UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Doutorado)

Sobre Construções Relacionadas Ao Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

Guilherme Rocha Ortega

Brasília- DF

2026

[0]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Guilherme Rocha Ortega

Sobre Construções Relacionadas Ao Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília.
Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Brasília - DF

2026

Agradecimentos

À Deus, por me ajudar e estar comigo durante toda minha vida. À minha amada esposa, Maria Emanuelle, por me apoiar e me animar nos momentos em que mais precisei. Aos meus pais e meu irmão, pelo suporte e cooperação. Ao Prof. Dr. Raimundo Bastos, pela atenção e apoio durante o tempo de doutorado. Ao Prof. Dr. Carmine Monetta, pelo auxílio e apoio durante o período de estudo na Itália. Ao Prof. Dr. Guran Donadze, pelo suporte e motivação no estudo de temas relacionados a esta tese de doutorado. Aos meus amigos acreanos e londrinenses pelo companheirismo e disposição a me ajudar.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar o n-ésimo produto tensorial não abeliano de um grupo G e estudar o grupo de comutatividade fraca de um grupo G. Estaremos interessados em apresentar algumas propriedades de finitude de cada um deles. Além disso, serão exibidas propriedades de fechamento do n-ésimo produto tensorial não abeliano. Sobre o grupo de comutatividade fraca, apresentaremos também descrições das series central inferior e derivada do mesmo.

Palavras-chave: Produto tensorial não abeliano de grupos, subgrupo comutador, grupo finitamente gerado, grupo finitamente apresentado, grupo de comutatividade fraca.

Abstract

This work aims to study the n-th non-abelian tensor product of a group G and to study the weak commutativity group of a group G. We will be interested in presenting some finiteness properties of each of them. In addition, closure properties of the n-th non-abelian tensor product will be exhibited. Regarding the weak commutativity group, we will also present descriptions of its lower central and derived series.

Key words: Non-abelian tensor product of groups, commutator subgroup, finitely generated group, finitely presented group, weak commutativity group.

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_n$	conjunto dos números inteiros módulo n
$X \subset Y$	X é um subconjunto de Y
$\|X\|$	cardinalidade do conjunto X
$X \times Y$	produto direto de X por Y
$X \setminus Y$	$\{x \in X \mid x \notin Y\}$
$H \leq G$	H subgrupo de G
$H < G$	H subgrupo próprio de G
$H \lhd G$	H subgrupo normal de G
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado por X
$G \cong H$	grupo G isomorfo ao grupo H
$Aut(G)$	Grupo dos automorfismos de G
$Im(f)$	imagem da função f
$Ker(f)$	núcleo da função f
$C_G(a)$	Centralizador de a em G
$C_G(H)$	Centralizador de H em G
$Z(G)$	Centro de um grupo G
$[x, y]$	Comutador de x por y
$[X, Y]$	Subgrupo comutador de X e Y
a^g	Conjugado de a por g
a^G	Classe de conjugação de a em G
$\langle X \mid R \rangle$	Apresentação livre de um grupo gerado por X pelo conjunto de relatores R
$G \ltimes H$	Produto semidireto de G e H
$G * H$	Produto livre de G por H
$\langle R \rangle^G$	Fecho normal de R visto no grupo G
$G \otimes H$	Produto tensorial não abeliano dos grupos G e H
$G \otimes_A H$	Produto tensorial dos A-módulos G e H

$D_H(G)$	Subgrupo derivativo de G por H
$[G, H]$	Subgrupo comutador de G por H
G^{ab}	G/G', abelianizado de G
$\gamma_i(G)$	i-ésimo termo da série central inferior de G
$cl(G)$	Classe de nilpotência de G
$G^{(i)}$	i-ésimo termo da série derivada de G
$l(G)$	Comprimento derivado do grupo solúvel G

Sumário

Introdução

O produto tensorial não abeliano de grupos foi proposto por Brown e Loday em [19] e [20] dentro da teoria de homotopia e, de certa forma, generaliza o produto tensorial de $\mathbb{Z}$-módulos, também vale destacar as contribuições de Miller ([49]) e Dennis ([23]) que, trabalharam com construções similares ao produto tensorial não abeliano. O estudo de produtos tensoriais não abelianos não se limitou apenas à área de topologia, pois muitos matemáticos têm investigado este assunto sob um ponto de vista puramente algébrico (veja [21], [30], [61], [62], [29], [17], [50], [8]). Sejam G e H grupos que agem sobre si mesmos por conjugação, e que agem um sobre o outro através de ações que satisfazem as seguintes condições:

$$g^{(h^{g_1})} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1}, \tag{1}$$

$$h^{(g^{h_1})} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}. \tag{2}$$

com $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Quando isso ocorre dizemos que os grupos G e H *agem compativelmente* um sobre o outro. Nesta situação, o *produto tensorial não abeliano* de G e H, o qual é denotado por $G \otimes H$, é o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, com $g \in G$ e $h \in H$, satisfazendo as relações:

$$\begin{aligned} gg_1 \otimes h &= (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h), \\ g \otimes hh_1 &= (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \end{aligned}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Quando $G = H$ e as ações são por conjugação, as condições (1) e (2) são satisfeitas, e assim o *o quadrado tensorial não abeliano* $G \otimes G$ é bem definido.

Em [63] Rocco introduziu uma construção de grupo que está relacionado ao produto tensorial não abeliano de grupos e é definido como segue: sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro, H^φ uma cópia de H isomorfo por $\varphi : H \mapsto H^\varphi$, onde

escrevemos $(h)\varphi = h^{\varphi}$ para qualquer $h \in H$. Definimos $\eta(G,H)$ como sendo o grupo

$$\eta(G,H) = \langle G, H^{\varphi} | [g,h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}], [g,h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} = [g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}],\ g,g_1 \in G,\ h,h_1 \in H\rangle.$$

em outras palavras, $\eta(G,H) = \dfrac{G * H^{\varphi}}{\langle S\rangle^{G*H^{\varphi}}}$, onde

$$S = \{[g,h^{\varphi}]^{g_1}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1},\ [g,h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}}\left[g^{h_1},\left(h^{h_1}\right)^{\varphi}\right]^{-1};\ \forall g,g_1 \in G \text{ e } h,h_1 \in H\},$$

com $\langle S\rangle^{G*H^{\varphi}}$ sendo o fecho normal de R em $G * H^{\varphi}$. A relação entre os grupos $\eta(G,H)$ e $G \otimes H$ está no fato de que existe um isomorfismo $\alpha : [G,H^{\varphi}] \to G \otimes H$ tal que $([g,h^{\varphi}])\alpha = g \otimes h$, para todos $g \in G$ e $h \in H$. Por tal motivo, dedicaremos uma parte deste trabalho a $\eta(G,H)$. Quando $G = H$ e as ações são por conjugação, $\eta(G,G)$ é o grupo $\nu(G)$ introduzido em [61] e [56].

Outra estrutura, de certa forma associada ao produto tensorial não abeliano de grupos, é o grupo de comutatividade fraca introduzido por Sidki em [66]. Seja G um grupo e $\varphi : G \to G^{\varphi}$ um isomorfismo de G tal que $G \cap G^{\varphi} = \emptyset$. O grupo de comutatividade fraca de G é dado pela seguinte apresentação:

$$\chi(G) := \langle G, G^{\varphi} \mid [g,g^{\varphi}] = 1, g \in G\rangle.$$

Tal construção foi introduzida em 1980 e preconizou os grupos $\eta(G,H)$ e $\nu(G)$ definidos por Rocco em [63], [62], [61] e [56]. O estudo do grupo de comutatividade fraca continuou com outros autores. Vale citar alguns trabalhos, como [60], [37], [45], [18], [7], [48], [41], [42], entre outros. O estudo das propriedades do grupo de comutatividade fraca ainda é objeto de pesquisa, devido a sua importância e correlação com a teoria de homologia, e, recentemente, com a Álgebra de Lie (explorada inicialmente por Mendonça em [48]) e com a teoria de grupos profinitos (veja [41]).

Neste Trabalho, abordaremos um caso especial do produto tensorial não abeliano de grupos, tomando uma construção do produto tensorial não abeliano de n cópias de um grupo G. Além de definir o n-ésimo produto tensorial não abeliano de um grupo G, exploraremos algumas propriedades de fechamento e de finitude do mesmo. Além disso, serão exploradas algumas propriedades de finitude de um subgrupo importante de $\chi(G)$, bem como uma descrição da série derivada e da série central inferior do grupo de comutatividade fraca de um grupo G.

Nossa pesquisa envolverá dois objetos principais: o estudo de um certo tipo de produtos

tensoriais não abelianos e uma construção relacionada ao grupo de comutatividade fraca. Os resultados aqui apresentados foram obtidos em dois trabalhos: [15] e [14].

A tese terá a seguinte estrutura: O primeiro capítulo será destinado às propriedades básicas necessárias para o entendimento deste trabalho. O segundo capítulo definirá as construções do produto tensorial não abeliano de grupos, bem como exporá os resultados (relevantes para as nossas considerações) referentes ao grupo de comutatividade fraca $\chi(G)$.

No terceiro capítulo, exibiremos os resultados de [15] feitos com a colaboração de Bastos. Exploraremos o n-ésimo produto tensorial não abeliano de um grupo $G^{\otimes n}$. Teremos como objetivo principal, enunciar e demonstrar os seguintes resultados:

Teorema A ([15]). *Seja G um grupo finitamente apresentado. Então, o n-ésimo produto tensorial de G é finitamente apresentado se, e somente se, $\gamma_n(G)$ é finitamente apresentado.*

Teorema B ([15]). *Seja G um grupo finitamente gerado.*

1. *O n-ésimo produto tensorial de um grupo G é finito se, e somente se, G é finito.*
2. *O n-ésimo produto tensorial de um grupo G é policíclico se, e somente se, G é policíclico.*

Concluiremos o capítulo 3 mostrando algumas propriedades de fechamento de G usando o n-ésimo produto tensorial de G.

Teorema C ([15]). *Seja $\mathfrak{X}$ uma das seguintes classes de grupos:*

(i) A classe dos grupos perfeitos finitamente apresentados;

(ii) A classe dos grupos nilpotentes finitamente gerados;

(iii) A classe dos grupos finitamente apresentados nos quais todo subgrupo é finitamente apresentado.

Então $G/Z_i(G) \in \mathfrak{X}$ implica em $\gamma_{i+1}(G) \in \mathfrak{X}$.

O capítulo 4 será destinado ao estudo do grupo de comutatividade fraca de um grupo G. Estaremos trabalhando com o subgrupo normal $R(G)$ que, dentre outras maneiras de

ser exposto, ele pode ser expresso da seguinte maneira:

$$R(G) = \langle [g, h^{\varphi}]^{g_1} [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}]^{-1},\ [g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} [g^{h_1}, \left(h^{h_1}\right)^{\varphi}]^{-1} |\ g, g_1, h, h_1 \in G \rangle.$$

Observe que a estrutura de $R(G)$ é muito parecida com as relações definidoras de $\nu(G)$, e de fato, Rocco mostrou em [61] que existe um epimorfismo de $\nu(G)$ em $\chi(G)/R(G)$. Outros subgrupos em $\chi(G)$ que valem ser mencionados são,

$$\begin{aligned} D(G) =& [G, G^{\varphi}]; \\ L(G) =& \langle g^{-1} g^{\varphi} \mid g \in G \rangle; \\ L_1(G) =& [L(G), G]; \\ L_2(G) =& [L(G), G^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Estaremos interessados em enunciar e demostrar algumas propriedades de finitude de $R(G)$ e também, a obtenção de uma descrição da série central inferior e da série derivada de $\chi(G)$ em função de $D(G), L_1(G)$ e $L_2(G)$. Os resultados principais deste capítulo são:

Teorema D ([14]). *Seja G um grupo.*

(i) Se G é periódico, então $R(G)$ também é periódico.

(ii) Se G tem expoente finito, então $R(G)$ tem expoente que divide $\exp(G) \cdot \exp(G')$.

Tal estudo foi possível graças ao estudo do subgrupo $[L_1(G), L_2(G)]$. Ainda nessa perspectiva, motivado por um trabalho de Bastos, de Oliveira, Monetta e Rocco ([12]), conseguimos apresentar uma descrição da série derivada e da série central inferior de $\chi(G)$.

Teorema E ([14]). *Seja G um grupo.*

(i) O subgrupo derivado $\chi(G)'$ é o produto central entre $D(G)$ e $L_1(G)L_2(G)$.

(ii) O segundo termo da série derivada $\chi(G)^{(2)}$ é dado pelo produto

$$D(G)' L_1(G)' L_2(G)' [L_1(G), L_2(G)].$$

(iii) Se $k \geq 2$, então $\chi(G)^{(k+1)}$ é o produto central de $D(G)^{(k)}$, $L_1(G)^{(k)}$ e $L_2(G)^{(k)}$.

Em relação aos termos da serie central inferior de $\chi(G)$, temos

Teorema F ([14]). *Seja G um grupo. Então, para $n \geq 3$ vale que*

$$\gamma_n(\chi(G)) = [D(G),_{n-2} G][L_1(G),_{n-2} G][L_2(G),_{n-2} G^{\varphi}].$$

O último capítulo será direcionado pelas considerações finais. Estaremos interessados em expor possíveis avanços a partir do que foi apresentado.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos, resultados e notações necessários para as conclusões desejadas desta tese. Os resultados desta seção terão suas demonstrações omitidas.

1.1 Cálculo com Comutadores

Os resultados a seguir podem ser encontrados em [64] e [59]. Seguiremos usando as notações de [59], isto é, dados elementos g e h de um grupo G, o conjugado de g por h é o elemento $g^h = h^{-1}gh$. Usaremos a expressão "$[g,h]$" para indicar o elemento $g^{-1}h^{-1}gh$, como sendo o comutador de g e h. Sejam agora $g,h,l \in G$, a notação "$[g,h,l]$" indicará o elemento $[[g,h],l]$. Para subgrupos comutadores, se $A,B,C \leq G$, então o subgrupo $[A,B]$ será dado por:

$$[A,B] := \langle [g,h] \,|\, g \in A,\ h \in B \rangle.$$

Analogamente para três subgrupos em um comutador, o subgrupo $[A,B,C]$ denotará o subgrupo $[[A,B],C]$.

Os resultados a seguir nos mostram algumas propriedades básicas do cálculo de comutadores e podem ser encontrados em [59].

Proposição 1.1 ([59, 5.1.5]). *Sejam x,y,z elementos de um grupo G. Então:*

(i) $[x,y] = [y,x]^{-1}$;

(ii) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z]$ *e* $[x,yz] = [x,z][x,y]^z$;

(iii) $[x,y^{-1}] = \left([x,y]^{y^{-1}}\right)^{-1}$ *e* $[x^{-1},y] = \left([x,y]^{x^{-1}}\right)^{-1}$.

Lema 1.2 ([59, 5.1.5]). (Identidade de Hall–Witt) *Sejam G um grupo e $x, y, z \in G$. Então vale a seguinte identidade:*

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1.$$

Lema 1.3 ([59, 5.1.10]). (Lema dos Três Subgrupos) *Sejam A, B, C subgrupos de G. Se $N \lhd G$ e $[A, B, C], [B, C, A] \subset N$, então $[C, A, B] \subset N$.*

1.2 Solubilidade e Nilpotência de Grupos

Agora, queremos expor algumas propriedades relacionadas às séries normais de grupos. Veremos um pouco sobre grupos nilpotentes, solúveis e policíclicos. Seguiremos nos baseando em [64] e [28].

Definição 1.4. *Seja G um grupo. Diremos que uma sequência finita de subgrupos*

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \ \ldots \ \geq H_n = \{1\},$$

é uma série subnormal (respectivamente, série normal) de G se $H_{i+1} \lhd H_i$ (respectivamente, $H_i \lhd G$) para qualquer $i \in \{0, \ \ldots \ , n-1\}$. Os grupos quocientes H_i/H_{i+1}, com $i \in \{0, \ \ldots \ , n-1\}$, são chamados de fatores da série.

Definição 1.5. *Seja G um grupo. A série central inferior de G será definida pelos subgrupos $\gamma_i(G)$, com $i \in \mathbb{N}$, onde cada $\gamma_i(G)$ é dado pela seguinte lei de formação:*

$$\gamma_1(G) := G \ ; \ \gamma_{i+1}(G) := [\gamma_i(G), G],$$

onde $i \in \mathbb{N}$.

Vale observar que o subgrupo $\gamma_i(G)$ é característico em G.

Lema 1.6 ([59, 5.1.11]). *Seja G um grupo. Então, vale que $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$ e $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$ para quaisquer $i, j > 0$.*

Definição 1.7. *Seja G um grupo. Se para algum $n \in \mathbb{N}$ tivermos $\gamma_n(G) = \{1\}$, o grupo G é chamado de nilpotente. Ainda, se c é o menor inteiro não negativo tal que $\gamma_{c+1}(G) = \{1\}$, então a classe de nilpotência de G é c e será denotada por $cl(G)$.*

Vejamos agora uma definição de grupo solúvel.

Definição 1.8. Um grupo G é dito ser *solúvel* se podemos construir uma série subnormal de G

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \ \ldots \ \geq H_n = \{1\},$$

onde H_i/H_{i+1} é abeliano para qualquer $i = 0, \ \ldots \ , n-1$.

Podemos associar o conceito de solubilidade a uma série normal de G definida da seguinte maneira:

Definição 1.9. Dado um grupo G, defina os subgrupos de G conforme a seguinte lei de formação:

$$G^{(0)} := G \ ; \quad G^{(i+1)} := (G^{(i)})' \quad \text{se } i \geq 0.$$

Chamamos a série

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ \cdots \ \geq G^{(n+1)} \geq \ \cdots$$

de série derivada de G.

Proposição 1.10 ([64, Teorema 5.23])**.** *Um grupo G é solúvel se, e somente se, $G^{(n)} = \{1\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Um grupo G será dito ser solúvel de *comprimento derivado* l se for o menor inteiro não negativo tal que $G^{(l)} = 1$. Além disso, denotaremos como $d(G)$ o comprimento derivado de G.

Definição 1.11. *Um grupo G é dito ser policíclico se existe uma série subnormal de G*

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \ \cdots \ \geq H_n = \{1\},$$

onde H_i/H_{i+1} é cíclico para qualquer $i = 0, \ \ldots \ , n-1$.

Observe que todos os grupos policíclicos são, em particular, finitamente gerados.

Vejamos agora algumas propriedades de grupos solúveis e nilpotentes.

Proposição 1.12. *Sejam G um grupo, H, N subgrupos de G, com N normal em G. Nestas condições,*

(i) Se G é nilpotente de classe c, então H e G/N são nilpotentes de classe no máximo c;

(ii) Se G é solúvel de comprimento derivado l, então H e G/N são solúveis de comprimento derivado no máximo l.

Proposição 1.13. *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G. Se H e G/H são solúveis, então G é solúvel.*

Proposição 1.14. *Seja $H \leq Z(G)$ e suponha que G/H é nilpotente de classe c. Então G é nilpotente de classe no mínimo c e no máximo $c+1$.*

1.3 Produto Tensorial de Módulos

Sejam $(M,+)$ um grupo abeliano e A um anel com unidade. Nomearemos as funções de domínio $M \times A$ e contra-domínio M, como multiplicação por escalar à direita. Se f for uma multiplicação por escalar à direita, $a \in A$ e $m \in M$, escreveremos $((m,a))f$ simplesmente como $m \cdot a$ ou ainda ma quando não houver falta de clareza.

Definição 1.15. *Seja A um anel com unidade. Um A-módulo à direita é um grupo abeliano $(M,+)$ junto com uma multiplicação por escalar à direita $f : M \times A \to M$ que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $a, b \in A$ e $m, n \in M$:*

(i) $m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b$;

(ii) $(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$;

(iii) $m \cdot (ab) = (m \cdot a) \cdot b$;

(iv) $m \cdot 1_A = m$.

Observemos que poderíamos definir multiplicação por escalar à esquerda e módulo à esquerda da mesma forma que definimos acima. Também vale destacarmos que podemos "olhar" qualquer grupo abeliano como um $\mathbb{Z}$-módulo.

Exemplo 1.16. Seja $(G,+)$ um grupo abeliano e defina uma multiplicação por escalar $\cdot : G \times \mathbb{Z} \to G$ tal que:

$$g \cdot n = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{n-vezes} & , \ n > 0 \\ 0 & , \ n = 0 \\ \underbrace{-g - g - \cdots - g}_{-n-vezes} & , \ n < 0 \end{cases}$$

para quaisquer $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$. Com essa multiplicação por escalar é fácil ver que G é um $\mathbb{Z}$-módulo.

