



Universidade de Brasília

**A influência de comutadores na
estrutura de grupos finitos**

Tharles Araújo de Souza

Orientador: Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Brasília, 16 de janeiro de 2026

*Aos meus pais,
Maria Aparecida & Teódulo.*

*“Nós devemos ser o que somos.
Ter aquilo que bem merecemos.”*

(Inspiração: Milionário & José Rico)

*“No futebol, assim como na vida,
precisamos olhar para a frente
e ponderar sobre nossos próximos
movimentos constantemente.”*

(Pelé)

*“Eu vejo em tudo que me cerca a mão de
Deus.”*

(Atribuído a Enéas Carneiro)

Agradecimentos

A Deus.

À minha família. Aos meus pais, Maria Aparecida e Teódulo, pelo amor, apoio, incentivo. Aos meus irmãos Tácio, Thalisson, Tharlyane, Thiago e Tales, pelo companheirismo. Às minhas sobrinhas Thayla e Thays e ao meu sobrinho José Thaisson, que sempre trouxeram alegria. Aos meus avós José Cavalcante (Seu Zeca), Luzia, Eugênio de Araújo (in memoriam), Maria e Vó Tonha (in memoriam), pelos ensinamentos. Aos meus tios Virtucia, Célio, Elissandra e Yledo, pelo carinho.

À minha namorada Talita, pelo amor, carinho, apoio constante e, sobretudo, pela paciência em todos os momentos dessa caminhada, bem como a toda a sua família.

Aos professores que contribuíram para a minha formação matemática, em especial Raimundo Bastos, Emerson de Melo, Alex Carrazedo, Igor Lima, Martino Garonzi, Mauricio Ayala, Sheila Campos, Guram Donadze, Alexei Krassilnikov, José Ivan e Sérgio Brazil, pelo conhecimento compartilhado ao longo dessa trajetória.

Ao meu orientador, Raimundo Bastos, pela dedicação, compromisso, paciência e pelas valiosas orientações, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e para minha formação acadêmica.

Aos membros da banca, Noraí Rocco, Csaba Schneider, Danilo Silveira e Emerson de Melo, pelas correções, sugestões e contribuições que ajudaram a melhorar este trabalho.

Aos professores José Ivan e Sérgio Brazil, da UFAC, pelo incentivo e pelas cartas de recomendação.

Aos professores Emerson de Melo e Claude Marion, pelas colaborações científicas.

Aos amigos da UFAC, William, Douglas, Athyeli, Kennedy e ao meu conterrâneo de Sena Madureira, Ricardo, pelas conversas, companheirismo e pelos churrascos durante as "férias".

Aos amigos da UFAC que estiveram comigo na UnB: Gabriela (Gabi do Acre), Henrylla, Mateus, Caio, Ismael, Gabriel, Jônatas (PP Peralta Perigoso), Samuel, Gustavo e Manuela (Manú), pela amizade, companheirismo e apoio ao longo dessa nova etapa. Entre provas, listas, aulas, cafés e muitas conversas, a adaptação à UnB tornou-se mais leve.

Aos colegas e amigos do departamento: Ângelo, Ayana, Flávia, Jeverson, Jucélia, Julia, Saulo, Christe, Mailton, Gabrielzinho, Lucas, Andrés (Andresito), Andrés Rosero, Pedro, Tarcios, Felipe, Zaban, Milena, Rômulo, Karen, Adolfo (in memoriam), Jucileide, Rodolfo, Sharmenya, Thiago, Jailson, Gabi Cristina, Katianny e Vinicius Kobayashi, pelas experiências compartilhadas, conversas e momentos de descontração.

Aos amigos de orientação, Deyfila e Guilherme, pelo companheirismo e pelas trocas acadêmicas.

À Maria Edna, pela amizade, cafés na copa do departamento e pelas conversas sobre matemática, especialmente durante as qualificações.

Aos funcionários do departamento, Dona Deusa, Mary, Wilian, Solange e Marta e Dona Rejane, pelo apoio e disponibilidade ao longo do curso.

À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja x um elemento de um grupo G . Denotamos por $B_x(G)$ o conjunto de elementos da forma $a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb$, e por $K_x(G)$ o conjunto de comutadores da forma $x^{-1}b^{-1}xb$, onde $a, b \in G$. Em particular, $K_x(G) \subseteq B_x(G)$. Sabe-se que $B_x(G)$ é um subconjunto normal de G , enquanto $K_x(G)$, em geral, não possui essa propriedade. O objetivo deste trabalho é investigar a influência desses subconjuntos sobre a estrutura do grupo. Os principais resultados obtidos estão relacionados à solubilidade, à nilpotência, à propriedade da torre de Sylow e aos p -grupos finitos.

Palavras-chave: Grupos finitos, comutadores, solubilidade, nilpotência, p -grupos, propriedade da torre de Sylow.

Abstract

Let x be an element of a group G . We denote by $B_x(G)$ the set of elements of the form $a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb$, and by $K_x(G)$ the set of commutators of the form $x^{-1}b^{-1}xb$, where $a, b \in G$. In particular, $K_x(G) \subseteq B_x(G)$. It is known that $B_x(G)$ is a normal subset of G , while $K_x(G)$ does not usually share this property. The purpose of this work is to investigate how these subsets influence the structure of the group. The main results obtained concern solvability, nilpotency, the Sylow tower property, and finite p -groups.

Keywords: Finite Groups, commutators, solvability, nilpotency, p -groups, Sylow tower property.

Conteúdo

Notações	x
Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Conceitos básicos	7
1.2 Classes de grupos	10
1.3 Grupos de matrizes	19
2 Comutadores e séries de subgrupos em grupos	23
2.1 Definições e propriedades	23
2.2 Séries	27
2.3 Torre de Turull	29
2.4 Palavras do tipo comutador	30
2.5 Comutadores coprimos	33
3 Subconjuntos de Spiegel em grupos	38
3.1 Subconjuntos de comutadores	38
3.2 Exemplos	40
3.3 Resultados básicos	43
4 Grupos finitos com restrições em subconjuntos de comutadores	52
4.1 Motivação e resultados principais	52
4.1.1 Critérios de solubilidade	52
4.1.2 p -Grupos finitos	54
4.2 Demonstrações dos resultados	55
5 Caracterizações de grupos finitos por subconjuntos de comutadores	66
5.1 Motivação e resultados principais	66

Conteúdo	ix
5.1.1 Propriedade da torre de Sylow	66
5.1.2 Critérios de nilpotência para residuais nilpotentes	67
5.2 Demonstrações dos resultados	69
Considerações Finais	78
Bibliografia	81

Notações

X, Σ, G, H, \dots	Conjuntos, grupos, subgrupos, etc.
i, j, k, ℓ, \dots	Números inteiros
g, h, x, y, \dots	Elementos de um conjunto ou grupo
$\pi(G)$	Conjunto de todos os primos que dividem a ordem do grupo finito G
x^y	$y^{-1}xy$, o conjugado de x por y
x^G	Classe de conjugação de x em G
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$, o comutador dos elementos x e y
$\Gamma(G)$	Conjunto de todos os comutadores de G
$ S $	Cardinalidade do conjunto S
$ x $	Ordem do elemento x
$K_x(G)$	Conjunto $\{[x, a] \mid a \in G\}$
$B_x(G)$	Conjunto $\{a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb \mid a, b \in G\}$
$\beta(G)$	$\max\{ B_x(G) \mid x \in G\}$
$H \cong G$	H é isomorfo a G
$H \leq G, H < G$	H é subgrupo, ou subgrupo próprio de G , respectivamente
$H \triangleleft G$	H é subgrupo normal de G
$H_1H_2 \cdots H_n$	Produto de subconjuntos em um grupo
$G_1 \times \cdots \times G_n$	Produto direto dos grupos G_1, \dots, G_n
$d(G)$	Número mínimo de geradores de G
$ G : H $	Índice do subgrupo H em G
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado por X
$C_G(H), N_G(H)$	Centralizador e normalizador de H em G , respectivamente
H^G, H_G	Fecho normal e núcleo normal de H em G , respectivamente
$Aut(G)$	Grupo de automorfismos de um grupo G
$G' = [G, G]$	Subgrupo comutador de um grupo G
$G^{(i)}$	i -ésimo termo da série derivada de G
$\gamma_i(G), Z_i(G)$	i -ésimos termos da série central inferior e superior de G , respectivamente

$Z(G)$	Centro do grupo G
$F(G)$	Subgrupo de Fitting de G
$F_i(G)$	i -ésimo termo da série de Fitting superior
$\Phi(G)$	Subgrupo de Frattini de G
$\gamma_\infty(G)$	Residual nilpotente de G
$D_i(G)$	i -ésimo termo da série de Fitting inferior de G
$O_\pi(G)$	π -subgrupo normal maximal de G
S_n	Grupo simétrico de grau n
A_n	Grupo alternado de grau n
D_n	Grupo diedral de ordem $2n$
Q_{2^n}	Grupo dos quatérnios generalizado de ordem 2^n
$GL(n, q)$	Grupo linear geral de grau n sobre um corpo finito com q elementos
$SL(n, q)$	Grupo linear especial de grau n sobre um corpo finito com q elementos
$PSL(n, q)$	Grupo linear especial projetivo de grau n sobre um corpo finito com q elementos
$Sz(q)$	Grupo de Suzuki sobre um corpo finito com q elementos
(i, j)	Máximo divisor comum dos inteiros i e j .

Introdução

Nosso objetivo é investigar certas famílias de subconjuntos de comutadores, as quais serão definidas a seguir. O comportamento desses subconjuntos, bem como as restrições que podem ser impostas a eles, permitem obter critérios de nilpotência e de solubilidade, estudar propriedades estruturais do subgrupo comutador e caracterizações da propriedade da torre de Sylow.

Seja x um elemento de um grupo G , definimos o conjunto

$$B_x(G) = \{a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb \mid a, b \in G\}.$$

Denotamos por $\Gamma(G)$ o conjunto $\{[a, b] \mid a, b \in G\}$ de todos os comutadores de G . Em geral, $B_x(G)$ não precisa ser um subgrupo (veja Exemplo 3.2.2). Seja C a classe de conjugação de x em G . Então, $B_x(G)$ pode ser reescrito como $C^{-1}C$. Este conjunto é normal e fechado sob inversão. Em 1976, Spiegel, em [56], mostrou que $B_x(G) \subseteq \Gamma(G)$ para qualquer $x \in G$ e forneceu condições suficientes para garantir que a igualdade $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$ seja válida. A partir de restrições impostas sobre os conjuntos $B_x(G)$, para certos elementos $x \in G$, é possível descrever a estrutura do grupo G . Os resultados a seguir nos fornece critérios de solubilidade.

Teorema A. (de Souza, Bastos e de Melo, [20, Teorema 1.1]) *Seja p o menor primo que divide a ordem de um grupo finito G . Se $|B_x(G)| \leq p$, para todo $x \in G$, então G é nilpotente de classe no máximo 2. Além disso, se G é não abeliano, então G é isomorfo a $P \times A$, onde P é um p -subgrupo de Sylow de G , $|P'| = p$, $P/Z(P)$ é um p -grupo abeliano elementar e A é um p' -subgrupo de Hall abeliano de G .*

Teorema B. (de Souza, Bastos e de Melo, [20, Teoremas 1.2 e 1.4]) *Seja G um grupo finito.*

- (i) *Se $B_x(G)$ está contido em um subgrupo cíclico, para cada $x \in G$, então G' é abeliano. Além disso, G é supersolúvel.*
- (ii) *Se $|B_x(G)| \leq 59$, para cada $x \in G$, então G é solúvel.*

O limite no item (ii) do Teorema B é o melhor possível, no seguinte sentido, o grupo alterado A_5 , que não é solúvel, satisfaz $|A_5| = |B_{(1, 2, 3)}(A_5)| = 60$. Além disso, a demonstração baseia-se na classificação dos grupos simples minimais de Thompson [59].

No próximo resultado descrevemos um critério para que o subgrupo comutador de um grupo seja um p -grupo. Na formulação e em outras partes do trabalho, dado um grupo finito G e um primo p , um elemento de G é dito um p -elemento se tem ordem potência de p .

Teorema C. (de Souza, Bastos e de Melo, [20, Teorema 1.3]) *Seja G um grupo finito. Então, G' é um p -grupo (para algum primo p) se, e somente se, para cada $x \in G$ existe um primo $q = q(x)$ tal que $B_x(G)$ consiste de q -elementos.*

Note que o Teorema C, em particular, é um critério de solubilidade (na verdade G é metanilpotente).

Nos dois resultados seguintes, concentramos nossa atenção em p -grupos finitos. Apresentamos uma condição aritmética que garante que $B_x(G)$ seja um subgrupo normal e, adicionalmente, estabelecemos um limite para a classe de nilpotência de G .

Teorema D. (de Souza, Bastos e de Melo, [20, Teoremas 1.5 e 1.6]) *Sejam G um p -grupo finito e n um inteiro positivo.*

- (i) *Se $|B_x(G)| = p^n$, para algum $x \in G$, então $B_x(G)$ é um subgrupo normal de G .*
- (ii) *Se X é um conjunto de geradores de G tal que $|B_x(G)|$ é um divisor de p^n , para cada $x \in X$, então G é nilpotente de classe, no máximo, $n + 1$.*

No item (i) do teorema anterior, a hipótese de G ser um p -grupo é essencial (veja Exemplo 3.2.2). Adicionalmente, o limite estabelecido no item (ii) não pode ser melhorado. Por exemplo, podem-se considerar os p -grupos extraespeciais ou os p -grupos de classe maximal (veja Corolário 3.3.7). Em geral, se G é um p -grupo de classe c , isso não implica que $|B_x(G)| \leq p^{c-1}$ (veja Corolário 3.3.10).

Recordemos que um p -grupo finito G é chamado de powerful se $G' \leq G^p$ quando p for ímpar, ou $G' \leq G^4$ quando $p = 2$. Nesse contexto, obtemos o seguinte resultado.

Teorema E. (de Souza, Bastos e de Melo, [20, Teorema 1.7]) *Sejam p um primo ímpar e G um p -grupo finito gerado por $X \subseteq G$. Se $B_x(G)$ está contido em um subgrupo powerful 2-gerado, para cada $x \in X$, então G' é powerful.*

De acordo com [11, Teorema 1], se um p -grupo finito G possui subgrupo comutador G' gerado por dois elementos, então G' é powerful. Não se sabe se a hipótese de que $B_x(G)$ esteja contido em um subgrupo powerful 2-gerado, para cada $x \in X$, pode ser enfraquecida,

exigindo apenas que esteja contido em um subgrupo 2-gerado. A demonstração apresentada utiliza essa suposição de uma maneira essencial.

No que segue, deixaremos de lado os subconjuntos $B_x(G)$ e passaremos a considerar outras famílias de subconjuntos de comutadores.

Seja x um elemento de um grupo G , definimos o conjunto

$$K_x(G) = \{x^{-1}a^{-1}xa \mid a \in G\}.$$

Em particular, $K_x(G) \subseteq B_x(G)$. No entanto, em geral, $K_x(G)$ não é normal, não é fechado sob inversão e tampouco precisa ser um subgrupo (veja Exemplo 3.2.1). Apesar disso, a análise desses conjuntos fornece informações estruturais relevantes. O conjunto $K_x(G)$ possui o mesmo tamanho que a classe de conjugação de x em G .

Em [33], Guralnick e Robinson mostram que, se P é um p -subgrupo, para algum primo p , de um grupo finito G , tal que $K_x(G)$ consiste exclusivamente de p -elementos para cada $x \in P$, então $P \leq O_p(G)$. Além disso, Fernández-Alcober e de las Heras [25] mostram que, se G é um p -grupo finito cujo subgrupo comutador G' pode ser gerado por dois elementos, então existe $x \in G$ tal que $G' = \Gamma(G) = K_x(G)$ (veja também [18]).

Seja G um grupo finito (não trivial). Escreva o conjunto de todos os primos que dividem a ordem de G como $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, onde $p_1 > p_2 > \dots > p_r$. Dizemos que o grupo G satisfaz a propriedade da torre de Sylow se, e somente se, existem P_1, P_2, \dots, P_r tais que cada P_i é um p_i -subgrupo de Sylow de G e $P_k \dots P_2 P_1$ é normal em G para $1 \leq k \leq r$. Existem caracterizações clássicas de grupos que possuem a propriedade da torre de Sylow; veja, por exemplo, [13, Cap. 6, Seç. 4]. A seguir, obtemos as seguintes caracterizações para um grupo G que possui a propriedade da torre de Sylow.

Teorema F. (de Souza, Bastos e Marion, [21, Teorema 1.1]) *Seja G um grupo finito. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) G satisfaz a propriedade da torre de Sylow.
- (ii) Para cada grupo quociente \bar{G} de G e cada p -elemento $\bar{x} \in \bar{G}$, $K_{\bar{x}}(\bar{G})$ consiste de p -elementos, onde $p = \max\{\pi(\bar{G})\}$.
- (iii) Para cada subgrupo H de G e cada p' -elemento $x \in H$, $K_x(H)$ consiste de p' -elementos, onde $p = \min\{\pi(H)\}$.

Dado um grupo G , definimos abaixo algumas famílias de comutadores de G e lembramos os termos da série central inferior e da série derivada de G . Dado um inteiro positivo k e

os elementos $x_1, \dots, x_k \in G$, os γ_k -comutadores são definidos indutivamente pelas fórmulas $\gamma_1(x_1) = x_1$ e

$$\gamma_k(x_1, \dots, x_k) = [\gamma_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}), x_k] \quad \text{para } k \geq 2.$$

O subgrupo de G gerado por todos os γ_k -comutadores é o k -ésimo termo da série central inferior de G e é denotado por $\gamma_k(G)$. A interseção de todos os termos da série central inferior de um grupo G é chamada de residual nilpotente de G que, geralmente, é denotado por $\gamma_\infty(G)$. Lembre-se de que um grupo finito G é metanilpotente se, e somente se, $\gamma_\infty(G)$ for nilpotente.

Agora, dados os elementos $x_1, \dots, x_{2k} \in G$, os δ_k -comutadores são definidos indutivamente pelas fórmulas $\delta_0(x_1) = x_1$ e

$$\delta_k(x_1, \dots, x_{2k}) = [\delta_{k-1}(x_1, \dots, x_{2k-1}), \delta_{k-1}(x_{2k-1+1}, \dots, x_{2k})] \quad \text{para } k \geq 1.$$

O subgrupo de G gerado pelos δ_k -comutadores coincide com o k -ésimo termo da série derivada de G e é denotado por $G^{(k)}$.

Em [9], Baumslag e Wiegold mostraram que em um grupo finito G , se $|ab| = |a||b|$ para quaisquer elementos $a, b \in G$ de ordens coprimas, então G é nilpotente. A simplicidade do enunciado contrasta com sua profundidade e impacto, motivou inúmeras generalizações e variações. Em 2016, Bastos e Shumyatsky em [8] mostraram que, ao restringir a hipótese aos comutadores, garante-se que o subgrupo comutador seja nilpotente, ou seja, em um grupo finito G , se a propriedade $|ab| = |a||b|$ vale para quaisquer comutadores $a, b \in G$, então G' é nilpotente. Avanços posteriores ampliaram ainda mais essa perspectiva, considerando, termos das séries derivada e central inferior [7, 5, 17, 47, 51]. Vale também mencionar que existem outros resultados recentes relacionados ao teorema de Baumslag e Wiegold (veja [2, 32, 15, 10]).

Introduzimos agora indutivamente a noção de um α_k -comutador em um grupo finito G , onde k é um inteiro positivo. Inicialmente, um elemento $x \in G$ é dito elemento primário se ele é um p -elemento para algum primo p . Equivalentemente, um elemento é um elemento primário se pertence a um p -subgrupo de Sylow de G para o primo p . Assim, quando o primo p é especificado, continuamos chamando tal elemento de p -elemento; caso contrário, nos referimos ele apenas como elemento primário. Definimos que todo elemento primário de G é um α_1 -comutador. Para $k \geq 2$, seja Σ_{k-1} o conjunto de todos os elementos primários de G que são α_{k-1} -comutadores. Um elemento $x \in G$ é definido como um α_k -comutador se existir um elemento $a \in \Sigma_{k-1}$ e um elemento primário $b \in G$ tais que $x = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. O subgrupo de G gerado por todos os α_k -comutadores é denotado por $\alpha_k(G)$ e é um subgrupo característico de G . Em particular, $\alpha_k(G) \leq \gamma_k(G)$.

Em 2019, Monakhov [48], mostrou que um grupo solúvel finito G é metanilpotente se, e somente se, $|ab| \geq |a||b|$ para quaisquer α_2 -comutadores $a, b \in G$ de ordens coprimas

(veja também [27] e [6]). Obtemos, assim, o seguinte critério para que um grupo finito seja metanilpotente.

Teorema G. (de Souza, Bastos e Marion, [21, Teorema 1.2]) *Sejam G um grupo finito e $k \geq 2$ um inteiro. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $\gamma_\infty(G)$ é nilpotente.
- (ii) $\alpha_k(G)$ é nilpotente.
- (iii) Para cada primo p e cada α_k -comutador x de ordem potência de p , $K_x(G)$ consiste de p -elementos.

A série de Fitting inferior de um grupo G é definida por

$$D_0(G) = G \text{ e } D_{k+1}(G) = \gamma_\infty(D_k(G)), \text{ para } k \geq 0.$$

Agora introduzimos indutivamente a noção de um β_k -comutador em um grupo finito G , onde $k \geq 0$. Todo elemento primário de G é um β_0 -comutador. Para $k \geq 1$, seja T_{k-1} o conjunto de todos os elementos primários de G que são β_{k-1} -comutadores. Um elemento x de G é um β_k -comutador se existirem elementos $a, b \in T_{k-1}$ tais que $x = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. O subgrupo de G gerado por todos os β_k -comutadores é denotado por $\beta_k(G)$ e é um subgrupo característico de G . Em particular, $\beta_k(G) \leq D_k(G)$ (veja Lema 5.2.6). Obtemos para um grupo solúvel finito G um critério para que $D_k(G)$ seja nilpotente.

Teorema H. (de Souza, Bastos e Marion, [21, Teorema 1.3]) *Sejam G um grupo solúvel finito e k um inteiro. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $D_k(G)$ é nilpotente.
- (ii) $\beta_k(G)$ é nilpotente.
- (iii) Para cada primo p e cada β_k -comutador x de ordem potência de p , $K_x(G)$ consiste de p -elementos.

Dado um grupo finito G , observe que as famílias de α_k -comutadores e β_k -comutadores de G definidas acima podem ser vistas como subfamílias da família de comutadores coprimos de G , conforme definido em [55].

Em resumo, os principais objetos de estudo deste trabalho, em um grupo finito G , são os conjuntos de comutadores $B_x(G)$ e $K_x(G)$, bem como os α_k - e β_k -comutadores. Essas famílias de subconjuntos permitem investigar propriedades estruturais de G relacionadas à nilpotência, solubilidade e ao comportamento do subgrupo comutador.

A tese está organizada em cinco capítulos, seguidos das considerações finais, conforme descrito a seguir.

No Capítulo 1, apresentamos noções preliminares da teoria de grupos, abordando grupos solúveis, supersolúveis, nilpotentes, p -nilpotentes, além de π -subgrupos de Hall, à propriedade da torre de Sylow e grupos de matrizes.

No Capítulo 2, tratamos das definições e propriedades de comutadores, séries derivadas, séries centrais e de Fitting, palavras de grupo e comutadores coprimos (α_k - e β_k -comutadores).

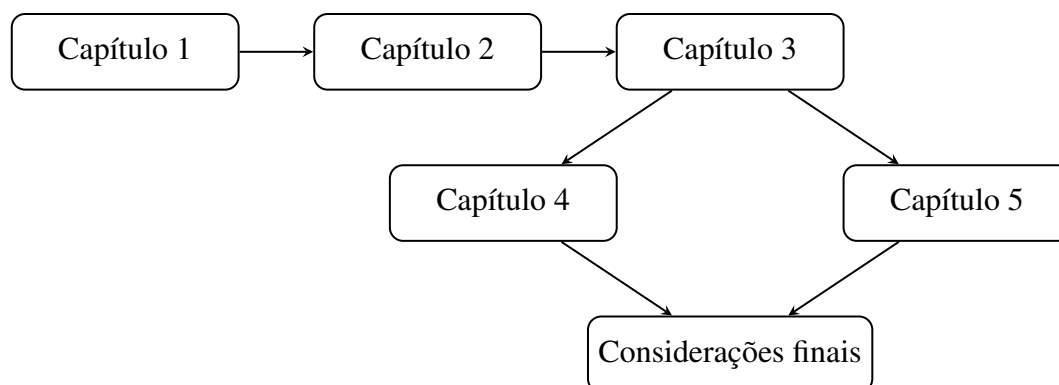
No Capítulo 3, apresentamos um resultado de Spiegel e estudamos propriedades e resultados básicos sobre os conjuntos de comutadores $B_x(G)$ e $K_x(G)$, que servirão de base para os Capítulos subsequentes. Além disso, mostraremos que, se G é um grupo de ordem no máximo 53, então existe um elemento $x \in G$ tal que $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$.

No Capítulo 4, investigamos grupos G com restrições impostas sobre os subconjuntos normais de comutadores $B_x(G)$. Obtemos critérios de solubilidade e propriedades de p -grupos. Os Teoremas A, B, C, D e E são os resultados mais importantes do capítulo.

No Capítulo 5, desenvolvemos caracterizações de grupos finitos G em termos das propriedades de $K_x(G)$ para elementos $x \in G$ de ordens específicas como a propriedade da torre de Sylow e a nilpotência dos residuais nilpotentes. Revisitamos o teorema de Baumslag-Wiegold, juntamente com algumas de suas generalizações e versões. Os Teoremas F, G e H são os resultados mais importantes do capítulo.

Por fim, nas Considerações finais destacamos as principais contribuições da tese e apontamos possíveis linhas de investigação futura.

De modo geral, os Capítulos 4 e 5 são independentes entre si. A leitura da tese pode ser realizada de forma linear, acompanhando a ordem natural de exposição, ou de acordo com as relações de dependência entre os capítulos, representadas no diagrama a seguir:



Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar notações, definições e alguns resultados básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Assumimos que o leitor tem familiaridade com os conceitos elementares da Teoria de Grupos. Resultados clássicos, como o Teorema de Lagrange, o Teorema da Correspondência e os Teoremas de Isomorfismo, também são considerados conhecidos e podem ser encontrados em diversas referências, em particular em [29, 30]. A elaboração deste capítulo foi inspirada, em parte, nas referências [52, 58, 38, 31, 24].

1.1 Conceitos básicos

Dados um grupo G , elementos x, y de G e X um subconjunto não vazio de G . O *conjugado* de x por y é dado por $x^y = y^{-1}xy$, enquanto a conjugação de X por y é $X^y = \{a^y \mid a \in X\}$. A *classe de conjugação* de x em G é o conjunto de todos os seus conjugados, $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$. Denotamos o *centralizador* de x em G por $C_G(x) = \{g \in G \mid xg = gx\}$; de forma similar, o *centralizador* de X em G por $C_G(X) = \{g \in G \mid ag = ga, \text{ para todo } a \in X\}$; o *centro* de G é denotado por $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \text{ para todo } g \in G\}$. O *normalizador* de X em G é o conjunto $N_G(X) = \{g \in G \mid X^g = X\}$; o *fecho normal* de X em G é o subgrupo normal $X^G = \langle X^g \mid g \in G \rangle$; se H é um subgrupo de G , o *núcleo normal* de H em G é o subgrupo $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$.

