problema. Neste trabalho, todas as análises são feitas para uma casca cilíndrica engastada-livre. Em seguida, as equações não lineares são obtidas a partir do método de Rayleigh-Ritz juntamente com o princípio de Hamilton.

O modelo analítico é desenvolvido a partir da implementação de rotinas nos *softwares* Maple® e Visual Studio C/C++®, com o objetivo de manipular as complexas equações não lineares provenientes desta formulação. Para a modelagem numérica foi utilizado o *software* comercial ANSYS®, em que a discretização adequada para a casca cilíndrica e a cavidade acústica é definida por meio do estudo de convergência da malha de elementos finitos. A Figura 1.8 apresenta o que é feito em cada software utilizado nesta pesquisa.

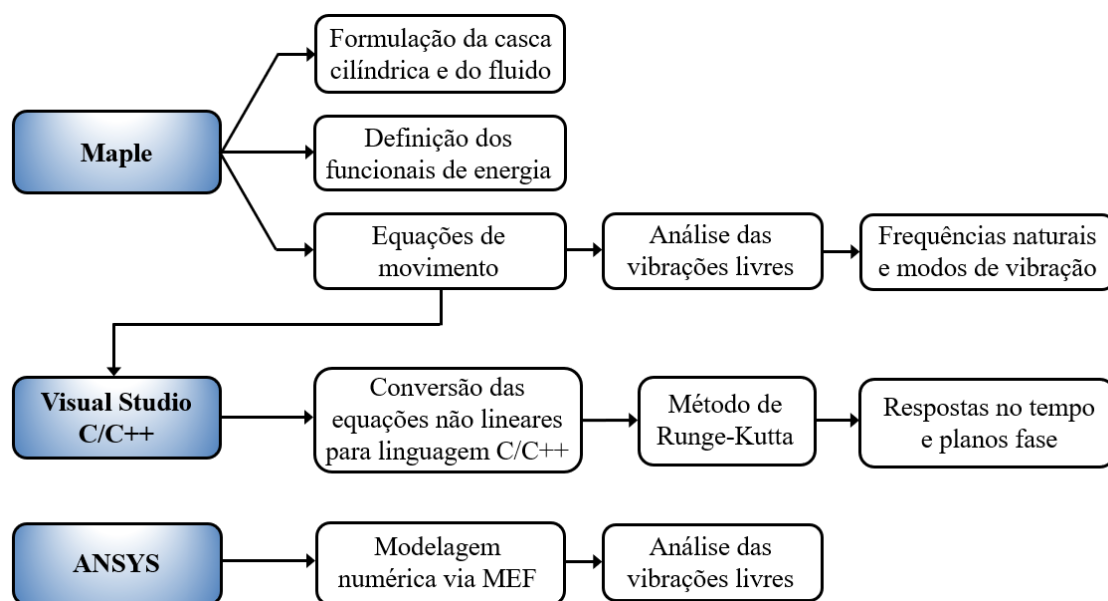


Figura 1.8 – Divisão dos procedimentos metodológicos para cada *software* utilizado na tese.

Nota-se que o modelo analítico é desenvolvido com o auxílio dos *softwares* Maple® e Visual Studio C/C++®. Desde a formulação da casca cilíndrica e do fluido, até a obtenção das equações de movimento do problema é feita utilizando o Maple®. Este processo inclui as seguintes etapas:

- a) Inserção das equações provenientes da teoria não linear de Sanders-Koiter, incluindo os campos de deformação e mudanças de curvatura da casca cilíndrica. Em seguida, os campos de deslocamentos são definidos a partir dos polinômios de Chebyshev. Além disso, cita-se a obtenção dos potenciais de velocidade do fluido interno, considerando o movimento de superfície livre, além do fluido externo;
- b) A definição dos funcionais de energia da casca cilíndrica, do fluido, das cargas de excitação e do amortecimento também são feitas neste *software*. Em seguida, é aplicado o método de Rayleigh-Ritz através do princípio de Hamilton para a obtenção das equações de movimento do problema;
- c) Para a obtenção das vibrações livres, as equações de movimento são linearizadas, resultando em um problema de autovalores e autovetores. Os resultados são as frequências naturais e modos de vibração da casca cilíndrica;
- d) Para a análise da vibração forçada com a aplicação das cargas advindas da ação de ondas oceânicas, são obtidas equações de movimento são não lineares. Em seguida, elas são convertidas para a linguagem de programação em C/C++.

Portanto, até esta etapa é utilizado o *software* Maple®, que permite uma boa manipulação algébrica das variáveis envolvidas nestas operações, que inclui sucessivas integrações e derivadas das expressões. Com as equações não lineares convertidas em C/C++, estas são inseridas em um código desenvolvido no *software* Visual Studio®, em que é aplicado o método de Runge-Kutta de quarta ordem para obtenção das respostas no tempo e planos fase. Em relação ao modelo numérico, todas as modelagens via MEF são desenvolvidas através do *software* ANSYS®, as quais foram realizadas para a análise das vibrações livres.

A Figura 1.9 ilustra o fluxograma da pesquisa a ser desenvolvida nesta tese de Doutorado.

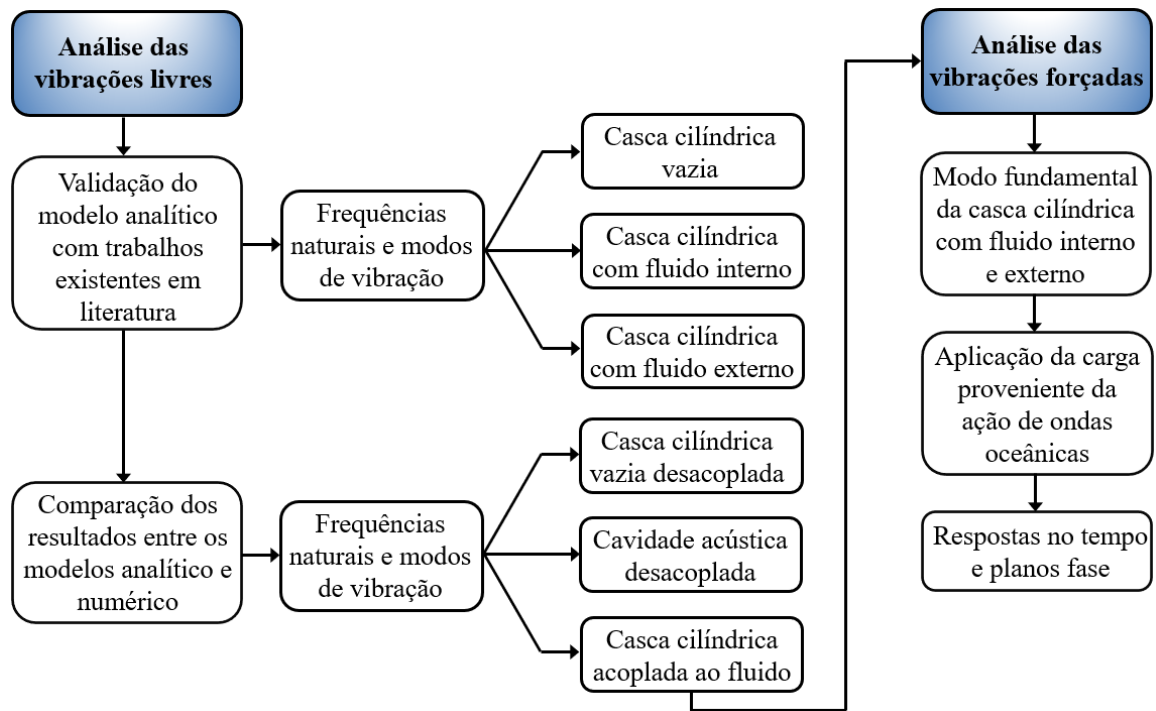


Figura 1.9 – Fluxograma da pesquisa.

Após o desenvolvimento de uma ampla revisão bibliográfica, foi traçada a estratégia para o desenvolvimento desta pesquisa, em que os resultados foram conduzidos conforme apresentado na Figura 1.9. Inicialmente, foi feito um estudo das vibrações livres da casca cilíndrica, o qual foi subdividido em duas etapas: validação do modelo analítico com trabalhos existentes em literatura, e em seguida, confrontar os modelos analítico e numérico. Na primeira etapa, foi feito uma avaliação para três situações:

- a) Validação de uma casca cilíndrica vazia, com a condição de contorno engastada-livre, utilizando a geometria adotada por Leissa (1973) e Kurylov e Amabili (2011);
- b) Validação de uma casca cilíndrica engastada-livre, preenchida por um fluido interno e com influência de *sloshing*, adotando as propriedades geométricas da casca e do fluido conforme o trabalho de Kim, Lee e Ko (2004);
- c) Validação de uma casca cilíndrica vazia, com a condição de contorno definida por um diafragma de cisalhamento em ambas as extremidades, com fluido externo e sem a influência de *sloshing*, adotando as propriedades geométricas da casca e do fluido conforme o trabalho de Kwak (2010).

Após a verificação de forma segmentada dos diferentes tipos de interação fluido-estrutura com trabalhos existentes em literatura, foram definidas as propriedades físicas e geométricas

para a casca cilíndrica e o fluido, objetos de estudo desta pesquisa, que serão apresentados posteriormente. Desta maneira, como se trata de um caso particular deste trabalho, com uma estrutura de grandes dimensões, a maneira que foi proposta para verificar a confiabilidade dos resultados do modelo analítico foi através de uma modelagem numérica por meio do Método do Elementos Finitos.

Portanto, a segunda etapa do trabalho consiste na análise das vibrações livres da casca cilíndrica em estudo, obtendo os primeiros modos de vibração e suas respectivas frequências naturais. Inicialmente, foi avaliado a convergência da malha de elementos finitos para os casos desacoplados (casca cilíndrica e cavidade acústica desacopladas) e acoplados (casca cilíndrica e fluido). Da mesma forma, foi feito para o modelo analítico, obtendo a convergência numérica dos resultados, e definindo a quantidade de termos necessários para a expansão modal da casca cilíndrica e do fluido.

Em relação à análise do fluido desacoplado, a condição de contorno mais adequada seria a de fechada-aberta, devido à presença do fundo do leito oceânico. No entanto, considerando que o problema proposto neste trabalho está em um regime incompressível com massa adicional, foi adotada uma cavidade acústica aberta-aberta. Esta escolha é justificada pelo fato de a cavidade apresentar altas frequências e não possuir modos dominantes no sistema. Como a casca cilíndrica é longa, e conseqüentemente, a cavidade acústica, essa aproximação não resulta em diferenças significativas. Além disso, tal abordagem é coerente com o potencial de velocidade do fluido proposto por Paak, Païdoussis e Misra (2014).

Após estas definições, foi feito um estudo paramétrico destas frequências naturais, avaliando a influência da altura de fluido interno e externo, além da consideração do movimento de superfície livre do fluido interno. Em todos os casos, os resultados são comparados entre os modelos analítico e numérico, observando as diferenças percentuais entre eles. Desta forma, por meio da análise das vibrações livres, é obtido o modo fundamental de vibração da casca cilíndrica, o qual é importante para prosseguir com o estudo das vibrações forçadas do problema, através da inserção das cargas provenientes das ondas oceânicas. De forma preliminar, é feito um estudo comparativo de uma casca vazia com a aplicação de cargas de ondas oriundas da teoria de Airy, confrontando os deslocamentos transversais da casca cilíndrica, obtidos para os modelos analítico e numérico.

Em relação à inserção do fluido externo, este é incorporado ao problema de duas maneiras: primeiramente, um meio acústico é utilizado para definir as pressões hidrodinâmicas; em seguida, a teoria da difração é aplicada para determinar as pressões das ondas oceânicas na casca cilíndrica. Dessa forma, ocorre um aumento da massa adicional, o que proporciona uma melhor aproximação das frequências naturais da casca, além de introduzir uma ação de cargas para a análise das vibrações forçadas.

Por fim, é utilizado a formulação advinda da teoria da difração, recomendada para estruturas de grandes dimensões, como o propósito de descrever a distribuição de pressões em torno da casca cilíndrica. Nesta etapa, é feito um estudo da convergência da expansão do termos não lineares, considerando diferentes classificações de ondas (águas profundas, intermediárias e rasas), por meio da obtenção dos planos fase e respostas no tempo. Todos os resultados são obtidos desconsiderando a influência da carga compressiva de peso próprio da casca cilíndrica. Na última etapa dos resultados, esta simplificação é explicada de forma detalhada, ao considerar a influência do peso próprio da casca cilíndrica, avaliando as frequências naturais e modos de vibração (análise das vibrações livres) e dos deslocamentos através dos planos fase (análise da vibração forçada), confrontando os resultados desconsiderando e considerando esta contribuição de carga axial.

Todos os resultados foram processados em um notebook com as seguintes especificações: processador Intel® Core™ i7-8565U CPU @ 1.80GHz – 1.99GHz e 8 GB de memória RAM. O tempo de processamento computacional não foi registrado. Para a análise de vibrações livres, devido ao fato de envolver equações lineares, o tempo de processamento é reduzido. No entanto, para a análise de vibrações forçadas, que inclui uma quantidade significativa de termos não lineares nas equações, o tempo total de processamento para obter uma resposta completa no tempo foi estimado em aproximadamente um dia. As etapas com maior custo computacional são os cálculos da energia interna de deformação e cinética da casca cilíndrica, o processo de Rayleigh-Ritz e a aplicação do método de Runge-Kutta.

1.6. ABRANGÊNCIA E DELIMITAÇÕES

A seguir serão expostas algumas delimitações e abrangência deste trabalho:

- A casca cilíndrica utilizada neste estudo é longa, feita de concreto armado, com engastada na base e livre no topo (sem a presença de placa de fechamento ou deck), e possui espessura constante;

- Não é considerada a influência da flexibilidade da fundação;
- As ações dinâmicas consideradas neste trabalho consistem em ondas oceânicas e movimento de superfície livre (*sloshing*) para o fluido interno;
- A não linearidade geométrica abordada neste trabalho diz respeito aos grandes deslocamentos da casca cilíndrica provocados pelas ações dinâmicas mencionadas;
- O fluido externo à casca cilíndrica é modelado por uma massa adicional incorporada à estrutura, enquanto as ondas oceânicas são representadas por cargas aplicadas à casca na região de interface fluido-estrutura. No entanto, o efeito de *sloshing* não é considerado no volume de fluido externo;
- Como o peso próprio exerce pouca influência no comportamento dinâmico, ele é desconsiderado na maioria das análises.

1.7. CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Esta tese de doutorado apresenta as seguintes contribuições:

- Embora a literatura apresente trabalhos sobre cascas cilíndricas interagindo com um fluido interno, com o movimento da superfície livre, esta tese de doutorado apresenta contribuições, uma vez que há poucos estudos que abordam o acoplamento de cascas cilíndricas e o fluido externo e interno, considerando o efeito de *sloshing*;
- Pode-se também mencionar o uso dos polinômios de Chebyshev para descrever os campos de deslocamentos da casca cilíndrica, uma vez que há poucos estudos que adotam essa solução para a análise da interação fluido-estrutura. Além disso, a análise de cascas para a condição de contorno engastada-livre tem uma quantidade reduzida de trabalhos em comparação com cascas cilíndricas simplesmente apoiadas;
- Considerando a linha de pesquisa que se enquadra a temática deste trabalho, as pesquisas que focam no estudo da dinâmica não linear normalmente não consideram problemas próximos da realidade. Pode-se citar o estudo de cargas reais, que nesta tese foi avaliada a ação de ondas oceânicas, além da consideração de uma geometria de casca compatível com estruturas *offshore* de grande porte, uma vez que a maioria dos trabalhos sobre essas estruturas utiliza geometrias com pequenas dimensões;

- A partir de uma estrutura com grande potencial de aplicação na indústria *offshore*, o estudo da dinâmica não linear, com a obtenção de vibrações não lineares, respostas no tempo e planos fase, apresenta-se com uma importante contribuição nesta linha de pesquisa.

1.8. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta tese de doutorado está organizada, além deste capítulo, conforme apresentado a seguir.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre os estudos feitos por diversos autores relacionados à influência da interação fluido-estrutura no comportamento dinâmico de cascas cilíndricas com, ou sem, a presença da superfície livre do fluido, além de referências sobre a ação de ondas oceânicas em estruturas *offshore*.

O Capítulo 3 apresenta a formulação matemática do problema para analisar o comportamento dinâmico do sistema acoplado casca cilíndrica-fluido. É utilizada a teoria não linear de Sanders-Koiter para descrever os campos de deformação e mudanças de curvatura da casca, sendo os campos de deslocamentos descritos a partir dos polinômios de Chebyshev. Para as ondas oceânicas apresentam-se as teorias de Airy e da difração para descrever a distribuição de pressões em torno da casca cilíndrica.

O Capítulo 4 apresenta os resultados para a vibração livre obtidos pela formulação matemática para uma casca cilíndrica engastada-livre. Os resultados obtidos pelo método analítico são comparados com um modelo numérico desenvolvido através do Método dos Elementos Finitos, com o auxílio do *software* comercial ANSYS®. É feita uma análise desacoplada da casca vazia e da cavidade acústica, referente ao fluido, e uma análise acoplada da casca cilíndrica com fluido interno. Para obtenção das vibrações livres, considerando a influência das ondas oceânicas, é adicionado um fluido externo ao problema.

No Capítulo 5 é estudado as vibrações forçadas não lineares da casca cilíndrica, considerando a pressão lateral dependente do tempo e proveniente da ação de ondas oceânicas. Da mesma forma foi avaliada a influência do fluido interno e da presença da superfície livre, utilizando-se as respostas no tempo e os planos fase para estas análises.

Por fim, o Capítulo 6 resume as conclusões provenientes dos resultados obtidos neste estudo de doutorado, juntamente com algumas recomendações para pesquisas futuras.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversos pesquisadores têm mostrado interesse no estudo do comportamento dinâmico não linear de cascas cilíndricas, visto as inúmeras possibilidades de sua utilização e por apresentar uma resposta complexa a carregamentos estáticos e dinâmicos. Portanto, existem vários trabalhos na literatura abordando este tipo de estrutura, investigando diferentes parâmetros, incluindo a interação fluido-estrutura.

Liew, Lim e Kitipornchai (1997) realizaram uma ampla revisão bibliográfica sobre análise de vibrações livres de cascas abatidas, desde a teoria clássica de Kirchhoff-Love, além de teorias de primeira ordem e de ordens superiores. Os trabalhos pesquisados datam desde o ano de 1970, e os autores expuseram as principais diferenças entre as teorias de cascas. Outra revisão bibliográfica de diversos problemas não lineares de vibração em cascas esbeltas é feita por Kubenko e Koval'chuk (1998). Segundo os autores, a não linearidade observada nas vibrações das cascas pode ter origem geométrica, devido à relação não linear entre as deformações e os deslocamentos, ou ainda de origem física, observado quando as deformações extrapolam a aplicação da lei de Hooke. Moussaoui e Benamar (2002) apresentaram um levantamento bibliográfico de estudos sobre vibrações não lineares de cascas, abordando sobre a influência dos efeitos da anisotropia, da tensão inicial, da massa adicional, da fundação sobre base elástica, reforços, deformações de cisalhamento transversal, torção e interação com fluido no comportamento dinâmico não linear de cascas.

Amabili e Païdoussis (2003) também elaboraram uma revisão bibliográfica com pesquisas que abordaram a vibração não linear livre e forçada de painéis e cascas e cilíndricas com, ou sem, interação fluido-estrutura, sendo apresentados diversos estudos destas estruturas submetidas: a carregamentos transientes e excitações paramétricas; problemas dinâmicos envolvendo estabilidade e vibrações de cascas acopladas ao escoamento de fluidos; e, avaliação da carga pós-crítica de flambagem. Complementado esta revisão, Alijani e Amabili (2014) executaram uma vasta revisão bibliográfica sobre pesquisas envolvendo diversos parâmetros que influenciam as vibrações não lineares de cascas, citando vários estudos teóricos, numéricos e experimentais sobre problemas dinâmicos que envolvem vibrações paramétricas, estabilidade estrutural, deformação dinâmica, vibrações não estacionárias e caóticas. Outros aspectos sobre vibrações não lineares de cascas cilíndricas são tratados como, por exemplo, a interação fluido-estrutura, as imperfeições geométricas,

condições de contorno, cargas térmicas, modelos de ordem reduzida e técnicas de perturbação.

A literatura contempla diversas teorias sobre o campo de deformação de cascas, podendo citar como exemplo as teorias de Donnell, Sanders-Koiter, Love, Flügge, Timoshenko, Goldenveizer-Novozhilov, entre outras. Donnell (1933) foi um dos trabalhos pioneiros sobre o estudo de cascas cilíndricas, onde estas estruturas foram submetidas à torção. Sanders (1963) desenvolveu uma teoria não linear para análise de cascas esbeltas, sendo considerada, pelos autores, como uma das melhores aproximações de primeira ordem para estudos da dinâmica não linear e da instabilidade estrutural de cascas cilíndricas (Gonçalves, 1987). Leissa (1973) apresenta uma vasta revisão bibliográfica com diversas teorias de cascas cilíndricas, evidenciando as diferenças entre as formulações matemáticas, através da avaliação das frequências naturais e deformadas modais.

2.1. ESTUDOS SOBRE OS CAMPOS DE DESLOCAMENTOS DA CASCA CILÍNDRICA

Para descrever um modelo analítico que possibilite uma análise confiável do comportamento dinâmico das cascas cilíndricas, é imprescindível adotar uma solução para os campos de deslocamentos axial (u), circunferencial (v) e transversal (w), os quais devem atender às condições de contorno e continuidade da casca. Para garantir uma solução analítica de qualidade, isto é, com precisão e capaz de descrever o comportamento não linear do problema, é fundamental uma definição criteriosa dos campos de deslocamentos. Nesta etapa, diferentes metodologias e estratégias são adotadas, sendo que, no estudo de cascas cilíndricas, a maioria dos pesquisadores adotam as funções de viga como solução modal para atender as condições de contorno do problema, como identificado, por exemplo, nos trabalhos de Kim, Lee e Ko (2004), Karagiozis *et al.* (2005), Mendes (2013), Paak, Païdoussis e Misra (2014) e Nie *et al.* (2021).

Um dos poucos trabalhos que utilizam os polinômios de Chebyshev para expandir os campos de deslocamentos de uma casca cilíndrica vazia foi desenvolvido por Kurylov e Amabili (2011). Os autores investigaram as vibrações não lineares de grande amplitude de cascas cilíndricas engastada-livres com, e sem, imperfeições geométricas, utilizando a teoria não linear de casca de Sanders-Koiter. O sistema é discretizado utilizando modos naturais da casca e equações de Lagrange, com amortecimento mantido através da função de dissipação

de Rayleigh. Diferentes expansões com até 52 coordenadas generalizadas (graus de liberdade) são utilizadas para estudar a convergência da solução. As equações de movimento são discretizadas numericamente usando o método de continuação de arco e análise de bifurcação, comparando as respostas numéricas com resultados experimentais disponíveis na literatura, considerando uma excitação radial harmônica próxima ao modo fundamental.

Ma'em e Butcher (2012) propõe uma técnica numérica para a análise de vibração livre de vigas Timoshenko rotativas e não rotativas. O método de colocação de Chebyshev é aplicado para obter as frequências naturais e os modos de vibração. As bordas da viga Timoshenko são representadas por molas de translação e torção distribuídas. As condições de contorno são acopladas com a equação governante para formular o problema de autovalores. Os autores afirmam que foi adotado os polinômios de Chebyshev devido à sua alta taxa de convergência e com boa precisão dos resultados.

Wattanasakulpong, Pornpeerakeat e Chaikittiratana (2016) adotaram o método de colocação de Chebyshev para obter soluções precisas das frequências naturais de cascas cilíndricas. Os autores investigaram cascas com diferentes condições de contorno em um estudo paramétrico. Ao utilizar o método para resolver as equações diferenciais acopladas de movimento que governam a vibração da casca, foram obtidas as frequências naturais a partir da equação algébrica de autovalores usando as matrizes de diferenciação de Chebyshev. Os resultados obtidos satisfazem tanto as condições de contorno geométricas quanto aos esforços. Segundo os autores, ao utilizar as funções polinomiais de Chebyshev para resolver as equações diferenciais e as integrais presentes na formulação matemática, a precisão e confiabilidade das soluções são confirmadas pela rápida taxa de convergência em comparação com outras funções ortogonais (Biazar; Ebrahimi, 2012; Ma'en; Butcher, 2012).

Portanto, nota-se a utilização dos polinômios de Chebyshev para o estudo da dinâmica em diferentes tipos estruturais e com boa convergência numérica dos resultados. Diante da grande quantidade de integrais e equações diferenciais a serem resolvidas ao longo do desenvolvimento do modelo analítico, e pela característica destes polinômios ortogonais, conclui-se que eles podem ser uma boa alternativa para descrever os campos de deslocamentos da casca cilíndrica em estudo. A efeito de comparação, as funções de viga contemplam funções hiperbólicas e, quando combinadas ao longo da obtenção das equações movimento, se tornam expressões extensas e com maior custo computacional para realizar as constantes integrações dos funcionais de energia quando comparadas aos polinômios de

Chebyshev que abrangem apenas funções polinomiais. Diante do apresentado, foram adotados estes polinômios para descrever os campos de deslocamentos do problema em estudo.

Ainda sobre os estudos relativos ao campo dos deslocamentos em cascas cilíndricas, identificado por suas deformadas modais, em representação analítica ou numérica 3D, ou em seus cortes horizontais e verticais 2D, encontramos os trabalhos inovadores do Grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura-GDFE/UnB, Mendes (2013, 2018) e França Jr. (2018).

Nestes trabalhos, foi desenvolvida uma sistemática criativa de apresentar os resultados, de forma mais físico-intuitiva, através de cortes em pontos estratégicos das deformadas 3D da casca, fato que permite uma representação quantitativa, apta as comparações analítico-numéricas, ainda pouco explorada na literatura técnica. Esse procedimento melhora a compreensão e o entendimento das deformadas modais, que se tornam complexas para modos mais altos, com muitas franjas azimutais. Assim, se assegura através dos cortes 2D, a possibilidade de uma comparação clara e objetiva de observação do comportamento das deformadas modais em cascas cilíndricas.

2.2. MODELOS DE DIMENSÃO REDUZIDA E MÉTODOS NUMÉRICOS

Dado o reduzido número de estudos na literatura que abordam soluções analíticas para as equações diferenciais de movimento de uma casca cilíndrica, é necessário recorrer à aplicação de métodos de discretização para converter as equações diferenciais parciais de movimento do sistema contínuo em um sistema discreto de equações diferenciais. Dentre as técnicas de discretização frequentemente utilizadas, destacam-se as seguintes: Galerkin, Rayleigh-Ritz, diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente reconhecido como uma ferramenta eficaz para projetos estruturais, especialmente em análises de sistemas estruturais complexos. No entanto, ao lidar com o estudo de cascas cilíndricas, uma discretização refinada é essencial para garantir a obtenção de resultados coerentes, especialmente ao considerar os efeitos não lineares e conduzir uma análise paramétrica detalhada.

Sansour (2004) utilizou o MEF para investigar o comportamento não linear de cascas cilíndricas sujeitas a diferentes tipos de carga dinâmica. O autor utiliza a integração no tempo com a conservação de energia, momento e momento angular para cascas que exibem não

linearidades nas relações deformação-deslocamento, juntamente com um comportamento constitutivo não linear e carregamento dependente do deslocamento.

Já Rahman, Jansen e Tiso (2011) propuseram uma análise de vibrações não lineares de cascas cilíndricas compostas usando elementos finitos baseados no método da perturbação. Inicialmente, determinaram a frequência natural linear e o modo de vibração correspondente. Em seguida, a abordagem de perturbação foi empregada para fornecer a curvatura inicial da relação amplitude-frequência, adicionando um certo custo computacional.

Zhang (2002) utilizou uma abordagem de propagação de ondas para avaliar as frequências de cascas cilíndricas submersas em um meio acústico denso. Os resultados foram validados através de um modelo numérico via MEF. Foi utilizada a teoria de Love para obtenção das equações da casca cilíndrica e o fluido é incorporado ao sistema como uma pressão acústica aplicada na lateral externa da casca. Foram obtidas as frequências desacopladas e acopladas, concluindo que elas aumentam com o incremento da relação espessura-raio (h/R), embora com valores destas relações diferentes, refletindo os efeitos do acoplamento nos diferentes modos de onda.

Em certas circunstâncias, o uso do MEF pode se tornar computacionalmente inviável para a análise dinâmica de cascas cilíndricas, especialmente quando uma análise paramétrica detalhada requer a avaliação de muitos casos. Com o objetivo de mitigar esse desafio computacional, que está relacionado a procedimentos numéricos demorados, alguns pesquisadores têm explorado possibilidades para resolver esse problema. Isso envolve o desenvolvimento de modelos matemáticos que sejam precisos, mas que possuam baixa dimensão, proporcionando uma solução eficiente para análises paramétricas. Além disso, a confiabilidade do modelo numérico pode ser calibrada por meio de modelos matemáticos precisos e que forneçam resultados mais realistas com os fenômenos em estudo.

Gonçalves e Del Prado (2002) estudaram as vibrações não-lineares de uma casca cilíndrica sob carga axial periódica, usando a teoria de Donnell. Os autores usaram os termos mais importantes na expansão modal para o campo de deslocamento transversal, determinados a partir de técnicas de perturbação, e discretizaram as equações de movimento com o método de Galerkin. As equações resultantes foram resolvidas com o método Runge-Kutta. Eles analisaram o comportamento do sistema usando seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação e bacias de atração para entender os padrões de escape da

instabilidade pré-flambagem. Isso é relevante para o controle de vibrações em projetos estruturais.

Amabili, Sarkar e Païdoussis (2003) utilizaram o método Karhunen-Loève para obter a base de menor dimensão para descrever o campo de deslocamento de uma casca cilíndrica, aplicando-a no estudo das vibrações não lineares. Este método utiliza uma série de dados que é obtida ou por simulação numérica, usando um modelo de precisão elevada, ou a partir de experimentos físicos.

Silva (2008) discutiu modelos simplificados para analisar vibrações não lineares e estabilidade de cascas cilíndricas. O autor sugeriu que soluções modais em métodos como Galerkin ou Ritz podem conter dados redundantes e que a dinâmica do sistema pode ser representada com menos modos de vibração, desde que os modos essenciais sejam mantidos. Assim, foi proposto o uso do método de Karhunen-Loève para reduzir a dimensão do problema, mantendo as informações importantes sobre a dinâmica não linear. Seguindo nessa linha de pesquisa, Gonçalves, Silva e Del Prado (2008) também exploraram modelos simplificados para analisar a vibração não linear de cascas cilíndricas, usando a teoria de Donnell para cascas abatidas. Os autores aplicaram o método da perturbação para formular uma expansão modal para os deslocamentos transversais e usaram o método de Galerkin para discretizar o sistema e obter as equações de movimento. Em seguida, eles avaliaram o modelo usando a expansão de Karhunen-Loève, estudando a contribuição de cada modo para a resposta não linear e a energia total do sistema. Os resultados indicaram que o modelo de baixa dimensão pode descrever com precisão a resposta da casca mesmo para grandes amplitudes de vibração.

Neste trabalho, o modelo numérico obtido por meio do Método dos Elementos Finitos é utilizado para validar o estudo da vibração livre, observando se a inserção do fluido interno e externo está compatível com ambos os modelos analítico e numérico, além de avaliar se o carregamento estático está aplicado de forma coerente e em concordância com o modelo analítico. De fato, conforme as pesquisas apresentadas, realizar uma análise não linear com a obtenção de respostas no tempo via MEF, resulta em um alto custo computacional, e que dispenderia um tempo muito alto para realizar diversas análises por meio de um estudo paramétrico. Como alternativa para contornar o custo computacional exigido em um modelo numérico via MEF, utiliza-se de modelos de baixa dimensão, obtido a partir de expansões

em série para os campos de deslocamentos, para otimizar o tempo de processamento computacional.

2.3. INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Em relação a interação fluido-estrutura, a análise do comportamento dinâmico de cascas cilíndricas na presença de um fluido interno, ou pela ação de carregamentos externos provenientes da ação de fluido, é de grande importância devido a maioria de suas aplicações estarem relacionadas ou ao armazenamento e ao transporte de fluidos ou por estarem instaladas em regiões marítimas. Alguns trabalhos trabalham adotam o termo *tanque cilíndricos* para se referenciar às cascas cilíndricas com fluido interno.

Kana, Lindholm e Abramson (1966) realizaram um estudo experimental sobre um fenômeno de instabilidade proveniente das vibrações livres de um tanque feito por material elástico e parcialmente cheio. Segundo os autores, esse fenômeno ocorre em torno dos modos de ressonância, detectando pequenas vibrações na superfície livre e nas paredes do tanque. Foi observado um expressivo comportamento não linear do tanque e os autores enfatizaram a necessidade de adicionar mais graus de liberdade na solução modal dos campos de deslocamento do problema para melhorar a precisão e representar melhor o problema. Em seguida, Chu e Kana (1967) avaliaram o comportamento dinâmico de um tanque cilíndrico parcialmente cheio através das vibrações não lineares na direção transversal. Os autores obtiveram valores numéricos e experimentais divergentes, recomendando o acréscimo de mais termos na solução modal dos campos de deslocamentos do sistema.

Gonçalves e Batista (1987) investigaram as vibrações lineares de cascas cilíndricas apoiadas parcialmente submersas ou preenchidas por um fluido ideal. As deformações e as mudanças de curvatura da superfície média da casca foram descritas pela teoria de Sanders e, o método de Rayleigh-Ritz, seguido do princípio de Hamilton, foi utilizado para obter as equações discretizadas não lineares de movimento. Por meio de uma análise paramétrica da geometria e da altura do fluido no interior da casca, os resultados obtidos foram validados com valores experimentais presentes na literatura. Os autores constataram que a presença do fluido reduz as frequências naturais e altera os modos de vibração da casca, e que esta redução aumenta conforme o número de ondas circunferenciais e axiais diminuem ou com o incremento das relações: altura do fluido e comprimento da casca (H/L), raio e espessura da casca (R/h), comprimento e raio da casca (L/R) e densidade do fluido e da casca (ρ_L/ρ_s).

Continuando seus estudos, Gonçalves e Batista (1988) analisaram as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada e preenchida por fluido com a aplicação de um pré-carregamento axial e lateral. O fluido interno é descrito por um potencial de velocidade que contém uma expansão de funções harmônicas e que atendem à equação de Laplace. Os resultados obtidos indicam uma perda de rigidez (*softening*) inicial para diferentes modos de vibração e relações geométricas. Segundo os autores, a redução da rigidez de membrana da casca e os efeitos de inércia associados com os termos do segundo harmônico da solução modal para os campos de deslocamento decorrem da não linearidade do acoplamento modal. Ainda, eles observaram que a presença de fluido interno acentua de forma significativa os efeitos não lineares da casca cilíndrica se comparado com uma casca cilíndrica vazia.

Amabili (1997) investigou as vibrações livres de um tanque cilíndrico parcialmente preenchido com um fluido não viscoso e incompressível com uma superfície livre ortogonal ao eixo do tanque onde os efeitos de superfície livre e da pressão hidrostática do líquido são desprezados. A estrutura analisada considera a flexão das paredes do tanque, uma placa no fundo e o apoio de uma base elástica de Winkler. A partir do método de Rayleigh-Ritz e da solução de um problema de autovalor, o autor obteve as frequências naturais e os modos de vibração do tanque, indicando que os diferentes níveis de fluido interno alteram de forma significativa as frequências e os modos de vibração do tanque. Por outro lado, o autor observou que é necessário adequar a rigidez da fundação elástica de Winkler para descrever melhor o problema. Baseado neste estudo, Mendes, Pedroso e Ribeiro (2016) avaliaram as vibrações de cascas cilíndricas preenchidas por fluido conectadas com placas de fundo e apoiadas em base elástica, onde os resultados provenientes da formulação analítica foram comparados com um modelo numérico feito no *software* ANSYS®, indicando boa concordância entre os modelos analítico e numérico.

Continuando os estudos, Pellicano e Amabili (2003) analisaram a instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas apoiadas, preenchidas por um fluido e sob ação de cargas axiais periódicas. Os resultados obtidos indicam que a presença do fluido incorpora uma massa adicional ao sistema e aumenta o amortecimento, provocando uma alteração das cargas de estabilidade dinâmica e uma redução das frequências naturais.

Karagiozis *et al.* (2005) investigaram as vibrações não lineares de cascas cilíndricas vazias, ou preenchidas por fluido, engastadas em ambas as extremidades e submetidas a uma força

de excitação harmônica radial. Os autores desenvolveram dois modelos analíticos: um derivado a partir da teoria não linear de Donnell e outro desenvolvido por uma abordagem variacional que possibilita a utilização de molas nas extremidades da casca para simular as condições de contorno. Para discretizar as equações de movimento a partir do método de Galerkin, os autores consideraram nas expansões modais para descrever os campos de deslocamentos, funções de vigas com *driven modes* (modo excitado diretamente pelo carregamento externo) e *companion modes* (modo excitado indiretamente pelo carregamento externo e circunferencialmente defasado em relação ao *drive mode*). Os resultados obtidos foram comparados com dados experimentais existentes na literatura e demonstraram boa concordância entre si.

Silva, Gonçalves e Del Prado (2011) estudaram o comportamento dinâmico e a estabilidade de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada, preenchida totalmente por um fluido, submetida a uma pressão lateral e um carregamento axial. Os autores empregaram o método da perturbação para obter um modelo de ordem reduzida, diminuindo do número de graus de liberdade do sistema e considerando a influência dos *driven* e *companion modes*. As equações discretizadas de movimento da casca cilíndrica são obtidas pelo método de Galerkin, sendo validadas pela convergência das relações frequência-amplitude, curvas de ressonância, diagramas de bifurcação e respostas no tempo.

Paak, Païdoussis e Misra (2014) realizaram um estudo não linear das vibrações de uma casca cilíndrica engastada-livre preenchidas por fluido. Os autores adotaram a teoria de Flügge para descrever o campo de deformação da casca e os campos de deslocamentos foram definidos a partir das funções de viga. As condições de contorno geométricas são exatamente atendidas enquanto as condições naturais são satisfeitas pela minimização de energia do sistema. Os autores observaram que o nível de fluido interno e dos parâmetros de imperfeição influenciam no comportamento das curvas de ressonância, podendo ser do tipo *softening* (perda de rigidez) ou *hardening* (ganho de rigidez).

Ospina (2014) investigou o comportamento dinâmico de cascas cilíndricas em vibrações livres, considerando o acoplamento entre a estrutura e o fluido interno. As soluções analíticas para a vibração livre das cascas cilíndricas foram obtidas utilizando a teoria de Donnell. Diferentes condições de contorno foram estudadas utilizando funções de viga, onde os deslocamentos da superfície média foram expressos como expansões modais de funções trigonométricas. Para o estudo do fluido acústico dentro da cavidade cilíndrica, a solução da

equação da onda foi obtida utilizando o método de separação de variáveis. Na análise das vibrações acopladas fluido-estrutura, uma massa adicional de fluido foi incorporada na equação de movimento. Foi realizado um estudo comparativo analítico e numérico, utilizando o MEF, para verificar a precisão dos resultados obtidos.

Existem algumas formas para avaliar a interação fluido-estrutura como, por exemplo, o cálculo do potencial de velocidade do fluido para determinar a pressão hidrodinâmica. Outra forma de se avaliar a interação fluido-estrutura é por meio da incorporação de massa adicional que considera os efeitos de inércia provenientes da presença de fluido na estrutura. Esta última forma é utilizada por França Jr, Ribeiro e Pedroso (2019) que estudaram o fluido interno em uma casca cilíndrica simplesmente apoiada como uma massa virtual de fluido adicionada às equações de equilíbrio as quais são obtidas pela formulação de energia e cálculo variacional. Embora os autores tratem o fluido como uma cavidade acústica, o problema da interação fluido-estrutura é analisado de forma desacoplada e, posteriormente, de forma acoplada, chegando a resultados semelhantes aos trabalhos encontrados na literatura sobre vibrações livres. Os autores também desenvolveram um modelo numérico em MEF, demonstrando boa convergência entre os resultados. Nesta mesma linha de pesquisa, Mendes, Pedroso e Gibert (2013) realizaram um estudo analítico e numérico, avaliando o fluido como uma cavidade acústica desacoplada para diferentes condições de contorno. As frequências naturais e os campos de pressão obtidos possuem boa concordância entre os modelos, dentro da abrangência considerada.

França Jr. *et al.* (2017) investigaram as vibrações livres de uma casca cilíndrica vazia e completamente preenchida com um fluido ideal, modelado como uma cavidade acústica. Utilizaram a técnica analítica de Sharma e Johns (1971) e o MEF com o *software* ANSYS®. O fluido foi tratado pela equação da onda e incorporado na casca cilíndrica por meio de uma massa adicional de fluido. O estudo negligencia os efeitos do *sloshing* e da pressão hidrostática. Os autores analisaram as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura, tanto desacoplada quanto acoplada fluido-estrutura. Também avaliaram os modos dominantes na vibração acoplada e a influência da massa adicional para diferentes condições de contorno. Continuando seus estudos, França Jr. (2018) expandiu o trabalho anterior para incluir estudos de vibração forçada. Ele investigou a resposta dinâmica resultante de um carregamento harmônico pontual aplicado na casca cilíndrica.

Vários autores têm contribuído com estudos sobre a influência da movimentação da superfície livre na análise dinâmica de cascas cilíndricas. Na maioria dos trabalhos, o efeito das ondas de superfície (*sloshing*) é incorporado ao sistema como uma pressão hidrodinâmica, sendo obtida a partir de um potencial de velocidade que satisfaz a equação de Laplace. Além da pressão hidrodinâmica, a equação de movimento da superfície livre do fluido é inserida juntamente com as equações de equilíbrio da casca, acoplando o sistema casca-fluido interno com o sistema casca-superfície livre.

Chiba, Yamaki e Tani (1984a, 1984b) analisaram as vibrações livres de uma casca cilíndrica engastada-livre, parcialmente preenchida por um fluido incompressível e não viscoso. Foi utilizada a teoria de Donnell e as equações de movimento foram obtidas através do método de Galerkin. O fluido é descrito por meio de um potencial de velocidade e são considerados os efeitos da superfície livre do fluido. Os resultados numéricos indicam que os modos de vibração variam com o número de ondas circunferenciais. Já a consideração de tensões circunferenciais iniciais e da superfície livre do fluido aumentam as frequências naturais. Os autores ampliaram seus estudos e realizaram estudos experimentais com o objetivo de validar os resultados obtidos de forma analítica, indicando uma boa convergência entre os modos de vibração e as frequências naturais obtidos por ambos os estudos (Chiba; Yamaki; Tani, 1985).

Através de procedimentos experimentais, Chiba (1993a) obteve resultados semelhantes aos trabalhos anteriores, enfatizando que a maioria das análises indicam comportamento não linear da casca do tipo *softening*. O autor salienta que o nível de fluido influencia esta perda de rigidez significativamente. Tanques cilíndricos parcialmente preenchidos acentuam o comportamento *softening* em comparação com estruturas totalmente preenchidas por fluido interno. Continuando seus estudos, Chiba (1993b) avaliou de forma experimental as vibrações não lineares de um tanque cilíndrico parcialmente, ou completamente, preenchido por fluido, considerando a influência da superfície livre. O autor enfatiza que os efeitos não lineares são acentuados com a presença de fluido em comparação com tanques vazios e que para vibrações de grandes amplitudes foram obtidas respostas sub-harmônicas, super-harmônicas e combinadas. A superfície livre do fluido altera as respostas dos deslocamentos do tanque e que os efeitos provocados pelos modos de vibração de alta ordem são reduzidos com o aumento do diâmetro da casca cilíndrica.

Gupta (1995) estudou os efeitos da superfície livre do fluido interno nas vibrações de cascas cilíndricas apoiadas em solo flexível. Foi adotada a teoria de Flügge para cascas e o fluido é descrito pelo potencial de velocidade, definindo a pressão gerada pelas ondas da superfície. A autor afirmou que o *sloshing* altera o comportamento dinâmico e cita ainda a flexibilidade das paredes da casca e o nível de fluido interno como fatores importantes na análise das vibrações do problema de interação fluido-estrutura.

Lakis e Neagu (1997) apresentaram um modelo analítico para a análise dinâmica de cascas cilíndricas parcialmente preenchidas por um líquido, utilizando uma combinação da teoria de Sanders e o MEF. Foi analisada a influência da superfície livre do fluido presente na casca cilíndrica, observando as vibrações causadas pela interação fluido-estrutura. Os resultados obtidos são coerentes com valores experimentais encontrados na literatura e enfatizam que ocorre uma alteração considerável nos modos de vibração ao se considerar diferentes níveis de fluido, de geometrias da casca e da superfície livre do fluido interno.

Os estudos sobre a influência do fluido interno e sua superfície livre nas vibrações de tanques cilíndricos foram ampliados por Amabili, Païdoussis e Lakis (1998), onde os autores consideraram a estrutura totalmente flexível, com o fundo apoiado sobre uma fundação elástica de Winkler e com anéis enrijecedores situados nas paredes laterais da casca. Foram obtidos os modos de vibração da casca (*bulging mode*) e da superfície livre do fluido (*sloshing mode*) e, segundo os autores, a influência da flexibilidade do tanque nos modos de vibração *sloshing* depende da geometria e das propriedades do material da estrutura. Para tanques cilíndricos muito flexíveis, ocorreu uma alteração significativa nos modos de vibração. As maiores diferenças nas frequências associadas à superfície livre do fluido foram observadas para níveis baixos de fluido devido a flexibilidade da placa do fundo da casca.

Outro estudo sobre a influência de anéis enrijecedores em cascas cilíndricas preenchidas por fluido, considerando os efeitos de *sloshing*, foi feito por Kim, Lee e Ko (2004). Os autores utilizaram a teoria de Love para cascas esbeltas e os campos de deslocamentos foram descritos a partir das funções de viga. O efeito fluido é incorporado de forma semelhante aos trabalhos já citados, ou seja, a partir de um potencial de velocidade. O modelo analítico foi validado através de uma modelagem numérica feita em MEF, considerando as condições de contorno simplesmente apoiada e engastada-livre. Os resultados mostram a influência do enrijecimento das paredes e dos diferentes níveis de fluido nos modos de vibração da casca cilíndrica.

Outro trabalho semelhante, foi feito por Mendes, Pedroso e Ribeiro (2014), onde os autores avaliaram as vibrações de uma casca cilíndrica com anéis enrijecedores e parcialmente preenchida por um fluido, comparando os resultados com o trabalho de Kim, Lee e Ko (2004). Também foi feita uma análise numérica via MEF, a partir do *software* ANSYS®, onde as frequências naturais e modos de vibração apresentaram boa concordância entre os modelos analítico e numérico. Continuando seus estudos, Mendes, Pedroso e Ribeiro (2015) avaliaram as vibrações acopladas de cascas cilíndricas para diferentes níveis de fluido e posições de anéis enrijecedores.

A influência do *sloshing* em cascas cilíndricas também foi avaliada no estudo desenvolvido por Chiba e Magata (2017). Os autores avaliaram a influência do movimento de superfície livre do fluido (*sloshing*) no comportamento dinâmico de estruturas espaciais flexíveis. As equações de movimento são obtidas a partir do método de Rayleigh-Ritz, considerando o corpo principal da nave espacial como um tanque rígido acoplado a duas vigas flexíveis. Os resultados indicaram que as características das vibrações do sistema acoplado dependem do ângulo de contato estático do líquido. Este trabalho também mostrou a versatilidade de aplicações das cascas cilíndricas.