Definição 1.17. Sejam M e N A-módulos e $g : M \to N$ um homomorfismo de grupos. Se para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$ valer que

$$(ma)g = (m)g \cdot a,$$

dizemos que g é um *homomorfismo de A-módulos*.

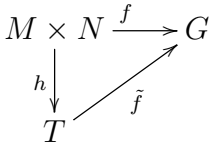
Definição 1.18. Sejam A um anel comutativo com unidade, M, N e P A-módulos. Se uma aplicação $f : M \times N \to P$ satisfaz:

$$\begin{aligned} (m + m', n)f &= (m, n)f + (m', n)f; \\ (m, n + n')f &= (m, n)f + (m, n')f; \\ (ma, n)f &= (m, na)f = (m, n)fa; \end{aligned}$$

para quaisquer $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$, dizemos que f é uma aplicação *A-bilinear*.

Queremos agora definir o produto tensorial de módulos. Para mais detalhes, veja [65].

Definição 1.19. *Sejam A um anel comutativo com unidade e M e N A-módulos. O produto tensorial de M e N é o par (T, h), onde T é um grupo abeliano e h é uma aplicação A-bilinear $h : M \times N \to T$ tal que, para quaisquer A-módulo G e aplicação A-bilinear $f : M \times N \to G$, existe um único A-homomorfismo $\tilde{f} : T \to G$ que faz o diagrama comutar*



A seguir apresentamos algumas propriedades de produtos tensoriais de módulos.

Proposição 1.20. *Sejam M, P, N e Q A-módulos. Então*

(i) $M \otimes_A A \cong M$ *e* $A \otimes_A N \cong N$;

(ii) $M \otimes (N \oplus Q) \cong (M \otimes N) \oplus (M \otimes Q)$ *e* $(M \oplus P) \otimes N \cong (M \otimes N) \oplus (P \otimes N)$;

(iii) $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$.

1.4 Sequências Exatas

Agora, estaremos interessados em mostrar o conceito de sequências exatas, a fim de concluir algumas propriedades nos Capítulos 2 e 3. Para mais detalhes, veja [59].

Definição 1.21. *Sejam $i \in \mathbb{Z}$, G_i grupos e $f_i : G_i \to G_{i-1}$ homomorfismos. Diremos que a sequência*

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+2}} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots$$

é exata se $Im(f_i) = ker(f_{i-1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Uma sequência exata é dita ser curta, se existir $i \in \mathbb{Z}$ tal que $G_j = 1$ para todo $j \neq \{i+1, i, i-1\}$. Neste caso, podemos reescrever a sequência exata como:

$$1 \xrightarrow{f_{i+2}} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} 1.$$

Uma propriedade importante dessas sequências exatas é que f_{i+1} é injetora e f_i é sobrejetora. Por isso, é comum vermos a seguinte notação:

$$G_{i+1} \hookrightarrow G_i \twoheadrightarrow G_{i-1}.$$

Não é difícil ver que o seguinte lema é válido.

Lema 1.22 ([58])**.** *Sejam A, B, C grupos tais que vale a seguinte sequência exata:*

$$A \to B \to C \to 1.$$

Nessas condições, se A e C forem finitamente gerados (respectivamente finitos), então B também será finitamente gerado (respectivamente finito).

Note que o mesmo ocorre para a propriedade de solubilidade, mas não, para a propriedade de nilpotencia de grupos.

Capítulo 2

Construções Relacionadas ao Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

Neste capítulo, estamos interessados em construir e apresentar os resultados que consideramos relevantes para os próximos capítulos. Para tanto, dividiremos em duas seções. Na primeira parte falaremos sobre o produto tensorial não abeliano de dois grupos bem como os grupos $\eta(G,H)$ e $\nu(G)$ se relacionam ao mesmo. Na outra parte deste capítulo, mostraremos a construção do grupo de comutatividade fraca $\chi(G)$. Tentaremos abordar tais temas trazendo resultados de tal forma que este trabalho seja auto suficiente para o entendimento dos resultados esperados. Os resultados são mencionados sem as provas e com suas devidas referências.

2.1 Sobre O Produto Tensorial Não Abeliano de Dois Grupos

O produto tensorial não abeliano de grupos foi introduzido por Brown e Loday em [19] e [20] dentro do contexto da teoria de homotopia de grupos. Após isso, Ellis estudou alguns casos em que o produto tensorial não abeliano de grupos é finito ([30]). Outros autores como Rocco, Nakaoka e Guin deram continuidade no estudo do produto tensorial não abeliano de grupos sem o contexto geométrico, mas sim, buscando encontrar propriedades algébricas sobre o mesmo (veja [61], [56] e [35]). Vale citar também os trabalhos de Blyth, Morse e Redden em [17] e de Eick e Nickel em [29], que buscaram classificar o produto tensorial e realizar cálculos computacionais de um grupo com ele

mesmo quando for 2-Engel ou policíclico.

Sejam G e H grupos e ações de G sobre H e de H sobre G. Suponha que G age em si mesmo por conjugação. Nessas condições, diremos que a ação de G sobre H é *compatível*, se para quaisquer $g, g_1 \in G$, $h \in H$ valer que,

$$g_1^{h^g} = ((g_1^{g^{-1}})^h)^g. \tag{2.1}$$

Com a definição de ação compatível, é possível construir o produto tensorial entre dois grupos. Dessa forma, sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro e que agem entre si por conjugação. Então, o *Produto Tensorial não Abeliano* $G \otimes H$ é definido como um grupo gerado pelas expressões formais $g \otimes h$, com $g \in G$ e $h \in H$, sob as seguintes relações:

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{2.2}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}). \tag{2.3}$$

Nesta seção estamos interessados em descrever algumas propriedades pertinentes ao produto tensorial não abeliano de grupos. Observe que eventualmente omitiremos alguns resultados importantes, uma vez que nos ateremos ao necessário para a conclusão dos resultados dos Capítulos 3 e 4.

Teorema 2.1. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Então vale que:*

1. *(Ellis, [30]) Se G e H são finitos, então $G \otimes H$ é finito.*
2. *(Moravec, [50]) Se G e H são policíclicos, então $G \otimes H$ é policíclico.*
3. *(Visscher, [69, Teorema 3.4 (i)]) Se G e H são nilpotentes, então $G \otimes H$ é nilpotente.*

O próximo resultado é de Inassarídze, onde conseguiu estender uma sequência exata de grupos a uma sequência exata de produtos tensoriais.

Proposição 2.2 ([38, Teorema 1])**.** *Sejam A, B, C, D grupos. Suponha que vale a seguinte sequência exata curta:*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1.$$

Suponha que D age compativelmente sobre os grupos A, B e C e que A, B e C agem compativelmente sobre D. Além disso, se f e g preservam as ações, então vale a seguinte sequência exata:

$$A \otimes D \xrightarrow{f'} B \otimes D \xrightarrow{g'} C \otimes D \longrightarrow 1,$$

onde $f' = f \otimes 1$ e $g' = g \otimes 1$.

Para o próximo resultado relembremos que um A é dito ser um G-módulo se é $\mathbb{Z}[G]$-*módulo*. Além disso, existe um homomorfismo de anéis de $\mathbb{Z}[G]$ em $\mathbb{Z}$ dado por:

$$\Lambda : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$$
$$\sum_{j=1}^{n} z_j g_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} z_j.$$

O núcleo de Λ é chamado de *Ideal de Aumento de G* e será denotado por $I(G)$. Claramente $I(G)$ também é um G-módulo.

Proposição 2.3 ([35, Proposição 3.2])**.** *Sejam G um grupo e A um G-módulo. Se G age trivialmente sobre A, então*

$$G \otimes A \cong I(G) \otimes_G A.$$

Brown e Loday também mostraram em [20], um isomorfismo para $G \otimes H$ levando em consideração ações triviais. No caso deles, pediram que as duas ações envolvidas fossem triviais.

Proposição 2.4 ([20, Proposição 2.4])**.** *Sejam G e H grupos que agem trivialmente um sobre o outro. Então,*

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}.$$

Se G e H agem compativelmente um sobre o outro, então o derivativo de G sobre H é o subgrupo normal de G definido como:

$$D_H(G) := \langle g^{-1} g^h \mid g \in G, h \in H \rangle.$$

Donadze, Ladra e Thomas conseguiram relacionar a propriedade de $G \otimes H$ ser finitamente gerado com a propriedade de $D_H(G)$ e $D_G(H)$ serem finitamente gerados.

Proposição 2.5 ([28, Proposição 5.1])**.** *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Se G e H são finitamente gerados, então $G \otimes H$ é finitamente gerado se, e somente se, $D_H(G)$ e $D_G(H)$ são finitamente gerados.*

2.1.1 Sobre Módulos Cruzados

Associado ao produto tensorial, os módulos cruzados são homomorfismos muito importantes na construção do mesmo.

Definição 2.6. *Sejam G e H grupos. Um módulo cruzado é definido como um homomorfismo $\mu\colon G \to H$ com uma ação de grupo de H em G satisfazendo:*

1. $(g^h)\mu = h^{-1}(g)\mu h$
2. $g_1^{(g)\mu} = g^{-1}g_1 g$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h \in H$.

Observação 2.7. *Não é difícil ver que o núcleo de um módulo cruzado é um subgrupo central. De fato, se $g, g_1 \in G$ tal que $g \in Ker(\mu)$, pelo item 2 da definição anterior, temos que:*

$$g_1^g = g^{-1}g_1 g = g_1^{(g)\mu} = g_1.$$

Observe que a partir da definição de módulos cruzados, é possível construir ações compatíveis entre dois grupos da seguinte maneira:

Sejam G, H, M grupos. Se $\mu : G \to M$ e $\sigma : H \to M$ são módulos cruzados, então podemos definir ações de G em H e de H em G dadas por $h^g = h^{(g)\mu}$ e $g^h = g^{(h)\sigma}$ se $g \in G$ e $h \in H$. Com isso, G e H agem compativelmente um sobre o outro. De fato, se $g, g_1 \in G$ e $h \in h$, então,

$$\begin{aligned} g_1^{h^g} &= g_1^{(h^{(g)\mu})\sigma} \\ &= g_1^{(g)\mu^{-1}(h)\sigma(g)\mu} \quad \text{(item 1 da Definição 2.6)} \\ &= g_1^{g^{-1}(h)\sigma g} \quad \text{(item 2 da Definição 2.6)} \\ &= g_1^{g^{-1}hg}. \end{aligned}$$

O mesmo segue para o caso de H, isto é, se $g \in G$ e $h, h_1 \in H$, então

$$h_1^{g^h} = h_1^{h^{-1}gh}.$$

Com isso, podemos definir o produto tensorial $G \otimes H$.

Reciprocamente, dadas ações compatíveis de G e H, é possível definir módulos cruzados da seguinte forma:

Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro e agindo sobre si mesmos por conjugação. Defina o seguinte grupo:

$$M := \frac{G * H}{\mathcal{R}^{G*H}},$$

onde $\mathcal{R}$ é dado por

$$\mathcal{R} = \langle (g^h)^{-1}(h^{-1}gh),\ (h^g)^{-1}(g^{-1}hg) \mid g \in G, h \in H \rangle.$$

Note que estamos usando a notação "g^h" para indicar o elemento de G em que h está agindo sobre g. Agora, defina os seguintes homomorfismos:

$$\begin{aligned} \mu : G &\to M \\ g &\mapsto \overline{g}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma : H &\to M \\ h &\mapsto \overline{h}. \end{aligned}$$

Além disso, tomemos as ações de M sobre G e H induzidas das ações compatíveis dadas, isto é,

$$\begin{aligned} M \times G &\to G \\ (\overline{g}, g_1) &\mapsto g^{-1}g_1g \\ (\overline{h}, g) &\mapsto g^h, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M \times H &\to H \\ (\overline{h}, h_1) &\mapsto h^{-1}h_1h \\ (\overline{g}, h) &\mapsto h^g. \end{aligned}$$

Vale observar que essas ações só estão bem definidas porque G e H agem compativelmente um sobre o outro. Note que μ e σ são módulos cruzados. De fato, se $g, g_1 \in G$ e $m \in G*H$, então

$$(g^m)\mu = g^m = m^{-1}gm = m^{-1}(g)\mu\ m,$$

e

$$g_1^{(g)\mu} = g_1^g = g^{-1}g_1g.$$

Analogamente, é possível concluir que σ é módulo cruzado. Dessa forma, podemos definir ações compatíveis a partir de módulos cruzados ou vice-versa.

Brown e Loday mostraram em [20, Proposição 2.3], além de outros fatos, que existem dois módulos cruzados:

$$\begin{aligned} \lambda : G \otimes H &\to G \\ g \otimes h &\mapsto g^{-1}g^h, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda' : G \otimes H &\to H \\ g \otimes h &\mapsto h^{-g}h. \end{aligned}$$

Ainda por [20, Proposição 2.15], se tomarmos $\mu : G \to M$ e $\sigma : H \to M$ módulos cruzados induzidos das ações compatíveis de G e H, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G \otimes H & \xrightarrow{\lambda} & G \\ {\scriptstyle \lambda'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ H & \xrightarrow[\sigma]{} & M \end{array}$$

Existe uma construção relacionada diretamente ao produto tensorial não abeliano de grupos, que é o produto exterior não abeliano de grupos, que também foi introduzido em [20].

Definição 2.8. *Sejam G, H, M grupos, $\mu : G \to M$ e $\sigma : H \to M$ módulos cruzados. O produto exterior não-abeliano $G \wedge H$ é definido como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ para $g \in G$ e $h \in H$, sujeito às relações:*

- $gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h)$
- $g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$
- $g \otimes h = 1$ *se* $(g)\mu = (h)\sigma$,

para todos $g, g_1 \in G$ *e* $h, h_1 \in H$*. Em particular,*

$$G \wedge H \cong \frac{G \otimes H}{\langle g \otimes h | (g,h) \in G \times_M H \rangle^{G \otimes H}},$$

onde $G \times_M H := \{(g,h) \in G \times H \mid (g)\mu = (h)\sigma\}$.

Quando $G = H$ e as ações são por conjugação, podemos construir a diagonal de $G \otimes G$ da seguinte forma:

Definição 2.9. *Seja* G *um grupo. Então a diagonal* $\Delta(G)$ *é dada por*

$$\Delta(G) := \langle\ g \otimes g \mid g \in G\ \rangle \lhd G \otimes G.$$

Observe que por [62], temos que

$$G \wedge G \cong \frac{G \otimes G}{\Delta(G)}.$$

Proposição 2.10 ([62, Proposição 3.3])**.** *Seja* $X = \{x_i\}_{i \in I}$ *um conjunto de geradores de* G*, onde* I *é um conjunto totalmente ordenado. Então* $\Delta(G)$ *é gerado pelo conjunto*

$$\Delta := \left\{(x_i \otimes x_i),\ (x_j \otimes x_k)(x_k \otimes x_j) \mid i,j,k \in I,\ j < k\right\}$$

A partir do produto exterior $G \wedge H$, podemos também definir módulos cruzados como λ e λ', isto é,

$$\begin{aligned} \phi : G \wedge H &\to G \\ g \wedge h &\mapsto g^{-1}g^h, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi' : G \wedge H &\to H \\ g \wedge h &\mapsto h^{-1}h^g. \end{aligned}$$

2.2 Sobre $\eta(G,H)$ e $\nu(G)$

Seja H^φ uma cópia extra de H, isomorfa via $\varphi : H \to H^\varphi,\ h \mapsto h^\varphi$, para todo $h \in H$. Considere o grupo $\eta(G,H)$ definido em [56] como,

$$\begin{aligned} \eta(G,H) = \langle G \cup H^\varphi \mid\ & [g,h^\varphi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi],\ [g,h^\varphi]^{h_1^\varphi} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^\varphi], \\ & \forall g, g_1 \in G,\ h, h_1 \in H \rangle. \end{aligned}$$

No mesmo artigo, Nakaoka mostrou como $\eta(G,H)$ se relaciona ao produto tensorial $G \otimes H$.

Proposição 2.11 ([56, Proposição 2.2]). *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro e por conjugação entre si. Então,*

$$G \otimes H \cong [G, H^{\varphi}] \lhd \eta(G,H).$$

Quando estivermos trabalhando em $\eta(G,H)$, denotaremos os subgrupos derivativos $D_H(G)$ e $D_G(H)$, respectivamente como $[G,H]$ e $[H,G]$.

Teorema 2.12 ([56, Teorema A]). *Para qualquer inteiro $i \geq 2$ vale que*

$$\gamma_i(G \otimes H) \cong [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}],$$

e

$$(G \otimes H)^{(i)} \cong \left[[G,H]^{(i-1)}, \left([H,G]^{(i-1)}\right)^{\varphi} \right].$$

Observe que o Teorema anterior nos garante que $G \otimes H$ é fechado em relação às classes de nilpotência e de solubilidade de grupos.

Agora, suponha $H = G$ e as ações entre um e outro por conjugação. O grupo $\nu(G)$ é definido por:

$$\nu(G) = \langle G \cup G^{\varphi} \mid \ [g,h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}],\ [g,h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}], \\ \forall g, g_1, h, h_1 \in G \rangle.$$

Observe que a estrutura de ν é um caso particular de η. Tal grupo foi apresentado pela primeira vez por Rocco em [61]. Outros autores como Nakaoka, Bastos, Monetta, Oliveira, de Melo, Gonçalves, Moravec, Morse, Eick e Nickel (veja [56], [54], [55], [29], [5], [12]) investigaram propriedades relacionadas a essa construção, bem como seus subgrupos e seções. Considere os seguintes homomorfismos:

$$\rho : \nu(G) \to G$$

$$g \mapsto g$$

$$g^{\varphi} \mapsto g,$$

e $\rho' := \rho|_{[G,G^{\varphi}]}$. Temos que o núcleo de ρ será denotado por $\theta(G)$ e o núcleo de ρ' por $\mu(G)$. Temos alguns subgrupos importantes que devem ser considerados:

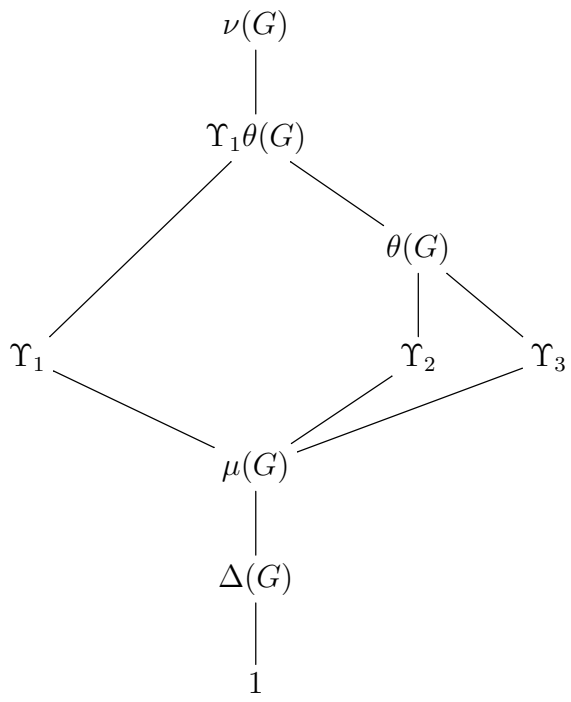
$$\Upsilon_1 := [G, G^{\varphi}];$$

$$\Upsilon_2 := [\theta(G), G];$$

$$\Upsilon_3 := [\theta(G), G^{\varphi}];$$

$$\Delta(G) := \langle [g, g^{\varphi}] \mid g \in G \rangle.$$

Podemos escrever o seguinte diagrama:



A respeito de $\mu(G)$, Rocco mostrou em [62] uma importante propriedade que relaciona uma seção de $\mu(G)$ com o Multiplicador de Schur de G.

Proposição 2.13 ([62, Proposição 2.8]). *A seção $\mu(G)/\Delta$ é isomorfa ao Multiplicador de Schur $M(G) = H_2(G)$.*

Relembramos que $H_2(G)$ é o segundo grupo de homologia de G. Relacionado aos grupos de Homologia de G, veja [44] para mais detalhes. Além disso, vale mencionar que a Proposição 2.13 decorre do fato de que

$$G \otimes G \cong [G, G^{\varphi}].$$

Tal isomorfismo foi provado primeiramente em [61, Proposição 2.6] e também foi inspiração para a Proposição 2.11 e do Teorema 2.16 que veremos a seguir.

