



Universidade de Brasília

**Sólitons de translação regrados e cíclicos
para o fluxo do inverso da curvatura
média**

Fabiane Soares dos Santos

Orientador: Dr. João Paulo dos Santos

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 30 de Janeiro de 2026

À minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, em especial à minha mãe Damáres Luzia, e ao meu namorado Luciano Begot pelo apoio incondicional em todas as circunstâncias enfrentadas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Paulo dos Santos, pela paciência, disponibilidade, compreensão e atenção dedicada neste período. O melhor orientador que eu poderia ter.

Aos professores Carlos Carrion Riveros, Hiuri Reis e Tarcísio Silva pelo aceite em integrar a banca de avaliação desta dissertação.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Matemática da UnB, em especial os professores João Paulo dos Santos, Manuela Resende, Tarcísio Silva e Yuri Sobral, pela contribuição na minha formação.

A todos os meus professores da graduação na Universidade Federal do Pará, especialmente os professores Adam Silva, Irene Pereira, José Antônio Vilhena, Rogélio Guzman, Tânia Valdívia e Valter Borges, pelos ensinamentos e incentivos para o ingresso em um curso de mestrado.

Aos meus amigos e colegas que conheci em Brasília, em especial Ângelo Machado, Irving Barreto, Fabrício Maia, Jonatas Peralta, Josiany Sofia, Karen Gomes, Márcio Mendes, Pako, Paul Vilca, Pedro Souto, Ronaldo Murakami, Samuel Terto, Thafne Sirqueira, Thais Marçal, Valdemir Silva, Victor Netto, Vitória Henryla e Wendy Fernanda, pelo apoio e a amizade construída no caminho.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante o programa de mestrado, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo de sólitons de translação para o fluxo do inverso da curvatura média dados por superfícies regradas e superfícies cíclicas, isto é, superfícies folheadas por retas e circunferências, respectivamente. Com base no artigo [Kim-Pyo, Results Math (2019) 74:64], apresentamos a prova do teorema que estabelece que um soliton de translação regrado para o fluxo do inverso da curvatura média é um cilindro sobre uma cicloide reescalada. Na sequência, é apresentada a prova de que todo soliton de translação cíclico é dado por uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é paralelo à direção de translação.

Palavras-Chave: Fluxo do inverso da curvatura média, sólitons de translação, superfície regradada, superfícies cíclicas.

Abstract

In this work, we present a study of translating solitons for the inverse mean curvature flow given by ruled surfaces and cyclic surfaces, that is, surfaces foliated by straight lines and circles, respectively. Based on the article [Kim-Pyo, Results Math (2019) 74:64], we present the proof of the theorem that establishes that a ruled translational soliton for the inverse mean curvature flow is a cylinder over a rescaled cycloid. Subsequently, we present the proof that every cyclic translational soliton is given by a surface of revolution whose axis of revolution is parallel to the direction of translation.

Keywords: Inverse mean curvature flow, translating solitons, ruled surfaces, cyclic surfaces.

Conteúdo

Lista de Figuras	vii
Introdução	1
1 Conceitos e resultados preliminares	4
1.1 Conceitos básicos de curvas e superfícies	4
1.1.1 Geometria de Curvas em \mathbb{R}^3	4
1.1.2 Geometria de Superfícies em \mathbb{R}^3	7
1.2 Fluxo do inverso da curvatura média	10
1.3 Alguns resultados e identidades trigonométricas	11
1.4 Superfícies regradas, cíclicas e de translação	16
2 Sólitons de Translação Regrados para o FICM em \mathbb{R}^3	19
2.1 Rigidez de sólitons de translação regrados	19
2.2 Unicidade de sólitons de translação como superfícies de translação	29
3 Sólitons de Translação Cíclicos para o FICM em \mathbb{R}^3	34
3.1 Parametrização e estrutura de superfícies cíclicas	34
3.2 Lema chave	36
3.3 Teorema Principal	49
3.4 Observações	55
Bibliografia	57

Lista de Figuras

1.1	Cicloide com $r = 1$ e $\rho \in [0, 4\pi]$	5
2.1	Cilindro cicloide com $B = 2$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$	28
2.2	Cilindro cicloide com $B = 2$ e $\phi = 0$	28

Introdução

Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície orientada e $F : \Sigma \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação suave, com $F(\Sigma, 0) = \Sigma$, dizemos que a família de superfícies $\{F_t(\Sigma)\}_{t \in [0, T)}$ evolui pelo *Fluxo do Inverso da Curvatura Média* (FICM) se existe um campo normal unitário N_t ao longo de F_t tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(p) = -\frac{1}{H_t(p)} N_t(p), \quad p \in \Sigma, t \in [0, T), \quad (1)$$

em que $F_t(\cdot) := F(\cdot, t)$, $H_t(p)$ denota a curvatura média de F_t no ponto p , calculada em relação à orientação determinada por N_t .

De acordo com Kim e Pyo [18], o FICM tem sido amplamente estudado não apenas como um tipo de fluxo geométrico, mas também como uma ferramenta importante na obtenção de desigualdades geométricas. Na perspectiva de fluxos geométricos, considerando-se existência de soluções suaves, comportamento assintótico e singularidades, temos os trabalhos [10, 24, 23, 15]. Do ponto de vista das aplicações, temos várias desigualdades geométricas ótimas e significativas que foram obtidas usando o FICM. Kim e Pyo mencionam algumas delas em seu trabalho: a desigualdade de Penrose Riemanniana estabelecida por Huisken e Ilmanen [13, 14]; desigualdades integrais do tipo Alexandrov-Fenchel obtidas por Guan e Li [11]; uma desigualdade para hipersuperfícies na variedade anti-de Sitter–Schwarzschild n -dimensional, obtida por Brendle *et al.* [4], generalizando a desigualdade clássica de Minkowski para superfícies no espaço euclidiano tridimensional. Outra aplicação importante é a obtida por Bray e Neves [3], que usaram o FICM para computar o invariante de Yamabe e provaram a conjectura de Poincaré para 3-variedades com invariante de Yamabe maior do que o de \mathbb{RP}^3 .

Uma classe de soluções especiais do FICM é constituída pelos *sólitons de translação*, que descrevem evoluções de superfícies por translações ao longo de uma direção fixa. Especificamente, tais soluções da Equação (1) são dadas por $F(p, t) = F(p) + tT$, em que $T \in \mathbb{R}^3$ é um vetor constante. Tal solução fica determinada pela condição inicial Σ quando esta satisfaz a equação

$$\langle \vec{H}, T \rangle = -1,$$

em que \vec{H} é o vetor curvatura média de Σ , isto é, $\vec{H} = HN$, onde H e N denotam a curvatura média e o campo normal unitário de Σ , respectivamente. Uma vez que tais superfícies determinam as soluções dadas por sólitons de translação, uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é também chamada sólito de translação. Drugan *et al.* [9] introduziram a cicloide gerada por um círculo de raio $\frac{1}{4}$ como o exemplo mais simples de sólito de translação. Eles também introduziram como sólito de translação o produto euclidiano entre a cicloide e \mathbb{R} , chamado de cilindro sobre uma cicloide.

Evoluções geométricas como a descrita por solitons de translação constituem soluções importantes no contexto dos fluxos geométricos. Um dos fluxos geométricos mais importantes na literatura é o *Fluxo da Curvatura Média* FCM, em que superfícies evoluem na direção normal com velocidade dada pela curvatura média. Solitons de translação são soluções especiais do FCM e também representam singularidades do Tipo II [16]. No caso do FCM, a condição inicial Σ do sólito é determinada pela equação $H = \langle N, T \rangle$. Na literatura podemos encontrar abordagens que envolvem estruturas geométricas específicas para a construção e classificação de solitons de translação para o FCM. Por exemplo, solitons rotacionalmente simétricos são abordados em [2] e [7].

Considerando-se sólitons de translação para o fluxo da curvatura média dados por superfícies regradas e cíclicas, isto é, superfícies que possuem a propriedade de serem folheadas por retas e por circunferências, respectivamente, temos os artigos [12, 17] (veja também [20]). Dentre as soluções descritas em [12], temos uma reparametrização do cilindro Grim-Reaper, ou seja um cilindro sobre a curva Grim-Reaper $\alpha(x) = (x, -\log|\cos(x)|)$. Já em [17], é mostrado que um sólito de translação cíclico para o FCM é uma superfície de revolução cujo eixo é paralelo a e_3 . Em comparação com os sólitons de translação para o FCM, temos muito poucos exemplos de sólitons de translação para o FICM.

Esta dissertação apresenta um estudo de sólitons de translação para o fluxo do inverso da curvatura média em \mathbb{R}^3 baseado no artigo de Kim e Pyo [18]. São consideradas duas classes de superfícies como sólitons de translação: as superfícies regradas e as superfícies cíclicas. Como resultados principais, serão apresentados o teorema que estabelece que um sólito de translação regrado para o fluxo do inverso da curvatura média é um cilindro sobre uma curva cicloide reescalada, e o teorema de que todo sólito de translação cíclico é dado por uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é paralelo à direção de translação. Além disso, mostra-se que superfícies de translação com geratrizes $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$ e $\beta(v) = (0, v, g(v))$ que são sólitons de translação para o fluxo do inverso da curvatura média também são os cilindros sobre uma cicloide reescalada.

O trabalho é organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, vamos reunir as definições, notações e resultados preliminares que serão usados ao longo do trabalho. O Capítulo 2 é

dedicado ao estudo das superfícies cíclicas, em que apresentamos a prova da rigidez dos solitons de translação como cilindros sobre cicloides reescaladas e o teorema da unicidade para superfícies de translação na classe mencionada acima. No Capítulo 3, estudamos as superfícies cíclicas. Inicialmente, é apresentado um lema fundamental que mostra que os círculos da folheação estão em planos paralelos e, em seguida, apresentamos a prova do teorema principal, estabelecendo os solitons de translação cíclicos como superfícies de revolução.

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

O presente capítulo tem como objetivo apresentar definições e resultados que serão importantes para a leitura e compreensão dos próximos capítulos, além de estabelecer a notação que será utilizada ao longo do texto. Inicialmente, vamos expor conceitos fundamentais de curvas e superfícies que serão utilizados neste trabalho. Na seção 1.2, apresentaremos o chamado Fluxo do Inverso da Curvatura Média para superfícies e uma solução especial do mesmo. Em seguida, na seção 1.3, vamos abordar alguns resultados e identidades trigonométricas necessários em demonstrações futuras. Finalmente, na seção 1.4, definiremos alguns casos particulares de superfícies que serão estudados nos capítulos seguintes no contexto do Fluxo citado.

As referências bibliográficas para este capítulo são [5, 6, 8, 9, 18, 21], onde informações adicionais podem ser encontradas.

1.1 Conceitos básicos de curvas e superfícies

Nesta seção, apresentamos noções e resultados básicos da teoria de curvas e superfícies. Os resultados apresentados aqui serão apresentados sem demonstração, pois a seção trata apenas de uma recapitulação cujo objetivo principal é estabelecer notação. A referência principal desta seção é [8].

1.1.1 Geometria de Curvas em \mathbb{R}^3

Apresentaremos abaixo conceitos e resultados fundamentais da teoria local das curvas em \mathbb{R}^3 . Uma definição de curva, suficiente para os propósitos dos capítulos seguintes, segue abaixo:

Definição 1.1. Uma *curva diferenciável parametrizada* é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real \mathbb{R} em \mathbb{R}^3 .

Diremos que uma curva diferenciável parametrizada é *plana* se existe um plano π em \mathbb{R}^3 tal que $\alpha(I) \subset \pi$.

Definição 1.2. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ é chamado o *vetor tangente* (ou vetor velocidade) da curva $\alpha(t)$ em t , onde $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$ são a primeira derivada de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ respectivamente. A imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamada o *traço* da curva α .

Quando não há prejuízo no entendimento, é comum identificarmos a curva com o seu traço.

Definição 1.3. Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Pontos em que $\alpha'(t) = 0$ serão chamados pontos singulares.

Exemplo 1.1. Uma *cicloide* é uma curva plana descrita ao rolar um ponto fixo de uma circunferência de raio $r > 0$ sem escorregar ao longo de uma reta (veja Capítulo 1 em [1]). Em \mathbb{R}^3 , escolhendo eixos cartesianos de modo que a reta de rolamento seja o eixo x , que o movimento da circunferência aconteça no plano xz e que o ponto gerador esteja na origem no instante inicial, temos parametrização canônica da cicloide no plano xz (Figura 1.1):

$$\sigma(\rho) = r(\rho - \sin \rho, 0, 1 - \cos \rho), \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

Observe que para $\rho = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ temos pontos singulares na cicloide. Tal curva será importante no capítulo 2.

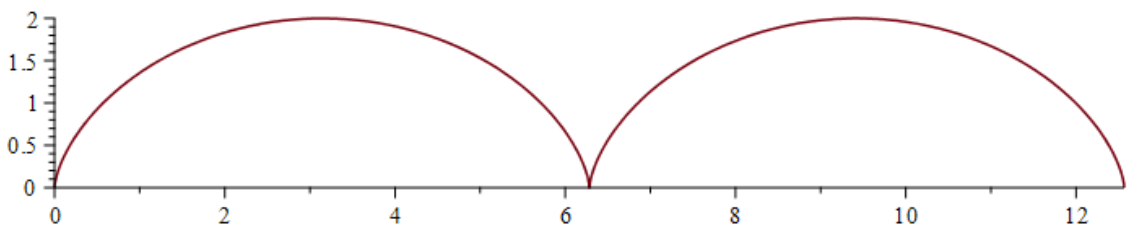


Figura 1.1 Cicloide com $r = 1$ e $\rho \in [0, 4\pi]$

A seguir apresentamos conceitos e resultados básicos para compreender a geometria local de curvas parametrizadas regulares.

Definição 1.4. Dado $t_0 \in I$, o *comprimento de arco* de uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, a partir do ponto t_0 , é por definição

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt,$$

onde $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$.

Definição 1.5. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita *parametrizada pelo comprimento de arco* s se, para todo $t \in I$,

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0,$$

onde $t_0 \in I$ é fixo.

Pode-se mostrar que uma curva regular sempre admite reparametrização pelo comprimento de arco. Neste caso, tem-se que $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$.

Definição 1.6. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

chama-se *curvatura* de α em s .

Definição 1.7. Seja $s_0 \in I$ tal que $k(s_0) \neq 0$. O vetor

$$n(s_0) = \frac{\alpha''(s_0)}{k(s_0)}$$

é denominado *vetor normal* de α em s_0 . O *vetor binormal* a α em s_0 é o vetor

$$b(s_0) = t(s_0) \wedge n(s_0).$$

Tomando $t(s_0) = \alpha'(s_0)$, temos que $t(s_0)$ e $n(s_0)$ são vetores ortonormais e

$$t'(s_0) = k(s_0) n(s_0).$$

Definição 1.8. O número $\tau(s)$ definido por

$$b'(s) = \tau(s) n(s)$$

é denominado *torção* de α em s .

A torção indica quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de s , do plano determinado por $t(s)$ e $n(s)$. Para uma curva plana, o plano da curva coincide com o plano determinado por $t(s)$ e $n(s)$ e, conseqüentemente, a torção é nula.

Em suma, para cada parâmetro s , existe um referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$, o qual é chamado *referencial de Frenet* em s . Vale destacar as equações abaixo:

$$\begin{aligned}t'(s) &= k(s)n(s), \\n'(s) &= -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \\b'(s) &= \tau(s)n(s),\end{aligned}$$

que são chamadas *Fórmulas de Frenet*.