Os resultados a seguir são conhecidos e serão usados repetidamente ao longo do trabalho. Veja as demonstrações, por exemplo, em [52, 1.5.5, 1.5.6, 1.6.13 e p. 38].

Proposição 1.1.1. *Seja G um grupo. Então*

- (i) *Se H é subgrupo de G , então $C_G(H)$ é um subgrupo normal em $N_G(H)$ e $N_G(H)/C_G(H)$ é isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}(H)$.*

(ii) Dado $x \in G$, o número de conjugados de x em G é igual ao índice do seu centralizador em G , isto é,

$$|x^G| = |G : C_G(x)|.$$

(iii) Se G é cíclico, então $\text{Aut}(G)$ é abeliano.

(iv) Se N é um subgrupo normal de G e K é um subgrupo característico de N , então K é normal em G .

Dado um inteiro positivo n , denotamos por S_n e A_n os grupos simétrico e alternado de grau n , respectivamente.

Proposição 1.1.2. *Sejam n um inteiro positivo e H um subgrupo de um grupo G tal que $|G : H| = n$. Então, G/H_G é isomorfo a um subgrupo de S_n .*

Para a demonstração do fato acima, veja, por exemplo, [52, 1.6.6, p. 34].

Subgrupos de Sylow do grupo simétrico

Aqui e subsequentemente, $W(p, r)$ denota o produto entrelaçado

$$(\dots(C_p \wr C_p) \wr \dots) \wr C_p,$$

onde o número de fatores r .

O produto entrelaçado pode ser utilizado para descrever os subgrupos de Sylow do grupo simétrico S_n . Tal descrição é dada no resultado a seguir, extraído de [52, 1.6.19, p. 41]. Para mais detalhes sobre produtos entrelaçados, veja [52, p. 41, 58 e 60].

Teorema 1.1.3 (Kalužnin). *Seja p um número primo.*

(i) *Um p -subgrupo de Sylow de S_{p^r} é isomorfo a $W(p, r)$.*

(ii) *Se o inteiro positivo n é escrito na forma*

$$n = a_0 + a_1 p + \dots + a_{i-1} p^{i-1},$$

onde $0 \leq a_j < p$, então um p -subgrupo de Sylow de S_n é isomorfo ao produto direto de a_1 cópias de $W(p, 1)$, a_2 cópias de $W(p, 2)$, \dots , e a_{i-1} cópias de $W(p, i-1)$.

Ações de grupos

Uma *ação de um grupo* G sobre um conjunto X é uma aplicação

$$X \times G \longrightarrow X, \quad (x, g) \longmapsto x \cdot g,$$

com as seguintes propriedades:

- $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in X$;
- $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$, para todos $g, h \in G$ e $x \in X$.

Seja $x \in X$, o *estabilizador* de x é um subgrupo de G dado por $G_x = \{g \in G \mid x \cdot g = x\}$. Chamamos de *núcleo da ação* o subgrupo normal de G ,

$$\bigcap_{x \in X} G_x,$$

dado pela interseção de todos os estabilizadores, o qual denotamos por $C_G(X)$. Nessa notação, em princípio, não estamos supondo que o conjunto X está dentro de G .

A seguinte ação de grupo será útil.

Exemplo 1.1.4. *Sejam N e M subgrupos normais de um grupo G tais que $N \leq M$. Defina a aplicação*

$$\alpha : M/N \times G \longrightarrow M/N, \quad (mN, g) \longmapsto m^g N.$$

Então α é uma ação de G sobre M/N , cujo núcleo é

$$K = C_G(M/N) = \{g \in G \mid g^{-1}m^{-1}gm \in N, \text{ para todo } m \in M\}.$$

Além disso, G/K é isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}(M/N)$.

Demonstração. Em princípio vamos mostrar que a aplicação α é bem definida. Sejam $(m_1N, g), (m_2N, h) \in M/N \times G$ com $(m_1N, g) = (m_2N, h)$. Então, $m_1 = m_2n$, para algum $n \in N$, e $g = h$. Portanto,

$$\alpha(m_1N, g) = m_1^g N = (m_2n)^g N = m_2^g N = m_2^h N = \alpha(m_2N, h).$$

Em seguida, vamos mostrar que de fato, α é uma ação e concluir a demonstração. Dados $m \in M$ e $g, h \in G$, temos:

- $\alpha(mN, 1) = m^1 N = mN$;
- $\alpha(mN, gh) = m^{(gh)} N = (m^g)^h N = \alpha(m^g N, h) = \alpha(\alpha(mN, g), h)$.

O estabilizador de $mN \in M/N$ é $G_{mN} = \{g \in G \mid g^{-1}m^{-1}gm \in N\}$. Consequentemente, o núcleo de tal ação é $C_G(M/N) = \{g \in G \mid g^{-1}m^{-1}gm \in N, \text{ para todo } m \in M\}$. \square

Essa ação será essencial, no Capítulo 4, para o estudo de p -grupos powerful, em particular na demonstração do Teorema E.

1.2 Classes de grupos

Nesta seção, introduzimos algumas classes de grupos e destacamos resultados que servirão de base para os capítulos posteriores.

Grupos nilpotentes

Um grupo G é *nilpotente* se existe uma série de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G$$

tal que $G_i \triangleleft G$, $1 \leq i \leq n$ e cada quociente G_{j+1}/G_j está contido no centro de G/G_j , $0 \leq j \leq n-1$. Uma série com essa descrição é chamada de *série central*.

Apresentamos a seguir algumas caracterizações clássicas da nilpotência de grupos finitos, as quais serão empregadas nos capítulos subsequentes, ainda que sem citação explícita. As respectivas demonstrações podem ser encontrada em [53, Teorema 10.9].

Teorema 1.2.1. *Para um grupo finito G , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) G é nilpotente.
- (ii) Se $H < G$, então $H < N_G(H)$.
- (iii) Todos os subgrupos de G são subnormais em G .
- (iv) Todos os subgrupos maximais de G são normais em G .
- (v) Todos os subgrupos de Sylow de G são normais em G .

O subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de um grupo G é denominado *subgrupo de Fitting* de G e será denotado por $F(G)$. O próximo resultado mostra que o subgrupo de Fitting de um grupo finito é nilpotente. A demonstração pode ser encontrada em [52, 5.2.8].

Lema 1.2.2 (Teorema de Fitting). *Sejam M e N dois subgrupos normais nilpotente de um grupo G . Então, MN é um subgrupo normal nilpotente de G .*

Grupos supersolúveis

Um grupo G é chamado de *supersolúvel* se existe uma série de subgrupo

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

tal que $G_i \trianglelefteq G$, $1 \leq i \leq n$ e cada quociente G_{j+1}/G_j é cíclico, $0 \leq j \leq n-1$. Uma série com essa descrição é chamada de *série cíclica*.

Passamos agora a recordar algumas propriedades de grupos supersolúveis. As demonstrações dos dois resultados a seguir podem ser encontradas em [13, Teoremas 1.1 e 1.2, respectivamente].

Teorema 1.2.3. (i) *Todo subgrupo de um grupo supersolúvel é supersolúvel.*

(ii) *Toda imagem homomórfica de um grupo supersolúvel é supersolúvel.*

(iii) *O produto direto de dois grupos supersolúveis é supersolúvel.*

(iv) *Se um grupo G possui subgrupos normais H e K tais que G/H e G/K são supersolúveis, então $G/(H \cap K)$ é supersolúvel.*

Teorema 1.2.4. *Seja G um grupo com um subgrupo cíclico normal N tal que G/N supersolúvel. Então G é supersolúvel.*

O subgrupo de Frattini de um grupo G , denotado por $\Phi(G)$, é definido como a interseção de todos os subgrupos maximais de G . Caso G não possua subgrupos maximais, define-se $\Phi(G) = G$. Uma caracterização importante de grupos supersolúveis é dada pelo seguinte resultado, que pode ser encontrado em [13, Corolário 3.2].

Teorema 1.2.5. *Um grupo G é supersolúvel se, e somente se, $G/\Phi(G)$ é supersolúvel.*

Grupos solúveis

Um grupo G é chamado de *solúvel* se existe uma série de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G,$$

tal que $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ e cada quociente G_{i+1}/G_i é abeliano, $0 \leq i \leq n-1$. Uma série com essa descrição é chamada de *série abeliana*.

A seguir, apresentamos um conjunto de resultados clássicos sobre grupos solúveis, cujas demonstrações podem ser encontradas em [31, Teorema 4.1, Cap. 2, Seç. 4]. Antes de enunciar os resultados, recordamos que um subgrupo normal N de um grupo G é dito *normal minimal* em G se $N \neq 1$ e não existe subgrupo normal M de G tal que $1 < M < N$.

Teorema 1.2.6. (i) *Subgrupos e imagens homomórficas de grupos solúveis são solúveis.*

(ii) *Se H e N são subgrupos solúveis de um grupo G , onde N é normal em G , então HN é solúvel.*

- (iii) Se H é um subgrupo normal de um grupo G e tanto H quanto G/H são solúveis, então G é solúvel.
- (iv) Produtos diretos de grupos solúveis são solúveis.
- (v) Grupos nilpotentes são solúveis.
- (vi) Um subgrupo normal minimal de um grupo solúvel finito é um p -grupo abeliano elementar, para algum primo p .

A partir do item (ii) do resultado acima, para um grupo finito G , podemos definir o *radical solúvel* de G como o subgrupo gerado por todos os subgrupos normais solúveis de G .

p -Grupos finitos

Um caso importante de grupos nilpotentes é dado pelos p -grupos finitos. Recordemos que, em um p -grupo finito G , se N é um subgrupo normal não trivial de G , então $N \cap Z(G) \neq 1$. Em particular, $Z(G) \neq 1$. Além disso, se M é um subgrupo maximal de G , então $|G : M| = p$ e M é normal em G . Outro fato relevante é que o subgrupo de Frattini determina o número mínimo de geradores de G , denotado por $d(G)$, conforme enunciado a seguir:

Teorema 1.2.7 (Teorema da Base de Burnside). *Seja G um p -grupo finito. Então:*

- (i) $G/\Phi(G)$ é um p -grupo abeliano elementar e, conseqüentemente, pode ser visto como um espaço vetorial sobre \mathbb{F}_p (corpo com p elementos).
- (ii) O conjunto $\{x_1, \dots, x_d\}$ é um conjunto gerador minimal de G se, e somente se,

$$\{x_1\Phi(G), \dots, x_d\Phi(G)\}$$

é uma base de $G/\Phi(G)$.

- (iii) A dimensão de $G/\Phi(G)$ é $d(G)$. Em outras palavras, $|G : \Phi(G)| = p^{d(G)}$.

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada, por exemplo, em [24, Teorema 1.6]

Um p -grupo finito G é chamado *extraespecial* se seu centro $Z(G)$ é cíclico de ordem p e o quociente $G/Z(G)$ é um p -grupo abeliano elementar não trivial.

Exemplo 1.2.8. *Os seguintes grupos são extraespecial: D_4 , o grupo diedral de ordem 8; Q_8 , o grupo dos quatérnios; e, de fato, todo grupo não abeliano de ordem p^3 .*

Um p -grupo finito de ordem $p^n \geq p^2$ é dito de *classe maximal* se possui classe de nilpotência $n - 1$.

Exemplo 1.2.9. Os p -grupos não abelianos de ordem p^3 são de classe maximal. Além disso, os seguintes são os únicos 2-grupos de classe maximal (veja [24, Teorema 5.1]) :

- O grupo diedral:

$$D_{2^{m-1}} = \langle a, b \mid a^{2^{m-1}} = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle, \quad m \geq 3.$$

- O grupo semidiedral:

$$SD_{2^{m-1}} = \langle a, b \mid a^{2^{m-1}} = b^2 = 1, a^b = a^{-1+2^{m-2}} \rangle, \quad m \geq 4.$$

- O grupo dos quatérnios generalizado:

$$Q_{2^m} = \langle a, b \mid a^{2^{m-1}} = 1, a^{2^{m-2}} = b^2, a^b = a^{-1} \rangle, \quad m \geq 3.$$

Um elemento x de um p -grupo finito G é chamado de *uniforme* se $|C_G(x)| = p^2$. O seguinte resultado foi retirado de [24, Teoremas 4.6 e 4.10, respectivamente].

Teorema 1.2.10. Se G é um p -grupo finito de classe maximal, então G possui elementos uniformes.

Para mais informações sobre p -grupos finitos veja [24, 39, 40].

Grupos p -nilpotentes

Seja π um conjunto de números primos. Denotamos por π' o conjunto de todos os números primos que não estão em π . Seja G um grupo finito, e denotamos por $\pi(G)$ o conjunto de fatores primos da ordem de G . Dizemos, então, que G é um π -grupo se $\pi(G) \subseteq \pi$. Podemos verificar que o produto de dois π -subgrupos normais de G é também um π -subgrupo normal de G . Podemos, portanto, definir $O_\pi(G)$ como sendo o subgrupo gerado por todos π -subgrupo normal de G . No caso em que $\pi = \{p\}$ contém um único primo, escrevemos $O_p(G)$ e $O_{p'}(G)$ para $O_\pi(G)$ e $O_{\pi'}(G)$, respectivamente.

Dado um grupo finito G e um primo $p \in \pi(G)$, diz-se que G admite um p -complemento se G tem um p -subgrupo de Sylow P e um subgrupo H tal que $G = PH$ e $P \cap H = 1$. O subgrupo H é então chamado de p -complemento de G . Se, além disso, H é normal em G , então H é dito um p -complemento normal de G . Um grupo G é dito p -nilpotente se ele

possui um p -complemento normal. Em particular, $O_{p'}(G)$ é um p -complemento normal de G .

Exemplo 1.2.11 (Exemplos e não exemplos).

- Um grupo finito nilpotente G é p -nilpotente para cada $p \in \pi(G)$.
- O grupo S_3 é 2-nilpotente, mas não é 3-nilpotente.
- O grupo $G = C_7 \times A_5$ é 7-nilpotente, mas não é solúvel.
- Grupos 2-nilpotentes são solúveis, pelo Teorema de Feit-Thompson [23].

O resultado a seguir é conhecido como teorema do complemento de Frobenius. Veja a demonstração, por exemplo, em [38, Teorema 5.26, p. 171].

Teorema 1.2.12 (Frobenius). *Seja G um grupo finito não trivial. Seja $p \in \pi(G)$. Então, as seguintes propriedades são equivalentes.*

- (i) G tem um p -complemento normal.
- (ii) $N_G(H)$ tem um p -complemento normal para todo p -subgrupo H não trivial de G .
- (iii) $N_G(H)/C_G(H)$ é um p -grupo para todo p -subgrupo H não trivial de G .

Esse resultado será utilizado nas demonstrações dos Teoremas F e G.

Subgrupos de Hall

Seja π um conjunto não vazio de primos. Um π -número é um inteiro positivo cujos divisores primos pertencem a π . Um elemento de um grupo é chamado de π -elemento se sua ordem é um π -número. No caso em que $\pi = \{p\}$ contém um único primo, escrevemos p -elemento e p' -elemento para π -elemento e π' -elemento, respectivamente. Um subgrupo H de um grupo finito G é chamado de π -subgrupo de Hall se $|H|$ é um π -número e $|G:H|$ é um π' -número.

Exemplo 1.2.13. *Se G é um grupo finito nilpotente, então para todo conjunto de primos $\pi \subseteq \pi(G)$, existe um π -subgrupo de Hall de G . Considere D_{15} , o grupo diedral de ordem 30. O subgrupo cíclico de ordem 15 é um $\{3, 5\}$ -subgrupo de Hall de D_{15} , enquanto as cópias de S_3 em D_{15} constituem $\{2, 3\}$ -subgrupos de Hall.*

Em geral, um grupo finito G pode não possuir π -subgrupos de Hall, isto é, a existência de um π -subgrupo de Hall em G não é garantida.

Exemplo 1.2.14. *O grupo alternado A_5 não possui π -subgrupos de Hall quando $\pi = \{2, 5\}$ ou $\pi = \{3, 5\}$.*

Em 1928, P. Hall demonstrou que π -subgrupos de Hall sempre existem em grupos solúveis finitos:

Teorema 1.2.15 (Hall, [34]). *Sejam π um conjunto de primos e G um grupo solúvel finito com $\pi \subseteq \pi(G)$. Então, existe π -subgrupo de Hall de G . Além disso, quaisquer dois π -subgrupos de Hall são conjugados.*

Em 1937, P. Hall estabeleceu a seguinte caracterização para grupos solúveis finitos:

Teorema 1.2.16 (Hall, [35]). *Seja G um grupo finito. Então, G é solúvel se, e somente se, existem p' -subgrupo de Hall de G para todo $p \in \pi(G)$.*

Propriedade da torre de Sylow

Seja G um grupo finito (não trivial). Escreva $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, onde $p_1 > p_2 > \dots > p_r$. O grupo G satisfaz a *propriedade da torre de Sylow* se, e somente se, existem P_1, P_2, \dots, P_r tais que cada P_i é um p_i -subgrupo de Sylow de G e $P_k \dots P_2 P_1$ é normal em G para $1 \leq k \leq r$.

A propriedade da torre de Sylow é preservada ao se tomar subgrupos e quocientes (veja [13, Cap. 6, Seç. 4]).

Exemplo 1.2.17 (Exemplos e não exemplos).

- *Em um grupo nilpotente finito, todos os seus subgrupos de Sylow são normais. Consequentemente, qualquer grupo nilpotente finito satisfaz, em particular, a propriedade da torre de Sylow.*
- *O grupo simétrico S_3 satisfaz a propriedade da torre de Sylow: um 3-subgrupo de Sylow (gerado por um 3-ciclo) é normal em S_3 , e o 2-subgrupo de Sylow completa a torre.*
- *O grupo alternado A_4 não satisfaz a propriedade da torre de Sylow, pois seus 3-subgrupos de Sylow não são normais.*

Teorema 1.2.18. *Grupos supersolúveis finitos satisfazem a propriedade da torre de Sylow.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [13, Teorema 1.8]. Note-se que a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 1.2.19. *O seguinte grupo*

$$G = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^4 = 1, ab = ba, c^{-1}bc = ab, c^{-1}ac = a^{-1}b \rangle$$

de ordem 36 satisfaz a propriedade da torre de Sylow, mas não é supersolúvel. De fato, $A = \langle a, b \rangle$ é um subgrupo normal em G , de ordem 9 e expoente 3. Além disso, nenhum subgrupo de ordem 3 de A é normal em G .

As seguintes caracterizações para um grupo solúvel G satisfazendo a propriedade da torre de Sylow podem ser encontradas em [13, Teorema 4.2].

Teorema 1.2.20. *Seja G um grupo solúvel finito. Então as seguintes propriedades são equivalente:*

- (i) *G satisfaz a propriedade da torre de Sylow.*
- (ii) *Todo quociente \overline{G} de G tem um p -subgrupo de Sylow normal, onde $p = \max\{\pi(\overline{G})\}$.*
- (iii) *Todo subgrupo H de G é p -nilpotente, onde $p = \min\{\pi(H)\}$.*
- (iv) *Para todos os p -subgrupos maximais M de G , M/M_G é um π -grupo, onde todos os primos de π são menores que p .*

Para mais informações sobre grupos que possuem a propriedade da torre de Sylow, veja, por exemplo [13, Cap. 6, Seç. 4].

CLT-grupos

Pelo Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados [58, Teorema 5.2], sabemos que todo grupo abeliano finito possui subgrupos de todas as ordens que dividem a sua ordem. Já pela caracterização de Holmes [37], um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, para cada divisor positivo d de $|G|$ existe um subgrupo normal $H \leq G$ com $|H| = d$. Assim, tanto os grupos abelianos finitos quanto, de forma mais geral, todos os grupos nilpotentes finitos satisfazem a recíproca do Teorema de Lagrange. Um Grupo com essa propriedade é chamado de CLT-grupo. Mais precisamente,

Definição 1.2.21. *Seja G um grupo finito. Dizemos que G é um CLT-grupo se para cada inteiro positivo d que divide $|G|$ existe um subgrupo $H \leq G$ tal que $|H| = d$.*

O próximo resultado, retirado de [13, Teorema 1.1, p. 72], mostra que todo grupo finito supersolúvel é CLT-grupo.

Teorema 1.2.22. *Seja G um grupo finito. Então, G é supersolúvel se, e somente se, cada subgrupo de G (incluindo o próprio G) é CLT-grupo.*

Como consequência imediata do Teorema 1.2.16, temos:

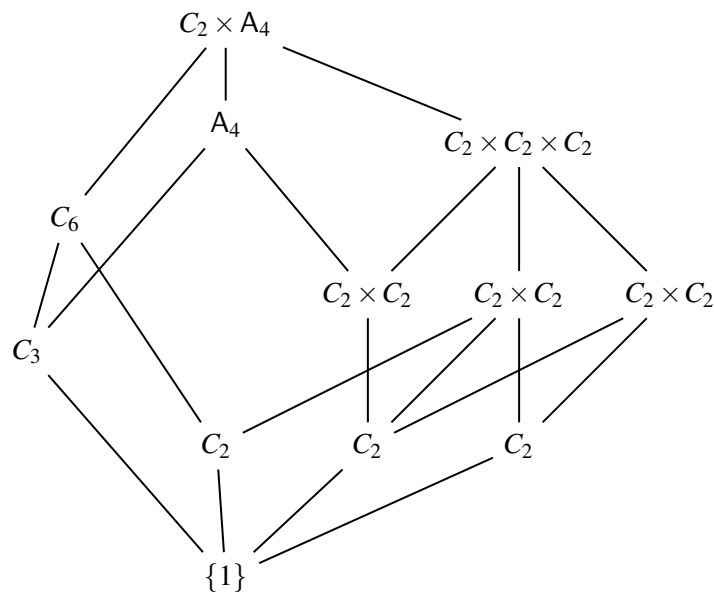
Corolário 1.2.23. *Todo CLT-grupo é solúvel.*

Sabemos que as classes dos grupos abelianos, nilpotentes, supersolúveis e solúveis são fechadas tanto por subgrupos quanto por quocientes. Entretanto, a classe dos CLT-grupos não apresenta essa estabilidade: ela não é, em geral, fechada por subgrupos, nem por quocientes, e tampouco é preservada por extensões.

Exemplo 1.2.24 (Contra-exemplos).

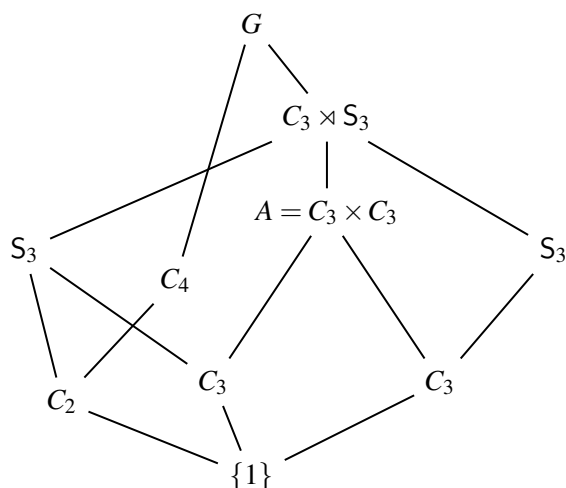
- **Um grupo solúvel que não é CLT-grupo.** O grupo alternado A_4 não é um CLT-grupo, pois não possui subgrupo de ordem 6. Seja $V \cong C_2 \times C_2$ em A_4 . Então, V e $A_4/V \cong C_3$ são CLT-grupo. Ou seja, a classe dos CLT-grupos não é fechada por extensão.
- **Um CLT-grupo que não possui a propriedade da torre de Sylow.** O grupo $C_2 \times A_4$ é CLT-grupo, mas os 3-subgrupos de Sylow não são normais. Além disso, $C_2 \times A_4$ contém uma cópia do subgrupo A_4 , que não é CLT-grupo. Em particular, a classe dos CLT-grupos não é, em geral, fechada por subgrupos nem por quocientes.

Reticulado de subgrupos obtido com auxílio do GAP [28]:



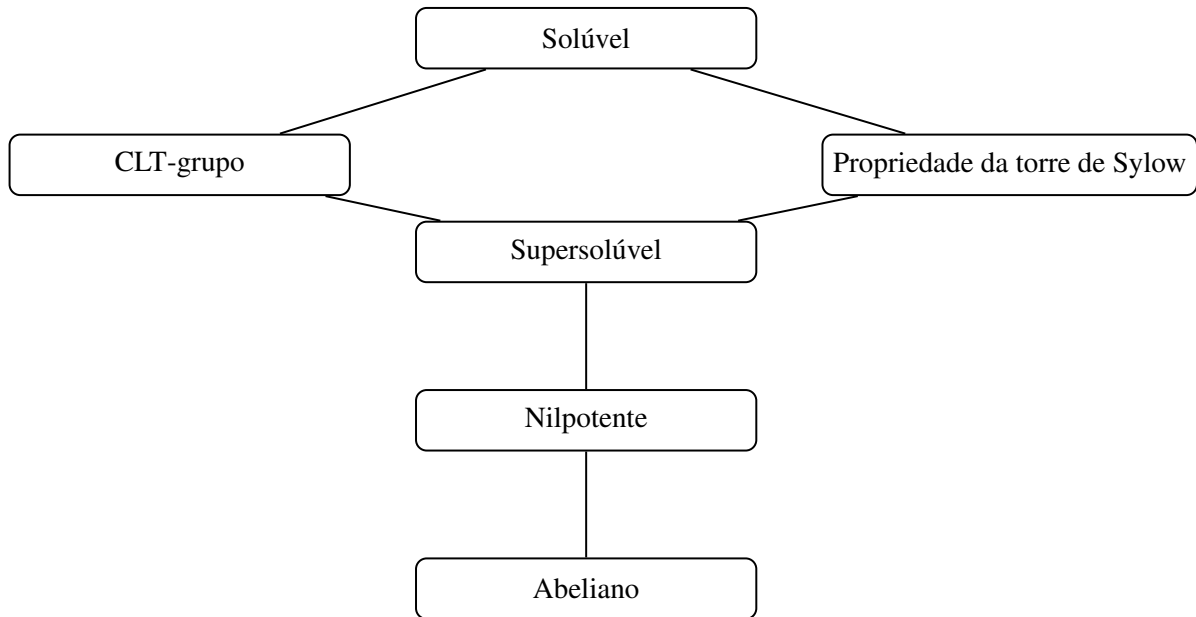
- **Um grupo que satisfaz a propriedade da torre de Sylow, mas não é CLT-grupo.** O grupo G do Exemplo 1.2.19 possui a propriedade da torre de Sylow, mas não possui subgrupo de ordem 12.

Reticulado de subgrupos obtido com auxílio do GAP [28]:



Para mais detalhes sobre CLT-grupos, veja, por exemplo, [13, Cap. 3 e 6, respectivamente].

Encerramos esta seção destacando que diversas condições estruturais impostas a grupos solúveis finitos dão origem a subclasses de grande relevância, como os grupos supersolúveis, nilpotentes e abelianos. Além dessas, também temos os CLT-grupos e grupos que satisfazem propriedade da torre de Sylow. O reticulado abaixo sintetiza as relações de inclusão (próprias) discutidas ao longo da seção, situando cada uma dessas classes dentro do “universo” dos grupos solúveis finitos.