Proposição 2.14 ([30, Teorema 7]). *Sejam N, G, Q grupos tais que a seguinte sequência exata vale:*

$$1 \to N \to G \to Q \to 1.$$

Nessas condições temos a seguinte sequência exata:

$$H_3(Q) \to ker(\phi' : G \wedge N \to N) \to H_2(G).$$

Onde $H_3(Q)$ é o terceiro grupo de homologia de Q.

Definição 2.15. *Sejam G um grupo e $K_1, K_2, \cdots, K_l$ subgrupos normais de G. Diremos que G é produto central de $K_1, K_2, \cdots, K_l$ se:*

(i) $G = K_1K_2\cdots K_l$;

(ii) $[K_i, K_j] = 1$ *para quaisquer* $i, j \in \{1, \cdots, l\}$ *e* $i \neq j$;

(iii) $K_i \cap \prod_{j\neq i} K_j \leq Z(G)$ *para qualquer* $i \in \{1, \cdots, l\}$.

Em relação às propriedades estruturais das séries central inferior e série derivada de $\nu(G)$, temos os seguintes resultados.

Teorema 2.16 ([12, Teorema A, Teorema B])**.** *Seja G um grupo. Então,*

(i) Os subgrupos Υ_i são isomorfos a $G \otimes G$, com $i = 1, 2, 3$;

(ii) o subgrupo derivado $\nu'(G)$ é o produto central dos subgrupos Υ_1, Υ_2 e Υ_3;

(iii) $\nu(G)^{(k+1)} = \Upsilon_1^{(k)}\Upsilon_2^{(k)}\Upsilon_3^{(k)}$,$k>0$.

Além disso, $\nu'(G)$ é isomorfo a $G' \times G' \times G'$ módulo $\mu(G)$.

Teorema 2.17 ([12, Teorema C])**.** *Sejam G um grupo e $k \geq 2$. Então,*

$$\gamma_k(\nu(G)) = [\Upsilon_{1,k-2}\, G][\Upsilon_{2,k-2}\, G][\Upsilon_{3,k-2}\, G^{\varphi}].$$

Além disso, Rocco também construiu as séries central inferior e série derivada de $\nu(G)$ em [61] de uma maneira diferente. Como segue:

Teorema 2.18. *Sejam G um grupo e i um inteiro positivo. Então,*

1. *([61, Teorema 3.1])* $\gamma_i(\nu(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^{\varphi})[\gamma_{i-1}(G), G^{\varphi}][G, \gamma_{i-1}(G^{\varphi})]$;
2. *([61, Teorema 3.3])* $\nu(G)^{(i)} = G^{(i)}(G^{(i)})^{\varphi}[G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^{\varphi}]$.

2.3 Sobre O Grupo de Comutatividade Fraca

Sejam G um grupo e G^{φ} uma cópia isomorfa de G. O *Grupo de Comutatividade Fraca* $\chi(G)$ é definido como

$$\chi(G) := \langle G \cup G^{\varphi} \mid [g, g^{\varphi}], g \in G\rangle.$$

Sidki introduziu o grupo de comutatividade fraca $\chi(G)$ em [66]. Tal grupo chamou atenção por possuir boas propriedades de finitude (mais precisamente, Sidki mostrou que se G é finito, então $\chi(G)$ também é) e foi estudado por diversos autores (veja [60], [37], [45], [18], [7]). No estudo da $\chi(G)$ aparecem alguns subgrupos normais importantes para o estudo do mesmo, sendo eles:

- $L(G) := \langle g^{-1}g^{\varphi} | \, g \in G \, \rangle$;
- $D(G) := [G, G^{\varphi}]$;
- $L_1(G) = [L(G), G]$;
- $L_2(G) = [L(G), G^{\varphi}]$;
- $W(G) := L(G) \cap D(G) = L_1(G) \cap L_2(G)$;
- $R(G) := [L_1(G), G^{\varphi}] = [L_2(G), G]$.
- $L_{1,2}(G) := [L_1(G), L_2(G)]$

Para simplificar a escrita, denotaremos $g^{-1}g^{\varphi}$ como $[g, \varphi]$ e $g^{-\varphi}g$ como $[\varphi, g]$, onde $g \in G$. Além disso, omitiremos as indexações de G nos subgrupos quando não houver perda de generalidade, isto é

$$L = L(G); D = D(G); L_1 = L_1(G); L_2 = L_2(G); W = W(G); R = R(G); L_{1,2} = L_{1,2}(G).$$

Proposição 2.19 ([66, Proposição 4.1.7])**.** *Seja G um grupo. Valem as seguintes propriedades:*

(i) φ centraliza D;

(ii) D centraliza L;

(iii) W consiste em todos os elementos da forma

$$\prod_{i=1}^{n} [g_i, h_i^{\varphi}],$$

tal que

$$\prod_{i=1}^{n} [g_i, h_i] = 1,$$

Onde $g_i, h_i \in G$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposição 2.20 ([66, Proposição 4.1.4]). *Seja G um grupo. Então, em $\chi(G)$ vale*

$$D \cap G = L \cap G = 1 \qquad e \qquad \chi(G) = LG$$

Devido à construção da $\chi(G)$, é possível construir os seguintes homomorfismos sobrejetores:

$$\begin{aligned} \alpha : \chi(G) &\to G \\ g &\mapsto g \\ g^{\varphi} &\mapsto g. \end{aligned}$$

Com isso, temos que $Ker(\alpha) = L$. Outro epimorfismo importante dessa construção é:

$$\begin{aligned} \beta : \chi(G) &\to G \times G \\ g &\mapsto (g, 1) \\ g^{\varphi} &\mapsto (1, g). \end{aligned}$$

Temos que $Ker(\beta) = D$. Ainda, consideremos o epimorfismo:

$$\begin{aligned} \gamma : D &\to G' \\ [g, h^{\varphi}] &\mapsto [g, h]. \end{aligned}$$

Onde $Ker(\gamma) = W$. Por fim, podemos relacionar também $\chi(G)$ com o grupo abelianizado de G com o seguinte epimorfismo:

$$\begin{aligned} \theta : \chi(G) &\to G^{ab} \\ g &\mapsto gG' \\ g^{\varphi} &\mapsto gG'. \end{aligned}$$

Temos que $Ker(\theta) = DL$. Esses homomorfismos são os relacionados a G, entretanto, existem outras seções de $\chi(G)$ que se relacionam com outras construções relevantes na teoria de grupos. Sidki demonstrou em [66] um resultado que relaciona uma seção de $\chi(G)$ com o Multiplicador de Schur $M(G)$ (veja também [60]).

Teorema 2.21 ([66, Teorema C]). *Seja G um Grupo. Então os subgrupos normais W e R de $\chi(G)$ que possuem fator isomorfo ao Multiplicador de Schur $M(G)$, isto é,*

$$\frac{W}{R} \cong M(G).$$

O estudo das seções de $\chi(G)$ continuou com Rocco [60] que concluiu que

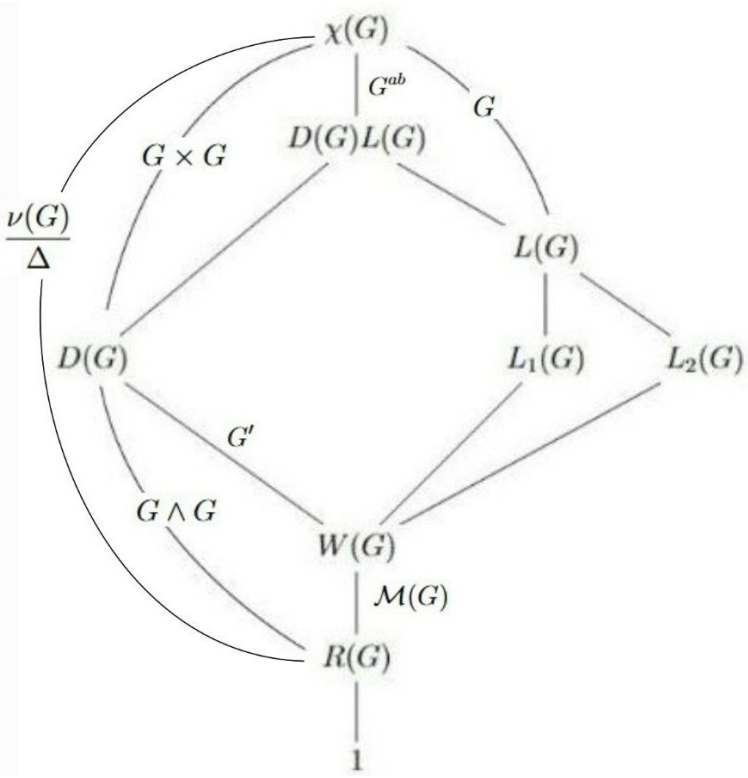
$$\frac{\nu(G)}{\Delta(G)} \cong \frac{\chi(G)}{R},$$

e para o quadrado exterior não abeliano $G \wedge G$ vale que

$$G \wedge G \cong \frac{[G, G^{\varphi}]}{\Delta(G)} \cong \frac{D}{R}.$$

Aqui vale relembrar os primeiros trabalhos feitos sobre $\chi(G)$, sendo eles [66], [60] e [37]. Estaremos focados em explorar possíveis generalizações de alguns resultados destes.

Podemos expressar essas construções no seguinte diagrama:



O grupo $\chi(G)$ possui ótimas propriedades de cálculo. Segue um lema importante que mostra algumas propriedades de identidade de comutadores presentes em [37] e em [66].

Lema 2.22 ([37, Lema 2.1]). *As seguintes relações valem em $\chi(G)$, para todos $x, y, y_i, z, z_i \in G$.*

(i) $[x, y^{\varphi}] = [x^{\varphi}, y]$;

(ii) $[x, y^{\varphi}]^{z^{\varphi}} = [x, y^{\varphi}]^{z}$;

(iii) $[x, y^{\varphi}]^{\omega(z_1^{\varepsilon_1}, \ldots, z_n^{\varepsilon_n})} = [x, y^{\varphi}]^{\omega(z_1, \ldots, z_n)}$ *para $\varepsilon_i \in \{1, \varphi\}$ e qualquer elemento $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ de G;*

(iv) $[x^{\varphi}, y, x] = [x, y, x^{\varphi}]$;

(v) $[x^{\varphi}, y_1, \ldots, y_n, x] = [x, y_1, \ldots, y_n, x^{\varphi}]$.

Lema 2.23 ([66, Lema 4.1.6]). *Sejam $g, h \in G$. As seguintes identidades valem em $\chi(G)$.*

(i) $[\varphi, g, h] = [g, h][h, g^{\varphi}] = [h, g^{\varphi}][g, h]$;

(ii) $[g, \varphi, h^{\varphi}] = [g^{\varphi}, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}] = [h, g^{\varphi}][g^{\varphi}, h^{\varphi}]$.

Demonstração. Sejam $g, h \in G$, então

$$\begin{aligned}
[\varphi, g, h] &= [g^{-\varphi} g, h] \\
&= [g^{-\varphi}, h]^{g}[g, h] \\
&= [g^{-\varphi}, h]^{g^{\varphi}}[g, h] \text{ (Lemma 2.22)} \\
&= [g^{\varphi}, h]^{-1}[g, h] \\
&= [h, g^{\varphi}][g, h],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[h, g^{\varphi}][g, h] &= [g, h][g, h]^{-1}[h, g^{\varphi}][g, h] \\
&= [g, h][h, g^{\varphi}]^{[g,h]} \\
&= [g, h][h, g^{\varphi}]^{[g^{\varphi},h]} \text{ (Lemma 2.22)} \\
&= [g, h][h, g^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Agora, para o item (ii), teremos que

$$\begin{aligned}
[g, \varphi, h^{\varphi}] &= [g^{-1} g^{\varphi}, h^{\varphi}] \\
&= [g^{-1}, h^{\varphi}]^{g^{\varphi}}[g^{\varphi}, h^{\varphi}] \\
&= [g^{-1}, h^{\varphi}]^{g}[g^{\varphi}, h^{\varphi}] \text{ (Lemma 2.22)} \\
&= [g, h^{\varphi}]^{-1}[g^{\varphi}, h^{\varphi}] \\
&= [h^{\varphi}, g][g^{\varphi}, h^{\varphi}],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[h^{\varphi}, g][g^{\varphi}, h^{\varphi}] &= [g^{\varphi}, h^{\varphi}][g^{\varphi}, h^{\varphi}]^{-1}[h^{\varphi}, g][g^{\varphi}, h^{\varphi}] \\
&= [g^{\varphi}, h^{\varphi}][h^{\varphi}, g]^{[g^{\varphi},h^{\varphi}]} \\
&= [g^{\varphi}, h^{\varphi}][h^{\varphi}, g]^{[g,h^{\varphi}]} \text{ (Lemma 2.22)} \\
&= [g^{\varphi}, h^{\varphi}][h^{\varphi}, g].
\end{aligned}$$

□

Outro fato importante a ser destacado é que o grupo $\chi(G)$ preserva algumas propriedades do grupo G. Em verdade, nosso objetivo geral é encontrar propriedades que são preservadas quando "estendemos" um grupo através do grupo de comutatividade fraca.

Teorema 2.24 ([66, Teorema C]). *Seja $\mathcal{P}$ uma das propriedades a seguir: finito, π-grupo finito (onde π é um conjunto de primos), nilpotente finito, solúvel, perfeito. Então,*

$$G \text{ é um } \mathcal{P}\text{-grupo} \Rightarrow \chi(G) \text{ é um } \mathcal{P}\text{-grupo.}$$

Resultados associados à busca de propriedades de fecho de $\chi(G)$ foram abordados por vários outros autores. Como exemplo disso, vejamos algumas das propriedades estudadas em [13], [45] e [42].

Teorema 2.25 ([45, Teorema 1]). *Seja G um grupo policíclico por finito. Então, $\chi(G)$ e $G \otimes G$ são policíclicos por finito.*

Teorema 2.26 ([13, Teorema B]). *Suponha que $\mathcal{P}$ é uma propriedade de grupos que satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\mathcal{P}$ é fechado em relação a subgrupos e imagens homomórficas;

(2) $\mathcal{P}$ é preservado por χ.

Nessas condições, se G é localmente $\mathcal{P}$, então $\chi(G)$ é também localmente $\mathcal{P}$.

Proposição 2.27 ([66, Corolário 4.1.8]). *Seja G um grupo solúvel de comprimento derivado d. Então $\chi(G)$ será solúvel de comprimento derivado no máximo $d+1$.*

O grupo $\chi(G)$ também é muito estudado no contexto de seus subgrupos e quocientes. Como descrito anteriormente, Rocco demonstrou em [62, Teorema 2.11] que

$$\frac{\chi(G)}{R} \cong \frac{\nu(G)}{\Delta(G)}.$$

Com isso, podemos observar que a estrutura de $\chi(G)/R$ ficou bem conhecida, enquanto que a estrutura de R, nem tanto assim. Podemos citar alguns trabalhos como [45] e [41], onde encontraram condições para G em que R se torna trivial. Assim, focamos nossos esforços para entender melhor as propriedades do mesmo. Para tanto, consideremos primeiramente G um grupo abeliano. Nessas condições, Sidki mostrou o seguinte resultado estrutural.

Teorema 2.28 ([66, Teorema 4.2.1]). *Seja G um grupo abeliano. Então vale que*

(i) $D = W = L_1 = L_2$;

(ii) $R = [D, G] = [L_1, G]$;

(iii) L *é nilpotente de classe* ≤ 2, $L' \leq D \leq Z(L)$ *e* $L' \leq Z(\chi(G))$;

(iv) $L' = D^2 = [G^2, G^\varphi]$, $R^2 = 1$.

Continuando com a descrição de propriedades do grupo de comutatividade fraca, Kochloukova e Bridson mostraram em [18] uma condição necessária e suficiente para $\chi(G)$ ser finitamente apresentado.

Teorema 2.29 ([18, Teorema A]). *Seja G um grupo. Então $\chi(G)$ é finitamente apresentado se, e somente se, G também for.*

Nosso objetivo no capítulo 4 será encontrar propriedades de finitude para os subgrupos R e $L_{1,2}$, bem como propriedades da série central inferior e série derivada de $\chi(G)$. Veremos também como essas séries se relacionam com R e $L_{1,2}$ em alguns de seus termos.

Capítulo 3

n-ésimo Produto Tensorial Não Abeliano de Um Grupo

Nesta seção estamos interessados em construir e expor algumas propriedades para o n-ésimo produto tensorial não abeliano de grupos. Para tal, consideremos uma ação definida de G em $G \otimes G$ dada por

$$(g_1 \otimes g_2)^{g_3} = g_1^{g_3} \otimes g_2^{g_3},$$

onde $g_i \in G$. Além disso, há uma ação natural de $G \otimes G$ em G dada por

$$g_1^{g_2 \otimes g_3} = g_1^{[g_2, g_3]}.$$

Lema 3.1. *Estas ações de G sobre $G \otimes G$ e de $G \otimes G$ sobre G são compatíveis.*

Demonstração. Sejam $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \in G$. Então,

$$\begin{aligned}(g_1 \otimes g_2)^{g_3^{g_4 \otimes g_5}} &= (g_1 \otimes g_2)^{g_3^{[g_4, g_5]}} = (g_1 \otimes g_2)^{[g_4, g_5]^{-1} g_3 [g_4, g_5]} \\ &= (g_1^{[g_4, g_5]^{-1} g_3 [g_4, g_5]} \otimes g_2^{[g_4, g_5]^{-1} g_3 [g_4, g_5]}) \\ &= (g_1^{(g_4 \otimes g_5)^{-1} g_3 (g_4 \otimes g_5)} \otimes g_2^{(g_4 \otimes g_5)^{-1} g_3 (g_4 \otimes g_5)}) \\ &= (g_1 \otimes g_2)^{(g_4 \otimes g_5)^{-1} g_3 (g_4 \otimes g_5)},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}g_1^{(g_2 \otimes g_3)^{g_4}} &= g_1^{(g_2^{g_4} \otimes g_3^{g_4})} = g_1^{[g_2^{g_4}, g_3^{g_4}]} \\ &= g_1^{[g_2, g_3]^{g_4}} = g_1^{g_4^{-1} [g_2, g_3] g_4}.\end{aligned}$$

□

Com isso, o produto tensorial $(G \otimes G) \otimes G$ está bem definido e denotaremos tal grupo como $G^{\otimes 3}$. Além disso, dados $g_1, g_2, g_3 \in G$, escreveremos o elemento $(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3$

simplesmente como $g_1 \otimes g_2 \otimes g_3$. Vale ressaltar que poderíamos fazer uma construção da forma $G \otimes (G \otimes G)$. Não é difícil ver que existe um anti-isomorfismo entre $G \otimes (G \otimes G)$ e $(G \otimes G) \otimes G$. Logo, existe uma certa forma de associatividade entre tais construções.

Indutivamente, seja $n \geq 2$, defina a ação de G em $G^{\otimes n}$ e a ação de $G^{\otimes n}$ em G respectivamente como

$$(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n)^h = (g_1^h \otimes g_2^h \otimes \cdots \otimes g_n^h),$$

e

$$h^{(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n)} = h^{[g_1, g_2, \cdots, g_n]},$$

onde $g_1, g_2 \cdots g_n, h \in G$.

Lema 3.2. *Estas ações são compatíveis.*

Demonstração. Sejam $g_1, g_2 \cdots g_n, h_1, h_2 \cdots, h_n, a, b \in G$. Então, para $x = (g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n)^{a^{(h_1 \otimes h_2 \otimes \cdots \otimes h_n)}}$,

$$\begin{aligned}
x &= (g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n)^{a^{(h_1 \otimes h_2 \otimes \cdots \otimes h_n)}} \\
&= (g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n)^{a^{[h_1, h_2, \cdots, h_n]}} \\
&= (g_1^{a^{[h_1, h_2, \cdots, h_n]}} \otimes g_2^{a^{[h_1, h_2, \cdots, h_n]}} \otimes \cdots \otimes g_n^{a^{[h_1, h_2, \cdots, h_n]}}) \\
&= (g_1^{[h_1, h_2, \cdots, h_n]^{-1} a [h_1, h_2, \cdots, h_n]} \otimes g_2^{[h_1, h_2, \cdots, h_n]^{-1} a [h_1, h_2, \cdots, h_n]} \otimes \cdots \otimes g_n^{[h_1, h_2, \cdots, h_n]^{-1} a [h_1, h_2, \cdots, h_n]}) \\
&= (g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n)^{(h_1 \otimes h_2 \otimes \cdots \otimes h_n)^{-1} a (h_1 \otimes h_2 \otimes \cdots \otimes h_n)},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a^{(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n)^b} &= a^{(g_1^b \otimes g_2^b \otimes \cdots \otimes g_n^b)} \\
&= a^{[g_1^b, g_2^b, \cdots, g_n^b]} \\
&= a^{[g_1, g_2, \cdots, g_n]^b} \\
&= a^{b^{-1}[g_1, g_2, \cdots, g_n] b}.
\end{aligned}$$

□

Portanto, o $n+1$-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n+1}$ está bem definido.