Agresta *et al.* (2014) realizaram um estudo experimental sobre a movimentação da superfície livre do fluido no interior de tanques cilíndricos, considerando o efeito da geometria do fundo. Os autores avaliaram a influência da forma do fundo (plano, inclinado e circular) e do nível de fluido interno nas frequências naturais de *sloshing*, além de analisar suas propriedades de amortecimento. Os resultados são úteis para otimizar as características geométricas dessas estruturas e obter melhor desempenho no processo de dissipação de energia do sistema.

A maioria dos trabalhos que abordam a interação fluido-estrutura tratam somente da influência do fluido interno nas oscilações da casca cilíndrica. Entretanto, caso seja avaliada uma pressão hidrodinâmica proveniente de um fluido externo, é importante que no cálculo das frequências naturais este fluido seja levado em conta, promovendo uma análise mais realista do problema proposto.

Dos trabalhos citados anteriormente, apenas Gonçalves e Batista (1987) abordam a influência de uma casca parcialmente submersa. A inserção do efeito fluido externo é feita de forma análoga ao caso do fluido interno, ou seja, a partir de um potencial de velocidade.

Outra análise fluido-estrutura que considera a presença tanto de um fluido interno quanto de um fluido externo é tratada por Mikami e Yoshimura (1992). Os autores analisaram as vibrações livres de cascas com diferentes tipos de revolução (cascas cilíndricas, esféricas e hiperbólica). A formulação analítica é baseada em uma teoria de casca que considera os efeitos transversais de deformação, cisalhamento e inércia rotacional, sendo as equações de movimento obtidas pelo método de Rayleigh-Ritz. Os resultados são confrontados com um modelo numérico feito por meio do MEF, demonstrando boa concordância.

Harari, Sandman e Zaldonis (1994) realizaram um estudo analítico e experimental sobre as vibrações e radiação de pressões de uma casca cilíndrica submersa, com enrijecedores e com as duas extremidades fechadas por placas. O fluido em torno da casca é definido por uma região que tende ao infinito e não possui a influência da superfície livre. Foi utilizada a teoria de Sanders-Koiter para obter os campos de deformação da casca. Já os campos de deslocamentos da casca foram expandidos por séries de Fourier. A casca é excitada por uma força aplicada nas direções axial, circunferencial e radial, para obter as respostas das frequências, indicando que as placas nas extremidades exercem uma importante influência nas vibrações e que estas não podem ser negligenciadas.

A partir de uma análise analítica e numérica, Bérot e Peseux (1998) investigaram o comportamento vibroacústico de cascas cilíndricas e cascas esféricas submersas em fluido, considerado como não viscoso e contido em uma região ilimitada. O fluido atende as condições impostas pela equação de Laplace e satisfaz a condição de radiação no infinito (Sommerfeld, 1949). Foram adotadas as teorias de cascas de Flügge e Donnell para construir os modelos analíticos, além do desenvolvimento de um modelo numérico via MEF. Os autores obtiveram resultados convergentes entre ambos os modelos. Segundo eles, são necessários poucos termos na expansão do cálculo da pressão de radiação, concluindo que os modos de vibração na direção circunferencial e longitudinal exercem grande influência nos resultados.

Na mesma linha de pesquisa, Kwak (2010) analisou as vibrações livres de uma casca cilíndrica em contato com fluido externo em uma região ilimitada. O procedimento adotado é semelhante aos trabalhos anteriores, onde o fluido é descrito por um potencial de velocidade e adicionado como uma massa virtual nas equações de equilíbrio. Estas equações foram obtidas a partir da aplicação do método de Rayleigh-Ritz ao utilizar a teoria de cascas de Donnell. A condição de contorno avaliada é para uma casca com diafragma de

cisalhamento em ambas as extremidades, visto que a casca está na posição horizontal. O autor definiu um fator incremental de massa virtual que permite calcular as frequências naturais da casca cilíndrica vazia em contato com fluido externo.

Bae, Kwak e Koo (2012) investigaram as vibrações livres de uma casca cilíndrica parcialmente submersa em um fluido e sujeitas a várias condições de contorno. O objetivo consiste em observar teoricamente e experimentalmente os efeitos de uma parede externa e do fundo no comportamento dinâmico do conjunto estrutural. Foram empregados o método de Rayleigh-Ritz e a teoria de cascas de Sanders para obter as equações de equilíbrio da casca. O fluido foi descrito a partir de um potencial de velocidade. Os autores concluíram que a influência da parede externa e do fundo são pequenas e podem ser desconsideradas quando seus limites não estiverem próximos das vibrações da casca.

Mendes (2013) estudou a interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco e sujeitas a ações sísmicas. Foi utilizada a teoria de Love para descrever os campos de deformações e mudanças de curvatura da casca cilíndrica, e os campos de deslocamentos são definidos a partir das funções de viga. As geometrias das barragens em arco são obtidas a partir de um cilindro seccionado por um plano paralelo ao seu eixo, avaliando os casos de barragens em arco cilíndrico e com simples curvatura, e para arcos com dupla curvatura. Os resultados analíticos são validados através de um modelo numérico desenvolvido no *software* comercial ANSYS®, indicando concordância entre ambos os modelos.

Os trabalhos citados anteriormente sobre fluido externo não consideram a influência da superfície livre. Nie *et al.* (2021) investigaram as vibrações livres de cascas cilíndricas submersas e na posição horizontal, levando em consideração os efeitos da superfície livre. Os campos de deslocamentos da casca são definidos a partir das funções de vigas, sendo o fluido descrito por um potencial de velocidade. As equações de movimento foram obtidas pelo princípio de variação de energia. Os resultados obtidos foram validados por meio de um modelo numérico e os autores concluíram que a superfície livre provoca uma perda de simetria do sistema, quando comparado com o domínio infinito, onde os modos circunferenciais não são funções trigonométricas mutuamente desacopladas. Além disso, ao aproximar da superfície livre, os valores das frequências aumentam. Com o incremento da profundidade, as vibrações livres tendem rapidamente ao caso de domínio infinito.

Observa-se que a análise simultânea do fluido interno e externo, incluindo o efeito do *sloshing*, é pouco explorada na literatura. Diante disso, propõe-se avaliar como o fluido interno, incluído sua superfície livre, e o fluido externo influenciam as vibrações do sistema. A inclusão do fluido externo é justificada pela expectativa de resultados mais realistas, considerando a ação das ondas oceânicas nas paredes externas da casca cilíndrica, incorporando uma massa adicional ao sistema que afeta suas vibrações.

2.4. FORÇAS PROVOCADAS POR ONDAS OCEÂNICAS

Em relação ao estudo de estruturas *offshore*, existem diversos trabalhos que abordam a ação de ondas oceânicas em estruturas. Um dos trabalhos pioneiros nesta área foi realizado por MacCamy e Fuchs (1954) onde os autores apresentaram a teoria da difração aplicada em pilares de estruturas situadas no mar. Foi demonstrado o cálculo para descrever as forças oriundas de ondas marítimas em estruturas cilíndricas, sendo explicado que o problema de difração de ondas planas pode ser expandido para solucionar ondas eletromagnéticas e acústicas. A formulação é baseada em expansões de funções hiperbólicas e funções de Bessel.

Pedroso (1982a) apresentou toda a formulação matemática necessária para a análise da interação fluido-estrutura em estruturas no mar. Foi discutido de forma didática, as forças induzidas por ondas e a importância dos parâmetros envolvidos no problema, além da avaliação do comportamento dinâmico de estruturas *offshore*. Ainda neste texto, o autor baseando-se na teoria do espalhamento de ondas acústicas e eletromagnéticas, e no trabalho de MacCamy e Fuchs (1954), incorporou aspectos inovadores, como a forma de representação em diagramas polares das pressões em torno do corpo devido a difração causadas pelo espalhamento das ondas oceânicas, ao se difratarem numa estrutura cilíndrica (Pedroso 1982b).

Le Méhauté (1976) e Chakrabarti (1987) são referências fundamentais para o estudo da pressão hidrodinâmica e de ondas oceânicas. Estes livros fornecem toda a formulação matemática para a inclusão desses efeitos em estruturas *offshore*, apresentando as teorias de ondas e as análises estática e dinâmica além dos conceitos hidrodinâmicos necessários para uma boa compreensão dos fenômenos envolvidos.

Blevins (2001) apresentou em “*Flow induced vibrations*” as demonstrações das características de escoamentos, vibrações induzidas por vórtices e as teorias de ondas,

permitindo uma análise criteriosa do comportamento dinâmico de estruturas submetidas a estas ações. Além disso, foram disponibilizados vários ábacos experimentais que são necessários ao cálculo das pressões.

Haritos (2007) elaborou uma revisão bibliográfica, que permite a orientação para profissionais iniciantes em engenharia *offshore*, com a exposição das teorias de ondas e a interação fluido-estrutura além da previsão de valores estatísticos. Foi apresentado um resumo do conjunto de equações que permitem compreender os parâmetros necessários para calcular os efeitos das ondas em estruturas sujeitas à ação das ondas oceânicas.

Sarpkaya (2010) é outra importante referência bibliográfica para o estudo das forças aplicadas em estruturas *offshore* com a apresentação das teorias de ondas, ábacos experimentais necessários para a obtenção de coeficientes das forças de inércia e arraste além da análise do comportamento estático e dinâmico destas estruturas.

Bomtempo e Pedroso (2016) investigaram o comportamento dinâmico de plataformas *offshore* fixas e o impacto do deck de produção nas propriedades dinâmicas da estrutura. Eles analisaram as vibrações livres de um modelo simplificado de plataforma fixa, que consiste em uma haste fixada no leito do oceano e um deck de serviço na outra extremidade representado por uma massa concentrada relevante para análises globais. O estudo incluiu comparações analítico-numéricas usando equações diferenciais e modelos numéricos.

Montes, Silva e Pedroso (2024b) estudaram uma estrutura *offshore* cilíndrica (*monopile*) exposta à ação das ondas oceânicas com base na teoria linear de Airy para ondas de pequenas amplitudes. Com base na formulação matemática desta teoria, foram analisadas as forças e momentos gerados por este tipo de carregamento, de extrema importância para o desenvolvimento de bons projetos estruturais na área *offshore*.

Os trabalhos existentes em literatura sobre ação de ondas oceânicas tratam da formulação matemática aplicada em estruturas *offshore*, avaliando a sua influência nos deslocamentos e esforços solicitantes. Em poucas referências é abordado sobre sua utilização na perspectiva da dinâmica não linear em cascas cilíndricas por meio da análise da vibração forçada com a obtenção de respostas no tempo e planos fase. A abordagem destas teorias de ondas em conjunto com teorias clássicas de cascas cilíndricas possui pouca atenção dos pesquisadores e, diante desta lacuna, é que se justifica uma das propostas deste trabalho. A maioria dos trabalhos envolvendo cascas cilíndricas, aplicam cargas harmônicas descritas por meio de

uma pressão uniforme ou uma carga pontual. Portanto, a aplicação de carregamentos descritos por meio da teoria de difração e de Airy, e utilizando a teoria não linear de Sanders-Koiter, possui uma importante contribuição para a construção do conhecimento nesta área. Somado a estes fatores, pode-se citar a utilização dos polinômios de Chebyshev como ferramenta para estas análises, o que traduz em uma proposta inovadora que irá contribuir com ações reais do nosso cotidiano, por meio de um estudo de análise não linear das vibrações forçadas do problema acoplado casca cilíndrica-fluido.

2.5. DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DO MODELO ESTRUTURAL

Neste tópico são apresentadas algumas soluções de construções utilizadas no campo da indústria *offshore* e energética, que empregam estruturas semelhantes a cascas cilíndricas, o foco deste estudo. A partir dessas informações, busca-se definir uma geometria que possa representar casos reais, transcendendo o âmbito acadêmico.

No campo energético, Harte, Graffmann e Krätzig (2013) apresentam um estudo sobre otimização de chaminés solares de corrente ascendente através da análise das respostas não lineares. Estas estruturas são compostas por motores de plantas de energia solar de corrente ascendente, juntamente com torres de altura extrema e com paredes de casca bastante finas, semelhantes às chaminés altas compostas por múltiplos dutos de gases de combustão. Atualmente, a altura destas estruturas atinge até 500 m conforme apresentado na Figura 2.1. As principais solicitações estão relacionadas a cargas de vento naturais extremas e a ações térmicas do fluxo interno de ar quente. Os autores estudam a utilização de anéis externos com o intuito de promover um enrijecimento circunferencial e atenuar a abertura de fissuras.

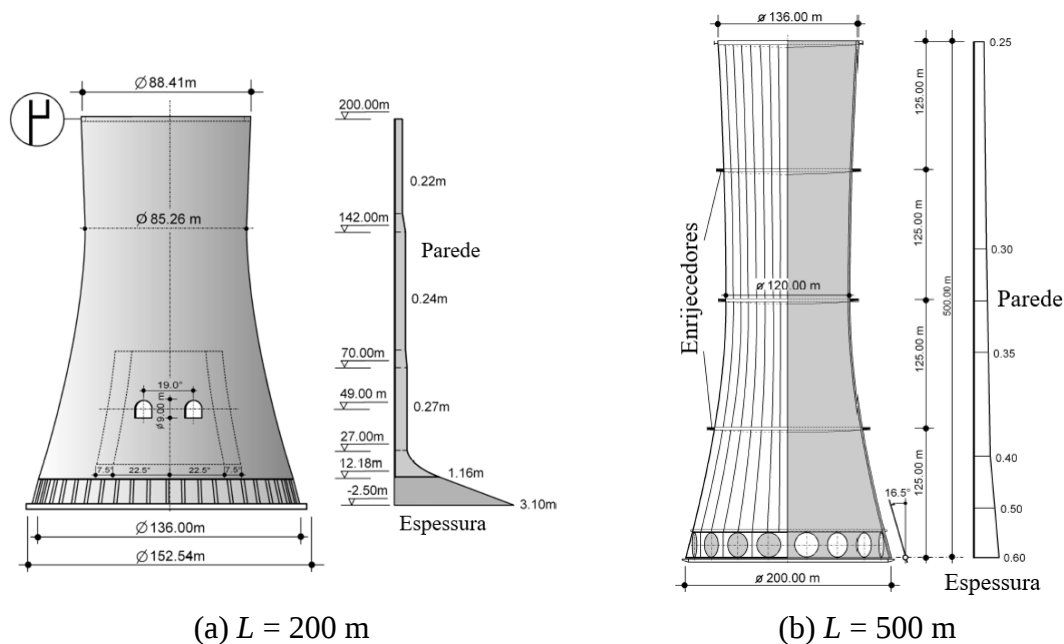


Figura 2.1 – Diferentes geometrias para chaminés solares de corrente ascendente (Harte, Graffmann e Krätzig, 2013) – “Adaptada pelo autor”.

É importante salientar que estas chaminés solares, por exemplo, podem estar situadas em regiões de enseada, conforme apresentado na Figura 1.1, e podem estar sujeitas à ação de ondas oceânicas. Nesse contexto, a ação de ventos e variações térmicas são cargas significativas na análise destas estruturas.

A pesquisa conduzida por Amaechi *et al.* (2022) oferece uma revisão bibliográfica abrangente das diferentes estruturas de exploração petrolífera em alto mar, analisando os princípios subjacentes a todos os tipos de estruturas *offshore* (fixas e flutuantes). Além disso, o estudo explora as aplicações desses conceitos na exploração e produção de petróleo. O autor também abordou uma variedade de parâmetros de projeto para plataformas *offshore* avançadas, identificando os tipos mais adequados de estrutura para várias profundidades de água, especialmente para operações de longo prazo.

Um exemplo de construção *offshore* é o CONDEEP (*Concrete Deep Water Structure*), que se refere a estruturas de concreto em águas profundas, sendo sustentadas pela gravidade e construídas com concreto armado. A plataforma é apoiada por eixos cilíndricos vazados (*shafts*), permitindo a instalação de equipamentos de produção de petróleo e transporte de fluidos. A base do projeto incorpora espaços de vácuo (*caisson*) para proporcionar flutuabilidade natural à estrutura, possibilitando o transporte até o local de atividades do campo. Após o posicionamento, os espaços vazios são inundados e os módulos superiores são instalados. Posteriormente, esses espaços vazios podem ser preenchidos com lastro

permanente de minério de ferro ou utilizados como compartimentos de armazenamento de petróleo bruto. Devido ao considerável peso das estruturas de concreto, estacas de fundação não são necessárias, justificando a denominação “estrutura baseada em gravidade” (*Concrete Gravity-Based Structure*) (Amaechi *et al.*, 2022). A Figura 2.2 ilustra esta estrutura.

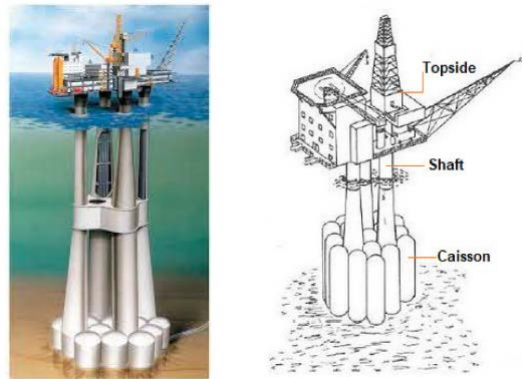


Figura 2.2 – Base da estrutura de concreto por gravidade (Amaechi *et al.*, 2022).

A Figura 2.3 ilustra vários conceitos de plataformas *offshore*, instaladas em diferentes profundidades de água, variando entre 82,5 m e 302,9 m.

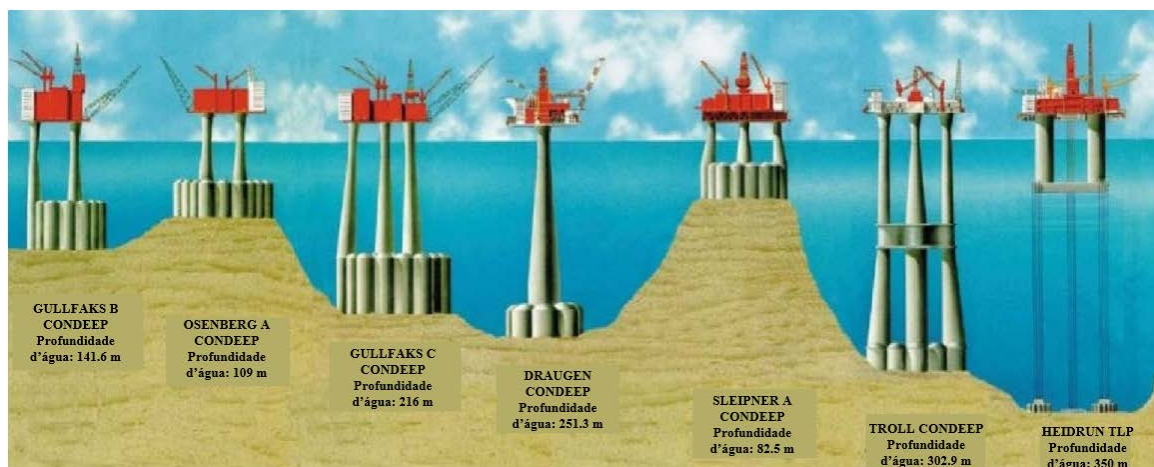


Figura 2.3 – Diferentes plataformas por gravidade de concreto e suas respectivas profundidades d'água (Dr.techn, OlavOlsen A.S *apud* Amaechi *et al.*, 2022) – “Adaptada pelo autor”.

Outro exemplo do uso de cascas cilíndricas em estruturas *offshore* são os aerogeradores, conforme exemplificado anteriormente na Figura 1.4b. Para compreender melhor as dimensões dessas estruturas, a Figura 2.4 apresenta a configuração geométrica de um aerogerador, destacando o diâmetro e a altura da torre. Além disso, a Tabela 2.1 enumera alguns parques eólicos juntamente com as dimensões correspondentes dos aerogeradores.

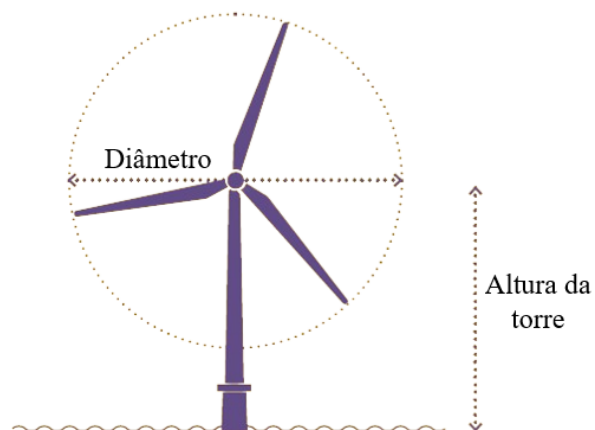


Figura 2.4 –Configuração geométrica de um aerogerador (Ørsted, 2018) – “Adaptada pelo autor”.
 Fonte: Disponível em: horns-rev-2_uk_2018.ashx. Acesso em 24 de maio de 2024.

Tabela 2.1 – Lista de alguns parques eólicos com as respectivas dimensões dos aerogeradores (Amaechi *et al.*, 2022) – “Adaptada pelo autor”.

Nome	Ano de instalação	Diâmetro (m)	Altura da torre (m)
Hornsea 2	2002	167	190
Burbo Bank Extension	2017	164	113
Westermose Rough	2014	154	102
Anholt	2012	120	82
Horns Rev 2	2009	93	68
Nysted	2003	82,4	69
Middelgrund	2000	76	64
Vindeby	1991	35	35

Considerando a geometria dos exemplos das chaminés solares (Figura 2.1) , das plataformas petrolíferas (Figura 2.3) e dos aerogeradores (Tabela 2.1), a geometria adotada para a casca cilíndrica deste trabalho foi definida por: comprimento $L = 120$ m, raio $R = 40$ m e espessura $h = 0,25$ m, o que está coerente com obras previamente executadas e em funcionamento. Esta casca cilíndrica é classificada como longa e esbelta, conforme detalhado no tópico 3.8.

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta a formulação matemática empregada para derivar as equações de equilíbrio do problema de uma casca cilíndrica engastada em uma extremidade e livre na outra. Os campos de deformações e de mudança de curvatura da superfície média da casca são descritos por meio da teoria não linear de Sanders-Koiter. As equações não lineares de movimento são obtidas através do método de Rayleigh-Ritz juntamente com o princípio de Hamilton. Ainda, apresenta-se a formulação matemática relacionada ao fluido interno e externo, levando em consideração os efeitos provenientes das ondas de superfície livre (*sloshing*) apenas para o fluido interno. Os fluidos interno e externo são descritos a partir de um potencial de velocidade, incorporando as massas adicionais dos fluidos interno e externo às equações de equilíbrio. Em relação ao carregamento externo, apresenta-se, neste capítulo, a dedução e a inclusão da ação de ondas oceânicas seguindo a teoria de Airy e da difração.

3.1. HIPÓTESES GERAIS ADOTADAS NAS FORMULAÇÕES

O trabalho proposto apresenta as seguintes hipóteses básicas:

- O concreto da casca cilíndrica é considerado como um material sólido elástico, linear, isotrópico e homogêneo;
- O fluido é tido como ideal, sendo considerado como quiescente, invíscido e incompressível. Seu movimento é irrotacional e considera apenas vibrações em torno de um ponto de equilíbrio (fluido acústico);
- A formulação numérica adotada na análise acoplada fluido-estrutura baseia-se no uso do deslocamento para representar o comportamento da estrutura e da pressão para descrever o comportamento do fluido (U-P);
- A teoria de ondas considerada é de Airy para pequenas inclinações da onda;
- O movimento de superfície livre (*sloshing*) foi considerado apenas para o fluido interno da casca cilíndrica, não sendo levado em conta para o fluido externo. Esta simplificação foi adotada para reduzir o esforço computacional necessário para o processamento do modelo numérico;

- O fluido externo é incorporado como uma massa adicional, duplicando a pressão hidrodinâmica para uma região externa em torno da casca cilíndrica, delimitando a fronteira infinita do fluido oceânico em uma distância igual ao raio da estrutura. Desta forma, o fluido externo é considerado em repouso, e não é discretizado no modelo numérico. Esta abordagem evita o problema de reflexão de ondas na fronteira longínqua, e atende a hipótese do fluido incompressível com massa adicional.

3.2. FORMULAÇÃO DA CASCA CILÍNDRICA

Considera-se uma casca cilíndrica, sem imperfeições geométricas iniciais, definida pelos seguintes parâmetros geométricos: comprimento L , raio R e espessura h , conforme ilustrado na Figura 3.1. O material da casca é definido como isotrópico, homogêneo e elástico com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ_s . Os campos de deslocamento da superfície média da casca cilíndrica são dados nas direções: axial $u(x, \theta, t)$, circunferencial $v(x, \theta, t)$ e radial $w(x, \theta, t)$, sendo dependentes das coordenadas cilíndricas x e θ , e do tempo t .

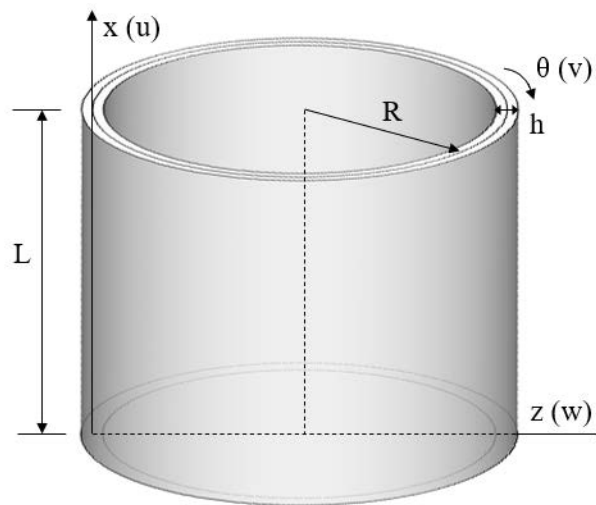


Figura 3.1 – Geometria da casca cilíndrica com seu sistema de coordenadas e respectivos campos de deslocamentos.

Os campos de deformação e mudanças de curvatura da superfície média da casca cilíndrica segue a teoria não linear de Sanders-Koiter que, por sua vez, é baseada na teoria de Von Kármán, possuindo as seguintes hipóteses (Amabili, 2008):

- A casca cilíndrica é considerada esbelta e isso significa que sua espessura deve ser significativamente menor que seu comprimento e raio médio ($h \ll L$ e $h \ll R$). Esta condição é assegurada em aplicações práticas quando $h/R \leq 1/20$;
- Os deslocamentos transversais w possuem a mesma magnitude da espessura h ;
- Em cada ponto da superfície média da casca, as rotações são significativamente pequenas, ou seja, $|w_{,x}| \ll 1$ e $|w_{,\theta}/R| \ll 1$;
- As componentes de deformação são pequenas, permitindo a aplicação da teoria da elasticidade linear;
- As hipóteses de Kirchhoff são válidas, ou seja, os esforços na direção normal à superfície média da casca ($\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}_{xz}$ e $\bar{\tau}_{\theta z}$) podem ser desprezados. Além disso, as deformações variam de forma linear ao longo da espessura da casca cilíndrica.

Ainda, ressalta-se que os deslocamentos axiais e circunferenciais são infinitesimais, o que leva a consideração, nas relações de deslocamento-deformação, apenas dos termos não lineares dependentes de w , negligenciando-se os demais. Os campos de deformação e as mudanças de curvatura propostos pela teoria não linear de Sanders-Koiter são adequadas para deformações finitas com pequenas tensões e rotações moderadamente pequenas. Considerando a casca cilíndrica em estudo e os resultados esperados para as variáveis a serem incorporadas, esta teoria se enquadra para o desenvolvimento do modelo analítico. Por se tratar de uma estrutura de grandes dimensões, e pela alta intensidade dos carregamentos a serem aplicados, é esperado a obtenção de grandes deslocamentos, o que justifica a escolha por esta teoria.

Portanto, por meio da teoria de Sanders-Koiter, em um ponto da superfície média da casca, as deformações específicas (ε_x , ε_θ e $\gamma_{x\theta}$) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right)^2 \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} - \frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{R \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\
 \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} - \frac{v}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

e as mudanças de curvatura (κ_x , κ_θ e $\kappa_{x\theta}$) da superfície média são dadas por:

$$\begin{aligned}
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\kappa_\theta &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
\kappa_{x\theta} &= -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{2R} \left(3 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Para qualquer ponto da casca, localizado a uma distância z da superfície média $-h/2 \leq z \leq h/2$, os campos de deformação são descritos por:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\kappa_x \\
\bar{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + z\kappa_\theta \\
\bar{\gamma}_{x\theta} &= \gamma_{x\theta} + z\kappa_{x\theta}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

em que $\bar{\varepsilon}_x$ e $\bar{\varepsilon}_\theta$ são os campos de deformação de qualquer ponto da casca nas direções axial e circunferencial, respectivamente, e $\bar{\gamma}_{x\theta}$ é a distorção angular em um ponto qualquer da casca.

3.2.1. Resultantes dos esforços de membrana e de flexão

Considerando os campos de deformações indicados na equação (3.3), é possível calcular as tensões que surgem na seção transversal da casca cilíndrica utilizando a lei de Hooke, definida a partir de um material elástico linear com módulo de elasticidade E , e coeficiente de Poisson ν . As tensões resultantes são representadas por $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_\theta$ e $\bar{\tau}_{x\theta}$ são definidas por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

As resultantes dos esforços internos de membrana e dos momentos de flexão e de torção são calculados a partir das seguintes integrais:

$$\{ N_x, N_\theta, N_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta} \} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{x\theta}, z\bar{\sigma}_x, z\bar{\sigma}_\theta, z\bar{\tau}_{x\theta} \} dz \tag{3.5}$$

onde N_x , N_θ , $N_{x\theta}$ são os esforços de membrana; M_x , M_θ , $M_{x\theta}$ são os momentos de flexão e de torção, respectivamente; e, $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{x\theta}$ são as tensões axial, circunferencial e cisalhante, respectivamente.

A Figura 3.2 representa um elemento infinitesimal de casca cilíndrica onde é indicada a convenção de sinais adotada na definição dos esforços de membrana e de momento da casca.

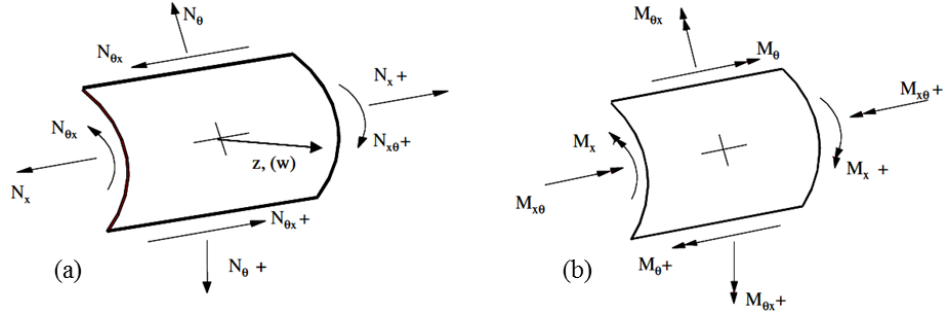


Figura 3.2 – Resultantes dos esforços de membrana (a) e de momentos (b). Convenção positiva das resultantes (Silva, 2008).

Substituindo as equações (3.1)-(3.4) na equação (3.5), os esforços e os momentos internos podem ser reescritos em função dos campos de deformações e das mudanças de curvatura da superfície média na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

sendo que os coeficientes B_{ij} (rigidez de acoplamento entre deformações-curvaturas da casca), C_{ij} (rigidez de membrana) e D_{ij} (rigidez de flexão), com $i, j = 1, 2, 6$, são expressos por:

$$\begin{aligned} [C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{66}] &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2}, \frac{E}{1-\nu^2}, \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \frac{E}{2(1+\nu^2)} \right] dz \\ [B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{66}] &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2}, \frac{E}{1-\nu^2}, \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \frac{E}{2(1+\nu^2)} \right] z dz \\ [D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}] &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E}{1-\nu^2}, \frac{E}{1-\nu^2}, \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \frac{E}{2(1+\nu^2)} \right] z^2 dz \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.2. Campos de deslocamentos

Para avaliar o comportamento dinâmico de cascas cilíndricas, é necessário adotar uma solução modal para os campos de deslocamentos u , v e w , que, por sua vez, devem satisfazer as condições de contorno e continuidade da casca cilíndrica. Para obter uma boa qualidade da solução para o modelo analítico, é necessária uma definição criteriosa dos campos de deslocamentos.

Neste trabalho, são empregados os polinômios de Chebyshev de primeira ordem T_m para atender as condições de contorno no sentido axial da casca cilíndrica. Estes polinômios podem ser definidos por meio da seguinte identidade trigonométrica (Boyd, 2001):

$$T_m(\cos \theta) = \cos(m\theta) \quad (3.8)$$

Estas relações atendem às seguintes relações de recorrência:

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad (3.9)$$

com $x \in [-1, 1]$. Desta forma, os seis primeiros polinômios de Chebyshev de primeira ordem são dados por:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned} \quad (3.10)$$

Assim, as expansões modais para os campos de deslocamentos da casca cilíndrica são definidas pelas seguintes séries de polinômios de Chebyshev (Kurylov; Amabili, 2011):

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{N_u} \sum_{n=0}^N U_{m,n}(t) T_m^*(x) \cos(n\theta) \\ v(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{N_v} \sum_{n=1}^N V_{m,n}(t) T_m^*(x) \sin(n\theta) \\ w(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{N_w} \sum_{n=0}^N W_{m,n}(t) T_m^*(x) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $T_m^*(x) = T_m(2x/L - 1)$. Essa transformação é necessária uma vez que os polinômios de Chebyshev T_m são definidos no intervalo entre -1 e 1 enquanto $T_m^*(x)$ é definido entre 0 e L . Os termos N_u , N_v e N_w são o número de modos utilizados na expansão modal nas direções axial, circunferencial e radial, respectivamente; m é m-ésima função modal na direção longitudinais e n é o número de ondas circunferenciais. Por fim, os termos $U_{m,n}$, $V_{m,n}$ e $W_{m,n}$ são as amplitudes modais na direções axial, circunferencial e radial, respectivamente.

Neste trabalho, a condição de contorno utilizada para a casca cilíndrica é a engastada-livre. Assim, é necessário que os campos de deslocamento, equação (3.11), atendam às seguintes condições de contorno (Leissa, 1973):

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0, \quad (3.12)$$

$$N_x = N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} = M_x = Q_x + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} = 0 \text{ para } x = L \quad (3.13)$$

Para atender as condições de contorno em (3.12) e (3.13) é necessário fazer uma composição de polinômios de Chebyshev de primeira ordem $T_m^*(x)$. Desta forma, as expansões modais, equação (3.11), são reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{N_u} \sum_{n=0}^N U_{m,n}(t) (T_{m-1}^* + T_m^*) \cos(n\theta) \\ v(x, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{N_v} \sum_{n=1}^N V_{m,n}(t) (T_{m-1}^* + T_m^*) \sin(n\theta) \\ w(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{N_w} \sum_{n=0}^N W_{m,n}(t) \left\{ \frac{1}{4m} [(2m+1)T_{m-1}^* + (2m-1)T_{m+1}^*] + T_m^* \right\} \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ao utilizar o método de Rayleigh-Ritz para obter as equações de equilíbrio do problema, apenas a condição de contorno geométrica em (3.12) é exatamente satisfeita. Já as condições de contorno (3.13) não precisam ser atendidas pela expansão modal (3.14) uma vez que serão satisfeitas minimizando-se a energia do sistema (Kurylov; Amabili, 2011; Paak; Païdoussis; Misra, 2014).

3.2.3. Funcionais de energia da casca cilíndrica

Para obter as equações de equilíbrio do problema fluido-estrutura, é necessário definir os funcionais de energia do sistema. Para isso, a energia interna de deformação da casca cilíndrica, considerando um material isotrópico, homogêneo e linear, é dada por (Brush; Almroth, 1975):

$$U_c = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left(2\bar{\varepsilon}_x^2 + 2\bar{\varepsilon}_\theta^2 + \bar{\gamma}_{x\theta}^2 + 4\nu\bar{\varepsilon}_x\bar{\varepsilon}_\theta - \nu\bar{\gamma}_{x\theta}^2 \right) (1+z/R) dz R d\theta dx \quad (3.15)$$

Em relação à energia cinética para a casca cilíndrica, a velocidade no campo de deslocamento nas direções u , v e w é considerada como (Kraus, 1967):

$$T_c = \frac{\rho_s h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R d\theta dx \quad (3.16)$$

O trabalho realizado pela carga compressiva do peso próprio é dado por (Lim *et al.*, 2003):

$$W_p = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_s g h (L-x) \left[K_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] R d\theta dx \quad (3.17)$$

onde a constante K_p pode assumir valores iguais a 1 ou 0, possibilitando considerar ou não o encurtamento do deslocamento circunferencial.

Observa-se na equação (3.17) a contribuição de duas parcelas no processo de flambagem da casca cilíndrica: o encurtamento devido ao deslocamento circunferencial $(\partial v / \partial x)^2$ e a parcela devido ao encurtamento do deslocamento radial $(\partial w / \partial x)^2$. Segundo Lim *et al.* (2003), a parcela do deslocamento circunferencial $(\partial v / \partial x)^2$ pode ser desconsiderada apenas para cascas cilíndricas de comprimento curto a moderado.

O trabalho do carregamento lateral é composto pela soma entre a contribuição do fluido interno e externo, as forças provenientes das ondas oceânicas e do peso próprio da casca cilíndrica:

$$W_E = W_{Hi} + W_{He} + W_w + W_p \quad (3.18)$$

onde W_{Hi} e W_{He} são os trabalhos realizados pelo fluido interno e externo, respectivamente, que serão definidos nas equações (3.40) e (3.41); W_w é o trabalho das ondas oceânicas aplicadas nas paredes externas da casca cilíndrica, que será definido na equação (3.87).

O trabalho das forças de dissipação é obtido por (Popov; Thompson; Mcrobie, 1998):

$$R_D = \frac{\beta_1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R d\theta dx + \frac{\beta_2}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\nabla^2 \dot{w})^2 R d\theta dx \quad (3.19)$$

onde o primeiro termo corresponde ao amortecimento viscoso decorrente da resistência do meio enquanto o segundo termo designa o amortecimento viscoelástico do material da casca. Os termos β_1 e β_2 são os coeficientes de amortecimentos expressos por:

$$\beta_1 = 2\eta_1 \rho_s h \omega_N \quad \beta_2 = \eta_2 \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.20)$$

em que η_1 e η_2 correspondem aos coeficientes de amortecimento viscoso e do material, respectivamente, e ω_N é a menor frequência natural da casca cilíndrica.

3.3. FORMULAÇÃO DOS FLUIDOS INTERNO E EXTERNO

Neste tópico são apresentadas as equações necessárias para incorporar a influência dos fluidos interno e externo no problema de interação fluido-estrutura. O fluido é considerado incompressível e não viscoso, e seu movimento é tido como irrotacional. Através desta simplificação, permite-se descrever o movimento do fluido por um potencial de velocidade $\phi(r, \theta, x, t)$, que deve satisfazer a equação de Laplace (Le Méhauté, 1976; Ziegler, 1995):

$$\phi_{,rr} + \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} + \phi_{,xx} = 0 \quad (3.21)$$

A partir da equação linearizada de Bernoulli (Le Méhauté, 1976; Ziegler, 1995), o fluido aplica uma pressão hidrodinâmica nas paredes da casca ($r=R$) em função de um potencial de velocidade $\phi(r, \theta, x, t)$:

$$p_H = -\rho_f \dot{\phi} \Big|_{r=R} \quad (3.22)$$

em que ρ_f é a densidade do fluido.

Usando o princípio da superposição de efeitos, o potencial de velocidade do fluido pode ser representado da seguinte forma (Gonçalves; Batista, 1988; Amabili; Païdoussis; Lakis, 1998; Kim; Lee; Ko, 2004):

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(s)} \quad (3.23)$$

onde $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$ descrevem os potenciais de velocidade dos fluidos interno e externo, respectivamente, considerando as paredes da casca cilíndrica flexíveis e sem os efeitos da

superfície livre do fluido interno; e, $\phi^{(S)}$ corresponde ao potencial de velocidade do fluido interno em contato com uma casca cilíndrica de paredes rígidas, considerando o movimento de superfície livre do fluido interno.

Os efeitos da superposição do potencial de velocidade, equação (3.23), correspondem à interação do fluido externo e interno, além do movimento livre da superfície do fluido interno, com as paredes da casca, como ilustra a Figura 3.3. As alturas dos níveis de fluido interno e externo da casca cilíndrica são dadas por H_i e H_e , respectivamente.

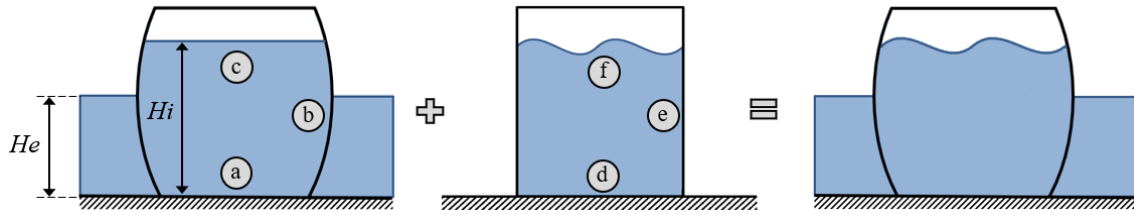


Figura 3.3 – Esquema da superposição dos efeitos para o potencial de velocidade do fluido.

As letras mostradas na Figura 3.3 representam as condições de contorno entre o fluido e a estrutura. Para a primeira situação, em que as paredes da estrutura são flexíveis e não há a consideração do efeito da superfície livre do fluido interno, as condições de contorno impostas ao fluido são detalhadas a seguir (Silva; Gonçalves; Del Prado, 2011; Paak; Païdoussis; Misra, 2014; Kim; Lee; Ko, 2004; Bae; Kwak; Koo, 2012):

- (a) Considera-se que a casca cilíndrica possui um fundo rígido ($x = 0$), e a velocidade na direção vertical é nula, ou seja:

$$\begin{aligned}\phi_{,x}^{(1)}(x,r,\theta,t)\Big|_{x=0} &= 0 \\ \phi_{,x}^{(2)}(x,r,\theta,t)\Big|_{x=0} &= 0\end{aligned}\tag{3.24}$$

- (b) Além disso, é necessário atender a condição de impenetrabilidade, definida pela igualdade entre a velocidade da parede da casca cilíndrica e a velocidade radial do fluido:

$$\begin{aligned}\phi_{,r}^{(1)}(x,r,\theta,t)\Big|_{r=R} &= \dot{w} \\ \phi_{,r}^{(2)}(x,r,\theta,t)\Big|_{r=R} &= \dot{w}\end{aligned}\tag{3.25}$$

(c) Na superfície livre do fluido ($x = H_i$ e $x = H_e$), a pressão hidrodinâmica é nula, ou seja:

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(x, r, \theta, t) \Big|_{x=H_i} &= 0 \\ \phi^{(2)}(x, r, \theta, t) \Big|_{x=H_e} &= 0\end{aligned}\tag{3.26}$$

Em relação ao efeito de *sloshing* do fluido interno, situação em que a casca cilíndrica é rígida, as condições de contorno do fluido são:

(d) O fundo da casca cilíndrica é rígido ($x = 0$) e a velocidade na direção vertical é nula:

$$\phi_{,x}^{(S)}(x, r, \theta, t) \Big|_{x=0} = 0\tag{3.27}$$

(e) Como as paredes da estrutura são rígidas, a velocidade radial é nula:

$$\phi_{,r}^{(S)}(x, r, \theta, t) \Big|_{r=R} = 0\tag{3.28}$$

(f) Na superfície livre ($x = H_i$), o fluido movimenta-se seguindo a equação (Hansen, Silva, 2022):

$$\phi_{,tt}^{(S)} + \phi_{,t}^{(S)} + g \left(\phi_{,x}^{(1)} + \phi_{,x}^{(S)} \right) \Big|_{x=H_i} = 0\tag{3.29}$$

Portanto, para satisfazer todas as condições de contorno da interação fluido-estrutura, o potencial de velocidade do fluido interno $\phi^{(1)}$ é expresso pela seguinte equação (Paak; Païdoussis; Misra, 2014):

$$\phi^{(1)}(x, r, \theta, t) = \sum_{\bar{m}=1}^{N_f} \sum_{n=0}^N \left\{ A_{\bar{m}n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi x}{H_i} \right) I_n \left(\frac{\bar{m} \pi r}{H_i} \right) \cos(n \theta) \right\}\tag{3.30}$$

enquanto o potencial de velocidade $\phi^{(2)}$, referente ao fluido externo, é dado por (Mikami; Yoshimura, 1992):

$$\phi^{(2)}(x, r, \theta, t) = \sum_{\bar{m}=1}^{N_f} \sum_{n=0}^N \left\{ B_{\bar{m}n}(t) \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{m} \pi x}{H_e} \right) K_n \left(\frac{\bar{m} \pi r}{H_e} \right) \cos(n \theta) \right\}\tag{3.31}$$

onde N_f é o número de termos da expansão utilizado para o potencial de velocidade dos fluidos interno e externo. As amplitudes de cada modo $A_{\bar{m}n}(t)$ e $B_{\bar{m}n}(t)$ são obtidas pela

condição de impenetrabilidade, expressa pela equação (3.25). Desta forma, ao aplicar o método de Galerkin, utilizando como função peso os termos trigonométricos das equações (3.30) e (3.31), as amplitudes modais $A_{\bar{m}n}(t)$ e $B_{\bar{m}n}(t)$ são expressas em função do campo de deslocamentos radiais da casca, w , por:

$$A_{\bar{m}n}(t) = \frac{\int_0^{H_i} \left[\dot{w} \sin(\bar{m} \pi x / H_i) \right] dx \Big|_{r=R}}{\int_0^{H_i} \left[\phi_{,r}^{(1)} \sin(\bar{m} \pi x / H_i) \right] dx \Big|_{r=R}} \quad (3.32)$$

$$B_{\bar{m}n}(t) = \frac{\int_0^{H_e} \left[\dot{w} \sin(\bar{m} \pi x / H_e) \right] dx \Big|_{r=R}}{\int_0^{H_e} \left[\phi_{,r}^{(2)} \sin(\bar{m} \pi x / H_e) \right] dx \Big|_{r=R}} \quad (3.33)$$

Portanto, a partir da equação (3.22), a pressão hidrodinâmica provocada pelo fluido interno sobre a casca cilíndrica engastada em um fundo rígido é determinada por:

$$p_{Hf} = -\rho_f \sum_{\bar{m}=1}^{N_f} \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\partial A_{\bar{m}n}(t)}{\partial t} \sin\left(\frac{\bar{m}\pi x}{H_i}\right) I_n\left(\frac{\bar{m}\pi r}{H_i}\right) \cos(n\theta) \right\} \quad (3.34)$$

e de forma análoga, a partir da equação (3.22), a pressão hidrodinâmica provocada pelo fluido externo é expressa como:

$$p_{He} = \rho_w \sum_{\bar{m}=1}^{N_f} \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{\partial B_{\bar{m}n}(t)}{\partial t} \sin\left(\frac{\bar{m}\pi x}{H_e}\right) K_n\left(\frac{\bar{m}\pi r}{H_e}\right) \cos(n\theta) \right\} \quad (3.35)$$

onde n é o número de ondas circunferenciais da casca cilíndrica, I_n e K_n são as funções modificadas de Bessel de primeira e segunda classe, respectivamente, e de ordem n .