1.3 Grupos de matrizes

Sejam p um primo e n um inteiro positivo. Seja \mathbb{F}_q o corpo finito com $q = p^m$ elementos, onde m é um inteiro positivo (todos os corpos finitos com mesmo número de elementos são isomorfos [43, Teorema 2.5]). Denote por $M_n(\mathbb{F}_q)$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ sobre \mathbb{F}_q ; e por I_n sua matriz identidade; e se $A \in M_n(\mathbb{F}_q)$, denote por $\det(A)$ o determinante da matriz A .

O *grupo linear geral* de grau n sobre \mathbb{F}_q é definido como

$$\mathrm{GL}(n, q) = \{A \in M_n(\mathbb{F}_q) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

A operação do grupo é a multiplicação usual de matrizes. A sua ordem é dada por

$$|\mathrm{GL}(n, q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) \quad (\text{ver [58, 9.11, p. 81]}).$$

O *grupo linear especial* é o subgrupo de $\mathrm{GL}(n, q)$ constituído pelas matrizes com determinante 1:

$$\mathrm{SL}(n, q) = \{A \in \mathrm{GL}(n, q) \mid \det(A) = 1\}.$$

Ele é um subgrupo normal de $GL(n, q)$, pois o determinante é um homomorfismo

$$\det : GL(n, q) \rightarrow \mathbb{F}_q^*.$$

Aqui $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ é o grupo cíclico de ordem $q - 1$, munido da multiplicação usual do corpo. Pelo Teorema do Isomorfismo obtemos:

$$|SL(n, q)| = \frac{|GL(n, q)|}{q - 1}.$$

O grupo linear especial projetivo é definido como

$$PSL(n, q) = SL(n, q)/Z(SL(n, q)),$$

onde $Z(SL(n, q)) = SL(n, q) \cap Z(GL(n, q))$. Para mais detalhes sobre os fatos acima, veja, por exemplo, [58, Cap. 1, Seç. 9, p. 73-85].

A seguir apresentamos um resultado clássico sobre o grupo de automorfismos de um p -grupo abeliano elementar; sua demonstração pode ser encontrada em [31, Teorema 6.1, Cap. 2, Seç. 6].

Lema 1.3.1. *Sejam n um inteiro positivo e p um número primo. Se G é um p -grupo abeliano elementar de ordem p^n , então $Aut(G)$ é isomorfo $GL(n, p)$. Em particular,*

$$|Aut(G)| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i).$$

Os subgrupos de $PSL(2, q)$ foram estudados por Dickson em seu livro [22]. Retiramos os seguintes resultados do livro de Suzuki [58, Teoremas 6.25 e 6.26, respectivamente]:

Teorema 1.3.2. *Seja q um potência de um primo p . Então, um subgrupo de $PSL(2, q)$ é isomorfo a um dos seguintes grupos:*

- (a) O subgrupo diedral de ordem $2(q - 1)/d$ e seus subgrupos ($d = (2, q - 1)$).
- (b) Um grupo H de ordem $q(q - 1)/d$ e seus subgrupos. Um p -subgrupo de Sylow Q de H é abeliano elementar, $Q \triangleleft H$, e o quociente H/Q é cíclico de ordem $(q - 1)/d$.
- (c) A_4 , S_4 , ou A_5 .

Teorema 1.3.3. *Seja $L = PSL(2, q)$ e $q = p^n$.*

- (i) O grupo L sempre contém subgrupos dos tipos (a) e (b) do Teorema 1.3.2.

- (ii) O grupo L não contém um subgrupo isomorfo ao A_4 se, e somente se, $p = 2$ e n é ímpar.
- (iii) O grupo L contém um subgrupo isomorfo ao S_4 se, e somente se, $q^2 \equiv 1 \pmod{16}$.
- (iv) Uma condição necessária e suficiente para que L contenha um subgrupo isomorfo ao S_5 é que

$$q^2(q^2 - 1) \equiv 0 \pmod{5}.$$

O resultado a seguir foi retirado de [12, Teorema 7.1(2)].

Lema 1.3.4. O grupo $\text{PSL}(3, 3)$ contém um subgrupo isomorfo ao A_4 .

Outra família importante de grupos de matrizes são os *grupos de Suzuki*, denotados por $\text{Sz}(q)$, onde $q = 2^{2n+1}$, onde $n \geq 0$. Uma construção desses grupos pode ser encontrada em [57, Seção 13, p. 133].

O seguinte resultado foi retirado de [57, Teorema 9]:

Teorema 1.3.5 (Suzuki). O grupo de Suzuki $\text{Sz}(q)$ contém os seguintes subgrupos:

- (i) Um grupo de Frobenius $Q \rtimes K$, onde Q é um 2-subgrupo de Sylow de ordem q^2 e K é um subgrupo cíclico de ordem $(q - 1)$.
- (ii) Um grupo diedral de ordem $2(q - 1)$.

Os resultados desta subseção serão usados com frequência nos capítulos subsequentes. Em particular, eles serão utilizados nas demonstrações dos Teoremas B, E e G.

Grupos simples minimais

Um *grupo simples minimal* é um grupo simples finito não cíclico cujos subgrupos próprios são todos solúveis. Em [59, Corolário 1], Thompson classificou todos os grupos simples minimais:

Teorema 1.3.6 (Thompson). Todo grupo simples minimal é isomorfo a um dos seguintes grupos:

- (i) $\text{PSL}(2, 2^p)$, onde p é qualquer primo;
- (ii) $\text{PSL}(2, 3^p)$, onde p é qualquer primo ímpar;
- (iii) $\text{PSL}(2, p)$, onde $p > 3$ é um primo tal que $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;

(iv) $Sz(2^p)$, onde p é qualquer primo ímpar;

(v) $PSL(3,3)$.

O Teorema acima é central na teoria de grupos e fornece uma ferramenta fundamental no estudo dos grupos finitos. Usaremos esse resultado nos Capítulos 4 e 5. Em particular, ele será utilizado nas demonstrações dos Teoremas B, C e F.

Capítulo 2

Comutadores e séries de subgrupos em grupos

Neste capítulo, apresentamos as principais definições e propriedades de comutadores e dos subgrupos a eles associados. Em seguida, discutimos a série derivada, as séries centrais e as séries de Fitting, a torre de Turull [60] e palavras de grupo, com destaque para as palavras derivadas e para palavras centrais inferiores. Abordamos também o Teorema do Subgrupo Focal e suas generalizações recentes para palavras derivadas no caso solúvel [17]. Por fim, introduzimos os comutadores coprimos, definidos originalmente por Shumyatsky em [55], a partir dos quais propomos variações denominadas α_k -comutadores e β_k -comutadores, construídas a partir de elementos primários.

2.1 Definições e propriedades

Comutadores

Sejam G um grupo e x_1, x_2, \dots, x_n elementos de G . O *comutador* de x_1 e x_2 é o elemento

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2.$$

Mais geralmente, um *comutador de comprimento* $n \geq 2$ é definido indutivamente por

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n],$$

onde, por convenção, $[x_1] = x_1$. Uma notação abreviada e útil é

$$[x_1, {}_n x_2] = [x_1, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_n].$$

A partir da definição de comutadores, verificam-se as seguintes identidades, cujas demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [52, 5.1.5, p. 123].

Proposição 2.1.1. *Sejam x, y e z elementos de um grupo G . Então*

$$(i) \quad [x, y] = [y, x]^{-1};$$

$$(ii) \quad [x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z];$$

$$(iii) \quad [xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z];$$

$$(iv) \quad [x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1} \quad e \quad [x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1};$$

$$(v) \quad [x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1 \quad (\text{Identidade de Hall-Witt}).$$

Subgrupos comutadores

É útil formar subgrupos a partir de elementos e subconjuntos. Dados os subconjuntos não vazios X_1, X_2, \dots, X_n de um grupo G , definimos o *subgrupo comutador* de X_1 e X_2 como:

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_i \in X_i \rangle.$$

De forma mais geral, seja

$$[X_1, \dots, X_n] = [[X_1, \dots, X_{n-1}], X_n],$$

onde $n \geq 2$. Observe que $[X_1, X_2] = [X_2, X_1]$, pela Proposição 2.1.1 (i). Às vezes, é conveniente denotar $[X_1, \underbrace{X_2, \dots, X_2}_n]$ por $[X_1, {}_n X_2]$. Escreva $[X_1, {}_n y]$ quando $X_2 = \{y\}$. Então, assumindo que o conjunto X_1 é normalizado pelo elemento y , podemos verificar que

$$[X_1, {}_n y] = [X_1, {}_n \langle y \rangle],$$

para algum $n \geq 1$.

Aqui e, subsequentemente, denotaremos por $\Gamma(G)$ o conjunto de todos os comutadores de um grupo G , e definimos o *subgrupo comutador* (ou *subgrupo derivado*) de G , denotado por G' , como sendo o subgrupo de G gerado por $\Gamma(G)$, isto é,

$$G' = \langle \Gamma(G) \rangle = [G, G].$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em [31, Teorema 2.1, Seç. 2, p. 18].

Proposição 2.1.2. *Sejam H, K, L subgrupos de um grupo G . Então*

- (i) $[H, K]$ é subgrupo normal em $\langle H, K \rangle$;
- (ii) H normaliza K se, e somente se, $[H, K] \leq K$;
- (iii) Se H e K são normais (resp., característicos) em G , então $[H, K]$ é subgrupo normal (resp., característico) em G ;
- (iv) Se H é um subgrupo normal em G , então G/H é abeliano se, e somente se, $G' \leq H$.
- (v) Se H, K, L são normais em G , então $[HK, L] = [H, L][K, L]$.

O próximo resultado é um exercício retirado de [52, 5.1.16]. Por comodidade ao leitor, apresentamos a demonstração.

Proposição 2.1.3. *Seja k um inteiro positivo. Seja G um grupo gerado por k elementos $x_1, \dots, x_k \in G$. Então*

$$G' = \langle [x_i, x_j]^g \mid 1 \leq i < j \leq k, g \in G \rangle.$$

Demonstração. Defina $H = \langle [x_i, x_j]^g \mid 1 \leq i < j \leq k, g \in G \rangle$. Como $H \leq G'$, basta mostrar que $G' \leq H$. Por definição, H é subgrupo normal em G . Considere o quociente G/H . Para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$ temos

$$x_i x_j H = x_j x_i [x_i, x_j] H = x_j x_i H,$$

pois $[x_i, x_j] \in H$. Portanto, G/H é abeliano, o que implica $G' \leq H$, como queríamos. \square

Para a demonstração do resultado a seguir, veja, por exemplo, [31, Lema 2.2, p. 19].

Proposição 2.1.4. *Sejam x, y, z elementos de um grupo G e suponhamos que $G' \leq Z(G)$. Então*

- (a) $[xy, z] = [x, z][y, z]$;
- (b) $[x, yz] = [x, y][x, z]$;
- (c) $[x^i, y^j] = [x, y]^{ij}$, para todos os inteiros i, j ;
- (d) $(xy)^i = x^i y^i [y, x]^{\frac{i(i-1)}{2}}$, para todo inteiro i .

O próximo resultado, devido a Baer e Suzuki, pode ser encontrado em [31, Teorema 2.12]:

Teorema 2.1.5 (Baer, Suzuki). *Seja H um subgrupo de um grupo finito G . Então, $H \leq F(G)$ se, e somente se, $\langle H, H^g \rangle$ é nilpotente para todo $g \in G$.*

Como consequência imediata do Teorema anterior, temos o seguinte resultado.

Lema 2.1.6. *Seja G um grupo finito simples não abeliano. Se $x \in G$ é um elemento de ordem 2, então existe $g \in G$ tal que o comutador $[x, g]$ tem ordem p , para algum primo ímpar p .*

Demonstração. Seja $x \in G$ um elemento de ordem 2. Como G é simples não abeliano, tem-se que $F(G) = 1$ e $G = \langle x^G \rangle$. Pelo Teorema 2.1.5, existe $y \in G$ tal que $H = \langle x, x^y \rangle$ não é nilpotente. Assim, H é um grupo diedral de ordem $2n$, onde n é divisível por algum primo ímpar p . Seja $g \in H$ de ordem p . Portanto, $\langle x, g \rangle$ é um grupo diedral de ordem $2p$, e o comutador $[x, g]$ tem ordem p , como queríamos. \square

O seguinte resultado é conhecido como *Lema dos Três Subgrupos*, e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [52, 5.1.10, p. 126]

Lema 2.1.7. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G . Se dois dos subgrupos $[H, K, L]$, $[L, H, K]$ e $[K, L, H]$ estão contidos em N , então, o outro também está contido em N .*

Generalizações de subgrupos comutadores

Recordamos alguns fatos sobre generalizações de subgrupos comutadores em um grupo; veja, por exemplo, [38, Capítulo 4]. Sejam G um grupo e A um subgrupo do grupo de automorfismos $\text{Aut}(G)$ de G . Seja K um subgrupo A -invariante de G , isto é, $k^a \in K$ para cada $k \in K$ e para cada $a \in A$. Defina

$$[K, A] = \langle k^{-1}k^a \mid k \in K, a \in A \rangle.$$

O grupo $[K, A]$ é um subgrupo A -invariante de K . Defina $[K, A, A] = [[K, A], A]$ e para um inteiro $i \geq 3$, definimos

$$[K, \underbrace{A, \dots, A}_{i \text{ vezes}}]$$

de forma análoga e indutiva. Obtemos, dessa forma, uma cadeia descendente de subgrupos A -invariantes

$$K \geq [K, A] \geq [K, A, A] \geq \dots \geq [K, \underbrace{A, \dots, A}_{i \text{ vezes}}] \geq \dots$$

Dados os elementos $a_1, \dots, a_i \in A$, escrevemos

$$[K, a_1] = \langle k^{-1}k^{a_1} \mid k \in K \rangle \leq [K, A],$$

e também

$$[K, a_1, a_2] = [[K, a_1], a_2] \leq [K, A, A].$$

Para um inteiro $i \geq 3$, definimos

$$[K, a_1, \dots, a_i] \leq [K, \underbrace{A, \dots, A}_{i \text{ vezes}}]$$

de forma análoga e indutiva.

O seguinte lema foi retirado de [54, Lema 2.2].

Lema 2.1.8. *Seja A um grupo de automorfismos de um grupo finito G com $(|A|, |G|) = 1$. Suponha que B seja um subconjunto normal de A tal que $A = \langle B \rangle$. Seja $i \geq 1$. Então $[G, A]$ é gerado pelos subgrupos da forma $[G, b_1, \dots, b_i]$, onde $b_1, \dots, b_i \in B$.*

Para a demonstração do resultado a seguir, veja, por exemplo, [38, Lema 4.29, p. 138].

Lema 2.1.9. *Sejam p um primo e P um p -subgrupo de um grupo finito G . Suponha que P é normalizado por um p' -elemento $x \in G$. Então,*

$$[P, x] = [P, x, x].$$

Esses resultados serão fundamentais para o Capítulo 5.

2.2 Séries

Série derivada

Seja G um grupo. Considere $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G' = [G, G]$ e, para cada $n \geq 1$, defina

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}].$$

Tais subgrupos são característicos em G e formam uma série

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots,$$

chamada de *série derivada* de G . Embora a série derivada não precise necessariamente atingir o subgrupo trivial, como todos os fatores $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ são abelianos, um grupo G é *solúvel* se, e somente se, sua série derivada atinge o subgrupo trivial após um número finito de etapas (veja, por exemplo, [52, 5.1.8, p. 124]). O menor inteiro n tal que $G^{(n)} = 1$ é denominado o *comprimento derivado* de G .

Séries centrais

Seja G um grupo. Considere $\gamma_1(G) = G$ e, para cada $n \geq 1$, defina

$$\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G].$$

Tais subgrupos são característicos em G e formam uma série

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots,$$

na qual se tem $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \leq Z(G/\gamma_{n+1}(G))$. Essa série é chamada de *série central inferior*. A interseção de todos os termos $\gamma_n(G)$ é chamada de *residual nilpotente* de G e é denotada por $\gamma_\infty(G)$. Se G é finito, então $\gamma_\infty(G)$ é o menor subgrupo normal de G tal que o quociente correspondente é nilpotente.

Agora, consideremos $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ e, para cada $n \geq 0$, definamos

$$Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G)).$$

Novamente, tais subgrupos são característicos em G e formam uma série

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq \cdots,$$

chamada de *série central superior*.

Um grupo G é nilpotente se, e somente se, a série central inferior atinge o subgrupo identidade após um número finito de passos, ou de forma equivalente, se a série central superior atinge o próprio grupo em um número finito de etapas (veja, por exemplo, [52, 5.1.9, p. 125]). O menor inteiro $n \geq 1$ tal que $\gamma_{n+1}(G) = 1$, ou, equivalentemente, $Z_n(G) = G$, é chamada de *classe de nilpotência* de G .

Para mais detalhes sobre a série derivada e as séries centrais inferior e superior, veja [52, Cap. 5].

Séries de Fitting

Outras séries importantes para o desenvolvimento do trabalho são as *séries de Fitting*. Relembre que o subgrupo de Fitting $F(G)$ de um grupo G é o subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de G . O subgrupo de Fitting de um grupo finito é nilpotente (veja [52, 5.2.8]). A *série de Fitting superior* de um grupo G é a série

$$1 = F_0(G) \leq F_1(G) \leq \cdots,$$

onde $F_1(G) = F(G)$ e $F_{i+1}(G)/F_i(G) = F(G/F_i(G))$ para cada $i \geq 1$. De modo semelhante, definimos a *série de Fitting inferior* de um grupo G como a série

$$G = D_0(G) \geq D_1(G) \geq \dots,$$

onde $D_i(G) = \gamma_\infty(D_{i-1}(G))$ para cada $i \geq 1$. Note que $F_i(G)$ e $D_i(G)$ são subgrupos característicos de G , para cada $i \geq 1$ (veja, por exemplo, [52, 5.4.5, p. 149]).

No caso de um grupo finito G , as séries de Fitting superior e inferior têm fatores nilpotentes. Além disso, se o grupo G for solúvel, existem inteiros $i \geq 0$ tais que $F_i(G) = G$ e $D_i(G) = 1$. O menor inteiro i que satisfaz essas condições é chamado de *altura de Fitting* do grupo e é denotado por $h(G)$. Assim, o subgrupo trivial tem altura de Fitting 0 e qualquer grupo nilpotente não trivial tem altura de Fitting 1. Um grupo com altura de Fitting, no máximo, 2 é chamado de *metanilpotente*. De forma mais geral, a altura de Fitting de um grupo G mede o quão longe G está de ser nilpotente.

Exemplo 2.2.1. *Veja que:*

- $h(S_3) = 2$, pois $F(S_3) = \gamma_\infty(S_3) = C_3$ e $F_2(S_3) = D_0(S_3) = S_3$;
- $h(A_4) = 2$, pois $F(A_4) = \gamma_\infty(A_4) = C_2 \times C_2$ e $F_2(A_4) = D_0(A_4) = A_4$;
- $h(S_4) = 3$, pois $F(S_4) = D_3(S_4) = C_2 \times C_2$, $F_2(S_4) = \gamma_\infty(S_4) = A_4$ e $F_3(S_4) = D_0(S_4) = S_4$.

2.3 Torre de Turull

Para estudar a altura de Fitting de um grupo solúvel finito, o conceito de torre introduzido por Turull [60] pode ser útil. Dizemos que um subgrupo H de um grupo finito G é uma *torre de altura h* se H pode ser escrito como um produto $H = P_1 \dots P_h$, onde

- (i) P_i é p_i -grupo (p_i um primo) para $1 \leq i \leq h$;
- (ii) P_i normaliza P_j para $1 \leq i < j \leq h$;
- (iii) $[P_i, P_{i-1}] = P_i$ para $2 \leq i \leq h$.

Segue de (iii) que $p_i \neq p_{i+1}$ para $1 \leq i \leq h-1$. O seguinte resultado é uma consequência imediata de [60, Lema 1.9].

Lema 2.3.1. *Um grupo solúvel finito G tem altura de Fitting pelo menos h , se, e somente se, tem uma torre de altura h .*

Essa ferramenta será utilizada nas demonstrações dos Teoremas G e H.

Observação 2.3.2. *A propriedade da torre de Sylow e a torre de Turull não são comparáveis. Por exemplo, A_4 tem altura de Fitting igual a 2, mas não satisfaz a propriedade da torre de Sylow.*

2.4 Palavras do tipo comutador

Uma *palavra de grupo*, ou simplesmente *palavra*, é um elemento não trivial do grupo livre $F = F(X)$, onde X é o conjunto de geradores livres $\{x_1, x_2, \dots\}$. Considere $w = w(x_1, \dots, x_s)$ uma palavra. Podemos escrever

$$w = x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_k}^{n_k},$$

onde n_j é um número inteiro e $i_j \in \{1, \dots, s\}$, $j = 1, \dots, k$. A partir de agora, todas as palavras serão tomadas em sua forma reduzida.

Sejam G um grupo e $w = w(x_1, \dots, x_s)$ uma palavra. Podemos associar a seguinte aplicação de $G \times \cdots \times G$ (s vezes) para G :

$$\Phi_w : \underbrace{G \times \cdots \times G}_{s \text{ vezes}} \longrightarrow G, \quad (g_1, \dots, g_s) \longmapsto w(g_1, \dots, g_s),$$

ou seja, dados os elementos $g_1, \dots, g_s \in G$ e uma palavra $w = w(x_1, \dots, x_s)$, a imagem de (g_1, \dots, g_s) via Φ_w é dada por

$$w(g_1, \dots, g_s) \in G.$$

Sejam G um grupo e $w = w(x_1, \dots, x_s)$ uma palavra:

- Dizemos que um elemento $h \in G$ é um w -valor (em G) se existem $g_1, \dots, g_s \in G$ de tal sorte que h possa ser escrito como:

$$h = w(g_1, \dots, g_s).$$

Denotamos por G_w o conjunto dos w -valores em G , ou seja, $G_w = \text{Im}(\Phi_w)$.

- O *subgrupo verbal* associado à palavra w em G é definido como sendo o subgrupo gerado por todos os w -valores em G . Denotamos tal subgrupo por $w(G)$, ou seja:

$$w(G) = \langle w(g_1, \dots, g_s) \mid g_1, \dots, g_s \in G \rangle = \langle G_w \rangle.$$

Para informações sobre subgrupos verbais e palavras de grupo, veja, por exemplo, [52, Cap. 2, Seç. 2.3]

Proposição 2.4.1. *Sejam G um grupo e w uma palavra de grupo. Então, o subgrupo verbal $w(G)$ é um subgrupo característico de G .*

Para uma demonstração desse fato, veja [52, p. 56].

Definição 2.4.2. *Dizemos que uma palavra de grupo $w = w(x_1, \dots, x_s)$ é uma palavra do tipo comutador, se a soma dos expoentes de cada variável envolvida em w é zero. Quando uma palavra não é do tipo comutador, dizemos que ela é não-comutador.*

Exemplo 2.4.3. *Sejam G um grupo e k um inteiro positivo.*

- $v = v(x_1) = x_1^k$ é a palavra "potência" (k -ésima potência).
- $w = w(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2]x_3^4$ é um exemplo de uma palavra não-comutador que não é uma potência.

Nas palavras do tipo comutador há uma família muito importante que são os comutadores multilineares, explicitamente:

Definição 2.4.4. *Sejam $\{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto de geradores livres. Entendemos por comutador multilinear de peso 1, simplesmente as palavras da forma $w = x_i$, para algum i . Dizemos que uma palavra w é um comutador multilinear (de peso $k > 1$) se ela tem a forma $w = [w_1, w_2]$, onde w_1 e w_2 são comutadores multilineares em variáveis distintas, de pesos s e t , respectivamente, com $s + t = k$.*

Seguem exemplos de palavras do tipo comutador.

Exemplo 2.4.5. *Seja G um grupo. Sejam x_1, x_2, \dots geradores livres.*

- Se $k \geq 1$, $\gamma_k = \gamma_k(x_1, \dots, x_k)$ é chamado de k -ésima palavra central inferior, e definimos da seguinte forma $\gamma_1(x_1) = x_1$ e

$$\gamma_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = [\gamma_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}), x_k] \quad \text{para } k \geq 2.$$

O subgrupo de G gerado por todos os γ_k -valores é $\gamma_k(G)$, o k -ésimo termo da série central inferior de G .

- Se $k \geq 0$, $\delta_k = \delta_k(x_1, \dots, x_{2^k})$ é chamada de k -ésima palavra derivada e é definida indutivamente pela fórmula $\delta_0(x_1) = x_1$ e

$$\delta_k(x_1, \dots, x_{2k}) = [\delta_{k-1}(x_1, \dots, x_{2k-1}), \delta_{k-1}(x_{2k-1+1}, \dots, x_{2k})] \quad \text{para } k \geq 1.$$

O subgrupo de G gerado por todos os δ_k -valores é $G^{(k)}$, o k -ésimo termo da série derivada de G .

As palavras γ_k e δ_k são comutadores multilineares. No entanto, a k -ésima palavra do tipo Engel não é uma palavra comutador multilinear para cada $k \geq 2$. Na sequência os valores das palavras γ_k e δ_k em um grupo G serão chamados de γ_k -comutadores e δ_k -comutadores, respectivamente.

Sejam $n, k \geq 1$ e $w = w(x_1, \dots, x_k)$ uma palavra. Dizemos que w é uma *palavra do tipo comutador simples* se

$$w = [x_{i_1}, \dots, x_{i_n}],$$

onde $i_1 \neq i_2$ e $i_j \in \{1, \dots, k\}$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Observe que se $x_{i_r} \neq x_{i_s}$ para cada $r, s \in \{1, \dots, n\}$, então w não é nada além de um γ_k -comutador, enquanto se $x_{i_2} = \dots = x_{i_n}$, então w é uma palavra do tipo Engel.

Subgrupo Focal

Se G é um grupo finito e P é um p -subgrupo de Sylow de G , o subgrupo $P \cap G'$ é chamado de *subgrupo focal* de P . Não nos deteremos em mais informações sobre subgrupo focal. Mas esse é um objeto geralmente estudado no contexto do homomorfismo transfer. O próximo resultado é o famoso Teorema do Subgrupo Focal de Higman, que mostra que o subgrupo focal de P em G' pode ser gerado por comutadores contidos em P .

Teorema 2.4.6 (Higman). *Se G é um grupo finito e P um p -subgrupo de Sylow de G , então*

$$P \cap G' = \langle [x, g] \mid x, x^g \in P, g \in G \rangle.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [31, Teorema 3.4, Cap. 7, p. 250]. Usaremos esse resultado na demonstração do Teorema C.

Convém mencionar que, em 2012, Acciarri, Alcober e Shumyatsky [1] estabeleceram uma versão do Teorema do Subgrupo Focal de Higman para comutadores multilineares. E mais recentemente, Alves e Shumyatsky [17] obtiveram um análogo para os δ_k -comutadores em grupos solúveis.

2.5 Comutadores coprimos

Os comutadores coprimos γ_k^* e δ_k^* foram introduzidos por Shumyatsky em [55]. Seja G um grupo finito. Cada elemento de G é tanto um γ_1^* -comutador quanto um δ_0^* -comutador. Agora, sejam $k \geq 2$ e X o conjunto de todos os elementos de G que são potências de γ_{k-1}^* -comutadores. Um elemento $g \in G$ é um γ_k^* -comutador se existem $a \in X$ e $b \in G$ tais que $g = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. Para $k \geq 1$, seja Y o conjunto de todos os elementos de G que são potências de δ_{k-1}^* -comutadores. Um elemento $g \in G$ é um δ_k^* -comutador se existem $a, b \in Y$ tais que $g = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. Os subgrupos de G gerados por todos os γ_k^* -comutadores e todos os δ_k^* -comutadores são denotados por $\gamma_k^*(G)$ e $\delta_k^*(G)$, respectivamente. Em particular, os γ_2^* - e δ_1^* -comutadores coincidem.