O comportamento local de uma curva pode ser descrito completamente por k e τ . Este é o conteúdo do teorema fundamental das curvas:

Teorema 1.1 (*Teorema fundamental das curvas*). Dadas funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, existe uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada pelo comprimento de arco s , tal que $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α . Além disso, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são curvas parametrizadas pelo comprimento de arco com a mesma curvatura k e torção τ (a menos de sinal), então α e β são congruentes, isto é, existe um movimento rígido de \mathbb{R}^3 que leva a imagem de α na imagem de β .

1.1.2 Geometria de Superfícies em \mathbb{R}^3

Nesta subseção, introduzimos a noção e resultados fundamentais de superfícies regulares em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.9. Uma superfície regular Σ é um subconjunto de \mathbb{R}^3 tal que, para todo ponto $p \in \Sigma$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap \Sigma$, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, satisfazendo: X é diferenciável, X é um homeomorfismo sobre $V \cap \Sigma \subset \mathbb{R}^3$, e sua diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$ (condição de regularidade).

Neste caso, chamamos X de uma *parametrização* de Σ e a vizinhança $V \cap \Sigma$ de p em Σ é chamada de *vizinhança coordenada*. A definição anterior é adequada se queremos considerar tanto propriedades locais quanto globais de uma superfície. Porém, podemos definir superfície como uma aplicação, como no caso das curvas, desde que apenas questões locais sejam consideradas. Segue abaixo a noção de Superfície Parametrizada:

Definição 1.10. Uma *superfície parametrizada* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável X de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . O conjunto $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado o *traço* de X . Dizemos que X é *regular* se a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$ (isto é, os vetores $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial x}{\partial v}$ são linearmente independentes para todo $q \in U$). Um ponto $p \in U$ onde dX_p não é injetiva é chamado um *ponto singular* de x .

As definições dadas acima não dependem do sistema de coordenadas/parametrização escolhido. A condição de regularidade na definição de uma superfície regular Σ garante que, para cada $p \in \Sigma$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de Σ , passando por p , constituem um plano. Entendemos por *vetor tangente a Σ* , em um ponto $p \in \Sigma$, o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$, com $\alpha(0) = p$.

Proposição 1.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular Σ e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2,

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a Σ em $X(q)$.

Definição 1.11. O *plano tangente* a Σ em p , denotado por $T_p\Sigma$, é o plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$ que passa por $X(q) = p$.

Podemos provar que esse plano não depende da parametrização X . A escolha de uma parametrização X determina uma base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p\Sigma$, chamada de *base associada a X* , onde $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ e $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$.

Dado um ponto p em uma superfície regular Σ , existem dois vetores unitários em \mathbb{R}^3 que são normais ao plano tangente $T_p\Sigma$; cada um deles é chamado de *vetor normal unitário* em p . Uma vez fixada uma parametrização, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ em $p \in \Sigma$, podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $q \in x(U)$, pela seguinte regra

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q).$$

Assim, obtemos uma aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se pudermos estender essa aplicação de maneira diferenciável a Σ , ou seja, existir *um campo diferenciável de vetores normais* $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, dizemos que tal superfície é *orientável*. Ao longo deste trabalho, Σ denotará uma superfície orientável, onde foi escolhida uma *orientação* N .

Agora, nosso objetivo é estender o conceito de curvatura para superfícies regulares.

Definição 1.12. Seja C uma curva regular em Σ passando por $p \in \Sigma$, k a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a Σ em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é chamado a curvatura normal de $C \subset \Sigma$ em p .

Podemos pensar em *curvatura normal* ao longo de uma dada direção em p . Vale o seguinte resultado:

Proposição 1.2. Todas as curvas de uma superfície Σ que têm, em um ponto $p \in \Sigma$, a mesma reta tangente possuem, neste ponto, a mesma curvatura normal.

Definição 1.13. O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 , são chamados *curvaturas principais* em p ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são chamadas *direções principais* em p .

Segue da Definição 1.12 que as curvaturas principais mudam de sinal quando mudamos a orientação da superfície.

Definição 1.14. Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 , definimos a *curvatura Gaussiana* K e a *curvatura média* H de Σ como

$$K = k_1 k_2, \quad H = k_1 + k_2.$$

Tais curvaturas são quantidades geométricas importantes para entender o comportamento de uma superfície. Nos capítulos seguintes, vamos utilizar com frequência a Curvatura Média H . Convém introduzir o *vetor curvatura média* para uma superfície, definido por $\vec{H} = HN$. Também, vamos definir uma expressão de H , que será utilizada mais adiante, usando um sistema de coordenadas locais

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

onde

$$E = \langle X_u, X_u \rangle \quad F = \langle X_u, X_v \rangle \quad G = \langle X_v, X_v \rangle$$

são chamados coeficiente da 1ª forma fundamental e

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle = -\langle N_u, x_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

são os coeficientes da 2ª forma fundamental. Para mais informações sobre as formas fundamentais para superfícies, ver [8].

1.2 Fluxo do inverso da curvatura média

Nesta seção apresentamos conceitos básicos do Fluxo do Inverso da Curvatura Média para superfícies, adaptados dos artigos [6, 9, 18]. Apresentaremos uma solução especial desse fluxo, a saber, os sólitons de translação, que serão estudados nos capítulos seguintes.

Definição 1.15. Seja Σ uma superfície e seja $F : \Sigma \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação suave, com $F_t(\cdot) := F(\cdot, t)$ e $F(\Sigma, 0) = \Sigma$. Dizemos que a família de superfícies $\{F_t(\Sigma)\}_{t \in [0, T)}$ evolui pelo *Fluxo do Inverso da Curvatura Média* (FICM) se existe um campo normal unitário N_t ao longo de F_t tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(p) = -\frac{1}{H_t(p)} N_t(p), \quad p \in \Sigma, t \in [0, T).$$

Aqui $H_t(p)$ denota a curvatura média de F_t no ponto p , calculada em relação à orientação determinada por N_t . Em particular, para que $\frac{1}{H_t}$ esteja bem definido, usualmente se assume $H_t > 0$.

O fluxo do inverso da curvatura média admite algumas soluções especiais, chamadas *sólitons*, que desempenham um papel central na compreensão do comportamento do fluxo. De maneira informal, um *sóliton* é uma solução que evolui preservando a sua forma, isto é, a geometria essencial da superfície não muda ao longo do tempo. Uma classe relevante desse tipo de solução são os *sólitons de translação*, que apenas se deslocam com velocidade constante ao longo do fluxo. Pode-se mostrar que tais soluções ficam inteiramente determinadas pelas superfícies dadas como condições iniciais, que também chamaremos sólitons e estão definidas abaixo.

Definição 1.16. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com curvatura média H e campo normal unitário N . Dizemos que Σ é um *sóliton de translação* para o fluxo de curvatura média inversa (FICM) se existe um vetor constante não nulo $T \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$-\frac{1}{H} N = T^\perp \quad \text{em } \Sigma, \tag{1.2}$$

onde T^\perp denota a componente normal do vetor constante T ao longo de Σ . Dizemos que T é a *direção de translação* do sóliton Σ . Neste caso, a evolução é dada por $F(p, t) = p + tT$, em que $p \in \Sigma$.

A proposição a seguir nos apresenta uma equação alternativa para definir sóliton de translação que será usada mais adiante:

Proposição 1.3. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com $\vec{H} \neq 0$ e seja N um campo normal unitário global. Então Σ é um sóliton de translação do FICM com direção $T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se, e somente se,

$$\langle \vec{H}, T \rangle = -1 \quad \text{em } \Sigma. \quad (1.3)$$

Demonstração. Como $T^\perp = \langle N, T \rangle N$, a Equação (1.2) equivale a

$$-\frac{1}{H} = \langle N, T \rangle.$$

Multiplicando por H e usando $\vec{H} = HN$, obtemos

$$-1 = H\langle N, T \rangle = \langle HN, T \rangle = \langle \vec{H}, T \rangle.$$

Reciprocamente, se $\langle \vec{H}, T \rangle = -1$, então $H\langle N, T \rangle = -1$. Assim, $\langle N, T \rangle = -\frac{1}{H}$ e, portanto, $T^\perp = \langle N, T \rangle N = -\frac{1}{H}N$, como queríamos. \square

Observação 1.1. Podemos reescrever a Equação (1.3) como:

$$\langle N, T \rangle + \frac{1}{H} = 0 \quad (1.4)$$

Essa versão da equação será usada no Capítulo 2.

1.3 Alguns resultados e identidades trigonométricas

Nesta seção, abordamos alguns resultados e identidades trigonométricas que serão utilizados no Capítulo 3. Mostraremos as manipulações necessárias para obtermos identidades empregadas mais adiante, além da definição e dos resultados de polinômios trigonométricos, que serão úteis no capítulo mencionado. Estes foram adaptados do Capítulo 2 e Apêndice B de [5], e do Capítulo 1 de [22], que trabalham o caso mais geral de polinômios trigonométricos no espaço complexo.

Primeiramente, vamos definir um *polinômio trigonométrico real*.

Definição 1.17. Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural e A_0, \dots, A_n e B_1, \dots, B_n números reais. Um *polinômio trigonométrico real* é uma função $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma:

$$P(x) = A_0 + \sum_{m=1}^n (A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx)).$$

Os valores m em cada termo trigonométrico são chamados de *frequência*.

Definição 1.18. A *ordem* do polinômio trigonométrico é o maior valor de m para qual a soma $|A_m| + |B_m| > 0$. Quando $A_m = B_m = 0$ para todo $1 \leq m \leq n$, a ordem do polinômio é 0.

As expressões $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ e $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$ são bem conhecidas e se tratam de polinômios trigonométricos de ordem 2. Também valem as fórmulas $\sin^3(v) = \frac{3\sin(v) - \sin(3v)}{4}$ e $\cos^3(v) = \frac{3\cos(v) + \cos(3v)}{4}$, que são polinômios de ordem 3, expressões essas que serão usadas posteriormente no Capítulo 3. Nesses exemplos, vemos que produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com 2 e 3 fatores geram polinômios trigonométricos de ordem 2 e 3 respectivamente. Esse padrão não é uma coincidência e podemos mostrar que tal resultado continua válido para um produto de n fatores. Para isso, precisamos do lema e proposição a seguir:

Lema 1.1. Sejam a, b e x números reais. Valem as seguintes identidades:

$$i) \sin(ax) \cos(bx) = \frac{\sin(ax + bx) + \sin(ax - bx)}{2},$$

$$ii) \cos(ax) \cos(bx) = \frac{\cos(ax + bx) + \cos(ax - bx)}{2},$$

$$iii) \sin(ax) \sin(bx) = \frac{\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)}{2}.$$

Demonstração. i) Utilizando as fórmulas do seno da soma e da diferença:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\sin(ax + bx) + \sin(ax - bx)] = \\ &= \frac{1}{2} [\sin(ax) \cos(bx) + \sin(bx) \cos(ax) + \sin(ax) \cos(bx) - \sin(bx) \cos(ax)] \\ &= \frac{1}{2} [2 \sin(ax) \cos(bx)] \\ &= \sin(ax) \cos(bx). \end{aligned}$$

ii) Aplicando as fórmulas do cosseno da soma e da diferença:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\cos(ax + bx) + \cos(ax - bx)] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(ax)\cos(bx) - \sin(ax)\sin(bx) + \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)] \\ &= \frac{1}{2} [2\cos(ax)\cos(bx)] \\ &= \cos(ax)\cos(bx). \end{aligned}$$

iii) Por fim, novamente usando as fórmulas do cosseno da soma e da diferença:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\cos(ax - bx) + \cos(ax + bx)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)] \\ &= \frac{1}{2} [2\sin(ax)\sin(bx)] \\ &= \sin(ax)\sin(bx). \end{aligned}$$

□

Aplicando o lema anterior recursivamente, é possível provar a proposição seguinte, adaptada do Capítulo 1 de [22].

Proposição 1.4. O produto de dois polinômios trigonométricos $P(x)$ e $Q(x)$ com ordem m e n , respectivamente, é um polinômio trigonométrico $R(x)$ de ordem $m + n$.

Agora já conseguimos provar o resultado motivado anteriormente:

Proposição 1.5. Seja $p \in \mathbb{N}$ e

$$P(x) = \prod_{j=1}^p g_j(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde, para cada $j \in \{1, \dots, p\}$, tem-se $g_j(x) \in \{\sin x, \cos x\}$. Então P é um polinômio trigonométrico real de ordem p .

Demonstração. A demonstração é por indução em p .

Caso base ($p = 1$). Se $p = 1$, então $P(x) = \sin x$ ou $P(x) = \cos x$, e a ordem é 1.

Passo indutivo. Suponha que, para algum $p \geq 1$, o produto de p fatores pode ser escrito como

$$P_p(x) = A_0 + \sum_{m=1}^p (A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx)),$$

com ordem p , isto é, $|A_p| + |B_p| > 0$. Considere $g_{p+1}(x) \in \{\text{sen } x, \text{cos } x\}$, um polinômio de ordem 1 e defina

$$P_{p+1}(x) = P_p(x) g_{p+1}(x).$$

Pela proposição anterior, $P_{p+1}(x)$ tem grau $p + 1$ e, por indução, o resultado vale para todo $p \in \mathbb{N}$. \square

Nosso próximo objetivo é provar que os termos de um polinômio trigonométrico real, como dado na Definição 1.17, são linearmente independentes. Começemos demonstrando o lema abaixo:

Lema 1.2. Sejam a e b números inteiros positivos e x um número real. Valem as seguintes identidades:

$$i) \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(ax) \cos(bx) dx = 0,$$

$$ii) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) \cos(bx) dx = 0 \text{ quando } a \neq b,$$

$$iii) \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(ax) \text{sen}(bx) dx = 0, \text{ quando } a \neq b,$$

$$iv) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) \cos(bx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(ax) \text{sen}(bx) dx = \pi, \text{ quando } a = b \neq 0,$$

$$v) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0x) \cos(0x) dx = 2\pi \text{ e } \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(0x) \text{sen}(0x) dx = 0.$$

Demonstração. *i)* Usando a 1ª identidade do Lema 1.1, temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(ax) \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}((a+b)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}((a-b)x) dx = 0,$$

pois a integral definida de função ímpar em intervalo simétrico é nula.

ii) Usando a 2ª identidade do Lema 1.1 e considerando a e b inteiros positivos distintos, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) \cos(bx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((a+b)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((a-b)x) dx \\ &= \frac{\text{sen}((a+b)\pi)}{a+b} + \frac{\text{sen}((a-b)\pi)}{a-b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

já $a + b$ e $a - b$ são inteiros não nulos.

iii) Usando a 3ª identidade do Lema 1.1, e considerando a e b inteiros positivos distintos, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(bx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(a-b)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(a+b)x dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}((a-b)\pi)}{a-b} - \frac{\operatorname{sen}((a+b)\pi)}{a+b} = 0 \end{aligned}$$

pois $a + b$ e $a - b$ são inteiros não nulos.

iv) Do desenvolvimento das integrais usado nas demonstrações dos itens ii) e iii) do atual lema, concluímos que quando $a = b$ inteiros positivos, a integral de $\cos(a+b)x$ é nula. Porém, a integral de $\cos(a-b)x$ é igual a 2π e, quando multiplicada pelo fato $1/2$, resulta em π .

v) Trivial. □

Agora, podemos provar o resultado mais importante dessa seção:

Teorema 1.2. Se um polinômio trigonométrico é identicamente nulo, isto é,

$$P(x) = A_0 + \sum_{m=1}^n (A_m \cos(mx) + B_m \operatorname{sen}(mx)) = 0,$$

então $A_m = B_m = 0$ para todo $1 < m \leq n$ e $A_0 = 0$.