Seguindo no estudo dos n-ésimos produtos tensoriais de G, é possível encontrar aplicações induzidas dos módulos cruzados mostrados por Brown e Loday em [20, Proposição 2.3] da seguinte maneira:

$$\lambda_n^G \colon G^{\otimes n} \to \gamma_n(G)$$
$$(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_{n-1}) \otimes g_n \mapsto [g_1, g_2, \cdots, g_n].$$

Lema 3.3. *Para qualquer $n \geq 2$, vale que λ_n^G é homomorfismo.*

Demonstração. De fato, por [20, Proposição 2.3], temos o seguinte homomorfismo:

$$\lambda \colon G^{\otimes n-1} \otimes G \to D_{G^{\otimes n-1}}(G)$$
$$(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_{n-1}) \otimes g_n \mapsto g_n^{-1} g_n^{(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_{n-1})}.$$

com $n \geq 2$. Agora, observe que o subgrupo derivativo $D_{G^{\otimes n-1}}(G)$ coincide com $\gamma_n(G)$. De fato, se $g_1, \cdots, g_n \in G$, então

$$\begin{aligned} g_n^{-1} g_n^{(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_{n-1})} &= g_n^{-1} g_n^{[g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}]} \\ &= [g_n, [g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}]] \\ &= [g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}, g_n]^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, os geradores de $D_{G^{\otimes n-1}}(G)$ e $\gamma_n(G)$ são os mesmos elementos. Dessa forma, segue que $\lambda = \lambda_n^G$ o que conclui a demonstração. □

De acordo com a Proposição 2.13 (veja também [49, Teorema 3]), a sequência

$$1 \to \Delta(G) \to \ker(\lambda_2^G) \to H_2(G) \to 1$$

é exata, onde $\Delta(G)$ é a diagonal de G da Definição 2.9 e $H_2(G)$ é o segundo grupo de homologia do grupo G. Ao decorrer deste capítulo, estaremos interessados em trabalhar com sequências exatas para a obtenção dos resultados esperados.

Estamos interessados em explorar condições de finitude do n-ésimo produto tensorial de G. Nesse contexto, muitos autores estudaram as propriedades de finitude do produto tensorial não abeliano de grupos. De maneira geral, deve-se a Ellis em [30] (veja Teorema 2.1) o início do estudo das propriedades de finitude. Após isso, outros autores em [68], [52], [8] e [28] (veja Proposição 2.5) deram continuidade ao mesmo.

Nossa intenção é definir alguns parâmetros para $G^{\otimes n}$ levando em consideração os resultados existentes do produto tensorial.

Lembremos que segundo a Proposição 2.5, Donadze, Ladra e Thomas provaram que se G, H são finitamente gerados, vale que $G \otimes H$ é finitamente gerado se, e somente se, $D_H(G)$ e $D_G(H)$ são finitamente gerados. Com isso, Donadze e García-Martínez provaram o seguinte resultado relacionado a tal fato:

Teorema 3.4 ([26]). *Seja G um grupo finitamente gerado. Então $G^{\otimes n}$ é finitamente gerado se e somente se o subgrupo $\gamma_n(G)$ é finitamente gerado.*

Os resultados obtidos nesse capítulo estão publicados em colaboração com Raimundo Bastos em [15]. O Teorema a seguir foi proposto, originalmente, pelo Professor Doutor Guram Donadze.

Teorema 3.5. *Seja G um grupo finitamente apresentado. Então, o n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é finitamente apresentado se, e somente se, $\gamma_n(G)$ é finitamente apresentado.*

Observe que, no caso de $n = 2$, Brown, Johnson e Robertson mostraram em [21, Proposição 6] que, se um grupo G é livre de ranque m, então o quadrado tensorial $G \otimes G$ é isomorfo ao produto direto $G' \times \mathbb{Z}^{m(m+1)/2}$. Se tomarmos $m \geq 2$, então G' não é finitamente apresentado, o que implica que $G \otimes G$ não é finitamente gerado, em particular, não é finitamente apresentado.

Prosseguindo com o estudo das propriedades de finitude, podemos observar que um grupo G ser finito implica em $G^{\otimes n}$ ser finito. Entretanto a finitude de $G^{\otimes n}$ não implica na finitude de G. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.6. *Se $G = C_{p^\infty}$ é o grupo de Prüfer, então $G^{\otimes n}$ é trivial, para qualquer $n \geqslant 2$. De fato, como G é um grupo divisível de torção, vale que para quaisquer $g, h \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$,*

$$g^n \otimes h = (g \otimes h)^n = g \otimes h^n.$$

Agora, suponha que h tenha ordem m. Temos que existe $g_1 \in G$ tal que $g = g_1^m$. Portanto,

$$g \otimes h = g_1^m \otimes h = g_1 \otimes h^m = 1.$$

Assim, $G \otimes G = 1$.

Observe que no exemplo anterior, o quadrado tensorial é trivial por conta de G ser um grupo divisível de torção. Dessa forma, devemos impor outras condições para um grupo G a fim de conseguir propriedades de finitude de $G^{\otimes n}$.

Teorema 3.7. *Seja G um grupo finitamente gerado.*

1. *O n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é finito se, e somente se, G é finito.*

2. *O n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é policíclico se, e somente se, G é policíclico.*

Esta seção será dividida na seguinte maneira. Primeiramente, construiremos homomorfismos de $G^{\otimes n}$ a partir de módulos cruzados. Além disso, construiremos uma sequência exata que será utilizada posteriormente. A seguir, estudaremos algumas propriedades de fecho para o n-ésimo produto tensorial de G. Após isso, demonstraremos os resultados expostos sobre condições de finitude de $G^{\otimes n}$. Na última parte, focaremos em explorar resultados a partir de algumas classes de grupos.

3.1 Produto Tensorial Não-Abeliano de Grupos

Podemos fazer uma construção de módulos cruzados para o n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ que segue diretamente de Brown e Loday [20]. Seja G um grupo. A aplicação identidade $Id_G\colon G \to G$ é um módulo cruzado com G agindo por conjugação. Tomemos o homomorfismo $\lambda_2^G\colon G^{\otimes 2} \to G$, dado por $g \otimes h \mapsto g^{-1}g^h$ que é um módulo cruzado. As ações induzidas dos módulos cruzados são compatíveis, o que implica na existência do produto tensorial $(G \otimes G) \otimes G$.

Definição 3.8. *O produto tensorial $(G \otimes G) \otimes G$ como definido anteriormente será denotado como $G^{\otimes 3}$.*

O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G^{\otimes 3} & \xrightarrow{\lambda_3} & G^{\otimes 2} \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_3^G} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_2^G} \\ G & \xrightarrow[Id_G]{} & G. \end{array}$$

Onde λ_3 é dado como

$$\lambda_3\colon G^{\otimes 3} \to G^{\otimes 2}$$

$$(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3) \mapsto (g_1 \otimes g_2)^{-1}(g_1^{g_3} \otimes g_2^{g_3}),$$

e λ_3^G é como definido na seção anterior. Note que por [20, Proposição 2.3], λ_3 e λ_3^G são módulos cruzados. Dessa forma, podemos definir indutivamente o n-ésimo produto tensorial não abeliano de G, isto é,

Definição 3.9. *O n-ésimo produto tensorial não abeliano $G^{\otimes n}$, $n \geq 3$ é definido como $G^{\otimes n} := G^{\otimes n-1} \otimes G$, onde*

$$g^{g_1 \otimes \ \cdots \ \otimes g_{n-1}} = g^{[g_1,\cdots,g_{n-1}]} \quad e \quad (g_1 \otimes \ \cdots \ \otimes g_{n-1})^g = g_1^g \otimes \ \cdots \ \otimes g_{n-1}^g,$$

para cada $g, g_1, \cdots, g_{n-1} \in G$.

Além disso, temos os módulos cruzados $\lambda_n^G \colon G^{\otimes n} \to G$, dados por

$$\lambda_n^G(g_1 \otimes \ldots \otimes g_{n-1} \otimes g_n) = [g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n].$$

Portanto, podemos escrever o diagrama comutativo anterior da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\lambda_{n+2}} & G^{\otimes n+1} & \xrightarrow{\lambda_{n+1}} & G^{\otimes n} & \xrightarrow{\lambda_n} & G^{\otimes n-1} & \xrightarrow{\lambda_{n-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{n+1}^G} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_n^G} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{n-1}^G} & & \\
\cdots & \xrightarrow[Id_G]{} & G & \xrightarrow[Id_G]{} & G & \xrightarrow[Id_G]{} & G & \xrightarrow[Id_G]{} & \cdots .
\end{array}$$

Em particular, podemos reescrever $\lambda_n^G \colon G^{\otimes n} \to \gamma_n(G)$. Além disso, como λ_n^G é um módulo cruzado, segue da Observação 2.7 que $\ker(\lambda_n^G)$ é um subgrupo central de $G^{\otimes n}$.

Em termos da Definição 2.8, podemos definir o n-ésimo produto exterior $G^{\wedge n}$ e similarmente, um módulo cruzado, dado por

$$\begin{array}{rcl}
\partial_n^G \colon G^{\wedge n} & \to & \gamma_n(G) \\
(g_1 \wedge \ldots \wedge g_{n-1}) \wedge g_n & \mapsto & [g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n].
\end{array} \tag{3.3}$$

Precisamos expor o conceito de Functor quadrático de Whitehead, definido em [72]

Definição 3.10. *Seja A um grupo abeliano. O Functor Quadrático de Whitehead é definido como o grupo abeliano $\Gamma(A)$ gerado pelas letras da forma $w(a)$ e $w(-b)$, onde $a, b \in A$, sob as seguintes relações:*

$$w(-a) = w(a);$$

$$w(a+b+c) - w(b+c) - w(c+a) - w(a+b) + w(a) + w(b) + w(c) = 0,$$

para quaisquer $a, b, c \in A$.

Se A é um grupo finitamente gerado, então, pelas relações definidoras de $\Gamma(A)$, é possível concluir que $\Gamma(A)$ também é finitamente gerado. Com isso, faz sentido pensarmos em estudar sequências exatas em que $\Gamma(G)$ aparece em um dos termos da sequência. Vejamos o resultado a seguir.

Proposição 3.11. *Sejam G, H e M grupos. Suponha que $\mu : G \to M$ e $\nu : H \to M$ são módulos cruzados.*

1. *(Brown and Loday, [20, Teorema 2.12]) Existe uma sequência exata:*

$$\Gamma\big((G \times_M H)/\{G, H\}\big) \to G \otimes H \to G \wedge H \to 1,$$

onde $\{G, H\}$ é a imagem de $\lambda \times \lambda'$ e $G \times_M H = \{g \times h \in G \times H \mid \mu(g) = \nu(h)\}$.

2. *Seja G um grupo e n um inteiro positivo. Então a seguinte sequência é exata:*

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big) \to \ker\Big([\ ,\ ]_\otimes : G \otimes \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to$$

$$\to \ker\Big([\ ,\ ]_\wedge : G \wedge \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to 1.$$

Onde, $[\ ,\ ]_\otimes : G \otimes \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)$ e $[\ ,\ ]_\wedge : G \wedge \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)$ são homomorfismos dados por $(g \otimes [g_1, \ldots, g_n])[\ ,\ ]_\otimes = [g, [g_1, \ldots, g_n]]$ e $(g \wedge [g_1, \ldots, g_n])[\ ,\ ]_\wedge = [g, [g_1, \ldots, g_n]]$, respectivamente.

Demonstração. (2) Considere a inclusão $\iota\colon \gamma_n(G) \to G$ e a identidade $Id_G\colon G \to G$. Por definição, ι e Id_G são módulos cruzados. Além disso, pelo item (1),

$$\gamma_n(G) \times_G G = \{(g, h) \in G \times \gamma_n(G) \mid g = h\} \cong \gamma_n(G),$$

e para qualquer $h \in \gamma_n(G)$, $g \in G$, temos

$$(\lambda \times \lambda')(g \otimes h) = (g^{-1}g^h, h^{-g}h) = ([g, h], [g, h]).$$

Portanto, $Im(\lambda \times \lambda') = \langle([g, h], [g, h]) \mid g \in G,\ h \in \gamma_n(G)\rangle \cong \gamma_{n+1}(G)$. Finalmente,

$$\frac{G \otimes \gamma_n(G)}{\langle g \otimes h | g = h\rangle^{\gamma_n(G) \otimes G}} = G \wedge \gamma_n(G).$$

Consequentemente, o Teorema 2.12 de [20] (veja o item 1) nos fornece a seguinte sequência exata:

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big) \longrightarrow G \otimes \gamma_n(G) \longrightarrow G \wedge \gamma_n(G) \longrightarrow 1. \tag{3.4}$$

Novamente pelo item 1, $Im(\alpha) \leq \ker\Big([\ ,\ ]_{\otimes} : G \otimes \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big)$. Agora, restringimos β ao núcleo $\ker\Big([\ ,\ ]_{\otimes} : G \otimes \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big)$ e, portanto, podemos reescrever a sequência exata (3.4) como segue

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big) \to \ker\Big([\ ,\ ] : G \otimes \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to$$

$$\to \ker\Big([\ ,\ ]_{\wedge} : G \wedge \gamma_n(G) \to \gamma_{n+1}(G)\Big) \to 1,$$

conforme desejado. □

3.1.1 Propriedades de Fechamento de $G^{\otimes n}$

Vale ressaltar que o n-ésimo produto tensorial não abeliano de um grupo é um caso especial do produto tensorial não abeliano. Neste contexto, podemos deduzir o seguinte fato sobre o n-ésimo produto tensorial.

Lema 3.12. *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de grupos que é fechada sob a formação do produto tensorial não-abeliano. Se G é um $\mathcal{P}$-grupo, então para qualquer $n \geqslant 2$, $G^{\otimes n}$ também será um $\mathcal{P}$-grupo.*

Demonstração. De fato, vamos prosseguir por indução sobre n. Para $n = 2$, por hipótese, o quadrado tensorial $G \otimes G = G^{\otimes 2}$ é um $\mathcal{P}$-grupo. Suponha que vale para $n-1$, vamos provar para n. Como $G^{\otimes n} = G^{\otimes n-1} \otimes G$ e ambos os grupos $G^{\otimes n-1}$ e G são $\mathcal{P}$-grupos, temos que $G^{\otimes n}$ é um $\mathcal{P}$-grupo. □

O próximo resultado é uma consequência imediata do Teorema 2.1 e do lema anterior.

Corolário 3.13. *Seja $n \geqslant 2$. Seja $\mathcal{P}$ uma das seguintes propriedades de grupos: finito, policíclico ou nilpotente. Se G é um $\mathcal{P}$-grupo, então $G^{\otimes n}$ também o é.*

O próximo resultado é uma consequência imediata de [21, Corolário 1].

Lema 3.14 ([21, Corolário 1])**.** *Se G é perfeito, então $G \otimes G$ também o é.*

Lema 3.15. *Se G é um grupo perfeito, então $G^{\otimes n}$ também o é.*

Demonstração. Provemos por indução sobre n. Se $n = 2$, segue pelo Lema 3.14, o quadrado tensorial não-abeliano $G^{\otimes 2}$ é perfeito. Agora, suponha que $G^{\otimes n-1}$ é perfeito. De

acordo com o Teorema 2.12, o subgrupo derivado $[G^{\otimes n-1}, G^{\varphi}]' = [[G^{\otimes n-1}, G], [G, G^{\otimes n-1}]^{\varphi}]$. Onde,

$$[G^{\otimes n-1}, G] = \langle a^{-1}a^{g} \ \mid \ a \in G^{\otimes n-1}, g \in G \rangle \lhd G^{\otimes n-1},$$

e

$$[G, G^{\otimes n-1}] = \langle g^{-a}g \ \mid \ a \in G^{\otimes n-1} \, , \, g \in G \rangle \lhd G.$$

Dessa forma, podemos concluir que $[G, G^{\otimes n-1}] = \gamma_n(G) = G$. Como $G^{\otimes n-1}$ é perfeito, segue que

$$G^{\otimes n-1} = [G^{\otimes n-1}, G^{\otimes n-1}] = [G^{\otimes n-1}, \gamma_{n-1}(G)] \subseteq [G^{\otimes n-1}, G] \leqslant G^{\otimes n-1}.$$

Portanto, $[G^{\otimes n-1}, G]$ não é trivial e consequentemente,

$$[G^{\otimes n-1}, G^{\varphi}]' = [[G^{\otimes n-1}, G], [G, G^{\otimes n-1}]^{\varphi}] = [G^{\otimes n-1}, G^{\varphi}].$$

Como queríamos. □

3.2 O n-ésimo produto tensorial não abeliano de grupos

Seja H um subgrupo normal de G. Então, os seguintes homomorfismos $G \otimes H \to [G, H]$ e $G \wedge H \to [G, H]$, $g \otimes h \mapsto [g, h]$, $g \wedge h \mapsto [g, h]$, para cada $g \in G$, $h \in H$, denotaremos por $[\ ,\ ]_{\otimes}$ e $[\ ,\ ]_{\wedge}$, respectivamente.

Lembremos que o homomorfismo $\lambda_n^G \colon G^{\otimes n} \to G$ é um módulo cruzado. Consequentemente, $\ker(\lambda_n^G) \leqslant Z(G^{\otimes n})$ e, portanto, o grupo $G^{\otimes n}$ é uma extensão central de $\ker(\lambda_n^G)$ por $\gamma_n(G)$.

Vejamos o seguinte resultado de Baumslag, Cannonito e Miller.

Proposição 3.16 ([16, Corolário 5.5])**.** *Seja G um grupo policíclico por finito. Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente gerado, então para qualquer inteiro positivo n, vale que o n-ésimo grupo de homologia de G sobre M, $H_n(G, M)$ é abeliano finitamente gerado.*

De acordo com Hall, o multiplicador de Schur de um grupo finitamente apresentado G, é finitamente gerado. Isto é,

Proposição 3.17 ([59, 14.1.5])**.** *Se G é um grupo finitamente apresentado, então o Multiplicador de Schur $M(G)$ é finitamente gerado.*

Estamos aptos para demonstrar o seguinte resultado sobre $G^{\otimes n}$.

Lema 3.18. *Seja G um grupo finitamente apresentado. Então para cada $n \geq 2$, $\ker(\lambda_n^G)$ é finitamente gerado.*

Demonstração. Provaremos por indução sobre n. Se $n = 2$, é bem sabido que $\ker\Big([\ ,\ ]_\wedge : G \wedge G \to [G,G]\Big)$ é isomorfo a $H_2(G)$, que é finitamente gerado uma vez que G é finitamente apresentado (Proposição 3.17). Por outro lado, pela Proposição 2.13, temos a sequência exata curta:

$$1 \to \Delta(G) \to \ker\Big(\lambda_2^G : G \otimes G \to [G,G]\Big) \to H_2(G) \to 1.$$

Como G é finitamente gerado, então $\Delta(G)$ também é finitamente gerado pela Proposição 2.10, o que implica que $\ker\Big(\lambda_2^G : G \otimes G \to [G,G]\Big)$ é finitamente gerado.