As equações (3.34) e (3.35) satisfazem as condições de contorno apresentadas nas equações (3.25)-(3.29), e atendem a equação de Laplace (3.21). As condições de contorno em (3.24) afirmam que a velocidade de perturbação do fluido na direção axial é nula no fundo do tanque ($x = 0$) e na superfície livre do fluido ($x = H_i$), sendo que esta última é apenas uma aproximação da condição real da superfície livre, equação (3.29). Segundo Paak, Païdoussis e Misra (2014), os resultados mostram que esta aproximação é razoável. Em virtude desta aproximação e considerando a cavidade acústica aberta-aberta, serão mantidos os potenciais de velocidade (3.30) e (3.31). Já o potencial proposto por Kim, Lee e Ko (2004) atende exatamente as condições de contorno (3.24).

A partir das equações (3.34) e (3.35), após a resolução das equações (3.32) e (3.33), a pressão hidrodinâmica apresenta apenas termos inerciais relativos aos campos de deslocamentos radiais que são adicionados aos termos inerciais do sistema de equações de movimento da casca cilíndrica, ou seja, os fluidos externo e interno inserem uma massa adicional à massa da casca cilíndrica de paredes flexíveis.

Em relação ao potencial de velocidade do fluido devido ao *sloshing*, $\phi^{(s)}$, para uma casca com laterais rígidas, tem-se que (Gonçalves; Batista, 1988):

$$\phi^{(s)}(x, r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_v} \sum_{\bar{n}=1}^{N_s} C_{k\bar{n}}(t) h^2 \omega \cosh\left(\frac{\varepsilon_{k\bar{n}} x}{R}\right) J_{\bar{n}}\left(\frac{\varepsilon_{k\bar{n}} r}{R}\right) \cos(\bar{n} \theta) \quad (3.36)$$

sendo que ω é a menor frequência natural da casca cilíndrica (modo fundamental), J_n é a função de Bessel de primeira classe e ordem $\bar{n}$, N_s é o número de termos utilizados na expansão para o potencial $\phi^{(s)}$, k e $\bar{n}$ são os modos de *sloshing* e representam os círculos nodais e o número de diâmetros da superfície livre do fluido interno e $C_{k\bar{n}}(t)$ são as amplitudes modais da superfície livre.

A equação (3.36) é solução da equação de Laplace e obedece à condição de contorno dada pela equação (3.27). Para determinar o potencial de velocidade, equação (3.36), a condição de contorno dada pela equação (3.28) deve ser satisfeita. Para isso, $\varepsilon_{k\bar{n}}$ são as soluções obtidas a partir da seguinte equação diferencial (Kim; Lee; Ko, 2004):

$$\frac{d}{dr} \left[J_{\bar{n}} \left(\frac{\varepsilon_{k\bar{n}} r}{R} \right) \right] = 0 \Big|_{r=R} \quad (3.37)$$

De forma análoga às equações (3.34) e (3.35), a pressão hidrodinâmica devido à influência da superfície livre é dada por:

$$p_{Hs} = -\rho_f \sum_{k=1}^{N_v} \sum_{\bar{n}=1}^{N_s} \left\{ \frac{\partial C_{k\bar{n}}(t)}{\partial t} h^2 \omega \cosh\left(\frac{\varepsilon_{k\bar{n}} x}{R}\right) J_{\bar{n}}\left(\frac{\varepsilon_{k\bar{n}} r}{R}\right) \cos(\bar{n} \theta) \right\} \quad (3.38)$$

Finalmente, a pressão hidrodinâmica total do fluido interno é definida da seguinte forma:

$$p_{Hi} = p_{Hf} + p_{Hs} \quad (3.39)$$

Em relação ao trabalho realizado pelo fluido interno e externo, para níveis intermediários de altura (H_i e H_e), considera-se a função Heaviside, $H_f(x)$, permitindo que a pressão

hidrodinâmica seja aplicada apenas na região que contém fluido, sendo nula para regiões que não possuem fluido. Portanto, a massa adicional do fluido interno é definida por:

$$W_{Hi} = \int_0^L \int_0^{2\pi} -p_{Hi} [H_f(x) - H_f(x - H_i)] w R d\theta dx \quad (3.40)$$

e a massa adicional do fluido externo é definida por:

$$W_{He} = \int_0^L \int_0^{2\pi} -p_{He} [H_f(x) - H_f(x - H_e)] w R d\theta dx \quad (3.41)$$

Após a definição dos potenciais de velocidade $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(S)}$, aplica-se o método de Galerkin à equação (3.29) utilizando como função peso o termo $J_{\bar{n}}(\varepsilon_{k\bar{n}}r/R)$. Ao realizar essa operação, são geradas N_s equações adicionais ao sistema de equações, que acoplam os efeitos da superfície livre ao problema casca-fluido.

Segundo Hansen e Silva (2022), pode-se incorporar um amortecimento, β_3 , à superfície livre do fluido e a equação (3.29) é reescrita da seguinte maneira:

$$\left(\rho_f \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho_f g \frac{\partial \phi}{\partial x} - \beta_3 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \bigg|_{x=H_i} = 0 \quad (3.42)$$

este amortecimento é representado por β_3 que é obtido por meio da formulação apresentado no próximo tópico.

3.4. AMORTECIMENTO DA SUPERFÍCIE LIVRE DO FLUIDO INTERNO

Nesta seção aborda-se sobre a determinação do fator de amortecimento do fluido β_3 , indicado por β_3 na equação (3.42). De acordo com Habenberger (2015), o comportamento da casca cilíndrica não é influenciado por este amortecimento e pode ser até negligenciado embora tenha relevância em relação a dissipação de energia devido ao efeito de *sloshing*.

Segundo Case e Parkinson (1957), o domínio do fluido possui três regiões que ocorre a dissipação de energia, a saber: a superfície livre, onde a energia é dissipada devido à viscosidade do fluido; nas regiões adjacentes às paredes laterais; e, o fundo do tanque cilíndrico. Nestas duas últimas regiões, a dissipação de energia ocorre devido ao fluxo de cisalhamento do fluido viscoso na interface fluido-estrutura. Para a determinação da dissipação de energia, os autores utilizaram o seguinte potencial de velocidade do fluido:

$$\phi^{(A)} = \sum_k \sum_n N_{kn} \dot{q}_{kn} \cos(n\theta) J_n(\kappa_{kn} r) \frac{\cosh[\kappa_{kn}(z + H_i/4)]}{\kappa_{kn} \sinh(\kappa_{kn} H_i/2)} \quad (3.43)$$

De acordo com Case e Parkinson (1957), a amplitude do potencial de velocidade possui decaimento exponencial no tempo expresso por α , obtido por meio de $\dot{q}_{kn}$. Para cada uma das três regiões de dissipação de energia, calcula-se uma parcela, sendo que o fator de amortecimento da superfície livre é dado pela soma das contribuições de cada uma:

$$\beta_3 = \alpha_S + \alpha_L + \alpha_F \quad (3.44)$$

onde α_S é parcela devido ao fluxo cisalhante na camada laminar no contorno, e α_L e α_F são as parcelas referente ao fluxo cisalhante na lateral e ao fundo do tanque, respectivamente. Cada parcela é calculada através das seguintes expressões:

$$\alpha_S = 2\nu\kappa_{kn}^2 \quad (3.45)$$

$$\alpha_L = \frac{1}{2R} \left(\frac{\nu\omega_{kn}}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{1 + (Rn/\kappa_{kn})^2}{1 - (Rn/\kappa_{kn})^2} - \frac{\kappa_{kn} H_i}{\sinh(\kappa_{kn} H_i)} \right] \quad (3.46)$$

$$\alpha_F = \frac{1}{2R} \left(\frac{\nu\omega_{kn}}{2} \right)^{1/2} \frac{2\kappa_{kn} R}{\sinh(\kappa_{kn} H_i)} \quad (3.47)$$

sendo que k é o número de termos utilizado para cada modo analisado, n é o argumento das funções circunferenciais, ν é a viscosidade cinemática do fluido, κ_{kn} são as raízes da equação:

$$\frac{d}{dr} J_n(\kappa_{kn} R) = 0 \quad (3.48)$$

e ω_{kn} nas equações (3.46) e (3.47) são as frequências naturais do *sloshing* calculadas por:

$$\omega_{kn}^2 = g\kappa_{kn} \tanh(\kappa_{kn} H_i/2) \quad (3.49)$$

Desta forma, o fator de amortecimento β_3 é obtido através da equação (3.44), com esses valores de amortecimento sendo validados no trabalho experimental realizado por Mieda *et al.* (1993).

O efeito de dissipação nas ondas de superfície livre, para o fluido externo na fronteira longínqua (condição de não reflexão de ondas), poderia ter sido incorporado também ao problema, baseando no desenvolvimento apresentado por Gibert (1988) e também mostrado em Pedroso (1992).

3.5. TEORIA LINEAR DE ONDAS OCEÂNICAS

Neste tópicos é apresentado a teoria linear de ondas de pequenas amplitudes com o objetivo de apresentar a formulação matemática necessária para a obtenção das equações de movimento e da força das ondas aplicadas em estruturas. Existem diversas teorias abordando este assunto como as teorias de Airy, Stokes e Cnoidal (Pedroso, 1982a). Este trabalho apresentará a formulação da clássica teoria de Airy.

Ao observar a superfície marítima, é notado um grande conjunto de cristas (pontos máximos de elevação) e vales (pontos mínimos de elevação), que se movimentam de forma aleatória e, aparentemente, sem uma definição clara. Diante deste fato é que estas teorias de ondas procuram identificar algum padrão do fenômeno e descrevem como ocorre tais movimentos. Segundo Pedroso (1982), representar estas ondas de forma matemática é bastante complexo visto o comportamento aleatório e com não linearidades em um plano tridimensional.

A Figura 3.4 ilustra o diagrama cinemático de ondas progressivas pela teoria de Airy onde são apresentados os parâmetros envolvidos no problema, a saber: a amplitude da onda, A ; profundidade d'água, h_o ; comprimento da onda, L_o ; e, o sistema de coordenadas, x e z , do problema.

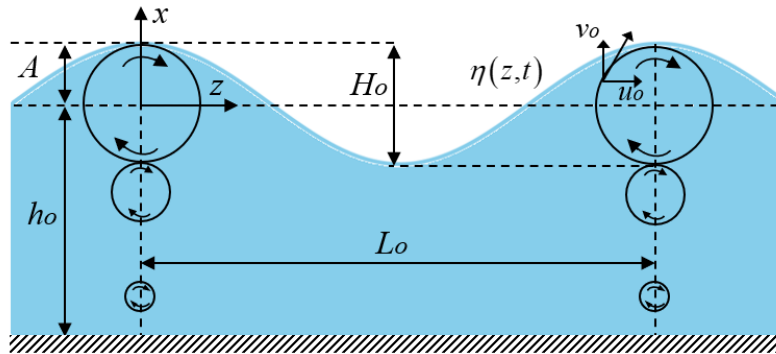


Figura 3.4 – Diagrama cinemático de ondas pela teoria de Airy (Haritos, 2007) – “Adaptada pelo autor”.

Independente da teoria de onda utilizada, é necessário definir o potencial de velocidade $\phi^{(o)}$, que pertence ao domínio do fluido e deve atender a equação de Laplace (Chakrabarti, 1987):

$$\frac{\partial^2 \phi^{(o)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(o)}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.50)$$

juntamente com as seguintes condições de contorno, a saber: a componente vertical da velocidade do fluido dever ser nula:

$$\left(\frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=-h_0} = 0 \quad (3.51)$$

e a condição cinemática para a superfície livre do fluido, para $x = \eta$, é expressa por:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial x} = 0 \quad (3.52)$$

Utilizando a expansão da série de Taylor em torno de $x = 0$, tomando os termos lineares, a expressão (3.52) é reescrita por:

$$\left(\frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3.53)$$

A condição dinâmica para a superfície livre do fluido, para $z = \eta$, é expressa por:

$$\frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad (3.54)$$

De forma análoga ao caso anterior, a equação (3.54) pode ser expandida em série de Taylor e linearizada em torno de $z = 0$, sendo reescrita por:

$$\left(\frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} = -g\eta \quad (3.55)$$

O perfil da onda η , dado pela teoria de Airy, é obtido em função da amplitude (A) em um determinado tempo (t) e uma posição horizontal da onda (z), ou seja (Pedroso, 1982a):

$$\eta(z, t) = -A \sin(k_o z - \omega_o t) \quad (3.56)$$

O número da onda k_o em (3.56) é obtido a partir da celeridade da onda C_o , que está relacionada por meio do comprimento da onda L_o :

$$C_o = \frac{\omega_o}{k_o} = \frac{L_o}{T_o} \Rightarrow k_o = \frac{2\pi}{L_o} \quad (3.57)$$

sendo ω_o e T_o , a frequência natural da onda e o período da onda que são dados, respectivamente, por:

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \quad T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} \quad (3.58)$$

O comprimento da onda L_o é obtido por (Pedroso, 1982a):

$$L_o = \frac{g}{2\pi} T_o^2 \tanh(k_o h_o) \quad (3.59)$$

A frequência natural da onda é obtida em função do número de onda k_o e da profundidade h_o como:

$$\omega_o = [k_o g \tanh(k_o h_o)]^{1/2} \quad (3.60)$$

Portanto, o potencial de velocidade é expresso por (Pedroso, 1982a):

$$\phi^{(o)}(x, z, t) = \frac{Ag}{\omega_o} \frac{\cosh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \cos(k_o z - \omega_o t) \quad (3.61)$$

As velocidades horizontal (u_o) e vertical (v_o) da onda são obtidas a partir das derivadas parciais da equação (3.61) em relação às coordenadas do plano bidimensional indicadas na Figura 3.4, a saber:

$$u_o(x, z, t) = \frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial z} = -\frac{Ag k_o}{\omega_o} \frac{\cosh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \sin(k_o z - \omega_o t) \quad (3.62)$$

$$v_o(x, z, t) = \frac{\partial \phi^{(o)}}{\partial x} = \frac{Ag k_o}{\omega_o} \frac{\sinh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \cos(k_o z - \omega_o t) \quad (3.63)$$

As acelerações horizontal ($\dot{u}_o$) e vertical ($\dot{v}_o$) da onda são obtidas a partir da derivada no tempo das velocidades em (3.62) e (3.63), respectivamente, a saber:

$$\dot{u}_o = \frac{\partial u_o(x, z, t)}{\partial t} = Ag k_o \frac{\cosh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \cos(k_o z - \omega_o t) \quad (3.64)$$

$$\dot{v}_o = \frac{\partial v_o(x, z, t)}{\partial t} = Ag k_o \frac{\sinh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \sin(k_o z - \omega_o t) \quad (3.65)$$

Os deslocamentos horizontal (ξ) e vertical (ζ) da onda são obtidos pela seguinte integração:

$$\xi = \int u_o dt = -\frac{Ag k_o}{\omega_o^2} \frac{\cosh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \cos(k_o z - \omega_o t) \quad (3.66)$$

$$\zeta = \int v_o dt = -\frac{Ag k_o}{\omega_o^2} \frac{\sinh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \sin(k_o z - \omega_o t) \quad (3.67)$$

Já a pressão da onda é obtida de acordo com:

$$p_o(x, z, t) = -\rho_w \frac{\partial \phi^{(o)}(x, z, t)}{\partial t} \quad (3.68)$$

e ao aplicar o potencial de velocidade (3.61) em (3.68), obtém-se a equação para a pressão da onda oceânica:

$$p_o = -\rho_w Ag \frac{\cosh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \sin(k_o z - \omega_o t) \quad (3.69)$$

Em virtude da magnitude e do comprimento da onda, as equações (3.61) - (3.69) podem ser simplificadas em função da profundidade d'água, ou pela variação do parâmetro $k_o h_o$, que determina o comportamento das funções hiperbólicas (Pedroso, 1982a; Chakrabarti, 1987). Para isto, as ondas podem ser classificadas em águas rasas, águas intermediárias e águas profundas onde suas características estão definidas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Classificação das ondas e as aproximações das funções hiperbólicas (Pedroso, 1982a).

Tipo de ondas	Intervalo (h_o/L_o)	Intervalo ($k_o h_o$)	$\sinh(k_o h_o)$	$\cosh(k_o h_o)$
Águas rasas	$0 < h_o/L_o < 0,05$	$0 < k_o h_o < \pi/10$	$k_o h_o$	$e^{k_o h_o/2}$
Águas intermediárias	$0,05 < h_o/L_o < 0,5$	$\pi/10 < k_o h_o < \pi$	$\sinh(k_o h_o)$	$\cosh(k_o h_o)$
Águas profundas	$0,5 < h_o/L_o < \infty$	$\pi < k_o h_o < \infty$	1	$e^{k_o h_o/2}$

Substituindo a equação (3.69) nas equações (3.66) e (3.67), obtém-se a seguinte relação (Pedroso, 1982a):

$$\frac{\xi^2}{\bar{A}^2} + \frac{\zeta^2}{\bar{B}^2} = 1 \quad (3.70)$$

sendo $\bar{A}$ e $\bar{B}$, elipses com semieixo maior (horizontal) e semieixo menor (vertical) respectivamente, definidas por:

$$\bar{A} = A \frac{\cosh[k_o(x + h_o)]}{\sinh(k_o h_o)} \quad \bar{B} = A \frac{\sinh[k_o(x + h_o)]}{\sinh(k_o h_o)} \quad (3.71)$$

Os campos cinemáticos das partículas da onda, independente da profundidade d'água, devem ser determinados pelas equações (3.70) e (3.71), que conduzem a trajetórias elípticas, conforme apresentado na Figura 3.5. O presente estudo leva em consideração em função da profundidade d'água e de como a estrutura em análise está apoiada na base, conforme apresentado na Figura 2.3.

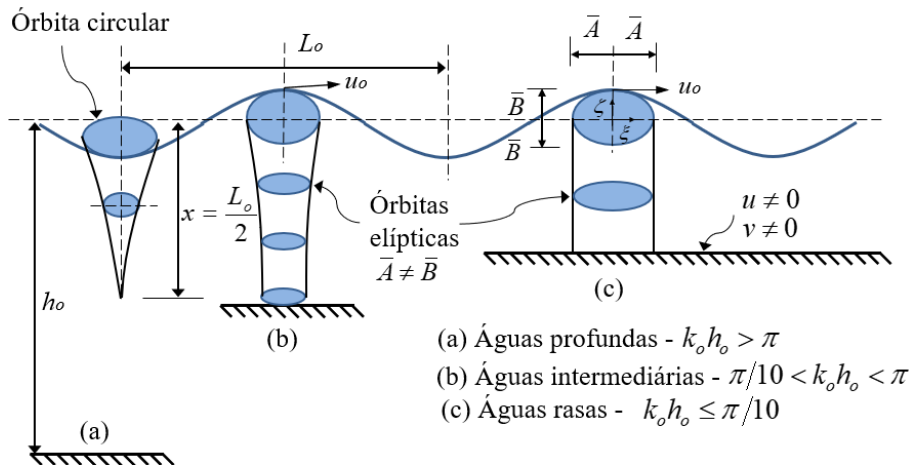


Figura 3.5 – Campos cinemáticos das partículas do fluido da onda (Pedroso, 1982a) – “Adaptada pelo autor”.

3.6. FORÇAS PROVOCADAS PELA AÇÃO DE ONDAS

Conforme apresentado no tópico anterior, existem diversas teorias que abordam sobre o estudo do comportamento das ondas em função do tipo da estrutura e da profundidade d'água em que se encontram. Para o cálculo das forças provocadas pela ação de ondas, podem ser aplicadas as seguintes formulações matemáticas: a equação de Morison, a teoria de Froude – Krylov e a teoria da difração (Chakrabarti, 1987).

A equação de Morison assume que a força atuante na estrutura é composta por duas componentes: a força de inércia e a força de arraste, sendo que ambas as componentes possuem coeficientes que devem ser determinados experimentalmente. Estes coeficientes de inércia e de arraste são influenciados por diversos fatores como a geometria, rugosidade, turbulência do fluxo, número de Reynolds, número de Keulegan – Carpenter, número de Mach, entre outros (Pedroso, 1982a). Segundo Chakrabarti (1987), a equação de Morison é aplicada em situações em que a força de arraste é significativa e a estrutura é pequena em comparação ao comprimento da onda de água que atua sobre esta estrutura.

Nas situações em que a força de arraste é pequena e a força de inércia é predominante, como ondas atuando em estruturas com dimensões relativamente menores, a teoria de Froude – Krylov pode ser aplicada. Já nos casos em que a estrutura possui dimensões comparáveis ao comprimento da onda, e sendo capaz de alterar o campo da onda nas proximidades do contato com a estrutura, é utilizada a teoria da difração (Chakrabarti, 1987).

O cálculo detalhado da obtenção da fórmula de Morison é apresentada por Pedroso (1982), sendo dado pela composição de duas parcelas de forças: a de inércia, proporcional a aceleração do fluido; e a de arraste, sendo proporcional à velocidade do fluido ao quadrado. Esta equação é dada por:

$$F_T = \rho_s C_M V \dot{\mathbf{u}}(t) + \rho_s C_D A \mathbf{u}^2(t) \quad (3.72)$$

onde C_M e C_D são os coeficientes empíricos de inércia e arraste, respectivamente. Como exemplo, estes coeficientes podem ser obtidos por meio dos gráficos apresentados na Figura 3.6, para a inércia (Figura 3.6a) e para o arraste (Figura 3.6b), os quais estão em função do número de Reynolds (Re) e número de Keulegan – Carpenter (N_{KC}).

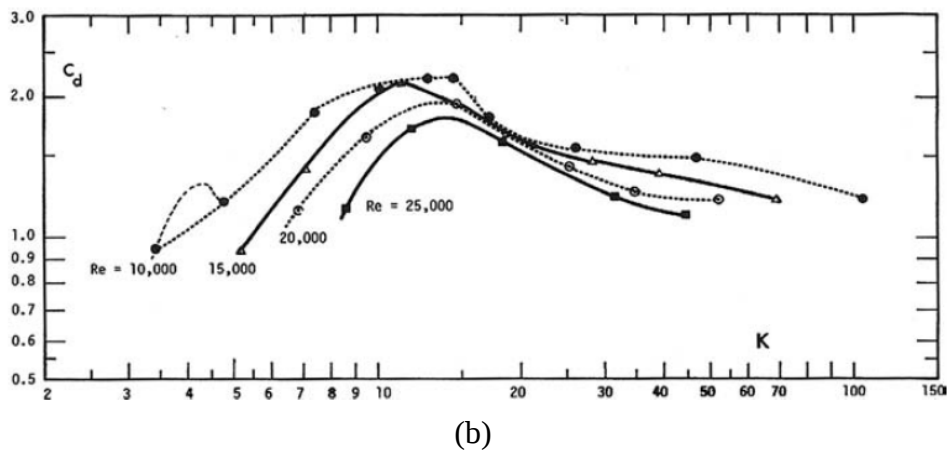
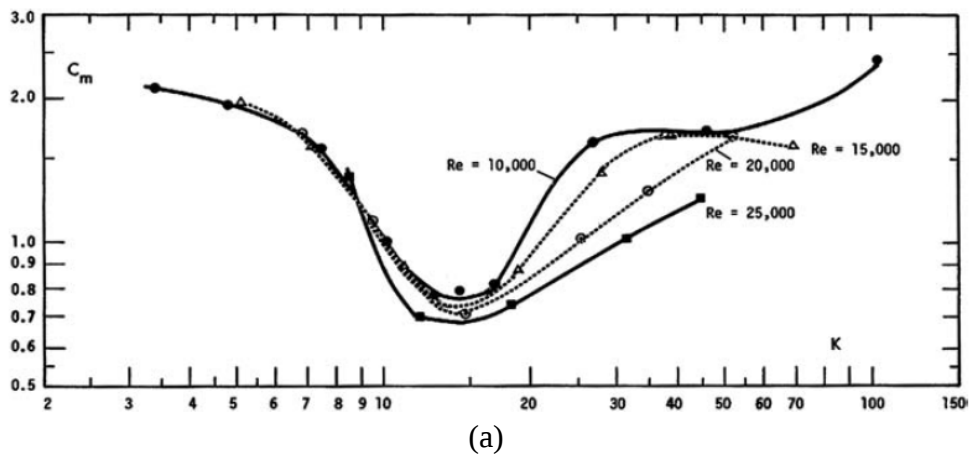


Figura 3.6 – Variação do coeficiente de sustentação em função número de Reynolds (Sarpkaya, 1976).

O número de Reynolds e número de Keulegan – Carpenter são importantes parâmetros para o estudo de problemas de hidrodinâmica, os quais são expressos respectivamente por:

$$\text{Re} = \frac{u_o D_c}{\nu} \quad N_{KC} = \frac{u_o T_o}{D_c} \quad (3.73)$$

Para uma estrutura cilíndrica, as forças por unidade de comprimento de estrutura são:

$$f = f_I + f_A \rightarrow f = \rho_w C_M \frac{\pi D_c^2}{4} \dot{\mathbf{u}} + \rho_w C_D \frac{D_c}{2} \mathbf{u} |\mathbf{u}| \quad (3.74)$$

sendo D_c o diâmetro da estrutura; ρ_w a densidade do fluido; f_I e f_A as forças de inércia e arraste por unidade de comprimento, respectivamente.

Substituindo a equação (3.64) na equação (3.74), a expressão da força de inércia por unidade de comprimento pode ser reescrita como:

$$f_I = C_M (\rho_w \pi R^2) \frac{H_o k_o g}{2} \frac{\cosh[k_o (x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \cos \theta_f \quad (3.75)$$

onde $\theta_f = k_o z - \omega_o t$ é o ângulo de fase.

De forma análoga, substituindo a equação (3.62) na equação da força de arraste por unidade de comprimento em (3.74), obtém-se:

$$f_A = -C_D (\rho_w R) \left(\frac{H_o g T_o}{2 L_o} \right)^2 \left| \frac{\cosh[k_o (x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} \right|^2 \sin \theta_f |\sin \theta_f| \quad (3.76)$$

Aplicando a velocidade e aceleração horizontal da onda, equações (3.62) e (3.64), as forças de inércia e arraste são expressas respectivamente por (Pedroso, 1982a):

$$F_I = C_M (\rho_w \pi R^2) g H_o \left[\frac{1}{2} \tanh(k_o h_o) \cos \theta_f \right] \quad (3.77)$$

$$F_A = C_D (\rho_w R) g H_o^2 \left\{ \frac{1}{8} \left[1 + \frac{2 k_o h_o}{\sinh(2 k_o h_o)} \right] \sin \theta_f |\sin \theta_f| \right\} \quad (3.78)$$

De forma análoga às forças provenientes de ondas, os momentos totais de tombamento na base da estrutura são obtidos pela composição das componentes dos momentos relativas à inércia e ao arraste:

$$M_T = M_I + M_A \quad (3.79)$$

Os momentos referentes a inércia (M_I) e ao arraste (M_A) são expressos por (Pedroso, 1982a):

$$M_I = C_M (\rho_w \pi R^2) \frac{g H_o}{2} h_o \tanh(k_o h_o) \left[1 + \frac{1 - \cosh(k_o h_o)}{(k_o h_o) \sinh(2k_o h_o)} \right] \cos \theta_f \quad (3.80)$$

$$M_A = C_D (\rho_w R) \frac{g H_o^2}{4} h_o n_o \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n_o} \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh(2k_o h_o)}{2k_o h_o \sinh(2k_o h_o)} \right] \right\} \sin \theta_f |\sin \theta_f| \quad (3.81)$$

onde n_o é obtido por:

$$n_o = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k_o h_o}{\sinh(2k_o h_o)} \right] \quad (3.82)$$

A força de sustentação (*lift*) é dada pela seguinte equação (Pedroso, 1982a):

$$F_S = C_L (\rho_w R) g H_o^2 \left\{ \frac{1}{8} \left[1 + \frac{2k_o h_o}{\sinh(2k_o h_o)} \right] \right\} \sin \theta_f |\sin \theta_f| \quad (3.83)$$

em que C_L é o coeficiente de sustentação obtido de forma experimental e análogo aos casos de inércia e de arraste. A Figura 3.7 mostra um gráfico com valores experimentais de vários pesquisadores para este coeficiente em função do número de Reynolds.

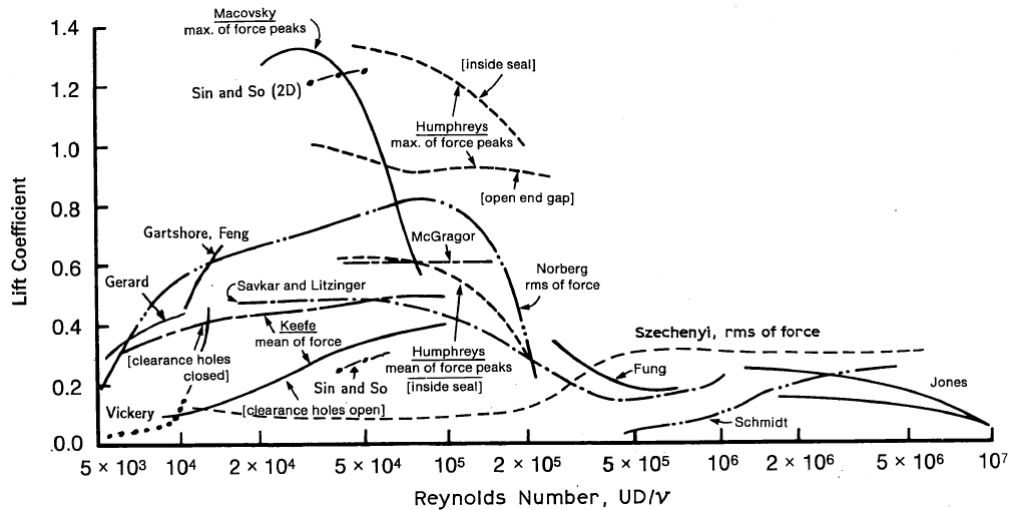


Figura 3.7 – Variação do coeficiente de sustentação em função número de Reynolds (Blevins, 2001).

Estas expressões representam de forma sucinta a formulação da equação de Morison para o cálculo das forças provenientes de ondas em estruturas delgadas. O objetivo é aplicar estas equações para o carregamento lateral, indicado na equação (3.18).

A teoria da difração descreve o campo de pressões que as ondas oceânicas geram ao se deslocar/deformar através da passagem pela estrutura. A pressão das ondas é dada por (MacCamy e Fuchs, 1954), e é também apresentada em Pedroso (1982a).

$$p_w = \frac{\rho_w g H_o}{\pi k_a} \left[\frac{1}{H_o^{(2)'}(k_a)} + 2 \sum_{n_o=1}^{\infty} i^{n_o} \frac{1}{H_o^{(2)'}(k_a)} \cos(n_o \theta) \right] \frac{\cosh[k_o(x + h_o)]}{\cosh(k_o h_o)} e^{-i(k_o z - \omega_o t)} \quad (3.84)$$

onde $H_o^{(2)'}$ é a função de Hankel de segunda classe e ordem n_o , sendo uma combinação de funções de Bessel. O parâmetro de espalhamento k_a é dado por:

$$k_a = \frac{2\pi R}{L_o} \quad (3.85)$$

O parâmetro de compressibilidade do fluido é dado por (Gibert, 1988; Pedroso, 2005a; França Jr., 2022):

$$\lambda = \frac{\omega L_c}{c} \quad (3.86)$$

onde c é a velocidade de propagação do som no fluido; L_c , o comprimento da cavidade acústica. O parâmetro de compressibilidade do fluido classifica os resultados das frequências acopladas em dois regimes: incompressível ($\lambda \ll 1$) e compressível ($\lambda \approx 1$).

Para incorporar a ação de ondas oceânicas nas paredes laterais externas à casca cilíndrica, é definido o trabalho deste carregamento a seguir:

$$W_w = \int_0^L \int_0^{2\pi} p_w [H_f(x) - H_f(x - h_o)] w R d\theta dx \quad (3.87)$$

A equação (3.87) será aplicada no trabalho das cargas, indicado na equação (3.18).

3.7. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO LINEARES

Após a definição dos funcionais de energia da casca cilíndrica e do fluido interno e externo, é aplicado o método de Rayleigh-Ritz para discretizar as equações de equilíbrio do problema. Em caso de linearização dos campos de deformações da casca cilíndrica, regidos pela teoria de Sanders-Koiter, são obtidas equações não-lineares que permitirão: a análise das vibrações livres lineares, as quais não têm influência de cargas externas e de forças dissipativas; e, a análise não linear de vibração forçada, as equações não lineares contemplam os

carregamentos externos, referentes a ação de ondas oceânicas e o peso próprio da casca cilíndrica.

Os campos de deslocamentos apresentados na equação (3.14) podem ser reescritos em forma matricial da seguinte forma:

$$\{u \quad v \quad w\}^T = [N_c] \{\mathbf{q}_c\} \quad (3.88)$$

onde $[N_c]$ é uma matriz de dimensão igual a $3 \times (m \times n)$, e $\{\mathbf{q}_c\}$ é o vetor que contempla as amplitudes modais da casca cilíndrica, apresentadas a seguir:

$$\{\mathbf{q}_c\} = \left\{ u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,n}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{m,n}, v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{m,n}, w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,n}, w_{2,1}, w_{2,2}, \dots, w_{m,n} \right\} \quad (3.89)$$

O vetor que contém as amplitudes modais da superfície livre do fluido, de dimensão igual a $(k \times \bar{n})$, é expresso por:

$$\{\mathbf{q}_s\} = \{c_{1,1} \quad c_{1,2} \quad \dots \quad c_{1,k} \quad c_{2,1} \quad c_{2,2} \quad \dots \quad c_{k,\bar{n}}\} \quad (3.90)$$

Portanto, o número total de graus de liberdade do problema $[N_t = 3 \times (m \times n) + (k \times \bar{n})]$ é definido pela soma dos graus de liberdade de cada campo de deslocamento $(m \times n)$ e as amplitudes modais da superfície livre do fluido $(k \times \bar{n})$. Após a definição dos funcionais de energias da casca cilíndrica, o método de Rayleigh-Ritz é aplicado, juntamente com o princípio de Hamilton, para obter o equilíbrio dinâmico resolvendo as equações de Euler-Lagrange $\bar{L}$:

$$\bar{L} = T_c - U_c + W_E \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{q}_c} = \frac{\partial R_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c}, \quad i = 1, 2, \dots, N_c \quad (3.91)$$

O resultado da expressão em (3.91) é um sistema de N_c equações, em que contemplam todas as amplitudes modais da casca cilíndrica e do fluido $(U_{m,n}, V_{m,n}$ e $W_{m,n})$, incluindo as amplitudes da superfície livre $(C_{k\bar{n}})$. Nota-se que o princípio de Hamilton é aplicado apenas em função do vetor $\mathbf{q}_c$, e as amplitudes da superfície livre representadas pelo vetor $\mathbf{q}_s$ são adicionadas ao sistema por meio da inserção da equação (3.42).

De forma geral, este sistema de equações não-lineares pode ser escrito da seguinte forma matricial:

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{R}_p \dot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{K}_p \mathbf{q}_p + \mathbf{T}_{nl} \mathbf{q}_p = \mathbf{F}_p \cos(\Omega \tau) + \mathbf{F}_p \sin(\Omega \tau) \quad (3.92)$$

onde $\mathbf{M}_p$, $\mathbf{R}_p$ e $\mathbf{K}_p$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do problema com dimensão igual a $(N_t \times N_t)$, respectivamente; $\mathbf{q}_p$ é o vetor de coordenadas generalizadas de ordem N_t , equivalente a todas as amplitudes modais indicadas em (3.89) e (3.90); $\mathbf{T}_{nl}$ é uma matriz que contempla os termos não lineares de ordem quadrática e cúbica; e, $\mathbf{F}_p$ é o vetor associado às cargas de excitação aplicadas ao problema.

Para proporcionar um melhor desenvolvimento das análises paramétricas, alguns parâmetros são adimensionalizados como, por exemplo, o tempo:

$$\tau = \omega_N t \quad (3.93)$$

onde ω_N é a frequência natural da casca cilíndrica. A frequência de excitação da casca cilíndrica, proveniente da ação de ondas oceânicas, é adimensionalizada em relação a frequência natural da casca cilíndrica:

$$\Omega = \frac{\omega_o}{\omega_N} \quad (3.94)$$

Nota-se a presença dos termos $\cos(\Omega\tau)$ e $\sin(\Omega\tau)$ na equação (3.92), os quais estão relacionadas à carga de ondas oceânicas, que para contornar a presença do termo imaginário, a conversão é feita por uma composição destas duas parcelas.

Já para a análise das vibrações livres do problema de interação fluido-estrutura, o sistema de equação (3.92) deve ser linearizado. Para isso, as amplitudes modais dos campos de deslocamentos, equação (3.14), e as amplitudes modais da superfície livre do fluido, equação (3.36), são discretizadas no tempo pelas seguintes funções harmônicas:

$$\begin{Bmatrix} U_{m,n}(t) \\ V_{m,n}(t) \\ W_{m,n}(t) \\ C_{k,\bar{n}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{m,n} \cos(\omega t) \\ v_{m,n} \cos(\omega t) \\ w_{m,n} \cos(\omega t) \\ c_{k,\bar{n}} \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (3.95)$$

O sistema de equações gerados em (3.92) pode ser escrito em forma matricial por (Kim, Lee, Ko, 2004):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_c & 0 \\ \mathbf{K}_{cs} & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_s \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cf} & \mathbf{M}_{cs} \\ 0 & \mathbf{M}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_c \\ \ddot{\mathbf{q}}_s \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.96)$$

onde $\mathbf{K}_c$ é a matriz de rigidez da casca cilíndrica, de dimensão igual a $(N_c \times N_c)$; $\mathbf{M}_{cf}$ é a matriz de massa do acoplamento entre a casca cilíndrica e o fluido sem a influência do *sloshing*, de dimensão igual a $(N_c \times N_c)$; $\mathbf{M}_{cs}$ é a matriz de massa do acoplamento entre a casca cilíndrica e o efeito de superfície livre, com dimensão igual a $(N_c \times N_s)$; $\mathbf{K}_{cs}$ é a matriz de rigidez do acoplamento entre a casca cilíndrica e o efeito da superfície livre, com dimensão igual a $(N_c \times N_s)$; $\mathbf{K}_s$ e $\mathbf{M}_s$ são as matrizes de rigidez e massa, respectivamente, que contemplam apenas amplitudes modais provenientes do *sloshing*, com dimensão igual a $(N_s \times N_s)$. A equação (3.96) é um problema de autovalor e autovetor resolvido da seguinte forma:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c & 0 \\ \mathbf{K}_{cs} & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cf} & \mathbf{M}_{cs} \\ 0 & \mathbf{M}_s \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (3.97)$$

Após a resolução da equação (3.97), obtêm-se as frequências modais naturais e deformadas modais do sistema acoplado, que correspondem aos autovalores e autovetores, respectivamente.

3.8. ASPECTOS COMPUTACIONAIS E MODELO NUMÉRICO

Neste tópico são discutidos sobre os aspectos computacionais empregados na análise numérica com o *software* ANSYS®. A análise baseia-se no MEF, um procedimento numérico que resolve equações diferenciais governantes em um domínio específico, transformando-as em um sistema algébrico de equações aproximadas. Desta maneira, torna-se viável realizar uma análise das vibrações livres e compará-las com os resultados obtidos pelo modelo analítico.

A Tabela 3.2 apresenta os parâmetros físicos e geométricos da estrutura, bem como do fluido interno e externo, utilizados para os resultados desta tese, tanto para o modelo analítico quanto para o numérico. O material da casca cilíndrica foi considerado homogêneo e isotrópico, sendo de concreto armado classe C70 (ABNT, 2023).

Tabela 3.2 – Valores numéricos para os parâmetros físicos e geométricos da casca cilíndrica e do fluido.

E (GPa)	ν	h (m)	R (m)	L (m)	ρ_s (kg/m ³)	ρ_f (kg/m ³)	ρ_w (kg/m ³)
42	0,2	0,25	40	120	2500	1000	1025

Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), uma casca cilíndrica é considerada longa quando a seguinte relação é atendida:

$$L \left[\frac{3(1-\nu^2)}{(Rh)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \geq 3 \quad (3.98)$$

Com base nos dados geométricos apresentados na Tabela 3.2 e aplicando a equação (3.98), verifica-se que $49,43 \geq 3$, classificando a casca cilíndrica como longa. Além disso, considerando que a relação $h/R = 1/160 \leq 1/20$ é atendida, conclui-se que a casca é esbelta. A seguir, são apresentados os aspectos computacionais relacionados ao modelo numérico.

3.8.1. Descrição do software ANSYS®

O software ANSYS® é uma poderosa ferramenta de simulação usada para resolver uma ampla variedade de problemas de engenharia em áreas como mecânica estrutural, fluidodinâmica, eletromagnetismo e transferência de calor. Ele oferece uma variedade de recursos e capacidades avançadas para análise numérica e modelagem de sistemas complexos. Com uma interface amigável e uma ampla gama de opções de modelagem, o ANSYS® permite aos engenheiros e pesquisadores realizar análises detalhadas e precisas para melhor compreender o comportamento de seus projetos e produtos. Neste trabalho foram utilizados as seguintes plataformas desta ferramenta numérica:

- a) ANSYS Mechanical APDL® que permite uma abordagem baseada em linhas de comando (arquivo em formato .txt) para a criação e análise de modelos, permitindo um controle preciso sobre o processo de simulação, como por exemplo, a escolha dos elementos finitos. Nesta plataforma, foram feitas as análises paramétricas com variação do fluido (capítulo 4);
- b) ANSYS Workbench® é uma plataforma de simulação integrada que oferece uma interface gráfica intuitiva, permitindo criar, configurar, executar e analisar modelos complexos de forma eficiente. Foram utilizados os módulos *Static Structural* para análise de carga estática (tópico 5.1), *Modal* e *Modal Acoustics* para o estudo de convergência da malha de elementos finitos, e para a execução dos cortes longitudinais e transversais (capítulo 4).

Essa divisão entre as plataformas é feita principalmente com base na facilidade de obtenção dos resultados e na qualidade da visualização dos mesmos. É importante destacar que ambas

as plataformas realizam as mesmas operações. Além disso, é importante ressaltar que a análise das vibrações forçadas, relacionadas à ação de ondas oceânicas conforme descrito nos tópicos 5.2 a 5.5, não foi implementada no *software* de elementos finitos.

A análise do problema acoplado fluido-estrutura neste *software*, utiliza a formulação conhecida como U-P, onde os deslocamentos da estrutura e as pressões do fluido são tratadas como variáveis desconhecidas. O fluido é representado por um campo de pressão, derivado da resolução da equação da onda empregando o método de Galerkin. A estrutura, por sua vez, é descrita por meio de variáveis de deslocamento. Nesse contexto, uma matriz de acoplamento aparece no sistema final, facilitando a interação e a resolução do sistema acoplado (Pedroso, 2005b; França Jr; Ribeiro; Pedroso, 2019).

3.8.2. Elementos finitos utilizados no ANSYS®

Em todas as análises numéricas feitas pelo MEF são utilizados os elementos finitos SHELL281 e FLUID220, aplicados à casca cilíndrica e ao fluido interno, respectivamente. Na região de contato entre a casca e o fluido, foi utilizado o elemento CONTA174. A seguir, são apresentadas as características de cada elemento finito utilizado neste trabalho.

O elemento finito SHELL281 (Figura 3.8) é adequado para aplicações lineares, de grande rotação e/ou não lineares com grandes deformações. Esse elemento leva em conta os efeitos de rigidez devido à carga de pressões distribuídas. Composto por oito nós, cada nó possui seis graus de liberdade: três translações nos eixos x , y e z , e três rotações em torno dos eixos x , y e z . Dessa forma, o elemento é capaz de avaliar os efeitos de flexão e de membrana em cascas cilíndricas.

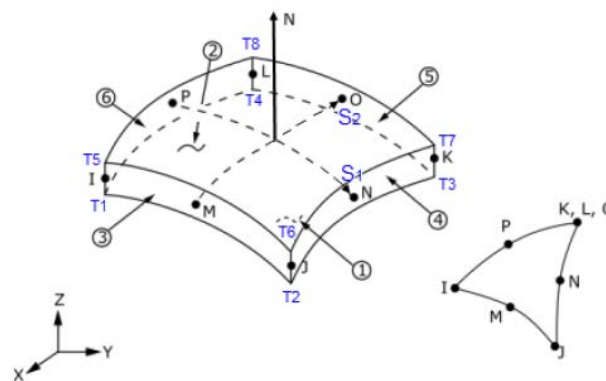


Figura 3.8 – Elemento finito SHELL281 (ANSYS®, 2021).

Já o elemento finito FLUID220 (Figura 3.9) é um elemento sólido tridimensional de 20 nós, com graus de liberdade em cada nó, permitindo captar as translações nas três direções, além das pressões. É um elemento adequado para os problemas de interação fluido-estrutura.

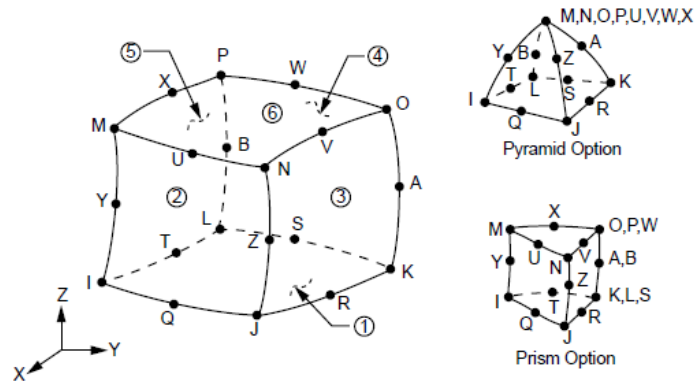


Figura 3.9 – Elemento finito FLUID220 (ANSYS®, 2021).

O elemento CONTA174 (Figura 3.10) possui 8 nós e é destinado à análise de contato rígido-flexível e flexível-flexível, podendo ser aplicado no contato entre corpos sólidos ou cascas. É usado para representar contato e deslizamento entre superfícies tridimensionais e uma superfície deformável definida por este elemento. O elemento possui as mesmas características geométricas da face do elemento sólido ou de casca ao qual está conectado.

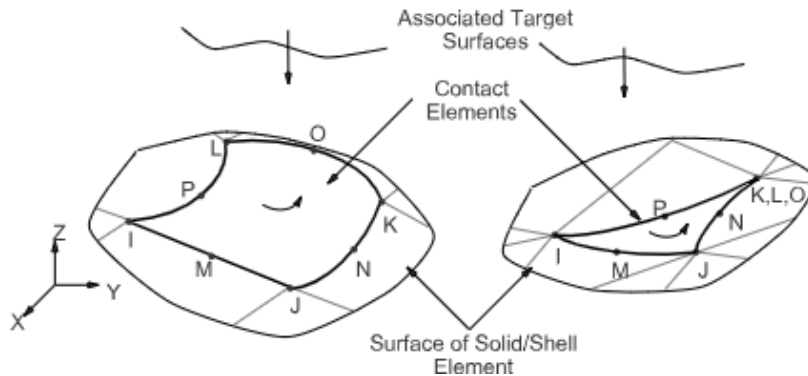


Figura 3.10 – Elemento finito CONTA174 (ANSYS®, 2021).

Foi realizado um estudo de convergência para determinar a malha de elementos finitos que apresentou pequenas diferenças percentuais entre o modelo analítico, tanto para a casca cilíndrica quanto para a cavidade acústica desacoplada, e posteriormente para o caso acoplado. Todos esses detalhes e discussões estão abordados no próximo capítulo.

4. RESULTADOS DA ANÁLISE EM VIBRAÇÕES LIVRES

Neste capítulo são discutidos os resultados obtidos para a análise das vibrações livres da casca cilíndrica, realizando um estudo de convergência do modelo analítico através da comparação dos resultados obtidos em trabalhos existentes em literatura e por meio do modelo numérico desenvolvido via elementos finitos. Em todos os resultados deste capítulo, não foi considerado a parcela da carga compressiva de peso próprio, que inclui o trabalho indicado na equação (3.17). Inicialmente, é importante realizar uma análise desacoplada e, posteriormente, acoplada da casca cilíndrica e do fluido, com o objetivo de avaliar os modos de vibração dominantes e realizar uma interpretação assertiva acerca dos resultados analíticos e numéricos obtidos. Portanto, a partir do modelo analítico validado e considerando a geometria adotada para as análises desta tese, comparam-se os resultados obtidos pelos modelos analítico e numérico.