Demonstração. Seja $1 \leq m^* \leq n$ um índice de *frequência* do polinômio trigonométrico. Multiplicando o polinômio $P(x)$ por $\cos(m^*x)$ e integrando na variável x de $-\pi$ até π , temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m^*x) \left[A_0 + \sum_{m=1}^n (A_m \cos(mx) + B_m \operatorname{sen}(mx)) \right] dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m^*x) \cdot 0 dx = 0$$

Daí, por propriedades de somatório, vale:

$$A_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m^*x) dx + \sum_{m=1}^n A_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(m^*x) dx + \sum_{m=1}^n B_m \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(m^*x) dx = 0.$$

Temos, pelo Lema 1.2, que as integrais definidas de $\cos(m^*x)$ e de $\operatorname{sen}(mx) \cos(m^*x)$ acima são nulas; já as de $\cos(mx) \cos(m^*x)$ são nulas, com a exceção do caso em que $m = m^*$. Logo a expressão anterior pode é simplificada para:

$$A_{m^*} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(m^*x) dx = 0.$$

Sabemos que a integral de $\cos^2(m^*x)$ é não nula, de modo que concluímos que $A_{m^*} = 0$.

De modo análogo, vamos multiplicar o polinômio por $\sin(m^*x)$ e integrar na variável x de $-\pi$ até π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m^*x) \left[A_0 + \sum_{m=1}^n (A_m \cos(mx) + B_m \sin(mx)) \right] dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m^*x) \cdot 0 dx = 0$$

Isso implica:

$$A_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m^*x) dx + \sum_{m=1}^n A_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(m^*x) dx + \sum_{m=1}^n B_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(m^*x) dx = 0.$$

Novamente, pelo Lema 1.2, temos que as integrais de $\sin(m^*x)$ e $\cos(mx) \sin(m^*x)$ anteriores são nulas; já as de $\sin(mx) \sin(m^*x)$ são nulas, com a exceção do caso em que $m = m^*$. Assim, a expressão anterior pode ser escrita como:

$$B_{m^*} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(m^*x) dx = 0.$$

Como a integral de $\sin^2(m^*x)$ é não nula, obtemos $B_{m^*} = 0$. Finalmente, sabendo que $A_m = B_m = 0$ para todo $1 < m \leq n$ e $P(x) = 0$ concluímos que $A_0 = 0$. \square

1.4 Superfícies regradas, cíclicas e de translação

Nesta seção, introduzimos os conceitos de superfícies regradas, cíclicas e de translação. As referências para essa seção são [8, 18, 21].

Definição 1.19. Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada superfície de translação se é dada em sua forma paramétrica como

$$X(s, t) = \alpha(s) + \beta(t),$$

em que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ são duas curvas regulares tais que $\alpha'(s) \wedge \beta'(t) \neq 0$, para todo $(s, t) \in I \times J$.

A definição acima foi elaborada tendo como base o artigo [21]. Um caso particular de superfície de translação é dado quando α e β são curvas planas dadas por $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$ e $\beta(v) = (0, v, g(v))$, em que f e g são funções diferenciáveis. Neste caso, a parametrização

da superfície é dada como o gráfico

$$X(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)).$$

Um exemplo clássico de superfície de translação dada dessa forma é a superfície mínima de Scherk, em que $f(u) = -\log(|\cos(u)|)$ e $g(v) = \log(|\cos(v)|)$. Recomendamos a referência [21] para mais detalhes sobre superfícies de translação.

As próximas definições foram elaboradas a partir das referências [8, 18] e serão fundamentais para os próximos capítulos.

Definição 1.20. Dizemos que uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regrada se Σ é parametrizada localmente por

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u) \tag{1.5}$$

onde $\alpha(u)$ é uma curva parametrizada chamada de *diretriz* da superfície Σ , $\beta(u)$ está na esfera unitária e é perpendicular a $\alpha'(u)$, ou seja, $\langle \alpha', \beta \rangle = 0$.

Se $\alpha(u)$ é uma curva plana e $\beta(u)$ for constante, dizemos que Σ é uma superfície cilíndrica. Além disso, quando β é constante, temos que Σ também pode ser vista como uma superfície de translação.

Definição 1.21. Seja $e_0(u)$ um campo vetorial unitário de \mathbb{R}^3 , $u \in I \subset \mathbb{R}$, e seja $\Gamma(u)$ uma curva integral de e_0 . Para cada u considere o plano $\Pi(u)$ ortogonal a $e_0(u)$. Em cada plano $\Pi(u)$, tome uma circunferência de raio $r(u) > 0$ e centro $c(u)$, em que $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são aplicações diferenciáveis. A união dessas circunferências forma um conjunto Σ chamado superfície cíclica.

A partir do referencial de Frenet, dado na seção 1.1, para a curva Γ a superfície cíclica pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} X : I \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (u, v) &\mapsto c(u) + r(u)(\cos(v)n + \sin(v)b), \end{aligned} \tag{1.6}$$

em que $r(u)$ é o raio da circunferência e $c(u)$ é o centro da circunferência.

Um caso particular de superfícies cíclicas é dado pelas superfícies de revolução, que ocorrem quando os planos $\Pi(u)$ são paralelos e o conjunto $c(I)$ é uma reta perpendicular a esses planos. A seguir apresentamos a definição de superfície de revolução.

Definição 1.22. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. A menos de movimento rígido, vamos

considerar o plano xz como o plano da curva e o eixo Oz como o eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

uma parametrização para C e denote por u o ângulo de rotação em torno do eixo Oz . Assim, obtemos a aplicação

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)),$$

do conjunto aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ em S . S é uma superfície regular chamada *superfície de revolução*. A curva C é chamada *curva geratriz* ou *curva perfil* de S , e o eixo Oz é o *eixo de rotação* de S . Os círculos descritos pelos pontos de C são chamados de *paralelos* de S , e as várias posições de C sobre S são os chamados *meridianos* de Σ .

Capítulo 2

Sólitons de Translação Regrados para o FICM em \mathbb{R}^3

Neste capítulo abordaremos sólitons de translação para o Fluxo do Inverso da Curvatura Média dados por superfícies regradas. O teorema principal do capítulo é um resultado de rigidez que estabelece que os únicos sólitons de translação para o fluxo inverso da curvatura média, dados por superfícies regradas, são cilindros sobre uma curva cicloide reescalada. Será abordada também a caracterização dos sólitons de translação em uma classe de superfície de translação, em que as curvas geratrizes são curvas planas, dadas por gráficos e contidas em planos ortogonais. A referência para este capítulo é o artigo [18].

2.1 Rigidez de sólitons de translação regrados

Nesta seção apresentamos a prova da rigidez de sólitons de translação para o fluxo do inverso da curvatura média que são dados por superfícies regradas. A rigidez é dada em termos de cilindros sobre uma curva cicloide reescalada.

Teorema 2.1. Os únicos sólitons de translação dados por superfícies regradas para o fluxo do inverso da curvatura média são os cilindros sobre curvas cicloides reescaladas.

Demonstração. Seja Σ um sóliton de translação regrado, que é gerado por uma reta com uma direção T de translação. Essa superfície é expressa localmente por:

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u), \quad (2.1)$$

onde $\alpha(u)$ é a curva diretriz, parametrizada pelo comprimento de arco em Σ , e $\beta(u)$ está na esfera unitária e é perpendicular a $\alpha'(u)$, ou seja, $\langle \alpha'(u), \beta(u) \rangle = 0$. De (2.1), temos

$X_u = \alpha' + v\beta'$, $X_v = \beta$, $X_{uu} = \alpha'' + v\beta''$, $X_{uv} = \beta'$ e $X_{vv} = 0$. Com isso, podemos calcular os coeficientes da 1ª forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle \alpha' + v\beta', \alpha' + v\beta' \rangle \\ &= 1 + 2v \langle \alpha', \beta' \rangle + v^2 |\beta'|^2, \\ F &= \langle \alpha', \beta \rangle = 0, \\ G &= \langle \beta, \beta \rangle = 1. \end{aligned}$$

Calculemos agora o normal N para, em seguida, obter os coeficientes da 2ª forma fundamental e a curvatura média H :

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{(\alpha' + v\beta') \wedge \beta}{\sqrt{E}}, \\ e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \langle N, \alpha'' + v\beta'' \rangle, \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, \beta' \rangle, \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = 0, \\ H &= \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{e}{E} \\ &= \frac{\langle N, \alpha'' + v\beta'' \rangle}{1 + 2v \langle \alpha', \beta' \rangle + v^2 |\beta'|^2}, \end{aligned}$$

onde (\prime) indica derivada em relação a u . Definimos $P(u, v) \equiv 0$ como uma equação auxiliar pela qual a superfície regradada é um sóliton de translação para o FICM, onde

$$\begin{aligned} P(u, v) &= E^2 H \left(\langle N, T \rangle + \frac{1}{H} \right) \\ &= E^2 H \langle N, T \rangle + E^2 \\ &= E e \langle N, T \rangle + E^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Perceba que multiplicamos a Equação (1.4) por $E^2 H$ para simplificar as contas. Vamos assumir que β não é um vetor constante. Assim, como β é uma aplicação diferenciável, existe pelo menos um $u = u_0$ tal que T e $\beta(u_0)$ são linearmente independentes. Assumiremos, sem perda de generalidade, que o plano gerado por T e $\beta(u_0)$ é o plano yz e que T é um vetor unitário paralelo ao eixo z a menos de reescala, isto é, $T = e_3$. Vamos substituir os termos

encontrados acima em (2.2):

$$\begin{aligned}
P(u, v) &= E \langle N, \alpha'' + v\beta'' \rangle \langle N, e_3 \rangle + E^2 \\
&= E \left\langle \frac{(\alpha' + v\beta') \wedge \beta}{\sqrt{E}}, \alpha'' + v\beta'' \right\rangle \left\langle \frac{(\alpha' + v\beta') \wedge \beta}{\sqrt{E}}, e_3 \right\rangle + E^2 \\
&= \langle (\alpha' + v\beta') \wedge \beta, \alpha'' + v\beta'' \rangle \langle (\alpha' + v\beta') \wedge \beta, e_3 \rangle + (1 + 2v\langle \alpha', \beta' \rangle + v^2|\beta'|^2)^2 \\
&= \left[\langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' + v\beta'' \rangle + v \langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' + v\beta'' \rangle \right] \left[\langle (\alpha' + v\beta') \wedge \beta, e_3 \rangle \right] + 1 + \\
&\quad 4v^2 \langle \alpha', \beta' \rangle^2 + v^4 |\beta'|^4 + 4v \langle \alpha', \beta' \rangle + 4v^2 |\beta'|^2 + 4v^3 \langle \alpha', \beta' \rangle |\beta'|^2 \\
&= \left[\langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + v \langle \alpha' \wedge \beta, \beta' \rangle + v \langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + v^2 \langle \beta' \wedge \beta, \beta'' \rangle \right] \left[\langle \alpha' \wedge \beta, e_3 \rangle + \right. \\
&\quad \left. v \langle \beta' \wedge \beta, e_3 \rangle \right] + 1 + 4v^2 \langle \alpha', \beta' \rangle^2 + v^4 |\beta'|^4 + 4v \langle \alpha', \beta' \rangle + 4v^2 |\beta'|^2 + \\
&\quad 4v^3 \langle \alpha', \beta' \rangle |\beta'|^2.
\end{aligned}$$

Assim, vemos que $P(u, v) = 0$ pode ser escrita na forma:

$$\sum_{i=0}^4 A_i(u) v^i = P(u, v) = 0,$$

em que $A_i(u)$ é uma função de u para cada $i = 0, \dots, 4$. Portanto, $P(u, v)$ é polinômio em relação a v e, neste caso, temos $A_i(u) = 0$. No entanto, $A_4 = |\beta'|^4 \neq 0$, o que leva a uma contradição. Portanto, β é um vetor constante, o que implica que Σ é uma superfície cilíndrica.

Continuemos assumindo $T = e_3$ e tomemos $\beta = (0, \cos \phi, \sin \phi)$ a menos de rotação em \mathbb{R}^3 . Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
E &= 1, & F &= 0, & G &= 1, \\
N &= \alpha' \beta, \\
e &= \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle, & f &= 0, & g &= 0, \\
H &= \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle, \\
P(u, v) &= \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle \langle \alpha' \wedge \beta, e_3 \rangle + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Definamos $\alpha = (x(u), y(u), z(u))$. Da última equação obtemos:

$$\begin{aligned}
P(u, v) &= \langle \alpha' \wedge \beta, \cos(\phi) x' \alpha'' \rangle + 1 \\
&= \langle \alpha' \wedge \beta, \cos(\phi) x' \alpha'' \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha' \wedge \beta \rangle \\
&= \langle \alpha' \wedge \beta, \cos(\phi) x' \alpha'' + \alpha' \wedge \beta \rangle = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\alpha' \wedge \beta$ é perpendicular a $\cos(\phi)x'\alpha'' + \alpha' \wedge \beta$. Isso implica que o vetor $\cos(\phi)x'\alpha'' + \alpha' \wedge \beta$ está no plano gerado por α' e β . Consequentemente, existem m e n tais que:

$$\cos(\phi)x'\alpha'' + \alpha' \wedge \beta = m\alpha' + n\beta.$$

Fazendo o produto interno desta equação com α' e β obtemos m e n respectivamente como abaixo:

$$m = \langle \cos(\phi)x'\alpha'' + \alpha' \wedge \beta, \alpha' \rangle,$$

$$n = \langle \cos(\phi)x'\alpha'' + \alpha' \wedge \beta, \beta \rangle.$$

Derivando $\langle \alpha', \beta \rangle = 0$ em relação a u , encontramos $\langle \alpha'', \beta \rangle = 0$. Pela bilinearidade dos produtos internos acima, chegamos a $m = n = 0$. Assim, obtemos:

$$\cos(\phi)x'\alpha'' + \alpha' \wedge \beta = \vec{0}. \quad (2.3)$$

Como $\alpha' \wedge \beta = (y' \sin \phi - z' \cos \phi, -x' \sin \phi, x' \cos \phi)$, a Equação (2.3) gera:

$$\cos(\phi)xx' + (y' \sin(\phi) - z' \cos(\phi)) = 0, \quad (2.4)$$

$$x'(\cos(\phi)y'' - \sin \phi) = 0, \quad (2.5)$$

$$x' \cos \phi (z'' + 1) = 0. \quad (2.6)$$

Note que x' não pode ser identicamente nulo. De fato, temos $\langle \alpha', \beta \rangle = y' \cos \phi + z' \sin \phi = 0$ e, se $x' = 0$, teríamos também $y' \sin(\phi) - z' \cos(\phi) = 0$ pela Equação (2.4) e, consequentemente, $y' = 0$ e $z' = 0$. Contradição, pois α é parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, $\cos \phi$ não é zero, pois caso fosse, chegaríamos a $\sin \phi = 0$ por (2.5) e (2.6), o que não pode acontecer, pois β é um vetor constante unitário. Assim, podemos reescrever o sistema anterior:

$$\cos(\phi)xx' + (y' \sin(\phi) - z' \cos(\phi)) = 0, \quad (2.7)$$

$$\cos(\phi)y'' - \sin \phi = 0, \quad (2.8)$$

$$z'' + 1 = 0. \quad (2.9)$$

Agora vamos assumir os valores iniciais $y(0) = e$ e $z(0) = 0$ a menos de translação no \mathbb{R}^3 . Das equações (2.8) e (2.9) encontramos:

$$y' = \tan(\phi)u + C_1, \quad z' = -u + C_2, \quad (2.10)$$

$$y = \frac{1}{2}\tan(\phi)u^2 + C_1u, \quad z = -\frac{1}{2}u^2 + C_2u. \quad (2.11)$$

Substituindo as derivadas de y e z em (2.7), temos:

$$\cos(\phi)x'x'' + \left[\frac{\sin^2(\phi)}{\cos(\phi)}u + \sin(\phi)C_1 + \cos(\phi)u - \cos(\phi)C_2 \right] = 0. \quad (2.12)$$

Multiplicando por $\cos(\phi)$, chegamos a:

$$C_3x'x'' + [u + k_0] = 0,$$

em que $C_3 = \cos^2\phi$ e $k_0 = \sin(\phi)\cos(\phi)C_1 - \cos^2(\phi)C_2$. Assim:

$$x'x'' = \left(\frac{(x')^2}{2} \right)' = -\frac{u}{C_3} - \frac{k_0}{C_3}.$$

Integrando em relação a u , temos:

$$(x')^2 = -\left(\frac{u^2}{C_3} + \frac{2k_0u}{C_3} \right) + A, \quad (2.13)$$

em que $A = (x'(0))^2$. Por outro lado, de (2.10), resulta $y'(0) = C_1$ e $z'(0) = C_2$. Como α é PCA, vale $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$, que implica $(x'(0))^2 = 1 - C_1^2 - C_2^2$. Logo

$$A = 1 - C_1^2 - C_2^2.$$

Completando quadrado no lado direito da Equação (2.13), encontramos:

$$\begin{aligned} (x')^2 &= -\left[\left(\frac{u}{\sqrt{C_3}} + \frac{k_0}{\sqrt{C_3}} \right)^2 - \frac{k_0^2}{C_3} \right] + A \\ &= -\left(\frac{u+k_0}{\sqrt{C_3}} \right)^2 + \frac{k_0^2}{C_3} + A. \end{aligned}$$

Então:

$$x' = \pm \sqrt{-\left(\frac{u+k_0}{\sqrt{C_3}}\right)^2 + \frac{k_0^2}{C_3} + A}.$$

Integrando em ambos os lados:

$$x = \pm \int \sqrt{B^2 - \left(\frac{u+k_0}{\sqrt{C_3}}\right)^2} du. \quad (2.14)$$

em que $B^2 = \frac{k_0^2}{C_3} + A$. Vamos resolver a integral por substituição trigonométrica.