Agora, assuma que o resultado vale para λ_n^G. Provemos que o mesmo vale para λ_{n+1}^G. Considere a extensão central de grupos

$$1 \to \ker\Big(\lambda_n^G\Big) \to G^{\otimes n} \to \gamma_n(G) \to 1.$$

Pela Proposição 2.2, teremos que

$$\ker\Big(\lambda_n^G\Big) \otimes G \to G^{\otimes n} \otimes G \to \gamma_n(G) \otimes G \to 1$$

é uma sequência exata. Vamos denotar o homomorfismo $\ker\Big(\lambda_n^G\Big) \otimes G \to G^{\otimes n} \otimes G$ como σ. Então, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \Big(\ker\Big(\lambda_n^G\Big) \otimes G\Big)\sigma & \longrightarrow & G^{\otimes n+1} & \longrightarrow & \gamma_n(G) \otimes G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{n+1}^G} & & \downarrow{\scriptstyle [\ ,\ ]} & & \\
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \gamma_{n+1}(G) & \xrightarrow[Id]{} & \gamma_{n+1}(G) & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

o que implica na seguinte sequência exata:

$$\Big(\ker\Big(\lambda_n^G\Big) \otimes G\Big)\sigma \hookrightarrow \ker\Big(\lambda_{n+1}^G\Big) \twoheadrightarrow \ker\Big([\ ,\ ] : \gamma_n(G) \otimes G \to \gamma_{n+1}(G)\Big).$$

Mostremos que o primeiro e o último termos desta sequência exata são finitamente gerados. Como $\ker\Big(\lambda_n^G\Big)$ é um grupo abeliano que age trivialmente sobre G, temos pela Proposição 2.3 que

$$\ker\Big(\lambda_n^G\Big) \otimes G \cong \ker\Big(\lambda_n^G\Big) \otimes_G I(G),$$

onde $I(G)$ denota o ideal de aumento de G (veja [59, 11.3]). Como G é finitamente gerado, $I(G)$ é um G-módulo finitamente gerado. Por hipótese de indução, temos que $\ker\left(\lambda_n^G\right)$ é finitamente gerado, e pela igualdade acima, é possível concluir também que $\ker\left(\lambda_n^G\right)\otimes G$ é um grupo finitamente gerado. Portanto, $\Big(\ker\left(\lambda_n^G\right)\otimes G\Big)\sigma$ é finitamente gerado. Além disso, pela Proposição 3.11, existe a sequência exata:

$$\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big) \to \ker\Big([\ ,\ ]_\otimes : G\otimes\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big) \to$$
$$\to \ker\Big([\ ,\ ]_\wedge : G\wedge\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big)\to 1.$$

Como $\Gamma\big(\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)\big)$ é finitamente gerado, é suficiente mostrar que $\ker\Big([\ ,\ ]_\wedge : G\wedge\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big)$ é finitamente gerado. Para tal, observe que pela Proposição 2.14, vale a seguinte sequência exata:

$$H_3\big(G/\gamma_n(G)\big)\to\ker\Big([\ ,\ ]_\wedge : G\wedge\gamma_n(G)\to\gamma_{n+1}(G)\Big)\to H_2(G).$$

Já destacamos que $H_2(G)$ é finitamente gerado. Além disso, como $G/\gamma_n(G)$ é policíclico, pela Proposição 3.16, o terceiro grupo de homologia $H_3(G/\gamma_n(G))$ é finitamente gerado, o que completa a prova. □

Estamos agora em condições de provar o Teorema 3.5.

Prova do Teorema 3.5. Suponha que G é finitamente apresentado. Precisamos mostrar que o n-ésimo termo da série central inferior $\gamma_n(G)$ é finitamente apresentado se, e somente se, $G^{\otimes n}$ é finitamente apresentado.

Observemos que $\ker\Big(\lambda_n^G : G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\Big)$ é um subgrupo central de $G^{\otimes n}$ e, pelo Lema 3.18, é finitamente gerado, com isso, $\ker\Big(\lambda_n^G : G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\Big)$ é finitamente apresentado. Portanto, pela seguinte sequência exata,

$$1\to\ker\Big(\lambda_n^G : G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\Big)\to G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\to 1,$$

Assim, se o n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é finitamente apresentado, então $\gamma_n(G)$ é finitamente apresentado. Reciprocamente, se $\gamma_n(G)$ é finitamente apresentado, então a seção $G^{\otimes n}/\ker\Big(\lambda_n^G : G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\Big)$ e $\ker\Big(\lambda_n^G : G^{\otimes n}\to\gamma_n(G)\Big)$ são finitamente apresentados. Dessa forma, $G^{\otimes n}$ é finitamente apresentado. □

O grupo Multiplicador de Schur $M(G)$ é uma construção que aparece como uma seção em construções relacionadas ao quadrado tensorial, bem como o Grupo de Comutatividade

Fraca (que nos aprofundaremos no próximo capítulo). Neste contexto, mostraremos uma definição para uma extensão do Multiplicador de Schur associado a série central inferior de seus elementos geradores, que pode ser encontrada em [4].

Definição 3.19. *Seja G um grupo e seja F um grupo livre tal que $G = F/R$, com $R \lhd F$. O n-ésimo multiplicador nilpotente $M_n(G)$ é definido por*

$$M_n(G) = \frac{R \cap \gamma_n(F)}{\gamma_n(R, F)},$$

onde $\gamma_1(R, F) = R$ e $\gamma_{k+1}(R, F) = [\gamma_k(R, F), F]$. Em particular, $M_2(G) = M(G) \cong H_2(G)$ é o multiplicador de Schur de G.

Tal construção foi abordada por Baer em [4] e estudada por Fröhlich, MacDonald, Burns e Ellis (veja [33], [47] e [22]). Faremos uso de um resultado referente a Burns e Ellis, [22].

Proposição 3.20 ([22, Teorema 2.6])**.** *Seja o homomorfismo $\partial_n^G : G^{\wedge n} \to \gamma_n(G)$ como definido em (3.3). Então, existe a seguinte sequência exata:*

$$ker(\partial_{n+1}^G : G^{\wedge n+1} \to \gamma_{n+1}(G)) \to M_n(G) \to 1$$

Relembremos a Proposição 3.17 em que é possível garantir que, quando um grupo G é finitamente apresentado, o grupo $M(G)$ é finitamente gerado. Obtemos o seguinte resultado relacionado ao Multiplicador nilpotente.

Corolário 3.21. *Seja G um grupo finitamente apresentado. Então o n-ésimo multiplicador nilpotente $M_n(G)$ é finitamente gerado para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Se $n = 1$, então $M_1(G)$ é finitamente gerado. Agora, podemos assumir $n \geq 2$. Pela Proposição 3.20, $M_n(G)$ é isomorfo a uma seção de $\ker\left(\partial_{n+1}^G : G^{\wedge n+1} \to \gamma_{n+1}(G)\right)$. Consequentemente, $M_n(G)$ é também isomorfo a uma seção de $\ker\left(\lambda_{n+1}^G : G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(G)\right)$. Pelo Lema 3.18, $M_n(G)$ é finitamente gerado. □

Prosseguindo com o estudo de propriedades provenientes do Lema 3.18, segue o seguinte resultado relacionado ao $\nu(G)$ definido na Seção 2.2.

Corolário 3.22. *Seja G um grupo finitamente apresentado tal que seu subgrupo derivado G' seja também finitamente apresentado. Então $\nu(G)$ e $\nu(G)'$ são finitamente apresentados.*

Demonstração. Como vimos na Seção 2.2, o subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ é normal em $\nu(G)$. Ainda, $\nu(G)/[G, G^{\varphi}]$ é isomorfo a $G \times G$, o que implica na existência da sequência exata curta:

$$1 \to G \otimes G \to \nu(G) \to G \times G \to 1.$$

Agora, pela Proposição 2.16, existe a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \ker(\lambda_2^G) \to \nu(G)' \to G' \times G' \times G' \to 1.$$

Aplicando o Lema 3.18 e o Teorema 3.5 para $n = 2$, obtemos que $\ker(\lambda_2^G)$ e $G \otimes G$ são finitamente apresentados. Portanto, $\nu(G)'$ e $\nu(G)$ também são finitamente apresentados, como queríamos. □

Vale ressaltar que parte do resultado anterior já é conhecido. Mais precisamente, Kochloukova e Sidki provaram que

Teorema 3.23 ([42, Teorema E])**.** *Seja G um grupo. Se G é finitamente apresentado, então $\nu(G)$ também é finitamente apresentado.*

Além disso, em [12] apresentaram a estrutura de $\nu(G)'$ quando G é livre de posto m.

Proposição 3.24 ([12, Corolário 4.2])**.** *Seja G um grupo livre de posto m, então*

$$\nu(G)' \cong \mathbb{Z}^{\frac{m(m+1)}{2}} \times G' \times G' \times G'.$$

Seja G um grupo livre de posto m. O subgrupo derivado de G, G' não é finitamente gerado, o que implica em $\nu(G)'$ também não ser finitamente gerado. Vamos agora abordar o Teorema 3.7. Por conveniência para o leitor, enunciaremos novamente o resultado.

Teorema 3.25. *Sejam G um grupo finitamente gerado e $n \geq 2$.*

1. *O n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é finito se, e somente se, G é finito.*

2. *O n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é policíclico se, e somente se, G é policíclico.*

Demonstração. (1) Suponha que G seja finito. Pelo Corolário 3.13, o n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é finito.

Reciprocamente, tome $G^{\otimes n}$ finito. Provemos primeiramente que G^{ab} é finito. Como G é finitamente gerado, segue que G^{ab} é finitamente gerado e por G^{ab} ser isomorfo a $T \times F$,

onde T é a parte de torção e F a parte livre de G^{ab}, temos que T é finito. Observemos também que existe um epimorfismo $G^{\otimes n} \to (G^{ab})^{\otimes n}$. Além disso, pela Proposição 2.4 temos $(G^{ab})^{\otimes n} \cong (G^{ab})^{\otimes_{\mathbb{Z}} n}$, onde "$\otimes_{\mathbb{Z}}$" denota o produto tensorial usual de $\mathbb{Z}$-módulos. Suponha que F seja infinito, então $(G^{ab})^{\otimes_{\mathbb{Z}} n}$ também é, o que implica que $G^{\otimes n}$ é infinito, uma contradição. Portanto $F = 1$, o que implica em G^{ab} ser finito.

Nos falta mostrar que o subgrupo derivado G' é finito. Como $\lambda_n^G \colon G^{\otimes n} \to \gamma_n(G)$ é um epimorfismo, segue que $\gamma_n(G)$ é finito. Se provarmos que se para $n \leq k < 2$ valer que $\gamma_k(G)$ ser finito implica em $\gamma_{k-1}(G)$ também ser finito, seguirá indutivamente que G' é finito. Assim, suponha $\gamma_k(G)$ finito. Para mostrar a finitude de $\gamma_{k-1}(G)$ é suficiente ver que $\gamma_{k-1}(G)/\gamma_k(G)$ é finito. Como $\gamma_{k-1}(G)/\gamma_k(G)$ é um grupo abeliano finitamente gerado, é suficiente mostrar que todos seus elementos são de torção. De fato, sejam $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1} \in G$ e $m \in \mathbb{Z}$; então

$$[g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}^m]\gamma_k(G) \;=\; [g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}]^m \gamma_k(G).$$

Procedendo por indução sobre m segue que vale para $m = 1$. Suponha que vale para $m-1$; vamos prová-la para m.

$$\begin{aligned} [g_1, \ldots, g_{k-1}^m] &= [g_1, \ldots, g_{k-1}][g_1, \ldots, g_{k-1}^{m-1}]^{g_{k-1}} \\ &= [g_1, \ldots, g_{k-1}][g_1, \ldots, g_{k-1}^{m-1}][g_1, \ldots, g_{k-1}^{m-1}, g_{k-1}] \\ &\equiv [g_1, \ldots, g_{k-1}]^m \mod \gamma_k(G) \end{aligned}$$

Agora, tome $|G^{ab}| = m$, então qualquer potência m-ésima de um elemento de G é um elemento de G'. Ou seja,

$$[g_1, \ldots, g_{k-1}^m] \in [\gamma_{k-2}(G), \gamma_2(G)] \leq \gamma_k(G),$$

para quaisquer $g_1, \ldots, g_{k-1} \in G$. Com isso, segue que o elemento $[g_1, \ldots, g_{k-1}]\gamma_k(G)$ é de torção, o que implica em $\gamma_{k-1}(G)/\gamma_k(G)$ ser finito e, portanto, $\gamma_{k-1}(G)$ também ser finito. Indutivamente segue a finitude de G', o que completa a demonstração.

(2). Suponha G policíclico. Pelo Corolário 3.13, o n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ é policíclico.

Reciprocamente, seja $G^{\otimes n}$ policíclico. Logo, $\gamma_n(G)$ é policíclico. Como a classe dos grupos policíclicos é fechada para extensão, é suficiente provar que $G/\gamma_n(G)$ é policíclico.

Para isso basta observar que $G/\gamma_n(G)$ é um grupo nilpotente finitamente gerado, em particular, policíclico, como queríamos. □

Observação 3.26. *Vale mencionar que o item (1) do Teorema 3.7 é conhecido para $n = 2$ e foi provado primeiro por Parvizi e Niroomand em [57, Teorema 3.1]. Em relação ao item (2) do mesmo Teorema, Moravec também mostrou em [50] o caso de $n = 2$.*

3.3 Teorema do tipo Schur-Baer para grupos finitamente apresentados

Nesta seção estaremos empenhados em provar um teorema do tipo Schur-Baer para grupos finitamente apresentados.

Definição 3.27. *Uma classe de grupos $\mathfrak{X}$ é chamada de classe de Schur se valer que se G é um grupo tal que $G/Z(G)$ pertence a $\mathfrak{X}$, então G' também pertence a $\mathfrak{X}$.*

Podemos citar como exemplos de Classes de Schur, a classe dos grupos nilpotentes e a classe dos grupos policíclicos-por-finito. Um exemplo de classe que não é de Schur é a classe dos grupos de posto finito. O nome de classe de Schur se deve ao conhecido Teorema de Schur que mostrou que a classe dos grupos finitos obedecem a definição. Para mais detalhes, veja [25] e [58].

Teorema 3.28 ([59, 10.1.4])**.** *Se G é um grupo tal que $G/Z(G)$ é finito, então G' é finito.*

Este Teorema admite uma generalização que demonstra uma relação entre a série central superior e a série central inferior. Mais precisamente,

Teorema 3.29 (Baer, [59, 14.5.1])**.** *Sejam G um grupo e $i \in \mathbb{Z}_+^*$. Se $G/Z_i(G)$ é finito, então $\gamma_{i+1}(G)$ é finito.*

O estudo de propriedades da forma $G/Z_i(G) \in \mathfrak{X}$ implica em $\gamma_i(G) \in \mathfrak{X}$ pode ser estudado através da ferramenta do n-ésimo produto tensorial não abeliano de G.

Definição 3.30. *Sejam N, H e G grupos. Uma sequência exata*

$$1 \to N \to H \to G \to 1$$

é dita ser n-central se $N \leq Z_n(H)$, para algum $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

O próximo lema é de Donadze e Garcia-Martinez, [26].

Lema 3.31 (Donadze, Garcia-Martinez, [26])**.** *Seja* $1 \to N \to H \to G \to 1$ *uma extensão* n*-central para um inteiro positivo* n*. Então, existe um epimorfismo* $\tau\colon G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(H)$ *que faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} G^{\otimes n+1} & \xrightarrow{Id} & G^{\otimes n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^G_{n+1}} \\ \gamma_{n+1}(H) & \longrightarrow & \gamma_{n+1}(G) \end{array}$$

onde a seta $\gamma_{n+1}(H) \to \gamma_{n+1}(G)$ *é o homomorfismo induzido de* $H \to G$*.*

Teorema 3.32. *Sejam* G *um grupo finitamente apresentado e* $n \in \mathbb{Z}^*_+$*. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\gamma_{n+1}(G)$ *é finitamente apresentado;*

(ii) Dada uma extensão n*-central* $1 \to N \to H \to G \to 1$ *segue que* $\gamma_{n+1}(H)$ *é finitamente apresentado.*

Demonstração. Seja uma extensão n-central $1 \to N \to H \to G \to 1$ tal que $\gamma_{n+1}(H)$ seja finitamente apresentado. Pelo Lema 3.31, existe um epimorfismo $\tau : G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(H)$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G^{\otimes n+1} & \xrightarrow{Id} & G^{\otimes n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^G_{n+1}} \\ \gamma_{n+1}(H) & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & \gamma_{n+1}(G) \end{array}$$

Chamamos a seta $\gamma_{n+1}(H) \to \gamma_{n+1}(G)$ por α_{n+1}. Logo, vale que $\lambda^G_{n+1} = \alpha_{n+1} \circ \tau$. Além disso, restringindo τ a $ker(\lambda^G_{n+1})$, teremos que se $a \in ker(\lambda^G_{n+1})$, então

$$\alpha_{n+1}(\tau(a)) = \lambda^G_{n+1}(a) = 1,$$

isto é, existe um epimorfismo

$$ker(\lambda^G_{n+1}) \to ker(\alpha_{n+1}).$$

Pelo Lema 3.18, $\ker(\lambda^G_{n+1})$ é um grupo abeliano finitamente gerado. Com isso, segue que $ker(\alpha_{n+1})$ é finitamente apresentado. Portanto, a sequencia exata

$$1 \to \ker(\alpha_{n+1}) \to \gamma_{n+1}(H) \to \gamma_{n+1}(G) \to 1$$

implica que $\gamma_{n+1}(H)$ é finitamente apresentado se, e somente se, $\gamma_{n+1}(G)$ é finitamente apresentado. □

Proposição 3.33. *Seja $\mathfrak{X}$ uma das seguintes classes de grupos:*

(i) A classe dos grupos perfeitos finitamente apresentados;

(ii) A classe dos grupos nilpotentes finitamente gerados;

(iii) A classe dos grupos finitamente apresentados nos quais todo subgrupo é finitamente apresentado.

Sejam $G \in \mathfrak{X}$ e $n \geq 1$. Então, para cada extensão n-central $1 \to N \to H \to G \to 1$, temos $\gamma_{n+1}(H) \in \mathfrak{X}$.

Demonstração. Seja $\tau : G^{\otimes n+1} \to \gamma_{n+1}(H)$ o homomorfismo do diagrama dado no Lema 3.31.

(i) Como $\gamma_{n+1}(G) = G$, segue do Teorema 3.32 que $\gamma_{n+1}(H)$ é finitamente apresentado. Pelo Lema 3.15, $G^{\otimes n+1}$ é perfeito. Como $\gamma_{n+1}(H) = Im(\tau)$, obtemos que $\gamma_{n+1}(H) \in \mathfrak{X}$.

(ii) Pelo Corolário 3.13, o n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n+1}$ é nilpotente. Consequentemente, $\gamma_{n+1}(H)$ é nilpotente. Além disso, como G é nilpotente finitamente gerado, $\gamma_k(G)$ será nilpotente finitamente gerado para todo $k \geq 1$. Portanto, pelo Teorema 3.32, $\gamma_{n+1}(H)$ é um grupo nilpotente finitamente gerado.

(iii) Seja $H_1 \leq \gamma_{n+1}(H)$ e suponha que $\gamma_{n+1}(H)$ é finitamente apresentado. Precisamos mostrar que H_1 é finitamente apresentado. Seja $\alpha : H \to G$ o epimorfismo dado na proposição. Como $\alpha(H_1)$ é um subgrupo de G, segue por hipótese que $\alpha(H_1)$ é finitamente apresentado. Portanto, basta mostrar que $\ker(\alpha|_{H_1})$ é finitamente apresentado. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tau^{-1}(H_1) & \xrightarrow{\lambda^G_{n+1}|_{\tau^{-1}(H_1)}} & \alpha(H_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau|_{\tau^{-1}(H_1)}} & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ H_1 & \xrightarrow{\alpha|_{H_1}} & \alpha(H_1) \end{array}$$

Isso implica no epimorfismo

$$\ker(\lambda_{n+1}^{G}|_{\tau^{-1}(H_1)}) \to \ker(\alpha|_{H_1}).$$

Como $\ker(\lambda_{n+1}^{G}|_{\tau^{-1}(H_1)}) \subseteq \ker(\lambda_{n+1}^{G})$, segue do Lema 3.18 que $\ker(\lambda_{n+1}^{G}|_{\tau^{-1}(H_1)})$ é um grupo abeliano finitamente gerado. Portanto, $\ker(\alpha|_{H_1})$ é finitamente apresentado. □

Observação 3.34. Seja $\mathfrak{X}$ como na Proposição 3.33. Então $\mathfrak{X}$ é uma classe de Schur.

A Proposição 3.33 é um tipo de generalização dos resultados de Schur-Baer. Isto é, segue diretamente o seguinte resultado:

Corolário 3.35. *Seja $\mathfrak{X}$ uma das seguintes classes de grupos:*

(i) A classe dos grupos perfeitos finitamente apresentados;

(ii) A classe dos grupos nilpotentes finitamente gerados;

(iii) A classe dos grupos finitamente apresentados nos quais todo subgrupo é finitamente apresentado.