Um elemento x de um grupo finito G é chamado de *primário* se pertence a um p -subgrupo de Sylow de G para algum primo p , ou equivalentemente, se $|x|$ é uma potência de um primo p .

Introduzimos, de forma indutiva, a noção de um α_k -comutador:

Definição 2.5.1. *Sejam G um grupo e k um inteiro. Todo elemento primário de G é um α_1 -comutador. Para $k \geq 2$, seja Σ_{k-1} o conjunto de todos os elementos primários de G que são α_{k-1} -comutadores. Um elemento $x \in G$ é definido como um α_k -comutador se existem um elemento $a \in \Sigma_{k-1}$ e um elemento primário $b \in G$ tais que $x = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. O subgrupo de G gerado por todos os α_k -comutadores é denotado por $\alpha_k(G)$.*

Em seguida, introduzimos, também de forma indutiva, a noção de um β_k -comutador:

Definição 2.5.2. *Sejam G um grupo e k um inteiro. Todo elemento primário de G é um β_0 -comutador. Para $k \geq 1$, seja T_{k-1} o conjunto de todos os elementos primários de G que são β_{k-1} -comutadores. Um elemento x de G é um β_k -comutador se existem elementos $a, b \in T_{k-1}$ tais que $x = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. O subgrupo de G gerado por todos os β_k -comutadores é denotado por $\beta_k(G)$.*

Observação 2.5.3. *Seja G um grupo finito. Em particular, temos que $\alpha_k(G) \leq \gamma_k(G)$ e $\beta_k(G) \leq G^{(k)}$. Mais ainda, os α_k - e β_k -comutadores são subfamílias dos γ_k^* - e δ_k^* -comutadores, respectivamente. Como a ordem de um elemento de G é preservada por conjugação (resp., automorfismo), o conjugado de quaisquer α_k - e β_k -comutadores também é um α_k - e β_k -comutador; portanto, $\alpha_k(G)$ e $\beta_k(G)$ são subgrupos normais (resp., característicos) em G . Segue da definição que o inverso de um β_k -comutador também é um β_k -comutador. Além disso, observa-se que, pelas definições, cada α_2 -comutador também é um β_1 -comutador; portanto, $\alpha_2(G) = \beta_1(G)$.*

Nos três exemplos a seguir, iremos ilustrar, em um grupo G , diferentes relações entre os subgrupos: $\alpha_k(G)$, $\beta_k(G)$, $\gamma_k^*(G)$ e $\gamma_k(G)$. O primeiro exemplo mostra uma situação em que os subgrupos $\alpha_k(G)$, $\beta_k(G)$ e $\gamma_k^*(G)$ podem ser estritamente menores do que $\gamma_k(G)$.

Exemplo 2.5.4. *Seja G um p -grupo finito de classe de nilpotência $k \geq 2$. Então,*

$$1 = \alpha_k(G) = \beta_{k-1}(G) = \gamma_k^*(G) = \gamma_{k+1}(G) < \gamma_k(G) \leq G'.$$

No próximo exemplo, mostramos que o conjunto de todos os α_k -comutadores (resp., β_k -comutadores) podem ser estritamente menores do que o conjunto dos γ_k^* -comutadores (resp., δ_k^* -comutadores) de G . Em particular, eles também podem ser estritamente menores do que o conjunto de todos os γ_k -comutadores de G . Por outro lado, temos as seguintes igualdades: $1 \neq \alpha_k(G) = \beta_1(G) = \gamma_k^*(G) = \gamma_k(G)$ e $\beta_k(G) = 1$, para $k \geq 2$.

Exemplo 2.5.5. *Seja*

$$G = \langle a, b \mid a^{15} = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$$

o grupo diedral de ordem 30. Note que todos os elementos de ordem 3, 5 e 15 pertencem ao subgrupo comutador $G' = \langle a \rangle$.

Assim, para $1 \leq i, j \leq 15$, temos $(|a^i b|, |a^j|) = 1$, e portanto,

$$[a^i b, a^j] = ba^{-i} a^{-j} a^i b a^j = a^{2j}.$$

Segue que o conjunto de todos os γ_2^ -comutadores de G coincide com G' . Repetindo o processo, obtemos que o conjunto de todos os γ_k^* -comutadores, para $k \geq 2$, é também igual a G' .*

Por outro lado, os elementos de ordem 3 são precisamente

$$a^5 \text{ e } a^{10},$$

isto é, a^{5j} com $1 \leq j \leq 2$. Enquanto os elementos de ordem 5 são

$$a^3, a^6, a^9 \text{ e } a^{12},$$

isto é, a^{3k} com $1 \leq k \leq 4$.

Para esses casos, temos

$$[a^i b, a^{5j}] = ba^{-i} a^{-5j} a^i b a^{5j} = a^{10j},$$

e

$$[a^i b, a^{3k}] = ba^{-i} a^{-3k} a^i b a^{3k} = a^{6k}.$$

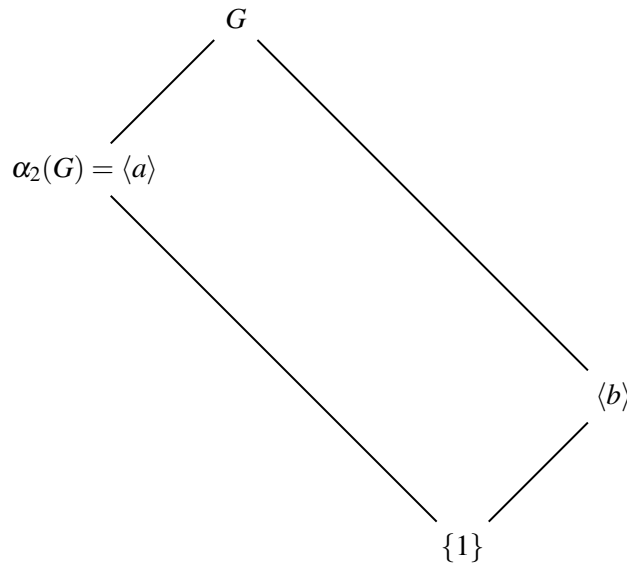
Assim, o conjunto de todos os α_2 -comutadores de G é

$$X = \{1, a^3, a^5, a^6, a^9, a^{10}, a^{12}\}.$$

De modo análogo, verifica-se que o conjunto de todos os α_k -comutadores, com $k \geq 2$, coincide com X . Além disso, o conjunto de todos os β_k -comutadores, com $k \geq 2$, é trivial.

Em resumo, $\langle a \rangle = \alpha_k(G) = \beta_1(G) = \gamma_k^*(G) = \gamma_k(G)$, $k \geq 2$.

Reticulado:



Agora, o exemplo a seguir ilustra uma situação em que $1 \neq \alpha_k(G) < \gamma_k(G)$ e também $1 \neq \beta_1(G) < \gamma_k(G)$, para algum k .

Exemplo 2.5.6. Considere o grupo

$$G = \langle a, b \mid a^{48} = b^2 = 1, a^b = a^{23} \rangle.$$

Os elementos de ordem 3 são precisamente

$$a^{16} \text{ e } a^{32}.$$

Os 2-elementos fora de $\langle a \rangle$ são da forma $a^i b$. Assim,

$$[a^{16}, a^i b] = a^{16} \text{ e } [a^{32}, a^i b] = a^{32}.$$

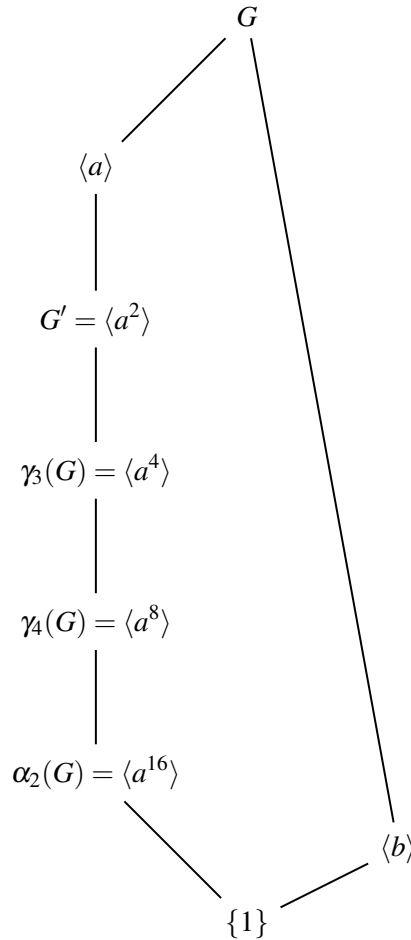
Então, $\alpha_2(G) = \beta_1(G) = \langle a^{16} \rangle$.

Em resumo:

- $\alpha_k(G) < \gamma_k(G)$, para $2 \leq k \leq 4$;

- $\alpha_k(G) = \gamma_k(G) = \gamma_\infty(G)$, para $k \geq 5$;
- $\beta_1(G) = \alpha_k(G)$, para $k \geq 2$;
- $\beta_k(G) = 1$, para $k \geq 2$.

Reticulado:



Proposição 2.5.7. *Sejam k um inteiro e G um grupo finito.*

(i) *Se $k \geq 3$ e $x \in G$ é um α_k -comutador, então x é um α_{k-1} -comutador.*

(ii) *Se $k \geq 2$ e $x \in G$ é um β_k -comutador, então x é um β_{k-1} -comutador.*

Demonstração. Vamos demonstrar o item (i); a demonstração do item (ii) é análoga. Vamos argumentar por indução sobre $k \geq 3$. Se x é um α_3 -comutador, então existem elementos coprimos $a, b \in G$, onde a é um α_2 -comutador, que é primário, e b é um elemento primário tais que $x = [a, b]$. Como a é um elemento primário, temos, em particular, que a é um α_1 -comutador. Então, x é um α_2 -comutador.

Seja $k > 3$ e suponha que, para cada $3 \leq \ell < k$, todo α_ℓ -comutador é um $\alpha_{\ell-1}$ -comutador. Seja x um $\alpha_{\ell+1}$ -comutador. Então existem elementos primários $a, b \in G$, de ordens coprimas, tais que $x = [a, b]$, onde a é um α_ℓ -comutador. Pela hipótese indução, a é um $\alpha_{\ell-1}$ -comutador. Portanto, x é um α_ℓ -comutador e o resultado segue. \square

Proposição 2.5.8. *Seja N um subgrupo normal de um grupo finito G . Se $x \in G$ é um elemento cuja imagem em G/N é um α_k -comutador (ou β_k -comutador), então existe um α_k -comutador (ou β_k -comutador) $y \in G$ tal que $x \in yN$.*

Demonstração. Para os α_k -comutadores, suponha que $k \geq 2$, pois o caso $k = 1$ é imediato. Como xN é um α_k -comutador de G/N , existem um α_{k-1} -comutador $aN \in G/N$ com $|aN| = p^r$ e um elemento $bN \in G/N$ com $|bN| = q^s$, onde p e q são primos distintos, tais que

$$xN = [aN, bN] = [a, b]N.$$

Então, existem um p -subgrupo de Sylow P e um q -subgrupo de Sylow Q de G tais que $aN \in PN/N$ e $bN \in QN/N$. Logo, podemos escolher elementos $a_1 \in P$ e $b_1 \in Q$ satisfazendo $aN = a_1N$ e $bN = b_1N$. Por indução, podemos supor que a_1 é um α_{k-1} -comutador; portanto, $[a_1, b_1]$ é um α_k -comutador em G . Tomando $y = [a_1, b_1]$, temos que $yN = xN$.

O caso dos β_k -comutadores é demonstrado de forma análoga. \square

Observação 2.5.9. *Convém mencionar que:*

1. *Existem diversas variações do Teorema de Baer-Suzuki (Teorema 2.1.5) na literatura; veja, por exemplo, [33, 4].*
2. *Os comutadores coprimos têm sido amplamente estudados; veja, por exemplo, [55, 3, 27, 6, 19].*

Capítulo 3

Subconjuntos de Spiegel em grupos

Neste capítulo, desenvolvem-se conceitos, propriedades e resultados básicos sobre certos subconjuntos de comutadores. Eles serão essenciais para o entendimento dos capítulos subsequentes.

3.1 Subconjuntos de comutadores

Definição 3.1.1. *Seja H um subgrupo de um grupo G . Para cada $x \in G$, definimos os conjuntos*

$$B_x(H) = \{a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb \mid a, b \in H\} \quad e \quad K_x(H) = \{[x, a] \mid a \in H\}.$$

Observação 3.1.2. *Seja x um elemento de um grupo G . Temos que $B_x(G) = (x^{-1})^G x^G$ e $K_x(G) = x^{-1}x^G$. Em particular, $K_x(G) \subseteq B_x(G)$.*

Um resultado de Spiegel

Para estudar propriedades dos subconjuntos $B_x(G)$, toma-se como ponto de partida o trabalho de Spiegel. Em seu artigo [56] de 1976, foi apresentado os seguintes fatos envolvendo esses subconjuntos:

Teorema 3.1.3 (Spiegel, [56]). *Seja G um grupo.*

(i) *Se $x, a, b \in G$, então*

$$a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb = [x, ba^{-1}]^a = [ab^{-1}, x]^b;$$

(ii) $\Gamma(G) = \bigcup_{x \in G} B_x(G)$;

- (iii) Se $x \in G$, então $B_x(G)$ é um subconjunto normal em G . Em particular, $\langle B_x(G) \rangle$ é um subgrupo normal de G ;
- (iv) Se $x \in G$ e $y \in B_x(G)$, então $y^{-1} \in B_x(G)$;
- (v) Se $x, y \in G$ e $y = xc$, onde $c \in Z(G)$, então $B_x(G) = B_y(G)$;
- (vi) Seja A um subgrupo normal abeliano de G . Se G/A é um grupo cíclico gerado por xA , então

$$B_x(G) = \Gamma(G) = G'.$$

A Conjetura de Ore foi demonstrada por Liebeck, O'Brien, Shalev e Tiep [44] e podemos enunciar o seguinte resultado, como consequência imediata desse resultado profundo:

Corolário 3.1.4. *Se G é um grupo finito simples não abeliano, então*

$$G = G' = \Gamma(G) = \bigcup_{x \in G} B_x(G).$$

Observação 3.1.5. *O teorema acima mostra que, para cada elemento x de um grupo G , o subconjunto $B_x(G)$ é um conjunto normal de comutadores, invariante por inversão e que contém o elemento neutro. Por outro lado, o subconjunto $K_x(G)$ também contém o elemento neutro, mas em geral não é normal nem invariante por inversão (veja Exemplo 3.2.1).*

Para fins de conhecimento, veja [25, Teorema A], um resultado de Fernández-Alcober e de las Heras, que demonstraram que, se G é um p -grupo finito cujo subgrupo comutador G' pode ser gerado por dois elementos, então existe $x \in G$ tal que $K_x(G) = \Gamma(G) = G'$ (veja também [18]).

Um resultado de Guralnick e Robinson

O resultado a seguir é uma extensão do Teorema de Baer-Suzuki (Teorema 2.1.5), devido a Guralnick e Robinson [33, Teorema A].

Teorema 3.1.6 (Guralnick, Robinson). *Sejam p um número primo e G um grupo finito. Se P é um p -subgrupo de G tal que $K_x(G)$ consiste em p -elementos para cada $x \in P$, então $P \leq O_p(G)$.*

O resultado acima será fundamental no Capítulo 5, em particular na demonstração do Teorema F.

3.2 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos de grupos finitos G em relação aos conjuntos $B_x(G)$ (e $K_x(G)$), os quais serão utilizados no desenvolvimento deste e dos próximos capítulos. Todos os exemplos aqui listados serão devidamente justificados ao longo do trabalho.

Começamos com um exemplo que mostra que, em geral, o conjunto $K_x(G)$ não é necessariamente um subgrupo. Além disso, como vimos no Teorema 3.1.3, o conjunto $B_x(G)$ é normal e fechado sob inversão. Por outro lado, tais propriedades em geral não são verificadas para $K_x(G)$.

Exemplo 3.2.1. Considere $G = \{1, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$, o grupo simétrico de grau 3. Como $(1, 2)^G = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ e $(1, 2, 3)^G = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$, temos que $K_{(1, 2)}(G) = (1, 2)^{-1}(1, 2)^G = \{1, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\} = G'$ e $K_{(1, 2, 3)}(G) = (1, 2, 3)^{-1}(1, 2, 3)^G = \{1, (1, 2, 3)\}$.

Agora, passamos a estudar o subconjunto $B_x(D_n)$, para cada $x \in D_n$.

Exemplo 3.2.2. Considere $D_n := \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$, com $n \geq 3$. Seja $1 \leq i \leq n$. Então

(a) $B_{a^i}(D_n) = \{1, a^{2i}, a^{-2i}\}$. Em particular, $B_a(D_4) = \{1, a^2\}$ e $B_a(D_n) = \{1, a^2, a^{n-2}\}$, quando $n \neq 4$;

(b) $B_{a^i b}(D_n) = D'_n = \langle a^2 \rangle$;

(c) $B_x(D_n) \leq D_n$, para todo $x \in D_n$ se, e somente se, $n \in \{3, 4, 6\}$.

Demonstração. Considere $G = D_n$. Os elementos de G são da forma a^i ou $a^i b$. Para provar o item (a), note que

$$ba^{-i}ba^i = a^{2i} \text{ e } a^{-i}ba^i b = a^{-2i}.$$

Deduzimos que $B_{a^i}(G) = \{1, a^{2i}, a^{-2i}\}$. Vamos provar agora o item (b). Seja $1 \leq j \leq n$. Assim,

$$(a^i b)^{-1} a^{-j} (a^i b) a^j = ba^{-i} a^{-j} a^i b a^j = ba^{-j} b a^j = a^{2j} \in B_{a^i b}(G).$$

Como G' é gerado por a^2 , concluímos que $B_{a^i b}(G) = G'$. Resta provar o item (c). Como os elementos de G são da forma a^i ou $a^i b$, então pelo item (b) é suficiente calcular apenas o conjunto $B_{a^i}(G)$, para cada $i = 1, \dots, n$:

- Se $n = 5$ ou $n \geq 7$, então $B_a(G) = \{1, a^2, a^{n-2}\}$ não é subgrupo de G , visto que $(a^2)^2 = a^4 \notin B_a(G)$.

- Se $n = 3$, então $B_a(G) = B_{a^2}(G) = \{1, a, a^2\}$ é subgrupo de G .
- Se $n = 4$, então $B_a(G) = B_{a^3}(G) = \{1, a^2\}$ e $B_{a^2}(G) = 1$ são subgrupos de G .
- Se $n = 6$, então $B_a(G) = B_{a^2}(G) = B_{a^4}(G) = B_{a^5}(G) = \{1, a^2, a^4\}$ e $B_{a^3}(G) = 1$ são subgrupo de G .

A prova está completa. □

Observação 3.2.3. Como mencionado na Introdução, o Teorema D (i) afirma que, se x é um elemento de um p -grupo finito G tal que $|B_x(G)|$ é uma potência de p , então $B_x(G)$ é um subgrupo normal de G . A hipótese de G ser um p -grupo é essencial. De fato, no grupo diedral $D_{12} = \langle a, b \mid a^{12} = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$, temos, pelo exemplo acima, que $B_a(D_{12}) = \{1, a^2, a^{10}\}$, de modo que $|B_a(D_{12})| = 3$ divide $|D_{12}| = 24$, mas $B_a(D_{12})$ não é um subgrupo de D_{12} .

Nos exemplos a seguir estudamos os grupos: A_4, S_4, A_5 e S_5 .

Exemplo 3.2.4. Sejam $(1, 2) \in S_4$ e a permutação $(1, 2, 3) \in A_4$. Então

$$(a) B_{(1, 2)}(S_4) = A_4;$$

$$(b) B_{(1, 2, 3)}(A_4) = \{1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} = A_4'.$$

Demonstração. Sabemos que A_4 tem quatro classes de conjugação cujos representantes são $1, (1, 3)(2, 4), (1, 2, 3)$ e $(1, 3, 2)$. Como $B_{(1, 2)}(S_4)$ é um conjunto normal (Teorema 3.1.3 (iii)), é suficiente que cada representante esteja contido em $B_{(1, 2)}(S_4)$. Note que:

- $1 \in B_{(1, 2)}(S_4)$;
- $(1, 3)(2, 4) = (1, 4)(1, 2)(1, 4)(1, 2, 3)(1, 2)(1, 3, 2) \in B_{(1, 2)}(S_4)$;
- $(1, 2, 3) = (1, 3)(1, 2)(1, 3)(3, 4)(1, 2)(3, 4) \in B_{(1, 2)}(S_4)$;
- $(1, 3, 2) = (3, 4)(1, 2)(3, 4)(1, 3)(1, 2)(1, 3) \in B_{(1, 2)}(S_4)$.

Portanto, $B_{(1, 2)}(S_4) = A_4$.

Agora, vamos verificar que $B_{(1, 2, 3)}(A_4) = \{1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$. De fato,

- $1 \in B_{(1, 2, 3)}(A_4)$;
- $(1, 2)(3, 4) = (1, 2, 4)(1, 3, 2)(1, 4, 2)(2, 3, 4)(1, 2, 3)(2, 4, 3) \in B_{(1, 2, 3)}(A_4)$;
- $(1, 3)(2, 4) = (1, 2, 4)(1, 3, 2)(1, 4, 2)(1, 4, 3)(1, 2, 3)(1, 3, 4) \in B_{(1, 2, 3)}(A_4)$;

- $(1, 4)(2, 3) = (1, 4, 3)(1, 3, 2)(1, 3, 4)(2, 3, 4)(1, 2, 3)(2, 4, 3) \in B_{(1, 2, 3)}(A_4)$.

A prova está completa. \square

Exemplo 3.2.5. *Seja a permutação $(1, 2, 3) \in A_5$. Então $B_{(1, 2, 3)}(A_5) = A_5$. Além disso, $B_{(1, 2, 3)}(S_5) = A_5$.*

Demonstração. O grupo A_5 tem cinco classes de conjugação cujos representantes são: $1, (1, 2)(3, 4), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4, 5)$ e $(1, 5, 2, 3, 4)$ (veja [29, V.10.26, p. 234]). Temos que todos os elementos abaixo pertencem a $B_{(1, 2, 3)}(A_5)$:

- $(1, 2)(3, 4) = (3, 5, 4)(1, 3, 2)(3, 4, 5)(1, 5, 4, 3, 2)(1, 2, 3)(1, 2, 3, 4, 5)$;
- $(1, 2, 3) = (1, 3, 5)(1, 3, 2)(1, 5, 3)(2, 4, 5)(1, 2, 3)(2, 5, 4)$;
- $(1, 2, 3, 4, 5) = (1, 2, 5, 3, 4)(1, 3, 2)(1, 4, 3, 5, 2)(1, 5, 4, 2, 3)(1, 2, 3)(1, 3, 2, 4, 5)$;
- $(1, 5, 2, 3, 4) = (1, 2, 4, 3, 5)(1, 3, 2)(1, 5, 3, 4, 2)(1, 5, 4, 2, 3)(1, 2, 3)(1, 3, 2, 4, 5)$.

A prova está completa. \square

Observação 3.2.6. *Como mencionado na Introdução, o Teorema B (i) afirma que, se G é um grupo finito tal que $|B_x(G)| \leq 59$ para todo $x \in G$, então G é solúvel. O Exemplo 3.2.5 mostra que essa estimativa é a melhor possível, pois A_5 é não solúvel e ocorre a igualdade $|B_{(1, 2, 3)}(A_5)| = 60$.*

Precisamos dos próximos exemplos para demonstração de um resultado no final deste capítulo.

Exemplo 3.2.7. *Seja G o 3º grupo de ordem 243 ($= 3^5$) na Small Groups Library do GAP [28]. Então, $|B_x(G)| < |G'|$, para cada $x \in G$*

Exemplo 3.2.8. *Seja $G = H \rtimes K$, onde K é um grupo de ordem 2 agindo por inversão no grupo Heisenberg H de ordem 27 (65º grupo de ordem 54 na Small Groups Library do GAP [28]). Podemos verificar que $B_x(G) \neq \Gamma(G) = G'$ para todo $x \in G$.*

Exemplo 3.2.9. *(Spiegel) Seja G um grupo de ordem pq , p^2q ou pqr , onde p, q e r são primos distintos. Então, existe $x \in G$ tal que $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$.*

Exemplo 3.2.10. *Seja*

$$G = \text{SL}(2,3) = \langle a, b, c \mid a^4 = c^3 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^{-1}, b^c = a, abc = cb \rangle.$$

Então, $B_b(G) = \Gamma(G) = G'$.

Demonstração. Temos que $G' = \langle a, b \rangle = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\} \cong Q_8$. Note que

- $c^{-1}b^{-1}cc^{-2}bc^2 = a^{-1}a^2 = a \in B_b(G)$;
- $a^{-1}b^{-1}ab = bb = b^2 = a^2 \in B_b(G)$;
- $c^{-2}b^{-1}c^2c^{-1}bc = a^{-2}a = a^{-1} = a^3 \in B_b(G)$;
- $b^{-1}c^{-2}bc^2 = b^{-1}a^2 = b^{-1}b^2 = b \in B_b(G)$;
- $c^{-3}bc^3a^{-3}ba^3 = a^{-1}b^{-1} = a^3b^3 = ab \in B_b(G)$;
- $c^{-2}b^{-1}c^2b = a^{-2}b = a^2b \in B_b(G)$;
- $c^{-1}b^{-1}cb = a^{-1}b = a^3b \in B_b(G)$.

A prova está completa. □

Ao final deste capítulo, demonstraremos que, em um grupo G , existe um elemento $x \in G$ tal que $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$ quando G for um p -grupo de ordem no máximo p^4 ; ou quando G for um 2-grupo de ordem 32 ($= 2^5$) ou, ainda quando G for um grupo (não necessariamente um p -grupo) de ordem no máximo 53.

3.3 Resultados básicos

Este trabalho pode ser visto como uma continuação dos resultados de Spiegel. Alguns resultados obtidos serão utilizados no Capítulo 4.

A proposição a seguir nos ajudará a compreender melhor a estrutura do conjunto $B_x(G)$.

Proposição 3.3.1. *Sejam x e y elementos de um grupo G . Então*

- (i) $B_{x^y}(G) = B_x(G)$;
- (ii) $B_{x^{-1}}(G) = B_x(G)$;
- (iii) $B_{xy}(G) \subseteq B_x(G)B_y(G)$;
- (iv) $B_x(G)B_y(G) = B_y(G)B_x(G)$;
- (v) $B_{[x,y]}(G) \subseteq B_x(G)B_y(G)$.

Demonstração. Sejam $a, b \in G$. Provaremos cada item separadamente:

- (i) Sejam $\alpha = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb \in B_x(G)$ e $\beta = a^{-1}(x^y)^{-1}ab^{-1}(x^y)b \in B_{x^y}(G)$. Por um lado,

$$\begin{aligned}\alpha &= a^{-1}(yy^{-1})x^{-1}(yy^{-1})ab^{-1}(yy^{-1})x(yy^{-1})b \\ &= (y^{-1}a)^{-1}(x^y)^{-1}(y^{-1}a)(y^{-1}b)^{-1}(x^y)(y^{-1}b) \in B_{x^y}(G).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\beta &= a^{-1}y^{-1}x^{-1}yab^{-1}y^{-1}xyb \\ &= (ya)^{-1}x^{-1}(ya)(yb)^{-1}x(yb) \in B_x(G).\end{aligned}$$

- (ii) Seja $\alpha = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb \in B_x(G)$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\alpha &= a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb(a^{-1}xaa^{-1}x^{-1}a) \\ &= (ba^{-1}xa)^{-1}x(ba^{-1}xa)a^{-1}x^{-1}a \in B_{x^{-1}}(G).\end{aligned}$$

A inclusão inversa segue de maneira análoga.