Tomemos

$$\frac{u+k_0}{\sqrt{C_3}} = B \operatorname{sen}(\phi). \quad (2.15)$$

Assim, $u = B\sqrt{C_3} \operatorname{sen}(\phi) - k_0$ e $du = B\sqrt{C_3} \cos(\phi) d\phi$. Simplifiquemos a raiz em (2.14):

$$\begin{aligned} \sqrt{B^2 - \left(\frac{u+k_0}{\sqrt{C_3}}\right)^2} &= \sqrt{B^2 - B^2 \operatorname{sen}^2(\phi)} \\ &= \sqrt{B^2 \cos^2(\phi)} \\ &= B \cos(\phi). \end{aligned}$$

Substituindo as informações acima na integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{B^2 - \left(\frac{u+k_0}{\sqrt{C_3}}\right)^2} du &= \int B^2 \sqrt{C_3} \cos^2 \phi d\phi \\ &= B^2 \sqrt{C_3} \int \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{B^2 \sqrt{C_3}}{2} \int (1 + \cos 2\phi) d\phi \\ &= \frac{B^2 \sqrt{C_3}}{2} \left[\phi + \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{2} \right] + k_0 \\ &= \frac{B^2 \sqrt{C_3}}{2} [\phi + \operatorname{sen} \phi \cos \phi] + k_0. \end{aligned}$$

Da Equação (2.15), tiramos as relações trigonométricas abaixo em função de u :

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{u+k_0}{B\sqrt{C_3}}, \quad \cos \phi = \frac{\sqrt{B^2 C_3 - (u+k_0)^2}}{B\sqrt{C_3}}, \quad \tan \phi = \frac{u-k_0}{\sqrt{B^2 C_3 - (u+k_0)^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{B^2 - \left(\frac{u+k_0}{\sqrt{C_3}}\right)^2} du &= \frac{B^2\sqrt{C_3}}{2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{u+k_0}{\sqrt{B^2C_3 - (u+k_0)^2}} \right) + \frac{u+k_0}{B^2C_3} \sqrt{B^2C_3 - (u+k_0)^2} \right] \\
&= \frac{B^2\sqrt{C_3}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{u+k_0}{\sqrt{B^2C_3 - (u+k_0)^2}} \right) + \frac{u+k_0}{2\sqrt{C_3}} \sqrt{B^2C_3 - (u+k_0)^2} \\
&= \frac{1}{2\cos\phi} \left(B^2C_3 \operatorname{arctg} \left(\frac{u+k_0}{\sqrt{B^2C_3 - (u+k_0)^2}} \right) + (u+k_0) \sqrt{B^2C_3 - (u+k_0)^2} \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$x(u) = \pm \frac{1}{2\cos(\phi)} \left((k_0 + u) \sqrt{B^2C_3 - (k_0 + u)^2} + B^2C_3 \arctan \left(\frac{k_0 + u}{\sqrt{B^2C_3 - (k_0 + u)^2}} \right) \right).$$

onde $B^2 = \frac{k_0^2}{C_3} + 1 - C_1^2 - C_2^2$, $C_3 = \cos^2\phi$ e $k_0 = \cos(\phi)(\sin(\phi)C_1 - \cos(\phi)C_2)$. Podemos reparametrizar α por $\tilde{u} = \arctan \left(\frac{k_0 + u}{\sqrt{B^2C_3 - (k_0 + u)^2}} \right)$. Daí, valem as relações trigonométricas

$$\tan(\tilde{u}) = \frac{k_0 + u}{\sqrt{B^2C_3 - (k_0 + u)^2}}, \quad \sin(\tilde{u}) = \frac{k_0 + u}{B\sqrt{C_3}}, \quad \cos(\tilde{u}) = \frac{\sqrt{B^2C_3 - (k_0 + u)^2}}{B\sqrt{C_3}}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(\tilde{u}) &= \pm \frac{B^2C_3}{4\cos\phi} \left(2\tilde{u} + 2\sin\tilde{u}\cos\tilde{u} \right) \\
&= \pm \frac{B^2\cos\phi}{4} \left(2\tilde{u} + \sin(2\tilde{u}) \right).
\end{aligned}$$

Também, temos $u = B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u} - k_0$ e $\sqrt{C_3} = \pm\cos\phi$. Daí, de y e z em (2.11), vale:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(\tilde{u}) &= \frac{1}{2} \tan\phi \left(B^2C_3 \sin^2\tilde{u} - 2k_0B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u} + k_0^2 \right) + C_1 \left(B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u} - k_0 \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin\phi}{\cos\phi} B^2 \cos^2\phi \sin^2\tilde{u} \pm B\sin\tilde{u}\cos\phi \left(C_1 - k_0 \tan\phi \right) + C_4 \\
&= \frac{1}{2} B^2 \sin\phi \cos\phi \sin^2\tilde{u} \pm B\sin\tilde{u}\cos^2\phi \left(\cos\phi C_1 + \sin\phi C_2 \right) + C_4 \\
&= \pm \frac{B}{2} \cos\phi \sin\tilde{u} \left(2\cos\phi \left(\cos\phi C_1 + \sin\phi C_2 \right) \pm B\sin\phi \sin\tilde{u} \right) + C_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}(\tilde{u}) &= -\frac{1}{2}(B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u} - k_0)^2 + C_2(B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u} - k_0) \\
&= -\frac{1}{2}(B^2C_3\sin^2\tilde{u} - 2k_0B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u} + k_0^2) + C_2B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u} - C_2k_0 \\
&= -\frac{1}{2}B^2C_3\sin^2\tilde{u} \pm B\cos\phi\sin\tilde{u}(C_2 + k_0) + C_5 \\
&= -\frac{1}{2}B^2C_3\sin^2\tilde{u} \pm B\cos\phi\sin\tilde{u}(C_2 + \cos\phi\sin\phi C_1 - \cos^2\phi C_2) + C_5 \\
&= -\frac{1}{2}B^2C_3\sin^2\tilde{u} \pm B\cos\phi\sin\tilde{u}(\sin^2\phi C_2 + \cos\phi\sin\phi C_1) + C_5, \\
&= \pm \frac{B\sqrt{C_3}\sin\tilde{u}}{2} \left(2\sin\phi(\sin\phi C_2 + \cos\phi C_1) \mp B\cos(\phi)\sin\tilde{u} \right) + C_5
\end{aligned}$$

em que $C_4 = \frac{1}{2}\tan\phi k_0^2 - C_1k_0$ e $C_5 = -\frac{1}{2}k_0^2 - C_2k_0$.

Vamos desconsiderar as constantes acima, já que estamos trabalhando a menos de translação.

Dessa forma, uma parametrização para Σ é dada por:

$$X(\tilde{u}, v) = \alpha(\tilde{u}) + v(0, \cos(\phi), \sin(\phi)).$$

Tomando $v\cos(\phi) = \tilde{v}$, chegamos a:

$$\begin{aligned}
X(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \alpha(\tilde{u}) + \tilde{v}(0, 1, \tan(\phi)) \\
&= (\tilde{x}(\tilde{u}), \tilde{y}(\tilde{u}) + \tilde{v}, \tilde{z}(\tilde{u}) + \tilde{v}\tan(\phi)).
\end{aligned}$$

Reparametrizemos X , tomando $s = 2\tilde{u}$ e $t = \tilde{y}(\tilde{u}) + \tilde{v}$ e vamos obter:

$$S(q, t) = (S_1(q, t), S_2(q, t), S_3(q, t)).$$

Claramente, $S_1(q, t) = \pm \frac{1}{4}\cos(\phi)(\sin(q) + q)$ e $S_2(q, t) = t$. Vamos mostrar agora que

$S_3 = \frac{B^2}{4}\cos(q) + \tan(\phi)t$, a menos de constantes. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}(\tilde{u}) + \tilde{v} \tan(\phi) &= \tilde{z}(\tilde{u}) + \tan(\phi)(t - \tilde{y}(\tilde{u})) \\
&= (\tilde{z}(\tilde{u}) - \tan(\phi)\tilde{y}(\tilde{u})) + \tan(\phi)t \\
&= (\cos(\phi)\tilde{z} - \sin(\phi)\tilde{y}) + \tan(\phi)t \\
&= -\frac{B^2}{2} \cos \phi \sin^2 \tilde{u} + \tan(\phi)t \\
&= -\frac{B^2}{2} \cos \phi \left(\frac{1 - \cos 2\tilde{u}}{2} \right) + \tan(\phi)t \\
&= \frac{B^2 \cos \phi}{4} (\cos 2\tilde{u} - 1) + \tan(\phi)t \\
&= \frac{B^2}{4} \cos(q) + \tan(\phi)t + C_6
\end{aligned}$$

em que $C_6 = -\frac{B^2 \cos \phi}{4}$. Portanto, por uma reparametrização e a menos de translação, Σ é expressa como:

$$\begin{aligned}
S(q, t) &= \left(\pm \frac{B^2 \cos \phi}{4} (\sin(q) + q), t, \tan \phi t + \frac{B^2}{4} \cos(q) \right) \\
&= \frac{B^2}{4} (\pm \cos \phi (\sin(q) + q), 0, \cos(q)) + (0, t, \tan \phi t).
\end{aligned}$$

Temos que $\alpha(q) = \frac{B^2}{4} (\pm \cos \phi (\sin(q) + q), 0, \cos(q))$ é uma cicloide de raio $\frac{B^2}{4}$ a menos de uma mudança de escala na primeira coordenada. De fato, consideremos a parametrização canônica da cicloide no plano xz , definida no exemplo 1.1, com $r = \frac{B^2}{4}$.

Fazendo a mudança de variáveis $\rho = q + \pi$, chegamos a:

$$\sigma(q) = \frac{B^2}{4} (q + \pi + \sin(q), 1 + \cos(q)) = \frac{B^2}{4} (\sin(q) + q, \cos(q)) + \frac{B^2}{4} (\pi, 1)$$

Reescalando a coordenada x por $\cos(\phi)$, e desprezando a parcela constante acima, obtemos α . Conseqüentemente, o sólton de translação regrado Σ para o FICM é um cilindro sobre uma curva cicloide, possivelmente reescalada em uma direção. \square

Observação 2.1. No teorema anterior, chegamos ao cilindro sobre uma cicloide (a menos de reescala) como sólton de translação regrado com a direção de translação e_3 para o FICM. Por uma rotação no \mathbb{R}^3 , temos o sólton com uma direção de translação arbitrária. Se assumirmos

$\phi = 0$, o fator de escala $\cos(\phi)$ é igual a 1. Assim, obtemos o cilindro sobre a cicloide canônica, dada em (1.1), gerada por um círculo de raio $r = \frac{B^2}{4}$ (Veja Figuras 2.1 e 2.2).

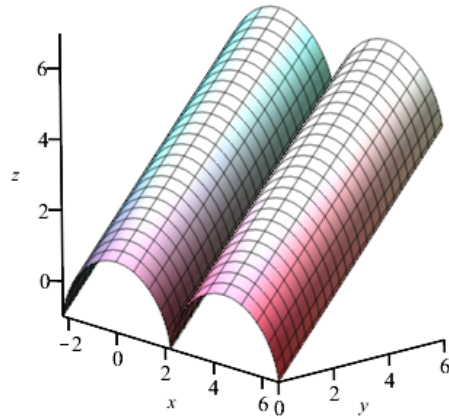


Figura 2.1 Cilindro cicloide com $B = 2$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$.

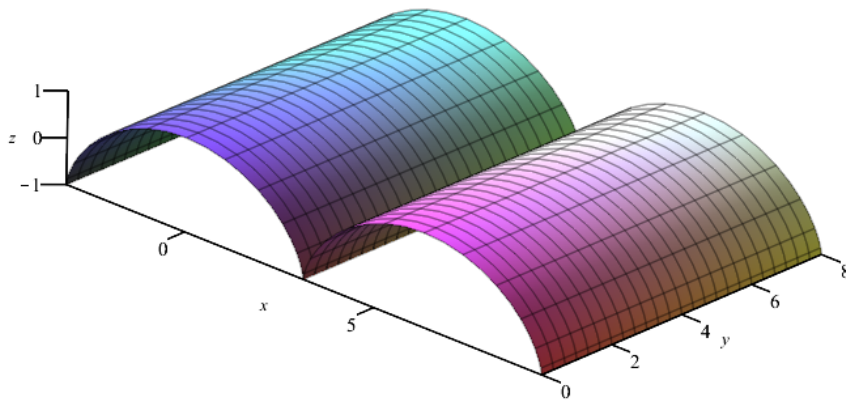


Figura 2.2 Cilindro cicloide com $B = 2$ e $\phi = 0$.

2.2 Unicidade de sólitons de translação como superfícies de translação

Nesta seção, apresentamos a prova de que um sólito de translação para o fluxo do inverso da curvatura média, dado por uma superfície de translação, gerada pelas curvas $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$ e $\beta(v) = (0, v, g(v))$, em que f e g são funções diferenciáveis, é necessariamente um cilindro sobre uma cicloide reescalada.

Teorema 2.2. As únicas superfícies de translação, com geratrizes $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$ e $\beta(v) = (0, v, g(v))$, em que f e g são funções diferenciáveis, que são sólitons de translação para o fluxo do inverso da curvatura média são os cilindros sobre uma curva cicloide reescalada.

Demonstração. Seja Σ uma superfície de translação com parametrização local dada como abaixo:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \alpha(u) + \beta(v) \\ &= (u, v, f(u) + g(v)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$ e $\beta(v) = (0, v, g(v))$ são curvas planas para funções diferenciáveis $f(u)$ e $g(v)$ que serão denotadas abaixo simplesmente por f e g , respectivamente.