Então $G/Z_i(G) \in \mathfrak{X}$ implica em $\gamma_{i+1}(G) \in \mathfrak{X}$.

Observe que as classes apresentadas anteriormente não são vazias. De fato, tomando $G = A_5 \times \mathbb{Z}$, segue que $G/Z(G)$ é um grupo perfeito. Para os grupos nilpotentes finitamente gerados e finitamente apresentados com todos subgrupos finitamente apresentados, podemos tomar como exemplo D_{2^n}. Isto é $D_{2^n}/Z(D_{2^n})$ atende aos itens (ii) e (iii) do corolário anterior.

Capítulo 4

Resultados Estruturais do Grupo de Comutatividade Fraca

Neste capítulo estamos interessados em explorar algumas propriedades do grupo de comutatividade fraca $\chi(G)$, bem como de alguns subgrupos e seções do mesmo. Estudaremos primeiramente algumas condições de finitude de R, em particular, mostraremos que, se um grupo G tem expoente finito (respectivamente, periódico), então R também tem expoente (respectivamente, periódico). Na segunda parte do capítulo, abordaremos construções da série derivada e da série central inferior de $\chi(G)$.

4.1 Expoente de $R(G)$

Os resultados deste capítulo foram feitos em parceria com Bastos e Oliveira [14].

Recentemente, o estudo do expoente de R quando G é finito foi abordado por alguns autores como em [13], [11], [6], [7] e [12]. Nosso objetivo é estudar R tomando G periódico tendo expoente ou não.

O estudo de R se deu, de forma geral, vendo a seção $R/L_{1,2}$ e $L_{1,2}$. Assim, nos focamos em $R/L_{1,2}$ e em $L_{1,2}$ para concluir as propriedades desejadas. Estaremos focados em continuar os resultados de Sidki, Gupta e Rocco tentando utilizar e generalizar algumas propriedades e estratégias de demonstração de [66], [37] e [60]. Vamos começar expondo alguns lemas importantes que nos mostram algumas características desses dois grupos. Como $L_{1,2} = [L_1, L_2]$ é subgrupo de $W = L_1 \cap L_2$, então,

Lema 4.1. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in L_1$ e $\beta_1, \beta_2 \in L_2$. Então vale que*

$$[\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2] = [\alpha_1, \beta_1][\alpha_1, \beta_2][\alpha_2, \beta_1][\alpha_2, \beta_2].$$

Demonstração. Como $L_{1,2}$ centraliza L_1 e L_2, temos que,

$$\begin{aligned}
[\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2] =& [\alpha_1, \beta_1\beta_2]^{\alpha_2}[\alpha_2, \beta_1\beta_2] \\
=& [\alpha_1, \beta_1\beta_2][\alpha_2, \beta_1\beta_2] \\
=& [\alpha_1, \beta_2][\alpha_1, \beta_1]^{\beta_2}[\alpha_2, \beta_2][\alpha_2, \beta_1]^{\beta_2} \\
=& [\alpha_1, \beta_2][\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2][\alpha_2, \beta_1] \\
=& [\alpha_1, \beta_1][\alpha_1, \beta_2][\alpha_2, \beta_1][\alpha_2, \beta_2].
\end{aligned}$$ □

O próximo lema tem como objetivo mostrar algumas propriedades de $R/L_{1,2}$.

Lema 4.2. *Sejam $g, h, a, b, c \in G$. Então as seguintes propriedades valem:*

(i) $[\,[\varphi, g][\varphi, h], a, b^{\varphi}] = [[\varphi, g], a, b^{\varphi}][[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \mod (L_{1,2})$;

(ii) $[\,[\varphi, g, a][\varphi, h, b], c^{\varphi}] = [\varphi, g, a, c^{\varphi}][\varphi, h, b, c^{\varphi}]$

Demonstração. Sejam $g, h, a, b, c \in G$. Para (i) considere $x = [[\varphi, g][\varphi, h], a, b^{\varphi}]$. Então, módulo $L_{1,2}$, temos que:

$$\begin{aligned}
x &= [[[\varphi, g], a]^{[\varphi,h]}[[\varphi, h], a], b^{\varphi}] \\
&= [[[\varphi, g], a]^{[\varphi,h]}, b^{\varphi}]^{[[\varphi,h],a]}[[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \\
&= [[[\varphi, g], a]^{[\varphi,h]}, b^{\varphi}][[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \quad \big([[[\varphi, g], a]^{[\varphi,h]}, b^{\varphi}] \in R\big) \\
&= [[[\varphi, g], a], (b^{\varphi})^{[\varphi,h]^{-1}}]^{[\varphi,h]}[[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \\
&= [[[\varphi, g], a], b^{\varphi}[b^{\varphi}, [\varphi, h]^{-1}]]^{[\varphi,h]}[[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \\
&= \Big([[[\varphi, g], a], [b^{\varphi}, [\varphi, h]^{-1}]][[\varphi, g], a, b^{\varphi}]^{[b^{\varphi},[\varphi,h]^{-1}]}\Big)^{[\varphi,h]}[[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \\
&= [[\varphi, g], a, b^{\varphi}]^{[\varphi,h]}[[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \quad \big([[[\varphi, g], a], [b^{\varphi}, [\varphi, h]^{-1}]] \in L_{1,2}\big) \\
&= [[\varphi, g], a, b^{\varphi}][[\varphi, h], a, b^{\varphi}] \qquad \big([[\varphi, g], a, b^{\varphi}] \in R\big)
\end{aligned}$$

Agora, para (ii), observe que

$$\begin{aligned}
[[[\varphi, g], a][[\varphi, h], b], c^{\varphi}] &= [[\varphi, g], a, c^{\varphi}]^{[[\varphi,h],b]}[[\varphi, h], b, c^{\varphi}] \\
&= [[\varphi, g], a, c^{\varphi}][[\varphi, h], b, c^{\varphi}],
\end{aligned}$$

uma vez que $[[\varphi, g], a, c^{\varphi}] \in R$. □

Lema 4.3. *Seja G um grupo. Então $L_{1,2} \leq R$.*

Demonstração. Temos que pela Proposição 2.16, $[\Upsilon_2, \Upsilon_3] = 1$. Com isso, temos que $[L_1, L_2]R/R = 1$, ou seja, $L_{1,2} \leq R$. □

Podemos estabelecer o seguinte lema.

Lema 4.4. *Seja G um grupo. Então,*

$$\frac{R}{L_{1,2}} = \left\langle [\varphi, g, a, b^{\varphi}] L_{1,2} \mid g, a, b \in G \right\rangle.$$

Demonstração. Sejam $g, a, b, g_1, \ldots, g_n \in G$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in L_1$. Então, pelo item (ii) do Lema 4.2,

$$\left[\prod_{i=1}^{r} \alpha_i, b^{\varphi}\right] = \prod_{i=1}^{r} [\alpha_i, b^{\varphi}].$$

Além disso, módulo $L_{1,2}$ temos que, pelo Lema 4.2 item (i),

$$\left[\prod_{i=1}^{n} [\varphi, g_i], a, b^{\varphi}\right] = \prod_{i=1}^{n} [\varphi, g_i, a, b^{\varphi}].$$

Portanto, todos os elementos de $R/L_{1,2}$ se separam em produtos de elementos da forma $[\varphi, g, a, b^{\varphi}]L_{1,2}$, com $g, a, b \in G$. □

As construções $\nu(G)$ e $\chi(G)$ compartilham algumas características entre si, uma vez que $\nu(G)/\Delta(G)$ é isomorfo a $\chi(G)/R$. Com isso, podemos concluir diretamente da Proposição 2.16 o seguinte resultado.

Lema 4.5. *Seja G um grupo. Então,*

$$\frac{D}{R} \cong \frac{L_1}{R} \cong \frac{L_2}{R} \cong G \wedge G.$$

Mais precisamente, existem isomorfismos dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : D/R &\to L_1/R \\ \overline{[g, h^{\varphi}]} &\mapsto \overline{[g, h][h, g^{\varphi}]}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \alpha_2 : D/R &\to L_2/R \\ \overline{[g, h^{\varphi}]} &\mapsto \overline{[h, g^{\varphi}][g^{\varphi}, h^{\varphi}]}. \end{aligned}$$

O próximo lema, nos fornece uma descrição dos termos geradores de $L_{1,2}$ em função dos termos geradores de D/R.

Lema 4.6. *Seja G um grupo. Suponha que D/R seja gerado por $\{[g_1, h_1^{\varphi}]R, \ldots, [g_n, h_n^{\varphi}]R\}$, onde $g_1, \ldots g_n, h_1, \ldots, h_n \in G$. Então $L_{1,2}$ pode ser expresso da seguinte maneira:*

$$L_{1,2} = \left\langle \left[[\varphi, g_i, h_i], [g_j, \varphi, h_j^{\varphi}]\right] \;\middle|\; 1 \leq i, j \leq n \right\rangle.$$

Demonstração. Tome $D/R = \langle\, [g_1, h_1^{\varphi}]R,\ \ldots\ , [g_n, h_n^{\varphi}]R \,\rangle$. Segundo o Lema 4.5, temos que

$$\frac{D}{R} \cong \frac{L_1}{R} \cong \frac{L_2}{R}.$$

Assim, pelo Lema 2.23 e pelos isomorfismos do Lema 4.5, podemos escrever

$$L_1 = \langle [g_i, h_i][h_i, g_i^{\varphi}] \mid 1 \leq i \leq n \rangle R$$

e

$$L_2 = \langle [g_i^{\varphi}, h_i^{\varphi}][h_i^{\varphi}, g_i] \mid 1 \leq i \leq n \rangle R.$$

Ainda, o Lema 4.1 nos fornece que

$$\begin{aligned} L_{1,2} &= \left[\langle [g_i, h_i][h_i, g_i^{\varphi}] \mid 1 \leq i \leq n \rangle\, R, \left\langle [g_j^{\varphi}, h_j^{\varphi}][h_j^{\varphi}, g_j] \mid 1 \leq j \leq n \right\rangle R\right] \\ &= \left[\langle [g_i, h_i][h_i, g_i^{\varphi}] \mid 1 \leq i \leq n \rangle, \left\langle [g_j^{\varphi}, h_j^{\varphi}][h_j^{\varphi}, g_j] \mid 1 \leq j \leq n \right\rangle\right] \\ &= \left\langle \left[[\varphi, g_i, h_i], [g_j, \varphi, h_j^{\varphi}]\right] \mid 1 \leq i, j \leq n \right\rangle, \end{aligned}$$

como requerido. □

Estamos aptos a demonstrar os teoremas principais desta seção.

Teorema 4.7. *Sejam G e G' grupos finitamente gerados tais que G é $d(G)$-gerado, G' é $d(G')$-gerado e $d = \max(d(G), d(G'))$. Então $L_{1,2}$ é finitamente gerado com número de geradores d-limitado.*

Demonstração. Sejam G e G' finitamente gerados, disso segue que o quadrado tensorial não abeliano de grupos é também finitamente gerado (Proposição 2.5). Logo, segue que D/R é também finitamente gerado. Ainda, segundo a prova da Proposição 2.5, o número de geradores de D/R é limitado em termos do número de geradores de G e G'. Assim, tomando $g_1, \ldots g_n, h_1, \ldots, h_n \in G$ tal que $D/R = \langle\, [g_1, h_1^{\varphi}]R,\ \ldots\ , [g_n, h_n^{\varphi}]R \,\rangle$, teremos pelo Lema 4.6 que

$$L_{1,2} = \left\langle \left[[\varphi, g_i, h_i], [g_j, \varphi, h_j^{\varphi}]\right] \;\middle|\; 1 \leq i, j \leq n \right\rangle.$$

Como queríamos. □

Voltemos nossa atenção para o Lema 4.6. Observe que na demonstração dos geradores de $L_{1,2}$ não usamos a finitude do conjunto gerador de D/R para encontrar os geradores de $L_{1,2}$. Isto é, se

$$\frac{D}{R} = \langle [g, h^{\varphi}]R \mid g, h \in G \rangle,$$

então $L_{1,2}$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$L_{1,2} = \left\langle \left[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h^{\varphi}] \right] \mid g, h, a, b \in G \right\rangle.$$

Com isso, fica provado o seguinte resultado:

Lema 4.8. *Seja G um grupo. Temos que vale*

$$L_{1,2} = \left\langle \left[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h^{\varphi}] \right] \mid g, h, a, b \in G \right\rangle.$$

Agora, vamos estudar algumas propriedades de finitude de R. Com isso em mente, vale ressaltar que Lima e Oliveira mostraram algumas condições dentro da classe dos grupos policíclicos em que R trivializa.

Proposição 4.9 ([45, Proposição 6])**.** *Seja G um grupo policíclico. Temos que $R = 1$ quando G satisfaz alguma das seguintes condições:*

(i) G for um p-grupo abeliano finito, com p ímpar;

(ii) G for 2-gerado nilpotente livre de classe 2;

(iii) G for um grupo metacíclico.

Observe que nem sempre R é trivial e, para esses casos, faz sentido buscar propriedades de finitude para o mesmo. Quando G é finito, é sabido que R também é finito (Teorema 2.24). Agora vejamos algumas propriedades gerais de R a respeito de seu expoente e periodicidade de seus elementos.

Teorema 4.10. *Seja G um grupo.*

(i) Suponha que para cada $x, y \in G$ exista um inteiro positivo $m = m(x, y)$ tal que $[x, y]^m = 1$. Então $L_{1,2}$ é periódico.

(ii) Suponha que exista um inteiro positivo m tal que $[x, y]^m = 1$ para quaisquer $x, y \in G$. Então $\exp(L_{1,2})$ divide m.

Demonstração. Sejam $a, b, g, h \in G$. Pelo Lema 4.8, tome um elemento gerador de $L_{1,2}$ dado como $x = \big[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h^{\varphi}]\big]$. Primeiro, provaremos que $x^n = \big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}]^n\big]$ para qualquer inteiro positivo n. Para tal, seguiremos por indução sobre n. Para $n = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
x &= \big[[\varphi, a, b], [\varphi, g, h^{\varphi}]\big] \\
&= \big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}]\big] \quad (\textit{Lemma 2.23 item } (ii)) \\
&= \big[[\varphi, a, b], [h, g^{\varphi}]\big]\big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}]\big]^{[h,g^{\varphi}]} \\
&= \big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}]\big]^{[h,g^{\varphi}]} \quad \big(\big[[\varphi, a, b], [h, g^{\varphi}]\big] \in [D, L] = 1\big) \\
&= \big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}]\big] \quad \big(\big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}]\big] \in R\big).
\end{aligned}$$

Suponha que essa identidade vale para n. Então,

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= \big[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h]\big]^{n+1} \\
&= \big[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h]\big]^{n}\big[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h]\big] \\
&= \big[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h]^n\big]\big[[\varphi, a, b], [g, \varphi, h]\big] \\
&= \big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}]^n[g^{\varphi}, h^{\varphi}]\big] \quad (\textit{Lemma 4.1}) \\
&= \big[[\varphi, a, b], [g^{\varphi}, h^{\varphi}]^{n+1}\big]
\end{aligned}$$

Portanto, a ordem de x divide a ordem do comutador $[g, h]$.

(i) Suponha que para cada $x, y \in G$ exista um inteiro positivo $m = m(x, y)$ tal que $[x, y]^m = 1$. Como $L_{1,2}$ é abeliano e como a, b, g, h foram escolhidos de forma arbitrária, podemos concluir que $L_{1,2}$ é periódico.

(ii) Suponha que $[x, y]^m = 1$ para quaisquer $x, y \in G$. De forma análoga ao item anterior podemos concluir que $\exp(L_{1,2})$ divide m. □

Note que o item (ii) do teorema anterior nos garante que $\exp(L_{1,2})$ divide o expoente de G', e essa cota é uma cota boa conforme podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 4.11. *Seja* $G = [C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3)] \rtimes C_3$ *o grupo expresso como "SmallGroup(237,37)" na biblioteca do programa GAP. Com auxílio do mesmo programa é possível concluir que* $\exp(L_{1,2}) = \exp(G') = 3$.

A partir do Teorema anterior, podemos também concluir uma propriedade de finitude do subgrupo $L_{1,2}$.

Corolário 4.12. *Seja G um grupo finitamente gerado e periódico. Então $L_{1,2}$ é finito.*

Demonstração. Como G é periódico, teremos que G/G' é finito. Disto, podemos deduzir que o subgrupo derivado G' também é finitamente gerado. Consequentemente, o item (ii) do Teorema 4.7 nos garante que $L_{1,2}$ é finitamente gerado. Agora, o Teorema 4.10 nos mostra que $L_{1,2}$ tem expoente finito. Uma vez que $L_{1,2}$ é abeliano, podemos concluir que $L_{1,2}$ é finito, como requerido. □

Observe que existem grupos periódicos finitamente gerados que são infinitos. Alguns exemplos de grupos com essa propriedade foram construídos em [3], [34], [36] e [67]. Com isso, o corolário anterior mostra a existência de um subgrupo finito abeliano dentro de um grupo infinito (não necessariamente abeliano). Nesse mesmo sentido, vejamos um caso especial para G tomando-o como sendo um Grupo de Burnside.

Sejam m, n inteiros positivos e F_m um grupo livre de posto m. O Grupo de Burnside $B(m,n)$ é definido como

$$B(m,n) := \frac{F_m}{F_m^n}.$$

Tal grupo é m-gerado com expoente n. Em [2], Adjan e Novikov mostraram que quando $m > 1$, n é ímpar e maior ou igual a 4381, então $B(m,n)$ será infinito. Podemos aplicar o Corolário 4.12 e concluir que:

Corolário 4.13. *Se $G = B(m,n)$, então $L_{1,2}$ é finito.*

Ainda sobre o Teorema 4.10, observe que as hipóteses dos itens pedem a periodicidade dos elementos de G', mas sim apenas de seus elementos geradores. Isso nos possibilita concluir que $L_{1,2}$ possui expoente finito mesmo que G não possua. Em [24] Deryabina e Kozevnikov provaram que existe um inteiro n e um grupo K tal que para quaisquer $x, y \in K$ vale $[x,y]^n = 1$ com K' não sendo periódico. Neste caso, ainda podemos aplicar o item (ii) do Teorema 4.10 e concluir que $\exp(L_{1,2}(K))$ divide n.

Teorema 4.14. *Seja G um grupo.*

(i) Se G é periódico, então $R/L_{1,2}$ também é periódico.

(ii) Se G tem expoente, então $R/L_{1,2}$ tem expoente que divide $\exp(G)$.

Demonstração. Pelo Lema 4.4, o grupo quociente $R/L_{1,2}$ é gerado por

$$\langle [\varphi, g, a, b^{\varphi}]L_{1,2} \,|\, g, a, b \in G \rangle.$$

Com isso, é suficiente considerar os elementos $[\varphi, g, a, b^{\varphi}]L_{1,2}$, com $g, a, b \in G$. Observe que pelo Lema 4.2 item (i),

$$[\varphi, g, a, b^{\varphi}]^n L_{1,2} = [[\varphi, g]^n, a, b^{\varphi}]L_{1,2} = [g^n, \varphi, a, b^{\varphi}]L_{1,2},$$

para qualquer inteiro positivo n.

(i), (ii). Assumamos G periódico (resp., com expoente m). Argumentando de forma análoga ao mostrado, podemos concluir que $R/L_{1,2}$ é também periódico (resp., $\exp(R/L_{1,2})$ divide m) como queríamos demostrar. □

Observe que, no item (i) do Teorema 4.14, usamos fortemente a periodicidade de G para concluir o requerido. Entretanto, existem exemplos de grupos não periódicos em que R é periódico, como o caso de G, um grupo abeliano (basta observar o item (iv) do Teorema 2.28). Vale mencionar também que a cota expressa no item (ii) do Teorema 4.14 não pode ser melhorada. Para mostrar isso, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.15. *Seja* $G = C_3 \times ((C_3 \times C_3) \ltimes C_3)$ *o grupo expresso como* $SmallGroup(81, 12)$ *na biblioteca do programa GAP (que corresponde ao décimo segundo grupo de ordem* 81 *segundo a ordenação do programa GAP). Com auxílio desse programa, concluímos que* $\exp(R/L_{1,2}) = \exp(G) = 3$. *Vale ressaltar que neste caso, por* G' *ser cíclico, segue que* $L_{1,2}$ *é trivial.*

Portanto, podemos concluir o seguinte resultado a respeito do subgrupo R.

Teorema 4.16. *Seja* G *um grupo.*

(i) Se G *é periódico, então* R *também é periódico.*

(ii) Se G *tem expoente, então* R *tem expoente que divide* $\exp(G) \cdot \exp(G')$.