- (iii) Para $\alpha = a^{-1}(xy)^{-1}ab^{-1}(xy)b \in B_{xy}(G)$, temos

$$\begin{aligned}\alpha &= a^{-1}y^{-1}x^{-1}ab^{-1}xyb \\ &= a^{-1}y^{-1}a(a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb)b^{-1}yb.\end{aligned}$$

Denotando $\beta := a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb$ e usando a normalidade de $B_x(G)$ (Teorema 3.1.3), segue que

$$\alpha = (a^{-1}ya)^{-1}\beta(a^{-1}ya)a^{-1}y^{-1}ab^{-1}yb \in B_x(G)B_y(G).$$

- (iv) Sejam $\alpha \in B_x(G)$ e $\beta \in B_y(G)$. Usando a normalidade novamente temos que

$$\alpha\beta = \beta(\beta^{-1}\alpha\beta) \in B_y(G)B_x(G).$$

Portanto, $B_x(G)B_y(G) \subseteq B_y(G)B_x(G)$, e a inclusão contrária é análoga.

- (v) Para $\alpha = a^{-1}[x, y]^{-1}ab^{-1}[x, y]b \in B_{[x, y]}(G)$, temos

$$\begin{aligned}\alpha &= a^{-1}(y^{-1}x^{-1}yx)ab^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)b \\ &= (a^{-1}y^{-1}a(xa)^{-1}y(xa))(b^{-1}x^{-1}b(yb)^{-1}x(yb)).\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha \in B_y(G)B_x(G) = B_x(G)B_y(G)$.

A demonstração está completa. \square

O próximo lema será útil no Capítulo 4, em particular, nas demonstrações dos Teoremas B, D e E.

Lema 3.3.2. *Seja G um grupo. Suponha que $G = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Então*

$$G' = \langle B_{x_1}(G) \rangle \dots \langle B_{x_k}(G) \rangle.$$

Demonstração. Podemos assumir que $k > 1$. Pela Proposição 2.1.3, temos que

$$G' = \langle [x_i, x_j]^g \mid 1 \leq i < j \leq k, g \in G \rangle.$$

Pelo Teorema 3.1.3 (iii), o subconjunto $B_{x_i}(G)$ é normal, e, assim, $[x_i, x_j]^g \in B_{x_i}(G)$, para cada $g \in G$. Portanto,

$$G' = \langle [x_i, x_j]^g \mid 1 \leq i < j \leq k, g \in G \rangle \leq \langle B_{x_i}(G) \mid 1 \leq i \leq k \rangle \leq G'.$$

Como $\langle B_{x_i}(G) \rangle$ é um subgrupo normal em G , segue que

$$\langle B_{x_i}(G) \mid 1 \leq i \leq k \rangle = \langle B_{x_1}(G) \rangle \dots \langle B_{x_k}(G) \rangle.$$

A prova está completa. \square

Corolário 3.3.3. *Seja X um conjunto finito de geradores de um grupo G . Então, $B_x(G)$ está contido em um subgrupo nilpotente (resp., solúvel) de G , para todo $x \in X$, se, e somente se, G' é nilpotente (resp., solúvel).*

Demonstração. Considere o conjunto de geradores $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Pelo Lema 3.3.2, temos $G' = \langle B_{x_1}(G) \rangle \dots \langle B_{x_k}(G) \rangle$. Se G' é nilpotente (resp., solúvel), então cada subgrupo $\langle B_{x_i}(G) \rangle$ é nilpotente (resp., solúvel). Portanto $B_{x_i}(G)$ está contido em um subgrupo nilpotente (resp., solúvel) de G , para todo $1 \leq i \leq k$. Isso estabelece uma das implicações.

Para a recíproca, suponha que, para cada i , o conjunto $B_{x_i}(G)$ está contido em um subgrupo nilpotente. Assim, $\langle B_{x_i}(G) \rangle$ é normal nilpotente em G . Como o produto de subgrupos normais nilpotentes é também nilpotente, pelo Teorema de Fitting (Lema 1.2.2), concluímos que G' é nilpotente. De modo análogo, se cada $B_{x_i}(G)$ está contido em um subgrupo solúvel, então cada $\langle B_{x_i}(G) \rangle$ é normal solúvel em G , e portanto G' é solúvel, pelo Teorema 1.2.6 (ii). Isso completa a demonstração. \square

Definição 3.3.4. *Para cada subgrupo H de um grupo finito G , definimos a função*

$$\beta(H) = \max\{|B_x(H)| \mid x \in G\}.$$

Observação 3.3.5. *Seja G um grupo finito. Para cada $x \in G$, tem-se que $B_x(G) \subseteq G'$. Além disso, $1 \leq \beta(G) \leq |G'|$.*

O próximo lema será amplamente utilizado nos resultados que seguem, em particular nas demonstrações dos Teoremas A, B e C.

Lema 3.3.6. *Seja G um grupo finito.*

- (i) *Se $H \leq G$ e $x \in G$, então $B_x(H) \subseteq B_x(G)$. Em particular, $\beta(H) \leq \beta(G)$;*
- (ii) *Se $N \trianglelefteq G$, então $B_{xN}(G/N) = B_x(G)N$. Além disso, $\beta(G/N) \leq \beta(G)$;*
- (iii) *$|x^G| = |K_x(G)| \leq |B_x(G)| \leq \beta(G)$.*

Demonstração. (i) Se $h \in B_x(H)$, então, por definição, existem elementos $a, b \in H$ tal que $h = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb$. Assim, $h \in B_x(G)$, e portanto, $B_x(H) \subseteq B_x(G)$.

- (ii) Seja $\pi : G \rightarrow G/N$ a projeção natural $\pi(g) = gN$. Observemos que π envia $B_x(G)$ sobre $B_{xN}(G/N)$, pois

$$\pi(a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb) = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xbN \in B_{xN}(G/N),$$

e todo elemento de $B_{xN}(G/N)$ tem, por definição, a forma

$$(aN)^{-1}(xN)^{-1}(aN)(bN)^{-1}(xN)(bN) = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xbN = \pi(a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb)$$

para cada $a, b \in G$. Portanto, $\pi(B_x(G)) = B_{xN}(G/N)$, ou seja, a projeção restrita $\pi : B_x(G) \rightarrow B_{xN}(G/N)$ é sobrejetora.

Assim, para todo $x \in G$,

$$|B_{xN}(G/N)| \leq |B_x(G)|.$$

- (iii) Fixe $x \in G$. Temos que $K_x(G) \subseteq B_x(G)$. Além disso,

$$|x^G| = |\{x^g \mid g \in G\}| = |\{x^{-1}x^g \mid g \in G\}|.$$

Consequentemente, $|x^G| = |K_x(G)| \leq |B_x(G)| \leq \beta(G)$.

A demonstração está completa. □

Seja G um p -grupo finito. Se G é um p -grupo extraespecial, então $G' = Z(G)$ é cíclico de ordem p . Recorde que um elemento $x \in G$ é chamado de elemento uniforme de G se $|C_G(x)| = p^2$.

Corolário 3.3.7. *Seja G um p -grupo finito.*

- (i) *Se G é extraespecial, então $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$, para todo $x \in G \setminus Z(G)$.*
- (ii) *Se G é de classe maximal e x é um elemento uniforme em G , então $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$.*

Demonstração. Vamos provar cada item separadamente:

- (i) Seja $x \in G \setminus Z(G)$. Como $|G'| = p$, pelo Lema 3.3.6 (iii), temos que

$$p \leq |x^G| \leq |B_x(G)| \leq \beta(G) \leq |G'| = p.$$

Portanto, $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$.

- (ii) Suponha que G tem ordem p^n , para algum inteiro n . Assim, $|G'| = p^{n-2}$, pois G é de classe maximal. Se x é uniforme de G , $|C_G(x)| = p^2$. Então, pelo Lema 3.3.6 (iii) temos que

$$p^{n-2} = |G : C_G(x)| = |x^G| \leq \beta(G) \leq |G'| = p^{n-2}.$$

Portanto, $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$.

A prova está completa. □

A próxima proposição será útil para os resultados seguintes e, em particular, será utilizada na demonstração do Teorema D.

Proposição 3.3.8. *Seja G um grupo. Então:*

- (i) *$B_x(G) \cap Z(G)$ é um subgrupo de G .*
- (ii) *Se G é nilpotente de classe, no máximo, 2, então $B_x(G)$ é subgrupo de G , para todo $x \in G$.*
- (iii) *Se $Z(G) < Z_2(G)$, então $B_x(G) \leq Z(G)$, para todo $x \in Z_2(G) \setminus Z(G)$.*

Demonstração. Inicialmente vamos provar o item (i). Como o subconjunto $B_x(G)$ contém 1 e é fechado para inversão, é suficiente provar que $B_x(G) \cap Z(G)$ é fechado para o produto. Sejam $\alpha = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb$ e $\beta = c^{-1}x^{-1}cd^{-1}xd$ em $B_x(G) \cap Z(G)$. Pelo Teorema 3.1.3 (i), podemos escrever $\alpha = [ab^{-1}, x]$ e $\beta = [cd^{-1}, x]$. Assim,

$$\alpha\beta = [ab^{-1}, x][cd^{-1}, x] = [ab^{-1}cd^{-1}, x] \in B_x(G) \cap Z(G).$$

Portanto, $B_x(G) \cap Z(G)$ é subgrupo de G .

Agora, se G é nilpotente de classe 2, então $B_x(G) \subseteq Z(G)$. Consequentemente $B_x(G)$ é subgrupo de G e o item (ii) está provado.

Resta agora mostrar o item (iii). Como $Z(G) < Z_2(G)$, podemos tomar um elemento $x \in Z_2(G) \setminus Z(G)$. Por definição, $Z_2(G)/Z(G) = Z(G/Z(G))$, então dado $g \in G$, temos que $xZ(G)gZ(G) = gZ(G)xZ(G)$, ou seja, $[x, g] \in Z(G)$ para todo $g \in G$. Seja $\alpha = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb$ um elemento arbitrário de $B_x(G)$. Então,

$$\alpha = (a^{-1}x^{-1}ax)(x^{-1}b^{-1}xb) = [a, x][x, b] \in Z(G).$$

Portanto, $B_x(G) \subseteq Z(G)$ e o resultado segue. A demonstração está completa. \square

A partir do item (i) da Proposição 3.3.8, podemos pensar na seguinte questão: *Sejam G um grupo e X um subconjunto normal (possivelmente composto por comutadores), contendo 1 e fechado por inversão em G . É verdade que $X \cap Z(G)$ é subgrupo de G ?*

Em geral, essa questão, não é verdadeira. Por exemplo, MacDonald em [46], para cada inteiro $n \geq 2$ e cada primo p , construiu uma família de p -grupos nilpotentes de classe 2, na qual o conjunto de todos os comutadores desses grupos é diferente do seu subgrupo comutador. Seja X o conjunto de todos os comutadores do grupo (de MacDonald) G . Como G é de classe 2, $G' \leq Z(G)$, isso significa que X é próprio em G' e $X \cap Z(G) = X$ não é um subgrupo. Esses grupos tem as seguintes propriedades:

Teorema 3.3.9 (MacDonald, [46]). *Para cada número inteiro $n \geq 2$ e cada primo p , existe um p -grupo finito n -gerado $G := G(n, p)$ de classe 2 com as seguintes propriedades:*

- (i) $G/Z(G)$ é um p -grupo abeliano elementar de ordem p^n ;
- (ii) G' é um p -grupo abeliano elementar de ordem $p^{n(n-1)/2}$;
- (iii) $G' = Z(G)$.

Além disso, se $n \geq 6$, então G' contém elementos que não são comutadores.

Como $G(n, p)$ é nilpotente de classe 2, pela Proposição 3.3.8, $B_x(G(n, p))$ é um subgrupo para qualquer $x \in G(n, p)$. Para $n = 2$, $G(2, p)$ é não abeliano de ordem p^3 e para $x \in G(n, p)$, temos $B_x(G(n, p)) = G(n, p)' = C_p$. Para $n \geq 3$, vamos mostrar que $B_x(G(n, p)) \neq G(n, p)'$, para cada $x \in G(n, p)$. Além disso, se $n \geq 6$, temos para o grupo $G = G(n, p)$, que $|B_x(G)| < |\Gamma(G)| < |G'|$, para todo $x \in G$.

Corolário 3.3.10. *Seja $G = G(n, p)$ com $n \geq 3$. Então, $B_x(G) \neq G'$, para todo $x \in G$. Em particular, se $n \geq 6$, então $|B_x(G)| < |\Gamma(G)| < |G'|$.*

Demonstração. Seja $x \in G \setminus Z(G)$. Como G é de classe 2, $B_x(G)$ é subgrupo de G . Considere o subgrupo $A = \langle x, Z(G) \rangle$. Assim,

$$Z(G) < A \leq C_G(x) < G \quad \text{e} \quad |C_G(x) : A| |A : Z(G)| \geq p.$$

Pelo Teorema 3.3.9, temos que $|G| = p^{n(n+1)/2}$ e $|G'| = p^{n(n-1)/2}$, conseqüentemente

$$p^{n(n+1)/2} = |G| = |G : C_G(x)| |C_G(x) : A| |A : Z(G)| |G'| \geq |G : C_G(x)| p^{1+n(n-1)/2}.$$

Logo, $|G : C_G(x)| \leq p^{n-1}$. Sendo G de classe 2, temos que $B_x(G) = K_x(G)$ (Teorema 3.1.3 (i)). Como $n \geq 3$, pelo Lema 3.3.6 (iii), temos

$$|B_x(G)| = |K_x(G)| = |x^G| = |G : C_G(x)| \leq p^{n-1} < p^{n(n-1)/2} = |G'|.$$

A prova está completa. □

Pelo Teorema 3.3.9 e o Corolário 3.3.10, temos que $G = G(3, 2)$ é um 2-grupo de ordem $64 = 2^6$ no qual ocorre a situação $|B_x(G)| < |\Gamma(G)| < |G'|$, para todo $x \in G$. Além disso, conforme observado no Exemplo 3.2.8, existe um grupo de ordem 54 em que a mesma situação se verifica. Com base nesses fatos, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.11. *Seja G um grupo finito. Suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

(i) *(de Melo, de Souza, Hipólito) $|G| = p^n$, onde p é um primo e $n > 0$, com $n \leq 4$ se p é ímpar, e $n \leq 5$ se $p = 2$.*

(ii) $|G| \leq 53$.

Então, existe um elemento $x \in G$ tal que $B_x(G) = \Gamma(G) = G'$.

Demonstração. Vamos provar cada item separadamente:

(i) É bem conhecido que todos os p -grupos de ordem no máximo p^2 são abelianos. Portanto, podemos considerar os p -grupos não abelianos G tais que $|G| \in \{p^3, p^4, p^5\}$. Suponha que $|G| = p^3$. Neste caso, o subgrupo comutador G' tem ordem p e já provamos.

Agora, suponha que $|G| = p^4$. Em virtude do Teorema 3.1.3, basta mostrar que G contém um subgrupo abeliano de ordem p^3 . Seja A um subgrupo normal de G de ordem p^2 . Se A é um subgrupo central, então qualquer subgrupo maximal que contenha A é abeliano. Podemos assumir que A é não central. Considere $K = C_G(A)$. Em particular, $A \leq Z(K)$ e $K < G$. Provaremos que K é abeliano. De fato, G/K é isomorfo a um

subgrupo de $\text{Aut}(A)$. Em todo caso, $|G/K| = p$ e então, K é um subgrupo maximal de G . Consequentemente, K é abeliano, o que completa a prova.

Agora, tratamos do caso $p = 2$, isto é, $|G| = 2^5$. Sabemos que $|G'| \in \{2, 4, 8\}$. Se $|G'| = 2$ e $x \in G \setminus Z(G)$, então $B_x(G) \neq 1$. No caso $|G'| = 8$, temos que G é de classe maximal (veja, por exemplo, [24, 4.6, p. 215]) e segue pelo Corolário 3.3.7 (ii). Resta apenas o caso $|G'| = 4$. Neste caso, $|x^G| = 2$ ou $|x^G| = 4$, para todo $x \in G \setminus Z(G)$.

Suponha, por contradição, que $|x^G| = 2$, para todo $x \in G \setminus Z(G)$. Assim, $|G : C_G(x)| = |x^G| = 2$, ou seja, $G' \leq C_G(x)$. Portanto, $G' \leq Z(G)$ e G é nilpotente de classe 2. Considere $x^G = \{x, x^a\}$ para algum $a \in G$. Deduzimos que, $B_x(G) = \{1, [x, a], [a, x]\}$. Pela Proposição 3.3.8, $B_x(G)$ é um subgrupo de G de ordem 3, uma contradição.

Então, existe $x \in G$ tal que $|x^G| = 4$. Sejam $a, b, c \in G$ tais que $x^G = \{x, x^a, x^b, x^c\}$. Note que, $x^{-1}a^{-1}xa = x^{-1}b^{-1}xb$ se, e somente se, $x^a = x^b$, uma contradição. Deduzimos que $B_x(G) = \{1, [x, a], [x, b], [x, c]\} = G'$.

- (ii) Em princípio, pelo item anterior, podemos eliminar os casos em que $|G|$ é uma potencia de primo: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 37, 41, 43, 47, 49, 53.

Em seguida, pelo Exemplo 3.2.9, também podemos eliminar os casos em que $|G|$ são da forma pq , p^2q e prq , onde p, q e r são primos distintos: 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 26, 28, 30, 33, 34, 35, 38, 39, 42, 44, 45, 46, 50, 51, 52.

Agora restam apenas os casos em que $|G| \in \{24, 36, 40, 48\}$. Nestes casos, vamos usar a classificação dos "pequenos" grupos finitos. A classificação completa desses grupos é conhecida e pode ser obtida por meio da *Small Groups Library* do GAP [28].

Suponha que $|G| = 24$. Temos que G é isomorfo a um dos seguintes 15 grupos: $C_3 \rtimes C_8$, C_{24} , $C_3 \rtimes Q_8 = \langle a, b \mid a^{12} = 1, b^2 = a^6, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, $C_4 \times S_3$, D_{12} , $C_6 \rtimes C_4$, $(C_2 \times C_6) \rtimes_1 C_2$, $(C_2 \times C_6) \rtimes_2 C_2$, $C_2 \times C_{12}$, $C_3 \times Q_8$, $A_4 \times C_2$, $(C_2 \times C_2) \times S_3$, $(C_2 \times C_2) \rtimes C_6$, S_4 e $\text{SL}(2, 3)$. Observe que para os grupos S_4 e $\text{SL}(2, 3)$ já foi provado nos Exemplos 3.2.4 e 3.2.10. Os demais grupos têm um subgrupo normal abeliano cujo quociente é cíclico e podemos aplicar o Teorema 3.1.3.

Suponha que $|G| = 36$. Temos que G é isomorfo a um dos 14 grupos: $C_9 \rtimes C_4$, C_{36} , $(C_2 \rtimes C_2) \rtimes C_4$, D_{12} , $C_2 \times C_{18}$, $C_3 \times C_{12}$, $(C_3 \times C_3) \rtimes_1 C_4$, $(C_3 \times C_3) \rtimes_2 C_4$, $C_3 \times C_{12}$, $C_3 \times A_4$, $S_3 \times C_6$, $(C_3 \times C_6) \rtimes C_2$, $C_6 \times C_6$ ou $S_3 \times S_3$. Todos esses grupos com exceção do grupo $S_3 \times S_3$ contém subgrupo normal abeliano cujo quociente é cíclico e segue pelo Teorema 3.1.3. Para o grupo $S_3 \times S_3$, existe $x = (1\ 2\ 3) \times (1\ 2\ 3) \in S_3 \times S_3$ tal que $B_x(G) = A_3 \times A_3$.

Suponha que $|G| = 40$. Temos que G é isomorfo a um dos 14 grupos: C_{40} , $C_5 \rtimes_1 C_8$, $C_5 \rtimes_2 C_8$, $C_5 \rtimes Q_8 = \langle a, b \mid a^{20} = 1, b^2 = a^{10}, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, $C_5 \times Q_8$, $C_{20} \rtimes C_2$, D_{20} , $(C_2 \times C_{10}) \rtimes_1 C_2$, $(C_2 \times C_{10}) \rtimes_2 C_2$, $(C_2 \times C_{10}) \rtimes_3 C_2$, $C_2 \times C_{20}$, $C_{10} \rtimes_1 C_4$, $C_{10} \rtimes_2 C_4$, $C_2 \times C_2 \times C_{10}$. Todos esses subgrupos contêm um subgrupo normal abeliano cujo quociente é cíclico, e o resultado segue do Teorema 3.1.3.

Para caso o $|G| = 48$, podemos verificar usando o GAP [28].

A prova está completa. □

Observação 3.3.12. *O tema relacionado ao conjunto $B_x(G)$ já havia sido investigado na dissertação do colega Miguel Neto Hipólito [36]. A demonstração do item (i) do Teorema 3.3.11 aparece parcialmente em seu trabalho, especificamente nos casos dos p -grupos de ordens até p^4 , utilizando um argumento sugerido pelo Prof. Emerson de Melo. Agradeço a ambos pelas contribuições que motivaram esta parte do trabalho.*

Nossa contribuição consiste em estender o resultado para os 2-grupos de ordem 2^5 , demonstrando que o resultado permanece válido, e em verificar que ele falha no grupo $G(3, 2)$, de ordem 2^6 (Corolário 3.3.10), bem como em um 3-grupo de ordem 3^5 (Exemplo 3.2.7). A partir desses casos, investigamos qual seria o menor grupo em que essa igualdade não se verificar (Exemplo 3.2.8), estabelecendo, assim, o item (ii).

Os objetos de estudo deste trabalho são os conjuntos de comutadores: $B_x(G)$, $K_x(G)$ e os conjuntos formados pelos α_k - e β_k -comutadores. Nos capítulos seguintes, cada seção terá como foco principal um desses conjuntos em determinadas classes de grupos. Em particular, no Capítulo 4 tratamos de $B_x(G)$, enquanto no Capítulo 5 o estudo concentra-se em $K_x(G)$ e nos α_k - e β_k -comutadores. Todos esses conjuntos contêm a identidade e , com exceção de $K_x(G)$ são, em geral, conjuntos normais no grupo G .

Capítulo 4

Grupos finitos com restrições em subconjuntos de comutadores

O objetivo deste capítulo é investigar como restrições impostas ao conjunto $B_x(G)$ influenciam a estrutura de um grupo finito G . Os resultados obtidos fornecem critérios de nilpotência, supersolubilidade e solubilidade, bem como consequências estruturais no contexto dos p -grupos finitos. Todos os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos em colaboração com Raimundo Bastos e Emerson de Melo em [20].

4.1 Motivação e resultados principais

4.1.1 Critérios de solubilidade

Ao restringirmos uniformemente o tamanho dos conjuntos $B_x(G)$, impomos fortes limitações à estrutura do grupo. Em particular, quando tal restrição é dada em termos do menor primo que divide a ordem de G , o comportamento dos comutadores força o grupo a apresentar classe de nilpotência pequena. O resultado a seguir formaliza esse fenômeno, descrevendo não apenas a classe de nilpotência obtida, mas também a decomposição estrutural do grupo no caso não abeliano.

Teorema A. *Seja p o menor primo que divide a ordem de um grupo finito G . Se $|B_x(G)| \leq p$, para todo $x \in G$, então G é nilpotente de classe no máximo 2. Além disso, se G é não abeliano, então G é isomorfo a $P \times A$, onde P é um p -subgrupo de Sylow de G , $|P'| = p$, $P/Z(P)$ é um p -grupo abeliano elementar e A é um p' -subgrupo de Hall abeliano de G .*

Mantendo o caráter uniforme das hipóteses e considerando condições adicionais sobre os conjuntos $B_x(G)$, obtemos consequências estruturais de natureza distinta da nilpotência. Em

particular, tais condições conduzem a critérios de supersolubilidade e solubilidade, os quais são estabelecidos a seguir.

Teorema B. *Seja G um grupo finito.*

- (i) *Se $B_x(G)$ está contido em um subgrupo cíclico, para cada $x \in G$, então G' é abeliano. Além disso, G é supersolúvel.*
- (ii) *Se $|B_x(G)| \leq 59$, para cada $x \in G$, então G é solúvel.*

No teorema acima, a hipótese de finitude do item (i) é essencial. Seja \mathbb{P} o conjunto de todos os primos. Para cada $p \in \mathbb{P}$, tome D_p , o grupo diedral de ordem $2p$ e considere a soma direta

$$G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} D_p.$$

Para cada $x \in G$, $B_x(G)$ está contido em um subgrupo cíclico e G' é abeliano. Como G não é finitamente gerado, segue que G não é supersolúvel.

O limite obtido é o melhor possível. Mais precisamente, o grupo alternado A_5 não é solúvel e satisfaz $|B_{(1, 2, 3)}(A_5)| = |A_5| = 60$. A demonstração desse critério baseia-se na classificação dos grupos simples minimais de Thompson [59]. Além disso, no resultado a seguir, mostramos que o critério permanece válido para grupos infinitos.

Corolário 4.1.1. *Seja G um grupo tal que $|B_x(G)| \leq 59$, para cada $x \in G$. Então G é solúvel.*

Demonstração. Para mostrar que G é solúvel, é suficiente demonstrar que o subgrupo comutador G' é solúvel. Pelo Lema 3.3.6, $|x^{G'}| \leq |B_x(G)| \leq 59$, para todo $x \in G$. Pelo Teorema de Neumann ([52, 15.5.11]), segue que G' é finito. Além disso, $|B_x(G')| \leq |B_x(G)| \leq 59$, para todo $x \in G'$. Assim, pelo Teorema B (ii), concluímos que G' é solúvel. O resultado segue. \square

Recentemente, Figueiredo e Shumyatsky estudaram grupos em que todos os comutadores tem ordem potência de primo (veja [26] e referências lá mencionadas). Muitos grupos possuem essa propriedade. Por exemplo, grupos abelianos, p -grupos finitos, grupos diedrais de ordem $2p$, onde p é um primo. Além disso, o grupo simétrico S_4 têm comutadores não triviais de ordens potência de 2 e 3 e A_5 tem comutadores de ordem potência de 2, 3 e 5.

Nesta parte do trabalho, investigamos grupos finitos G com a seguinte propriedade: *para cada $x \in G$ existe um primo p , dependente de x , tal que o conjunto $B_x(G)$ consiste, exclusivamente, de p -elementos.* Pelo Teorema 3.1.3 (ii), essa propriedade implica que todos

os comutadores de G têm ordem potência de primo. Mostraremos, que na verdade, essa propriedade acarreta que o subgrupo comutador G' é um p -grupo para algum primo p .

Teorema C. *Seja G um grupo finito. Então, G' é um p -grupo (para algum primo p) se, e somente se, para cada $x \in G$ existe um primo $q = q(x)$ tal que $B_x(G)$ consiste de q -elementos.*

O resultado acima é um critério de solubilidade. Em particular, G é metanilpotente e, além disso, é nilpotente por abeliano.