Definimos $P(u, v) \equiv 0$ como a Equação Diferencial Ordinária de 2ª ordem seguinte em que a superfície de translação é um sólito de translação para o FICM, em que

$$P(u, v) = H(EG - F^2)^2 \left(\langle N, T \rangle + \frac{1}{H} \right). \quad (2.17)$$

Note que multiplicamos a Equação (1.4) por $H(EG - F^2)^2 \neq 0$ para facilitar os cálculos. Partindo de (2.16), temos $X_u = (1, 0, f')$, $X_v = (0, 1, g')$, $X_{uu} = (0, 0, f'')$, $X_{uv} = (0, 0, 0)$ e $X_{vv} = (0, 0, g'')$. Daí, os coeficientes da 1ª forma fundamental são:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (f')^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = f'g', \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (g')^2.$$

Como $X_u \wedge X_v = (-f', -g', 1)$, chegamos a :

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \|X_u \wedge X_v\|^2 = (f')^2 + (g')^2 + 1, \\ N &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{(-f', -g', 1)}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos calcular os coeficientes da 2ª forma fundamental e a curvatura média H :

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}}, \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{g''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}}, \\ H &= \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \\ &= \frac{(1 + (f')^2)g'' + (1 + (g')^2)f''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2} (1 + (f')^2 + (g')^2)}. \end{aligned}$$

Substituindo as informações anteriores em (2.17), obtemos a equação seguinte, considerando a direção de translação $T = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$:

$$\begin{aligned} P(u, v) &= \left(\frac{(1 + (f')^2)g'' + (1 + (g')^2)f''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}} \right) (1 + (f')^2 + (g')^2) \left(\frac{\sin \theta - \cos \theta f'}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}} \right) \\ &\quad + (1 + (f')^2 + (g')^2)^2 \\ &= (1 + (f')^2 + (g')^2)^2 + (\sin \theta - \cos \theta f') \left(g''(1 + (f')^2) + f''(1 + (g')^2) \right). \quad (2.18) \end{aligned}$$

Se nós assumirmos $f'f''g'g'' = 0$, então Σ é uma superfície regrada, logo um cilindro sobre uma cicloide pelo Teorema 2.1. De fato, analisemos as possibilidades:

A. Se $f' \equiv 0$, então $f = \text{constante} = c_0$ e temos X regrada dada abaixo:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, v, c_0 + g(v)) \\ &= u(1, 0, 0) + (0, v, c_0 + g(v)). \end{aligned}$$

B. Se $f' \not\equiv 0$, vale $f'(t_0) \neq 0$ para algum t_0 no domínio de f . Daí, $f'|_I \neq 0$, onde I é um intervalo contido no $\text{Dom}(f)$ e $t_0 \in I$. Isso implica $g''g'f'' = 0$ em I , o que nos leva as seguintes opções:

(a) Se $f'' \equiv 0$, $f(u) = au + b$ e temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, v, au + b + g(v)) \\ &= u(1, 0, a) + (v, 0, g(v) + b), \end{aligned}$$

que é regradada.

(b) Se $f'' \neq 0$, temos $f''|_{J \subset J} \neq 0$. Daí $g'g'' = 0$ em J , o que gera duas possibilidades:

i. Se $g' \equiv 0$ então $g = \text{constante} = c_1$. Isso implica na superfície regradada a seguir:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, v, f(u) + c_1) \\ &= (u, 0, f(u) + c_1) + v(0, 1, 0). \end{aligned}$$

ii. Se $g' \neq 0$ temos $g'|_{J_1 \subset J} \neq 0$. Assim, $g'' = 0$ em J_1 e vale:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, v, f(u) + c_2v + c_3) \\ &= (u, 0, f(u) + c_3) + v(0, 1, c_2). \end{aligned}$$

Assim, em todos os casos acima, a superfície Σ é regradada.

Vamos assumir agora que $f'f''g'g'' \neq 0$, ou seja, f e g não são funções afins ou constantes. Encontremos a derivada parcial mista P_{uv} de $P(u, v)$. Como

$$\begin{aligned} P_u &= 2((f')^2 + (g')^2 + 1)2f'f'' + (-\cos \theta f'')\left(g''(1 + (f')^2) + f''(1 + (g')^2)\right) + (\sin \theta - \\ &\quad \cos \theta f')\left(2g''f'f'' + f'''(1 + (g')^2)\right), \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} P_{uv} &= 8g'g''f'f'' - \cos \theta f''\left(g'''(1 + (f')^2) + 2f''g'g''\right) + (\sin \theta - \cos \theta f')\left(2f'f''g''' + \right. \\ &\quad \left. 2f'''g'g''\right) = 0. \end{aligned}$$

Podemos reescrever essa igualdade como:

$$2g'g''\left(f''(4f' - \cos \theta f'') + f'''(\sin \theta - \cos \theta f')\right) = g'''(f''(3 \cos \theta (f')^2 - 2 \sin \theta f' + \cos \theta)).$$

Daí, obtemos:

$$\frac{g'''}{2g'g''} = \frac{f'''(\sin \theta - \cos \theta f') + f''(4f' - \cos \theta f'')}{f''(3 \cos \theta (f')^2 - 2 \sin \theta f' + \cos \theta)}.$$

Como o lado esquerdo da equação está em função de v e o direito em função de u , constatamos que há uma constante c tal que:

$$c = \frac{g'''}{2g'g''}, \quad (2.19)$$

$$c = \frac{f'''(\sin \theta - \cos \theta f') + f''(4f' - \cos \phi f'')}{f''(3 \cos \theta (f')^2 - 2 \sin \phi f' + \cos \theta)}. \quad (2.20)$$

Existem 2 possibilidades de acordo com o valor de c .

Caso 1: $c \neq 0$.

Integrando (2.19), chegamos a:

$$g'' = c(g')^2 + C_1,$$

em que C_1 é uma constante.

Substituindo a equação acima em (2.18), temos:

$$\begin{aligned} P(u, v) &= (1 + (f')^2 + (g')^2)^2 + (\sin \theta - \cos \theta f') \left(g''(1 + (f')^2) + f''(1 + (g')^2) \right) \\ &= 1 + (f')^4 + (g')^4 + 2(f')^2 + 2(g')^2 + 2(f')^2(g')^2 + \sin \theta (c(g')^2 + C_1) + \\ &\quad \sin \theta (c(g')^2 + C_1)(f')^2 + \sin \theta f'' + \sin \theta f''(g')^2 - \cos \theta f'(c(g')^2 + C_1) - \\ &\quad \cos \theta f'(c(g')^2 + C_1)(f')^2 - \cos \theta f' f'' - \cos \theta f' f''(g')^2. \end{aligned}$$

Assim:

$$P(u, v) = \sum_{k=0}^2 A_{2k}(u) (g')^{2k}$$

em que $A_{2k}(u)$ são funções de u . Como $P(u, v) \equiv 0$, isso implica que $A_{2k}(u) = 0$ para cada $k = 0, 1, 2$. Mas $A_4(u) = 1$. Contradição.

Caso 2: $c = 0$.

Da Equação (2.19), tiramos $g''' = 0$. Então teremos:

$$g = C_1 v^2 + C_2 v + C_3$$

em que C_1, C_2 e C_3 são constantes. Substituindo em (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} P(u, v) &= 1 + (f')^4 + (2C_1 v + C_2)^4 + 2(f')^2 + 2(2C_1 v + C_2)^2 + 2(f')^2(2C_1 v + C_2)^2 + \\ &\quad \sin \theta (2C_1) + 2 \sin \theta C_1 (f')^2 + \sin \theta f'' + \sin \theta f''(2C_1 v + C_2)^2 - \cos \theta f'(2C_1) - \\ &\quad \cos \theta f' C_1 (f')^2 - \cos \theta f' f'' - \cos \theta f' f''(2C_1 v + C_2)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$P(u, v) = \sum_{k=0}^4 B_k(u) v^k$$

em que $B_k(u)$ são funções de u . Como $B_k(u) = 0$ para cada $k = 0, \dots, 4$ e $B_4(u) = 16C_1^4$, a constante C_1 é zero. Contradição já que estamos considerando $g'' \neq 0$. Assim, $f' f'' g' g'' = 0$ e Σ precisa ser uma superfície regrada. Portanto, concluímos que se Σ é uma superfície de translação, como no enunciado, que também é um sólito de translação para o FICM, Σ é um cilindro cicloide. \square

Capítulo 3

Sólitons de Translação Cíclicos para o FICM em \mathbb{R}^3

Neste capítulo consideraremos sólitons de translação para o fluxo do inverso da curvatura média dados por superfícies folheadas por circunferências, isto é, as superfícies cíclicas. O teorema principal do capítulo, apresentado na Seção 3.3, consiste em demonstrar que um sóliton de translação para o fluxo do inverso da curvatura média dado por uma superfície cíclica é necessariamente uma superfície de revolução, em que o eixo de rotação é paralelo à direção de translação. Para isso, necessitaremos de um lema fundamental, demonstrado na Seção 3.2, que estabelece que os planos que contêm as circunferências da folheação são paralelos. Na seção a seguir, serão estabelecidas parametrizações e estruturas de superfícies cíclicas, que serão importantes para o restante do capítulo. Como no Capítulo 2, a referência para este capítulo é o artigo [18].

3.1 Parametrização e estrutura de superfícies cíclicas

Seja e_0 um campo vetorial unitário normal aos planos que contêm as circunferências da folheação e $\Gamma(u)$ uma curva integral de e_0 . Supomos que as circunferências da folheação não estão em planos paralelos, isto é, a curvatura k de $\Gamma(u)$ é diferente de 0. Neste caso, podemos parametrizar a superfície cíclica, o centro das circunferências e o seu vetor tangente como segue:

Observamos inicialmente que a curvatura de $\Gamma(u)$ não se anula, exceto em um conjunto discreto de pontos. De fato, caso isso ocorresse, teríamos um segmento de reta contido em $\Gamma(u)$, o que não acontece, já que os planos não são paralelos. Fora desses pontos, podemos tomar o referencial de Frenet $\{t(u), n(u), b(u)\}$ de $\Gamma(u)$, em que $t(u)$, $n(u)$ e $b(u)$ denotam,

respectivamente, os vetores tangente, normal e binormal. Nos pontos em que $k = 0$, basta estender continuamente essas funções.

Lembremos que esse referencial satisfaz as fórmulas de Frenet:

$$\begin{aligned}t'(u) &= k(u)n(u), \\n'(u) &= -k(u)t(u) - \tau(u)b(u), \\b'(u) &= \tau(u)n(u)\end{aligned}$$

em que $k(u)$ e $\tau(u)$ são, respectivamente, a curvatura e a torção de $\Gamma(u)$. Usaremos a notação k, τ, t, n e b em lugar de $k(u), \tau(u), t(u), n(u)$ e $b(u)$, respectivamente, isto é, omitiremos o parâmetro u . Como vimos na Seção 1.4, a superfície cíclica pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned}X : I \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\(u, v) &\mapsto c(u) + r(u)(\cos(v)n + \sin(v)b),\end{aligned}\tag{3.1}$$

em que $r(u)$ é o raio da circunferência e $c(u)$ é o centro da circunferência cujo vetor tangente, escrito como combinação do referencial de Frenet da curva Γ , é dado por

$$c'(u) = \alpha(u)t + \beta(u)n + \gamma(u)b,\tag{3.2}$$

em que $\alpha(u)$, $\beta(u)$ e $\gamma(u)$ são funções, que denotaremos simplesmente por α , β e γ , respectivamente. Utilizaremos essa parametrização na prova do Lema 3.1.

No caso em que os planos que contêm as circunferências são paralelos, podemos parametrizar uma superfície cíclica e o centro das circunferências da seguinte forma:

Como, neste caso, e_0 é um campo vetorial constante perpendicular aos planos, podemos considerar um referencial ortonormal constante $\{E_1, E_2, E_3\}$ de \mathbb{R}^3 tal que $E_3 = e_0$, e cada plano paralelo é gerado por $\{E_1, E_2\}$. Representamos a superfície e o centro da circunferência por

$$X(u, v) = c(u) + r(u)(\cos v E_1 + \sin v E_2),\tag{3.3}$$

$$c(u) = a(u)E_1 + b(u)E_2 + uE_3,\tag{3.4}$$

em que $r(u)$ é o raio da circunferência e $a(u)$ e $b(u)$ são funções de u , que denotaremos por a e b . De fato, sendo os planos paralelos e ortogonais a $E_3 = e_0$, a projeção do vetor tangente $c'(u)$ na direção de E_3 deve ser sempre diferente de zero. Sendo assim, parametrizamos $c(u)$ como um gráfico com relação ao parâmetro na direção de E_3 . Consideraremos essa parametrização no Teorema 3.1.

Definimos $P(u, v)$ como uma função nos parâmetros (u, v) , que determina a superfície cíclica como um sólton de translação para o fluxo do inverso da curvatura média através da equação:

$$P(u, v) = (EG - F^2)^2 (\langle \vec{H}, T \rangle + 1), \quad (3.5)$$

em que T é um vetor constante não nulo. Note que multiplicamos a Equação (1.3) por $EG - F^2 \neq 0$ para simplificar contas posteriormente. Veremos na próxima seção que $P(u, v)$ é um polinômio trigonométrico real na variável v como definido na Seção 1.3.

3.2 Lema chave

Nesta seção apresentamos um lema fundamental para a prova do teorema principal. Neste lema, mostraremos que os planos contendo cada circunferência de uma superfície cíclica dada por um sólton de translação para o fluxo do inverso da curvatura média são paralelos.

Lema 3.1. Seja Σ um sólton de translação para o fluxo do inverso da curvatura média, dado por uma superfície cíclica. Então os planos que contêm cada circunferência são paralelos.

Demonstração. Seja X definida na Equação (3.1) uma parametrização de Σ . Suponha que os círculos do folheação não sejam paralelos. Podemos considerar que a direção de translação T é $e_3 = (0, 0, 1)$, a menos de rotação e reescala, já que ela é fixa, ou seja, independente da direção da folheação. Vamos mostrar que podemos escrever a Equação (3.5) na forma

$$P(u, v) = A_0 + \sum_{m=1}^5 (A_m(u) \cos(mv) + B_m(u) \sin(mv)) \equiv 0, \quad (3.6)$$

em que $A_m(u)$ e $B_m(u)$ são funções de u , que denotaremos simplesmente por A_m e B_m , respectivamente. Usando o Teorema 1.2, os coeficientes A_m e B_m precisam ser identicamente nulos. Abaixo, mostraremos que a Equação (3.6) é, de fato, um polinômio trigonométrico de ordem 5. No que segue, omitiremos o parâmetro u para uma melhor leitura. Além disso, o apóstrofo ($'$) denotará a derivada com relação a u .