Para o modelo analítico, foi realizado um estudo de convergência com o objetivo de determinar o número adequado de termos nas expansões modais, conforme a equação (3.14), com uma boa convergência dos resultados. A configuração que apresentou as menores diferenças percentuais em os modos de vibração foi: $N_u = N_v = N_w = 7$. A Figura 4.1 mostra a variação do número de termos com as frequências normalizadas, em relação ao modo fundamental, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica em análise.

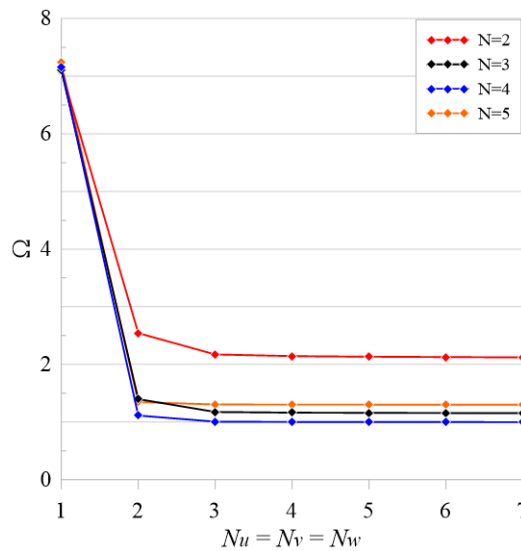


Figura 4.1 – Estudo da convergência do número de termos (N_u , N_v e N_w) da expansão modal.

As diferenças percentuais são calculadas a partir da seguinte expressão:

$$E(\%) = \left| \frac{E_{ref} - E_{trab}}{E_{ref}} \right| \times 100 \quad (4.1)$$

4.1. ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DA CASCA CILÍNDRICA VAZIA

Neste tópico, são avaliadas as vibrações livres da casca cilíndrica vazia obtidas a partir do modelo analítico, comparando-as com os resultados obtidos em outros trabalhos da literatura. Kurylov e Amabili (2011) validaram seu trabalho comparando as frequências naturais de uma casca cilíndrica vazia, engastada-livre, com o estudo de Leissa (1973). Eles utilizaram as seguintes propriedades físicas e geométricas: $E = 68,258$ GPa; $\nu = 0,3$; $\rho_s = 2712,2$ kg/m³; $R = 73,914$ mm; $h = 0,178$ mm; $L = 305,31$ mm. A Tabela 4.1 apresenta a comparação das frequências naturais obtidas entre essas duas referências e o presente trabalho, incluindo as diferenças percentuais, E_1 , em relação ao trabalho de Leissa (1973), e E_2 , em relação ao trabalho de Kurylov e Amabili (2011).

Tabela 4.1 – Comparação das frequências naturais de uma casca cilíndrica vazia por diferentes trabalhos.

(m, n)	ω_{Ref1} (Hz)*	ω_{Ref2} (Hz)*	$\omega_{trabalho}$ (Hz)	E_1 (%)	E_2 (%)
(1, 2)	489,00	456,40	458,62	6,21	0,49
(1, 3)	246,00	233,90	234,82	4,55	0,39
(1, 4)	181,00	175,70	176,03	2,75	0,19
(1, 5)	207,00	205,30	205,58	0,68	0,14
(1, 6)	280,00	279,40	279,72	0,10	0,12
(1, 7)	378,00	377,60	378,00	0,00	0,11
(1, 8)	494,00	494,10	494,56	0,11	0,09
(1, 9)	627,00	627,10	627,71	0,11	0,10
(1, 10)	776,00	776,20	776,91	0,12	0,09

*Referência 1: (Leissa, 1973); Referência 2: (Kurylov; Amabili, 2011).

Nota-se a partir da Tabela 4.1 que há boa convergência dos resultados das frequências naturais, com diferenças percentuais entre 6,21% e 0,09%. As maiores distorções estão relacionadas aos menores valores de ondas circunferenciais do trabalho de Leissa (1973), que podem ser explicado por uma aproximação da inércia no plano da casca cilíndrica considerada nesta referência. Já no trabalho de Kurylov e Amabili (2011), foi utilizada a teoria de Sanders-Koiter e os campos de deslocamentos foram descritos a partir dos polinômios de Chebyshev, de forma semelhante ao adotado neste trabalho, o que levou a diferenças mínimas entre os resultados. Com esta análise, é possível afirmar que o modelo analítico está em concordância com trabalhos existentes em literatura.

Em relação a geometria adotada, cujos parâmetros físicos e geométricos estão definidos na Tabela 3.2, foi feito um estudo de convergência da malha de elementos finitos para avaliar

as frequências naturais da casca cilíndrica desacoplada. A Figura 4.2 mostra a convergência para $m = 1$ e $m = 2$, variando o número de ondas circunferenciais (n) entre 1 e 10.

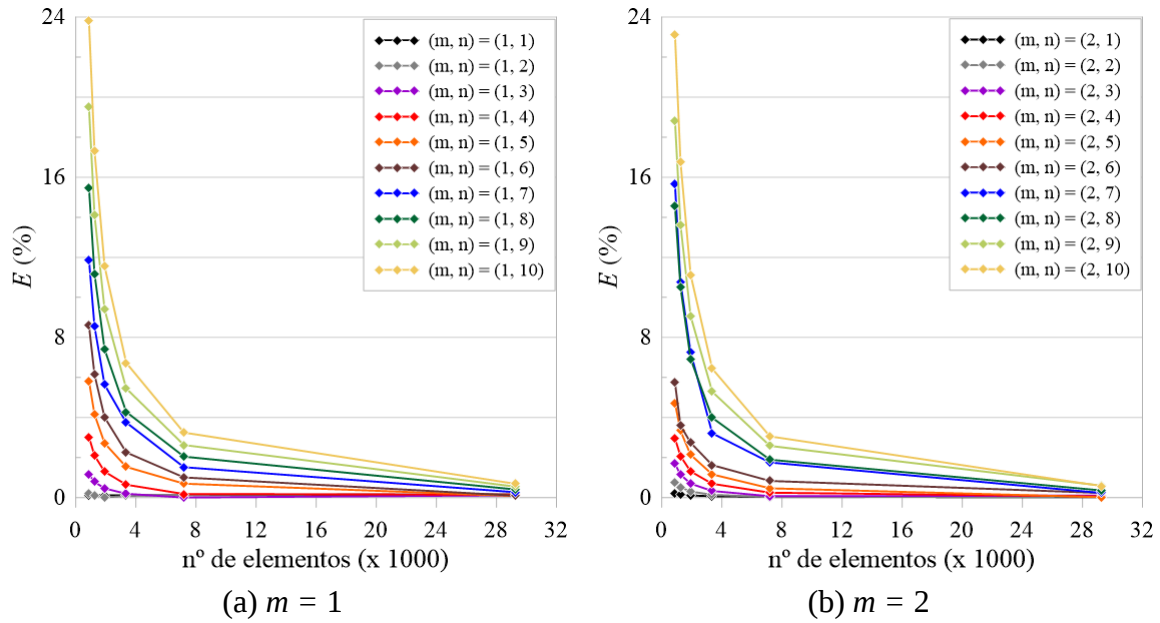


Figura 4.2 – Estudo da convergência da malha de elementos finitos para as frequências naturais da casca cilíndrica vazia. a) $m = 1$; b) $m = 2$.

Para uma malha de 29280 elementos finitos, obteve-se uma convergência para todos os modos de vibração analisados, com diferenças percentuais entre 0,03% e 0,69%. Desta forma, foi utilizada esta malha para o estudo da casca cilíndrica. Um maior refinamento da malha não é necessário, visto que valores das frequências naturais estão próximos entre os modelos analítico e numérico, sem acarretar um maior custo computacional. A Figura 4.3 ilustra o refinamento da malha e apresenta o número de elementos finitos utilizados em cada modelagem para a casca cilíndrica desacoplada.

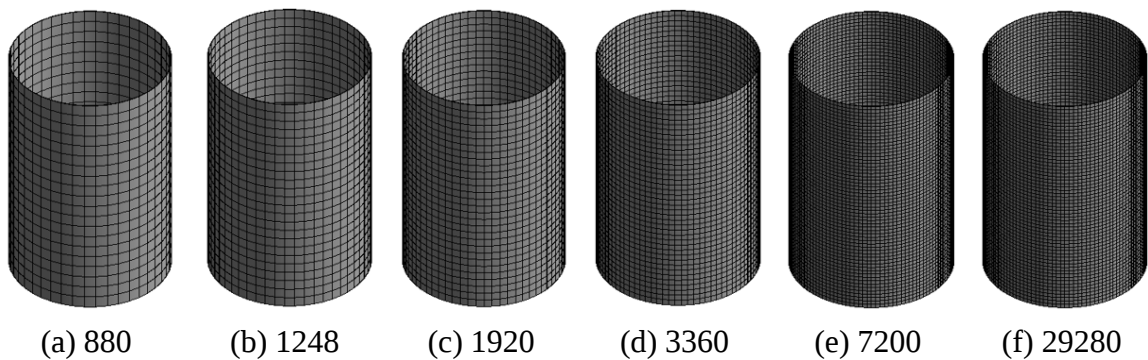


Figura 4.3 – Refinamento da malha de elementos finitos para a casca cilíndrica desacoplada.

Em relação ao método analítico, a convergência de resultados para a frequência natural ocorreu para $N_u = N_v = N_w = 7$ (Figura 4.1). Portanto, considerando os modelos analítico e

numérico, foram comparados os valores das frequências naturais obtidos por estes dois modelos, conforme apresentado na Tabela 4.2. A partir desta tabela, nota-se uma boa concordância entre os dois modelos.

Tabela 4.2 – Comparação das frequências naturais da casca cilíndrica desacoplada ($m = 1$ e $m = 2$) para a geometria adotada neste trabalho.

$m = 1$				$m = 2$			
(m, n)	$\omega_{analítico}$ (Hz)	ω_{mef} (Hz)	E_1 (%)	(m, n)	$\omega_{analítico}$ (Hz)	ω_{mef} (Hz)	E_2 (%)
(1, 1)	2,870	2,866	0,12	(2, 1)	8,221	8,223	0,03
(1, 2)	1,234	1,231	0,19	(2, 2)	4,887	4,884	0,05
(1, 3)	0,672	0,671	0,12	(2, 3)	3,009	3,006	0,11
(1, 4)	0,582	0,582	0,15	(2, 4)	2,025	2,024	0,06
(1, 5)	0,757	0,758	0,09	(2, 5)	1,571	1,571	0,03
(1, 6)	1,062	1,063	0,10	(2, 6)	1,520	1,526	0,37
(1, 7)	1,443	1,447	0,27	(2, 7)	1,595	1,591	0,24
(1, 8)	1,889	1,897	0,41	(2, 8)	2,048	2,055	0,36
(1, 9)	2,397	2,411	0,55	(2, 9)	2,514	2,529	0,60
(1, 10)	2,967	2,988	0,69	(2, 10)	3,067	3,085	0,58

A Figura 4.4 mostra os quatro primeiros modos da casca cilíndrica engastada-livre vazia, desenvolvido por meio do MEF. Nesta figura, estão indicados a posição e o sentido de cortes longitudinais para avaliar a qualidade do modelo analítico na determinação do modo de vibração. Estas seções estão situadas nos pontos máximos das deformadas modais, equivalentes aos picos das deformações circunferenciais da casca cilíndrica. A comparação dos modos de vibração obtido pelos modelo analítico e numérico são comparados na Figura 4.5. Já a Figura 4.6 mostra a comparação dos modos de vibração no sentido transversal, situados na coordenada $x = L$, da Figura 4.4. Todos os deslocamentos estão normalizados.

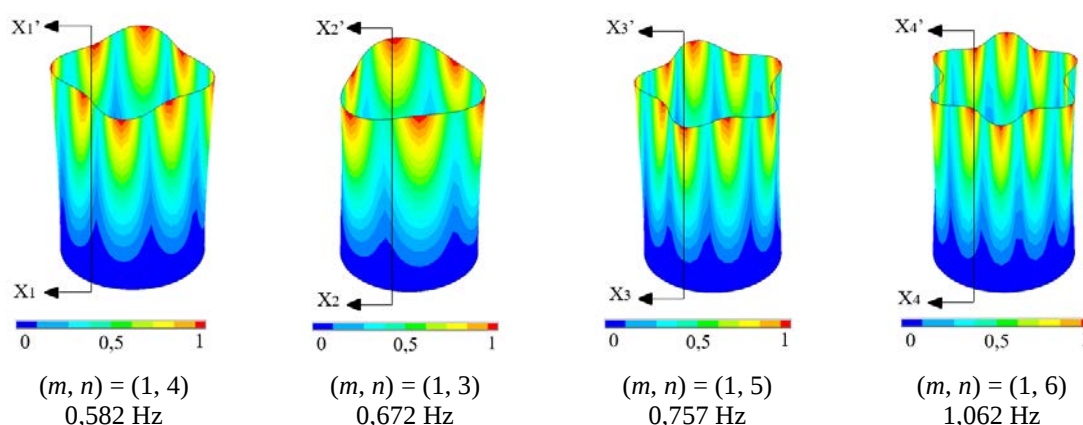


Figura 4.4 – Quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica vazia obtidos pelo MEF.

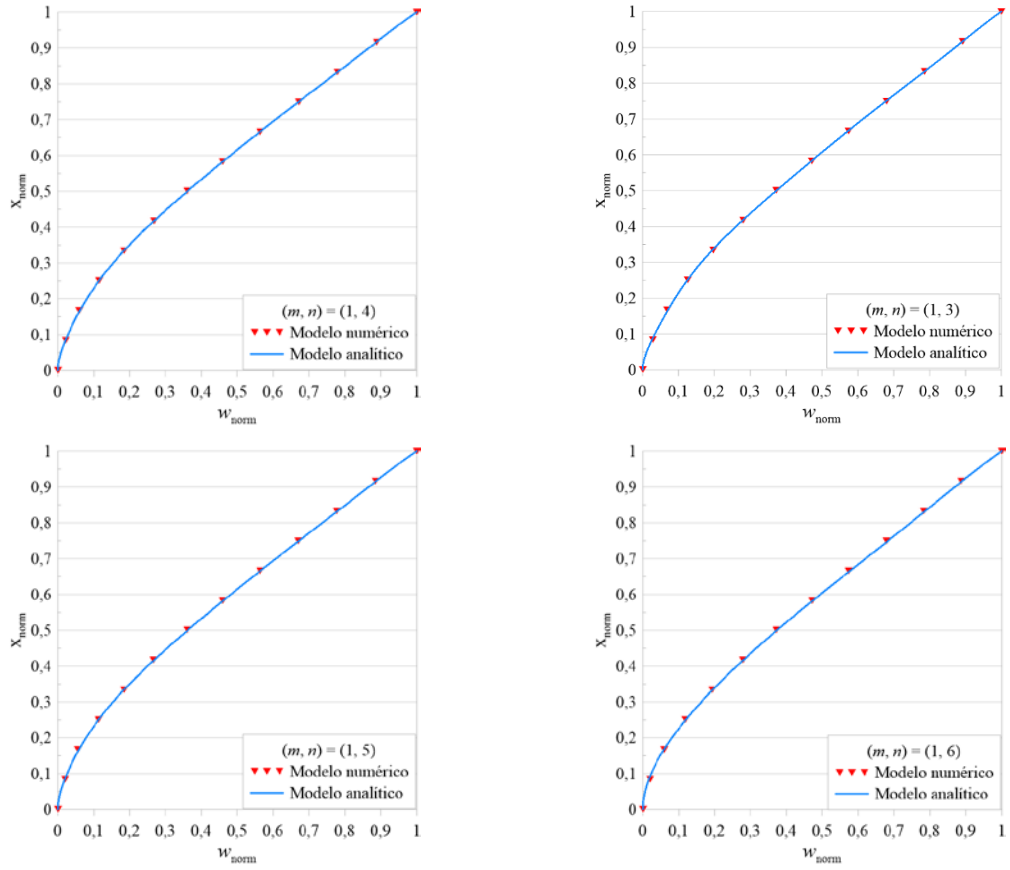


Figura 4.5 – Comparação de cortes longitudinais ($x = L$) entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica vazia.

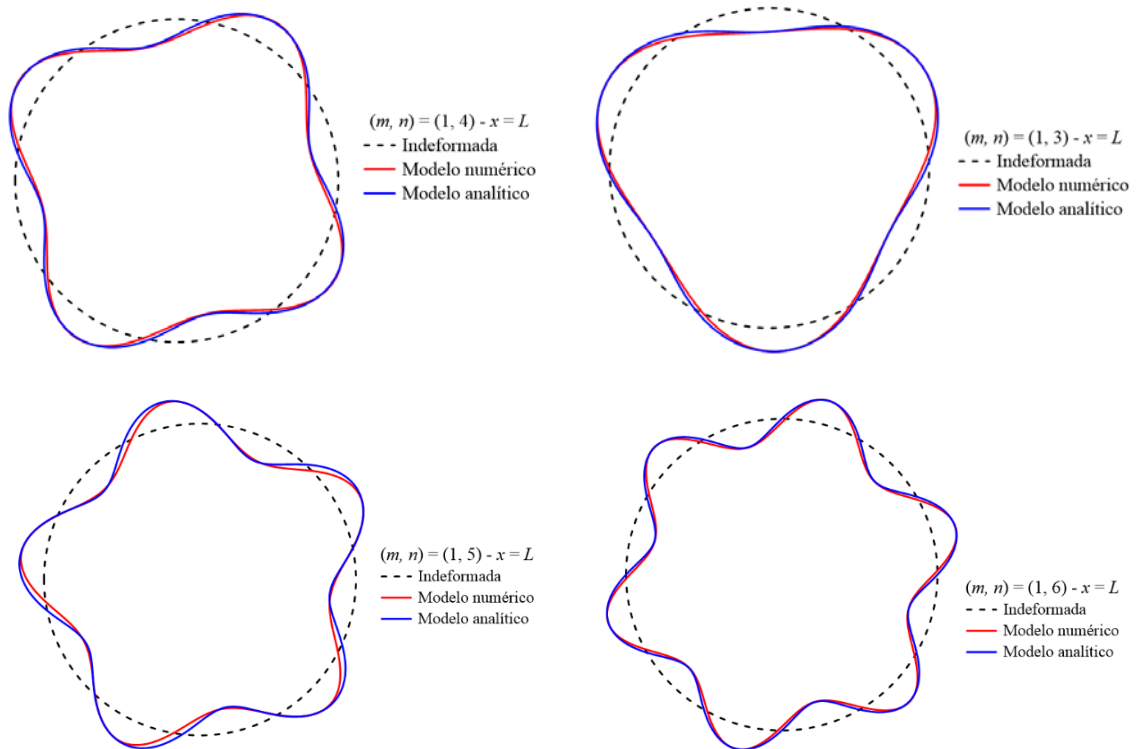


Figura 4.6 – Comparação de cortes transversais ($x = L$) entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica vazia.

A Figura 4.7 compara os espectros das frequências naturais para a casca cilíndrica desacoplada entre os métodos analítico e numérico, variando n e considerando $m = 1$ e $m = 2$. Observa-se uma convergência dos resultados para ambos os modelos com as duas curvas sobrepostas. Os espectros também indicam o valor da menor frequência natural igual a 0,582 Hz e para modo de vibração $(m, n) = (1, 4)$.

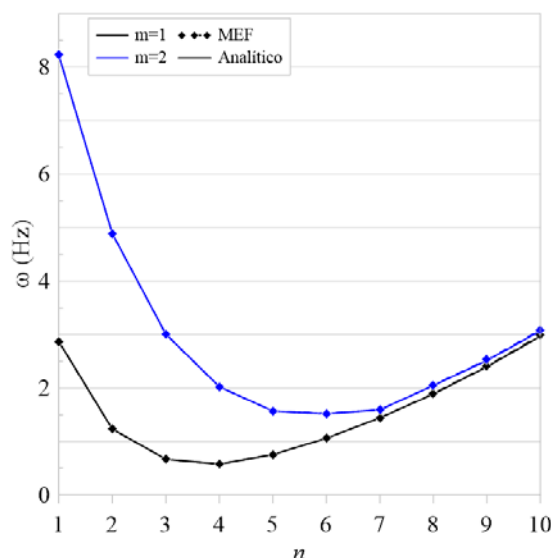


Figura 4.7 – Comparação dos espectros de frequências naturais para a casca cilíndrica desacoplada entre os métodos analítico e numérico ($m=1$ e $m=2$).

Ao avaliar todos os resultados para a frequência natural e para os respectivos modos de vibração, observa-se uma boa concordância entre os métodos analítico e numérico para a casca cilíndrica vazia, onde os valores das frequências naturais e os modos de vibração estão próximos entre ambos os modelos.

Nota-se que foram obtidos cortes no sentido longitudinal apenas para os deslocamentos radiais (Figura 4.5). Tal fato é justificado devido os deslocamentos radiais (w) são bem maiores que os deslocamentos axiais (u) e circunferenciais (v) (Silva, 2008; Montes, 2015).

4.2. ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DA CAVIDADE ACÚSTICA

De forma semelhante ao caso anterior, o fluido é analisado de forma desacoplada, avaliando o comportamento de uma cavidade acústica que é a maneira que o *software* de elementos finitos realiza o processamento do fluido, conforme descrito no tópico 3.8.

O fluido é analisado como uma cavidade acústica desacoplada com a condição de contorno aberta-aberta cujas pressões são nulas nas extremidades. A formulação analítica é desenvolvida a partir da equação de propagação de ondas, sendo as frequências e modos de

vibração da cavidade acústica obtidos, respectivamente, através das seguintes equações (Blevins, 1979):

$$f_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\lambda_{\bar{j},\bar{k}}^2}{R^2} + \frac{\bar{i}^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

$$\tilde{\phi}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = J_{\bar{j}} \left(\lambda_{\bar{j},\bar{k}} \frac{r}{R} \right) \text{sen} \left(\frac{\bar{i} \pi x}{L} \right) \begin{cases} \text{sen } \bar{j} \theta \\ \text{ou} \\ \cos \bar{j} \theta \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $c=1500$ m/s é a velocidade do som no fluido, $\bar{i}$ é o índice nodal circular, $\bar{j}$ é o índice axial, $\bar{k}$ indica um diâmetro nodal da cavidade acústica e $\lambda_{\bar{j},\bar{k}}$ é obtido através de $J'_{\bar{j}}(\lambda_{\bar{j},\bar{k}})=0$.

A Figura 4.8 apresenta o estudo da convergência da malha de elementos finitos para obter as frequências naturais da cavidade acústica aberta-aberta e desacoplada. Foram considerados os quatro primeiros modos de vibração e as diferenças percentuais são calculadas em relação aos resultados do modelo analítico desenvolvido nesta tese, conforme apresentado na Tabela 3.2.

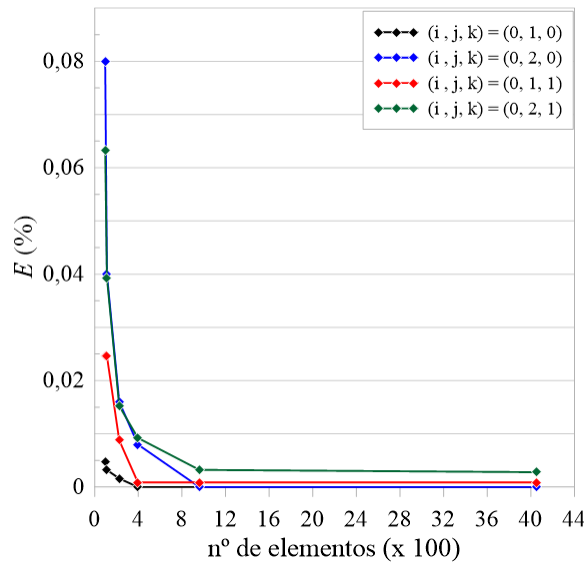


Figura 4.8 – Estudo da convergência da malha de elementos finitos para as frequências naturais da cavidade acústica aberta-aberta e desacoplada.

Nota-se que a partir de uma quantidade de elementos finitos, os valores convergiram para diferenças percentuais de no máximo 0,003%. A Figura 4.9 ilustra o refinamento da malha de elementos finitos feito para a cavidade acústica desacoplada com a apresentação do número de elementos finitos de cada malha.

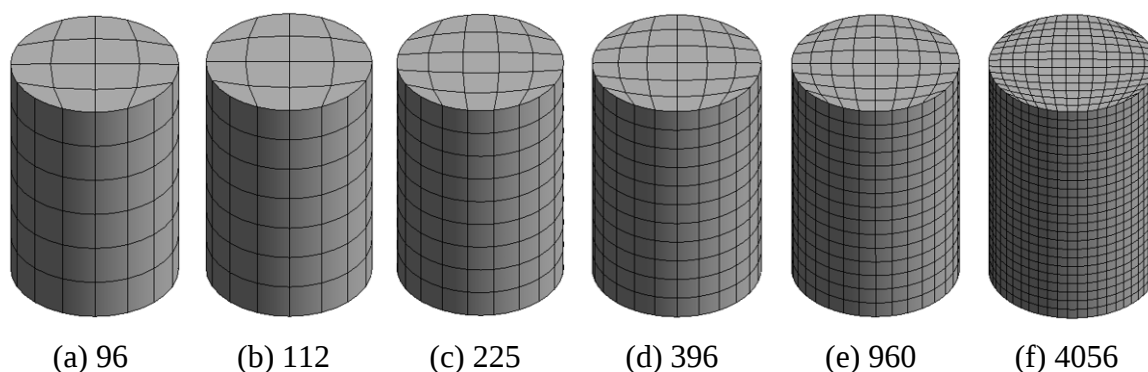
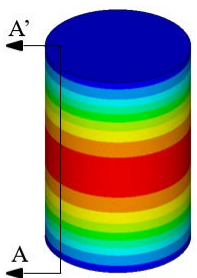
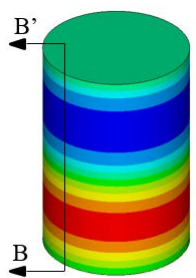
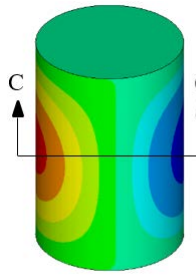
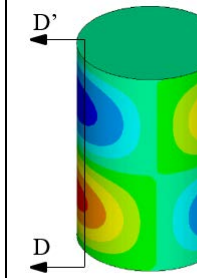


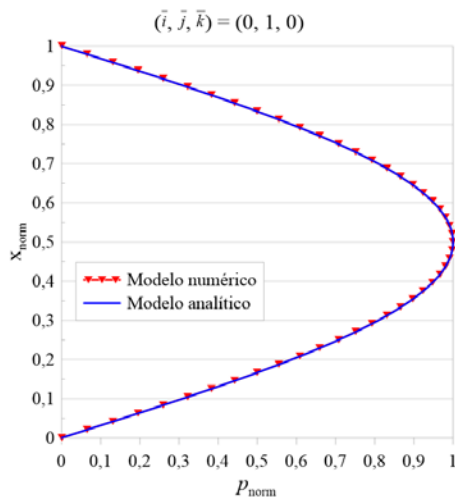
Figura 4.9 – Refinamento da malha de elementos finitos para a cavidade acústica desacoplada.

A Tabela 4.3 mostra os quatro primeiros modos de vibração para a cavidade acústica aberta-aberta e desacoplada. Foi utilizada a malha constituída por 4056 elementos finitos para a comparação entre as frequências obtidas para os modelos analítico e numérico. Também estão indicadas as diferenças percentuais (valores numéricos entre parênteses) entre os dois modelos.

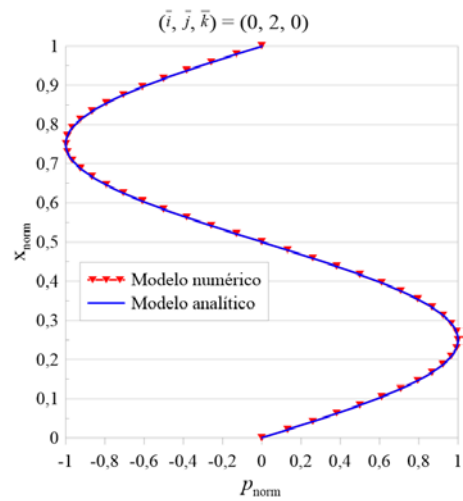
Tabela 4.3 – Frequências naturais e deformadas modais da cavidade acústica desacoplada obtidos a partir da análise de elementos finitos.

Deformada modal				
$(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$	(0, 1, 0)	(0, 2, 0)	(0, 1, 1)	(0, 2, 1)
ω_{mef} (Hz)	6.25	12.50	12.642	16.643
ω_{ana} (Hz)	6.25 (0.00%)	12.50 (0.00%)	12.642 (0.001%)	16.643 (0.003%)

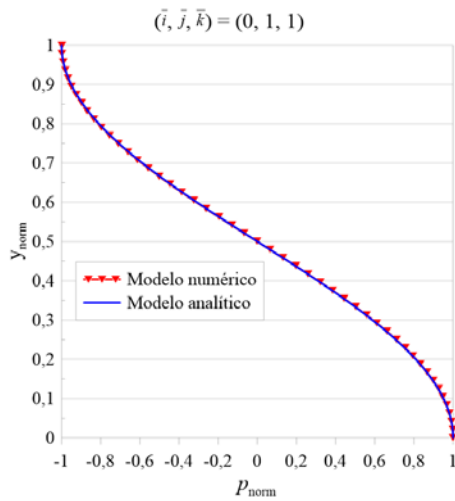
A Figura 4.10 apresenta uma comparação dos campos de pressão da cavidade acústica desacoplada, obtidos a partir dos modelos analítico e numérico, feita por meio de cortes longitudinais ou transversais, situados nas regiões máximas e mínimas das deformadas modais. Na Figura 4.10, p_{norm} é normalizada em relação aos valores máximos encontrados em cada análise, x_{norm} é a coordenada longitudinal normalizada pelo comprimento L da casca e y_{norm} é a coordenada circunferencial normalizada pelo comprimento circunferencial $2\pi R$ da casca.



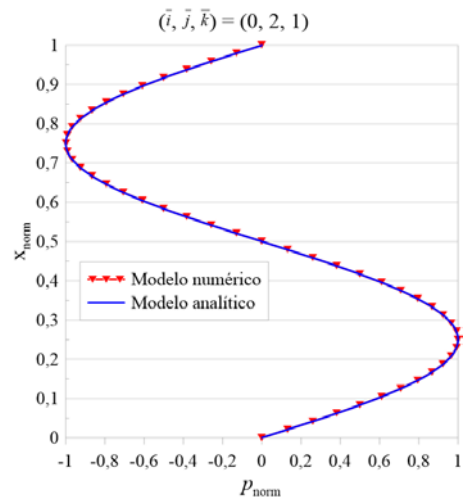
(a) Modo (0, 1, 0)



(b) Modo (0, 2, 0)



(c) Modo (0, 1, 1)



(d) Modo (0, 2, 1)

Figura 4.10 – Comparação dos campos de pressão da cavidade acústica desacoplada, obtidos a partir dos modelos analítico e numérico.

Nota-se que tanto o modelo analítico quanto o numérico comportaram-se de forma idêntica. É possível observar na Tabela 4.3 e na Figura 4.10, que para os 1ª, 2ª e 4ª modos de vibração, foram feitas cortes longitudinais (ao longo de x), e para o 3º modo de vibração foi realizado apenas um corte transversal. Por se tratar de um problema tridimensional, há a variação das pressões em todas as direções. Entretanto, apenas as regiões com variações de pressão máxima e mínima foram apresentadas na Figura 4.10 com o intuito de ilustrar a concordância entre o modelo de elementos finitos e o modelo analítico dado pelas equações (4.2) e (4.3). É importante ressaltar que para os outros casos, tem-se uma variação linear ou constante dependendo do ponto de análise.

Pelos resultados obtidos, por meio das frequências e modos de vibração da casca cilíndrica e cavidade acústica desacopladas, o modelo numérico está alinhado com o modelo analítico.

É importante ressaltar que os valores de vibração da casca cilíndrica são bem menores que os obtidos para a cavidade acústica, demonstrando que os modos da casca podem ser excitados antes da cavidade acústica referente ao fluido interno. Desta forma, justifica-se a análise com uma formulação incompressível no regime de massa adicional.

4.3. ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DA CASCA CILÍNDRICA COM FLUIDO INTERNO E EXTERNO

Nesta seção são incorporados o fluido interno, considerando a influência da superfície livre, e o fluido externo para simular a presença de ondas oceânicas nas vibrações livres da casca cilíndrica. Para isso, apresenta-se um estudo de validação, confrontando o modelo analítico com outros trabalhos existentes em literatura. Em seguida, é aplicada a geometria adotada neste trabalho (Tabela 3.2), onde a validação foi feita através do MEF.

Para validar o modelo analítico com a influência do fluido interno e sua superfície livre, foi utilizado o trabalho do Kim, Lee e Ko (2004). As propriedades físicas e geométricas da casca cilíndrica (engastada-livre) e do fluido são: $E = 206$ GPa, $\nu = 0,3$, $\rho_s = 7850$ kg/m³, $R = 0,2$ m, $h = 0,002$ m, $L = 0,6$ m e $\rho_f = 1000$ kg/m³. A altura de fluido interno adotada para este caso foi $H_i = 0,50L$. A Tabela 4.4 apresenta o comparativo das frequências naturais para a casca vazia, e para a estrutura com fluido interno e considerando os efeitos de *sloshing*. Os valores entre parênteses referem-se às diferenças percentuais dos resultados do modelo analítico em relação aos resultados obtidos por Kim, Lee e Ko (2004).

Tabela 4.4 – Comparação das frequências naturais para uma casca vazia e para uma casca parcialmente preenchida considerando o movimento de superfície livre.

Casca vazia			Modos de <i>sloshing</i>			Modos de casca acoplado		
(m, n)	ω_{Ref} (Hz)*	$\omega_{trabalho}$ (Hz)	(k, n)	ω_{Ref} (Hz)*	$\omega_{trabalho}$ (Hz)	(m, n)	ω_{Ref} (Hz)*	$\omega_{trabalho}$ (Hz)
(1, 3)	183,95	184,10 (0,08%)	(1, 1)	1,5065	1,5064 (0,01%)	(1, 3)	170,34	170,68 (0,20%)
(1, 4)	204,73	204,94 (0,10%)	(1, 2)	1,9478	1,9478 (0,01%)	(1, 4)	190,91	191,15 (0,13%)
(1, 5)	299,25	299,71 (0,15%)	(1, 0)	2,1819	2,1819 (0,00%)	(1, 5)	268,82	268,80 (0,01%)
(1, 2)	307,14	307,32 (0,06%)	(1, 3)	2,2847	2,2846 (0,01%)	(1, 2)	274,98	276,04 (0,39%)
(1, 6)	430,23	431,44 (0,28%)	(2, 1)	2,5104	2,5737 (2,53%)	(1, 6)	344,09	344,02 (0,02%)

*Referência: (Kim; Lee; Ko, 2004).

Ao avaliar os resultados obtidos na Tabela 4.4, nota-se que há boa convergência entre o modelo analítico e o trabalho de Kim, Lee e Ko (2004) para os valores das frequências naturais e os modos de vibração. Existem pequenas diferenças percentuais, com variação máxima de 2,53%, as quais podem ser explicadas devido as diferenças entre os modelos analíticos. Kim, Lee e Ko (2004) utilizaram a teoria de Love para descrever os campos de deformações e curvatura da casca cilíndrica, e os campos de deslocamentos foram obtidos por meio das funções de viga. Mesmo diante dessas pequenas diferenças, os resultados obtidos neste trabalho são considerados satisfatórios.

Em relação ao fluido externo, o modelo analítico foi confrontado com o estudo feito por Kwak (2010). Cabe salientar que neste caso, a condição de contorno utilizada pelos autores foi uma casca cilíndrica com diafragma de cisalhamento em ambas as extremidades. Para isso, as expansões modais por meio dos polinômios de Chebyshev devem ser ajustadas para atender as condições de contorno $v = w = M_x = N_x = 0$ nas extremidades da casca. As expansões modais indicadas na equação (3.11) são reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{N_u} \sum_{n=0}^N U_{m,n}(t) T_{2m-1}^* \cos(n\theta) \\ v(x, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{N_v} \sum_{n=1}^N V_{m,n}(t) (T_{m+1}^* - T_{m-1}^*) \sin(n\theta) \\ w(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{N_w} \sum_{n=0}^N W_{m,n}(t) (T_{m+1}^* - T_{m-1}^*) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Estes campos de deslocamentos seguem os mesmos pressupostos citados anteriormente sobre as condições geométricas de contorno serem exatamente atendidas enquanto as condições naturais de contorno são satisfeitas minimizando a energia do sistema pelo Rayleigh-Ritz (Kurylov; Amabili, 2011; Paak; Païdoussis; Misra, 2014).

Deste modo, esta validação também permite avaliar se a metodologia utilizada neste trabalho é coerente para outras condições de contorno. As propriedades físicas e geométricas são: $E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$, $\rho_s = 7850$ kg/m³, $R = 0,4$ m, $h = 0,003$ m, $L = 1,2$ m e $\rho_f = 1000$ kg/m³. A Tabela 4.5 mostra a comparação dos valores das frequências naturais, obtidos pelo modelo analítico, para a casca cilíndrica vazia e com fluido externo em todo o comprimento da estrutura ($H_e = L$). É importante ressaltar que neste caso são analisadas as pressões impulsivas, ou seja, sem a presença do movimento de superfície livre.

Tabela 4.5 – Comparação das frequências naturais para uma casca vazia e uma casca cilíndrica em contato com um fluido externo. Casca cilíndrica com diafragma de cisalhamento em ambas as extremidades.

Casca vazia			Casca com fluido externo		
(m, n)	$\omega_{Ref} \text{ (Hz)}^*$	$\omega_{trabalho} \text{ (Hz)}$	(m, n)	$\omega_{Ref} \text{ (Hz)}^*$	$\omega_{trabalho} \text{ (Hz)}$
(1, 5)	142,86	139,10 (2,63%)	(1, 4)	66,25	65,37 (1,64%)
(1, 4)	145,73	143,37 (1,62%)	(1, 5)	69,84	68,09 (2,51%)
(1, 6)	176,67	172,32 (2,46%)	(1, 3)	87,84	88,01 (0,19%)
(1, 3)	210,36	209,45 (0,43%)	(1, 6)	91,76	89,56 (2,40%)
(1, 7)	230,13	225,61 (1,97%)	(1, 7)	125,76	123,34 (1,93%)

*Referência: (Kwak, 2010).

Observa-se que os valores obtidos para as frequências naturais na Tabela 4.5 são próximos aos encontrados por Kwak (2010), sendo as maiores diferenças percentuais inferiores a 2,63%, para a casca vazia, e 2,51%, para a casca com fluido externo. Essas diferenças podem ser explicadas pela diferença entre a teoria empregada para descrever o campo de deformação e as mudanças de curvatura da superfície média da casca cilíndrica. Kwak (2010) utilizou a teoria de Donnell–Mushtari para descrever os campos de deformações e para a expansão modal do campo de deslocamento foram consideradas as seguintes expressões, que atendem as condições de contorno (4.4) (Leissa, 1993):

$$\Phi_{ui}(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \Phi_{vi}(x) = \Phi_{wi}(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), i = 1, 2, \dots, m \quad (4.5)$$

Apesar destas diferenças entre esta tese e o trabalho de Kwak (2010), o modelo analítico apresentado pode ser considerado aceitável e com os mesmos modos de vibração obtidos pelo autor. É importante salientar que nestes resultados não foram considerados a influência concomitante entre fluido externo e interno (com *sloshing*). Diante disso, as próximas análises são para a geometria deste trabalho (Tabela 3.2).

Para incorporar o fluido externo ao modelo de elementos finitos, foram adotados os conceitos da teoria das faixas e da massa adicional (Blevins, 1979; Pedroso, 1982a). A massa adicional de fluido externo aplicada às paredes externas da casca é aproximadamente equivalente ao volume do cilindro correspondente ao sistema acoplado entre a casca cilíndrica e o fluido. O conceito baseia-se em um cilindro que se move através de um fluido em repouso, obtido pela sobreposição de um modelo com fluxo permanente ao redor do

cilindro e deslocamentos a uma velocidade uniforme (Pedroso, 1982a). A massa adicional por unidade de comprimento $A^{(s)}$, aplicada nas paredes externas da casca, é definida por:

$$A^{(s)} = \rho_w \pi R^2 \quad (4.6)$$

Este volume de fluido em torno da casca, deve atender a condição de contorno de radiação no infinito (Sommerfeld, 1949), de não retorno (reflexão) de onda na fronteira longínqua:

$$\nabla_n p = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.7)$$

em que p_n é o campo de pressões da cavidade acústica. Esta equação é o resultado da clássica teoria de ondas e possui analogia a um amortecimento estrutural.

De forma similar aos casos desacoplados, realizou-se a análise da convergência da malha de elementos finitos para as frequências naturais da casca cilíndrica acoplada com o fluido interno e externo, conforme a Figura 4.11. As diferenças percentuais foram calculadas em relação aos resultados analíticos. Neste caso, a casca cilíndrica está completamente preenchida e envolta pelo fluido externo em todo o comprimento ($H_i = H_e = L$).

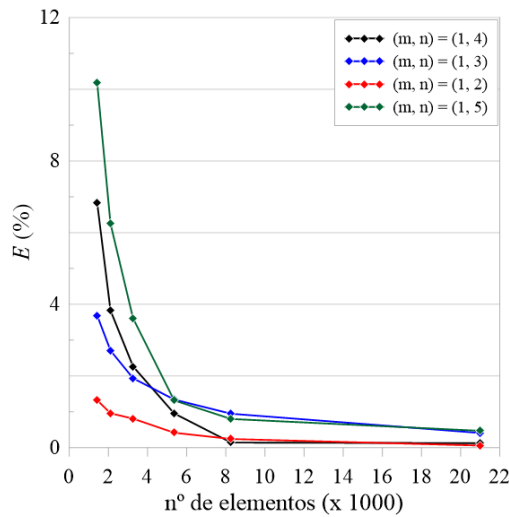


Figura 4.11 – Estudo da convergência da malha de elementos finitos para as frequências naturais da casca cilíndrica acoplada com fluido.

Para a construção do modelo numérico, foi utilizada uma malha de 21000 elementos finitos, composta por 3360 elementos SHELL281 e 17640 elementos FLUID220, apresentando boa convergência dos resultados após o refinamento da malha. A Figura 4.12 apresenta os modelos utilizados na Figura 4.11, indicando a malha de elementos finitos para cada caso, considerando a casca cilíndrica acoplada com fluido.

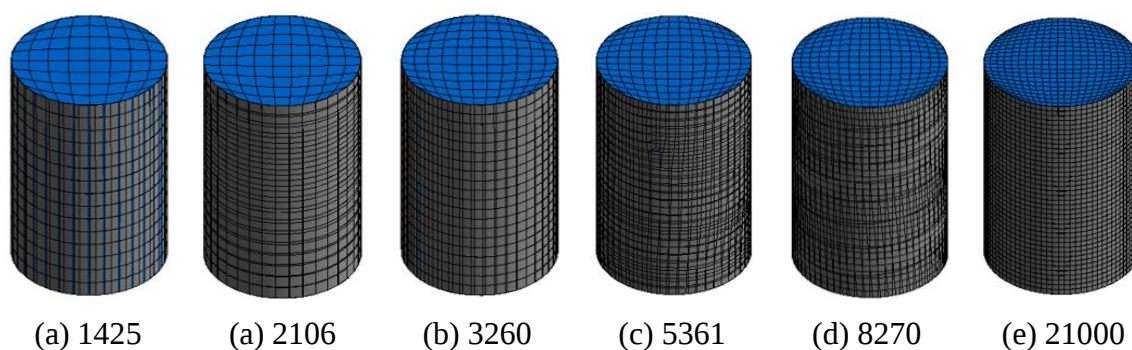
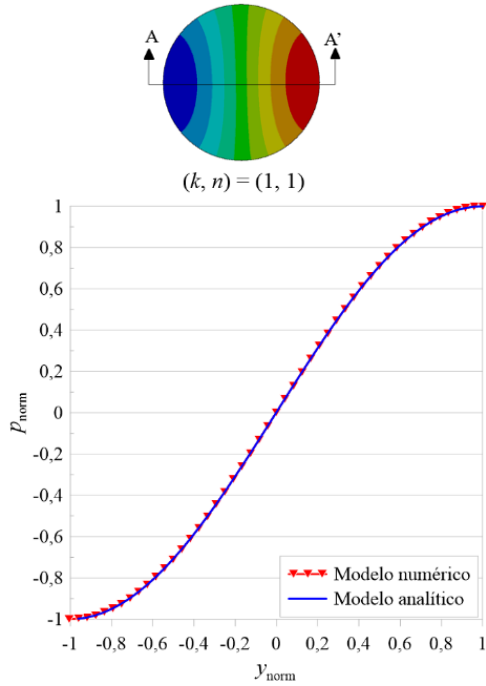


Figura 4.12 – Refinamento da malha de elementos finitos para a casca cilíndrica acoplado com fluido.

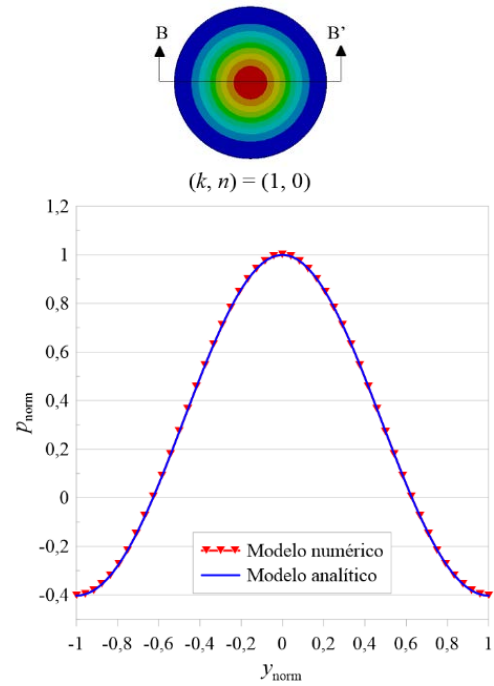
Em relação ao modelo analítico, o número de termos utilizados para expansão modal nas direções axial (N_u), circunferencial (N_v) e radial (N_w) foi igual a sete. Já para os parâmetros do fluido, foram utilizados $N_f = 5$ e $N_s = 2$. Esta configuração apresentou boa convergência para os valores das frequências naturais e foi utilizada para os casos do modelo analítico. Em seguida, a partir dos modelos analítico e numérico que obtiveram convergência, e considerando simultaneamente o contato do fluido externo e interno, além da influência da superfície livre do fluido interno, foi feita uma comparação entre ambos os modelos.

A Figura 4.13 mostra os quatro primeiros modos de vibração, em $x = L$, devido ao efeito de *sloshing*, onde os deslocamentos modais mínimo e máximo são dados pelas cores azul e vermelho, respectivamente. Foram traçados cortes nas regiões máximas e mínimas, os quais estão indicados nesta figura. A partir destes cortes, os deslocamentos modais obtidos pelo modelo analítico (linha azul) e modelo de elementos finitos (linha vermelha com símbolos) são comparados. Os deslocamentos estão normalizados em relação aos valores máximos obtidos para cada caso.