4.1.2 p -Grupos finitos

Em grupos finitos gerais, pode ocorrer que $|B_x(G)|$ divide $|G|$ sem que $B_x(G)$ seja um subgrupo (Exemplo 3.2.2). Por outro lado, no caso dos p -grupos finitos, essa propriedade implica que $B_x(G)$ é sempre um subgrupo. Além disso, quando essa condição se verifica para elementos de um conjunto gerador de G , é possível obter limites superiores para a classe de nilpotência de G . Mais precisamente:

Teorema D. *Sejam G um p -grupo finito e n um inteiro positivo.*

- (i) *Se $|B_x(G)| = p^n$, então $B_x(G)$ é um subgrupo normal de G .*
- (ii) *Se X é um conjunto de geradores de G tal que $|B_x(G)|$ é um divisor de p^n , para cada $x \in X$, então G é nilpotente de classe, no máximo, $n + 1$.*

O limite obtido no resultado anterior não pode ser melhorado. Por exemplo, considere p -grupos extraespeciais ou p -grupos de classe maximal (ver Corolário 3.3.7). Vale também ressaltar que, em geral, a recíproca do Teorema D (ii) não é válida, isto é, se G é um p -grupo nilpotente da classe c , isso não implica que $|B_x(G)| \leq p^{c-1}$ (ver Corolário 3.3.10).

Lembre-se de que um p -grupo finito G é chamado de *powerful* se $G' \leq G^p$ quando p é ímpar, ou $G' \leq G^4$ quando $p = 2$. Nesse contexto, obtemos o seguinte resultado.

Teorema E. *Sejam p um primo ímpar e G um p -grupo finito gerado por $X \subseteq G$. Se $B_x(G)$ está contido em um subgrupo powerful 2-gerado, para cada $x \in X$, então G' é powerful.*

De acordo com [11, Teorema 1], se um p -grupo finito G possui um subgrupo comutador G' gerado por dois elementos, então G' é powerful. Não sabemos, no entanto, se a hipótese de que $B_x(G)$ está contido em um subgrupo powerful 2-gerado, para qualquer $x \in X$, pode ser enfraquecida para exigir apenas a contenção em um subgrupo 2-gerado. A prova apresentada utiliza essa suposição de uma forma essencial.

4.2 Demonstrações dos resultados

Prova do Teorema A

Consideremos a seguinte proposição. Primeiro, recorde que $\beta(H) = \max\{|B_x(H)| \mid x \in G\}$ e que núcleo normal de H em G é o subgrupo $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$.

Proposição 4.2.1. *Seja G um grupo finito com $\beta(G) = n$. Então, existem um inteiro positivo d e subgrupos $H_1, \dots, H_d \leq S_n$ com $\beta(H_i) \leq n$, $1 \leq i \leq d$, tal que $G/Z(G)$ é isomorfo ao subgrupo $H_1 \times \dots \times H_d$. Em particular, $|G/Z(G)| \leq (n!)^d$*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, \dots, x_d\}$ um conjunto de geradores de G . Pelo Lema 3.3.6 (iii), $|G : C_G(x_i)| = |x_i^G| \leq |B_{x_i}(G)| \leq \beta(G) = n$. Para cada $i \in \{1, \dots, d\}$, defina $K_i = (C_G(x_i))_G$, o núcleo normal de $C_G(x_i)$ em G . Pela Proposição 1.1.2, G/K_i é isomorfo a um subgrupo de S_n , para cada i . Além disso, pelo Lema 3.3.6 (ii), $\beta(G/K_i) \leq \beta(G) = n$. Agora, considere o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow G/K_1 \times \dots \times G/K_d \\ g &\longmapsto (gK_1, \dots, gK_d). \end{aligned}$$

Em particular, o núcleo é

$$\ker(\psi) = \bigcap_{i=1}^d K_i = Z(G),$$

e a prova está completa. □

Como consequência do resultado acima, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.2. *Seja G um grupo finito.*

- (i) *Se $\beta(G) = 1$, então G é abeliano.*
- (ii) *Se $\beta(G) = 2$, então G é nilpotente de classe 2.*
- (iii) *Se $\beta(G) \leq 3$, então G é supersolúvel.*

Demonstração. Vamos fazer apenas a prova do item (iii). Pela Proposição 4.2.1, o quociente $G/Z(G)$ é isomorfo a um subgrupo de $S_3 \times \dots \times S_3$, que é supersolúvel. Em particular, $G/Z(G)$ é supersolúvel e, portanto, G é supersolúvel. □

Observação 4.2.3. *O limite do item (iii) resultado anterior é o melhor possível. Por exemplo, A_4 é solúvel e não supersolúvel com $\beta(G) = 4$.*

Corolário 4.2.4. *Seja p o menor primo que divide a ordem de um grupo finito G . Se $\beta(G) = p$, então $G/Z(G)$ é p -grupo abeliano elementar.*

Demonstração. Pela proposição 4.2.1, existe um inteiro positivo d e existem subgrupos, que podemos assumir não triviais, H_1, \dots, H_d de S_p , $1 \leq i \leq d$, tais que $G/Z(G)$ é isomorfo ao subgrupo $H_1 \times \dots \times H_d$. Mostraremos que $|H_i| = p$, para cada $1 \leq i \leq d$. Suponha, por contradição, que para algum j , H_j não tenha ordem p . Como $H_j \leq S_p$, existe um primo $q < p$ tal que q divide $|H_j|$ e, portanto, q divide $|G|$. Isso é uma contradição, pois p é o menor primo que divide a ordem de G . A demonstração está completa. \square

Em seguida, precisamos do seguinte resultado de J. Wiegold de 1956 retirado de [61, Teorema 5.6]. Recordamos que um grupo G é chamado de n -BFC-grupo, para algum inteiro positivo n , se $|x^G| \leq n$ para todo $x \in G$ e existe pelo menos um elemento $y \in G$ tal que $|y^G| = n$.

Teorema 4.2.5 (Wiegold, [61]). *Seja p um número primo. Seja G um p -BFC-grupo. Então, o subgrupo comutador G' é cíclico de ordem p .*

Podemos agora demonstrar o Teorema A.

Teorema A. *Seja p o menor primo que divide a ordem de um grupo finito G . Se $|B_x(G)| \leq p$, para todo $x \in G$, então G é nilpotente de classe, no máximo, 2. Além disso, se G é não abeliano, então G é isomorfo a $P \times A$, onde P é um p -subgrupo de Sylow de G , $|P'| = p$, $P/Z(P)$ é um p -grupo abeliano elementar e A é um p' -subgrupo de Hall abeliano de G .*

Demonstração. Suponha que o grupo G não seja abeliano. Pelo Lema 3.3.6 (iii), temos que $|G : C_G(x)| \leq \beta(G) \leq p$, para todo $x \in G$. Como p é o menor primo que divide a ordem de G , temos que $\beta(G) = p$. Pelo Corolário 4.2.4, o quociente $G/Z(G)$ é um p -grupo abeliano elementar. Portanto, $G' \leq Z(G)$ e G é nilpotente de classe 2.

Sejam P o p -subgrupo de Sylow e A o p' -subgrupo de Hall de G . Como $G/Z(G)$ um p -grupo abeliano elementar, todo q -subgrupo de Sylow de G , para cada primo $q \neq p$, está contido em $Z(G)$. Logo, A está contido em $Z(G)$. Portanto, podemos escrever

$$G = P \times A.$$

Como G é não abeliano e A é abeliano, segue que P é não abeliano. Usando o fato de que p é o menor primo que divide $|G|$ e o Lema 3.3.6, temos que $\beta(P) = p$. Novamente, pelo Corolário 4.2.4, o quociente $P/Z(P)$ é um p -grupo abeliano elementar. Agora, para cada elemento $x \in G \setminus Z(G)$, temos

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = p.$$

Então, pelo Teorema 4.2.5, temos que o subgrupo comutador P' é isomorfo a C_p . A demonstração está completa. \square

Prova do Teorema B

A demonstração do Teorema B (ii) baseia-se na classificação de Thompson [59]; para conveniência, consulte a lista apresentada no Teorema 1.3.6. Utilizamos informações sobre as classes de conjugação de grupos simples não abelianos contidas em [62], bem como resultados de Suzuki [57, 58], complementados por cálculos realizados no GAP [28]. Além disso, recorreremos ao Lema 3.3.6, utilizando o fato de que $\beta(H)$ é uma aplicação monótona.

Começamos pelo caso em que G é um grupo simples minimal. Esta parte está dividida em uma sequência de cinco lemas.

Lema 4.2.6. *Se $G = \text{PSL}(2, 2^p)$, onde p é um primo, então $\beta(G) \geq 60$. Além disso, $\beta(\text{PSL}(2, 2^p)) = 60$ se, e somente se, $p = 2$.*

Demonstração. Suponha que $p > 5$. Pelo Teorema 1.3.3, existe um subgrupo diedral D_k de ordem $2k$, onde $k \in \{2^p - 1, 2^p + 1\}$. Em particular, $\beta(D_k) = k$. Então, pelo Lema 3.3.6 (iii),

$$\beta(G) \geq \beta(D_k) = k \geq 63.$$

Se $G = \text{PSL}(2, 4) \cong A_5$, então $\beta(G) = 60$. Agora, resta considerar $p = 3$ e 5 . Por [62], se $G = \text{PSL}(2, 8)$, então há uma classe de conjugação em G com exatamente 72 elementos. Pelo Lema 3.3.6 (iii), $\beta(G) \geq 72$. Agora, se $G = \text{PSL}(2, 32)$, então existe uma classe de conjugação com 1056 elementos e, então, $\beta(G) \geq 1056$. \square

Lema 4.2.7. *Se p é um primo ímpar, então $\beta(\text{PSL}(2, 3^p)) > 60$.*

Demonstração. Defina $G = \text{PSL}(2, 3^p)$. Suponha que $p \geq 5$. Argumentando como na prova do Lema 4.2.6, temos que $\beta(G) \geq 121$. Resta analisar o caso $p = 3$. Se $G = \text{PSL}(2, 27)$, existe uma classe de conjugação com 756 elementos, retirado de [62]. Então, $\beta(G) \geq 756$. \square

Lema 4.2.8. *Se $G = \text{PSL}(2, p)$, onde $p > 3$ é um primo tal que $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, então $\beta(G) > 60$.*

Demonstração. Defina $G = \text{PSL}(2, p)$. Pelo Teorema 1.3.3, G contém um subgrupo H isomorfo a um produto semidireto não abeliano $C_p \rtimes Q$, onde Q é cíclico. Combinando o Teorema 3.1.3 (vi) e o Lema 3.3.6 (ii), deduzimos que $\beta(G) \geq \beta(H) = p$. Então, basta considerar $p \leq 53$. Mais precisamente, os casos em que $p \in \{7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53\}$.

Esses casos restantes podem ser verificados diretamente usando [28]. Completamos a demonstração. \square

Lema 4.2.9. *Se $G = \text{Sz}(2^p)$, onde p é um primo ímpar, então $\beta(G) > 60$.*

Demonstração. Suponha que $p \geq 7$. Pelo Lema 1.3.5, existe um grupo diedral H de ordem $2(2^p - 1)$ como um subgrupo de G . Consequentemente,

$$\beta(G) \geq \beta(H) \geq 2^p - 1 \geq 127.$$

Agora, basta considerar $p \in \{3, 5\}$. Suponha que $G = \text{Sz}(8)$. Por [62], existe uma classe de conjugação com $2^6 \cdot 7 \cdot 13$ elementos em G . Suponha que $G = \text{Sz}(32)$. Por [62], existe uma classe de conjugação com $2^{10} \cdot 31 \cdot 41$ elementos. Em ambos os casos, $\beta(G) > 60$. \square

Lema 4.2.10. *Se $G = \text{PSL}(3, 3)$, então $\beta(G) > 60$.*

Demonstração. Há uma classe de conjugação com 432 elementos (usando GAP [28]). Argumentando como no resultado anterior, deduzimos $\beta(G) \geq 432$. \square

Combinando os Lemas 4.2.6-4.2.10, obtém-se:

Proposição 4.2.11. *Seja G um grupo simples minimal. Então $\beta(G) \geq 60$. Além disso, $\beta(G) = 60$ se, e somente se, $G = \text{PSL}(2, 4) \cong A_5$.*

Podemos agora demonstrar o Teorema B.

Teorema B. *Seja G um grupo finito.*

- (i) *Se $B_x(G)$ está contido em um subgrupo cíclico, para cada $x \in G$, então G' é abeliano. Além disso, G é supersolúvel.*
- (ii) *Se $|B_x(G)| \leq 59$, para cada $x \in G$, então G é solúvel.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração separadamente:

- (i) Suponha que $B_x(G)$ esteja contido em um subgrupo cíclico para cada $x \in G$. Inicialmente, vamos mostrar que o subgrupo comutador G' é abeliano. Seja $x \in G$. Pelo Teorema 3.1.3 (iii) temos que $\langle B_x(G) \rangle$ é um subgrupo cíclico e normal em G . Além disso, pela Proposição 1.1.1, $C_G(\langle B_x(G) \rangle)$ é um subgrupo normal em G e $G/C_G(\langle B_x(G) \rangle)$ isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}(\langle B_x(G) \rangle)$, que é abeliano. Então, $G' \leq C_G(\langle B_x(G) \rangle)$, para cada $x \in G$. Como o $\Gamma(G) = \bigcup_{x \in G} B_x(G)$, segue que todo comutador de G comuta com todos os elementos de G' . Consequentemente, G' é abeliano.

Agora, vamos obter uma série normal cíclica para o grupo G . Suponha que os elementos x_1, \dots, x_k geram o grupo G . Defina

$$N_i = \langle B_{x_1}(G) \rangle \dots \langle B_{x_i}(G) \rangle, i = 1, \dots, k.$$

Pelo Lema 3.3.2, temos que $N_k = \langle B_{x_1}(G) \rangle \dots \langle B_{x_k}(G) \rangle = G'$, e assim,

$$1 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G'$$

é uma série cíclica em que cada termo é normal em G . Além disso, como G é finito, G/G' possui série (normal) de subgrupos

$$G' = H_1 \leq \dots \leq H_l = G,$$

onde cada quociente H_{j+1}/H_j é cíclico para cada $j = 1, \dots, l-1$. Portanto, G é supersolúvel.

- (ii) Suponha que $\beta(G) \leq 59$, mas G não é solúvel. Considere G um contraexemplo de ordem minimal. Se existir N um subgrupo normal próprio não trivial de G , decorre do Lema 3.3.6 (i) que $\beta(N), \beta(G/N) \leq 59$. Como $|N|, |G/N| < |G|$, isso implica que N e G/N são solúveis e, então, G seria solúvel. Portanto, G é um grupo simples em que cada subgrupo próprio é solúvel. Então, G é um grupo da lista de Thompson (Teorema 1.3.6). Pela Proposição 4.2.11, $\beta(G) > 59$, uma contradição.

A demonstração está completa. □

Prova do Teorema C

Nesta seção, investigamos grupos finitos G que satisfazem a seguinte propriedade: para cada $x \in G$, existe um primo $q = q(x)$ tal que o conjunto $B_x(G)$ é constituído apenas por q -elementos. Pelo Teorema 3.1.3, essa propriedade implica que todos os comutadores de G têm ordem potência de primo.

Para avançar na prova do Teorema C, é necessário compreender quais grupos simples não abelianos podem satisfazer a propriedade de que todos os comutadores têm ordem potência de primo. Essa classificação é devida a [26, Proposição 4.5] e é recordada a seguir.

Lema 4.2.12. *Se G é um grupo simples não abeliano tal que todo comutador tem ordem potência de primo, então G é isomorfo a um dos seguintes grupos: $\text{PSL}(2, q)$, $q \in \{4, 7, 8, 9, 17\}$, $\text{Sz}(8)$ ou $\text{Sz}(32)$.*

O lema a seguir é utilizado para excluir os grupos simples minimais listados acima, mostrando que eles não satisfazem a propriedade considerada (do enunciada do Teorema C).

Lema 4.2.13. *Seja G um dos seguintes grupos: $\text{PSL}(2, q)$, $q \in \{4, 7, 8, 17\}$, $\text{Sz}(8)$ ou $\text{Sz}(32)$. Então, existe $x \in G$ tal que os comutadores em $B_x(G)$ não são, exclusivamente, potências de um mesmo primo.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3.6 (i), basta mostrar que existe um subgrupo H de G e um elemento $x \in H$ tal que os comutadores em $B_x(H)$ não são, exclusivamente, potência de um mesmo primo.

Primeiro, suponha que $G = \text{PSL}(2, 4)$. Em particular, $G \cong A_5$. No Exemplo 3.2.5, vimos que para $(1\ 2\ 3) \in A_5$, $B_{(1\ 2\ 3)}(A_5) = A_5$ contém elementos de ordem 2, 3 e 5.

Agora, considere $G = \text{PSL}(2, 7)$ ou $\text{PSL}(2, 17)$. Pelo Teorema 1.3.3, G contém uma cópia de S_4 . Usando o Exemplo 3.2.4, para $(1\ 2) \in S_4$, $B_{(1\ 2)}(S_4) = A_4$ possui elementos de ordens 2 e 3.

Assuma, em seguida, que $G = \text{PSL}(2, 8)$. Por [28], existe $x \in G$ tal que $B_x(G) = G$ contém elementos de ordens potência de 2, 3 e 7.

Passemos agora ao caso $G = \text{Sz}(8)$. Por [62], temos que

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^4 = (ab)^5 = (ab^2)^7 = (abab^2ab^2ab^3)^5 = (abab^3ab^2)^7 = 1 \rangle.$$

Mostraremos que os comutadores $[a, b^2]$ e $[a, b^2ab^3]$ que estão em $B_a(G)$ têm ordens 7 e 5, respectivamente. Note que,

$$[a, b^2] = ab^2ab^2 = (ab^2)^2 \in \langle ab^2 \rangle$$

e

$$[a, b^2ab^3] = a^{-1}(b^2ab^3)^{-1}a(b^2ab^3) = abab^2ab^2ab^3.$$

Então, pelas relações acima, $|[a, b^2]| = 7$ e $|[a, b^2ab^3]| = 5$.

Para finalizar, suponha que $G = \text{Sz}(32)$. Novamente por [62], os geradores padrão a e b de G satisfazem:

$$|a| = 2, |b| = 4, |ab| = 5 \text{ e } |ab^2| = |abab^2ab^3| = 25$$

Mostraremos que os comutadores $[a, b^2]$ e $[b^2, abab^2abab]$ que estão em $B_{b^2}(G)$ têm ordens 25 e 31, respectivamente. De fato,

$$[a, b^2] = ab^2ab^2 \in \langle ab^2 \rangle,$$

e assim, $|[a, b^2]| = 25$. Em [62], o subgrupo $H = \langle b^2, abab^2abab \rangle$ de G é isomorfo a um grupo diedral de ordem 62. Então,

$$1 \neq [b^2, abab^2abab] \in H' \cong C_{31},$$

e portanto, $|[b^2, abab^2abab]| = 31$. Completamos a demonstração. \square

Em seguida, provamos uma proposição que fornece um critério de solubilidade.

Proposição 4.2.14. *Seja G um grupo finito em que, para cada $x \in G$, existe um primo $p = p(x)$ tal que $B_x(G)$ consiste de p -elementos. Então G é solúvel.*

Demonstração. Suponha que o resultado seja falso e seja G um contraexemplo de ordem minimal. Em princípio, provaremos que G é um grupo simples minimal. Suponha que N seja um subgrupo normal não trivial próprio de G . Pelo Lema 3.3.6 (ii), a hipótese é válida para subgrupos e quocientes. Como $|G/N|$ e $|N| < |G|$, segue-se que N e G/N são solúveis e, portanto, G seria solúvel. Em particular, G é simples e todo subgrupo próprio é solúvel. Além disso, pelo Teorema 3.1.3 (ii), todo comutador tem ordem potência de primo. De acordo com o Lema 4.2.12 e o Teorema 1.3.6, deduzimos que G é isomorfo a um dos seguintes grupos: $\text{PSL}(2, q)$, $q \in \{4, 7, 8, 17\}$, $\text{Sz}(8)$ ou $\text{Sz}(32)$. Então, pelo Lema 4.2.13, existe um elemento $x \in G$ tal que os comutadores em $B_x(G)$ não são, exclusivamente, potências de um mesmo primo. Essa contradição completa a demonstração. \square

Agora estamos prontos para demonstrar o resultado.

Teorema C. *Seja G um grupo finito. Então, G' é um p -grupo (para algum primo p) se, e somente se, para cada $x \in G$ existe um primo $q = q(x)$ tal que $B_x(G)$ consiste de q -elementos.*

Demonstração. Se G' é um p -grupo, então todos os elementos em $B_x(G) \subseteq G'$ são, exclusivamente, p -elementos, para cada $x \in G$.

Resta provar a implicação inversa. Suponhamos, por contradição, que a afirmação seja falsa. Considere G um contraexemplo de ordem minimal, ou seja, G é um grupo finito tal que, para cada $x \in G$, existe um primo $q = q(x)$ com $B_x(G)$ consistindo, exclusivamente, de q -elementos, mas G' não é um p -grupo, para algum primo p . Em virtude da Proposição 4.2.14, temos que G é solúvel. Seja Q um subgrupo normal minimal de G contido em G' . Por G ser solúvel, Q é um q -grupo abeliano elementar para algum primo $q \in \pi(G')$. Devido a minimalidade de G , o quociente G'/Q é um p -grupo para algum $p \in \pi(G')$. Note que, se $q = p$, então G' seria um q -grupo, o que contradiz nossa suposição. Portanto, $q \neq p$.

Assim, temos que $G' = PQ$, onde P é um p -subgrupo de Sylow de G' . Pelo Teorema do Subgrupo Focal (Teorema 2.4.6), existem elementos $x, y, a, b \in G$ tais que $1 \neq [x, a] \in P$ e $1 \neq$

$[y, b] \in Q$. Em particular, $[x, a] \in B_x(G) \cap B_a(G)$ e $[y, b] \in B_y(G) \cap B_b(G)$. Consequentemente, todos os elementos de $B_x(G)$ e $B_a(G)$ são p -elementos; e todos os elementos de $B_y(G)$ e $B_b(G)$ são q -elementos. Com isso, $[x, b] \in B_x(G) \cap B_b(G) = 1$ e $[y, a] \in B_y(G) \cap B_a(G) = 1$. Assim:

- $[xy, a] = [x, a]^y [y, a] = [x, a]^y \neq 1$ é um p -elemento;
- $[xy, b] = [x, b]^y [y, b] = [y, b] \neq 1$ é um q -elemento.

Como os comutadores $[xy, a]$ e $[xy, b]$ estão em $B_{xy}(G)$. Essa contradição final completa a demonstração. \square

Prova do Teorema D

Começamos com o seguinte lema, que é uma consequência (ou escólio) da Equação das Classes.

Lema 4.2.15. *Seja G um p -grupo finito e $x \in G \setminus Z(G)$. Suponha que $|B_x(G)|$ é uma potência de p . Então $1 \neq B_x(G) \cap Z(G) \leq G$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3.8, $B_x(G) \cap Z(G)$ é um subgrupo de G . O que resta é provar que esse subgrupo é não trivial, ou seja, $B_x(G) \cap Z(G) \neq 1$. Para isso, suponhamos, por contradição, que $B_x(G) \cap Z(G) = 1$. Considerando que $|B_x(G)|$ é uma potência de p , digamos $|B_x(G)| = p^n$ para algum inteiro positivo n . Como o conjunto $B_x(G)$ é normal (Teorema 3.1.3 (iii)), existem elementos y_1, \dots, y_t tais que $B_x(G)$ pode ser escrito como a seguinte união disjunta

$$B_x(G) = y_1^G \cup y_2^G \cup \dots \cup y_t^G,$$

onde sem perda de generalidade podemos assumir que $y_1 = 1$.

Argumentando como na prova da Equação das Classes [52, p. 38], deduzimos que

$$|B_x(G)| = \sum_{i=1}^t [G : C_G(y_i)],$$

onde $|y_i^G| = [G : C_G(y_i)]$ é uma potência de p . Como assumimos que $B_x(G) \cap Z(G) = 1$, então apenas $|y_1^G| = 1$ e

$$p^n \equiv 1 \pmod{p},$$

o que é impossível. Completamos a demonstração. \square

Observação 4.2.16. *Seja G o 65º grupo de ordem 729 ($= 3^6$) na Small Groups Library do GAP [28]. Nesse grupo, existe $y \in G$ tal que $|B_y(G)| = 6$ e $1 \neq B_y(G) \cap Z(G)$, o que não contradiz o lema anterior, pois 6 não é uma potência de 3. Além disso, há um elemento $x \in G$ tal que $|B_x(G)| = 7$ e $B_x(G) \cap Z(G) = 1$. Esses exemplos mostram que, em um p -grupo finito, quando $|B_x(G)|$ não é uma potência de p , o comportamento de $B_x(G) \cap Z(G)$ pode variar: pode ser trivial ou não trivial. Assim, o Lema 4.2.15 não se aplica nesse caso.*

A seguir, ω denota a classe de nilpotência de $W(p, n) = (\dots(C_p \wr C_p) \wr \dots) \wr C_p$ com n fatores de C_p .

Proposição 4.2.17. *Seja n um inteiro positivo. Se G é um p -grupo tal que $\beta(G) \leq p^n$, então G é nilpotente de classe, no máximo, $\omega + 1$.*

Demonstração. Considere $\beta(G) = m$. De acordo com a Proposição 4.2.1, deduzimos que $G/Z(G)$ é isomorfo a $H_1 \times \dots \times H_r$, onde H_i é um subgrupo de S_m , $i \in \{1, \dots, r\}$. Como $m \leq p^n$, podemos identificar S_m como um subgrupo de S_{p^n} . Além disso, pelo Teorema 1.1.3, todo H_i pode ser visto como um subgrupo de $W(p, n)$. Portanto, G é nilpotente de classe, no máximo, $\omega + 1$. \square

Teorema D. *Sejam G um p -grupo finito e n um inteiro positivo.*

- (i) *Se $|B_x(G)| = p^n$, para algum $x \in G$, então $B_x(G)$ é um subgrupo normal de G .*
- (ii) *Se X é um conjunto de geradores de G tal que $|B_x(G)|$ é um divisor de p^n , para cada $x \in X$, então G é nilpotente de classe, no máximo, $n + 1$.*

Demonstração. Faremos a demonstração separadamente:

- (i) Temos que $|B_x(G)| = p^n$, para algum inteiro positivo n . Assim, o conjunto $B_x(G)$ é não trivial. Então, pelo Lema 4.2.15, $N := B_x(G) \cap Z(G)$ é um subgrupo normal não trivial de G . Vamos provar que $B_x(G)$ é um subgrupo normal de G por indução sobre n .

Para o caso $n = 1$, temos $|B_x(G)| = p$ e, portanto, $B_x(G) = N$ é um subgrupo central.

Suponha agora que $n \geq 2$. Considerando $\bar{G} = G/N$ e $\bar{x} = xN$, obtemos que $B_{\bar{x}}(\bar{G})$ é o conjunto das classes laterais yN , onde $y \in B_x(G)$. Logo,

$$|B_{\bar{x}}(\bar{G})| = \frac{|B_x(G)|}{|N|} < p^n.$$

Pela hipótese de indução, $B_{\bar{x}}(\bar{G})$ é um subgrupo normal de \bar{G} .