Partindo das Equações (3.1) e (3.2), temos:

$$\begin{aligned} X_u &= (\alpha - rk \cos v)t + (\beta + r' \cos v + r\tau \sin v)n + (\gamma + r' \sin v - r\tau \cos v)b \\ &= C_t t + C_n n + C_b b, \\ X_v &= -r \sin v n + r \cos v b, \end{aligned}$$

em que $C_t = \alpha - rk \cos v$, $C_n = \beta + r' \cos v + r\tau \sin v$ e $C_b = \gamma + r' \sin v - r\tau \cos v$. Com essa notação, os coeficientes da primeira forma fundamental de X são:

$$E = C_t^2 + C_n^2 + C_b^2, \quad F = r(C_b \cos v - C_n \sin v), \quad G = r^2, \quad (3.7)$$

e o produto vetorial $X_u \wedge X_v$ é dado por:

$$X_u \wedge X_v = (r \cos v C_n + r \sin v C_b)t - r \cos v C_t n - r \sin v C_t b.$$

Sendo assim, obtemos que:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \|X_u \wedge X_v\|^2 \\ &= r^2 (\cos v C_n + \sin v C_b)^2 + r^2 C_t^2, \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental, encontremos agora as derivadas de segunda ordem de X :

$$\begin{aligned} X_{uu} &= C_t' t + C_n' n + C_b' b + C_t k n + C_n (-k t - \tau b) + C_b \tau n \\ &= (C_t' - k C_n) t + (C_n' + C_t k + C_b \tau) n + (C_b' - C_n \tau) b, \\ X_{uv} &= rk \sin v t + (r\tau \cos v - r' \sin v) n + (r\tau \sin v + r' \cos v) b, \\ &= rk \sin v t + (\gamma - C_b) n + (C_n - \beta) b, \\ X_{vv} &= -r \cos v n - r \sin v b. \end{aligned}$$

Sendo o normal unitário de X dado por $N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}}$, obtemos $X_u \wedge X_v = \sqrt{EG - F^2} N$. Assim, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \wedge X_v \rangle &= \sqrt{EG - F^2} e, \\ \langle X_{uv}, X_u \wedge X_v \rangle &= \sqrt{EG - F^2} f, \\ \langle X_{vv}, X_u \wedge X_v \rangle &= \sqrt{EG - F^2} g, \end{aligned} \quad (3.8)$$

com e , f e g os coeficientes da segunda forma fundamental. Calculemos os produtos internos nas equações acima:

$$\langle X_{uu}, X_u \wedge X_v \rangle = r \cos v [C_n(C'_t - kC_n) - C_t(C'_n + C_t k + C_b \tau)] + r \sin v [C_b(C'_t - kC_n) - C_t(C'_b - C_n \tau)],$$

$$\langle X_{uv}, X_u \wedge X_v \rangle = rk \sin v (r \cos v C_n + r \sin v C_b) - (\gamma - C_b) r \cos v C_t - (C_n - \beta) r \sin v C_t,$$

$$\langle X_{vv}, X_u \wedge X_v \rangle = r^2 C_t.$$

Substituindo esses resultados nas equações em (3.8), chegamos a:

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{r} e = \cos v [C_n(C'_t - kC_n) - C_t(C'_n + C_t k + C_b \tau)] + \sin v [C_b(C'_t - kC_n) - C_t(C'_b - C_n \tau)], \quad (3.9)$$

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{r} f = rk \sin v \cos v C_n + rk \sin^2 v C_b - [(\gamma - C_b) \cos v + (C_n - \beta) \sin v] C_t, \quad (3.10)$$

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{r} g = r C_t. \quad (3.11)$$

Agora defina

$$D := r^{-1} \sqrt{EG - F^2} (Eg - 2fF + Ge). \quad (3.12)$$

Substituindo as equações (3.7), (3.9), (3.10) e (3.11) em D , obtemos:

$$\begin{aligned} D &= (C_t^2 + C_n^2 + C_b^2) r C_t - 2 \left\{ rk \sin v \cos v C_n + rk \sin^2 v C_b - [(\gamma - C_b) \cos v + (C_n - \beta) \sin v] C_t \right\} r (C_b \cos v - C_n \sin v) \\ &\quad + r^2 \left\{ \cos v [C_n(C'_t - kC_n) - C_t(C'_n + C_t k + C_b \tau)] + \sin v [C_b(C'_t - kC_n) - C_t(C'_b - C_n \tau)] \right\}, \\ D &= D_1 r C_t - 2D_2 r D_3 + r^2 D_4, \end{aligned} \quad (3.13)$$

com

$$D_1 = C_t^2 + C_n^2 + C_b^2,$$

$$D_2 = rk \sin v \cos v C_n + rk \sin^2 v C_b - [(\gamma - C_b) \cos v + (C_n - \beta) \sin v] C_t,$$

$$D_3 = C_b \cos v - C_n \sin v,$$

$$D_4 = \cos v [C_n(C'_t - kC_n) - C_t(C'_n + C_t k + C_b \tau)] + \sin v [C_b(C'_t - kC_n) - C_t(C'_b - C_n \tau)].$$

Sabemos que $H = \frac{Eg - 2fF + Ge}{(EG - F^2)}$ e o vetor curvatura média \vec{H} é definido como HN . Isso implica

$$\langle \vec{H}, T \rangle = \frac{Eg - 2fF + Ge}{(EG - F^2)^{3/2}} (X_u \wedge X_v)_3.$$

onde $(X_u \wedge X_v)_3 = \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle$.

Utilizando (3.12) na equação anterior, temos

$$\langle \vec{H}, T \rangle = \frac{rD}{(EG - F^2)^2} (X_u \wedge X_v)_3.$$

Portanto:

$$P(u, v) = (EG - F^2)^2 (\langle \vec{H}, T \rangle + 1) = rD (X_u \wedge X_v)_3 + (EG - F^2)^2.$$

Para mostrar que $P(u, v)$ é um polinômio trigonométrico em v de grau no máximo 5, vamos analisar os termos D , $(X_u \wedge X_v)_3$ e $(EG - F^2)^2$ que compõem P . Começamos calculando D_1, D_2, D_3 e D_4 .

$$\begin{aligned} D_1 &= C_t^2 + C_n^2 + C_b^2, \\ &= \alpha^2 - 2\alpha rk \cos v + r^2 k^2 \cos^2 v + \beta^2 + 2\beta(r' \cos v + r\tau \sin v) \\ &\quad + (r')^2 \cos^2 v + 2r'r\tau \sin v \cos v + (r\tau)^2 \sin^2 v + \gamma^2 + 2\gamma(r' \sin v - r\tau \cos v) \\ &\quad + (r')^2 \sin^2 v - 2r'r\tau \sin v \cos v + (r\tau)^2 \cos^2 v \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (r')^2 + (r\tau)^2 \\ &\quad + (2\beta r' - 2\alpha rk - 2\gamma r\tau) \cos v + 2\beta r\tau \sin v + 2\gamma r' \sin v + r^2 k^2 \cos^2 v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= rk \sin v \cos v C_n + rk \sin^2 v C_b - (\gamma \cos v - \beta \sin v)(\alpha - rk \cos v) - [C_n \sin v - \\ &\quad C_b \cos v](\alpha - rk \cos v) \\ &= rk \sin v (\cos v \beta + r' \cos^2 v + r\tau \cos v \sin v + \sin v \gamma + r' \sin^2 v - r\tau \sin v \cos v) \\ &\quad - (\gamma \cos v - \beta \sin v)(\alpha - rk \cos v) - [(\beta + r' \cos v + r\tau \sin v) \sin v - (\gamma + \\ &\quad r' \sin v - r\tau \cos v) \cos v](\alpha - rk \cos v) \\ &= rk \sin v (r' + \beta \cos v + \gamma \sin v) - (\gamma \cos v - \beta \sin v)(\alpha - rk \cos v) - (\beta \sin v - \\ &\quad \gamma \cos v + r\tau)(\alpha - rk \cos v) \\ &= rk \sin v (r' + \beta \cos v + \gamma \sin v) - r\tau(\alpha - rk \cos v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= C_b \cos v - C_n \operatorname{sen} v \\
&= (\gamma + r' \operatorname{sen} v - r\tau \cos v) \cos v - (\beta + r' \cos v + r\tau \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} v \\
&= \gamma \cos v - \beta \operatorname{sen} v - r\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4 &= \cos v [C_n(C'_t - kC_n) - C_t(C'_n + C_t k + C_b \tau)] + \operatorname{sen} v [C_b(C'_t - kC_n) - C_t(C'_b - C_n \tau)] \\
&= (C'_t - kC_n)(C_n \cos v + C_b \operatorname{sen} v) - C_t(C'_n \cos v + C'_b \operatorname{sen} v) - C_t \tau (C_b \cos v \\
&\quad - C_n \operatorname{sen} v) - C_t^2 k \cos v.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
C_n \cos v + C_b \operatorname{sen} v &= (\beta + r' \cos v + r\tau \operatorname{sen} v) \cos v + (\gamma + r' \operatorname{sen} v - r\tau \cos v) \operatorname{sen} v \\
&= \beta \cos v + \gamma \operatorname{sen} v + r',
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
D_4 &= (C'_t - kC_n)(\beta \cos v + \gamma \operatorname{sen} v + r') - C_t(\beta' \cos v + \gamma' \operatorname{sen} v + r'') - \\
&\quad - C_t \tau (\gamma \cos v - \beta \operatorname{sen} v - r\tau) - C_t^2 k \cos v \\
&= (\alpha' - (rk)') \cos v - k\beta - kr' \cos v - kr\tau \operatorname{sen} v (\beta \cos v + \gamma \operatorname{sen} v + r') - \\
&\quad - (\alpha - rk \cos v)(\beta' \cos v + \gamma' \operatorname{sen} v + r'') - \\
&\quad - (\alpha - rk \cos v) [\tau \gamma \cos v - \tau \beta \operatorname{sen} v - r\tau^2 + (\alpha - rk \cos v) k \cos v] \\
&= [\alpha' - k\beta - ((rk)') + r'k) \cos v - kr\tau \operatorname{sen} v] (r' + \beta \cos v + \gamma \operatorname{sen} v) - \\
&\quad - (\alpha - rk \cos v)(r'' + \beta' \cos v + \gamma' \operatorname{sen} v) - \\
&\quad - (\alpha - rk \cos v) [-r\tau^2 + (\tau \gamma + \alpha k) \cos v - \tau \beta \operatorname{sen} v - rk^2 \cos^2 v].
\end{aligned}$$

Substituindo os cálculos anteriores em (3.13) chegamos a

$$\begin{aligned}
D &= \left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (r')^2 + (r\tau)^2 + (2\beta r' - 2\alpha rk - 2\gamma r\tau) \cos v + 2\beta r\tau \operatorname{sen} v + \right. \\
&\quad \left. 2\gamma r' \operatorname{sen} v + r^2 k^2 \cos^2 v \right] r(\alpha - rk \cos v) - 2r \left[rk \operatorname{sen} v (r' + \beta \cos v + \gamma \operatorname{sen} v) - \right. \\
&\quad \left. r\tau(\alpha - rk \cos v) \right] (\gamma \cos v - \beta \operatorname{sen} v - r\tau) + r^2 \left\{ [\alpha' - k\beta - ((rk)') + kr'] \cos v - \right. \\
&\quad \left. kr\tau \operatorname{sen} v \right] (r' + \beta \cos v + \gamma \operatorname{sen} v) - (\alpha - (rk) \cos v)(r'' + \beta' \cos v + \gamma' \operatorname{sen} v) - \\
&\quad \left. (\alpha - rk \cos v) [-r\tau^2 + (\tau \gamma + \alpha k) \cos v - rk^2 \cos^2 v - \beta \tau \operatorname{sen} v] \right\}.
\end{aligned}$$

Logo D é uma combinação linear de produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com no máximo 3 fatores. Segue da Proposição 1.5 que D gera termos de no máximo ordem 3 para o polinômio trigonométrico.

Calculamos agora a terceira coordenada de $X_u \wedge X_v$, isto é,

$$\begin{aligned} (X_u \wedge X_v)_3 &= (r \cos v C_n + r \sin v C_b) t_3 - r \cos v C_t n_3 - r \sin v C_t b_3 \\ &= r [\cos v (\beta + r' \cos v + r \tau \sin v) + \sin v (\gamma + r' \sin v - r \tau \cos v)] t_3 - \\ &\quad r (\alpha - rk \cos v) (\cos v n_3 + \sin v b_3) \\ &= r (r' + \beta \cos v + \gamma \sin v) t_3 - r (\alpha - rk \cos v) (\cos v n_3 + \sin v b_3), \end{aligned}$$

onde n_3 e b_3 são $\langle n, e_3 \rangle$ e $\langle b, e_3 \rangle$, respectivamente. Segue que essa expressão é uma combinação linear de produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com no máximo 2 fatores, que gera termos de no máximo ordem 2 para P .

Finalmente,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \|X_u \wedge X_v\|^2 = r^2 (\cos v C_n + \sin v C_b)^2 + r^2 C_t^2 \\ &= r^2 [(\beta \cos v + \gamma \sin v + r')^2 + (\alpha - rk \cos v)^2], \end{aligned} \quad (3.14)$$

e assim $(EG - F^2)^2$ gerará termos de no máximo ordem 4.

Logo, pela proposição 1.4, $P(u, v)$ tem ordem no máximo 5 como polinômio trigonométrico em v . Para mostrar que a ordem é exatamente 5, vamos encontrar os termos de ordem 5 de P . Estes virão do termo $rD(X_u \wedge X_v)_3$.

Abaixo escrevemos os termos de D que envolvem produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com 3 fatores.

$$\begin{aligned} D_{3fat} &= -r^4 k^3 \cos^3 v - 2r (rk\beta\gamma \sin v \cos^2 v - rk\beta^2 \sin^2 v \cos v + rk\gamma^2 \sin^2 v \cos v - rk\gamma\beta \sin^3 v) \\ &\quad - r^4 k^3 \cos^3 v \\ &= -2r^4 k^3 \cos^3 v - 2r^2 k [\beta\gamma \sin v (\cos^2 v - \sin^2 v) + \sin^2 v \cos v (\gamma^2 - \beta^2)] \\ &= -2r^2 k [(r^2 k^2 + \beta^2 - \gamma^2) \cos^3 v - 2\beta\gamma \sin^3 v + \beta\gamma \sin v + (\gamma^2 - \beta^2) \cos v]. \end{aligned}$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\cos^3 v = \frac{\cos(3v) + 3 \cos v}{4} \quad \text{e} \quad \sin^3 v = \frac{3 \sin v - \sin(3v)}{4},$$

podemos reescrever D_{3fat} como:

$$\begin{aligned} D_{3fat} &= -2r^2k \left[(r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2) \frac{\cos(3v) + 3\cos v}{4} + \beta\gamma \frac{\sin(3v) - 3\sin v}{2} + \beta\gamma \sin v + \right. \\ &\quad \left. + (\gamma^2 - \beta^2) \cos v \right] \\ &= -2r^2k \left[\frac{r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2}{4} \cos(3v) + \frac{\beta\gamma}{2} \sin(3v) + \frac{3r^2k^2 + \gamma^2 - \beta^2}{4} \cos v - \frac{\beta\gamma}{2} \sin v \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, os termos de $(X_u \wedge X_v)_3$ que possuem produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com dois fatores são:

$$\begin{aligned} (X_u \wedge X_v)_{3(2fat)} &= r^2k (\cos^2 v n_3 + \cos v \sin v b_3) \\ &= r^2k \left[\frac{\cos(2v) + 1}{2} n_3 + \frac{\sin(2v)}{2} b_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Fazendo o produto $rD_{3fat}(X_u \wedge X_v)_{3(2fat)}$, obtemos

$$\begin{aligned} &-2r^5k^2 \left[\frac{r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2}{8} (\cos 3v \cos 2v n_3 + \cos 3v \sin 2v b_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta\gamma}{4} (\sin 3v \cos 2v n_3 + \sin 3v \sin 2v b_3) \right] \\ &\quad + (\text{termos com apenas } \cos(3v), \sin(3v), \cos v, \sin v). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1, vale:

$$\begin{aligned} \cos 3v \cos 2v &= \frac{\cos(5v) + \cos v}{2}, & \sin 3v \sin 2v &= \frac{\cos v - \cos 5v}{2}, \\ \sin 3v \cos 2v &= \frac{\sin 5v + \sin v}{2}, & \cos 3v \sin 2v &= \frac{\sin 5v - \sin v}{2}. \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned}
& -2r^5k^2 \left[\frac{(r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{8} (\cos 3v \cos 2vn_3 + \cos 3v \sin 2vb_3) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta\gamma}{4} (\sin 3v \cos 2vn_3 + \sin 3v \sin 2vb_3) \right] = \\
& = -2r^5k^2 \left[\frac{(r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{16} n_3 \cos 5v + \frac{(r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{16} b_3 \sin 5v + \frac{\beta\gamma}{8} n_3 \sin 5v \right. \\
& \quad \left. - \frac{\beta\gamma}{8} b_3 \cos 5v \right] + \\
& \quad (\text{termos que só envolvem } \cos v \text{ ou } \sin v) \\
& = -\frac{r^5k^2}{8} \left\{ [(r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2)n_3 - 2\beta\gamma b_3] \cos(5v) + \right. \\
& \quad \left. [(r^2k^2 + \beta^2 - \gamma^2)b_3 + 2\beta\gamma n_3] \sin(5v) \right\} + \\
& \quad (\text{termos com apenas } \cos v, \sin v).
\end{aligned}$$