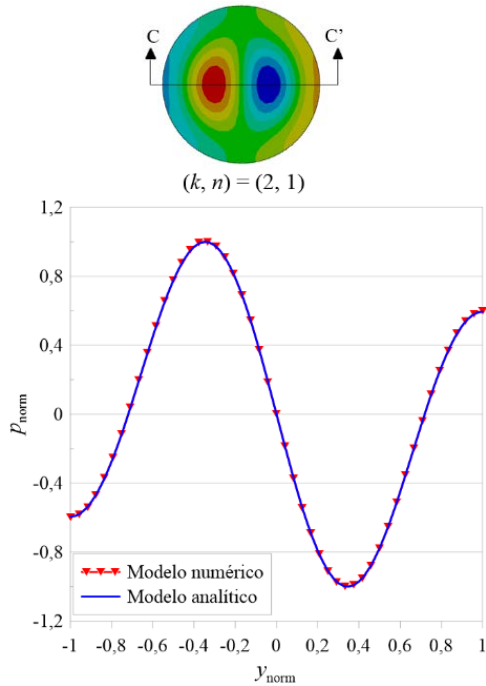
Observa-se uma boa convergência entre os dois modelos, visto que em todo o comprimento as curvas se comportaram de forma idêntica. É importante salientar que estes modos não excitaram os modos da casca cilíndrica, sendo apenas os primeiros modos do movimento de superfície livre do fluido interno. Nota-se que o primeiro e terceiro modos são antissimétricos, enquanto o segundo e quarto modos são simétricos (Pedroso, 1995), conforme indicado na Figura 4.13.



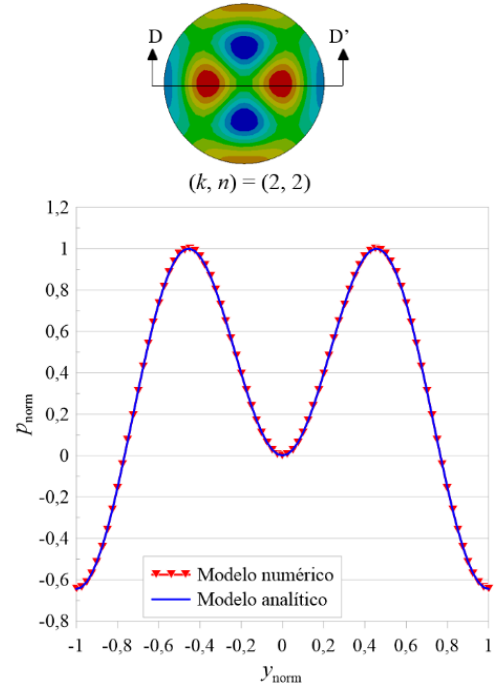
(a) 1º modo de *sloshing* (antissimétrico)



(b) 2º modo de *sloshing* (simétrico)



(c) 3º modo de *sloshing* (antissimétrico)



(d) 4º modo de *sloshing* (simétrico)

Figura 4.13 – Quatro primeiros modos de vibração de *sloshing*.

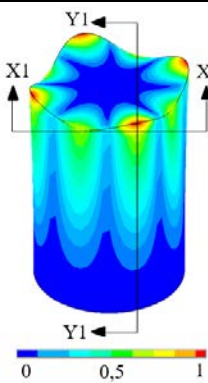
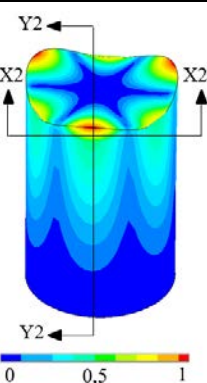
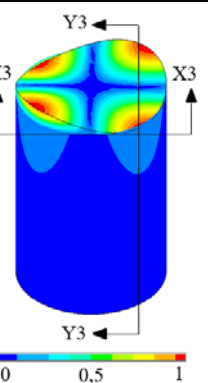
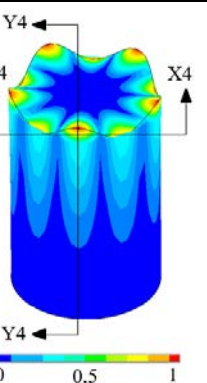
A Tabela 4.6 apresenta a comparação das frequências naturais obtidas para os modelos analítico e numérico. As diferenças percentuais são em relação ao modelo numérico e estão indicadas pelos valores entre parênteses. Também estão apresentados os quatro primeiros modos de vibração associados ao *sloshing* e à casca cilíndrica.

Tabela 4.6 – Comparação das frequências naturais da casca com fluido interno e externo, utilizando o modelo analítico e numérico.

Modos de <i>sloshing</i>			Modos de casca		
$(\bar{m}, n)$	ω_{mef} (Hz)	$\omega_{trabalho}$ (Hz)	(m, n)	ω_{mef} (Hz)	$\omega_{trabalho}$ (Hz)
(1, 1)	0,1062	0,1060 (0,21%)	(1, 4)	0,1107	0,1108 (0,13%)
(1, 0)	0,1543	0,1543 (0,02%)	(1, 3)	0,1143	0,1138 (0,41%)
(2, 1)	0,1818	0,1821 (0,16%)	(1, 2)	0,1308	0,1309 (0,09%)
(2, 2)	0,2023	0,2059 (1,79%)	(1, 5)	0,1530	0,1533 (0,20%)

Nota-se a partir da Tabela 4.6 uma boa convergência dos resultados, com diferenças percentuais inferiores a 1,79% para os modos de *sloshing* e a maior diferença para os modos da casca cilíndrica foi igual a 0,41%. Estes resultados permitem afirmar que os modelos numérico e analítico estão validados com pequenas variações entre ambos os métodos que podem ser explicadas pela utilização de diferentes métodos de cálculo para o problema. A Tabela 4.7 apresenta os quatro primeiros modos de vibração e os valores das frequências naturais casca cilíndrica com fluido interno e externo ($H_i = H_e = L$). É importante ressaltar que o fluido externo foi incorporado como uma massa adicional, e não foi feita a discretização da malha de elementos finitos em torno da casca cilíndrica.

Tabela 4.7 – Quatro primeiros modos de vibração e os valores das frequências naturais casca cilíndrica com fluido interno e externo ($H_i = H_e = L$).

Deformada modal				
(m, n)	(1, 4)	(1, 3)	(1, 2)	(1, 5)
ω_{mef} (Hz)	0,1107	0,1143	0,1308	0,1530
ω_{ana} (Hz)	0,1108	0,1138	0,1309	0,1533
E (%)	0,13	0,41	0,09	0,20

Outra observação importante é devido aos valores das frequências naturais estarem próximos entre os modos de casca (pressões impulsivas) e do efeito de *sloshing* (pressões convectivas). Durante a excitação das vibrações forçadas, ocorrerá um efeito quase simultâneo entre cada parcela, caracterizando uma situação crítica para a estrutura.

Para evidenciar a convergência entre o modelo analítico e numérico, foram feitos cortes longitudinais e transversais da casca cilíndrica com fluido interno e externo, os quais estão indicados na Tabela 4.7 e apresentados nas Figuras 4.14 e 4.15. A Figura 4.14 mostra os cortes longitudinais posicionados no ponto de deslocamento máximo da deformada modal correspondente a cada modo de vibração. Já a Figura 4.15 apresenta a comparação dos cortes transversais posicionados na coordenada $x = L$, a qual possui os maiores deslocamentos da casca cilíndrica. Nestas figuras, a linha azul refere-se ao modelo teórico enquanto os símbolos em vermelho referem-se ao modelo numérico. Os valores indicados estão normalizados para os valores máximos encontrados em cada análise.

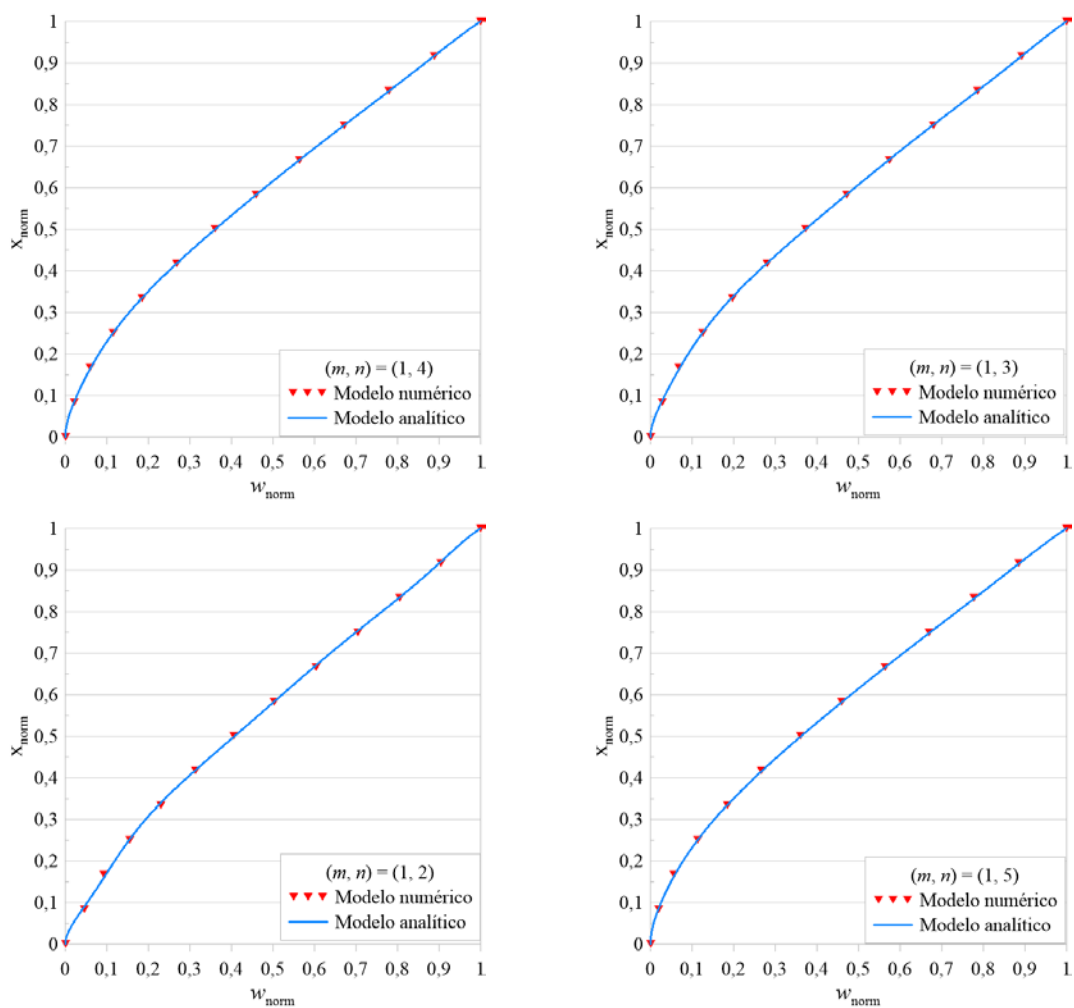


Figura 4.14 – Comparação de cortes longitudinais entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica com fluido interno e externo.

Pode-se observar nas Figuras 4.14 e 4.15 distorções mínimas entre os modelos analítico e numérico com as curvas praticamente sobrepostas. É possível notar que os quatro primeiros modos de vibrações da casca cilíndrica com fluido interno e externo são diferentes dos quatro

primeiros modos da casca vazia (Figura 4.6), o que permite concluir que a presença do fluido provocou uma alteração no comportamento dinâmico da casca cilíndrica.

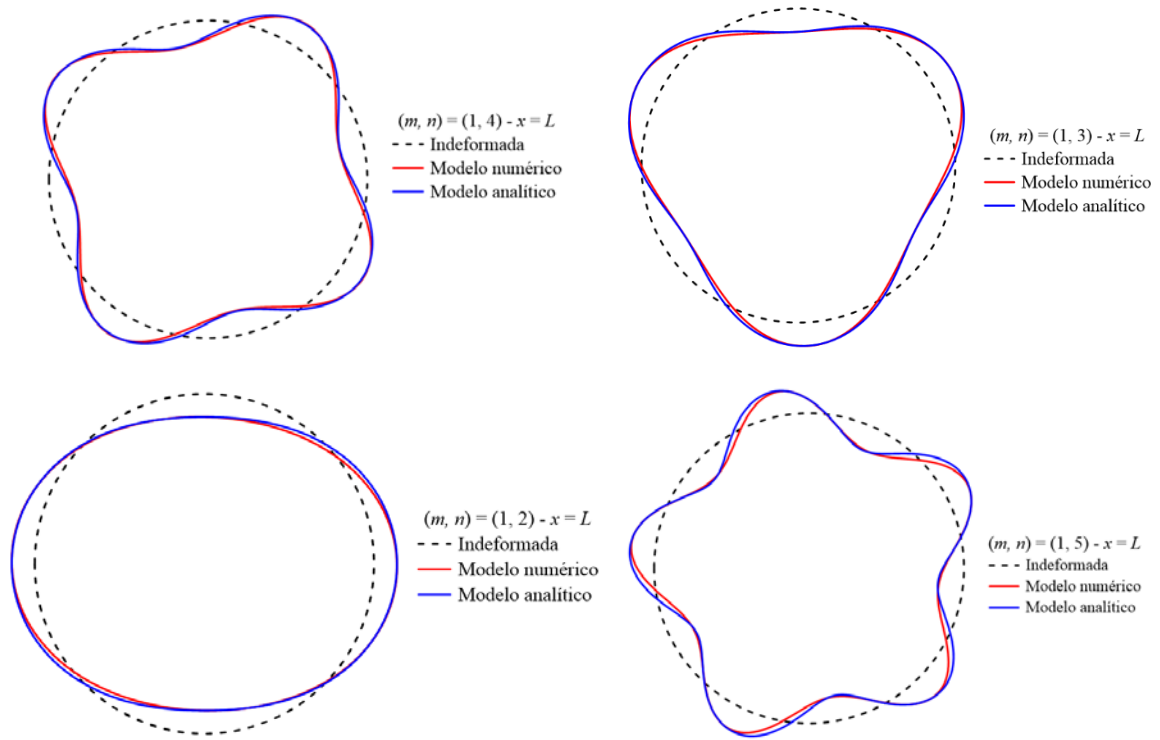


Figura 4.15 – Comparação de cortes transversais ($x = L$) entre os dois modelos, para os quatro primeiros modos de vibração da casca cilíndrica com fluido interno e externo.

A Figura 4.16 apresenta os cinco primeiros modos de vibração da casca cilíndrica, considerando os seguintes níveis de fluido interno: $H_i/L = 0,25, 0,50$ e $0,75$. O fluido externo foi aplicado em todo o comprimento: $H_e/L = 1,00$. Em todos os casos, o movimento de superfície livre (*sloshing*) do fluido interno não excitou os modos da casca cilíndrica. É importante salientar que apenas o caso com a casca cilíndrica totalmente preenchida pelo fluido interno ($H_i/L = 1,00$), o *sloshing* gerou vibrações nos modos da estrutura, conforme apresentado na Tabela 4.7.

Nota-se que o quarto e quinto modos da casca cilíndrica para os níveis intermediários de fluido interno iguais a $0,25$ e $0,50$ são, respectivamente, $(m, n) = (1, 6)$ e $(m, n) = (1, 2)$, iguais à casca vazia (desacoplada), onde os resultados foram apresentados na Tabela 4.2 e na Figura 4.7. Já para o nível de fluido interno (H_i/L) igual a $0,75$, o quarto modo é $(m, n) = (1, 2)$, e o quinto modo passou a ser $(m, n) = (1, 6)$. Isso demonstra que a presença de fluido provoca alterações nos modos de vibração da casca cilíndrica. Para a casca completamente preenchida ($H_i/L = 1,00$), ocorre mais uma alteração, com a inversão do 3º e do 4º modo, equivalentes a $(m, n) = (1, 2)$ e $(m, n) = (1, 5)$, respectivamente.

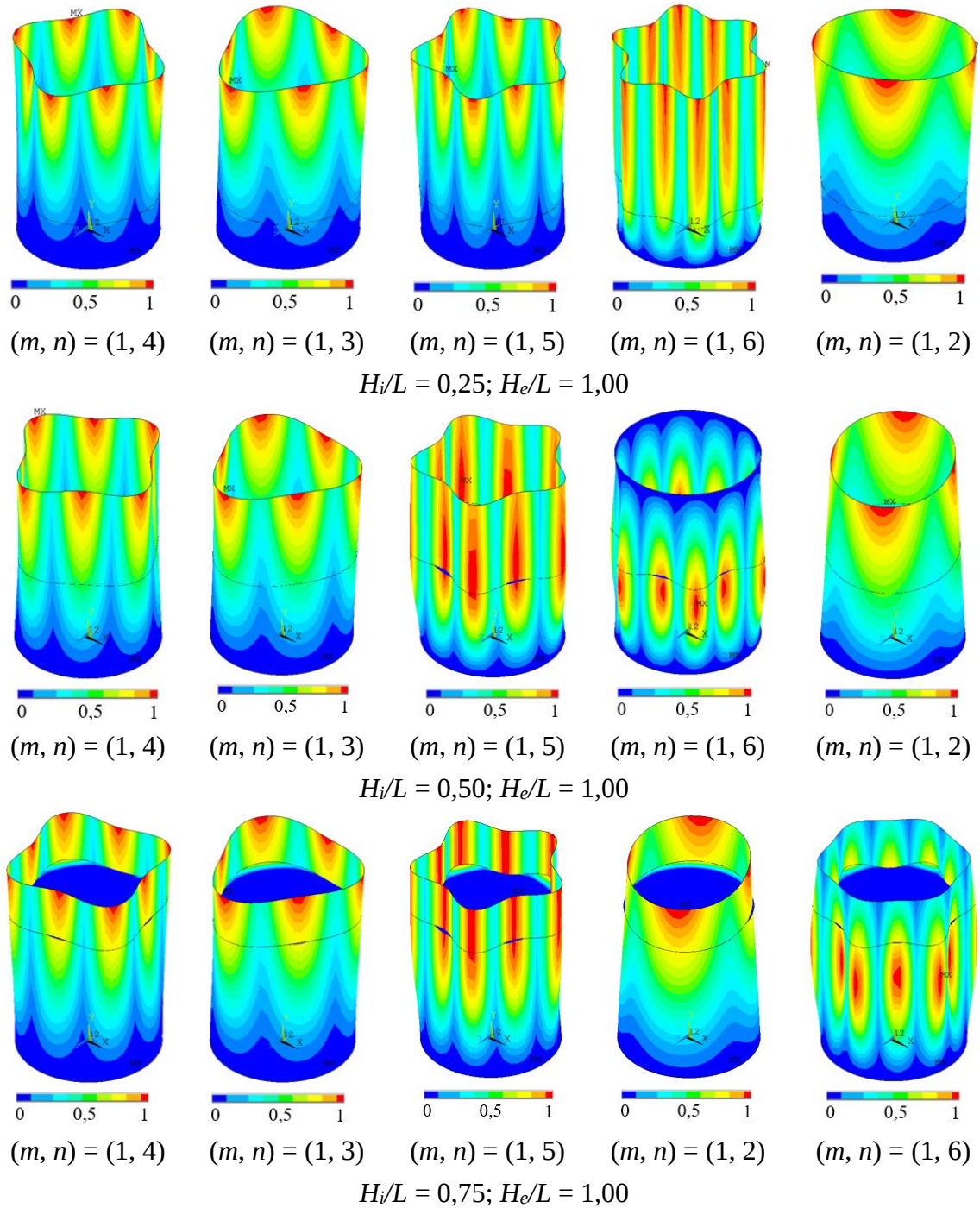


Figura 4.16 – Cinco primeiros modos da casca cilíndrica engastada-livre para os níveis de fluido interno: $H_i/L = 0,25, 0,50$ e $0,75$, com $H_e/L = 1,00$.

Após a validação com trabalhos na literatura e calibragem do modelo numérico, foi desenvolvida uma análise paramétrica para avaliar a influência dos níveis de fluidos internos e externos nas frequências naturais da casca cilíndrica.

A Figura 4.17 mostra o espectro de frequências naturais em função de diferentes níveis de fluido interno e externo. Para cada conjunto de espectros, representado pelas letras a), b), c) e d), foi fixada a altura do fluido externo para as seguintes relações: $H_e/L = 0,25; 0,50; 0,75;$

1,00, respectivamente. Cada espectro de frequências naturais, foi obtido variando-se o nível do fluido interno $H_i/L = 0,00; 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$. Em todos esses casos, considera-se $m = 1$ e varia-se o número de ondas circunferenciais n entre 1 e 10. Os resultados foram realizados para os modelos analítico (linhas contínuas) e numérico (linhas tracejadas), sendo possível avaliar a convergência entre os dois modelos para diferentes modos de vibração e níveis de fluido.

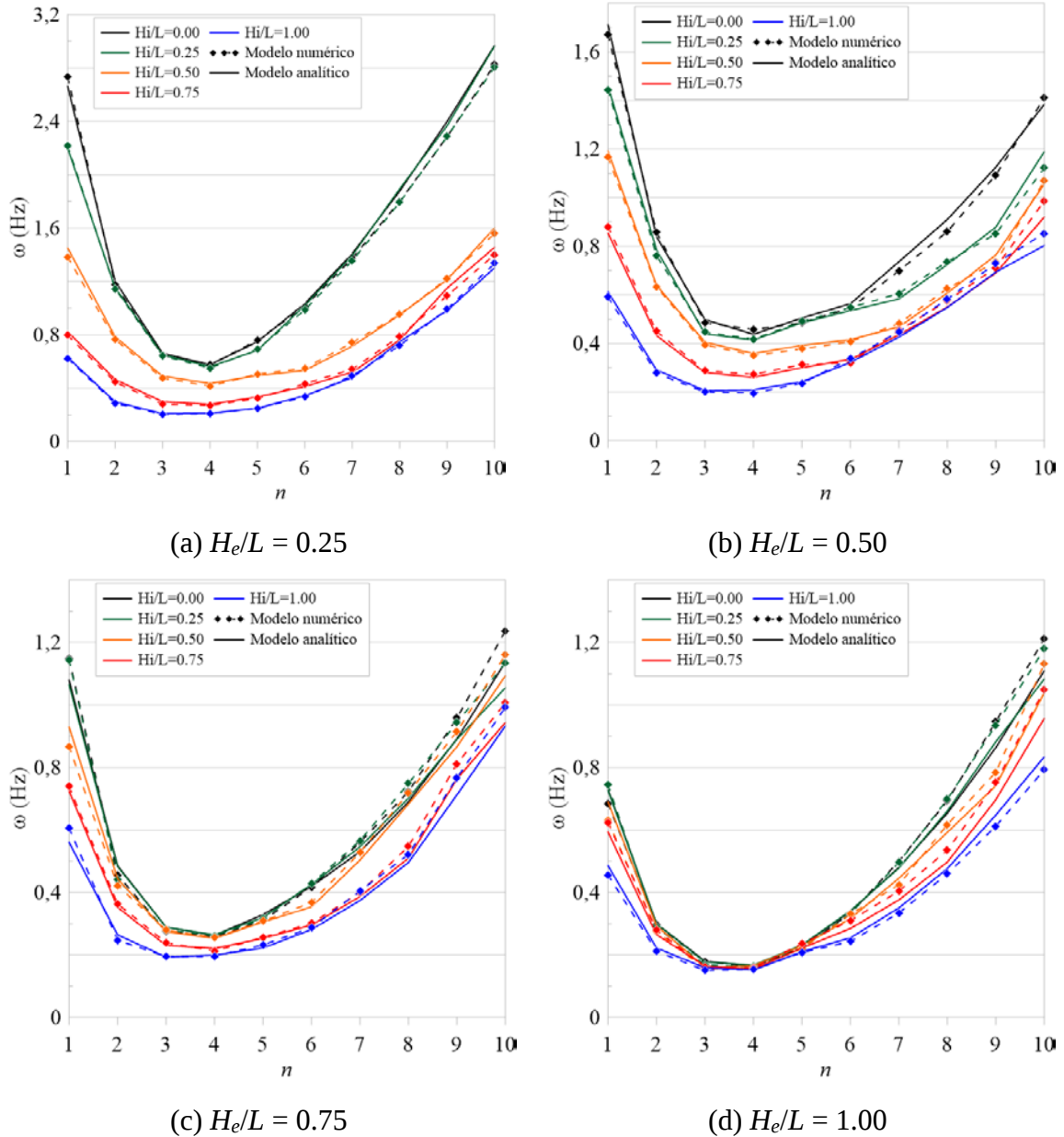


Figura 4.17 – Espectro de frequências naturais variando o nível do fluido interno para algumas relações H_e/L .

Como observado na Figura 4.17, o modo fundamental foi identificado para a configuração $(m, n) = (1, 4)$, sendo este modo repetido para toda variação de fluido externo. Nota-se que, com o aumento do nível do fluido externo e a elevação da altura do fluido interno, a faixa de

frequência entre os diferentes níveis de fluido torna-se cada vez mais próxima, o que é evidenciado pela convergência dos espectros de frequências em torno do modo fundamental. Esse fenômeno pode ser explicado pelo aumento da massa adicional, que reduz a diferença entre cada curva representada pelos diferentes níveis de fluido interno e externo.

A Figura 4.18 mostra a variação das frequências naturais em função do nível de fluido interno e externo para o primeiro modo de vibração da casca cilíndrica. O eixo horizontal representa a variação do fluido interno (Figura 4.18a) e externo (Figura 4.18b), considerando as seguintes relações entre altura do fluido e comprimento: 0,00; 0,25; 0,50; 0,75; 1,00.

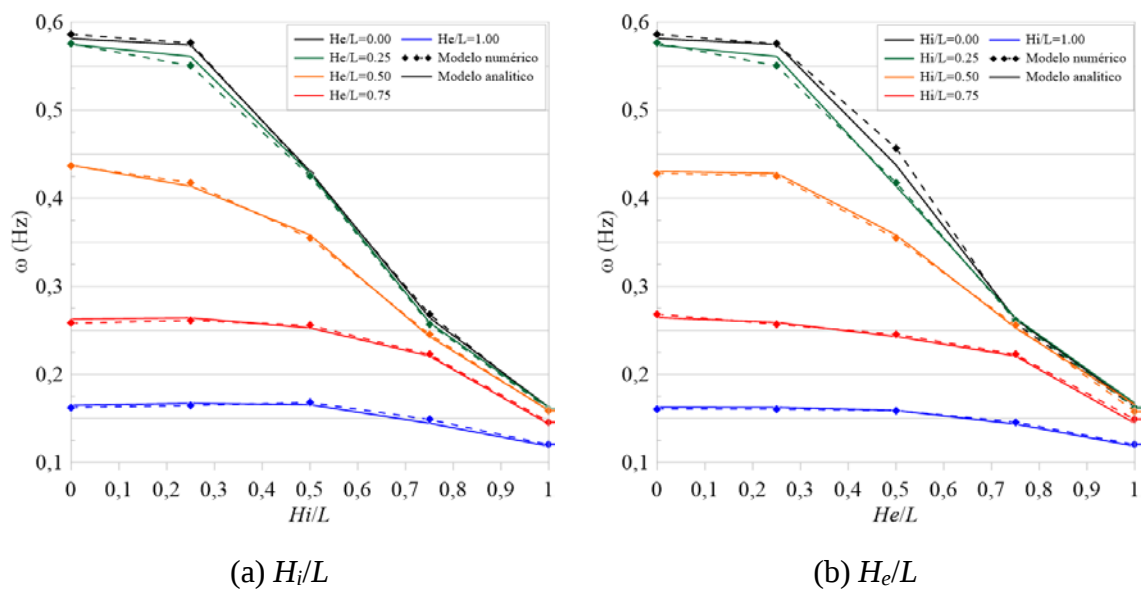


Figura 4.18 – Variação das frequências naturais em função do nível de fluido interno (a) e externo (b), para o modo fundamental da casca cilíndrica (m, n) = (1, 4).

Ao avaliar a Figura 4.18, nota-se que a redução das frequências naturais com o aumento do nível de fluido interno e externo é coerente com os resultados encontrados na literatura (Lakis, Neagu, 1997; Amabili; Paidoussis; Lakis, 1998; Kim; Lee; Ko, 2004; Montes, Silva e Pedroso, 2024a). É importante ressaltar que os valores das frequências naturais são baixos, o que indica que qualquer excitação pode causar uma alta sensibilidade no sistema. Já a cavidade acústica desacoplada apresenta frequências com valores altos e não possui modos dominantes no sistema, o que permite concluir que a influência sobre as frequências iniciais é governada pela casca cilíndrica e pela massa adicional do fluido.

Portanto, para a geometria da casca avaliada nesta tese (Tabela 3.2), a presença do fluido apenas incorporou uma massa adicional ao sistema, gerando a redução das frequências naturais. Nota-se que o fluido externo se comporta de forma semelhante ao fluido interno,

adicionando outra parcela de massa e provocando essa redução das frequências de acordo com a expressão $\omega = \sqrt{K_p/M_p}$, que indica a relação de rigidez (K_p) e massa (M_p) do sistema para obtenção das frequências naturais.

O menor modo de vibração identificado para o *sloshing* foi para $(k, n) = (1, 1)$. Considerando esse modo, a Figura 4.19 apresenta a variação das frequências de *sloshing*, variando-se o nível de fluido interno e externo para as relações H_i/L e H_e/L iguais a 0,25, 0,50, 0,75 e 1,00, para avaliar a influência do fluido interno e externo nas vibrações da superfície livre do fluido. A Figura 4.19 apresenta os mesmos valores para as frequências de *sloshing* obtidos pelos modelos analítico e numérico. As diferenças percentuais entre os dois modelos são inferiores a 0,38%, o que demonstra boa convergência dos resultados. Nota-se que o nível de fluido interno não altera os valores das frequências, uma vez que as curvas estão sobrepostas. Com o aumento do nível do fluido externo é possível encontrar valores estabilizados próximos a 0,106 Hz, comportamento semelhante ao trabalho de Kim, Lee e Ko (2004), em que os autores consideraram apenas a variação do nível do fluido interno.

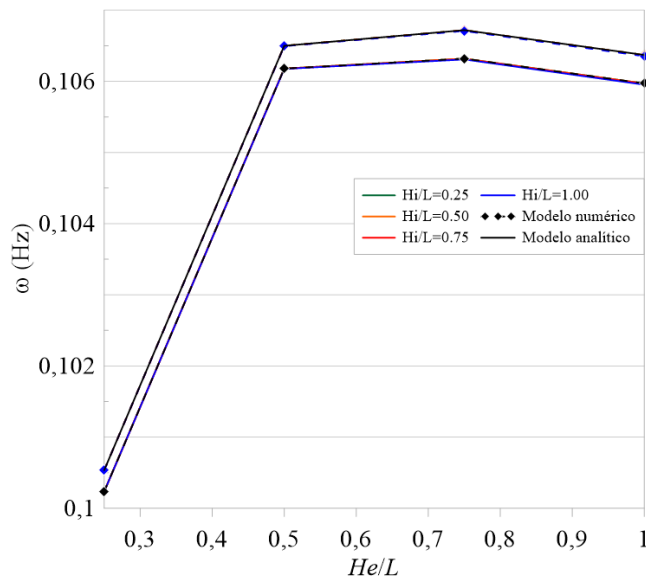


Figura 4.19 – Variação das frequências naturais em função do nível de fluido interno e externo, para os modos de *sloshing*.

Observa-se que com o aumento do fluido externo, é incorporado massa adicional e rigidez na parte externa da casca cilíndrica, produzindo flutuações no movimento de superfície livre (*sloshing*), o que provocou uma pequena redução/oscilação nas frequências do *sloshing*.

Este capítulo apresentou uma abordagem analítico-numérica para analisar as vibrações lineares de uma casca cilíndrica engastada-livre, considerando a presença de fluido externo

e interno, com a inclusão dos efeitos do movimento da superfície livre do fluido interno. Os campos de deformação e as mudanças de curvatura da superfície média da casca cilíndrica foram descritos pela teoria linear de Sanders-Koiter. As expansões modais descrevendo os campos de deslocamento da casca cilíndrica foram obtidas a partir dos polinômios de Chebyshev. Finalmente, o método de Rayleigh-Ritz foi utilizado para derivar as equações lineares de movimento do sistema que, por sua vez, foram resolvidas para obter as frequências naturais e os modos de vibração da casca cilíndrica com a interação do fluido interno e externo. Os resultados obtidos foram comparados com outros estudos encontrados na literatura. Além disso, uma análise via MEF no *software* ANSYS® foi desenvolvida para avaliar a confiabilidade e convergência dos resultados analítico-numéricos. Eles indicam que o nível de fluido modifica as vibrações livres da casca cilíndrica. A consideração do fluido externo e interno para análise de vibrações livres com aplicação de pressões hidrodinâmicas é importante, pois incorpora uma massa adicional e reduz os valores de frequências naturais. A influência da superfície livre também altera as vibrações livres da casca cilíndrica, e, para estruturas de geometria elevadas, observa-se um efeito considerável que não pode ser negligenciado na análise dinâmica. Os resultados indicaram uma boa convergência entre os modelos analítico e numérico, o que permite estudar as vibrações livres de cascas cilíndricas com a presença de fluido através de diferentes metodologias.

Também foi realizada análise paramétrica em relação aos diferentes níveis de fluido interno e externo, e observou-se que o aumento do nível de fluido reduz as frequências naturais da casca cilíndrica, conforme outros resultados encontrados na literatura. Poucos estudos abordam a análise simultânea entre o fluido interno e externo, e os resultados mostraram que o fluido externo acentua a redução das frequências naturais com o aumento do nível do líquido, uma vez que mais uma massa adicional é incorporada ao sistema. Entretanto, a consideração do fluido externo é importante para a análise de vibrações forçadas, assunto a ser discutido no próximo capítulo, avaliando a influência das pressões hidrodinâmicas externas à casca cilíndrica.

5. RESULTADOS DA ANÁLISE EM VIBRAÇÕES FORÇADAS

Neste capítulo são discutidos os resultados obtidos para a análise das vibrações forçadas não lineares da casca cilíndrica, em contato com um fluido externo e interno, considerando o efeito de *sloshing* do fluido interno, submetidas às cargas provenientes da ação de ondas oceânicas nas paredes externas da casca. Devido a esbeltez desta estrutura, o estudo da dinâmica não linear é de grande importância para avaliar os processos de perda de estabilidade, característicos para cascas cilíndricas (Gonçalves; Batista, 1988; Silva, 2008). A compreensão destes fenômenos será feita a partir das respostas no tempo e dos planos fase, os quais contribuem para a definição dos parâmetros essenciais para o desenvolvimento de estruturas mais seguras.

Para a validação entre os modelos analítico e numérico, é considerada a formulação da teoria de Airy para ondas de pequenas amplitudes com o objetivo de obter a pressão lateral aplicada às paredes da casca. Já para as análises das oscilações não lineares, utiliza-se a pressão proveniente da teoria da difração, visto que as dimensões da casca cilíndrica são comparáveis ao comprimento da onda, e com capacidade para modificar o campo de pressões que a onda gera nas proximidades do contato com a estrutura, fato que torna a utilização desta teoria mais adequada para a interpretação destes fenômenos.

O valor adotado para o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido ν foi igual a 1,004. Para os coeficientes de amortecimento viscoso e viscoelástico do material para a casca com fluido, os valores numéricos são: $\eta_1 = 0,005$ e $\eta_2 = 0$.

Todos os resultados apresentados nos tópicos 5.1 a 5.4, não foi considerado a parcela da carga compressiva de peso próprio, que inclui o trabalho indicado na equação (3.17). A análise incorporando esta ação é detalhada apenas no tópico 5.5 deste capítulo.

Para qualquer resultado proveniente da análise não linear da vibração forçada é necessário realizar a integração ao longo do tempo do sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) de segunda ordem, equação (3.92), a partir de alguma técnica numérica, e neste trabalho foi adotado o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

5.1. VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO, A PARTIR DO MODELO ANALÍTICO, OBTIDO UTILIZANDO A TEORIA DE AIRY

Inicialmente, para avaliar se o modelo numérico, desenvolvido a partir do MEF, está coerente com o modelo analítico, foi feita uma validação entre os dois modelos com a aplicação de uma carga lateral oriunda da teoria de Airy, equação (3.69).

Alves *et al.* (2009) apresentam os valores extremos captados por ondógrafo na Baía de Campos em tempestades entre os anos de 1999 e 2000, com valores máximos de altura de onda (H_o) e período de pico (T_o) iguais a 5,63 m e 9,85 s, respectivamente. Neste tópico, a altura da onda (distância entre a crista e o vale) foi considerada igual a 4,0 m, período de projeto igual a 15 s e para a profundidade d'água (h_o) são analisadas três situações: $0,60L$, $0,90L$ e L . A partir desses parâmetros geométricos para a definição da onda, as ondas são classificadas como águas intermediárias ($k_o h_o \cong 1$).

A Tabela 5.1 apresenta as verificações para a classificação das ondas como águas intermediárias, considerando a estrutura em diferentes profundidades d'água, além dos valores das respectivas frequências naturais das ondas para cada caso, obtidas por meio da equação (3.60).

Tabela 5.1 – Verificações para águas intermediárias em diferentes profundidades d'água, e as respectivas frequências naturais das ondas para cada caso.

Profundidade	Intervalo (h_o/L_o)	Intervalo ($k_o h_o$)	ω_o (rad/s)
$h_o = 0,6 L$	$0,05 < h_o/L_o < 0,5 \rightarrow \text{Ok!}$	$\pi/10 < k_o h_o < \pi \rightarrow \text{Ok!}$	0,430
$h_o = 0,9 L$	$0,05 < h_o/L_o < 0,5 \rightarrow \text{Ok!}$	$\pi/10 < k_o h_o < \pi \rightarrow \text{Ok!}$	0,420
$h_o = 1,0 L$	$0,05 < h_o/L_o < 0,5 \rightarrow \text{Ok!}$	$\pi/10 < k_o h_o < \pi \rightarrow \text{Ok!}$	0,419

A Figura 5.1 apresenta o sistema de coordenadas da casca cilíndrica em contato com as ondas externas. O sistema tem como nível de referência (NR), a profundidade d'água considerada, e foi adotado a coordenada de origem do sistema (0, 0), no ponto indicado nesta figura.

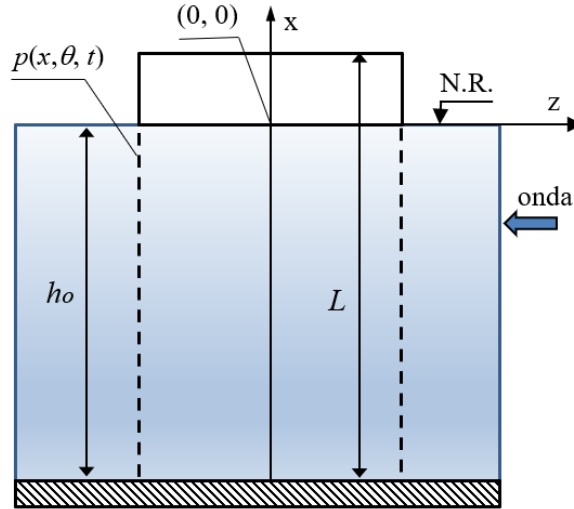


Figura 5.1 – Representação do sistema de coordenadas da casca cilíndrica em contato com as ondas externas.

A partir dos valores numéricos adotados e parâmetros já calculados, foi possível a obtenção dos perfis de onda para cada relação da profundidade d'água e comprimento da estrutura, conforme apresentado na Figura 5.2.

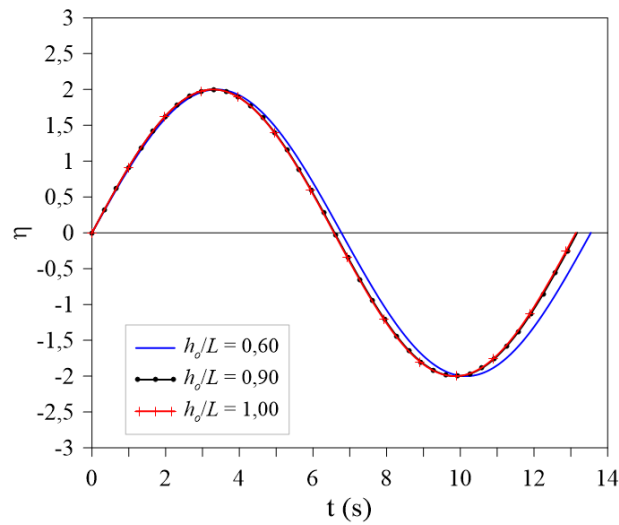


Figura 5.2 – Perfil de onda η ao longo de um período para os três casos analisados.

Para esta validação, foi considerada uma casca vazia e aplicada uma carga nas paredes laterais externas, F_w , referentes à ação das ondas oceânicas, localizada em todo o comprimento da estrutura. O perfil desta carga é desenvolvido a partir da equação (3.69), que contempla a pressão advinda pela teoria de Airy (p_o), e o trabalho deste carregamento é análogo ao caso da equação (3.87), mas com a pressão p_o , ou seja:

$$F_w = R \int_0^{2\pi} \int_0^L p_o \left[H_f(x) - H_f(x - h_o) \right] w dx d\theta \quad (5.1)$$

Observa-se que a equação (3.69) depende do tempo, entretanto para obter uma resposta estática do problema, foi avaliado um único instante em que a onda transpassa pelas paredes laterais da casca e que correspondam ao máximo valor possível para a pressão proveniente da teoria de Airy. Desta forma, a parcela $\sin(k_o z - \omega_o t)$ foi reduzida a um valor unitário, no instante em que o tempo é igual a metade do período da onda ($T_o/2$), correspondendo ao máximo valor desta expressão. Lembrando que foi adotada a coordenada $z = 0$. Desta forma, o sistema de equações não lineares, equação (3.92), foi simplificado devido aos termos harmônicos assumirem um valor unitário. Para obtenção dos deslocamentos transversais pelo modelo analítico, foi utilizado o método de Newton-Rapshon para encontrar a solução do sistema de equações não lineares estáticas da casca cilíndrica.

Para representar os casos com descontinuidade da carga lateral ao longo do comprimento da estrutura, foi utilizada a função Heaviside H_f na determinação do trabalho da carga externa, conforme indicada na equação (5.1). A Figura 5.3 ilustra a variação das pressões das ondas oceânicas ao longo do comprimento da estrutura para os três casos analisados.

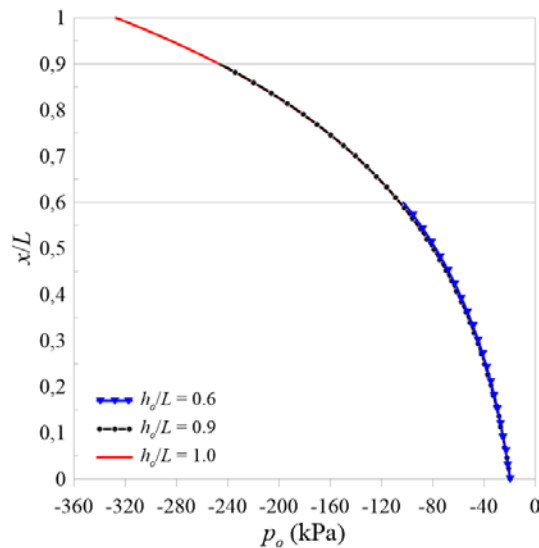


Figura 5.3 – Variação das pressões das ondas oceânicas ao longo do comprimento, segundo a teoria de Airy, da estrutura para os três casos analisados.

Para a validação dos deslocamentos transversais, obtidos a partir do modelo analítico, foram desenvolvidos três modelos em elementos finitos, em que as pressões obtidas pelo método analítico foram aplicadas nas paredes laterais da casca cilíndrica vazia, considerando as três relações entre a profundidade d'água e o comprimento da estrutura, $h_o/L = 0,60, 0,90$ e 1 . A Figura 5.4 ilustra o modelo numérico com carga oceânica aplicado em 60% ($h_o/L = 0,60$) do comprimento da estrutura e os deslocamentos transversais obtidos através do MEF.

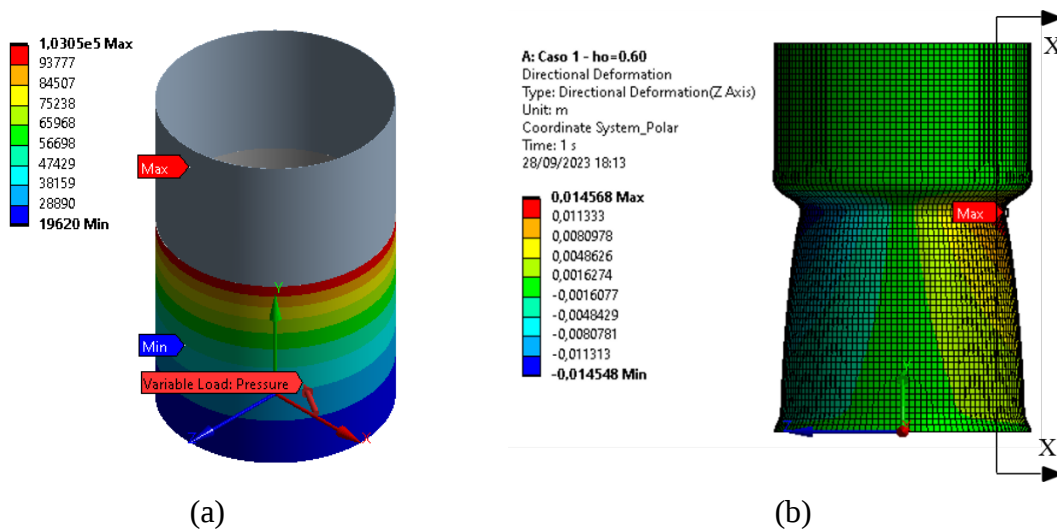


Figura 5.4 – a) Modelo numérico com carga oceânica aplicado em 60% do comprimento da estrutura; b) Deslocamentos transversais obtidos via ANSYS®.

Já a Figura 5.5 apresenta uma comparação dos deslocamentos transversais obtidos entre os modelos analítico e numérico para $h_o/L = 0,60$. Nesta figura, foi feito um corte longitudinal no ponto de maior deslocamento obtido pelo ANSYS® para comparar com o deslocamento transversal máximo calculado no modelo analítico. É observado que com a adição do número de termos da expansão modal da casca cilíndrica, ocorre uma melhor aproximação entre os dois modelos. Entretanto, com $N_u = N_v = N_w = 12$, ocorre uma perda de convergência numérica no método de Newton-Rapshon. A melhor aproximação entre os dois modelos, acontece para $N_u = N_v = N_w = 11$, conforme apresentado na Figura 5.5.

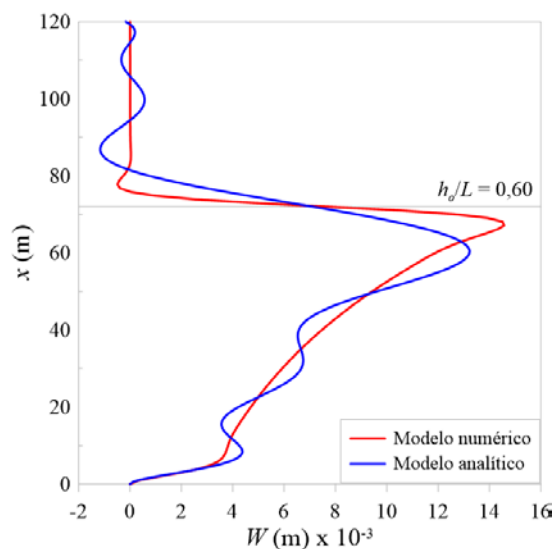


Figura 5.5 – Comparação dos deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico, considerando a teoria de Airy para ondas oceânicas ($h_o/L = 0,60$).

A Figura 5.6 ilustra o modelo numérico com carga oceânica aplicado em 90% do comprimento da estrutura ($h_o/L = 0,90$), e os deslocamentos transversais obtidos via MEF.