Sejam $\alpha = a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb$ e $\beta = c^{-1}x^{-1}cd^{-1}xd$ em $B_x(G)$. Para concluir que $B_x(G)$ é um subgrupo normal, basta mostrar que $\alpha\beta \in B_x(G)$, pois esse conjunto já contém o elemento neutro, é fechado por inversão e normal. Como $B_{\bar{x}}(\bar{G})$ é subgrupo de \bar{G} , existem elementos $u, v \in G$ tais que

$$\alpha\beta N = (u^{-1}x^{-1}uv^{-1}xv)N \in B_{\bar{x}}(\bar{G}).$$

Então, $\alpha\beta = (u^{-1}x^{-1}uv^{-1}xv)z$, para algum $z := x^{-1}g^{-1}xg \in N$ (Teorema 3.1.3 (i)). Portanto,

$$\alpha\beta = (u^{-1}x^{-1}uv^{-1}xv)(x^{-1}g^{-1}xg) = u^{-1}x^{-1}u(vg)^{-1}x(vg) \in B_x(G).$$

- (ii) Suponha que G é um grupo não abeliano. Temos que $|B_x(G)|$ divide p^n , para cada $x \in X$, ou seja, pelo item (i), o conjunto $B_x(G)$ é um subgrupo normal de G de ordem, no máximo, p^n , para cada $x \in X$. Vamos provar, por indução sobre n , que G é nilpotente de classe, no máximo, $n+1$.

Se $n = 1$, então $B_x(G) \subseteq Z(G)$, para todo $x \in X$. Pelo Lema 3.3.2, temos $G' \leq Z(G)$ e, portanto G é nilpotente de classe 2.

Suponha agora que $n \geq 2$. Considere $\bar{G} = G/Z(G)$. Para concluir, é suficiente mostrar que \bar{G} é nilpotente de classe, no máximo, n . Seja $x \in X$, podemos escrever

$$B_{\bar{x}}(\bar{G}) = \frac{B_x(G)Z(G)}{Z(G)},$$

onde $\bar{x} = xZ(G)$. Então, pelo Lema 4.2.15, temos que

$$\left| \frac{B_x(G)Z(G)}{Z(G)} \right| = \frac{|B_x(G)|}{|B_x(G) \cap Z(G)|} \leq p^{n-1}.$$

Portanto, $|B_{\bar{x}}(\bar{G})|$ divide p^{n-1} , para cada $x \in X$. Pela hipótese de indução, \bar{G} é nilpotente de classe, no máximo, n .

A demonstração está completa. □

Prova do Teorema E

Para a demonstração do Teorema E, utilizaremos dois resultados fundamentais sobre p -grupos powerful, que enunciaremos a seguir. Recordamos que um p -grupo finito G é chamado de

powerful se $G' \leq G^p$ quando p é ímpar, ou $G' \leq G^4$ quando $p = 2$. O primeiro resultado foi retirado de [25, Lema 2.2 (ii)].

Lema 4.2.18. *Seja G um p -grupo finito powerful 2-gerado. Então todo subgrupo de G também é powerful.*

O segundo resultado a seguir foi retirado de [45, Teorema 1.12, p. 490]. Recordamos que o número mínimo de geradores de um p -grupo finito G é denotado por $d(G)$.

Lema 4.2.19. *Seja H um subgrupo de um p -grupo finito powerful G . Então $d(H) \leq d(G)$.*

Estamos agora em condições de demonstrar o resultado.

Teorema E. *Sejam p um primo ímpar e G um p -grupo finito gerado por $X \subseteq G$. Se $B_x(G)$ está contido em um subgrupo powerful 2-gerado, para cada $x \in X$, então G' é powerful.*

Demonstração. Considere o conjunto de geradores $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ e defina

$$N_i = \langle B_{x_i}(G) \rangle, 1 \leq i \leq k.$$

Pelo Lema 3.3.2, temos que

$$G' = N_1 \dots N_k.$$

Por hipótese, cada subconjunto $B_{x_i}(G)$ está contido em um subgrupo powerful 2-gerado. Pelo Lema 4.2.18, segue que cada N_i é também um subgrupo powerful, ou seja, $N_i^p = \Phi(N_i)$. Além disso, pelo Lema 4.2.19, cada N_i é gerado por, no máximo, dois elementos. Assim, o quociente N_i/N_i^p é também 2-gerado e, portanto, isomorfo a um dos grupos, C_p ou $C_p \times C_p$.

Agora, mostraremos que $[G', N_i] \leq N_i^p$. Para isso, consideremos o subgrupo

$$M_i := C_G(N_i/N_i^p) = \{g \in G \mid [g, N_i] \leq N_i^p\},$$

isto é, o núcleo da ação de G sobre N_i/N_i^p induzida pela conjugação. Assim, G/M_i é isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}(N_i/N_i^p)$ e, portanto, pelo Lema 1.3.1, $|\text{Aut}(N_i/N_i^p)| = p - 1$ ou $p(p^2 - 1)(p - 1)$. Como G/M_i é um p -grupo, $|G/M_i| = 1$ ou $|G/M_i| = p$. Logo, $M_i = G$ ou M_i é maximal em G . Em ambos os casos, $G' \leq M_i$. Pela definição de M_i concluímos que $[G', N_i] \leq N_i^p$.

Por fim, temos:

$$G'' = [G', G'] = [G', N_1 \dots N_k] = [G', N_1] \dots [G', N_k] \leq N_1^p \dots N_k^p \leq (G')^p,$$

pois cada N_i é normal em G e N_i^p está contido em $(G')^p$. Isso mostra que G' é powerful, o que completa a demonstração. \square

Capítulo 5

Caracterizações de grupos finitos por subconjuntos de comutadores

Neste capítulo, provamos que várias propriedades teóricas de um grupo finito G podem ser detectadas considerando os conjuntos $K_x(G)$ quando x varia em subconjuntos de elementos de ordens específicas em G . Todos os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos em colaboração com Raimundo Bastos e Claude Marion em [21].

5.1 Motivação e resultados principais

Estudaremos duas classes de exemplos. A primeira diz respeito a grupos que satisfazem a propriedade da torre de Sylow, analisados em termos dos conjuntos $K_x(G)$, nos quais x varia entre elementos de ordens específicas. A segunda classe aborda critérios de nilpotência para os subgrupos $\alpha_k(G)$ e $\beta_k(G)$, considerando o comportamento dos conjuntos $K_x(G)$ quando x é um α_k - ou β_k -comutador cuja ordem é uma potência de primo.

5.1.1 Propriedade da torre de Sylow

Seja G um grupo finito (não trivial). Escreva o conjunto de primos $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, onde $p_1 > p_2 > \dots > p_r$. Recorde que o grupo G satisfaz a propriedade da torre de Sylow se, e somente se, existem P_1, P_2, \dots, P_r tais que cada P_i é um p_i -subgrupo de Sylow de G e $P_k \dots P_2 P_1$ é normal em G para $1 \leq k \leq r$. A propriedade da torre de Sylow é preservada ao considerar subgrupos e quocientes (veja, por exemplo, [13, Cap. 6, Seç. 4]). Recordamos que $K_x(G) = \{[x, g] \mid g \in G\}$.

Obtemos as seguintes caracterizações de um grupo que satisfaz a propriedade da torre de Sylow.

Teorema F. *Seja G um grupo finito. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) G satisfaz a propriedade da torre de Sylow.
- (ii) Para cada grupo quociente \bar{G} de G e cada p -elemento \bar{x} de \bar{G} , $K_{\bar{x}}(\bar{G})$ consiste de p -elementos, onde $p = \max\{\pi(\bar{G})\}$.
- (iii) Para cada subgrupo H de G e cada p' -elemento x de H , $K_x(H)$ consiste de p' -elementos, onde $p = \min\{\pi(H)\}$.

5.1.2 Critérios de nilpotência para residuais nilpotentes

A nilpotência em grupos finitos admite diversas caracterizações. Uma das mais conhecidas é que um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, pode ser escrito como o produto direto de seus subgrupos de Sylow. Dessa caracterização decorre a importante consequência de que quaisquer dois elementos com ordens coprimas em G comutam; em particular, tem-se $|ab| = |a||b|$ para quaisquer elementos $a, b \in G$ cujas ordens sejam coprimas. Um resultado elementar (e notável) de Baumslag e Wiegold [9] mostra que essa propriedade que, a priori, parece apenas uma consequência da nilpotência é de fato suficiente para caracterizá-la:

Teorema 5.1.1 (Baumslag, Wiegold, [9]). *Seja G um grupo finito. Suponha que $|ab| = |a||b|$ para quaisquer elementos $a, b \in G$ de ordens coprimas. Então G é nilpotente.*

Desde então, diversas extensões e variantes têm surgido em artigos e teses de doutorado. Neste contexto, Bastos e Shumyatsky [8] demonstraram o seguinte resultado.

Teorema 5.1.2 (Bastos, Shumyatsky, [8]). *Seja G um grupo finito. Suponha que $|ab| = |a||b|$ para quaisquer comutadores a, b de ordens coprimas. Então G' é nilpotente.*

No mesmo trabalho, os autores fizeram a seguinte conjectura, que permanece em aberto.

Conjectura 5.1.3. *Sejam w uma palavra comutador multilinear e G um grupo finito tal que $|ab| = |a||b|$ para todos w -valores a e b de ordens coprimas em G . Então, o subgrupo verbal $w(G)$ é nilpotente.*

De uma perspectiva diferente, Monakhov [49] introduziu novos critérios de nilpotência baseados em elementos primários.

Teorema 5.1.4 (Monakhov, [49]). *Seja G um grupo finito.*

- (i) *Suponha que $|ab| \geq |a||b|$ para quaisquer elementos primários $a, b \in G$ de ordens coprimas. Então G é nilpotente.*

(ii) *Suponha que $|ab| \geq |a||b|$ para quaisquer comutadores primários $a, b \in G$ de ordens coprimas. Então G' é nilpotente.*

Com relação à Conjectura 5.1.3, Bastos, Monetta e Shumyatsky [7] mostraram que a resposta é positiva para a palavra γ_k -comutador. Mais precisamente, demonstraram o resultado a seguir (que, em particular é uma extensão dos Teoremas 5.1.1 e 5.1.2).

Teorema 5.1.5 (Bastos, Monetta, Shumyatsky, [7]). *Sejam G um grupo finito e k um inteiro positivo. Então, $\gamma_k(G)$ é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para quaisquer γ_k -comutadores a, b de ordens coprimas.*

Andrade e Dantas [27] obtiveram uma condição de nilpotência para o residual nilpotente de um grupo finito. Para relembrar a definição de comutadores coprimos, consulte o Capítulo 3, Seção 2.5.

Teorema 5.1.6 (Andrade, Dantas, [27]). *Seja G um grupo finito. Suponha que $|ab| = |a||b|$ para potência de δ_1^* -comutadores a, b de ordens coprimas. Então $\gamma_\infty(G)$ é nilpotente.*

No mesmo artigo, os autores fizeram o seguinte questionamento. Recorde que $D_k(G)$ é o k -ésimo termo da série de Fitting inferior de G .

Questão 5.1.7. *Seja k um inteiro não negativo. Seja G um grupo finito em que $|ab| = |a||b|$ quando os elementos a, b são (potências de) δ_k^* -comutadores de ordens coprimas. É verdade que o subgrupo $D_k(G)$ é nilpotente?*

Veja que a resposta da questão acima é afirmativa para $k = 0$, pelo Teorema 5.1.1; e para $k = 1$, pelo Teorema 5.1.6 ("com as potências"). Ainda, para $k = 1$, Bastos e Monetta em [6] obtiveram uma resposta positiva à Questão 5.1.7 ("sem as potências"), aprimorando o Teorema 5.1.6.

Teorema 5.1.8 (Bastos, Monetta, [6]). *Seja G um grupo finito. Então, $\gamma_\infty(G)$ é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$, quando a e b são δ_1^* -comutadores de ordens coprimas.*

Em [51], Monetta e Tortora estenderam o Teorema 5.1.5 e contribuíram para a Conjectura 5.1.3 para uma família de palavras do tipo comutador.

Teorema 5.1.9 (Monetta, Tortora, [51]). *Seja $w = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$ uma palavra comutador simples com $i_1 \neq i_j$ para cada $j \in \{2, \dots, k\}$. Seja G um grupo finito. Então, $w(G)$ é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para todos w -valores $a, b \in G$ de ordens coprimas.*

Em 2020, Alves e Shumyatsky [17] obtiveram o seguinte resultado para grupos solúveis finitos, que também contribui para a Conjectura 5.1.3.

Teorema 5.1.10 (Alves, Shumyatsky, [17]). *Seja G um grupo solúvel finito. Então, $G^{(k)}$ é nilpotente se, e somente se, $|ab| = |a||b|$ para quaisquer δ_k -comutadores a, b de ordens coprimas.*

Vale mencionar as seguintes teses de doutorado relacionadas ao Teorema de Baumslag e Wiegold: em [50], Monetta explorou o conceito em termos de subgrupos verbais e comutadores coprimos; em [14], Cocke estudou algumas classes de problemas numa perspectiva complementar; e, mais recentemente, em [16], Alves investigou os termos da série derivada de grupos solúveis. Além disso, para outras versões, veja, entre outros, os artigos [50, 16, 2, 42, 41, 14, 47, 6, 48, 5].

Obtemos um critério para que um grupo finito seja metanilpotente.

Teorema G. *Sejam G um grupo finito e $k \geq 2$ um inteiro. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $\gamma_\infty(G)$ é nilpotente.
- (ii) $\alpha_k(G)$ é nilpotente.
- (iii) Para cada primo p e cada α_k -comutador x de ordem potência de p , $K_x(G)$ consiste de p -elementos.

Esse resultado, em princípio, leva em conta menos comutadores (não é necessário verificar todos os γ_k^* -comutadores). Além disso, leva em conta apenas comutadores de elementos primários.

Em seguida, obtemos um critério para que o k -ésimo termo da série de Fitting inferior $D_k(G)$ seja nilpotente quando o grupo G é solúvel.

Teorema H. *Seja G um grupo solúvel finito. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $D_k(G)$ é nilpotente.
- (ii) $\beta_k(G)$ é nilpotente.
- (iii) Para cada primo p e cada β_k -comutador x de ordem potência de p , $K_x(G)$ consiste de p -elementos.

5.2 Demonstrações dos resultados

Prova do Teorema F

Começamos com o seguinte critério para que um grupo finito seja p -nilpotente.

Proposição 5.2.1. *Sejam G um grupo finito não trivial e $p \in \pi(G)$. Então, G é p -nilpotente se, e somente se, para todo p' -elemento $x \in G$, $K_x(G)$ consiste de p' -elementos.*

Demonstração. Suponha que G seja p -nilpotente. Seja $x \in G$ um p' -elemento. Como G é p -nilpotente, cada p' -elemento de G está contido em $O_{p'}(G)$. Em particular, $x \in O_{p'}(G)$. Como $O_{p'}(G)$ é normal em G , segue que $K_x(G) \subseteq O_{p'}(G)$.

Por outro lado, suponha que para cada p' -elemento $x \in G$, $K_x(G)$ consiste em p' -elementos. Suponha, por contradição, que G não é p -nilpotente, então G não possui um p -complemento normal. Pelo teorema do complemento de Frobenius, existe um p -subgrupo não trivial H tal que $N_G(H)/C_G(H)$ não é um p -grupo. Podemos, portanto, escolher um p' -elemento $x \in N_G(H)$ e um elemento $h \in H$ tal que $1 \neq [x, h] \in H$. No entanto, por definição, $[x, h] \in K_x(G)$ deveria ser um p' -elemento, uma contradição. O resultado está demonstrado. \square

O corolário a seguir é uma consequência imediata do Teorema 3.1.6 e da Proposição 5.2.1.

Corolário 5.2.2. *Seja G um grupo finito. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) G é nilpotente.
- (ii) Para qualquer primo p e p -elemento $x \in G$, $K_x(G)$ consiste de p -elementos.
- (iii) Para qualquer primo p e p' -elemento $x \in G$, $K_x(G)$ consiste de p' -elementos.

Demonstração. Se a condição (i) for válida, então os subgrupos de Sylow de G são normais, e as condições (ii) e (iii) são satisfeitas. Suponha que a condição (ii) seja válida. Pelo Teorema 3.1.6, todo subgrupo de Sylow de G é normal. A condição (i) é então satisfeita. Suponha, finalmente, que a condição (iii) seja válida. Pela Proposição 5.2.1, G é p -nilpotente para todo primo p . Em particular, G é nilpotente e a condição (i) é satisfeita. \square

Dado um primo p , um grupo finito G é chamado de p -decomponível se G pode ser escrito como $G = P \times O_{p'}(G)$, onde P é um p -subgrupo Sylow de G .

Corolário 5.2.3. *Sejam G um grupo finito não trivial e $p \in \pi(G)$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) G é p -decomponível.
- (ii) Para todo p -elemento $x \in G$ e todo p' -elemento $y \in G$, $K_x(G)$ consiste em p -elementos e $K_y(G)$ consiste em p' -elementos.

Demonstração. Suponha que G seja p -decomponível. Então $G = P \times O_{p'}(G)$, onde P é um p -subgrupo Sylow de G . Seja x um p -elemento de G e y um p' -elemento de G . Como P é subgrupo normal em G , $K_x(G) \subseteq P$. Da mesma forma, $K_y(G) \subseteq O_{p'}(G)$. O resultado segue nessa direção.

Suponha agora que para cada p -elemento x de G , $K_x(G)$ consiste em p -elementos e, para cada p' -elemento y de G , $K_y(G)$ consiste em p' -elementos. Seja P um p -subgrupo de Sylow de G . Pelo Teorema 3.1.6, $P = O_p(G)$. Além disso, pela Proposição 5.2.1, G é p -nilpotente. Portanto, $G = P \times O_{p'}(G)$ e G é p -decomponível. \square

Agora estamos em condições de provar o resultado.

Teorema F. *Seja G um grupo finito. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) G satisfaz a propriedade da torre de Sylow.
- (ii) Para cada grupo quociente \bar{G} de G e cada p -elemento \bar{x} de \bar{G} , $K_{\bar{x}}(\bar{G})$ consiste de p -elementos, onde $p = \max\{\pi(\bar{G})\}$.
- (iii) Para cada subgrupo H de G e cada p' -elemento x de H , $K_x(H)$ consiste de p' -elementos, onde $p = \min\{\pi(H)\}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, G não é trivial, caso contrário o resultado é imediato. Sejam $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, onde $p_1 > p_2 > \dots > p_r$ e P_i um p_i -subgrupo de Sylow de G , para $i = 1, 2, \dots, r$.

Inicialmente mostraremos que a condição (i) implica a condição (ii). Suponha que G satisfaça a propriedade da torre de Sylow. Seja N um subgrupo normal de G e, defina $\bar{G} = G/N$. Sejam p o maior primo que divide $|\bar{G}|$ e \bar{x} um p -elemento de \bar{G} . Como G satisfaz a propriedade da torre de Sylow, \bar{G} também satisfaz, \bar{G} tem um p -subgrupo de Sylow normal, digamos \bar{P} . Pela normalidade de \bar{P} , $\bar{x} \in \bar{P}$ e $K_{\bar{x}}(\bar{G}) \subseteq \bar{P}$. A condição (ii) é portanto satisfeita.

Agora mostraremos que a condição (ii) implica a condição (i). Suponha que (ii) seja válida. Argumentaremos por indução em r . Como $p_1 = \max\{\pi(G)\}$, pela propriedade (ii), para cada $x \in P_1$, o conjunto $K_x(G)$ consiste em p_1 -elementos. Pelo Teorema 3.1.6, temos que P_1 é normal em G .

Suponha agora que $1 \leq i < r$ e que a propriedade (i) seja válida para grupos de ordens com i fatores primos e que satisfaçam a hipótese (ii). Observe que $\bar{G} = G/P_1$ tem ordem com $r - 1$ fatores primos e satisfaz a propriedade (ii). Por indução, \bar{G} satisfaz a propriedade da torre de Sylow e, portanto, G também satisfaz a propriedade da torre de Sylow. A propriedade (i) é, portanto, satisfeita.

A seguir mostraremos que a condição (i) implica a condição (iii). Suponha que G satisfaz a propriedade da torre de Sylow. Seja H um subgrupo de G . Como G satisfaz a propriedade da torre de Sylow, H também satisfaz e, então H é p -nilpotente, onde p é o menor primo divisor de $|H|$. Segue pela Proposição 5.2.1 que para cada p' -elemento $x \in H$, $K_x(H)$ consiste de p' -elementos. A propriedade (iii) é, portanto, satisfeita.

Finalmente mostraremos que a condição (iii) implica a condição (i). Suponha que para cada subgrupo H de G e cada p' -elemento x de H , o conjunto $K_x(H)$ consiste em p' -elementos, onde $p = \min\{\pi(H)\}$. Queremos mostrar que G satisfaz a propriedade da torre de Sylow. Vamos argumentar por indução sobre $|G|$. Temos que $p_r = \min\{\pi(G)\}$ e pela propriedade (iii) para cada p'_r -elemento $x \in G$, o conjunto $K_x(G)$ consiste em p'_r -elementos. Pela Proposição 5.2.1, G é p_r -nilpotente. Seja N um p_r -complemento normal de G . Como N satisfaz a propriedade (iii) e $|N| < |G|$, por hipótese de indução, N satisfaz a propriedade da torre de Sylow. Assim, N tem subgrupos de Sylow P_1, P_2, \dots, P_{r-1} que também são subgrupos de Sylow de G tais que $P_j \dots P_2 P_1$ é normal em N para $1 \leq j \leq r-1$. Em particular, para $1 \leq j \leq r-1$, $P_j \dots P_2 P_1$ é característico em N , e como N é normal em G , $P_j \dots P_2 P_1$ é de fato normal em G . Segue que G satisfaz a propriedade da torre de Sylow e a condição (i) é satisfeita. A demonstração está completa. \square

Prova do Teorema G

Pelo $p^a q^b$ -Teorema de Burnside (veja, por exemplo, [38, Teorema 7.8]), dado um grupo finito não trivial G com subgrupo comutador G' igual a G , conclui-se que $|G|$ é divisível por, pelo menos, três primos distintos. Recordemos que todo elemento primário de um grupo finito G é um α_1 -comutador. Para $k \geq 2$, seja Σ_{k-1} o conjunto de todos os elementos primários de G que são α_{k-1} -comutadores. Um elemento $x \in G$ é um α_k -comutador se existem $a \in \Sigma_{k-1}$ e um elemento primário $b \in G$ tais que $x = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. Definimos $\alpha_k(G)$ como o subgrupo de G gerado por todos os α_k -comutadores. O resultado abaixo é análogo a [7, Lema 4].

Lema 5.2.4. *Seja G um grupo finito não trivial tal que $G = G'$. Seja k um inteiro positivo. Fixe $q \in \pi(G)$. Então, G é gerado pelos α_k -comutadores de ordem potência de p , para primos $p \neq q$.*

Demonstração. Para cada primo $p \in \pi(G) \setminus \{q\}$, seja N_p o subgrupo gerado por todos os α_k -comutadores de ordens potência p . Em princípio, vamos mostrar que para cada $p \in \pi(G) \setminus \{q\}$, cada p -subgrupo de Sylow de G está contido em N_p . Se $k = 1$, então, por definição, cada elemento primário de G é um α_1 -comutador, e então cada p -subgrupo de Sylow de G está contido em N_p . Suponha agora que $k \geq 2$. Assuma, por contradição, que

existe um p -subgrupo de Sylow de G que não está contido em N_p . Como N_p é normal em G , podemos passar para o quociente G/N_p e assumir que $N_p = 1$. Agora, como $G = G'$, temos que G não possui um p -complemento normal. Pelo teorema do complemento de Frobenius, G contém um p -subgrupo H e um r -elemento $a \in N_G(H)$, para algum primo $r \neq p$, tal que $[H, a] \neq 1$. Pelo Lema 2.1.9,

$$1 \neq [H, a] = [H, \underbrace{a, \dots, a}_{(k-1)\text{vezes}}] \leq N_p,$$

uma contradição. Portanto, N_p contém todos os p -subgrupos de Sylow de G . Seja T o produto de todos os N_p para p variando no conjunto $\pi(G) \setminus \{q\}$. Então, G/T é um q -grupo, e portanto $G = T$, pois $G = G'$. Concluimos que G é gerado por todos os α_k -comutadores primários de ordem potência p para $p \neq q$. \square

Lema 5.2.5. *Seja G um grupo tal que $G/Z(G)$ é um grupo simples minimal. Seja $k \geq 2$. Então, existe um α_k -comutador x de ordem potência de 2 tal que a ordem de x módulo $Z(G)$ é 2.*

Demonstração. Seja $\bar{G} = G/Z(G)$. Pelo Teorema 1.3.6, temos que analisar cinco casos. Inicialmente mostraremos que em todos os casos, o quociente \bar{G} contém um subgrupo \bar{H} tal que $\bar{H} = \bar{A} \rtimes \bar{T}$, onde \bar{A} é 2-grupo abeliano elementar e \bar{T} é um grupo de ordem ímpar tal que $C_{\bar{T}}(\bar{A}) = 1$.

Suponha primeiro que \bar{G} é como no caso (i) do Teorema 1.3.6. Pelo Teorema 1.3.2, G contém um subgrupo $Q \rtimes K$ que é o produto semidireto de um 2-subgrupo de Sylow abeliano elementar Q de ordem 2^p e um subgrupo cíclico K de ordem $2^p - 1$.

Suponha agora que \bar{G} é um dos casos (ii), (iii) ou (v) do Teorema 1.3.6. Então, G contém uma cópia do grupo alternado A_4 , pelo Teorema 1.3.3 e o Lema 1.3.4.

Suponha finalmente, que \bar{G} é como no caso (iv) do Teorema 1.3.6. Pelo Teorema 1.3.5, G contém um grupo de Frobenius $Q \rtimes K$, onde Q é um 2-subgrupo de Sylow de ordem 2^{2p} e K é um subgrupo cíclico de ordem $(2^p - 1)$. Seja N um subgrupo normal minimal de $Q \rtimes K$ contido em Q . Como Q é solúvel, N é um 2-grupo abeliano elementar.

Portanto, em todos os casos, $G/Z(G)$ contém um subgrupo da forma

$$H/Z(G) = A/Z(G) \rtimes T/Z(G),$$

onde $A/Z(G)$ é um 2-grupo abeliano elementar e $T/Z(G)$ é um grupo de ordem ímpar tal que $C_{T/Z(G)}(A/Z(G)) = 1$.

Agora, como $T/Z(G)$ é um grupo de ordem ímpar, existe um primo q dividindo $|T|$ e um q -elemento $t \in T \setminus Z(G)$. Como A é um subgrupo normal nilpotente de H , A tem um 2-subgrupo Sylow normal em H , digamos P . Pelo Lema 2.1.9 e usando o fato de que $C_{T/Z(G)}(A/Z(G)) = 1$ obtemos

$$1 \neq [P, t] = [P, {}_{k-1}t].$$

Podemos então escolher um elemento $a \in P$ tal que o α_k -comutador $[a, {}_{k-1}t]$ seja não trivial. Consequentemente, $[a, {}_{k-1}t] \in P$ e $[a, {}_{k-1}t]Z(G)$ tem ordem 2. \square

Agora, estamos em condições de provar o resultado.