Assim $P(u, v)$ tem ordem 5 com os coeficientes de $\sin 5v$ e $\cos 5v$, sendo respectivamente:

$$A_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 (-2b_3 \beta \gamma + n_3 (\beta^2 - \gamma^2 + r^2 \kappa^2)), \quad (3.16)$$

$$B_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 (2n_3 \beta \gamma + b_3 (\beta^2 - \gamma^2 + r^2 \kappa^2)). \quad (3.17)$$

Já sabemos que $A_5 = B_5 = 0$. Vamos assumir que $b_3^2 + n_3^2$ não se anula em nenhum ponto, pois se ambos n_3 e b_3 se anulassem identicamente nas expressões anteriores, t seria paralelo a e_3 — o que contradiz a hipótese da curvatura não identicamente nula. Da equação $B_5 n_3 - A_5 b_3 \equiv 0$, tiramos:

$$\frac{1}{4} (b_3^2 + n_3^2) r^5 \kappa^2 \beta \gamma \equiv 0.$$

Como r e k não são nulos, distinguimos duas possibilidades de acordo com os valores de β e γ :

Caso 1. $\beta \equiv 0$. Obtemos $r^2 \kappa^2 - \gamma^2 \equiv 0$ a partir de

$$A_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 b_3 (r^2 \kappa^2 - \gamma^2), \quad B_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 n_3 (r^2 \kappa^2 - \gamma^2).$$

A partir dessas hipóteses, vamos encontrar A_4, B_4, A_3 e B_3 . Começando com os coeficientes de ordem 4. De (3.14), assumindo que $\beta = 0$, temos

$$EG - F^2 = r^2 \left(\gamma^2 \sin^2 v + 2r' \gamma \sin v + (r')^2 + \alpha^2 - 2\alpha r k \cos v + (rk)^2 \cos^2 v \right).$$

Assumindo agora que $r^2 k^2 = \gamma^2$ acima, vale

$$EG - F^2 = r^2 \left(\gamma^2 + 2r' \gamma \sin v + (r')^2 + \alpha^2 - 2\alpha r k \cos v \right).$$

Logo, $(EG - F^2)^2$ gera termos de ordem no máximo 2 para $P(u, v)$. Segue que os termos de ordem 4 virão de $rD(X_u \wedge X_v)_3$.

Sob as condições do caso 1, D_{3fat} é nulo. Precisamos então olhar para os termos de D que envolvem produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com 2 fatores, que gerarão termos de ordem 2:

$$\begin{aligned} D_{2fat} &= r \left[2r^2 (\alpha k + \gamma \tau) k \cos^2 v + \alpha r^2 k^2 \cos^2 v - 2\gamma r' \sin v r k \cos v \right] - 2r \left[r' r k \gamma \sin v \cos v - \right. \\ &\quad \left. r^2 k \gamma \tau \sin^2 v + r^2 k \gamma \tau \cos^2 v \right] + r^2 \left[-\gamma ((rk)' + kr') \cos v \sin v - kr \tau \gamma \sin^2 v + \right. \\ &\quad \left. (rk) \gamma' \cos v \sin v + \alpha r k^2 \cos^2 v + rk (\tau \gamma + \alpha k) \cos^2 v \right] \\ &= 3r^3 k (\alpha k + \gamma \tau) \cos^2 v + 2\alpha r^3 k^2 \cos^2 v - 3r^2 r' k \gamma \sin v \cos v + r^3 k \gamma \tau \sin^2 v - \\ &\quad 2r^3 k \gamma \tau \cos^2 v + r^2 [(rk) \gamma' - \gamma (rk)'] \cos v \sin v - 2\gamma r' \sin v r^2 k \cos v. \end{aligned}$$

Como $r^2 k^2 - \gamma^2 = 0$, segue $\frac{rk}{\gamma} = \pm 1$. Derivando em u , obtemos $\frac{(rk)'\gamma - (rk)\gamma'}{\gamma^2} = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} D_{2fat} &= r^3 k [3(\alpha k + \gamma \tau) + 2\alpha k - 2\gamma \tau] \cos^2 v - 5r^2 r' k \gamma \sin v \cos v + r^3 k \gamma \tau \sin^2 v \\ &= r^3 k (5\alpha k + \gamma \tau) \cos^2 v - 5r^2 r' k \gamma \sin v \cos v + r^3 k \gamma \tau \sin^2 v \\ &= 5r^3 k^2 \alpha \cos^2 v - 5r^2 r' k \gamma \sin v \cos v + r^3 k \gamma \tau \\ &= 5r^3 k^2 \alpha \frac{\cos 2v + 1}{2} - 5r^2 r' k \gamma \frac{\sin 2v}{2} \\ &= \frac{r^3 k}{2} \left[5k\alpha (\cos 2v + 1) - 5r' \gamma \frac{\sin 2v}{r} \right]. \end{aligned}$$

Fazendo o produto de D_{2fat} com r e $(X_u \wedge X_v)_{3(2fat)}$, dado em (3.15), encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{r^6 k^2}{4} \left\{ 5k\alpha (\cos^2 2v + 2 \cos 2v + 1) n_3 + 5k\alpha (\cos 2v + 1) \sin 2v b_3 - \frac{5r'\gamma}{r} \sin 2v (\cos 2v + 1) n_3 - \right. \\ & \quad \left. \frac{5r'\gamma}{r} \sin^2 2v b_3 \right\} = \\ & = \frac{r^6 k^2}{4} \left[5k\alpha \cos^2(2v) n_3 + 5k\alpha \cos(2v) \sin(2v) b_3 - \frac{5r'\gamma}{r} \sin(2v) \cos(2v) n_3 - \frac{5r'\gamma}{r} \sin^2(2v) b_3 \right] \\ & \quad + (\text{termos em } \cos 2v \text{ e } \sin 2v). \end{aligned}$$

Como ,

$$\cos^2 2v = \frac{\cos(4v) + 1}{2}, \quad \sin^2 2v = \frac{1 - \cos 4v}{2},$$

temos

$$\begin{aligned} & \frac{r^6 k^2}{8} \left[5k\alpha \cos 4v n_3 + 5k\alpha \sin 4v b_3 - \frac{5r'\gamma}{r} \sin 4v n_3 + \frac{5r'\gamma}{r} \cos 4v b_3 \right] + \\ & \quad (\text{termos em } \cos 2v \text{ e } \sin 2v) \\ & = \frac{r^6 k^2}{8} \left[\left(5k\alpha n_3 + \frac{5r'\gamma}{r} b_3 \right) \cos 4v + \left(5k\alpha b_3 - \frac{5r'\gamma}{r} n_3 \right) \sin 4v \right] \\ & \quad + (\text{termos em } \cos 2v \text{ e } \sin 2v). \end{aligned}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{5r^6 k^3 \alpha}{8} n_3 + \frac{5r^6 k^2 r' \gamma}{8r} b_3 \\ B_4 &= \frac{5r^6 k^3 \alpha}{8} b_3 - \frac{5r^6 k^2 r' \gamma}{8r} n_3 \end{aligned}$$

Das equações

$$A_4 b_3 - B_4 n_3 = 0, \quad A_4 n_3 + B_4 b_3 = 0.$$

Obtém-se

$$\frac{5r^6 k^2 r' \gamma}{8r} (n_3^2 + b_3^2) = 0, \quad \frac{5r^6 k^3 \alpha}{8} (n_3^2 + b_3^2) = 0,$$

De $r^2 k^2 = \gamma^2$, tiramos $\frac{\gamma}{r} = \pm k$ e podemos reescrever as expressões acima:

$$\pm \frac{5r^6 k^3 r'}{8} (n_3^2 + b_3^2) = 0, \quad \frac{5r^6 k^3 \alpha}{8} (n_3^2 + b_3^2) = 0,$$

que implicam em $\alpha = r' = 0$.

Vamos olhar agora para os termos de ordem 3 usando a hipótese $\beta = \alpha = r' = r^2 k^2 - \gamma^2 = 0$.

Sob essas hipóteses, vale:

- $(EG - F^2)^2$ só gera termos de ordem 0;
- D_{3fat} não gera termos de ordem 3 ou 2 para P , mas gera um termo de 1 que é $-2r^4 k^3 \cos v$;
- D_{2fat} se anula;
- $(X_u \wedge X_v)_3$ gera termos de ordem 1 e 2

Precisamos então fazer o produto entre D_{3fat} unido a D_{1fat} com $(X_u \wedge X_v)_{3(2fat)}$.

$$\begin{aligned} D_{3fat} + D_{1fat} &= -(\gamma^2 + (r\tau)^2) r^2 k \cos v + 2r^4 k \tau^2 \cos v + r^2 [-r^2 k \tau^2 \cos v] - 2r^4 k \cos v \\ &= -\gamma^2 r^2 k \cos v - 2r^4 k \cos v \end{aligned}$$

$$(X_u \wedge X_v)_{3(2fat)} = \frac{r^2 k}{2} [(\cos 2v + 1) n_3 + \sin 2v b_3].$$

Multiplicando, obtemos:

$$-\frac{3r^6 k^4}{2} (\cos v \cos 2v n_3 + \cos v \sin 2v b_3) + (\text{termos de ordem inferior}).$$

Como

$$\cos v \cos 2v = \frac{\cos 3v + \cos v}{2}, \quad \sin 2v \cos v = \frac{\sin 3v + \sin v}{2}.$$

Os termos de ordem 3 nesse caso serão

$$-\frac{3r^6 k^4}{4} (\cos(3v) n_3 + \sin(3v) b_3) + (\text{termos com apenas } \cos v, \sin v)$$

Logo devemos ter

$$-\frac{3}{4} r^6 k^4 n_3 = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{3}{4} r^6 k^4 b_3 = 0,$$

o que leva a uma contradição.

Caso 2. $\gamma \equiv 0$. De (3.16) e (3.17), chegamos em:

$$A_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 b_3 (r^2 \kappa^2 + \beta^2), \quad B_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 n_3 (r^2 \kappa^2 + \beta^2).$$

levando a uma contradição, já que nenhum dos coeficientes se anula.

Como consequência, a curvatura κ de $\Gamma(u)$ é identicamente nula. Isso implica que $\Gamma(u)$ é uma reta com a direção de e_3 , isto é, $e_0 = e_3$, e os planos contendo cada circunferência são paralelos. □

Segue abaixo um resumo da demonstração do lema anterior com o objetivo de evidenciar os passos necessários para a prova.

Resumo da demonstração. Seja X definida por

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (u, v) &\mapsto c(u) + r(u)(\cos(v)n + \sin(v)b), \end{aligned} \quad (3.18)$$

uma parametrização de Σ , supondo que os círculos do folheação não sejam paralelos. Podemos considerar que a direção de translação T é $e_3 = (0, 0, 1)$. A ideia da demonstração consiste em mostrar que podemos escrever a Equação (3.5) na forma

$$P(u, v) = A_0 + \sum_{m=1}^5 (A_m(u) \cos(mv) + B_m(u) \sin(mv)) \equiv 0,$$

e extrair informações do fato de os coeficientes A_m e B_m serem identicamente nulos (uma consequência do Teorema 1.2). Procedemos da seguinte forma:

- Primeiramente encontramos as derivadas de primeira e segunda ordem de X e calculamos os coeficientes da 1ª e 2ª forma fundamental.
- Agora definimos

$$D := r^{-1} \sqrt{EG - F^2} (Eg - 2fF + Ge) \quad (3.19)$$

- Sabemos que $H = \frac{Eg - 2fF + Ge}{(EG - F^2)}$ e o vetor curvatura média \vec{H} é definido como HN . Isso implica

$$\langle \vec{H}, T \rangle = \frac{Eg - 2fF + Ge}{(EG - F^2)^{3/2}} (X_u \wedge X_v)_3.$$

onde $(X_u \wedge X_v)_3 = \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle$

- Utilizando (3.19) na equação anterior, temos

$$\langle \vec{H}, T \rangle = \frac{rD}{(EG - F^2)^2} (X_u \wedge X_v)_3.$$

- Portanto:

$$P(u, v) = (EG - F^2)^2 (\langle \vec{H}, T \rangle + 1) = rD(X_u \wedge X_v)_3 + (EG - F^2)^2.$$

- Para mostrar que $P(u, v)$ é um polinômio trigonométrico em v de grau no máximo 5, analisamos os termos D , $(X_u \wedge X_v)_3$ e $(EG - F^2)^2$ que compõem P .
- Obtemos da Proposição 1.5 que D gera termos de no máximo ordem 3 para o polinômio trigonométrico.
- Também encontramos que $(X_u \wedge X_v)_3$ gera termos de no máximo ordem 2 para P .
- Finalmente, temos que $(EG - F^2)^2$ gerará termos de no máximo ordem 4.
- Logo, $P(u, v)$ tem ordem no máximo 5 como polinômio trigonométrico em v . Para mostrar que a ordem é exatamente 5, explicitamos os termos de ordem 5 de P , mostrando que eles não são nulos a princípio. Estes virão do termo $rD(X_u \wedge X_v)_3$.
- Assim, encontramos que os coeficientes de $\sin 5v$ e $\cos 5v$ são respectivamente:

$$A_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 (-2b_3 \beta \gamma + n_3 (\beta^2 - \gamma^2 + r^2 \kappa^2)),$$

$$B_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 (2n_3 \beta \gamma + b_3 (\beta^2 - \gamma^2 + r^2 \kappa^2)).$$

- Devemos ter $A_5 = B_5 = 0$. Vamos assumir que $b_3^2 + n_3^2$ não se anula em nenhum ponto, pois se ambos n_3 e b_3 se anulassem identicamente nas expressões anteriores, t seria paralelo a e_3 . Da equação $B_5 n_3 - A_5 b_3 \equiv 0$, tiramos:

$$\frac{1}{4} (b_3^2 + n_3^2) r^5 \kappa^2 \beta \gamma \equiv 0.$$

Distinguímos duas possibilidades de acordo com os valores de β e γ :

- *Caso 1.* $\beta \equiv 0$. Obtemos $r^2 \kappa^2 - \gamma^2 \equiv 0$ a partir de

$$A_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 b_3 (r^2 \kappa^2 - \gamma^2), \quad B_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 n_3 (r^2 \kappa^2 - \gamma^2).$$

A partir dessas hipóteses, vamos encontrar A_4, B_4, A_3 e B_3 . Assim encontramos:

$$A_4 = \frac{5r^6 k^3 \alpha}{8} n_3 + \frac{5r^6 k^2 r' \gamma}{8r} b_3$$

$$B_4 = \frac{5r^6 k^3 \alpha}{8} b_3 - \frac{5r^6 k^2 r' \gamma}{8r} n_3$$

Das equações

$$A_4 b_3 - B_4 n_3 = 0, \quad A_4 n_3 + B_4 b_3 = 0.$$

Obtém-se

$$\pm \frac{5r^6 k^3 r'}{8} (n_3^2 + b_3^2) = 0, \quad \frac{5r^6 k^3 \alpha}{8} (n_3^2 + b_3^2) = 0,$$

que implicam em $\alpha = r' = 0$.

Ao olharmos agora para os termos de ordem 3 usando a hipótese $\beta = \alpha = r' = r^2 k^2 - \gamma^2 = 0$, encontramos:

$$A_3 = -\frac{3}{4} r^6 k^4 n_3 \quad \text{e} \quad B_3 = -\frac{3}{4} r^6 k^4 b_3,$$

o que leva a uma contradição.