Demonstração. (i) Suponha G periódico. Pelo item (i) do Teorema 4.14 e item (i) do Teorema 4.10, teremos que $R/L_{1,2}$ e $L_{1,2}$ são periódicos. Portanto, R é periódico.

(ii) Pelo Teorema 4.14, $\exp(R/L_{1,2})$ divide $\exp(G)$. Agora, o item (ii) do Teorema 4.10 nos garante que $\exp(L_{1,2})$ divide $\exp(G')$. Portanto $\exp(R)$ divide $\exp(G) \cdot \exp(G')$. □

Atualmente, não conhecemos exemplos em que $\exp(R) > \exp(G)$, enquanto nosso resultado (Teorema 4.16) fornece a limitação uniforme $\exp(R) \leqslant \exp(G)\exp(G') \leqslant \exp(G)^2$. No entanto, os exemplos conhecidos sugerem que um limitante substancialmente menor pode ser válido; de fato, no Exemplo 4.11 obtemos $\exp(R) = \exp(G') = 3$, o que indica que o expoente de G pode ser um candidato a limitante superior para $\exp(R)$. Com isso em mente, é importante ressaltar o seguinte resultado para o caso de p-grupos.

Teorema 4.17 ([7, Teorema 1.6])**.** *Sejam p um primo e G um p-grupo solúvel de comprimento derivado d. Então,*

$$\exp(R(G)) \mid \begin{cases} 2^d \cdot \exp(G')^{d-1} & p = 2; \\ \exp(G')^{d-1} & p > 2. \end{cases}$$

Adicionando nossa cota, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.18. *Sejam p um primo e G um p-grupo solúvel de comprimento derivado d. Então,*

$$\exp(R(G)) \mid \begin{cases} \min\{\exp(G') \cdot \exp(G),\ 2^d \cdot \exp(G')^{d-1}\} & p = 2; \\ \min\{\exp(G') \cdot \exp(G),\ \exp(G')^{d-1}\} & p > 2. \end{cases}$$

No Exemplo 4.11, G é solúvel de comprimento derivado 2, logo a cota de $\exp(G')^{d-1}$ se mostra melhor que a que encontramos. Entretanto, vale destacar que para p-grupos de comprimento derivado superior a 3, conseguimos diminuir consideravelmente o teto do expoente de R.

4.2 Termos da Série Derivada de $\chi(G)$

Nesta seção, estamos interessados em descrever os termos da série derivada de $\chi(G)$ em função dos subgrupos D, L_1 e L_2. Vale observar que Sidki mostrou uma cota muito boa para o comprimento derivado de $\chi(G)$ se G for solúvel (Proposição 2.27). Nossa intenção é construir a série derivada de $\chi(G)$ de uma forma análoga ao feito por Bastos, Monetta, Oliveira e Rocco em [12, Teorema A] (veja o Teorema 2.16).

Teorema 4.19. *Seja G um grupo.*

(i) O subgrupo derivado $\chi(G)'$ é um produto central entre D e L_1L_2.

(ii) O segundo termo da série derivada $\chi(G)^{(2)}$ é dado pelo produto $D'L_1'L_2'L_{1,2}$.

(iii) Se $k \geq 2$, então $\chi(G)^{(k+1)}$ é o produto central de $D^{(k)}$, $L_1^{(k)}$ e $L_2^{(k)}$.

Demonstração. (i) Pela Proposição 2.20, temos que $\chi(G) = GL$, logo

$$\begin{aligned}\chi(G)' &= [GL, G^{\varphi}L] \\ &= [G, G^{\varphi}][G, L][L, G^{\varphi}][L, L] \\ &= DL_1L_2L'.\end{aligned}$$

Observe agora que L' é gerado por elementos da forma $[\alpha, [g, \varphi]]^{\beta}$, onde $g \in G$ e $\alpha, \beta \in L$. Então,

$$\begin{aligned}[\alpha, [g, \varphi]]^{\beta} &= [\alpha, g^{-1}g^{\varphi}]^{\beta} \\ &= ([\alpha, g^{\varphi}][\alpha, g^{-1}]^{g^{\varphi}})^{\beta} \\ &= ([\alpha, g^{\varphi}]^{\beta})([\alpha, g^{-1}]^{g^{\varphi}\beta}) \in L_1L_2.\end{aligned}$$

Com isso, segue que $\chi(G)' = DL_1L_2$. Ainda, $D \cap L_1L_2 \leq D \cap L = W \leq C_{\chi(G)}(\chi(G)')$. Assim, $\chi(G)'$ é produto central de D e L_1L_2.

(ii) Pelas propriedades de calculo teremos que

$$\chi(G)^{(2)} = [DL_1L_2, DL_1L_2] = D'L_1'L_2'L_{1,2}.$$

(iii) Vamos prosseguir por indução sobre $k \geq 3$. Pelas propriedades de calculo de comutador, temos que

$$\begin{aligned}\chi(G)^{(3)} &= [D'L_1'L_2'L_{1,2}, D'L_1'L_2'L_{1,2}] = [D'L_1'L_2', D'L_1'L_2'] \\ &= D^{(2)}L_1^{(2)}L_2^{(2)}[L_1', L_2'].\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1 teremos que $[L_1', L_2'] = 1$. Ainda,

$$D^{(2)} \cap L_1^{(2)}, D^{(2)} \cap L_2^{(2)}, L_1^{(2)} \cap L_2^{(2)} \leq W \leq C_{\chi(G)}(\chi(G)^{(3)}).$$

Com isso vale que $\chi(G)^{(3)}$ é produto central de $D^{(2)}$, $L_1^{(2)}$ e $L_2^{(2)}$. Suponha agora que vale para $k \geq 3$, isto é,

$$\chi(G)^{(k)} = D^{(k-1)}L_1^{(k-1)}L_2^{(k-1)}.$$

Novamente usando propriedades de calculo de comutadores, teremos que,

$$\chi(G)^{(k+1)} = D^{(k)}L_1^{(k)}L_2^{(k)}[L_1^{(k-1)}, L_2^{(k-1)}].$$

Observe que $[L_1^{(k-1)}, L_2^{(k-1)}] \leq [L_1', L_2'] = 1$ e

$$D^{(k)} \cap L_1^{(k)}, D^{(k)} \cap L_2^{(k)}, L_2^{(k)} \cap L_1^{(k)} \leq W \leq C_{\chi(G)}(\chi(G)^{(k+1)}).$$

Portanto, segue que $\chi(G)^{(k)}$ é produto central de $D^{(k-1)}$, $L_1^{(k-1)}$ e $L_2^{(k-1)}$, como queríamos. □

4.3 Termos da Série Central Inferior de $\chi(G)$

Seguindo o estudo da estrutura de $\chi(G)$, conseguimos encontrar um resultado análogo ao Teorema 2.17 em que é possível associar a série central inferior de $\chi(G)$ a subgrupos de D, L_1 e L_2, da seguinte maneira:

Proposição 4.20. *Seja G um grupo. Então, para $n \geq 3$ vale que*

$$\gamma_n(\chi(G)) = [D, _{n-2}\, G][L_1, _{n-2}\, G][L_2, _{n-2}\, G^{\varphi}].$$

Sabemos que Rocco descreveu em [61], a série central inferior de uma maneira diferente (veja Teorema 2.18). Para demonstrar a Proposição 4.20 precisaremos dos seguintes resultados auxiliares.

Lema 4.21. *Sejam $g, a, b \in G$ e $\alpha \in L$. Então,*

(i) $[\alpha, a, g, b^{\varphi}] = [\alpha, a, b^{\varphi}, g]$;

(ii) $[\alpha, a^{\varphi}, g^{\varphi}, b] = [\alpha, a^{\varphi}, b, g^{\varphi}]$.

Demonstração. Provaremos somente o primeiro item, uma vez que o segundo item segue

de forma análoga. Se $g, a, b \in G$ e $\alpha \in L$, então temos que

$$\begin{aligned}
[\alpha, a, g, b^\varphi] &= [[\alpha, a]^{-1}[\alpha, a]^g, b^\varphi] \\
&= [[\alpha, a]^{-1}, b^\varphi]^{[\alpha,a]^g}[[\alpha, a]^g, b^\varphi] \\
&= [[\alpha, a]^{-1}, b^\varphi][[\alpha, a]^g, b^\varphi] \quad ([[\alpha, a]^{-1}, b^\varphi] \in R) \\
&= [\alpha, a, b^\varphi]^{-[\alpha,a]^{-1}}[\alpha, a, (b^\varphi)^{g^{-1}}]^g \\
&= [\alpha, a, b^\varphi]^{-1}[\alpha, a, (b^\varphi)^{g^{-1}}]^g \quad ([\alpha, a, b^\varphi]^{-1} \in R) \\
&= [\alpha, a, b^\varphi]^{-1}[\alpha, a, b^\varphi[b^\varphi, g^{-1}]]^g \\
&= [\alpha, a, b^\varphi]^{-1}\big([\alpha, a, [b^\varphi, g^{-1}]][\alpha, a, b^\varphi]^{[b^\varphi,g^{-1}]}\big)^g \\
&= [\alpha, a, b^\varphi]^{-1}[\alpha, a, b^\varphi]^g \quad ([\alpha, a, [b^\varphi, g^{-1}]] \in [L, D]; [\alpha, a, b^\varphi] \in R) \\
&= [\alpha, a, b^\varphi]^{-1}[\alpha, a, b^\varphi][\alpha, a, b^\varphi, g] \\
&= [\alpha, a, b^\varphi, g]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Segue diretamente do Lema 4.21 que:

Lema 4.22. *Sejam G um grupo e n um inteiro positivo. Então vale que*

(i) $[L_{1,n}\, G, G^\varphi] = [L_1, G^\varphi{}_{,n}\, G]$;

(ii) $[L_{2,n}\, G^\varphi, G] = [L_2, G_{,n}\, G^\varphi]$.

Demonstração. Demonstraremos somente o item (i) uma vez que o item (ii) segue de forma análoga.

Sejam $g_1, \cdots, g_{n+1} \in G$ e $\alpha \in L$. Então, por $[\alpha, g_1, \cdots, g_{n-1}] \in L$, segue do item (i) do Lema 4.21,

$$\begin{aligned}
[\alpha, g_1, \cdots, g_{n-1}, g_n, g_{n+1}^\varphi] =& [\alpha, g_1, \cdots, g_{n-1}, g_{n+1}^\varphi, g_n] \\
=& [\alpha, g_1, \cdots, g_{n-2}, g_{n+1}^\varphi, g_{n-1}, g_n] \\
&\vdots \\
=& [\alpha, g_1, g_{n+1}^\varphi, g_2 \cdots, g_n].
\end{aligned}$$

Isso implica que os geradores de $[L_{1,n}\, G, G^\varphi]$ geram $[L_1, G^\varphi{}_{,n}\, G]$ e vice-versa. Isso conclui a demonstração. $\square$

O próximo resultado nos garante a normalidade dos subgrupos relacionados à construção de $\gamma_n(\chi(G))$.

Lema 4.23. *Sejam G um grupo e n um inteiro positivo. Então os subgrupos $[D_{,n}G]$, $[L_{1,n}G]$ $[L_{2,n}G^{\varphi}]$ são normais em $\chi(G)$.*

Demonstração. Demonstraremos por indução sobre n. Se $n = 1$, vale que

$$\begin{aligned}
[L_1, G]^{\chi(G)} &= [L_1, G]^{DGG^{\varphi}} \\
&= [L_1, G]^{G^{\varphi}} \\
&\leq [L_1, G][L_1, G, G^{\varphi}] \\
&\leq [L_1, G][L_1, G^{\varphi}, G] \quad (\textit{Lema } 4.22) \\
&\leq [L_1, G][R, G] \\
&\leq [L_1, G].
\end{aligned}$$

Portanto, $[L_1, G] \lhd \chi(G)$. Suponha agora que $[L_{1,n}G] \lhd \chi(G)$. É suficiente mostrar que $[L_{1,n+1}G]^{G^{\varphi}} \leq [L_{1,n+1}G]$. Pelo item (i) do Lema 4.22, vale que

$$\begin{aligned}
[L_{1,n+1}G]^{G^{\varphi}} &\leq [L_{1,n+1}G][[L_{1,n}G], G, G^{\varphi}] \\
&\leq [L_{1,n+1}G][[L_{1,n}G], G^{\varphi}, G] \\
&\leq [L_{1,n+1}G].
\end{aligned}$$

Similarmente, é possível mostrar que $[L_{2,n}G^{\varphi}] \lhd \chi(G)$.

Agora, provemos que $[D_{,n}G]$ é normal em $\chi(G)$. Novamente por indução sobre n, observe que por [66, Lemma 4.1.3], D é normal em $\chi(G)$. Logo,

$$[D, G]^{\chi(G)} = [D, G]^{LG} = [D, G]^{G} = [D^{G}, G] \leq [D, G].$$

Suponha que vale para n. Assim,

$$[D_{,n+1}G]^{G^{\varphi}} = [D_{,n+1}G]^{G} = \left[[D_{,n}G]^{G}, G^{G}\right] = [D_{,n+1}G].$$

Como queríamos demonstrar. □

É sabido que $R = [L_1, G^{\varphi}] = [L_2, G]$, mas nem sempre podemos dizer que $R = [L_1, G]$ ou a $R = [L_2, G^{\varphi}]$. Como exemplo tome $G = \langle a, b, c\rangle$ um grupo livre de ranque 3. Se $[L_1, G] = R$, então,

$$[[a, b^{\varphi}][b, a], c] = [[a, b^{\varphi}], c]^{[b,a]}[b, a, c],$$

logo,

$$[b,a,c] = ([[a,b^{\varphi}],c]^{[b,a]})^{-1}[[a,b^{\varphi}][b,a],c] \in DR = D.$$

Mas $G \cap D = 1$. Assim, $[b,a,c] = 1$, o que é uma contradição. O próximo resultado nos mostra que R é subgrupo de $[L_1, G]$ e de $[L_2, G^{\varphi}]$. O que nos habilita a investigar casos onde ocorre a igualdade. Em verdade, se G é abeliano, Sidki mostrou em [66] que $R = [D,G] = [L_1,G] = [L_2,G^{\varphi}]$ (Teorema 2.28).

Lema 4.24. *Sejam G um grupo e n um inteiro positivo. Então,*

$$[R,_n G] \leq [D,_{n+1} G] \cap [L_1,_{n+1} G] \cap [L_2,_{n+1} G^{\varphi}].$$

Demonstração. Observe que é suficiente provar que

$$R \leq [D,G] \cap [L_1,G] \cap [L_2,G^{\varphi}].$$

Seja $g,h,a \in G$. Queremos mostrar que $[\varphi,g,h,a^{\varphi}]$ pertence aos subgrupos $[D,G]$, $[L_1,G]$ e $[L_2,G^{\varphi}]$. De fato,

$$\begin{aligned}
[\varphi,g,h,a^{\varphi}] &= [[g,h^{\varphi}][h,g],a^{\varphi}] \\
&= [g,h^{\varphi},a^{\varphi}]^{[h,g]}[h,g,a^{\varphi}] \\
&= [g,h^{\varphi},a]^{[h,g]}[h,g,a^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Temos que $[D,G]$ é um subgrupo normal de $\chi(G)$ (Lema 4.23). Ainda, pela Identidade de Hall-Witt (Proposição 1.2), temos que $[h,g,a^{\varphi}] \in [D,G]$. Portanto, $R \leq [D,G]$.

Agora, sem perda de generalidade, mostraremos que vale para $[L_1,G]$ e o resultado seguirá de forma análoga para $[L_2,G^{\varphi}]$. Assim,

$$\begin{aligned}
[\varphi,g,h,a^{\varphi}] &= [[g,h^{\varphi}][h,g],a^{\varphi}] \\
&= ([g,h^{\varphi}][h,g])^{-1}([g,h^{\varphi}][h,g])^{a^{\varphi}} \\
&= ([g,h^{\varphi}][h,g])^{-1}[g,h^{\varphi}]^{a^{\varphi}}[h,g]^{a^{\varphi}} \\
&= ([g,h^{\varphi}][h,g])^{-1}[g,h^{\varphi}]^{a}[h,g]^{a(a^{-1}a^{\varphi})} \\
&= ([g,h^{\varphi}][h,g])^{-1}[g,h^{\varphi}]^{a}[h,g]^{a}\big[[h,g]^{a},(a^{-1}a^{\varphi})\big] \\
&= ([g,h^{\varphi}][h,g])^{-1}([g,h^{\varphi}][h,g])^{a}\big[[h,g]^{a},(a^{-1}a^{\varphi})\big] \\
&= ([g,h^{\varphi}][h,g])^{-1}([g,h^{\varphi}][h,g])^{a}\big[[h,g]^{a},(a^{-1}a^{\varphi})\big] \\
&= [\varphi,g,h,a]\big[h^{a},g^{a},(a^{-1}a^{\varphi})\big].
\end{aligned}$$

Novamente, pela Identidade de Hall-Witt (Proposição 1.2) e pelo Lema 4.23, segue que $\left[h^a, g^a, (a^{-1}a^{\varphi})\right] \in [L_1, G]$. Consequentemente, $R \leq [D, G] \cap [L_1, G] \cap [L_2, G^{\varphi}]$. □

Estamos agora em condições de demonstrar a Proposição 4.20.

Demonstração da Proposição 4.20. Demonstraremos por indução sobre $n \geq 3$. Se $n = 3$,

$$\begin{aligned}\gamma_3(\chi(G)) &= [DL_1L_2, GL] \\ &= [D, G][L_1, G][L_2, G][L_1, L][L_2, L] \\ &= [D, G][L_1, G]R[L_1, L][L_2, L].\end{aligned}$$

Note que $[L_1, L] \leq [L_1, G][L_1, G^{\varphi}]$ e $[L_2, L] \leq [L_2, G][L_2, G^{\varphi}]$. Então,

$$\begin{aligned}\gamma_3(\chi(G)) &= [D, G][L_1, G]R[L_1, L][L_2, L] \\ &\leq [D, G][L_1, G]R[L_1, G][L_1, G^{\varphi}][L_2, G][L_2, G^{\varphi}] \\ &\leq [D, G][L_1, G][L_2, G^{\varphi}]R \\ &\leq [D, G][L_1, G][L_2, G^{\varphi}] \quad (\textit{Lema } 4.24).\end{aligned}$$

Isso é suficiente para concluir que $\gamma_3(\chi(G)) = [D, G][L_1, G][L_2, G^{\varphi}]$.

Agora se o resultado vale para $n \geq 3$, então

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}(\chi(G)) =& \left[[D,_{n-1} G]\,[L_1,_{n-1} G]\,[L_2,_{n-1} G^{\varphi}], GL\right] \\ =& [D,_n G]\,[L_1,_n G][[L_2,_{n-1} G^{\varphi}], G] \\ & [[L_1,_{n-1} G], L]\,[[L_2,_{n-1} G^{\varphi}], L].\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.22, $[L_1,_{n-1} G, G^{\varphi}]$ e $[L_2,_{n-1} G^{\varphi}, G]$ são subgrupos de $[R,_{n-1} G]$. Ainda, o Lema 4.24 nos garante que $[R,_{n-1} G] \leq [D,_n G]$. Por fim, note que

$$[L_1,_{n-1} G, L] \leq [L_1,_n G]\,[[L_1,_{n-1} G], G^{\varphi}] \leq [L_1,_n G]\,[D,_n G],$$

e

$$[L_2,_{n-1} G^{\varphi}, L] \leq [L_2,_n G^{\varphi}]\,[[L_2,_{n-1} G^{\varphi}], G] \leq [L_2,_n G^{\varphi}]\,[D,_n G].$$

Portanto, teremos que

$$\gamma_{n+1}(\chi(G)) = [D,_{n-1} G][L_1,_{n-1} G][L_2,_{n-1} G^{\varphi}].$$ □

Agora, estudaremos os casos em que G é um grupo nilpotente de classe c. Vale observar que Gupta, Rocco e Sidki estudaram esse caso em [37].