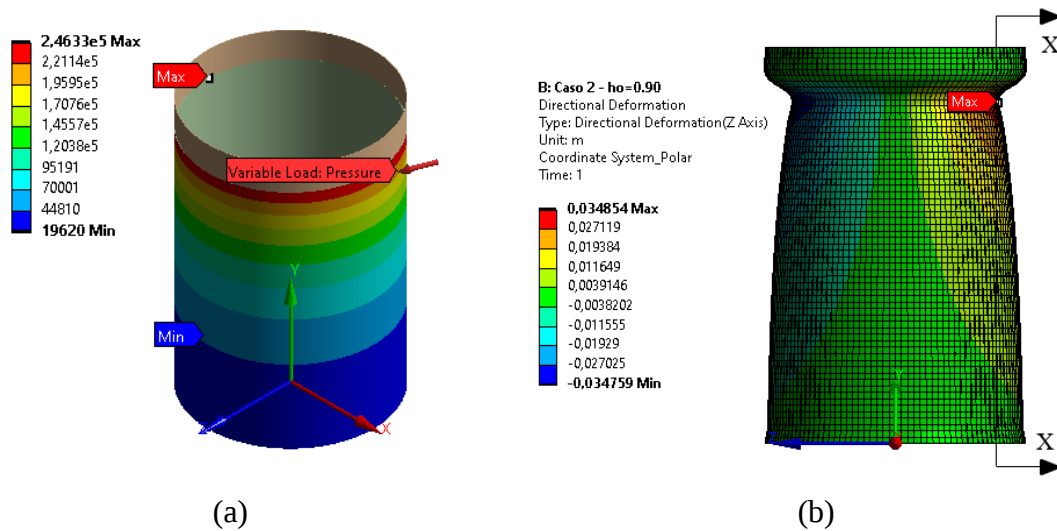


Figura 5.6 – a) Modelo numérico com carga oceânica aplicado em 90% do comprimento da estrutura; b) Deslocamentos transversais obtidos via ANSYS®.

A Figura 5.7 apresenta uma comparação dos deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico para $h_o/L = 0,90$. Para este caso, semelhante ao caso anterior, com $N_u = N_v = N_w = 12$, ocorre uma perda de convergência numérica no método de Newton-Rapshon, sendo que a melhor aproximação entre os dois modelos acontece para $N_u = N_v = N_w = 11$. Nota-se nas Figuras 5.5 e 5.7 que, em decorrência da descontinuidade da aplicação de carga ao longo do comprimento da casca cilíndrica, o máximo deslocamento ao longo da casca cilíndrica em ambos os modelos, ocorre em torno da descontinuidade da aplicação da carga.

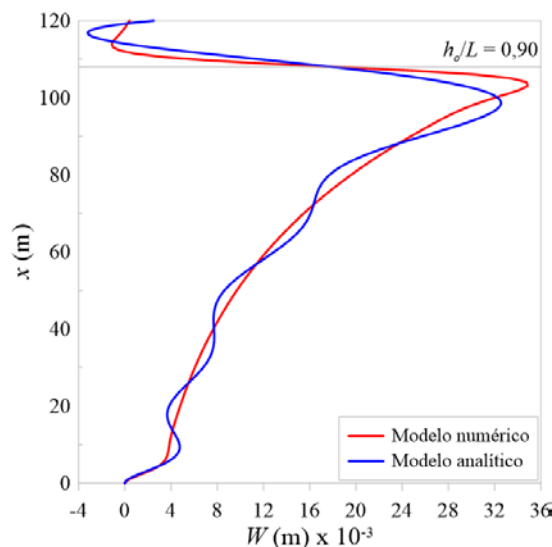


Figura 5.7 – Comparação dos deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico, considerando a teoria de Airy para ondas oceânicas ($h_o/L = 0,90$).

De forma análoga, a Figura 5.8 apresenta o modelo numérico com carga oceânica aplicado em todo o comprimento da estrutura, além dos deslocamentos transversais obtidos através do MEF.

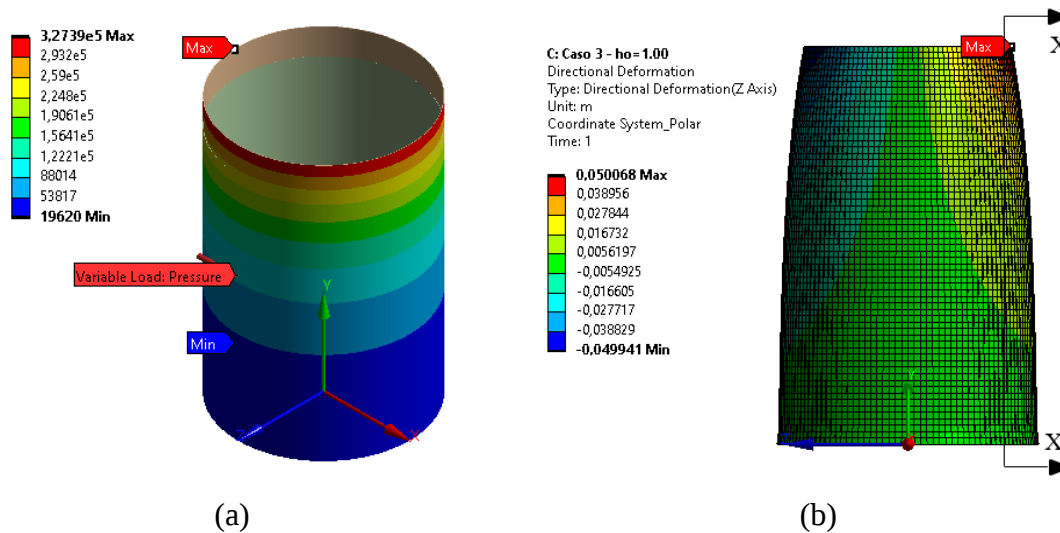


Figura 5.8 – a) Modelo numérico com carga oceânica aplicado em todo o comprimento da estrutura; b) Deslocamentos transversais obtidos via ANSYS®.

A Figura 5.9 compara os deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico, considerando a aplicação da teoria de ondas oceânicas em todo o comprimento da casca cilíndrica, $h_o/L = 1$. À medida que o número de termos da expansão modal aumenta, a aproximação entre os modelos melhora. Contudo, com 12 termos axiais (N_u), circunferenciais (N_v) e transversais (N_w), ocorre perda de convergência no método de Newton-Rapshon. A melhor aproximação é alcançada com $N_u = N_v = N_w = 11$. A Figura 5.9 mostra que os deslocamentos transversais nos dois modelos são praticamente idênticos.

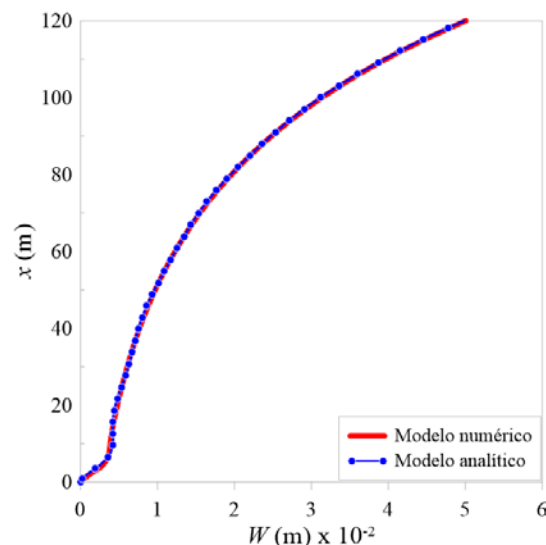


Figura 5.9 – Comparação dos deslocamentos transversais entre os modelos analítico e numérico, considerando a teoria de Airy para ondas oceânicas ($h_o/L = 1,0$).

Conforme mostrado na equação (5.1), a descontinuidade no carregamento lateral decorre da aplicação da função Heaviside H_f . A Figura 5.10 ilustra os gráficos desta função, baseados nas três relações entre a profundidade d'água e comprimento: $h_o/L = 0,60, 0,90$ e $1,0$.

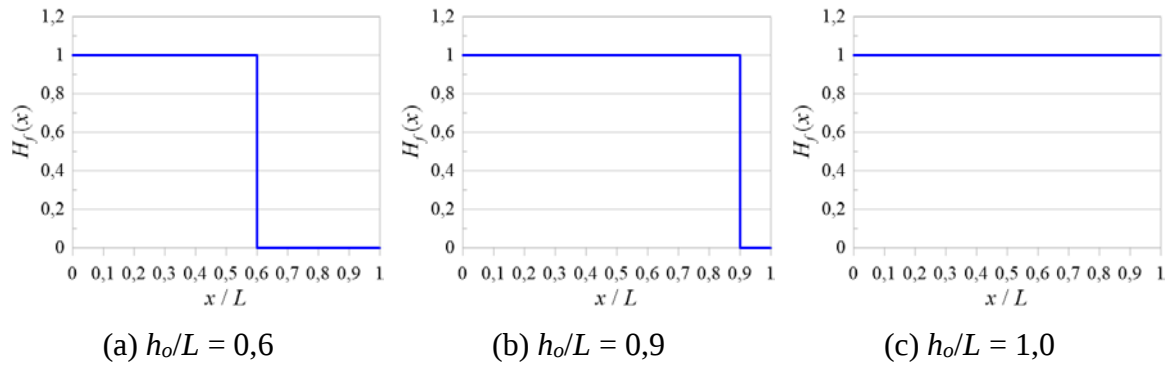


Figura 5.10 – Representação da função Heaviside para as três relações entre a profundidade d'água e o comprimento da estrutura.

Foi observado nas Figuras 5.5 e 5.7 as maiores diferenças dos deslocamentos transversais quando se comparam os modelos analítico e numérico. Nesses casos há descontinuidade do carregamento lateral aplicado às paredes externas da casca cilíndrica e, conforme incrementa-se a relação h_o/L essas diferenças são minimizadas. Por outro lado, no caso com a carga aplicada em todo o comprimento, Figura 5.9, os deslocamentos transversais são praticamente iguais.

Para explicar esta questão, foi analisada uma série de Fourier, que utiliza um somatório de cossenos semelhante à expansão dos polinômios de Chebyshev, para representar uma série de ondas quadradas unitárias. Através da série de Fourier, pode-se definir uma onda quadrada como uma série de termos da seguinte forma (Hewitt, E.; Hewitt, R., 1979):

$$x_{\square}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \frac{\cos[(2q-1)t]}{(2q-1)} \quad (5.2)$$

Ao utilizar a série de Fourier apresentada na equação (5.2), e considerando um intervalo de tempo entre 0 e 20 s, foi analisado o efeito que o aumento do número de termos desta série provoca na obtenção das ondas quadradas unitárias, ilustrado na Figura 5.11.

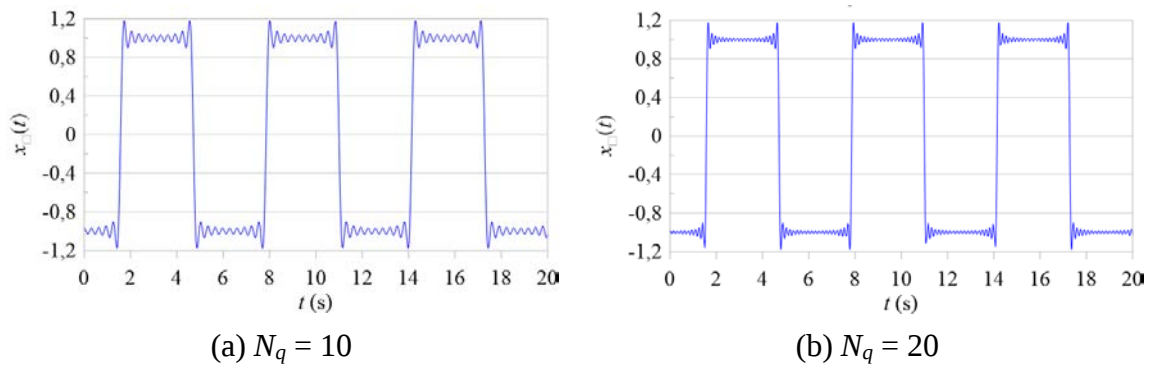


Figura 5.11 – Representação de uma onda quadrada com um número crescente de harmônicas: a) $N_q = 10$; b) $N_q = 20$.

Nota-se que na região de descontinuidade da onda quadrada da Figura 5.11, apesar do aumento do número de termos, a série de Fourier não consegue realizar o contorno do ângulo reto das ondas quadradas com oscilações periódicas nestes pontos. Este processo é denominado por fenômeno de Gibbs o qual é explicado que, por meio da convergência das somas parciais finitas da série de Fourier descrita pela equação (5.2), são geradas oscilações cujas amplitudes não convergem para zero, devido à dificuldade de aproximar funções descontínuas a finitas séries de ondas senos e cossenos (Hewitt, E.; Hewitt, R., 1979).

Portanto, como este trabalho utiliza os polinômios de Chebyshev que podem ser escritos em série de cossenos, equação (3.8), o fenômeno de Gibbs ocorre nas regiões com descontinuidades na aplicação do carregamento, casos analisados para h_0/L iguais a 0,60 e 0,90. Entretanto, os polinômios de Chebyshev se mostraram eficientes para obtenção das frequências naturais e deformadas modais, considerando a influência do fluido interno e externo, além do carregamento de ondas oceânicas aplicados em todo o comprimento da estrutura com diferenças mínimas em relação ao modelo numérico desenvolvido pelo MEF.

5.2. CAMPO DE PRESSÕES OBTIDO PELA TEORIA DA DIFRAÇÃO

Neste tópico é apresentado alguns exemplos oriundos da aplicação da teoria da difração para o estudo dos campos de pressões gerados pela ação de ondas oceânicas. Nos casos em que a estrutura analisada possui dimensões comparáveis ao comprimento da onda, e sendo capaz de alterar o campo da onda nas proximidades do contato com a estrutura, é utilizada a teoria da difração (MacCamy; Fuchs, 1954; Pedroso, 1982b; Chakrabarti, 1987). Estas características se enquadram com as dimensões da casca cilíndrica em estudo e com as propriedades geométricas das ondas. Para isso, aplica-se a pressão advinda desta teoria, conforme apresentado na equação (3.84).

A forma de representação das pressões obtidas pela teoria da difração, aqui apresentadas, com sua distribuição em gráficos polares em torno e ao longo da própria casca cilíndrica, em cortes horizontais e verticais, representou uma inovação de Pedroso (1982a), uma vez que os trabalhos clássicos sobre o tema, usavam outras formas de mostrar os resultados, menos físico-intuitiva, aspecto que veio melhorar a compreensão da distribuição das pressões em torno do corpo, provocado pelo espalhamento da onda, à medida que esta avança e atravessa a estrutura, perturbando as características da onda antes desta travessia.

Com o objetivo de identificar o formato dos campos de pressão provenientes da teoria da difração, são apresentados três exemplos, uma para cada classificação da onda, a saber: águas profundas, intermediárias e rasas. A altura da onda (H_o) foi considerada igual a 4,0 m e para o período de projeto (T_o) são analisados os seguintes valores: 10, 20 e 40 s. Segundo a classificação das ondas, estes períodos correspondem às águas profundas, intermediárias e rasas, respectivamente. A profundidade da água (h_o) é igual a 90% do comprimento da estrutura, ou seja, com valor igual a 108 m. As propriedades físicas e geométricas da casca cilíndrica e do fluido correspondem ao modelo em estudo, indicadas na Tabela 3.2. A Tabela 5.2 apresenta, para os três períodos de ondas, a verificação e classificação para cada tipo de onda, além de suas respectivas frequências naturais.

Tabela 5.2 – Verificações para os três períodos de ondas e sua classificação, além das respectivas frequências naturais para cada caso.

T_o (s)	Intervalo (h_o/L_o)	Intervalo ($k_o h_o$)	ω_o (rad/s)	Tipo	k_a
10	$0,5 < h_o/L_o < \infty \rightarrow \text{Ok!}$	$\pi < k_o h_o < \infty \rightarrow \text{Ok!}$	0,63	Profundas	1,61
20	$0,05 < h_o/L_o < 0,5 \rightarrow \text{Ok!}$	$\pi/10 < k_o h_o < \pi \rightarrow \text{Ok!}$	0,33	Intermediárias	0,51
40	$0 < h_o/L_o < 0,05 \rightarrow \text{Ok!}$	$0 < k_o h_o < \pi/10 \rightarrow \text{Ok!}$	0,08	Rasas	0,10

A Figura 5.12 apresenta de forma esquemática, a casca cilíndrica, a profundidade d'água, e o sentido da onda. As pressões são obtidas a cada 30° (θ_f) do período da onda, equivalente a $T_o/12$, indicado pelas seções de “A” a “M”.

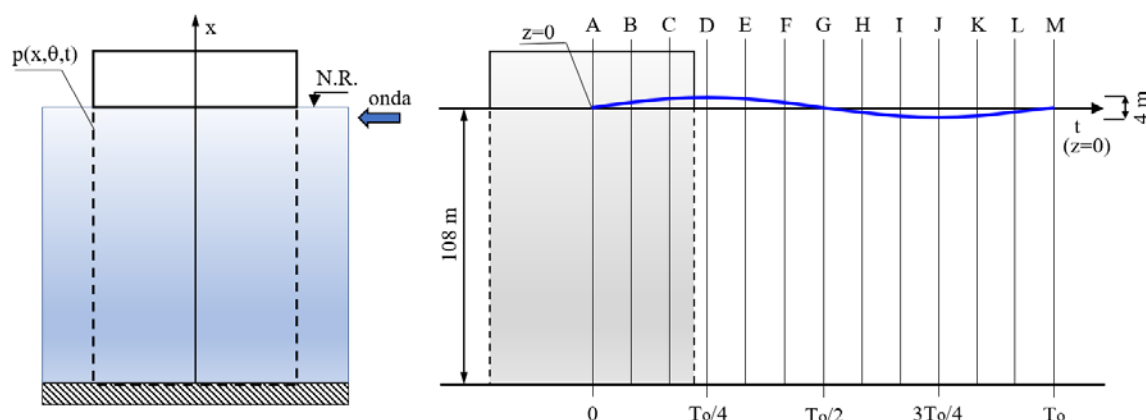
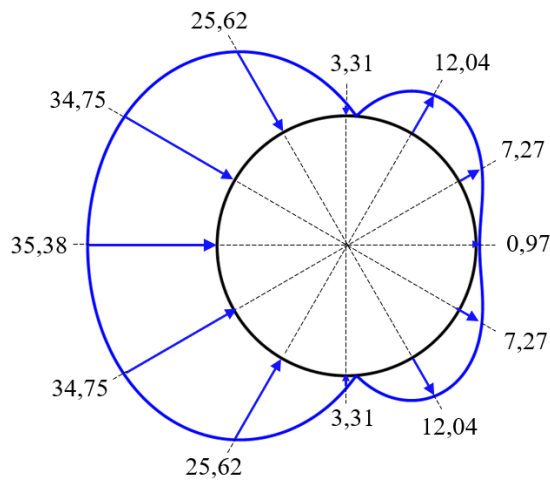
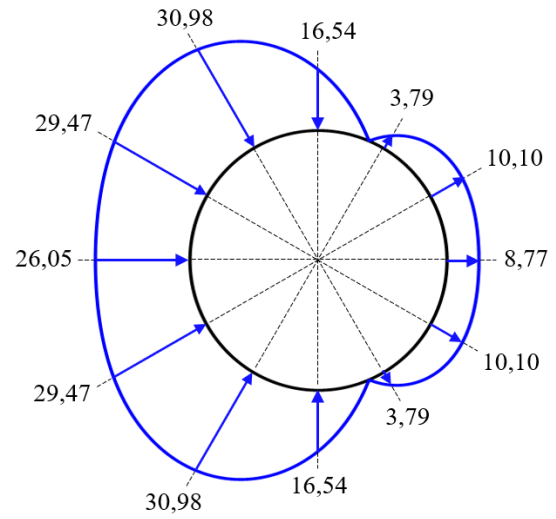


Figura 5.12 – Perfil de onda η ao longo de um período e as divisões a cada 30° de T .

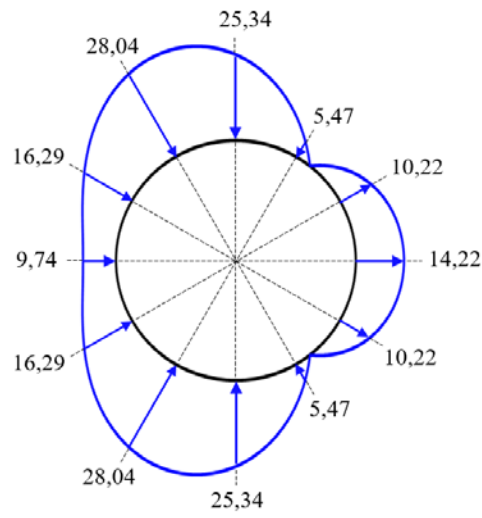
A Figura 5.13 apresenta as pressões transversais (kPa) a cada 30° (θ_f) do período da onda, considerando o caso de águas profundas. O sentido dos vetores de pressões correspondente a tração apresenta setas saindo da estrutura enquanto as pressões de compressão são ilustradas com setas no sentido da casca cilíndrica.



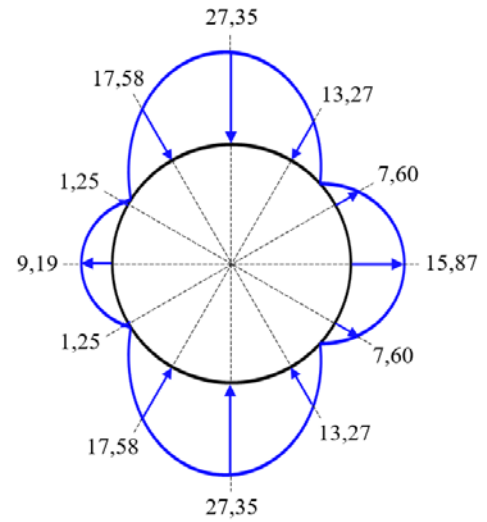
(a) $\theta_f = 0^\circ$ (Seção A)



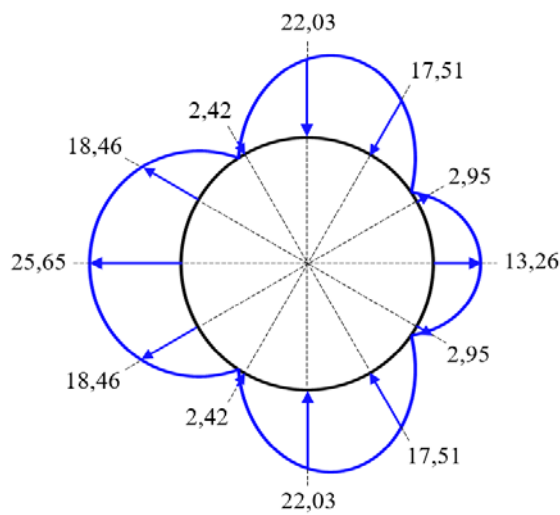
(b) $\theta_f = 30^\circ$ (Seção B)



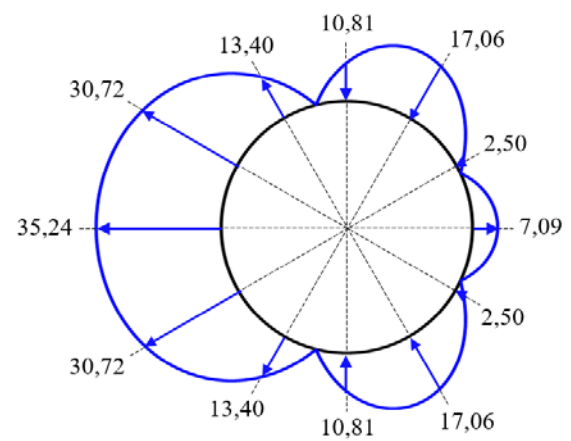
(c) $\theta_f = 60^\circ$ (Seção C)



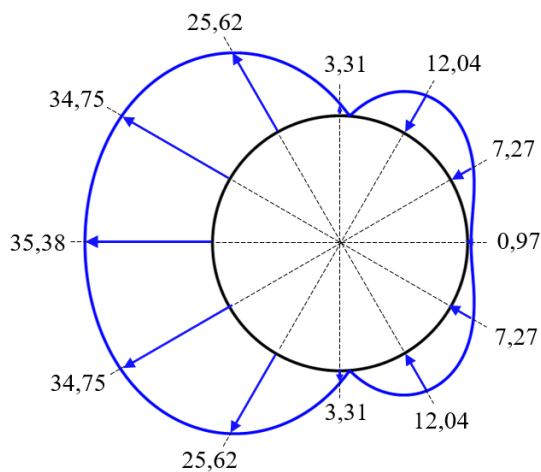
(d) $\theta_f = 90^\circ$ (D)



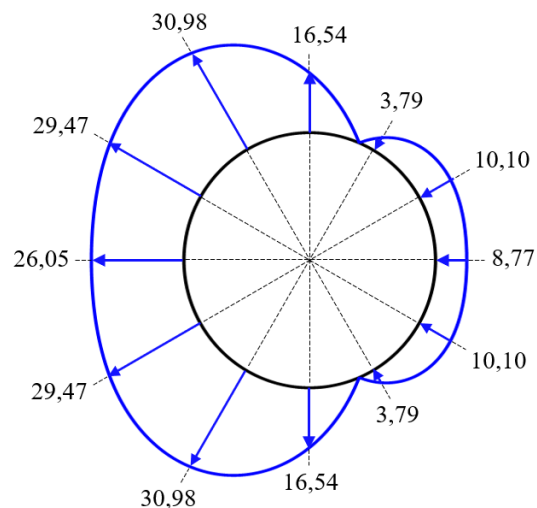
(e) $\theta_f = 120^\circ$ (Seção E)



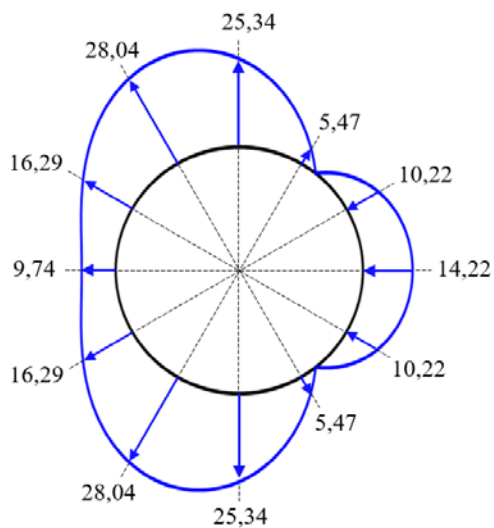
(f) $\theta_f = 150^\circ$ (Seção F)



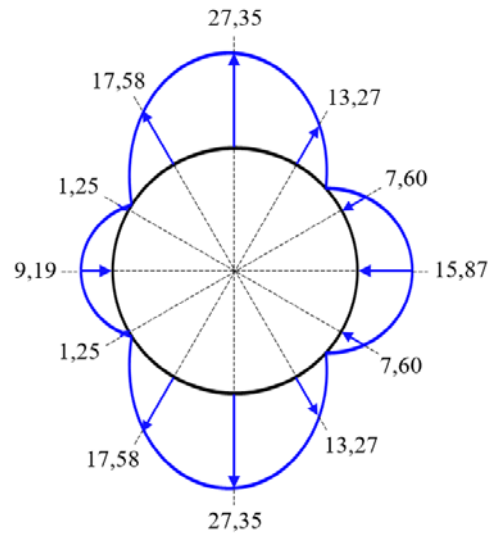
(g) $\theta_f = 180^\circ$ (Seção G)



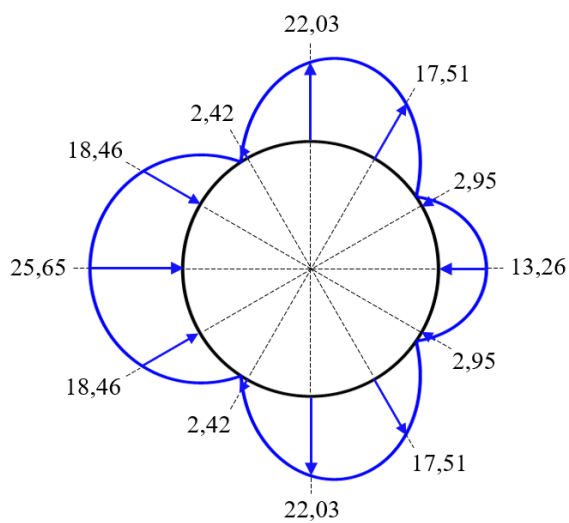
(h) $\theta_f = 210^\circ$ (Seção I)



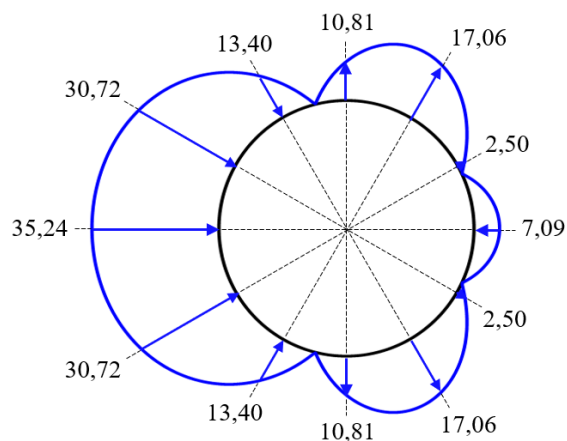
(i) $\theta_f = 240^\circ$ (Seção I)



(j) $\theta_f = 270^\circ$ (Seção J)



(k) $\theta_f = 300^\circ$ (Seção K)



(l) $\theta_f = 330^\circ$ (Seção L)

Figura 5.13 – Pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda – Águas profundas.

Já a Figura 5.14 apresenta, para o caso de águas profundas, as pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ (Figura 5.13a) e 90° (Figura 5.13d). Em cada um desses casos é feito um corte longitudinal nas direções entre 0° e 180° e entre 90° e 270° .

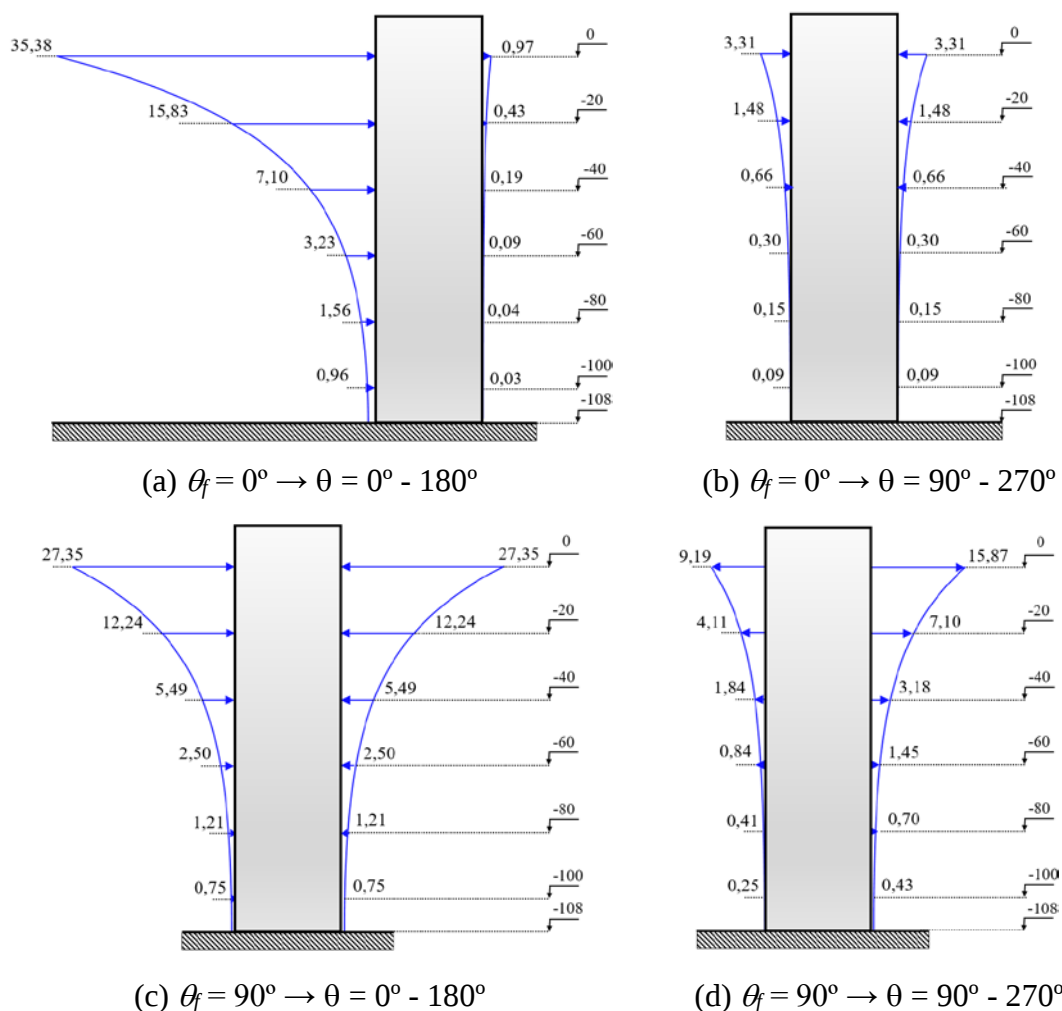
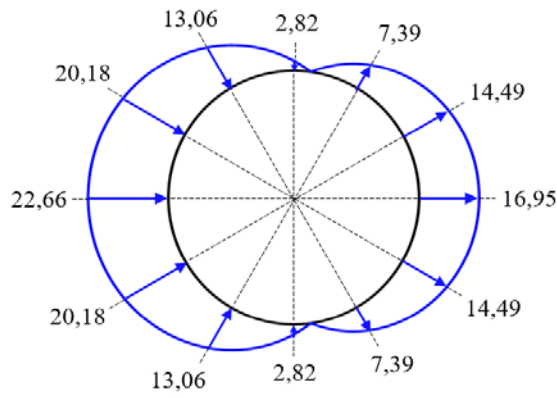
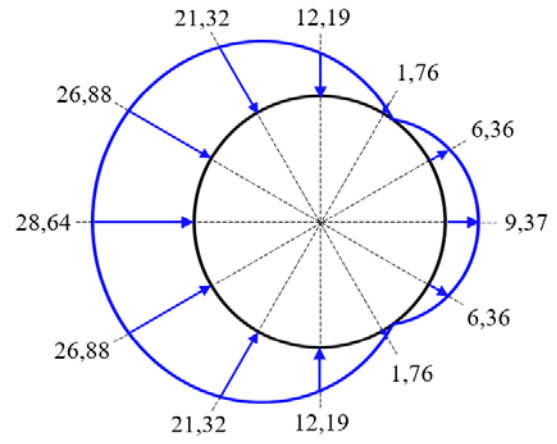


Figura 5.14 – Pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ e 90° , considerando águas profundas.

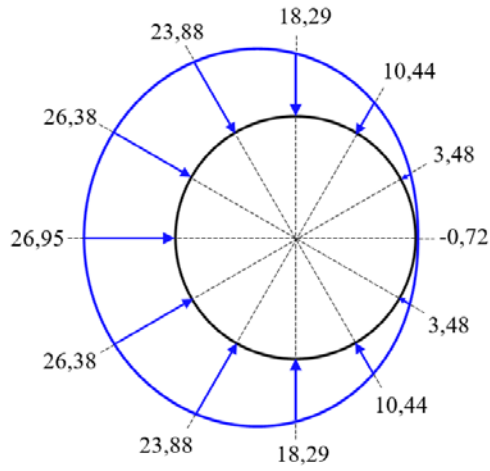
Para o caso de águas intermediárias, a Figura 5.15 apresenta as pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda. Nota-se uma redução dos valores máximos de pressão do caso de águas profundas para águas intermediárias, que está condizente com a formulação matemática.



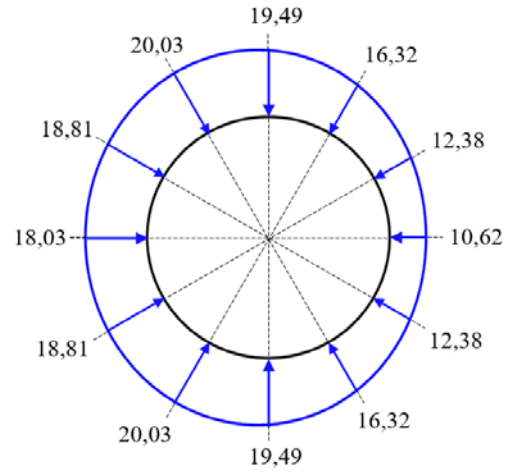
(a) $\theta_f = 0^\circ$ (Seção A)



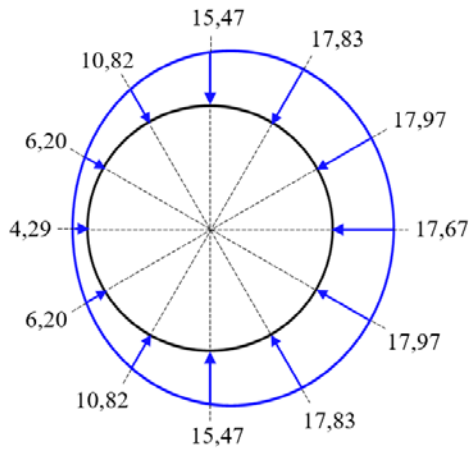
(b) $\theta_f = 30^\circ$ (Seção B)



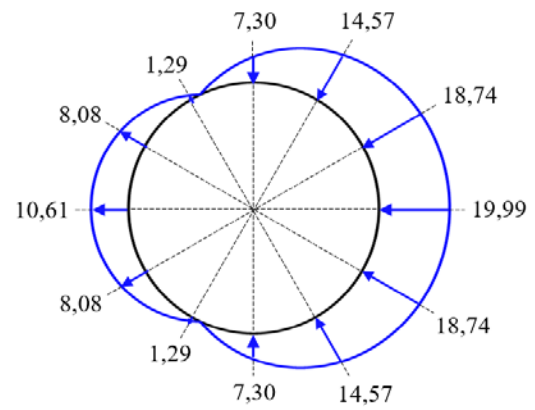
(c) $\theta_f = 60^\circ$ (Seção C)



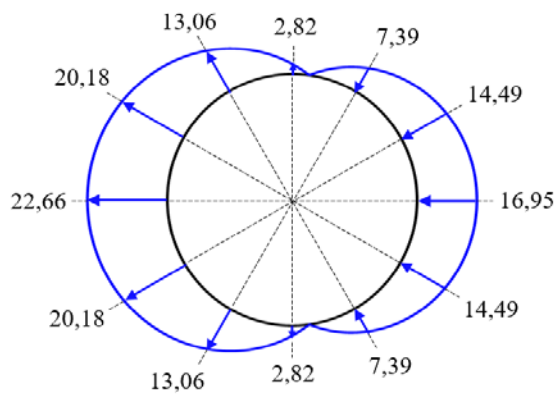
(d) $\theta_f = 90^\circ$ (Seção D)



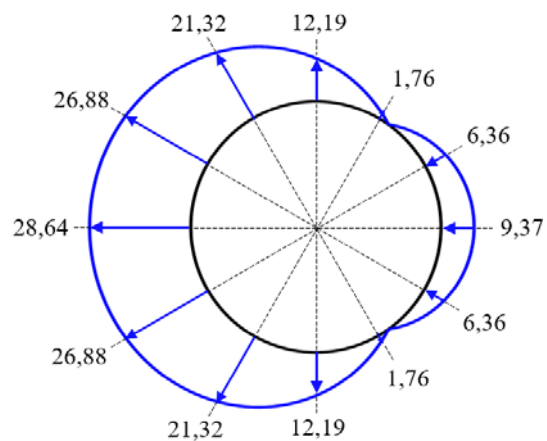
(e) $\theta_f = 120^\circ$ (Seção E)



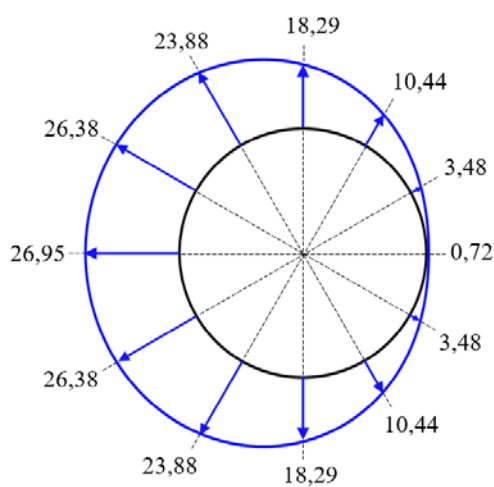
(f) $\theta_f = 150^\circ$ (Seção F)



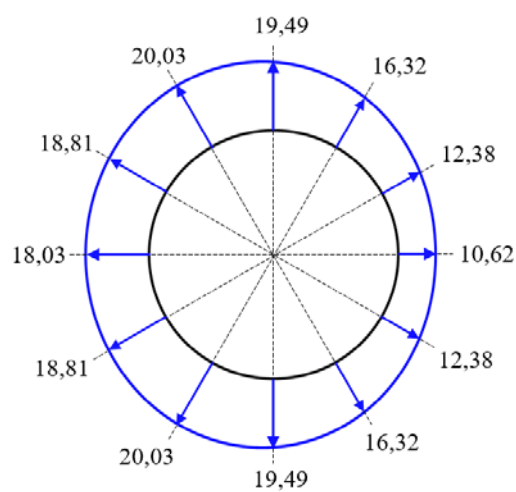
(g) $\theta_f = 180^\circ$ (Seção G)



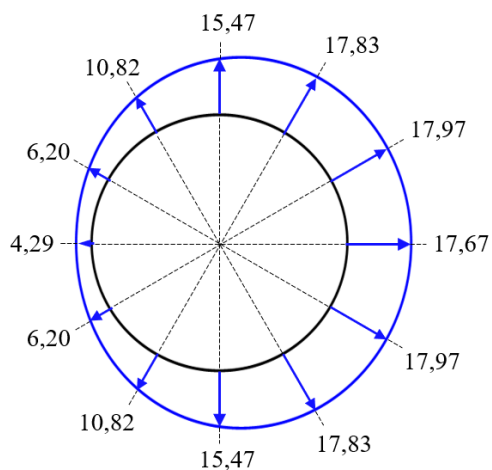
(h) $\theta_f = 210^\circ$ (Seção H)



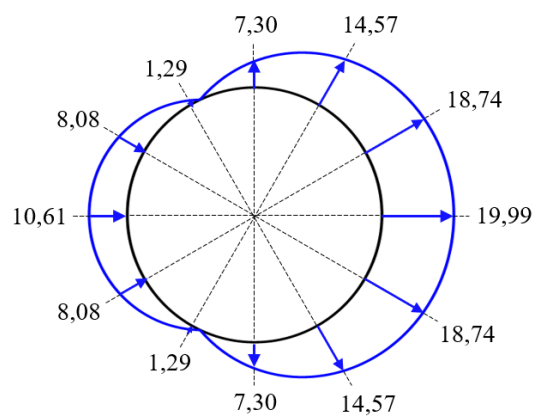
(i) $\theta_f = 240^\circ$ (Seção I)



(j) $\theta_f = 270^\circ$ (Seção J)



(k) $\theta_f = 300^\circ$ (Seção K)



(l) $\theta_f = 330^\circ$ (Seção L)

Figura 5.15 – Pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda – Águas intermediárias.

A Figura 5.16 mostra a variação da pressão (kPa) no sentido longitudinais para $\theta_f = 0^\circ$ (Figura 5.15a) e 90° (Figura 5.15d) para o caso de águas intermediárias. Em cada um desses casos é feito um corte nas direções entre 0° e 180° , e entre 90° e 270° .

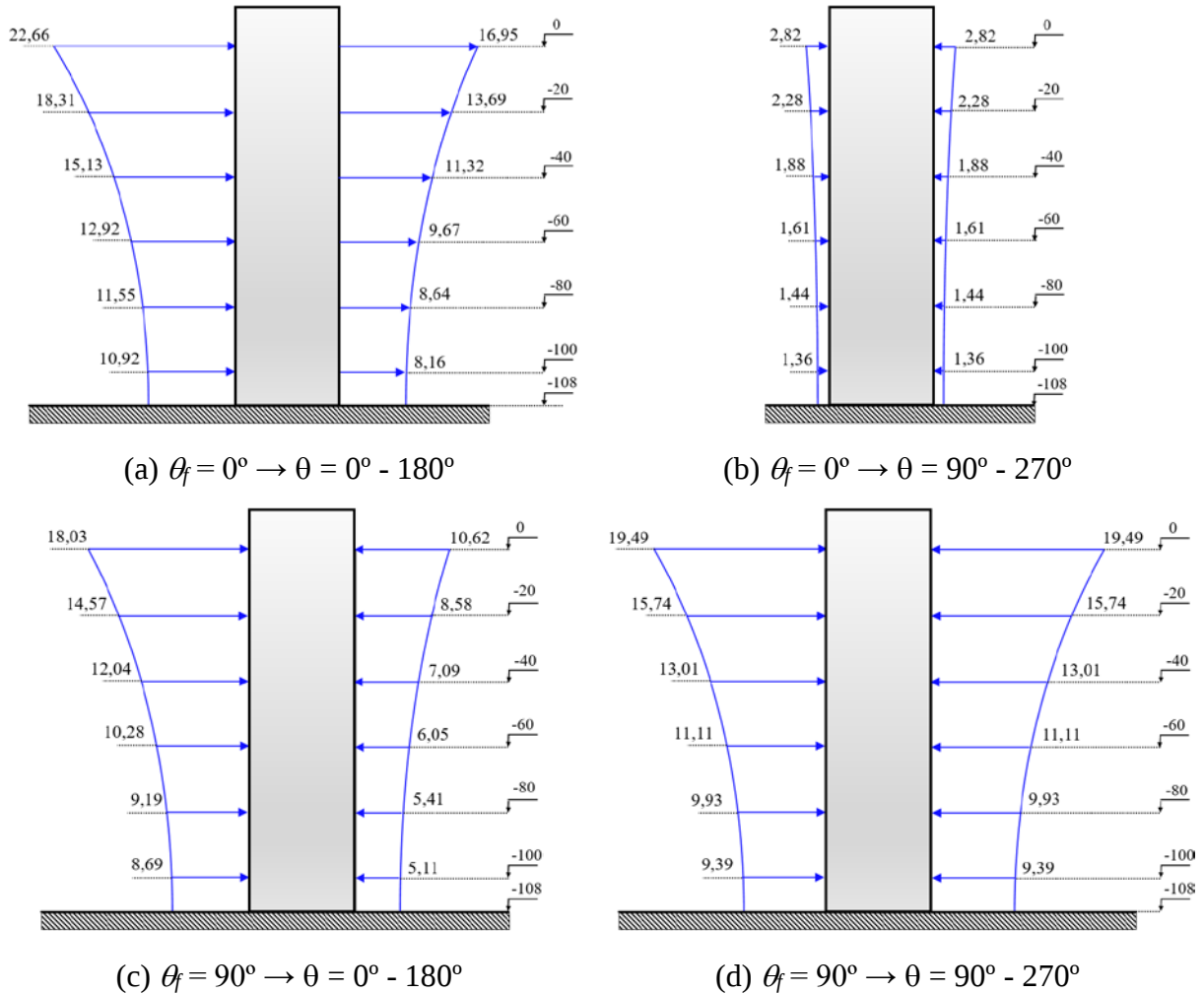
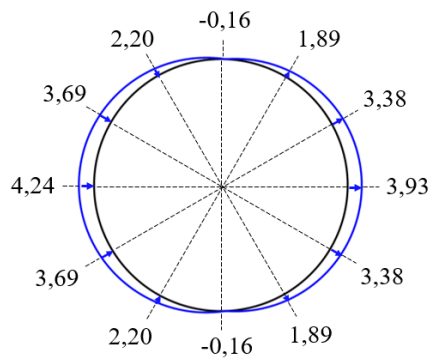
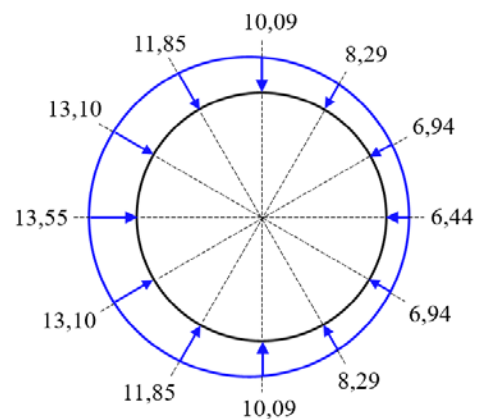


Figura 5.16 – Pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ e 90° , considerando águas intermediárias.