Teorema G. *Sejam G um grupo finito e $k \geq 2$ um inteiro. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $\gamma_\infty(G)$ é nilpotente.
- (ii) $\alpha_k(G)$ é nilpotente.
- (iii) Para cada primo p e cada α_k -comutador x de ordem potência de p , $K_x(G)$ consiste de p -elementos.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que a propriedade (i) implica a propriedade (ii). Suponha que $\gamma_\infty(G)$ é nilpotente. Precisamos mostrar que $\alpha_k(G)$ é nilpotente e, portanto, é suficiente mostrar que $\alpha_k(G) \leq \gamma_\infty(G)$. Seja x um α_k -comutador de G . Existe um α_{k-1} -comutador a e um elemento b de G tais que a e b são primários com ordens coprimas e $x = [a, b]$. Como o quociente $G/\gamma_\infty(G)$ é nilpotente e as ordens dos elementos $a\gamma_\infty(G)$ e $b\gamma_\infty(G)$ são coprimas, segue que

$$a\gamma_\infty(G)b\gamma_\infty(G) = b\gamma_\infty(G)a\gamma_\infty(G),$$

ou seja, $x = [a, b] \in \gamma_\infty(G)$. Portanto, $\alpha_k(G) \leq \gamma_\infty(G)$.

Mostraremos, agora, que a propriedade (ii) implica a propriedade (iii). Suponha, portanto, que $\alpha_k(G)$ seja nilpotente. Sem perda de generalidade, $\alpha_k(G)$ não é trivial, caso contrário o resultado é imediato. Sejam $p \in \pi(\alpha_k(G))$ e x um α_k -comutador de G de ordem potência de p . Seja P o p -subgrupo de Sylow de $\alpha_k(G)$. Então, $x \in P$. Como P é característico em $\alpha_k(G)$ e $\alpha_k(G)$ é normal em G , segue que P é normal em G . Portanto, $K_x(G) \subseteq P$ consiste em p -elementos.

Finalmente, mostraremos que a propriedade (iii) implica a propriedade (i). Em princípio, consideremos o caso em que G é solúvel. Seja $h = h(G)$ a altura de Fitting de G . Iremos mostrar que $h \leq 2$, o que implica que $\gamma_\infty(G)$ é nilpotente. Suponhamos, por contradição, que $h \geq 3$. Pelo Lema 2.3.1, existe uma torre $P_1P_2P_3 \dots P_h$ de altura h em G . Como $P_2 = [P_2, P_1]$, segue que

$$P_2 = [P_2, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{(k-1) \text{ vezes}}]$$

é gerado por α_k -comutadores de G que são p_2 -elementos. Sejam x um α_k -comutador em P_2 e y um elemento em P_3 . Como P_2 normaliza P_3 e $K_x(G)$ consiste em p_2 -elementos, segue que $[x, y] \in K_x(G) \cap P_3 = 1$. Deduzimos que P_2 comuta com P_3 . Entretanto, $[P_3, P_2] = P_3$, pois $P_1 P_2 P_3 \dots P_h$ é uma torre. Isto é uma contradição, portanto $k \leq 2$ e o resultado é provado para o caso em que G é solúvel.

Agora mostraremos que G é, de fato, solúvel. Suponha, por contradição, que não seja o caso e assumamos que G é um contraexemplo de ordem minimal, ou seja, para cada primo p e para cada α_k -comutador x de ordem potência de p , o conjunto $K_x(G)$ consiste apenas de p -elementos. Além disso, todos os subgrupos próprios de G são solúveis, mas G não é solúvel. Em particular, tem-se que $G = G'$. Seja R o radical solúvel de G . Então G/R é simples não abeliano, e $\gamma_\infty(R)$ é nilpotente, pelo caso solúvel já tratado.

Seja $F(G)$ o subgrupo de Fitting de G . Agora, precisamos mostrar que $G/Z(G)$ é simples, ou seja, que $Z(G) = R$. Isso é imediato se $R = 1$. Suponha que $R \neq 1$. Em particular, $F \neq 1$. Escolha $q \in \pi(F(G))$. Pelo Lema 5.2.4, G é gerado pelos α_k -comutadores de ordem de potência p para primos $p \neq q$. Sejam Q o q -subgrupo de Sylow de $F(G)$ e x um α_k -comutador de ordem potência p para algum primo $p \neq q$. Note que Q é característico em $F(G)$ e $F(G)$ é normal em G , e assim Q é normal em G . Então, $[x, y] \in K_x(G) \cap Q = 1$, para cada $y \in Q$. Segue que, $Q \leq Z(G)$. Isso acontece para cada escolha de $q \in \pi(F(G))$, e assim $F(G) = Z(G)$. Como $\gamma_\infty(R) \leq F(G) = Z(G)$, temos que R é nilpotente e $R \leq F(G) = Z(G)$. Portanto, $R = Z(G)$.

Como $G/Z(G)$ é um grupo simples minimal, pelo Lema 5.2.5, existe um α_k -comutador x de ordem de potência de 2 tal que a imagem de x em $G/Z(G)$ tem ordem 2. Além disso, pelo Lema 2.1.6, existe um elemento $g \in G$ tal que a imagem do elemento $[x, g] \in K_x(G)$ em $G/Z(G)$ tem ordem um primo ímpar. Isto é uma contradição. Concluimos que, se G satisfaz a propriedade (iii), então G é solúvel. A prova agora está completa. \square

Prova do Teorema H

Antes de apresentarmos os lemas a seguir, recorde que $D_k(G)$ é o k -ésimo termo da série de Fitting inferior de G . Lembramos também que todo elemento primário de um grupo finito G é um β_0 -comutador. Para $k \geq 1$, seja T_{k-1} o conjunto de todos os elementos primários de G que são β_{k-1} -comutadores. Um elemento $x \in G$ é dito um β_k -comutador se existem $a, b \in T_{k-1}$ tais que $x = [a, b]$ e $(|a|, |b|) = 1$. O subgrupo de G gerado por todos os β_k -comutadores é $\beta_k(G)$.

Lema 5.2.6. *Sejam G um grupo finito e i um inteiro positivo. Então, $\beta_i(G) \leq D_i(G)$.*

Demonstração. Argumentaremos por indução sobre i . Seja x um β_1 -comutador de G . Então, existem elementos primários $a, b \in G$ tais que $(|a|, |b|) = 1$ e $x = [a, b]$. Como $G/D_1(G)$ é nilpotente $[aD_1(G), bD_1(G)] = 1$ e $x \in D_1(G)$. Então, $\beta_1(G) \leq D_1(G)$. Suponhamos que $i \geq 2$ e que $\beta_{i-1}(G) \leq D_{i-1}(G)$. Vamos mostrar que $\beta_i(G) \leq D_i(G)$. Seja y um β_i -comutador de G . Então, existem elementos primários $c, d \in G$ de ordens coprimas que são β_{i-1} -comutadores tais que $y = [c, d]$. Novamente, como $D_{i-1}(G)/D_i(G)$ é nilpotente, $[cD_i(G), dD_i(G)] = 1$ e $y \in D_i(G)$. Portanto, $\beta_i(G) \leq D_i(G)$. \square

Lema 5.2.7. *Sejam G um grupo finito não trivial, $p \in \pi(G)$ e k um inteiro positivo. Sejam os β_{k-1} -comutadores $y_1, \dots, y_k \in G$. Suponha que y_1, \dots, y_k são elementos primários e normalizam um p -subgrupo P de G com $(|y_i|, |P|) = 1$ para cada $1 \leq i \leq k$. Então, para todo $x \in P$, o elemento $[x, y_1, \dots, y_k]$ é um β_k -comutador.*

Demonstração. Dados $x \in P$ e $1 \leq \ell < k$, note que um elemento da forma $[x, y_1, \dots, y_\ell] \in P$ e tem ordem coprima com $|y_{\ell+1}|$. Como $(|y_i|, |P|) = 1$ e y_1 é um elemento primário que normaliza P , temos que $[x, y_1]$ é um β_1 -comutador de ordem potência de p . Argumentando por indução sobre k , suponha que $1 \leq \ell \leq k-1$ e que $[x, y_1, \dots, y_\ell]$ é um β_ℓ -comutador (de ordem potência de p). Procedendo por indução em k , suponha que $k \geq 1$ e que $[x, y_1, \dots, y_k]$. Então

$$[x, y_1, \dots, y_\ell, y_{\ell+1}] = [[x, y_1, \dots, y_\ell], y_{\ell+1}]$$

é um $\beta_{\ell+1}$ -comutador. \square

Lema 5.2.8. *Seja $P_1 \dots P_h$ uma torre de um grupo solúvel finito G . Para cada $1 \leq i \leq h$, o subgrupo P_i é gerado por β_{i-1} -comutadores contidos em P_i .*

Demonstração. Se $i = 1$, então o resultado segue. Seja $i \geq 2$. Argumentando por indução sobre i , podemos assumir que P_{i-1} é gerado por β_{i-2} -comutadores contidos em P_{i-1} . Seja B o conjunto de todos os β_{i-2} -comutadores contidos em P_{i-1} . Combinando o Lema 2.1.8 com o fato de que $P_i = [P_i, P_{i-1}]$, deduzimos que P_i é gerado por subgrupos da forma $[P_i, b_1, \dots, b_{i-1}]$, onde $b_1, \dots, b_{i-1} \in B$. O resultado agora segue imediatamente pelo Lema 5.2.7. \square

O próximo resultado pode ser entendido como uma extensão de [55, Teorema 2.6].

Proposição 5.2.9. *Seja G um grupo solúvel e k um inteiro positivo. A altura de Fitting de G é, no máximo, k se, e somente se, $\beta_k(G) = 1$.*

Demonstração. Por um lado, suponha que a altura de Fitting de G é, no máximo, k . Então $D_k(G) = 1$. Pelo Lema 5.2.6, $\beta_k(G) \leq D_k(G)$. Portanto, $\beta_k(G) = 1$.

Por outro lado, assumamos que $\beta_k(G) = 1$. Suponha, por contradição, que $h(G) = \ell$, onde $\ell > k$. Pelo Lema 2.3.1, existe uma torre $P_1 P_2 \dots P_\ell$ de altura ℓ em G . Pelo Lema 5.2.8, o

subgrupo P_ℓ de G é gerado pelos $\beta_{\ell-1}$ -comutadores contidos em P_ℓ . Como $\ell > k$, temos que $\beta_{\ell-1}(G) \leq \beta_k(G) = 1$, e segue que $P_\ell = 1$, uma contradição, pois $P_1 P_2 \dots P_\ell$ é uma torre. Portanto, $h(G) \leq k$. A demonstração está completa. \square

Teorema H. *Seja G um grupo solúvel finito e k um inteiro. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $D_k(G)$ é nilpotente.
- (ii) $\beta_k(G)$ é nilpotente.
- (iii) Para cada primo p e cada β_k -comutador x de ordem potência de p , $K_x(G)$ consiste de p -elementos.

Demonstração. Sem perda de generalidade, G é não trivial, caso contrário o resultado é imediato. Primeiro, mostramos que a propriedade (i) implica a propriedade (ii). Suponhamos, portanto, que $D_k(G)$ é nilpotente. Pelo Lema 5.2.6, temos que $\beta_k(G) \leq D_k(G)$ é nilpotente e assim $\beta_k(G)$ é nilpotente.

Agora mostraremos que a propriedade (ii) implica a propriedade (iii). Se $\beta_k(G)$ é trivial, a propriedade (iii) é imediata. Suponha que $\beta_k(G)$ é não trivial e nilpotente. Sejam $p \in \pi(\beta_k(G))$ e x um β_k -comutador de ordem de potência p . Seja P o único p -subgrupo de Sylow de $\beta_k(G)$. Então, $x \in P$. Como o subgrupo P é característico em $\beta_k(G)$ e $\beta_k(G)$ é normal em G , segue que P é normal em G . Portanto, $K_x(G) \subseteq P$ consiste de p -elementos.

Finalmente mostraremos que a propriedade (iii) implica a propriedade (i). Suponha que, para cada primo p e cada β_k -comutador x de ordem de potência p , $K_x(G)$ consiste de p -elementos. Queremos mostrar que $D_k(G)$ é nilpotente. Como G é solúvel, é suficiente demonstrar que a altura de Fitting $h(G)$ de G é, no máximo, $k+1$. Na verdade, isso implicaria que $D_{k+1}(G)$ é trivial e $D_k(G)$ é nilpotente. Argumentaremos por indução sobre ordem de G . Como G é solúvel, $G' < G$ e podemos, portanto, assumir que $D_k(G')$ é nilpotente. Assim, $D_{k+1}(G') = 1$ e a altura de Fitting $h(G')$ de G' satisfaz $h(G') \leq k+1$. Isso nos permite concluir que $h(G) \leq k+2$.

Resta mostrar que $h(G) \neq k+2$. Suponha, por contradição, que $h(G) = k+2$. Então, pelo Lema 2.3.1, existe uma torre $P_1 P_2 P_3 \dots P_{k+2}$ de altura $k+2$ em G . Pelo Lema 5.2.8, o subgrupo P_{k+1} é gerado pelos β_k -comutadores contidos em P_{k+1} . Seja x um β_k -comutador em P_{k+1} . Como P_{k+1} normaliza P_{k+2} e $K_x(G)$ consiste em p_{k+1} -elementos, segue que $[x, y]$ pertence a $K_x(G) \cap P_{k+2} = 1$ para cada $y \in P_{k+2}$. Isso implica que P_{k+1} comuta com P_{k+2} . Por outro lado, $P_{k+2} = [P_{k+1}, P_{k+2}]$, pois $P_1 P_2 P_3 \dots P_{k+2}$ é uma torre. Isso é uma contradição. Portanto, $h(G) \leq k+1$. A demonstração está completa. \square

Considerações finais

Ao longo deste trabalho, observamos que propriedades dos conjuntos de comutadores $B_x(G)$ e $K_x(G)$ exercem forte influência sobre a estrutura de um grupo finito G . A análise desses conjuntos mostrou-se uma ferramenta eficaz para detectar propriedades estruturais relevantes, como nilpotência, solubilidade e a propriedade da torre de Sylow.

No Capítulo 4, estudamos de forma sistemática o conjunto $B_x(G)$. A partir de restrições impostas a esses conjuntos em grupos finitos, estabelecemos critérios de nilpotência e solubilidade (Teoremas A e B), bem como um critério para que o subgrupo comutador seja um p -grupo (Teorema C). No caso particular de p -grupos finitos, verificamos que $B_x(G)$ é um subgrupo sempre que sua cardinalidade é uma potência de p , obtendo ainda limites para a classe de nilpotência (Teorema D) e uma condição suficiente para que o subgrupo comutador seja powerful (Teorema E).

O estudo do conjunto $B_x(G)$ revelou vantagens significativas, uma vez que esse conjunto é normal, contém seus inversos e a interseção $B_x(G) \cap Z(G)$ constitui sempre um subgrupo. Essas propriedades foram fundamentais para a obtenção dos principais resultados apresentados. Uma dificuldade encontrada foi verificar, no Teorema E, se o resultado permanece válido para 2-grupos e se é possível enfraquecer ainda mais as hipóteses assumidas.

Além dos resultados obtidos, podemos introduzir a noção de $\Omega(G)$, definida como a cardinalidade do conjunto $\{B_x(G) \mid x \in G\} \setminus \{1\}$, e discutir sua relação com propriedades estruturais do grupo. Observe que G é abeliano se, e somente se, $\Omega(G) = 0$. Além disso, podemos verificar que $\Omega(S_3) = \Omega(A_4) = 1$, $\Omega(S_4) = 2$ e que, se G é um monstro de Tarski, então $\Omega(G) = 1$. Esses exemplos motivam questões naturais, tais como: é possível encontrar, para cada inteiro n , uma família de grupos G tais que $\Omega(G) = n$? Assumindo que G é um grupo solúvel (nilpotente) e que $\Omega(G)$ é finito, podemos limitar o comprimento derivado (classe de nilpotência) e a altura de Fitting de G em função de $\Omega(G)$?

Um trabalho atualmente em desenvolvimento consiste em investigar uma extensão do conjunto $B_x(G)$, definida por

$$\tilde{B}_x(G) = \{(x^{-1})^\psi(x)^\phi \mid \psi, \phi \in \text{Aut}(G)\}.$$

O objetivo é compreender se, nesse contexto mais geral, podem ser obtidas outras propriedades estruturais além daquelas estudadas neste texto.

Aspectos computacionais. Parte dos exemplos e observações apresentados ao longo deste trabalho foi obtida com o auxílio das ferramentas computacionais do sistema GAP e da *SmallGroups Library*. Esses recursos foram utilizados principalmente para testar exemplos concretos de grupos finitos de pequena ordem, verificar o comportamento dos conjuntos $B_x(G)$. Utilizamos a seguinte rotina:

```
Bx:= function (x, G)
  local comms;
  comms := Set(List(Cartesian(G, G),
    p-> p[1]^-1*x^-1*p[1]*p[2]^-1*x*p[2]));
  return comms;
end;;
```

Essa rotina recebe um grupo finito G , um elemento fixo x de G e devolve o conjunto de comutadores $B_x(G) = \{a^{-1}x^{-1}ab^{-1}xb \mid a, b \in G\}$, percorrendo todos os pares $(a, b) \in G \times G$ e calculando os correspondentes comutadores. A utilização do comando `Set` garante que o conjunto retornado não contenha repetições. Ressaltamos que o uso do sistema GAP neste trabalho ficou restrito ao estudo dos conjuntos $B_x(G)$. Por outro lado, os resultados relativos aos conjuntos $K_x(G)$ foram obtidos por métodos puramente teóricos, consistindo em caracterizações por meio de condições necessárias e suficientes, sem o auxílio de ferramentas computacionais.

No Capítulo 5, estudamos o conjunto $K_x(G)$ e obtivemos caracterizações relevantes de grupos finitos, incluindo caracterizações da propriedade da torre de Sylow (Teorema F). Uma questão natural que surge desse estudo é a seguinte:

Questão 5.2.10. *É possível caracterizar um CLT-grupo G em termos dos conjuntos $K_x(G)$ para alguns elementos $x \in G$?*

Em combinação com os α_k -comutadores, estabelecemos critérios para que um grupo finito seja metanilpotente (Teorema G). Por sua vez, a partir dos β_k -comutadores, obtivemos critérios para que termos da série de Fitting inferior sejam nilpotentes em grupos solúveis (Teorema H).

O desenvolvimento deste estudo permitiu estabelecer conexões entre o Teorema de Baumslag e Wiegold e novas abordagens baseadas nos α_k - e β_k -comutadores. Uma dificuldade relevante consistiu em determinar se a hipótese de solubilidade no Teorema H pode ser removida.

Por fim, Vale ressaltar que os principais resultados obtidos permanecem válidos quando se substitui $K_x(G)$ por $B_x(G)$, o que reforça a generalidade das propriedades estruturais analisadas neste trabalho.

Bibliografía

- [1] Acciarri, C., Fernández-Alcober, G., Shumyatsky, P., et al. (2012). A focal subgroup theorem for outer commutator words. *Journal of Group Theory*, 15(3):397–405.
- [2] Acciarri, C., Guralnick, R. M., and Shumyatsky, P. (2023). Criteria for solubility and nilpotency of finite groups with automorphisms. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 55(3):1340–1346.
- [3] Acciarri, C., Shumyatsky, P., and Thillaisundaram, A. (2014). Conciseness of coprime commutators in finite groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 89(2):252–258.
- [4] Alperin, J. and Lyons, R. (1971). On conjugacy classes of p -elements. *Journal of Algebra*, 19(4):536–537.
- [5] Bastos, R., Cocke, W., and Monetta, C. (2025). Criteria for nilpotency of higher commutator subgroups. *Archiv der Mathematik*, 125(4):353–360.
- [6] Bastos, R. and Monetta, C. (2019). Coprime commutators in finite groups. *Communications in Algebra*, 47(10):4137–4147.
- [7] Bastos, R., Monetta, C., and Shumyatsky, P. (2018). A criterion for metanilpotency of a finite group. *Journal of Group Theory*, 21(4):713–718.
- [8] Bastos, R. and Shumyatsky, P. (2016). A sufficient condition for nilpotency of the commutator subgroup. *Siberian Mathematical Journal*, 57(5):762–763.
- [9] Baumslag, B. and Wiegold, J. (2014). A sufficient condition for nilpotency in a finite group. *arXiv preprint arXiv:1411.2877*.
- [10] Beltrán, A. and Sáez, A. (2019). Existence of normal hall subgroups by means of orders of products. *Mathematische Nachrichten*, 292(4):720–723.
- [11] Blackburn, N. (1957). On prime-power groups in which the derived group has two generators. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(1):19–27.
- [12] Bloom, D. M. (1967). The subgroups of $PSL(3, q)$ for odd q . *Transactions of the American Mathematical Society*, 127(1):150–178.
- [13] Bray, H., Deskins, W., Johnson, D., Humphreys, J., Puttaswamaiah, B., Venzke, P., and Walls, G. (1982). *Between Nilpotent and Solvable*. Polygonal Publishing House, Washington, NJ.

- [14] Cocke, W. (2019). *Idle words: word maps on finite groups*. The University of Wisconsin-Madison.
- [15] Contreras-Rojas, Y., Grazian, V., and Monetta, C. (2022). p -nilpotency criteria for some verbal subgroups. *Journal of Algebra*, 609:926–936.
- [16] da Silva Alves, J. (2021). *Critério de Nilpotência para Subgrupos Derivados em Grupos Finitos*. Tese de doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.
- [17] da Silva Alves, J. and Shumyatsky, P. (2021). On nilpotency of higher commutator subgroups of a finite soluble group. *Archiv der Mathematik*, 116(1):1–6.
- [18] de las Heras, I. (2020). Commutators in finite p -groups with 3-generator derived subgroup. *Journal of Algebra*, 546:201–217.
- [19] de las Heras, I., Pintonello, M., and Shumyatsky, P. (2023). Strong conciseness of coprime commutators in profinite groups. *Journal of Algebra*, 633:1–19.
- [20] de Souza, T. A., Bastos, R., and de Melo, E. (2025a). Finite groups with restrictions on subsets of commutators. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 75(1):21.
- [21] de Souza, T. A., Bastos, R., and Marion, C. (2025b). Characterisations of finite groups by subsets of commutators. *Journal of Group Theory*. submetido.
- [22] Dickson, L. E. (1901). *Linear Groups, with an Exposition of the Galois Field Theory*. B.G. Teubner, Leipzig.
- [23] Feit, W. and Thompson, J. G. (1963). Solvability of groups of odd order. *Pacific Journal of Mathematics*, 13(3):775–1029.
- [24] Fernández-Alcober, G. A. (2001). An introduction to finite p -groups: regular p -groups and groups of maximal class. *Mat. Contemp*, 20(155-226):16th.
- [25] Fernandez-Alcober, G. A. and de las Heras, I. (2019). Commutators in finite p -groups with 2-generator derived subgroup. *Israel Journal of Mathematics*, 232(1):109–124.
- [26] Figueiredo, M. and Shumyatsky, P. (2024). Finite groups in which every commutator has prime power order. *Journal of Algebra*, 658:779–797.
- [27] Freitas de Andrade, A. and Carrazedo Dantas, A. (2018). A sufficient condition for nilpotency of the nilpotent residual of a finite group. *Journal of Group Theory*, 21(2):289–293.
- [28] GAP (2024). *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.0*. The GAP Group.
- [29] Garcia, A. and Lequain, Y. (2018). *Elementos de álgebra*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [30] Gonçalves, A. (1979). *Introdução à álgebra*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- [31] Gorenstein, D. (1980). *Finite Groups*. AMS/Chelsea Publication Series. Chelsea Publishing Company.
- [32] Guralnick, R. M. and Moretó, A. (2019). Conjugacy classes, characters and products of elements. *Mathematische Nachrichten*, 292(6):1315–1320.
- [33] Guralnick, R. M. and Robinson, G. R. (1993). On extensions of the baer-suzuki theorem. *Israel Journal of Mathematics*, 82(1):281–297.
- [34] Hall, P. (1928). A note on soluble groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2):98–105.
- [35] Hall, P. (1937). A characteristic property of soluble groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(3):198–200.
- [36] Hipólito, M. N. (2023). Produto de comutadores em grupos. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF.
- [37] Holmes, C. (1966). A characterization of finite nilpotent groups. *The American Mathematical Monthly*, 73(10):1113–1114.
- [38] Isaacs, I. M. (2008). *Finite group theory*, volume 92. American Mathematical Soc.
- [39] Khukhro, E. I. (1998). *p-Automorphisms of Finite p-Groups*, volume 246. Cambridge University Press.
- [40] Leedham-Green, C. R. and McKay, S. (2002). *The structure of groups of prime power order*. Number 27. Clarendon Press.
- [41] Li, B., Lu, J., Pang, L., and Zhang, B. (2024). A criterion for nilpotency in finite groups. *Archiv der Mathematik*, 122(1):13–16.
- [42] Li, X., Lei, D., and Gao, Y. (2022). The order of the product of two elements. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53(2):372–374.
- [43] Lidl, R. and Niederreiter, H. (1997). *Finite fields*. Number 20. Cambridge University Press.
- [44] Liebeck, M. W., O'Brien, E. A., Shalev, A., and Tiep, P. H. (2010). The ore conjecture. *Journal of the European Mathematical Society*, 12(4):939–1008.
- [45] Lubotzky, A. and Mann, A. (1987). Powerful p-groups. I. finite groups. *Journal of Algebra*, 105(2):484–505.
- [46] Macdonald, I. (1986). Commutators and their products. *The American Mathematical Monthly*, 93(6):440–444.
- [47] Martínez, J. (2023). Orders of products of elements and nilpotency of terms in the lower central series and the derived series. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 151:253–263.
- [48] Monakhov, V. (2019). A metanilpotency criterion for a finite solvable group. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 304:S141–S143.

- [49] Monakhov, V. S. (2017). The nilpotency criterion for the derived subgroup of a finite group. *Problems of Physics, Mathematics and Technics (PFMT)*, 32(3):58–60.
- [50] Monetta, C. (2018). *On the nilpotency of some commutator subgroups*. Tesi di dottorato, Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli, Caserta, Italia.
- [51] Monetta, C. and Tortora, A. (2019). A nilpotency criterion for some verbal subgroups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 100(2):281–289.
- [52] Robinson, D. J. (2012). *A Course in the Theory of Groups*, volume 80. Springer Science & Business Media.
- [53] Rose, H. E. (2009). *A course on finite groups*. Springer Science & Business Media.
- [54] Shumyatsky, P. (2012). On the exponent of a verbal subgroup in a finite group. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 93(3):325–332.
- [55] Shumyatsky, P. (2015). Commutators of elements of coprime orders in finite groups. *Forum Mathematicum*, 27(1):575–583.
- [56] Spiegel, E. (1976). Calculating commutators in groups. *Mathematics Magazine*, 49(4):192–194.
- [57] Suzuki, M. (1962). On a class of doubly transitive groups. *Annals of Mathematics*, 75(1):105–145.
- [58] Suzuki, M. (1982). *Group Theory I*, volume 247 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag Berlin-New York.
- [59] Thompson, J. G. (1968). Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:383–437.
- [60] Turull, A. (1984). Fitting height of groups and of fixed points. *Journal of Algebra*, 86(2):555–566.
- [61] Wiegold, J. (1957). Groups with boundedly finite classes of conjugate elements. *Proceedings of the Royal Society. London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 238:389–401.
- [62] Wilson, R., Walsh, P., Tripp, J., Suleiman, I., Parker, R., Norton, S., Nickerson, S., Linton, S., Bray, J., and Abbott, R. (2005). Atlas of finite group representations-version 3. available at the time of writing from <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3>.