Teorema 4.25 ([37]). *Seja G um grupo m-gerado nilpotente de classe c. Se $m \geq 2$ e $c \geq 1$, então $\chi(G)$ é nilpotente de classe no máximo $\max\{m, c+2\}$. Adicionalmente, se $m \geq c+3$, então $\gamma_{c+3}(\chi(G))$ é um 2-grupo abeliano elementar de posto no máximo*

$$\sum_{k=c+3}^{m} \binom{m}{k}.$$

Proposição 4.26. *Seja G um grupo nilpotente de classe c. Então, $[L_{1,c}\, G]$, $[L_{2,c}\, G^{\varphi}]$, $[D_{,c}\, G] \leq [R_{,c-1}\, G]$.*

Demonstração. Provemos que $[L_{1,c}\, G] \leq [R_{,c-1}\, G]$. De fato, sejam $g, h, a_1, \ldots, a_{c-1} \in G$ e $x = [\varphi, g, h, a_1, \ldots, a_c] \in [L_{1,c}\, G]$. Então,

$$\begin{aligned} x =& \big[[g, h^{\varphi}][h, g], a_1, \ldots, a_c\big] \\ =& \big[[g, h^{\varphi}, a_1]^{[h,g]}[h, g, a_1], a_2, \ldots, a_c\big] \\ =& \big[\,[[g, h^{\varphi}, a_1]^{[h,g]}, a_2]^{[h,g,a_1]}[h, g, a_1, a_2], a_3, \ldots, a_c\big]. \end{aligned}$$

Indutivamente segue que

$$\begin{aligned} x =& \big[[\ldots[[g, h^{\varphi}, a_1]^{[h,g]}, a_2]^{[h,g,a_1]}, \ldots, a_{c-1}]^{[h,g,a_1,\ldots,a_{c-2}]}, a_c\big]^{[h,g,a_1,\ldots,a_{c-1}]} \\ & [h, g, a_1, \ldots, a_{c-1}, a_c]. \end{aligned}$$

Note que $[h, g, a_1, \ldots, a_{c-1}] \in \gamma_{c+1}(G) = 1$, o que implica em podermos reescrever $[h, g, a_1, \ldots, a_{c-1}, a_c]$ como $[h, g, a_1, \ldots, a_{c-1}, a_c^{\varphi}]$. Ademais, uma vez que $[g, h^{\varphi}] \in D$ então podemos reescrever

$$\big[[\ldots[[g, h^{\varphi}, a_1]^{[h,g]}, a_2]^{[h,g,a_1]}, \ldots, a_{c-1}]^{[h,g,a_1,\ldots,a_{c-2}]}, a_c\big]^{[h,g,a_1,\ldots,a_{c-1}]},$$

como

$$\big[[\ldots[[g, h^{\varphi}, a_1]^{[h,g]}, a_2]^{[h,g,a_1]}, \ldots, a_{c-1}]^{[h,g,a_1,\ldots,a_{c-2}]}, a_c^{\varphi}\big]^{[h,g,a_1,\ldots,a_{c-1}]}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x =& \big[[\ldots[[g, h^{\varphi}, a_1]^{[h,g]}, a_2]^{[g,h,a_1]}, \ldots, a_{c-1}]^{[g,h,a_1,\ldots,a_{c-2}]}, a_c^{\varphi}\big]^{[g,h,a_1,\ldots,a_{c-1}]} \\ & [h, g, a_1, \ldots, a_{c-1}, a_c^{\varphi}] \\ =& [\varphi, g, h, a_1, \ldots, a_{c-1}, a_c^{\varphi}] \\ =& [\varphi, g, h, a_c^{\varphi}, a_1, a_2, \ldots, a_{c-1}] \quad (\textit{Lema } 4.21). \end{aligned}$$

Dessa forma $[L_{1,c}\, G] \leq [R_{,c-1}\, G]$. O caso de $[L_{2,c}\, G^{\varphi}]$ segue de forma análoga.

Seja agora $y = [g^{\varphi}, h, a_1, \ldots, a_c] \in [D_{,c}\, G]$. Então,

$$\begin{aligned} y =& [[\varphi, h, g][g, h], a_1, \ldots, a_c] \\ =& [[\varphi, h, g, a_1]^{[g,h]}[g, h, a_1], a_2, \ldots, a_c] \\ =& [[[\varphi, h, g, a_1]^{[g,h]}, a_2]^{[g,h,a_1]}[g, h, a_1, a_2], a_3, \ldots, a_c]. \end{aligned}$$

Uma vez que $[g, h, a_1, \ldots, a_c] = 1$, indutivamente, segue que

$$\begin{aligned} y =& \big[[\ldots[[\varphi, h, g, a_1]^{[g,h]}, a_2]^{[g,h,a_1]}, \ldots, a_{c-1}]^{[g,h,a_1,\ldots,a_{c-2}]}, a_c\big]^{[g,h,a_1,\ldots,a_{c-1}]} \\ & [g, h, a_1, \ldots, a_c] \\ =& \big[[\ldots[[\varphi, h, g, a_1]^{[g,h]}, a_2]^{[g,h,a_1]}, \ldots, a_{c-1}]^{[g,h,a_1,\ldots,a_{c-2}]}, a_c\big]^{[g,h,a_1,\ldots,a_{c-1}]}. \end{aligned}$$

Portanto, $[D_{,c}\, G] \leq [L_{1,c}\, G] \leq [R_{,c-1}\, G]$. Como queríamos demonstrar. □

Segue diretamente o seguinte corolário:

Corolário 4.27. *Se G é um grupo nilpotente de classe c, então*

$$\gamma_{n+2}(\chi(G)) = [R_{,n-1}\, G] = [D_{,n}\, G] = [L_{1,n}\, G] = [L_{2,n}\, G^{\varphi}],$$

para qualquer $n \geq c$.

Demonstração. Combinando o Lema 4.24, a Proposição 4.20 e a Proposição 4.26 concluímos a prova. □

Observação 4.28. *Observe que podemos deduzir do Teorema 4.25, que $\gamma_{c+3}(\chi(G))$ é um 2-grupo abeliano elementar. Ademais, o Corolário 4.27 nos garante que*

$$\gamma_{c+3}(\chi(G))^2 = [R_{,c}\, G]^2 = 1.$$

O corolário anterior não nos garante que $\chi(G)$ é nilpotente se G for nilpotente. Em verdade, não conseguimos estabelecer uma condição melhor ao que Gupta, Rocco e Sidki fizeram no Teorema 4.25. Entretanto, conseguimos mostrar uma condição em que $[R_{,n}\, G] = [D_{,n+1}\, G]$ e que a série central inferior possui uma identificação razoavelmente simples e comportada.

Capítulo 5

Considerações Finais

A primeira parte desse trabalho estava conectado com condições de finitude para o n-ésimo produto tensorial não abeliano de grupos. Tal estudo foi motivado pelo Professor Guram Donadze que nos sugeriu o tema, e levou em conta trabalhos anteriores de Donadze e Garcia-Martinez ([26]) e de Kochloukova e Sidki [42].

Para um trabalho futuro parece natural estudar questões de expoente para o n-ésimo produto tensorial $G^{\otimes n}$ quando G é um p-grupo finito. Tal questão foi considerada no caso particular de $n = 3$ (veja [40]). Tal estudo parece natural e temos expectativas que tais cotas possam ajudar na questão do expoente do quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$.

Na segunda parte do trabalho, investigamos alguns subgrupos de $R(G)$ dentro do grupo de comutatividade fraca $\chi(G)$. Tal estudo extrapolou nossos objetivos iniciais visto que a abordagem escolhida usando o subgrupo $L_{1,2}(G)$ nos permitiu entender e limitar o expoente do subgrupo $R(G)$. Além disso, o estudo de $L_{1,2}(G)$ nos possibilitou dar uma descrição para os termos da série derivada e da série central inferior do $\chi(G)$.

Nessa segunda parte há duas questões que parecem naturais para serem exploradas:

Problema 1. *Seja G um grupo com expoente finito. Então* $\exp(R(G)) \leq \exp(G)$*?*

Podemos reescrever este problema da seguinte maneira:

Problema 2. *Seja G um grupo com expoente finito. Então $L_{1,2}(G) = 1$ em quais condições para G?*

Até o momento, não dispomos de exemplos que contradigam o Problema 1, em verdade, podemos mencionar a Proposição 4.9 que garante condições para G de tal forma que os problemas 1 e 2 ocorram. Entretanto, cabe destacar, que métodos computacionais que envolvem a biblioteca do SMALLGROUPS do programa GAP tem algumas limitações de

finitude. Além disso, o próprio crescimento da construção para grupos de ordem pequena, se torna uma dificuldade adicional na obtenção de exemplos. Outra dificuldade encontrada na obtenção de exemplos é notório o crescimento rápido da construção de $\chi(G)$ quando G é, por exemplo, um 2-grupo veja [66, Teorema 4.2.1] e [37, Teorema 3.3].

Neste mesmo contexto, observe que no item (i) do Teorema 4.14, temos que existem casos de um grupo G não periódico, G' periódico com R periódico. Assim, podemos mudar a hipótese do Problema 1 para a seguinte maneira:

Problema 3. *Seja G um grupo.*

(i) Se G' é periódico, segue que R também é periódico? Caso contrário, sob quais condições adicionais sobre G essa implicação é válida?

(ii) Se G' tem expoente finito, é verdade que $\exp(R) \leq \exp(G')$? Caso contrário, sob quais hipóteses adicionais essa desigualdade pode ser garantida?

Numa direção análoga ao Teorema 4.10, temos o seguinte problema:

Problema 4. *Sejam n um número natural e G um grupo finitamente gerado no qual todos os comutadores de peso 3 tem ordem dividindo n. Então $L_{1,2}$ tem expoente limitado em termos de n?*

Referências Bibliográficas

[1] Adjan, S. I. Groups with periodic commutators. In: Doklady Mathematics. Pleiades Publishing, 2000. p. 174-176.

[2] Adjan, S. I. and Novikov, P. S., Infinite periodic groups. II. Mathematics of the USSR-Izvestiya, v. 2, n. 2, p. 241, 1968.

[3] Aleshin, S. V. Finite automata and Burnside's problem for periodic groups. Math. Notes, **11** (1972) pp. 199–203.

[4] Baer, R. Representations of Groups as Quotient Groups. III. Invariants of Classes of Related Representations. Transactions of the American Mathematical Society 58, no. 3 (1945): 390–419.

[5] Bastos R., de Melo E., Gonçalves N., Oliveira R. Non-abelian tensor square and related constructions of p-groups. Archiv der Mathematik, v. 114, n. 5, p. 481-490, (2020).

[6] Bastos, R., de Melo, E. and de Oliveira, R. On the Exponent of the Weak Commutativity Group. Mediterranean Journal of Mathematics, v. 18, n. 5, p. 194, 2021.

[7] Bastos, R., de Melo, E., Nunes R. and Monetta, C., On weak commutativity in p-groups. Journal of Group Theory, v. 26, n. 6, p. 1215-1229, 2023.

[8] Bastos, R., Nakaoka, I.N. and Rocco, N.R., Finiteness conditions for the non-abelian tensor product of groups. Monatshefte für Mathematik 187, 603–615, (2018).

[9] Bastos, R., Nakaoka, I.N. and Rocco, N.R., Finiteness conditions for the box-tensor product of groups and related constructions, Journal of Algebra, Volume 587, 594-612, (2021).

[10] Bastos, R., Nakaoka, I.N. and Rocco, N.R., On the finiteness of the non-abelian tensor product of groups, Journal of Algebra, Volume 664, Part A, (2025), Pages 251-267,

[11] Bastos, R., de Oliveira, R., Gonçalves, N. and Monetta, C., On generating properties of the weak commutativity of p-groups, p odd. Georgian Mathematical Journal, n. 0, 2025.

[12] Bastos, R., de Oliveira, R., Monetta, C. and Rocco, N., On some series of a group related to the non-abelian tensor square of groups. Journal of Algebra, v. 598, p. 236-253, 2022.

[13] Bastos, R., de Oliveira, R., Lima, B. and Nakaoka, I. N., *Finiteness conditions for the weak commutativity group and related constructions*, Communications in Algebra, 52:11, 4642-4649, (2024)

[14] Bastos R., de Oliveira R. and Ortega G., Structural Results On The Weak Commutativity Construction. arXiv preprint arXiv:2506.12146, 2025.

[15] Bastos R. and Ortega G., Finiteness conditions for the n-fold tensor product of groups. Journal of Algebra and Its Applications, v. 24, n. 09, p. 2550228, 2025.

[16] Baumslag, G., Cannonito, F. B. and Miller III, C. F., Computable algebra and group embeddings. Journal of Algebra, v. 69, n. 1, p. 186-212, 1981.

[17] Blyth, R. D., Morse, R. F. and Redden, J. L. On computing the non-abelian tensor squares of the free 2-Engel groups. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. (2004). 47. 305 - 323.

[18] Bridson, M. R., and Kochloukova, D., Weak commutativity and finiteness properties of groups, Bull. Lond. Math. Soc., 51 (2019) pp. 168–180.

[19] Brown, R. and Loday J.-L., Excision homotopique en basse dimension. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A 298, 353-356, (1984).

[20] Brown, R. and Loday J.-L., Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces, Topology 26 , 311-335, (1987).

[21] Brown R., Johnson, D.L. and Robertson, E.F., Some computations of non-abelian tensor products of groups, Journal of Algebra, Volume 111, 177-202, (1987).

[22] Burns, J. and Ellis, G., *On the nilpotent multipliers of a group*, Math. Z. **226** (1997) pp. 405-–428.

[23] Dennis, R. K., *In search of new "homology" functors having a close relationship to K-theory*, Preprint, Cornell University, Ithaca, NY, 1976.

[24] Deryabina, G. S. and Kozevnikov, P. A., *The derived subgroup of a group with commutators of bounded order can be non-periodic*, Comm. Algebra, **27** (1999) pp. 4525–4530.

[25] Dixon, M., Kurdachenko, L.A. and Pypka, O.,The theorems of Schur and Baer: A survey. International Journal of Group Theory. 4. 21-32. (2015).

[26] Donadze, G. and Garcia-Martinez, X., *Some generalisations of Schur' and Baer's theorem and their connection with homological algebra*, Math. Nachr., **294** (11) (2021) pp. 2029–2039.

[27] Donadze, G., Ladra, M. and Paez-Guillan, P., Schur's theorem and its relation to the closure properties of the non-abelian tensor product, *Proc. R. Soc. Edinb. A: Math*, **150** (2020) pp. 993–1002.

[28] Donadze G., Ladra M. and Thomas V.Z., On some closure properties of the non-abelian tensor product, Journal of Algebra, Volume 472, 399-413, (2017).

[29] Eick, B. and Nickel, W., Computing the Schur multiplicator and the nonabelian tensor square of a polycyclic group. Journal of Algebra. (2008). 320. 927-944.

[30] Ellis G., The non-abelian tensor product of finite groups is finite. J. Algebra 111, 203–205 (1987).

[31] Ellis, G. On the tensor square of a prime power group. Arch. Math 66, 467–469 (1996).

[32] Ellis, G. and Leonard, F., Computing Schur multipliers and tensor products of finite groups, Proc. Royal Irish Acad. 95A , 137-147, (1995).

[33] Fröhlich, A., “Baer-Invariants of Algebras.” Transactions of the American Mathematical Society 109, no. 2 (1963): 221–44.

[34] Grigorchuk, R. I. *On Burnside's problem on periodic groups*, Functional Anal. Appl. **14** (1980) pp. 41–43.

[35] Guin, D., Cohomologie et homologie non abeliennes des groupes, J. Pure Appl. Algebra **50** (2) (1988) pp. 109–137.

[36] Gupta, N. and Sidki, S., On the Burnside problem for periodic groups, Math. Z., **182** (1983) pp. 385–386.

[37] Gupta, N., Rocco, N. and Sidki, S., *Diagonal embeddings of nilpotent groups*, Illinois J. Math., **30** (1986) pp. 274–283.

[38] Inassaridze, N., Nonabelian tensor products and nonabelian homology of groups, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 112, Issue 2,(1996), Pages 191-205.

[39] Johnson D., Presentations of Groups (2nd ed., London Mathematical Society Student Texts). Cambridge: Cambridge University Press, (1997).

[40] Khamseh, E. and Hadi Jafari, S. Computing the 2-nilpotent multiplier of 2-generator p-groups of class 2. Indian J Pure Appl Math (2024). https://doi.org/10.1007/s13226-024-00539-x

[41] Kochloukova, D.H. and Mendonça, L., Weak commutativity for pro-p groups. Monatsh Math 194, 555–575 (2021). https://doi.org/10.1007/s00605-020-01468-7

[42] Kochloukova, D.H., and Sidki, S., *On weak commutativity in groups*, J. Algebra, **471** (2017) pp. 319–347.

[43] Ladra M. and THOMAS, V.Z., Two generalizations of the nonabelian tensor product. J. Algebra 369, 96–113, (2012).

[44] Lang, S., Algebra, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, (2002).

[45] Lima, B. C. R. and Oliveira, R., "Weak commutativity between two isomorphic polycyclic groups"Journal of Group Theory, vol. 19, no. 2, (2016), pp. 239-248.

[46] Lue, A. S.-T., The Ganea Map for Nilpotent Groups, J. London Math. Soc., **s2-14** (1976) pp. 309–312.

[47] MacDonald, J. L., Group derived functors, Journal of Algebra, Volume 10, Issue 4, (1968) Pages 448-477, ISSN 0021-8693,

[48] Mendonça, L., The weak commutativity construction for Lie algebras. Journal of Algebra. 529. (2019).

[49] Miller, C., *The second homology group of a group: relations among commutators*, Proc. Am. Math. Soc., **3** (1952) pp. 588–595.

[50] Moravec, P., The non-abelian tensor product of polycyclic groups is polycyclic, J. Group Theory 10 (6), 795–798, (2007).

[51] Moravec, P., Schur multipliers and power endomorphisms of groups, Journal of Algebra, Volume 308, Issue 1 (2007), Pages 12-25, ISSN 0021-8693

[52] Moravec, P.,The exponents of nonabelian tensor products of groups,Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 212, Issue 7, 1840-1848, (2008).

[53] Moravec, P., On the exponent of Bogomolov multipliers. Journal of Group Theory, v. 22, n. 3, p. 491-504, 2019.

[54] Morse, R., Advances in Computing the Nonabelian Tensor Square of Polycyclic Groups. Irish Mathematical Society Bulletin. (2005).

[55] Morse, R., Blyth, R. D. and Moravec, P., On the nonabelian tensor squares of free nilpotent groups of finite rank. Computational group theory and the theory of groups, 27-43, Contemp. Math., 470, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2008).

[56] Nakaoka, I.N., Non-abelian tensor products of solvable groups, J. Group Theory 3 (2), 157–167, (2000).

[57] Parvizi, M. and Niroomand, P., *On the structure of groups whose exterior or tensor square is a p-group*, J. Algebra, **352** (2012) pp. 347–353.

[58] Robinson D.J.S., Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups 2nd ed., Springer-Verlag, New York, (1972).

[59] Robinson D.J.S., A Course in the Theory of Groups, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, (1996).

[60] Rocco, N.R. , On Weak Commutativity between Finite p-Groups, p: odd*, Journal of Algebra, 76,471-488,(1982)

[61] Rocco, N.R. , On a construction related to the non-abelian tensor square of a group, Bol. Soc. Bras. Mat. 22 , 63-79, (1991).

[62] Rocco, N.R. , A Presentation of a Crossed Embedding of Finite Solvable Groups, , ISSN: 15324125, 2. 1994

[63] Rocco, N.R., Nonabelian tensor products under engelian actions: an approach via a related construction, Preprint, University of Brasília, (1997).

[64] Rotman, J., An Introduction to the Theory of Groups, Springer-Verlag, New York, (1995).

[65] Rotman, J., An Introduction to Homological Algebra, Springer-Verlag, New York, (2009).

[66] Sidki, S. N., *On weak permutability between groups*, J. Algebra, **63** (1980) pp. 186–225.

[67] Sushchansky, V. I. Periodic p-elements of permutations and the general Burnside problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **247** (1979) pp. 447–461.

[68] Thomas, V.Z., The non-abelian tensor product of finite groups is finite: a homology-free proof. Glasgow Math. J. 52, 473–477, (2010).

[69] Visscher, M.P., On the nilpotency class and solvability length of nonabelian tensor products of groups, Arch. Math. (Basel) 73 (3), 161–171, (1999).

[70] Vitor, P.V., Produto Tensorial não Abeliano de Grupos. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Departemento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2015.

[71] V. Z. Thomas, *The non-abelian tensor product of finite groups is finite: a Homology-free proof*, Glasgow Math. J. **52** (2010) pp. 473–477.

[72] J. H. C. Whitehead, A certain exact sequence, Ann. of Math., **52** (1950) pp. 51–110.