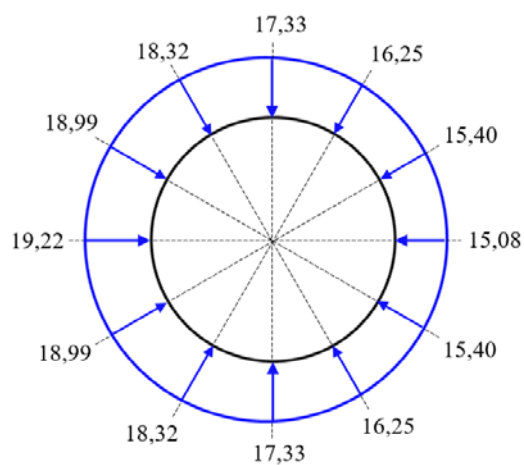
Por fim, de forma análoga aos casos anteriores, a Figura 5.17 apresenta as pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda, considerando o caso de rasas. Nota-se uma redução dos valores máximos do caso de águas intermediárias para rasas.



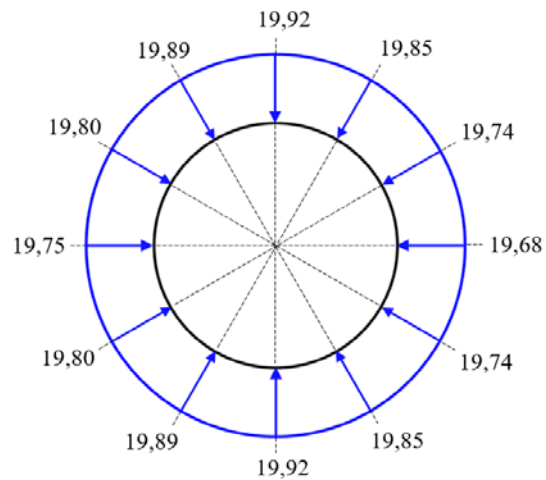
(a) $\theta_f = 0^\circ$ (Seção A)



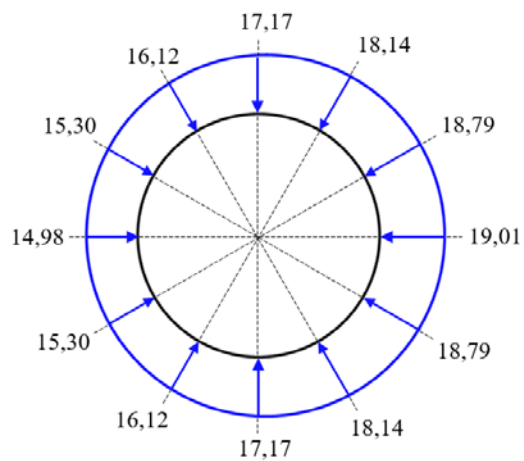
(b) $\theta_f = 30^\circ$ (Seção B)



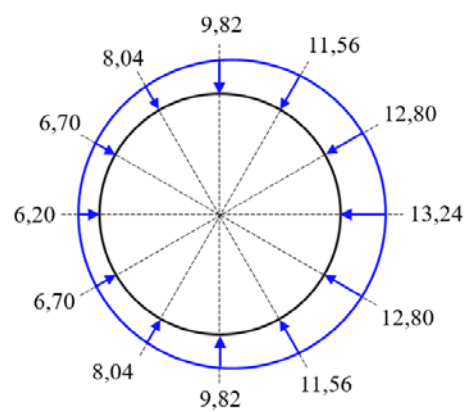
(c) $\theta_f = 60^\circ$ (Seção C)



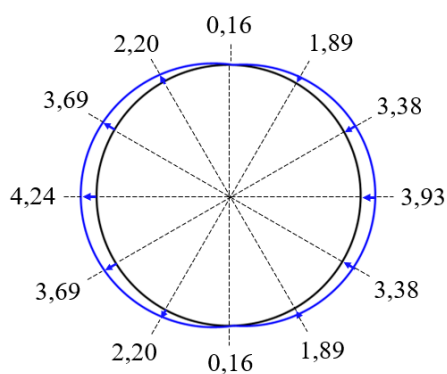
(d) $\theta_f = 90^\circ$ (Seção D)



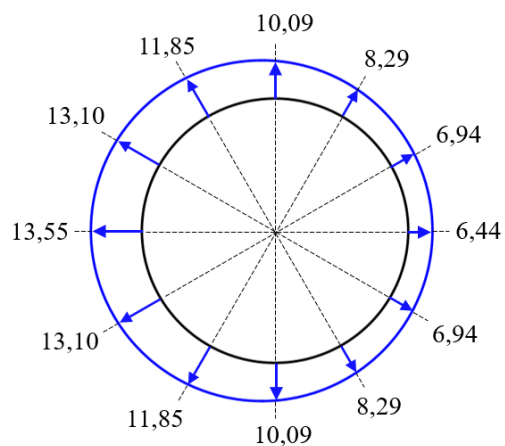
(e) $\theta_f = 120^\circ$ (Seção E)



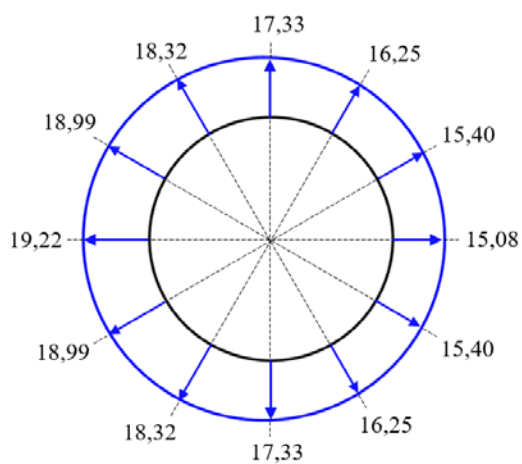
(f) $\theta_f = 150^\circ$ (Seção F)



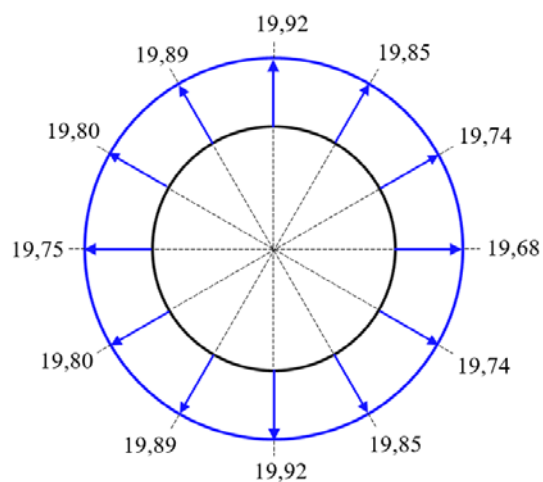
(g) $\theta_f = 180^\circ$ (Seção G)



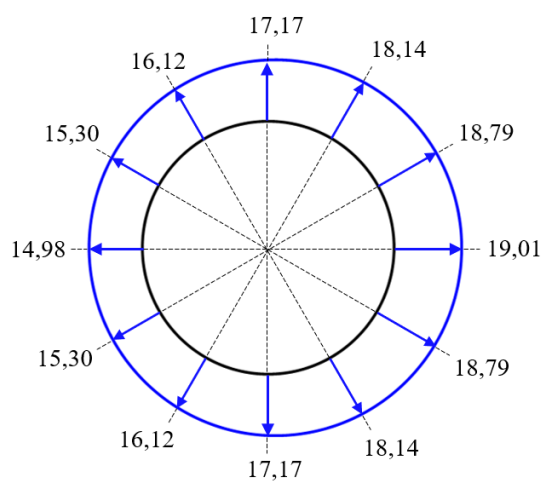
(h) $\theta_f = 210^\circ$ (Seção H)



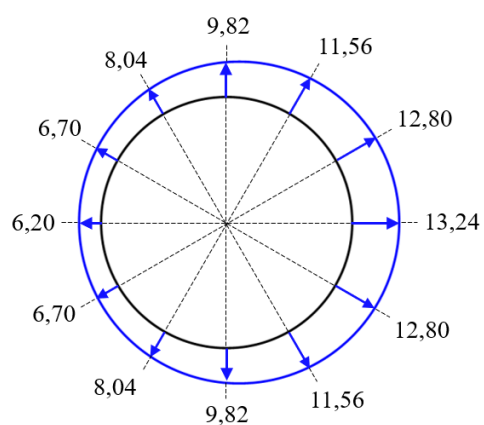
(i) $\theta_f = 240^\circ$ (Seção I)



(j) $\theta_f = 270^\circ$ (Seção J)



(k) $\theta_f = 300^\circ$ (Seção K)



(l) $\theta_f = 330^\circ$ (Seção L)

Figura 5.17 – Pressões transversais (kPa) a cada 30° do período da onda – Águas rasas.

A Figura 5.18 apresenta as pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ (Figura 5.17a) e 90° (Figura 5.17d), e em cada caso é feito um corte nas direções entre 0° e 180° , e entre 90° e 270° , para o caso de águas rasas.

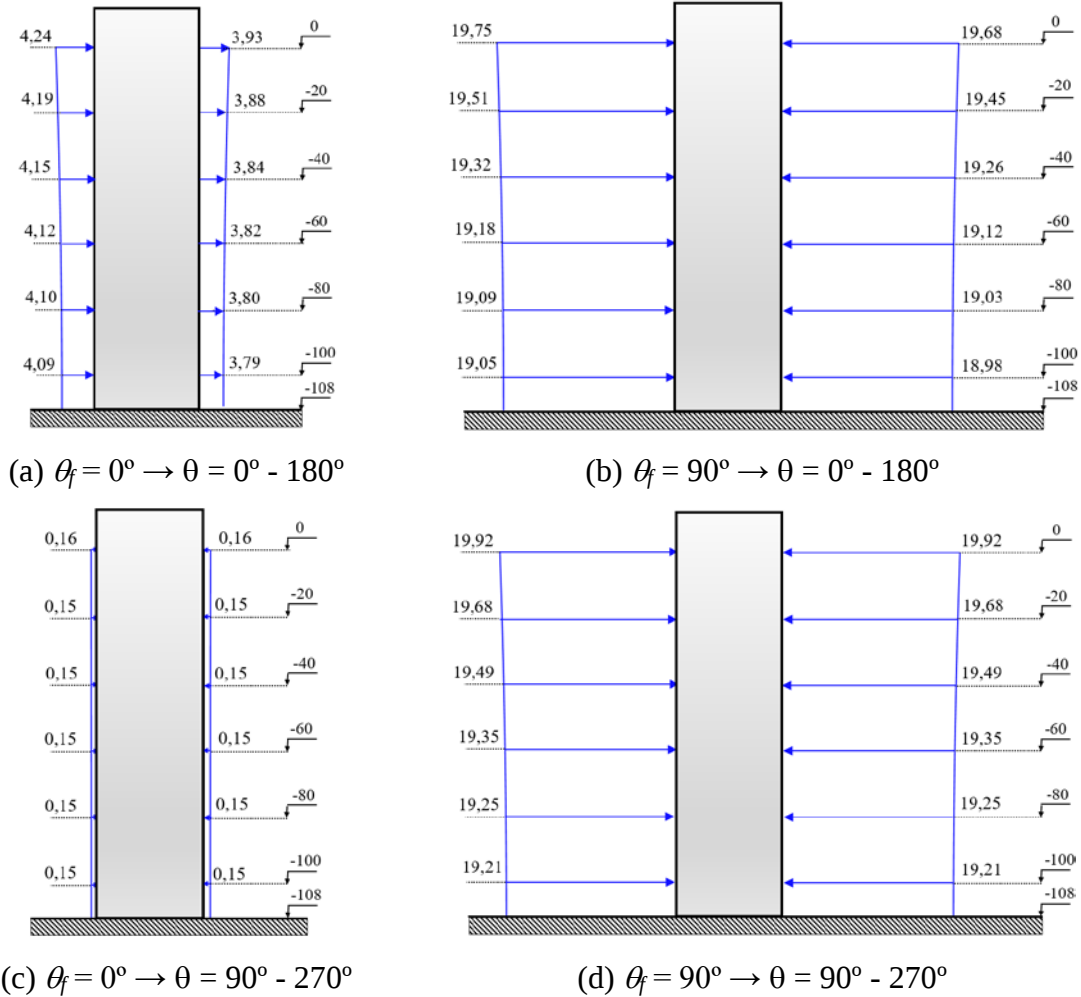


Figura 5.18 – Pressões longitudinais (kPa) para $\theta_f = 0^\circ$ e 90° , considerando águas rasas.

Portanto, obteve-se os campos de pressão gerados pela ação de ondas oceânicas em torno da casca cilíndrica, observando como é a distribuição transversal e longitudinal deste carregamento. A partir desta análise e da validação com a formulação existente em literatura (Pedroso, 1982a), o modelo analítico está definido para a análise das vibrações não lineares da casca cilíndrica, considerando os efeitos de ondas oceânicas.

5.3. ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DA RESPOSTA NÃO LINEAR NO TEMPO

Após a validação do modelo analítico com o modelo numérico da seção 5.1, os resultados para a análise dinâmica não linear são desenvolvidos somente a partir do modelo analítico, visto que o processo de integração numérica para uma malha com uma grande quantidade de elementos finitos promove um elevado custo computacional. Ainda, considerando que o passo do tempo para a integração ao longo do tempo é muito pequeno, o qual será discutido posteriormente, o esforço de processamento se acentua ainda mais.

Portanto, neste tópico foi feito um estudo de convergência do modelo analítico não linear de uma casca cilíndrica, considerando a influência do fluido externo e interno, além dos efeitos de *sloshing*, e da ação de ondas oceânicas. Para isso, são obtidas as respostas no tempo e os planos fase, com o objetivo de avaliar a resposta permanente do sistema para diferentes modelos analíticos obtidos com diferentes graus de liberdade para os campos de deslocamentos. A partir do sistema de equações ordinárias de equilíbrio, equação (3.92), é aplicado o método de Runge-Kutta de quarta ordem, para uma longa duração de tempo, de modo que o movimento transiente seja amortecido e, desconsiderando esta região, é feita a análise da resposta permanente dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica.

Os valores para as condições iniciais das amplitudes modais foram iguais a 1×10^{-4} m. Em relação ao passo de tempo ($\Delta\tau$) foi adotado um valor igual a 0,001, de modo que todas as análises obtivessem convergência numérica. Nota-se um passo de tempo pequeno para realizar o número de interações da resposta, justificado pelos baixos valores das frequências da casca cilíndrica. As análises do estudo de convergência foram feitas para uma casca cilíndrica completamente preenchida por um fluido interno e externo, considerando os efeitos de *sloshing*. O valor da frequência natural da casca cilíndrica foi igual a 0,1108 Hz (0,697 rad/s), correspondente ao modo de vibração $(m, n) = (1, 4)$, conforme apresentado no Capítulo 4.

A profundidade d'água, que se refere a linha de atuação das ondas oceânicas, foi considerada igual a 108 m, equivalente a 90% do comprimento da casca cilíndrica ($h_o/L = 0,90$), e a altura da onda (H_o) foi adotado valor igual a 4,0 m. Portanto, é a mesma configuração aplicada para a determinação dos campos de pressão do tópico anterior que empregam a teoria da difração. O objetivo é obter os valores máximos dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica

causados pela interação com as ondas oceânicas. Posteriormente, é feita uma avaliação dos parâmetros das ondas que afetam o comportamento dinâmico não linear da casca cilíndrica.

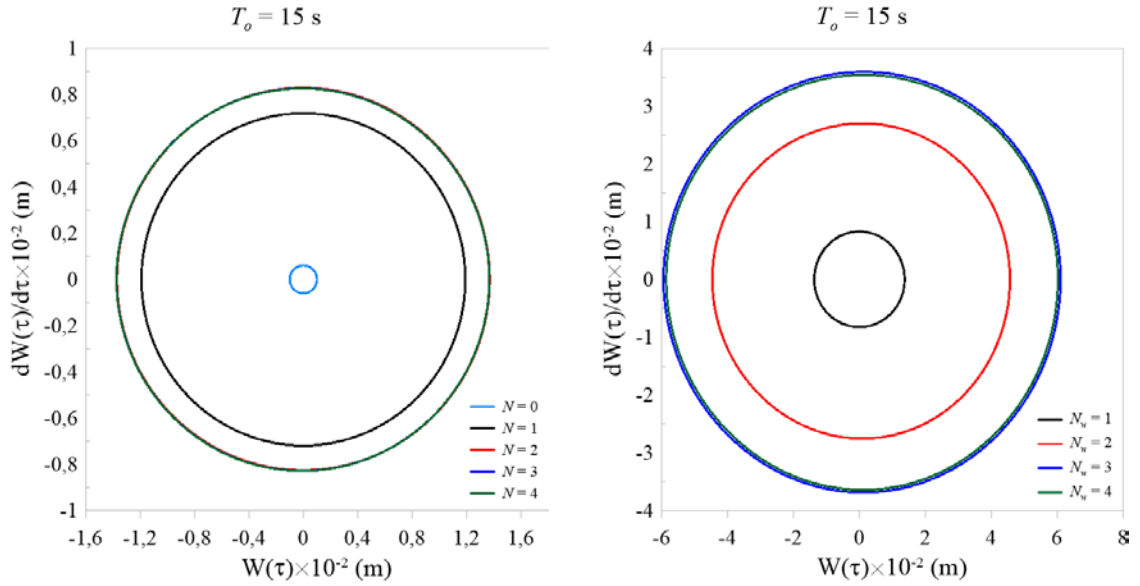
A Tabela 5.3 apresenta três períodos (T_o) de ondas, além da sua verificação e classificação para cada tipo de onda, e suas respectivas frequências naturais obtidas através da equação (3.60), as quais são adimensionalizadas a partir da frequência natural da casca cilíndrica, conforme a equação (3.94).

Tabela 5.3 – Verificações para os três períodos de ondas e sua classificação, além das respectivas frequências naturais para cada caso.

T_o (s)	Intervalo (h_o/L_o)	Intervalo (kh)	ω_o (rad/s)	Tipo
15	$0,05 < h_o/L_o < 0,5 \rightarrow \text{Ok!}$	$\pi/10 < k_o h_o < \pi \rightarrow \text{Ok!}$	0,42	Intermediárias
20	$0,05 < h_o/L_o < 0,5 \rightarrow \text{Ok!}$	$\pi/10 < k_o h_o < \pi \rightarrow \text{Ok!}$	0,33	Intermediárias
40	$0 < h_o/L_o < 0,05 \rightarrow \text{Ok!}$	$0 < k_o h_o < \pi/10 \rightarrow \text{Ok!}$	0,08	Rasas

Nota-se que não foi considerado para esta situação, nenhum caso para as águas profundas, visto que foi identificado uma forte interação não linear entre os modos da casca cilíndrica, gerando altos valores para os deslocamentos transversais da casca cilíndrica superiores a duas vezes a espessura da casca. Esta situação foi reestabelecida apenas para períodos de onda (T_o) superiores a 15 s, considerando a configuração de ondas apresentada.

O procedimento numérico adotado para avaliar o estudo da convergência dos campos de deslocamentos foi avaliar, inicialmente, o número de ondas circunferenciais (n) para $m = 1$. A partir da configuração dos modos circunferenciais em que os resultados convergiram, analisa-se a convergência da função modal na direção longitudinal. De modo geral, para todos os casos, foi feito um primeiro estudo $N_u = N_v = N_w = 1$, e n variando de 0 a N , onde foram analisados os casos $N = 0, 1, 2, 3, 4$. A partir da configuração de convergência para n , variou-se $N_u = N_v = N_w = 1, 2, 3, 4$. O ponto de análise da casca cilíndrica, para obtenção das respostas no tempo e dos planos fases, foi feito para $x = L$ e $\theta = 2\pi$, onde foram obtidos os maiores deslocamentos.



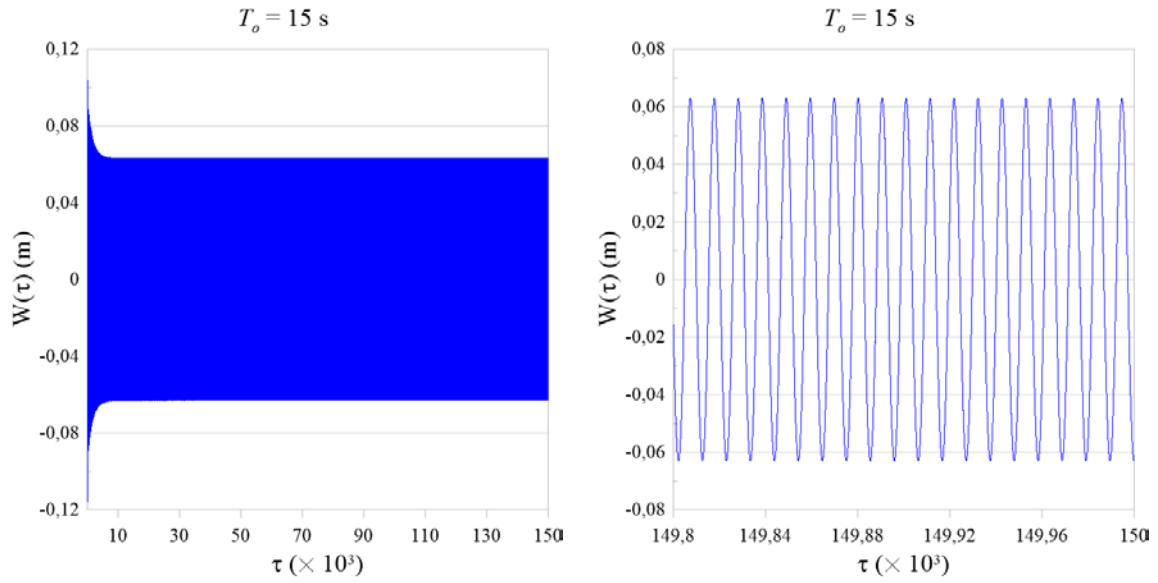
(a) Convergência para n ($m = 1$)

(b) Convergência para m ($n = 2$)

Figura 5.19 – Convergência dos planos fase para o caso de águas intermediárias ($T_o = 15$ s).

A Figura 5.19 apresenta o estudo de convergência dos planos fase para o primeiro caso de águas intermediárias, $T_o = 15$ s. A partir da variação do número de modos circunferenciais (N) com $m = 1$, nota-se a confluência para $n = 2$, e a partir deste valor, variou-se de modos longitudinais nos campos de deslocamentos N_u , N_v e N_w . Portanto, para o período da onda oceânica $T_o = 15$ s, foi obtido a convergência com a seguinte configuração $N_u = N_v = N_w = 1...3$ e $N = 0...2$.

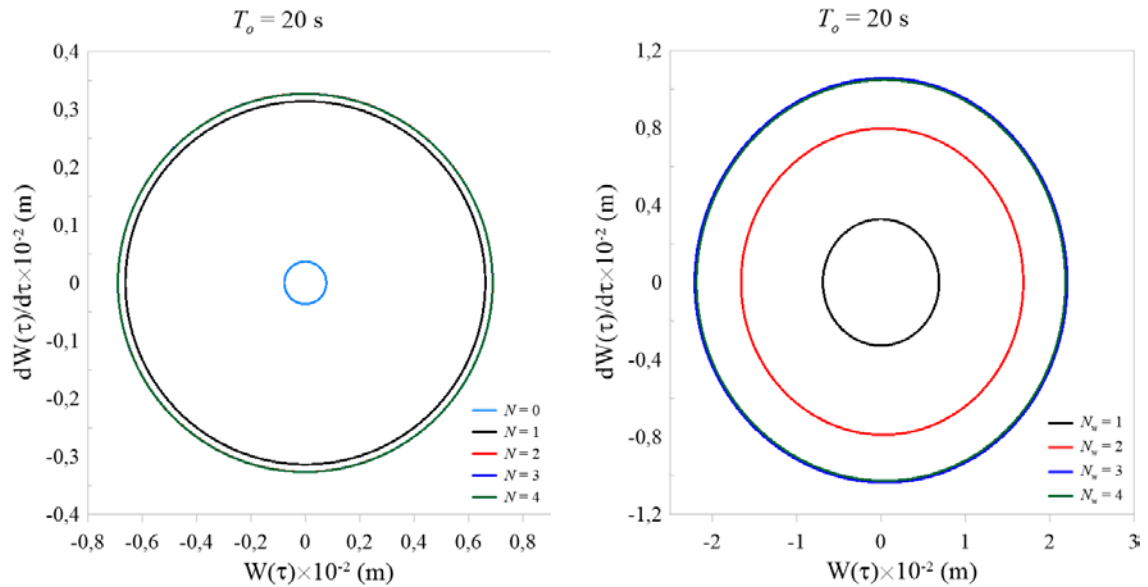
A Figura 5.20 apresenta a resposta no tempo da casca, considerando esta quantidade de termos da expansão modal, para $\tau = 20.000$. Para este caso, observa-se que tanto a resposta transiente quanto a permanente apresentam valores de deslocamentos superiores a duas vezes a espessura da casca cilíndrica devido a magnitude da pressão da onda oceânica.



(a) Resposta total ($0 \leq \tau \leq 150000$) (b) Resposta parcial ($149800 \leq \tau \leq 150000$)

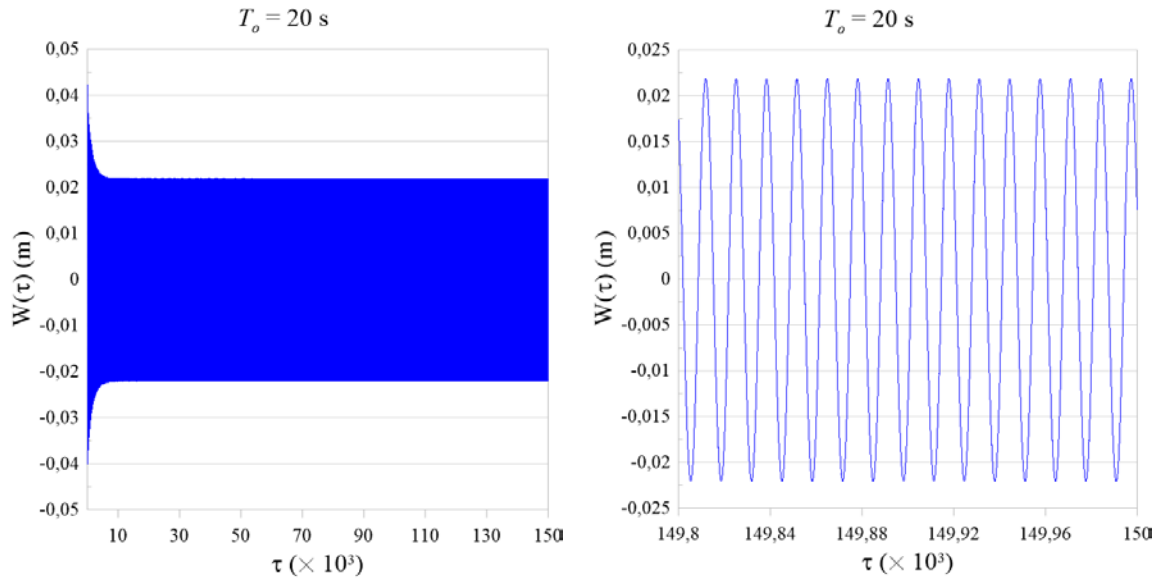
Figura 5.20 – Resposta no tempo da casca cilíndrica considerando o período $T_o = 15$ s.

Já a Figura 5.21 apresenta o estudo de convergência dos planos fase para o segundo caso de águas intermediárias, $T_o = 20$ s. De forma semelhante ao caso anterior, manteve-se a configuração de convergência para descrever os campos de deslocamentos, a saber: $N_u = N_v = N_w = 1 \dots 3$ e $N = 0 \dots 2$. A Figura 5.22 apresenta a resposta no tempo da casca, com esta expansão modal, para o período de onda igual a 20 s.



(a) Convergência para n ($m = 1$) (b) Convergência para m ($n = 2$)

Figura 5.21 – Convergência dos planos fase para o caso de águas intermediárias ($T_o = 20$ s).

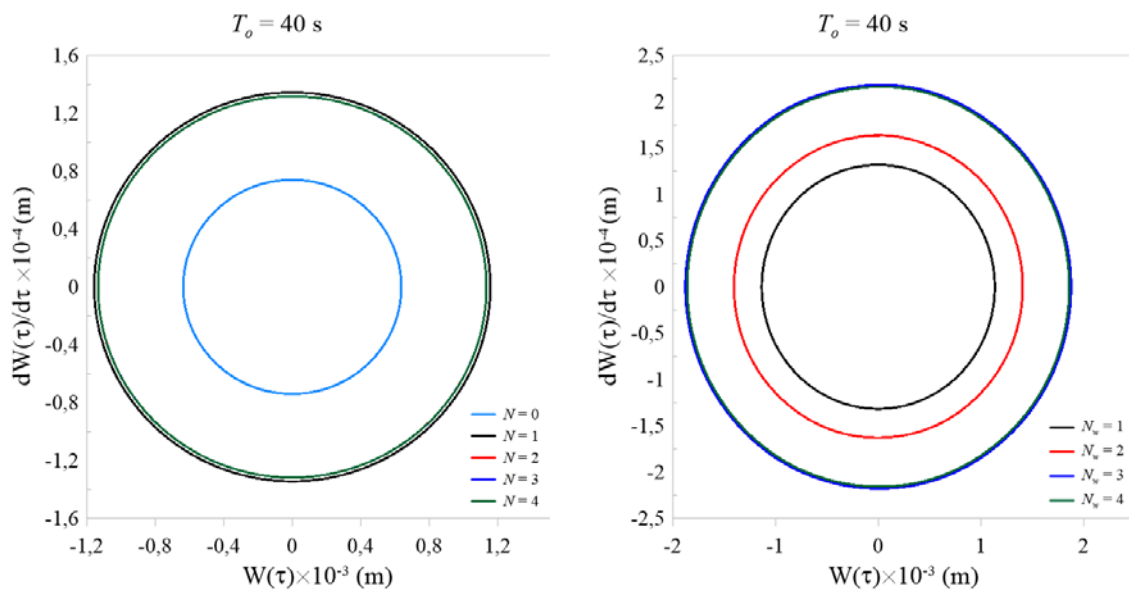


(a) Resposta total ($0 \leq \tau \leq 150000$) (b) Resposta parcial ($149800 \leq \tau \leq 150000$)

Figura 5.22 – Resposta no tempo da casca cilíndrica considerando o período $T_o = 20$ s.

A partir das Figuras 5.21 e 5.22, observa-se que a resposta transiente e permanente apresentam valores de deslocamentos inferiores a duas vezes a espessura da casca, já indicando uma zona mais segura para dimensionamento da estrutura.

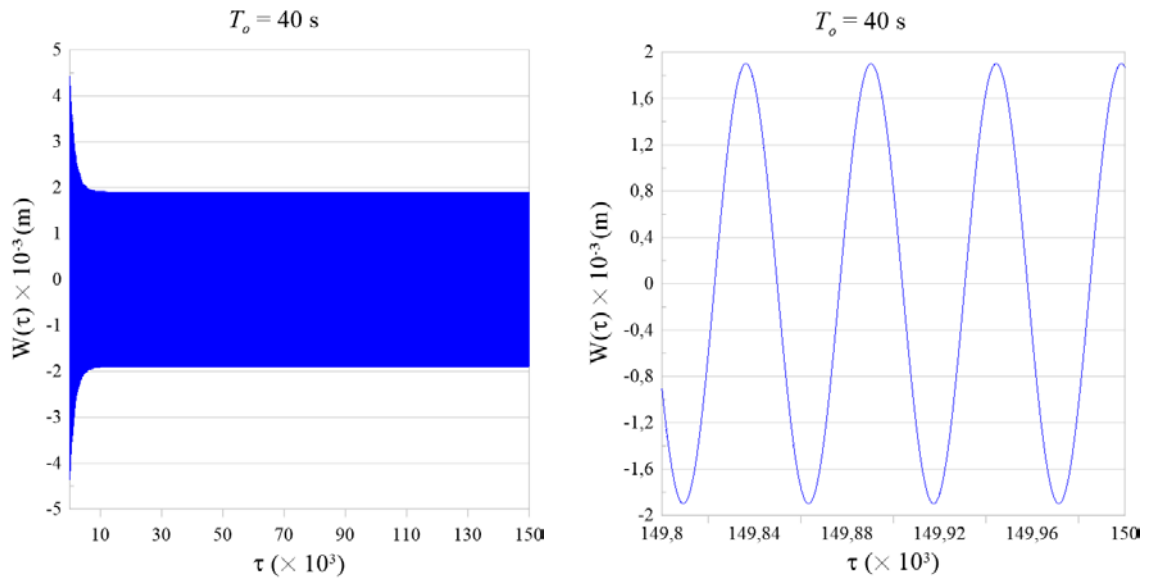
A Figura 5.23 apresenta o estudo de convergência dos planos fase para o caso de águas rasas, $T_o = 40$ s. Foi obtida a mesma configuração de convergência dos campos de deslocamentos dos casos anteriores, ou seja, $N_u = N_v = N_w = 1 \dots 3 / N = 0 \dots 2$. A Figura 5.24 apresenta a resposta no tempo da casca, com esta expansão modal, para o período de onda igual a 40 s.



(a) Convergência para n ($m = 1$)

(b) Convergência para m ($n = 2$)

Figura 5.23 – Convergência dos planos fase para o caso de águas rasas ($T_o = 40$ s).



(a) Resposta total ($0 \leq \tau \leq 150000$) (b) Resposta parcial ($149800 \leq \tau \leq 150000$)

Figura 5.24 – Resposta no tempo da casca cilíndrica considerando o período $T_o = 40$ s.

A partir dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais apresentados nesta seção, nota-se uma redução significativa dos deslocamentos da casca cilíndrica para o caso de águas rasas em ambas as regiões transiente e permanente. Devido ao intervalo de discretização no tempo ser muito pequeno, a representação gráfica dos deslocamentos em uma janela de tempo extensa faz com que essa representação, que é oscilatória, pareça um gráfico com um volume monolítico. Nas Figuras 5.20b, 5.22b, e 5.24b é mostrado apenas o trecho da resposta permanente no tempo onde é possível identificar as oscilações periódicas da resposta. Considerando estas figuras e os valores das frequências das ondas indicados na Tabela 5.3, é possível identificar uma coerência entre todos os resultados visto que, para frequências maiores (períodos menores), têm-se mais oscilações periódicas.

5.4. ANÁLISE PARAMÉTRICA DA AÇÃO DE ONDAS OCEÂNICAS

Como, a partir do estudo da convergência do número de modos circunferenciais e longitudinais, para todos os períodos de ondas oceânicas analisados, a confluência dos resultados foi obtida para a seguinte configuração da expansão modal: $N_u = N_v = N_w = 1...3$ e $N = 0...2$. Com a definição dos campos de deslocamentos, apresenta-se nesta seção uma análise paramétrica da ação de ondas oceânicas com o objetivo de avaliar como as propriedades geométricas da onda influenciam nos deslocamentos da casca cilíndrica e na sua resposta no tempo e planos fase. Para isso, foi considerada a mesma profundidade d'água

utilizada no t3pico 5.2, igual a 108 m ($h_o/L = 0,90$), que 3 uma situa33o mais pr33xima de um projeto executivo.

A Figura 5.25 apresenta a varia33o dos m33ximos deslocamentos da casca (w) na resposta permanente, adimensionalizados em rela33o a espessura da casca cil33ndrica h , em fun33o dos per33odos da onda e para alguns valores da altura da onda H_o .

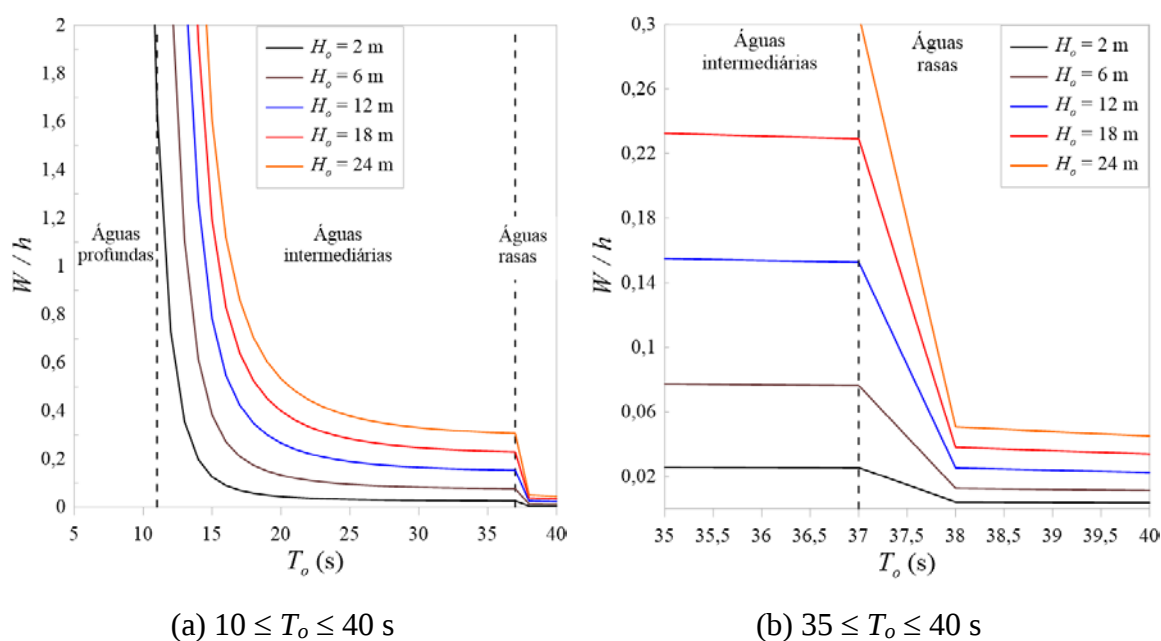


Figura 5.25 – Varia33o dos deslocamentos e per33odos da onda, para algumas alturas de onda ($h_o/L = 0,90$).

3 poss3vel notar na Figura 5.25 que, com o aumento dos per33odos de ondas, os deslocamentos transversais da casca cil33ndrica s3o reduzidos de forma exponencial. Esta varia33o foi feita considerando um intervalo de T_o entre 10 s (3guas profundas) e 40 s (3guas rasas). A classifica33o do tipo de onda em fun33o do per33odo 3 apresentada na Tabela 5.4 e est3o representadas na Figura 5.25.

Tabela 5.4 – Intervalos dos per33odos de ondas e suas respectivas classifica33es.

Tipo	Per33odo inicial (T_o)	Per33odo final (T_o)
3guas profundas	1	11
3guas intermedi33rias	12	37
3guas rasas	38	∞

Para o caso em an3lise $h_o/L = 0,90$, as 3guas profundas est3o compreendidas no intervalo $1 \leq T_o \leq 11$ s; as 3guas intermedi33rias em $12 \leq T_o \leq 37$ s e as 3guas rasas para $T_o \geq 38$ s. A Figura 5.25b apresenta em detalhe o intervalo de T_o entre 35 e 40 s, onde ocorre a transi33o de 3guas

intermediárias e rasas, onde ocorre uma redução abrupta dos deslocamentos neste ponto. Isto pode ser explicado pela mudança do comprimento da onda, equação (3.59), proveniente da teoria de ondas de Airy. Para águas intermediárias, o parâmetro $k_o h_o \approx 1$, e para águas rasas, $k_o h_o \ll 1$, $k_o h_o$ influenciou o termo $\tanh(k_o h_o)$ da equação (3.59), reduzindo significativamente a pressão da onda oceânica.

Em seguida, foi feita uma variação dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica em função da altura de onda H_o , considerando alguns períodos de ondas T_o . Os resultados obtidos estão representados na Figura 5.26.

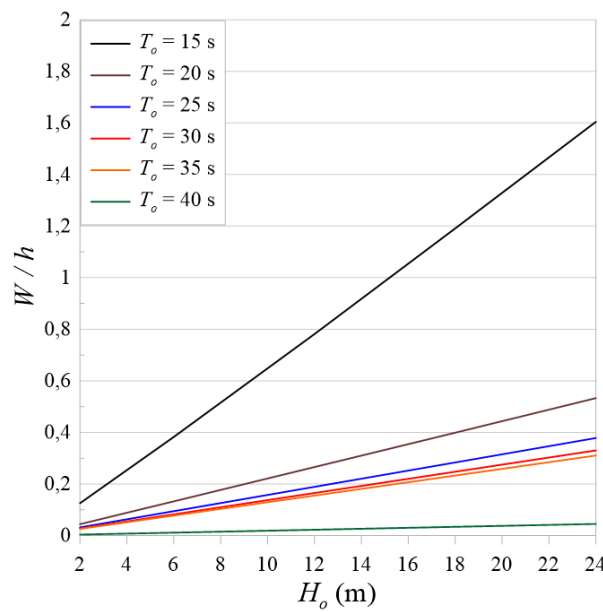


Figura 5.26 – Variação dos deslocamentos e alturas da onda, para alguns períodos de onda ($h_o/L = 0,90$).

Ao analisar a Figura 5.26, nota-se que para diferentes períodos de onda, têm-se uma tendência crescente e praticamente linear dos deslocamentos da casca cilíndrica em função da altura de onda (H_o). Quanto menor o período da onda, maiores são os deslocamentos transversais. Em relação à altura de onda, os valores dos deslocamentos transversais aumentam conforme incrementa-se a altura de onda.

Para avaliar o comportamento da resposta permanente dos deslocamentos transversais com o aumento do período e altura de onda, foram obtidos os planos fase considerando $T_o = 10$, 20 e 40 s, que são classificados como águas profundas, intermediárias e rasas, respectivamente. A Figura 5.27 apresenta a variação dos planos fase para a altura de onda igual a 2 m.

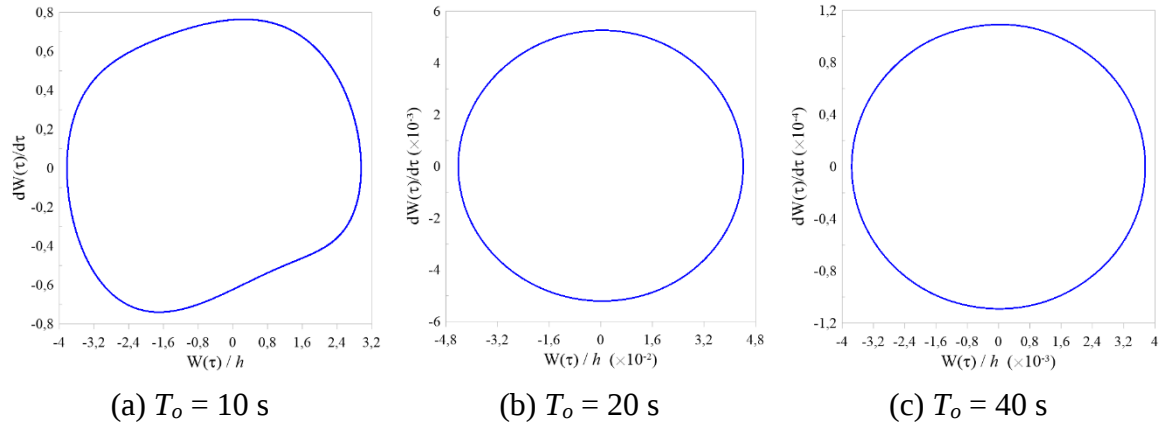


Figura 5.27 – Variação dos planos fase para $H_o = 2$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).

Nota-se na Figura 5.27 uma redução dos deslocamentos com o aumento do período da onda e uma mudança no formato dos planos fase que tende a convergir para uma simetria do plano fase. Da mesma forma, as Figuras 5.28, 5.29, 5.30 e 5.31 apresentam as variações dos planos fase para as alturas de onda iguais a 6, 12, 18 e 24 m, respectivamente.

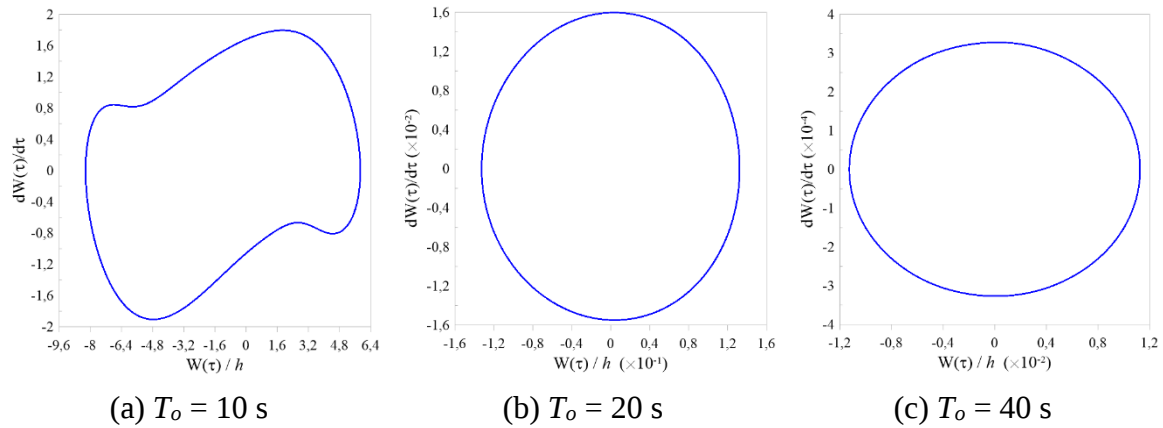


Figura 5.28 – Variação dos planos fase para $H_o = 6$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).

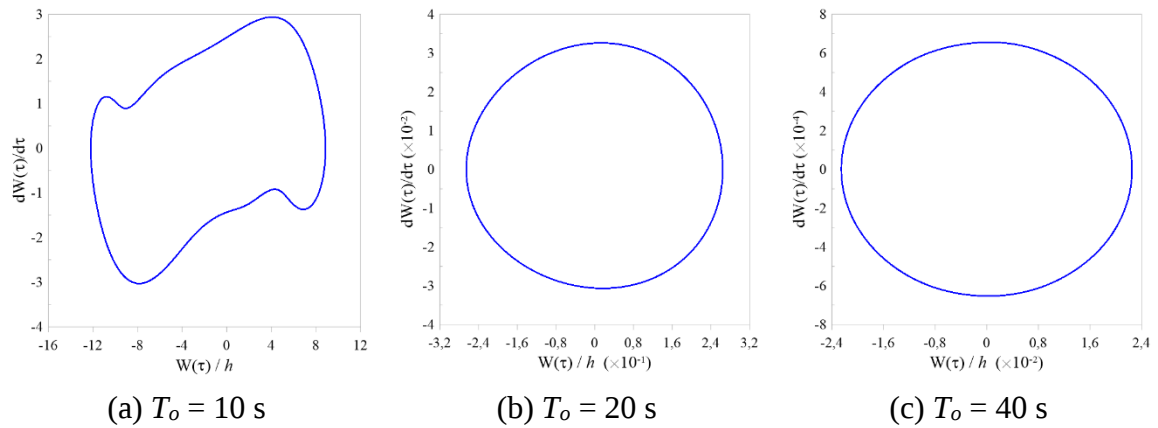


Figura 5.29 – Variação dos planos fase para $H_o = 12$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).

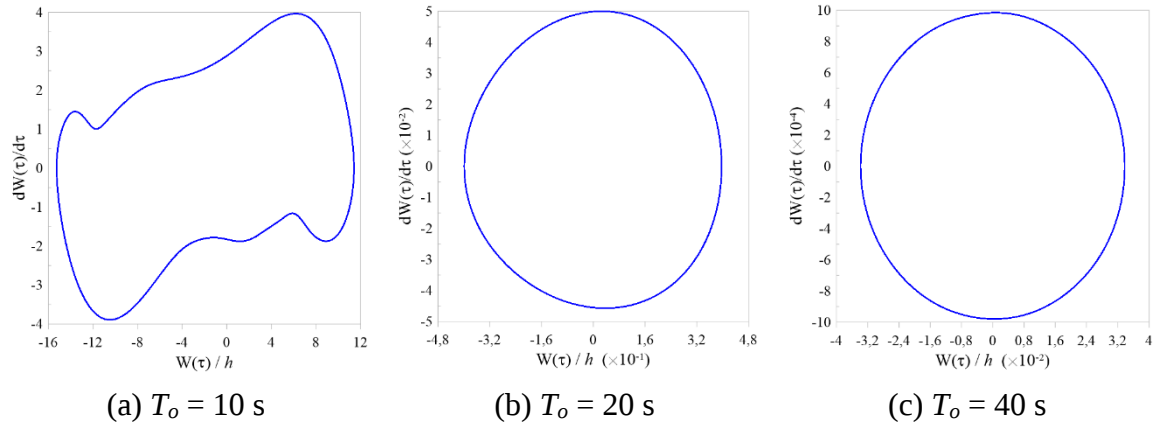


Figura 5.30 – Variação dos planos fase para $H_o = 18$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).

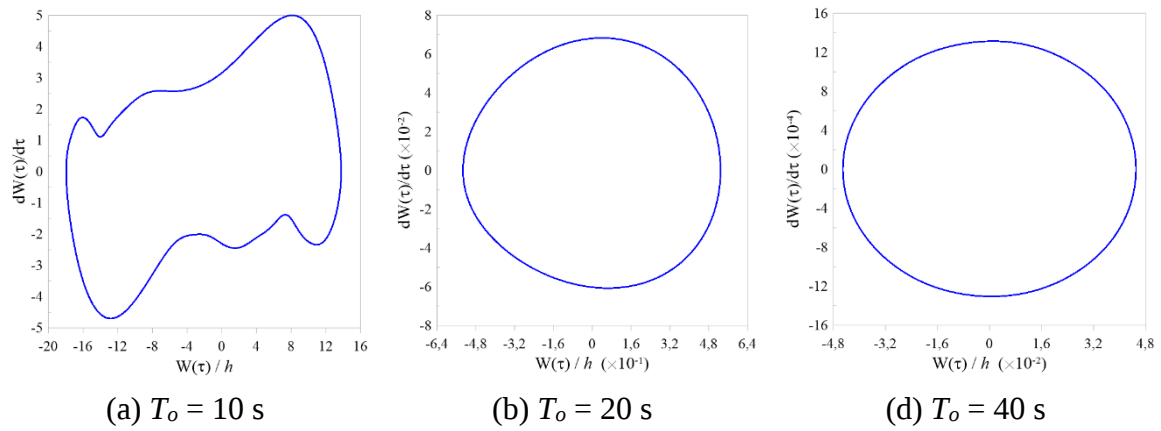


Figura 5.31 – Variação dos planos fase para $H_o = 24$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s).

Para todos os casos apresentados, os deslocamentos transversais da casca cilíndrica para $T_o = 10$ s foram superiores a duas vezes o valor da espessura da casca h , sendo possível notar, a partir dos planos fase para este caso, uma assimetria dos deslocamentos transversais. Para períodos de onda menores que 10 s, as não linearidades são acentuadas e ocorre perda de convergência numérica, e a teoria de Sanders-Koiter para descrever o comportamento da casca cilíndrica torna-se não aplicável. Com o incremento do período da onda, os deslocamentos são reduzidos e o formato do plano fase se torna simétrico.

5.5. CONSIDERAÇÃO DA CARGA COMPRESSIVA DE PESO PRÓPRIO DA CASCA CILÍNDRICA

Em virtude das grandes dimensões da casca cilíndrica, o peso próprio da estrutura pode ter uma influência importante no seu dimensionamento, e afetar as vibrações não lineares do problema em estudo. Para avaliar esta questão, foi incorporado nos funcionais de energia, por meio da equação (3.17), o peso próprio da casca, que leva em conta a contribuição do

encurtamento circunferencial e radial no seu processo de flambagem. Para se ter uma ideia da magnitude desta carga, o valor da massa da casca cilíndrica é igual a $1,885 \times 10^7$ kg, que representa um valor considerável nas variáveis do problema. É importante ressaltar que todos os resultados apresentados anteriormente não contemplam a influência do peso próprio da casca cilíndrica.

Ao incorporar este carregamento nas equações de equilíbrio não lineares, equação (3.92), foram calculadas as frequências naturais para três situações: sem a consideração do peso próprio (ω_{spp}); com o peso próprio, incluindo as parcelas de encurtamento dos deslocamentos circunferenciais e radiais (ω_{ppv}); e por fim, com o peso próprio, mas considerando apenas a parcela de encurtamento dos deslocamentos radiais (ω_{ppw}). A Tabela 5.5 apresenta os valores das cinco primeiras frequências da casca cilíndrica, com estas três considerações, e com a presença de fluido interno e externo em todo o comprimento da casca. Também estão indicadas as diferenças percentuais das frequências considerando o peso próprio da casca cilíndrica em relação a casca cilíndrica sem esta influência.

Tabela 5.5 – Comparação das frequências naturais, considerando e desconsiderando o peso próprio da casca cilíndrica, incluindo a influência do fluido interno e externo ($H_i = H_e = L$).

(m, n)	ω_{spp} (Hz)	ω_{ppv} (Hz)	ω_{ppw} (Hz)	E_1 (%) [*]	E_2 (%) [*]
(1, 4)	0,11076	0,11028	0,11031	0,44	0,41
(1, 3)	0,11377	0,11344	0,11348	0,29	0,26
(1, 2)	0,13086	0,13074	0,13074	0,09	0,09
(1, 5)	0,15332	0,15296	0,15298	0,24	0,23

^{*} E_1 : diferença percentual entre ω_{spp} e ω_{ppv} ; E_2 : diferença percentual entre ω_{spp} e ω_{ppw}

Ao analisar os valores das frequências naturais, observa-se diferenças inferiores a 0,44%, e para todos os casos, nota-se que a influência das duas parcelas de encurtamento dos deslocamentos (circunferencial e radial) apresentaram as menores frequências. Entretanto, não foi uma diferença significativa que geraria resultados diferentes dos obtidos até o momento, e, portanto, para a análise de vibração livre, a influência do peso próprio pode ser negligenciada. Em relação a análise das vibrações forçadas, também foi feito um estudo sobre a consideração do peso próprio da casca cilíndrica, e se esta carga adicional provocaria distorções nos resultados obtidos. Para esta etapa, foi feita a mesma análise paramétrica do tópico anterior, avaliando em conjunto com a variação dos parâmetros geométricos das ondas oceânicas.

A Figura 5.32 apresenta a variação dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica para algumas alturas da onda ($H_o = 2, 6, 12, 18$ e 24 m), em função dos períodos de onda, para a relação de profundidade d'água igual a 108 m ($h_o/L = 0,90$). A Figura 5.32a compara os deslocamentos da casca cilíndrica obtidos considerando a influência do peso próprio com as duas parcelas de encurtamento dos deslocamentos v e w ($K_p = 1$) e desconsiderando esta carga. De forma análoga, a Figura 5.32b mostra a mesma comparação, mas desconsiderando a parcela de encurtamento do deslocamento circunferencial ($K_p = 0$).

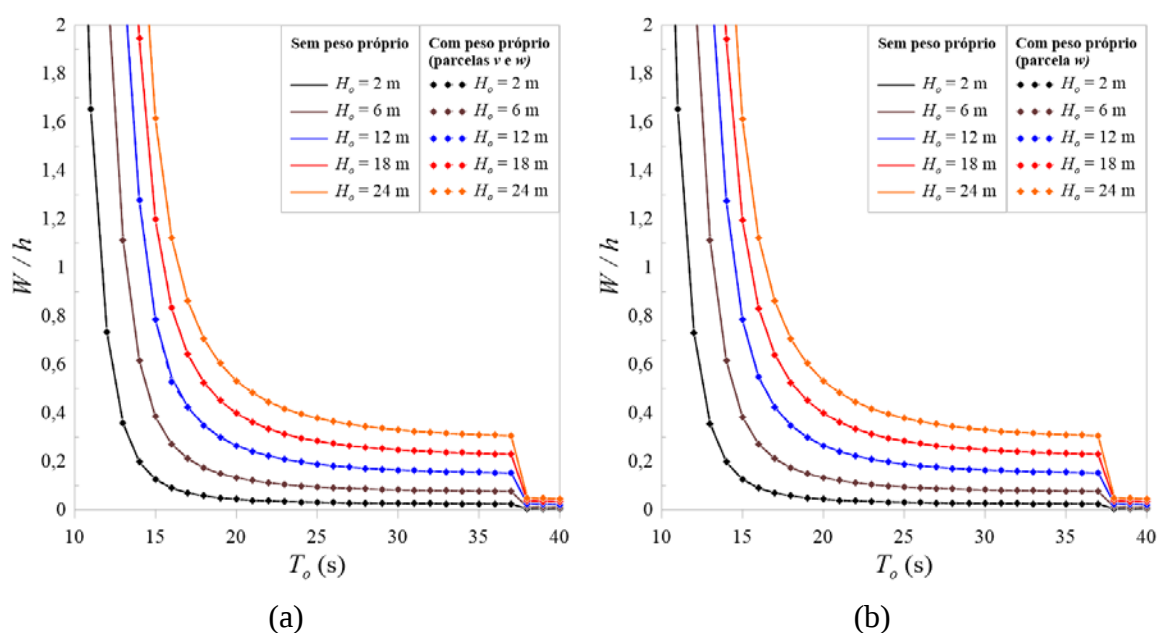


Figura 5.32 – Variação dos deslocamentos transversais para algumas alturas da onda, em função dos períodos de onda ($h_o/L = 0,90$).

Ao analisar a variação dos deslocamentos transversais em função do período de onda, nota-se o mesmo comportamento, considerando e desconsiderando o peso próprio, para os dois casos ($K_p = 0$ e $K_p = 1$), não sendo identificadas diferenças entre os deslocamentos obtidos. A Tabela 5.6 apresenta alguns destes deslocamentos para três períodos de ondas ($T_o = 10, 20$ e 40 s), com $H_o = 6$ m e $h_o = 108$ m, com o objetivo de avaliar as diferenças entre os casos.

Tabela 5.6 – Comparação dos deslocamentos transversais, considerando e desconsiderando o peso próprio da casca cilíndrica, para três valores de períodos de onda ($h_o/L = 0.90$).

T_o (s)	Sem peso próprio		Com peso próprio ($K_p = 1$)		Com peso próprio ($K_p = 0$)	
	W (m)	W/h	W (m)	W/h	W (m)	W/h
10	3,05040	12,20159	3,05997	12,23990	3,05919	12,23678
20	0,06638	0,26551	0,06646	0,26583	0,06643	0,26570
40	0,00563	0,02253	0,00564	0,02255	0,00564	0,02255

É observado que os maiores deslocamentos transversais são obtidos para o caso com a consideração das duas parcelas de encurtamento para o peso próprio. Quanto menor o valor do período da onda, as diferenças em relação ao caso sem peso próprio são maiores, em virtude da maior intensidade de carga, e são atenuadas com o aumento do período da onda. Entretanto, os valores em todas as análises são praticamente os mesmos, com divergências bem pequenas.

A Figura 5.33 apresenta a variação dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica para diversos períodos de onda ($T_o = 15, 20, 25, 30, 35$ e 40 s), em relação às alturas de onda, para a relação de profundidade d'água igual a 108 m ($h_o/L = 0,90$). O primeiro gráfico (Figura 5.33a) compara os deslocamentos da casca cilíndrica considerando a influência do peso próprio com as duas parcelas de encurtamento dos deslocamentos v e w ($K_p = 1$), bem como sem considerar essa carga. De maneira semelhante, o segundo gráfico (Figura 5.33b) apresenta a mesma comparação, porém sem levar em conta a parcela de encurtamento do deslocamento circunferencial ($K_p = 0$).

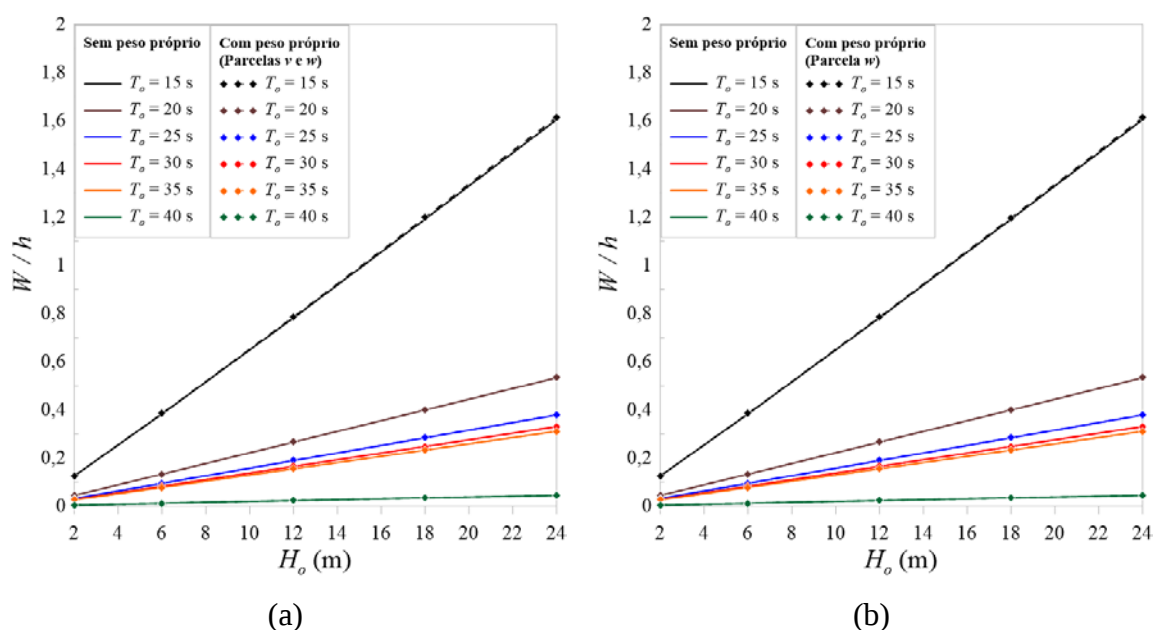


Figura 5.33 – Variação dos deslocamentos transversais para alguns períodos da onda, em função das alturas de onda ($h_o/L = 0,90$).

A variação dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica em função da altura das ondas oceânicas tem um comportamento linear, em que a incorporação do peso próprio não afeta significativamente seus valores, conforme apresentado na Tabela 5.6. Também não alterou a forma da variação linear já identificada no tópico anterior, sem a influência do peso próprio.

Por fim, são avaliados os planos fase para alguns períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s), que representam a classificação de águas profundas, intermediárias e rasas, ilustrando, portanto, um exemplo de cada caso. Foi feita uma comparação dos planos fase sem a influência do peso próprio e em seguida, levanta em conta seus efeitos para o caso que contempla as duas parcelas de encurtamento dos deslocamentos ($K_p = 1$), que corresponde a situação com as maiores diferenças. A Figura 5.34 mostra esta comparação, com altura de onda igual a 2 m.

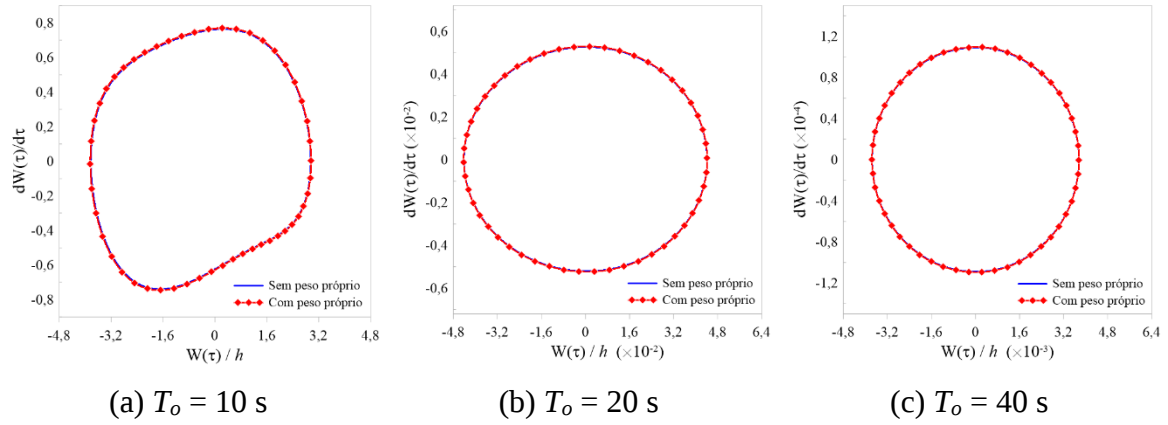


Figura 5.34 – Comparação dos planos fase para $H_o = 2$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s), com e sem influência do peso próprio da casca cilíndrica.

E de forma semelhante a Figura 5.35 ilustra a comparação dos planos fase para altura de onda igual a 24 m, para os três períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s), com e sem influência do peso próprio da casca cilíndrica. Foram adotados apenas estes dois casos, que representam os extremos das alturas de ondas avaliadas nas análises anteriores.

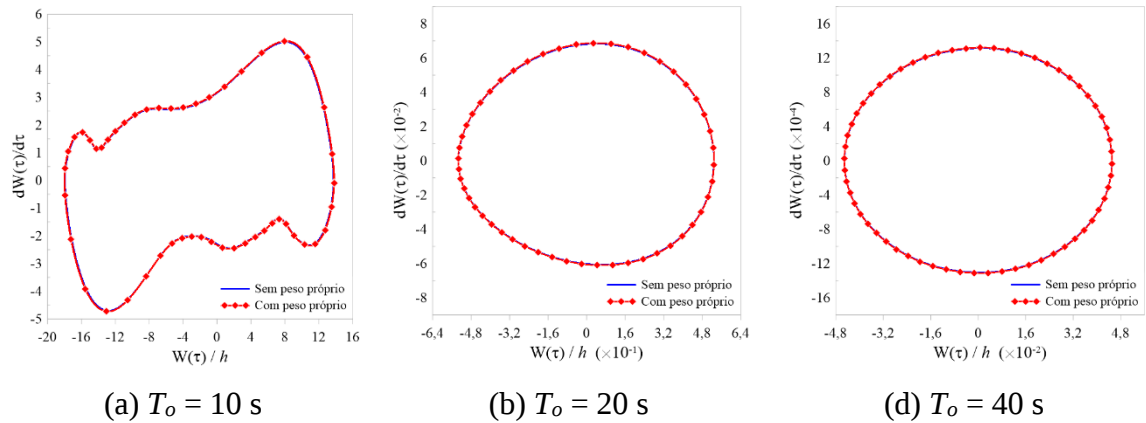


Figura 5.35 – Comparação dos planos fase para $H_o = 24$ m, variando os períodos de onda ($T_o = 10, 20$ e 40 s), com e sem influência do peso próprio da casca cilíndrica.

Nota-se que independente da consideração ou não do peso próprio, não houve alteração do formato dos planos fase para todas as situações, apenas com pequenas diferenças nos valores dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica. Desta forma, pode-se afirmar que as

análises das vibrações forçadas do problema, podem ser feitas sem a consideração desta carga adicional nos funcionais de energia do problema, visto que para este caso, as diferenças identificadas foram mínimas, tanto para a vibração livre quanto para a análise de vibração forçada.

Portanto, a partir desta análise paramétrica foi possível realizar uma análise não linear dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica, considerando a ação de ondas oceânica, e com a presença do fluido interno e externo, e também avaliando a influência do peso próprio da estrutura. Além disso, foi identificado a influência das propriedades geométricas da onda, e como estes parâmetros interferem na resposta não linear da casca cilíndrica, o que permite avançar no estudo da instabilidade dinâmica não linear do problema.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Nesta tese de doutorado foi apresentado um estudo analítico-numérico para avaliar o comportamento dinâmico não linear de uma casca cilíndrica engastada-livre, considerando a presença de fluido externo e interno e com a inclusão dos efeitos do movimento da superfície livre do fluido interno. Os campos de deformação e as mudanças de curvatura da superfície média da casca cilíndrica foram descritos pela teoria linear de Sanders-Koiter. As expansões modais descrevendo os campos de deslocamento da casca cilíndrica foram obtidas a partir dos polinômios de Chebyshev. O método de Rayleigh-Ritz foi utilizado para derivar as equações lineares de movimento do sistema que, por sua vez, foram resolvidas para obter as frequências naturais e os modos de vibração da casca cilíndrica com a interação do fluido interno e externo. Os resultados das vibrações livres foram comparados com um modelo numérico desenvolvido através do MEF, por meio do *software* ANSYS®. Para a análise não linear das vibrações forçadas, foi aplicada uma carga proveniente da ação de ondas oceânicas obtidas a partir da teoria da difração. Também foram obtidos os campos de pressões gerados a partir do deslocamento das ondas aplicado nas laterais externas da casca cilíndrica. A aplicação do carregamento foi validada com o MEF, utilizando a teoria linear de Airy. Para obtenção das respostas no tempo e planos fase, o sistema de equações não lineares foi resolvido a partir do método Runge-Kutta de quarta ordem.

6.1. CONCLUSÕES

Em relação à análise dinâmica linear das vibrações livres, obtida a partir das frequências naturais e deformadas modais, conclui-se que:

- a) O nível de fluido modifica as vibrações livres da casca cilíndrica. A consideração do fluido externo e interno para análise de vibrações livres com aplicação de pressões hidrodinâmicas é importante, pois incorpora uma massa adicional e reduz os valores de frequências naturais;
- b) A influência da superfície livre também interfere, sob certas condições, nas vibrações livres da casca cilíndrica, e para estruturas de grandes dimensões observa-se um efeito considerável que não pode ser negligenciado, chegando a apresentar valores de frequência do *sloshing* similares às frequências naturais da casca cilíndrica;

- c) A partir da análise paramétrica em relação aos diferentes níveis de fluido interno e externo, observa-se que o aumento do nível de fluido reduz as frequências naturais da casca cilíndrica, conforme resultados encontrados na literatura;
- d) O fluido externo acentua a redução das frequências naturais com o aumento do nível do líquido, uma vez que uma massa adicional é incorporada ao sistema;
- e) As frequências naturais e deformadas modais, considerando o efeito de *sloshing* para o fluido interno não sofrem modificação ao incorporar o fluido externo, independentemente do nível de fluido interno e externo, devido à alta rigidez da casca cilíndrica;
- f) A cavidade acústica desacoplada apresenta altas frequências e não possui modos dominantes no sistema, o que permite concluir que a influência sobre as frequências iniciais é governada pela massa adicional do fluido, visto que se encontra em regime incompressível ($\lambda \ll 1$), e pela casca cilíndrica engastada-livre;
- g) Os resultados para a frequência natural e para as deformadas modais indicaram uma boa convergência entre os modelos analítico e numérico, o que permite estudar as vibrações livres de cascas cilíndricas com a presença de fluido através de diferentes metodologias;
- h) Os polinômios de Chebyshev, utilizados na expansão modal da casca cilíndrica, foram eficientes para obtenção das frequências naturais e deformadas modais, visto que houve uma boa convergência entre os resultados analíticos obtidos, por meio da comparação com dados existentes em literatura e por meio do modelo numérico.

Em relação à análise dinâmica não linear das vibrações forçadas, obtida a partir das respostas no tempo e dos planos fase, foi possível observar que:

- a) Para todos os casos analisados, foi obtida convergência dos resultados das oscilações não lineares para a seguinte configuração da expansão modal: $N_u = N_v = N_w = 1...3$ e $N = 0...2$;
- b) Os maiores deslocamentos transversais da casca cilíndrica ocorrem para águas profundas, intermediárias e rasas, nesta ordem;
- c) Com o aumento do período da onda, os deslocamentos transversais da casca cilíndrica se reduzem de forma exponencial. Quanto menor o período da onda T_o , maiores são os deslocamentos, e se reduzem com o aumento de T_o ;

- d) Para diferentes períodos de onda, têm-se uma tendência crescente e praticamente linear dos deslocamentos não lineares da casca cilíndrica em função da altura de onda. Os valores dos deslocamentos aumentam com o incremento da altura de onda;
- e) Ocorre uma redução significativa dos deslocamentos transversais da casca cilíndrica para o caso de águas rasas, em ambas as regiões transiente e permanente da resposta no tempo;
- f) A partir da geometria considerada neste trabalho, a maioria dos casos relacionados ao dimensionamento em águas profundas, os deslocamentos transversais da casca cilíndrica foram superiores a duas vezes o valor da espessura da casca (h), sendo possível notar a partir dos planos fase para este caso, uma assimetria dos deslocamentos e com valores muito altos, que gera uma instabilidade dinâmica e perda de rigidez o sistema. Para períodos de onda menores que 10 s, as não linearidades são acentuadas e ocorre perda de convergência numérica. Com o incremento do período da onda, os deslocamentos são reduzidos e o formato do plano fase se torna simétrico;
- g) A inclusão do peso próprio da casca cilíndrica não resultou em alterações significativas nos planos fase para todas as situações, apenas provocando pequenas variações nos deslocamentos transversais da casca. As diferenças observadas foram mínimas tanto para as vibrações livres quanto para as vibrações forçadas.

6.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O estudo de cascas cilíndricas de grandes dimensões possui grande interesse, visto as inúmeras possibilidades de utilização, tanto na indústria *offshore*, naval e aeroespacial, por exemplo. Como pode ser observado no desenvolvimento deste trabalho, existem algumas possibilidades de incorporar outras variáveis, levando a situações mais complexas ou ainda, de aprimoramento das soluções apresentadas, e são citadas como sugestões para trabalhos futuros:

- a) Avaliar a incorporação de efeitos sísmicos ao problema, visto que são carregamentos que podem afetar de forma significativa a estabilidade dinâmica de cascas cilíndricas;
- b) Estudar a influência de diferentes tipos de solo, e como podem influenciar no comportamento dinâmico não linear destas estruturas;
- c) Elaborar um modelo que descreva a condição de contorno apenas apoiada na base, para simular casos de estruturas de concreto por gravidade;

- d) Analisar efeitos térmicos, tanto do aspecto de aumento de temperatura (torres solares), quanto de redução térmica, devido à grande utilização de plataformas *offshore* em regiões de geleira;
- e) Avaliar estruturas em que a espessura tenha dimensão variável ao longo do comprimento, visto que é uma solução bastante utilizada em estruturas de grandes dimensões, onde a base da estrutura possui diâmetro e espessura maiores, e são reduzidas de forma escalonada até o topo;
- f) Incorporar enrijecedores circunferenciais e longitudinais ao problema de modo que a aplicação em águas profundas seja possível;
- g) Aprimorar o modelo numérico para avaliar a reflexão de ondas nos limites do modelo sólido em elementos finitos, incorporando condições de contorno absorventes ou outros métodos que simulem elementos infinitos;
- h) Discretizar o fluido externo por elementos finitos, com e sem superfície livre, e a ação da onda introduzida como carga externa à casca;
- i) Incluir discretizando o fluido externo com e sem superfície livre, e no modelo de elementos finitos via ANSYS®, gerar a onda que incide sobre a estrutura;
- j) Avaliar a região de segurança das soluções estáveis do problema, a partir da obtenção das curvas de ressonância e bacias de atração;
- k) Adicionar uma carga axial dependente do tempo e avaliar sua estabilidade estrutural, através das fronteiras de estabilidade, diagramas de bifurcação e bacias de atração.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGRESTA, A.; CAVALAGLI, N.; BISCARINI, C.; UBERTINI, F. Effect of bottom geometry on the natural sloshing motion of water inside tanks: an experimental analysis. **Applied sciences**, v. 11, n. 2, p. 605-620, 2021.
- ALIJANI, F.; AMABILI, M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 58, p. 233-257, 2014.
- ALVES, J. H. G. M.; RIBEIRO, E. O.; GROSSMANN MATHESON, G. S.; LIMA, J. A. M.; PARENTE RIBEIRO, C. E. Reconstituição do Clima de Ondas no Sul-Sudeste Brasileiro entre 1997 e 2005. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 27, n. 3, p. 427-45, 2009.
- AMABILI, M. Shell-plate interaction in the free vibrations of circular cylindrical tanks partially filled with a liquid: the artificial spring method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 199, n. 3, p. 431-452, 1997.
- AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M.P.; LAKIS, A. A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. **Journal of Sound and Vibration**, v. 213, n. 2, p. 259-299, 1998.
- AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. **Applied Mechanics Reviews**, v. 56, n. 4, p. 349-381, 2003.
- AMABILI, M.; SARKAR, A.; PAIDOUSSIS, M. P. Reduced-order models for nonlinear vibrations of cylindrical shells via the proper orthogonal decomposition method. **Journal of Fluids and Structures**, v. 18, n. 2, p. 227-250, 2003.
- AMABILI, M. **Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates**. New York, USA: Cambridge University Press, 2008. 392 p.
- AMAECHI, C. V.; REDA, A.; BUTLER, H. O.; JA'E, I. A.; NA, C. Review on fixed and floating offshore structures. Part I: Types of platforms with some applications. **Journal of Marine Science and Engineering**, v. 10, n. 8, p. 1074, 2022.
- ANSYS, Versão 2021 R2. Manual do Usuário. Ansys Inc, USA, 2021.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2023.
- BAE, C.-H.; KWAK, M. K.; KOO, J.-R. Free vibration analysis of a hanged clamped-free cylindrical shell partially submerged in fluid: The effect of external wall, internal shaft, and flat bottom. **Journal of Sound and Vibration**, v. 331, p. 4072-4092, 2012.
- BÉROT, F.; PESEUX, B. Vibro-acoustic behavior of submerged cylindrical shells: analytical formulation and numerical model. **Journal of Fluids and Structures**, v. 12, p. 959-1003, 1998.
- BIAZAR, J.; EBRAHIMI, H. Chebyshev wavelets approach for nonlinear systems of Volterra integral equations. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 63, n. 3, p. 608-616, 2012.
- BLEVINS, R. D. **Formulas for natural frequency and mode shape**. Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- BLEVINS, R. D. **Flow-induced vibration**. Florida: Krieger Publishing Company, 2001. 477 p.

- BOMTEMPO, T. B. S.; PEDROSO, L. J. Um estudo analítico-numérico da influência do deck no comportamento dinâmico de uma plataforma offshore mono leg em vibrações livres. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, n. 24, p. 246-254, 2016.
- BOYD, J. P. **Chebyshev and Fourier Spectral Methods**. 2nd edition. United State of America: Dover Publications, 2001. 668 p.
- BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of bars, plates and shells**. United State of America: McGraw-Hill, 1975.
- CASE, K. M; PARKINSON, W. C. Damping of surface waves in an incompressible liquid. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 2, n. 2, p. 172-184. 1957.
- CHAKRABARTI, S. K. **Hydrodynamics of offshore structures**. Great Britain: WIT press, 1987. 435 p.
- CHIBA, M.; YAMAKI, N.; TANI, J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid—Part I: Theoretical analysis. **Thin-walled structures**, v. 2, n. 3, p. 265-284, 1984a.
- CHIBA, M.; YAMAKI, N.; TANI, J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid—Part II: Numerical results. **Thin-walled structures**, v. 2, n. 4, p. 307-324, 1984b.
- CHIBA, M.; YAMAKI, N.; TANI, J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid—Part III: Experimental results. **Thin-walled structures**, v. 3, n. 1, p. 1-14, 1985.
- CHIBA, M. Experimental studies on a nonlinear hydroelastic vibration of a clamped cylindrical tank partially filled with liquid. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 115, n. 4, p. 381-388, 1993a.
- CHIBA, M. Non-linear hydroelastic vibration of a cantilever cylindrical tank—Part II. Experiment (liquid-filled case). **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 28, n. 5, p. 601-612, 1993b.
- CHIBA, M.; MAGATA, H. Influence of liquid sloshing on dynamics of flexible space structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 401, p. 1-22, 2017.
- CHU, W-H.; KANA, D. D. A theory for nonlinear transverse vibrations of a partially filled elastic tank. **AIAA Journal**, v. 5, n. 10, p. 1828-1835, 1967.
- DONNELL, L. H. Stability of thin-walled tubes under torsion. **NACA**, United States, v. 479, p. 95-116, 1933.
- FLÜGGE, W. **Statik und Dynamik der Schalen**. 2^a ed., Springer-Verlag (Berlin), 1957.
- FRANÇA JR, D. O.; PEDROSO, L. J.; MENDES, N. B.; GONZALES, V. I. F. D. Estudo de vibrações livres desacopladas e acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno. In: CILAMCE 2017, Florianópolis. **Proceedings: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. 2017 v. 1, p. 1-20.
- FRANÇA JR, D. O. **Estudo analítico-numérico em vibrações livres fluido-elásticas em cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno**. 2018. 145 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

- FRANÇA JR, D. O.; RIBEIRO, P. M. V.; PEDROSO, L. J. Simplified expressions for dynamic behavior of cylindrical shells uncoupled and coupled with liquids. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 16, n. 6, 2019.
- FRANÇA JR, D. O. **Estudo analítico-numérico e experimental de problemas de interação dinâmica fluido-estrutura com aplicação a barragens e eclusas de concreto**. 2022. 292 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade de Brasília, Brasília, 2022.
- GIBERT, R. J. **Vibrations des Structures – Interactions Avec les Fluids – Sources d’Excitation Aléatoires**. Collection de la Direction des Études et Recherches d’Électricité de France, Eyrolles Ed., Paris, França, 1988.
- GOLDENVEIZER, A. L. **Theory of Thin Shells**. Pergamon Press (New York), 1961.
- GONÇALVES, P. B. **Interação dinâmica não-linear entre fluido e cascas delgadas**. 1987. 317 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1987.
- GONÇALVES, P. B.; BATISTA, R. C. Frequency response of cylindrical shells partially submerged or filled with liquid. **Journal of Sound and Vibration**, v. 113, n. 1, p. 59-70, 1987.
- GONÇALVES, P. B.; BATISTA, R. C. Non-linear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, v. 127, n. 1, p. 133-143, 1988.
- GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition. **Journal of Sound and Vibration**, v. 315, n. 3, p. 641-663, 2008.
- GUPTA, R. K. Sloshing in shallow cylindrical tanks. **Journal of Sound and Vibration**, v. 180, n. 3, p. 397-415, 1995.
- HABENBERGER, J. Fluid damping of cylindrical liquid storage tanks. **Springer Plus**, v. 4, n. 515, p. 1-11. 2015.
- HANSEN, E. L. M. B. **Oscilações não lineares de tanques cilíndricos multicamadas: uma abordagem via gradação funcional**. 2021. 162 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2021.
- HANSEN, E. L. M. B.; SILVA, F. M. A. Nonlinear vibration analysis of a partially filled multi-layer cylindrical tank: consideration of the sloshing effects in the fluid–structure interaction. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 44, n. 10, p. 484, 2022.
- HARARI, A.; SANDMAN, B. E.; ZALDONIS, J. A. Analytical and experimental determination of the vibration and pressure radiation from a submerged, stiffened cylindrical shell with two end plates. **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 95, n. 6, p. 3360-3368, 1994.
- HARITOS, N. Introduction to the analysis and design of offshore structures—an overview. **Journal of Sound and Vibration**, v. 7, Special Issue: Loading on Structures, p. 55-65, 2007.
- HARTE, R.; GRAFFMANN, M.; KRÄTZIG, W. B. Optimization of solar updraft chimneys by nonlinear response analysis. **Applied Mechanics and Materials**. Trans Tech Publications Ltd, 2013, v. 283, p. 25-34, 2013.

- HEWITT, E.; HEWITT, R. E. The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis. **Archive for history of Exact Sciences**, p. 129-160, 1979.
- KANA, D. D.; LINDHOLM, U. S.; ABRAMSON, H. N. An experimental study of liquid instability in a vibrating elastic tank. **Journal Spacecraft**, v. 3, n. 8, p. 1183-1188, 1966.
- KARAGIOZIS, K. N.; AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M. P.; MISRA, A. K. Nonlinear vibrations of fluid-filled clamped circular cylindrical shells. **Journal of Fluids and Structures**, v. 21, n. 5-7, p. 579-595, 2005.
- KIM, Y-W.; LEE, Y-S.; KO, S-H. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. **Journal of Sound and Vibration**, v. 276, n. 3-5, p. 869-897, 2004.
- KOITER, W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. **Proc Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen**. v. B 69, p. 1-54, 1966.
- KRAUS, H. **Thin elastic shells: An Introduction to the Theoretical Foundations and the Analysis of Their Static and Dynamic Behavior**. New York: John Wiley & Sons, 1967, 476 p.
- KUBENKO, V. D.; KOVAL'CHUK, P. S. Nonlinear problems of the vibration of thin shells (review). **International Applied Mechanics**, v. 34, n. 8, p. 703-728, 1998.
- KURYLOV, Y.; AMABILI, M. Nonlinear vibrations of clamped-free circular cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, p. 5363-5381, 2011.
- KWAK, M. K. Free vibration analysis of a finite circular cylindrical shell in contact with unbounded external fluid. **Journal of Fluids and Structures**, v. 26, p. 377-392, 2010.
- LAKIS, A. A.; NEAGU, S. Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid. **Journal of Sound and Vibration**, v. 207, n. 2, p. 175-205, 1997.
- LE MÉHAUTÉ, B. **An introduction to hydrodynamics and water waves**. New York: Springer Science & Business Media, 1976. 326 p.
- LEISSA, A. W. **Vibration of shells**. NASA SP-288, Government Printing Office, Washington DC, 1973.
- LIEW, K. M.; LIM, C. W.; KITIPORNCHAI, S. Vibration of shallow shells: A review with bibliography. **Applied Mechanics Reviews**, v. 50, n. 8, p. 431-444, 1997.
- LIM, C. W.; MA, Y. F.; KITIPORNCHAI, S.; WANG, C. M.; YUEN, R. K. K. Buckling of vertical cylindrical shells under combined end pressure and body force. **Journal Of Engineering Mechanics**, v. 129, n. 8, p. 876-884, 2003.
- LØKKE, A; CHOPRA, A. K. Direct finite element method for nonlinear earthquake analysis of 3-dimensional semi-unbounded dam–water–foundation rock systems. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 47, n. 5, p. 1309-1328, 2018.
- LOVE, A. E. H. The Small Free Vibrations and Deformations of a Thin Elastic Shell. **Phil. Trans. Roy. Soc.** (London), ser. A, v. 179, p. 491-549, 1888.
- MA'EN, S. S.; BUTCHER, E. A. Free vibration analysis of non-rotating and rotating Timoshenko beams with damaged boundaries using the Chebyshev collocation method. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 60, n. 1, p. 1-11, 2012.
- MACCAMY, R. C.; FUCHS, R. A. **Wave forces on piles: a diffraction theory**. US Beach Erosion Board, n. 69, 1954. 22 p.

- MENDES, N. B. **Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco**. 2013. 343 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade de Brasília, Brasília, 2013.
- MENDES, N. B.; PEDROSO, L. J.; GIBERT, R. J. Um estudo analítico-numérico em vibrações livres de cavidades acústicas cilíndricas. *In: CILAMCE 2013, Pirenópolis. Proceedings: XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2013. v. 1, p. 1-18.
- MENDES, N. B.; PEDROSO, L. J.; RIBEIRO, P. M. V. Um estudo de vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas com anéis enrijecedores e contendo fluido. *In: CILAMCE 2014, Fortaleza. Proceedings: XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2014. v. 1, p. 1-19.
- MENDES, N. B.; PEDROSO, L. J.; RIBEIRO, P. M. V. Estudo de vibração acoplada de cascas cilíndricas sob diferentes níveis de fluido e posições de anéis enrijecedores. *In: CILAMCE 2015, Rio de Janeiro. Proceedings: XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2015. v. 1, p. 1-16.
- MENDES, N. B.; PEDROSO, L. J.; RIBEIRO, P. M. V. Vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas contendo fluido e conectadas com placas de fundo apoiadas em base elástica. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, n. 35, p. 185-204, 2016.
- MENDES, N. B. **Um estudo de propagação de ondas e aplicação do sismo na análise dinâmica acoplada a barragem em arco -reservatório – fundação**. 2018. 316 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade de Brasília, Brasília, 2018.
- MIEDA, T; ISHIDA, K; JITU, K; CHIBA, T. An experimental study of viscous damping in sloshing mode of cylindrical tanks. **International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology**, Stuttgart, 15-20 Agosto, 1993.
- MIKAMI, T.; YOSHIMURA, J. The collocation method for analyzing free vibration of shells of revolution with either internal or external fluids. **Computers & Structures**, v. 44, n. 1-2, p. 343-351, 1992.
- MONTES, R. O. P. **Modelo de baixa dimensão para análise das vibrações não lineares de cascas cilíndricas com gradação funcional**. 2015. 148 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.
- MONTES, R. O. P.; PEDROSO, L. J. Analytical-numerical study of natural frequencies and mode shapes of interconnected acoustic cavities due to the influence of several significant parameters. *In: 42nd Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (XLII CILAMCE) and the 3rd Pan American Congress on Computational Mechanics (III PANACM)*, 2021, Rio de Janeiro. **42nd Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (XLII CILAMCE) and the 3rd Pan American Congress on Computational Mechanics (III PANACM)**, 2021. v. 1. p. 1-7.
- MONTES, R. O. P.; PEDROSO, L. J.; SILVA, F. M. A. Analysis of the nonlinear vibration of a clamped cylindrical shell considering the influence of the internal fluid and oceanic waves. *In: XLIII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2022, Foz do Iguaçu. **Proceedings of the XLIII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2022. v. 1. p. 1-7.

- MONTES, R. O. P; SILVA, F. M. A; PEDROSO, L. J. Free vibration analysis of a clamped cylindrical shell with internal and external fluid interaction. **Journal of Fluids and Structures**, v. 125, p. 104079, 2024a.
- MONTES, R. O. P; SILVA, F. M. A; PEDROSO, L. J. Estudo das forças provocadas por ondas oceânicas em estruturas cilíndricas esbeltas offshore pela teoria linear de Airy. **Caderno Pedagógico**, v. 21, n. 2, p. e2803-e2803, 2024b.
- MOUSSAOUI, F.; BENAMAR, R. Non-linear vibrations of shell-type structures: a review with bibliography. **Journal of Sound and Vibration**, v. 255, n. 1, p. 161-184, 2002.
- NIE, R.; LI, T.; ZHU, X.; ZHANG, C. Analysis of free vibration characteristics of cylindrical shells with finite submerged depth based on energy variational principle. **Symmetry**, v. 13, n. 2162, p. 1-16, 2021.
- NOVOZHILOV, V. V. **The Theory of Thin Elastic Shells**. P. Noordhoff Lts (Groningen, The Netherlands), 1964.
- OSPINA, A. A. L. **Estudo comparativo analítico-numérico de vibrações livres e acoplamento fluido-estrutura em cascas cilíndricas**. 2014. 120 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- PAAK, M.; PAÏDOUSSIS, M. P.; MISRA, A. K. Nonlinear vibrations of cantilevered circular cylindrical shells in contact with quiescent fluid. **Journal of Fluids and Structures**, v. 49, p. 283-302, 2014.
- PEDROSO, L. J. **Alguns aspectos da interação fluido-estrutura em estruturas “offshore”**. 1982. 340 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - COPPE – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1982a.
- PEDROSO, L. J. **Espalhamento de ondas em cilindros de grandes dimensões**. Revista do Centro de Tecnologia da UFSM, v. 8, p. 1-24, ISSN: 01014447, 1982b.
- PEDROSO, L. J. **Interação Fluido-Estrutura**. In: Notas de Curso e Apostila Didática Interna, UnB-FT/ENC/GDFE, Brasília, DF, 1992.
- PEDROSO, L. J. **“Sloshing” e exemplos de IFE com efeitos de superfície livre**. In: Notas de Curso e Apostila Didática Interna, UnB-FT/ENC/GDFE, Brasília, DF, 1995.
- PEDROSO, L. J. **Interação Fluido Estrutura 1D e 2D pelo MDF**. In: Notas de Curso e Apostila Didática Interna, UnB-FT/ENC/GDFE, Brasília, DF, 2003.
- PEDROSO, L. J. **Equação da onda – 1D: Método da matriz de transferência**. In: Notas de Curso e Apostila Didática Interna, UnB-FT/ENC/GDFE, Brasília, DF, 2005a.
- PEDROSO, L. J. **Interação fluido estrutura 1D e 2D pelo MEF: formulação U-P**. In: Notas de Curso e Apostila Didática Interna, UnB-FT/ENC/GDFE, Brasília, DF, 2005b.
- PELLICANO, F.; AMABILI, M. Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 13-14, p. 3229-3251, 2003.
- POPOV, A. A.; THOMPSON, J. M. T.; MCROBIE, F. A. Low dimensional models of shell vibration: parametrically excited vibrations of cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, v. 209, n. 1, p. 163-186, 1998.

RAHMAN, T.; JANSEN, E. L.; TISO, P. A finite element-based perturbation method for nonlinear free vibration analysis of composite cylindrical shells. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 11, n. 04, p. 717-734, 2011.

RIBEIRO, P. M. V. **Soluções analíticas para cavidades acústicas bidimensionais com aplicação ao estudo de problemas de interação dinâmica barragem-reservatório**. 2010. 329 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

SANDERS Jr, L. J. Nonlinear theories for thin shells. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 21, p. 21–36, 1963.

SANSOUR, C. A time integration scheme with energy–momentum conservation for a shell formulation with arbitrary geometric and material non-linearities. **Computers and Structures**, v. 82, n. 31-32, p. 2753-2763, 2004.

SARPKAYA, T. **Wave forces on offshore structures**. Cambridge University Press, 2010. 322 p.

SHARMA, C. B.; JOHNS, D. J. Vibration characteristics of a clamped-free and clamped-ring-stiffened circular cylindrical shell. **Journal of Sound and Vibration**, v. 14, n. 4, p. 459-474, 1971.

SILVA, F. M. A. **Modelos de dimensão reduzida para análise das oscilações não-lineares e estabilidade de cascas cilíndricas**. 2008. 182 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. An alternative procedure for the non-linear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells. **Nonlinear Dynamics**, v. 66, p. 303-333, 2011.

SOMMERFELD, A. **Partial differential equations in physics**. Academic Press, 1949.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Plates and Shells – Theory, Analysis and Applications**. Inc: Marcel Dekker, New Yourk, United States, 2001.

WATTANASAKULPONG, N.; PORNPEERAKEAT, S.; CHAIKITTIRATANA, A. Chebyshev collocation solutions for vibration analysis of circular cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 17, n. 2, p. 1750020, 2017.

ZHANG, X. M. Frequency analysis of submerged cylindrical shells with the wave propagation approach. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 44, p. 1259-1273, 2002.

ZIEGLER, F. **Mechanics of solids and fluids**. Springer Science & Business Media, 1995. 845 p.