- *Caso 2.* Chegamos a:

$$A_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 b_3 (r^2 \kappa^2 + \beta^2), \quad B_5 = -\frac{1}{8} r^5 \kappa^2 n_3 (r^2 \kappa^2 + \beta^2).$$

levando a uma contradição.

Como consequência, a curvatura κ de $\Gamma(u)$ é identicamente nula. Isso implica que $\Gamma(u)$ é uma reta com a direção de e_3 , isto é, $e_0 = e_3$, e os planos contendo cada circunferência são paralelos.

3.3 Teorema Principal

Nesta seção apresentamos a prova do Teorema Principal deste capítulo. Utilizando o lema chave, iremos mostrar que um sólito de translação para o fluxo do inverso da curvatura média, dado por uma superfície cíclica, é uma superfície de revolução.

Teorema 3.1. Seja Σ um sólito de translação para o fluxo do do inverso da curvatura média, dado por uma superfície cíclica. Então Σ é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é paralelo à direção de translação T .

Demonstração. Pelo Lema 3.1, os círculos da folheação do sólito de translação para o FICM devem estar em planos paralelos e perpendiculares à direção de translação $T = e_3$. Assim, podemos tomar o referencial ortonormal constante $\{E_1, E_2, E_3\}$ e obter a parametrização X para Σ como em (3.3). Partindo da Equação (3.5), vamos obter um polinômio trigonométrico de ordem 4, com termos linearmente independentes em $\cos kv$ e $\sin kv$:

$$P(u, v) = A_0 + \sum_{m=1}^4 (A_m(u) \cos(mv) + B_m(u) \sin(mv)) \equiv 0, \quad (3.20)$$

em que $A_m(u)$ e $B_m(u)$ são funções de u , que denotaremos simplesmente por A_m e B_m .

Novamente, pelo Teorema 1.2, os A_m e B_m são identicamente nulos. Provaremos, então, que a Equação (3.6) é, de fato, um polinômio trigonométrico de ordem 4. Começemos calculando as derivadas de X :

$$\begin{aligned} X_u &= S_t E_1 + S_n E_2 + E_3, \\ X_v &= -r \sin v E_1 + r \cos v E_2, \end{aligned}$$

onde $S_t = a' + r' \cos v$ e $S_n = b' + r' \sin v$.

Os coeficientes da primeira forma fundamental seguem abaixo:

$$E = S_t^2 + S_n^2 + 1, \quad F = -r(S_t \sin v - S_n \cos v), \quad G = r^2.$$

De $X_u \wedge X_v = r(S_t \cos v + S_n \sin v) E_3 - r \sin v E_2 - r \cos v E_1$, segue

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \|X_u \wedge X_v\|^2 \\ &= r^2 + r^2 (S_t \cos v + S_n \sin v)^2. \end{aligned}$$

Quanto às derivadas de segunda ordem de X , temos

$$X_{uu} = S_t' E_1 + S_n' E_2, \quad X_{uv} = -r' \sin v E_1 + r' \cos v E_2, \quad X_{vv} = -r \cos v E_1 - r \sin v E_2.$$

onde $(')$ indica derivada em relação a u .

Como $N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}}$, vale $X_u \wedge X_v = \sqrt{EG - F^2} N$. Daí, tiramos

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, X_u \wedge X_v \rangle &= \sqrt{EG - F^2} e, \\ \langle X_{uv}, X_u \wedge X_v \rangle &= \sqrt{EG - F^2} f, \\ \langle X_{vv}, X_u \wedge X_v \rangle &= \sqrt{EG - F^2} g.\end{aligned}$$

. Vamos calcular os produtos internos acima:

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, X_u \wedge X_v \rangle &= -r(S'_t \cos v + S'_n \sin v), \\ \langle X_{uv}, X_u \wedge X_v \rangle &= rr' \sin v \cos v - rr' \sin v \cos v = 0, \\ \langle X_{vv}, X_u \wedge X_v \rangle &= r^2.\end{aligned}$$

Com isso obtemos:

$$\begin{aligned}r^{-1} \sqrt{EG - F^2} e &= -S'_t \cos v - S'_n \sin v, \\ f &= 0, \\ r^{-1} \sqrt{EG - F^2} g &= r.\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}D &:= r^{-1} \sqrt{EG - F^2} (Eg + eG), \\ &= r(S_t^2 + S_n^2 + 1) - r^2(S'_t \cos v + S'_n \sin v).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Como $H = \frac{Eg + Ge}{(EG - F^2)}$ e o vetor curvatura média \vec{H} é HN encontramos:

$$\langle \vec{H}, T \rangle = \frac{Eg + Ge}{(EG - F^2)^{3/2}} \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle.$$

Da Equação (3.21), podemos reescrever a equação acima:

$$\langle \vec{H}, T \rangle = \frac{rD}{(EG - F^2)^2} \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle$$

. Assim,

$$P(u, v) = (EG - F^2)^2 (\langle \vec{H}, T \rangle + 1) = rD \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle + (EG - F^2)^2.$$

Para mostrar que $P(u, v)$ é um polinômio trigonométrico em v de ordem no máximo 4, vamos analisar os termos D , $\langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle$ e $(EG - F^2)^2$ que compõem P . Começemos calculando D :

$$\begin{aligned} D &= r((a')^2 + (b')^2 + (r')^2 + 1 + 2r'a' \cos v + 2r'b' \sin v) - r^2(a'' \cos v + b'' \sin v + r'') \\ &= r[(a')^2 + (b')^2 + (r')^2 + 1] - r^2r'' + (2rr'a' - r^2a'') \cos v + (2rr'b' - r^2b'') \sin v. \end{aligned}$$

Segue que D gera termos de no máximo ordem 1 para o polinômio trigonométrico. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle &= r[(a' + r' \cos v) \cos v + (b' + r' \sin v) \sin v] \langle E_3, e_3 \rangle \\ &\quad - r[\sin v \langle E_2, e_3 \rangle + \cos v \langle E_1, e_3 \rangle] \\ &= r(a' \cos v + b' \sin v + r') \langle E_3, e_3 \rangle - r[\sin v \langle E_2, e_3 \rangle + \cos v \langle E_1, e_3 \rangle]. \end{aligned}$$

também gera termos de no máximo ordem 1 para P . Por fim,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= r^2 + r^2(S_t \cos v + S_n \sin v)^2 \\ &= r^2 \left[1 + (a' \cos v + b' \sin v + r')^2 \right] \\ &= r^2 \left[1 + (a' \cos v + b' \sin v)^2 + 2r'(a' \cos v + b' \sin v) + (r')^2 \right] \\ &= r^2 \left[1 + (a')^2 \cos^2 v + 2a'b' \cos v \sin v + (b')^2 \sin^2 v + 2r'(a' \cos v + b' \sin v) \right. \\ &\quad \left. + (r')^2 \right] \\ &= r^2 \left[1 + \frac{(a')^2}{2} + \frac{(b')^2}{2} + (r')^2 + 2r'(a' \cos v + b' \sin v) + \frac{(a')^2 - (b')^2}{2} \cos(2v) \right. \\ &\quad \left. + a'b' \sin(2v) \right]. \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} (EG - F^2)^2 &= r^4 \left[1 + \frac{(a')^2}{2} + \frac{(b')^2}{2} + (r')^2 + 2r'(a' \cos v + b' \sin v) \right]^2 \\ &\quad + 2r^4 \left[1 + \frac{(a')^2}{2} + \frac{(b')^2}{2} + (r')^2 + 2r'(a' \cos v + b' \sin v) \right] \\ &\quad \left[\frac{(a')^2 - (b')^2}{2} \cos 2v + a'b' \sin 2v \right] \\ &\quad + r^4 \left(\frac{(a')^2 - (b')^2}{2} \cos 2v + \frac{a'b'}{2} \sin 2v \right)^2. \end{aligned}$$

Segue que $(EG - F^2)^2$ é uma combinação linear de produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com no máximo 4 fatores. Segue da Proposição 1.5 que $(EG - F^2)^2$ gera termos de no máximo ordem 4 para o polinômio trigonométrico. Logo, concluímos que $P(u, v)$ tem ordem no máximo 4 em v . Para mostrar que a ordem é exatamente 4, vamos encontrar os termos de ordem 4 de P . Estes virão do termo $(EG - F^2)^2$.

Os termos de $(EG - F^2)^2$ que envolvem produtos de $\sin(v)$ e $\cos(v)$ com 4 fatores seguem:

$$\begin{aligned}
 (EG - F^2)_{(4fat)}^2 &= r^4 \left[\frac{(a')^2 - (b')^2}{2} \cos 2v + \frac{a'b'}{2} \sin 2v \right]^2 \\
 &= r^4 \left[\left(\frac{(a')^2 - (b')^2}{2} \right)^2 \cos^2 2v + ((a')^2 - (b')^2) a'b' \cos 2v \sin 2v \right. \\
 &\quad \left. + (a'b')^2 \sin^2 2v \right] \\
 &= r^4 \left[\frac{((a')^2 - (b')^2)^2}{4} \left(\frac{\cos 4v + 1}{2} \right) + \frac{(a')^2 - (b')^2}{2} a'b' \sin 4v \right. \\
 &\quad \left. + (a'b')^2 \left(\frac{1 - \cos 4v}{2} \right) \right] \\
 &= r^4 \left[\frac{((a')^2 - (b')^2)^2 - 4(a')^2(b')^2}{8} \cos 4v + \frac{(a')^2 - (b')^2}{2} a'b' \sin 4v \right] + \\
 &\quad (\text{termos de ordem } 0).
 \end{aligned}$$

Portanto, $P(u, v)$ tem ordem 4 e os coeficientes de $\sin 4v$ e $\cos 4v$ são:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= r^4 \left[\frac{((a')^2 - (b')^2)^2 - 4(a')^2(b')^2}{8} \right] \\
 B_4 &= r^4 \left[\frac{(a')^2 - (b')^2}{2} a'b' \right],
 \end{aligned}$$

De $A_4 = B_4 = 0$, implica

$$((a')^2 - (b')^2)^2 - 4(a')^2(b')^2 = 0 \quad \text{e} \quad ((a')^2 - (b')^2) a'b' = 0.$$

A partir dessas duas equações obtemos $(a'b')^4 = 0$. Logo $a' = 0$ ou $b' = 0$. Substituindo $a' = 0$ na primeira equação, obtemos $b' = 0$; substituindo $b' = 0$ na primeira equação, chegamos a

$a' = 0$. Logo, $a' = b' = 0$ (ou seja, a e b são constantes). Daí segue

$$\begin{aligned} D &= r[(r')^2 + 1] - r^2 r'' \\ \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle &= r r' \langle E_3, e_3 \rangle - r [\text{sen } v \langle E_2, e_3 \rangle + \text{cos } v \langle E_1, e_3 \rangle] \\ (EG - F^2)^2 &= r^4 (1 + (r')^2)^2. \end{aligned}$$

Os termos de ordem 1 de P vêm do produto $rD \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle$ e os coeficientes desses termos são

$$\begin{aligned} A_1 &= r^3 \langle E_1, e_3 \rangle (r'' r^2 - (r')^2 - 1) = 0, \\ B_1 &= r^3 \langle E_2, e_3 \rangle (r'' r^2 - (r')^2 - 1) = 0, \end{aligned}$$

Podemos distinguir, então, duas possibilidades: $rr'' - (r')^2 - 1 = 0$ e $\langle E_1, e_3 \rangle \langle E_2, E_3 \rangle = 0$.

Se $rr'' - (r')^2 - 1 = 0$ temos $D = 0$ e resta $(EG - F^2)^2 = r^4 (1 + (r')^2)^2 \neq 0$. Contradição, pois $P \equiv 0$. Portanto, devemos ter $\langle E_1, e_3 \rangle = \langle E_2, e_3 \rangle = 0$, o que implica $e_0 = E_3 = e_3$.

Neste caso $\langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle = r r'$ e a equação final fica:

$$r^3 [r'^3 + r' + r(r'^4 + 2r'^2 - r r' + 1)] = 0, \quad (3.22)$$

Portanto, para Σ , temos exatamente a geometria de uma superfície de revolução cujo eixo é paralelo à direção de translação $T = e_3$. De fato, as circunferências estão em planos perpendiculares a e_3 e, como a e b são constantes, o centro $c(u)$ dos círculos é uma reta com a mesma direção de e_3 . A função $r(t)$ definida em (3.22) é a curva perfil (ou geratriz) dessa superfície. □

A seguir, temos um resumo da demonstração do teorema anterior com o objetivo de destacar os passos utilizados.

Resumo da demonstração. Pelo Lema 3.1, os círculos da folheação do sóliton de translação para o FICM devem ser paralelos e perpendiculares à direção de translação $T = e_3$. Assim, podemos tomar o referencial ortonormal constante $\{E_1, E_2, E_3\}$ e obter a parametrização X para Σ :

$$\begin{aligned} X(u, v) &= c(u) + r(u) (\text{cos } v E_1 + \text{sen } v E_2), \\ c(u) &= a(u) E_1 + b(u) E_2 + u E_3, \end{aligned}$$

A ideia da demonstração consiste em mostrar que podemos escrever a Equação (3.5) na forma

$$P(u, v) = A_0 + \sum_{m=1}^4 (A_m(u) \cos(mv) + B_m(u) \sin(mv)) \equiv 0,$$

e extrair informações do fato de os coeficientes A_m e B_m serem identicamente nulos. As etapas são as seguintes:

- De maneira análoga à demonstração do lema anterior, encontramos que P pode ser escrito como:

$$P(u, v) = rD \langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle + (EG - F^2)^2.$$

- Para mostrar que $P(u, v)$ é um polinômio trigonométrico em v de ordem no máximo 4, analisamos os termos que compõem P .
- Temos que D e $\langle X_u \wedge X_v, e_3 \rangle$ geram termos de no máximo ordem 1 e $(EG - F^2)^2$ gera termos de no máximo ordem 4
- Logo, $P(u, v)$ tem ordem no máximo 4 como polinômio trigonométrico em v . Para mostrar que a ordem é exatamente 4, encontramos os termos de ordem 4 de P , mostrando que eles não se anulam. Estes virão do termo $(EG - F^2)^2$.
- Ao igualar os coeficientes de ordem 4 a 0, nós encontramos que a e b constantes.
- Ao igualar os coeficientes de ordem 1 a 0, encontramos $e_0 = E_3 = e_3$
- Usando essas informações, a equação final dos sólitons de translação fica:

$$r^3 \left[r'^3 + r' + r(r'^4 + 2r'^2 - rr' + 1) \right] = 0, \quad (3.23)$$

- Portanto, para Σ , temos exatamente a geometria de uma superfície de revolução cujo eixo é paralelo à direção de translação $T = e_3$. A função $r(t)$ definida em (3.23) descreve a curva perfil (ou geratriz) dessa superfície.

3.4 Observações

Sólitons de translação para o fluxo do inverso da curvatura média dados por superfícies de rotação também foram considerados no artigo [18]. Como um dos resultados principais, os autores demonstram que não existem superfícies de rotação completas que descrevam tais sólitons.

De modo mais específico, através da análise do retrato de fase da equação diferencial ordinária associada à curva perfil da superfície, além da conclusão da não existência de superfícies completas, os autores também descrevem o comportamento da curva perfil da superfície de rotação. A saber, denotando por γ tal curva, então γ possui uma quantidade infinita de pontos singulares. Além disso, o comportamento assintótico de γ também é dado. Neste caso, existem para γ dois tipos de comportamento assintótico:

1. γ se aproxima do eixo y ortogonalmente;
2. γ tem o comportamento assintótico da curva $y = -\log(x)$.

A ausência desta propriedade geométrica, isto é, da completude geodésica, não é, no entanto, uma especificidade das superfícies de rotação. Já vimos no Capítulo 2 que as superfícies regradas são cilindros sobre cicloides, e sabemos que a cicloide possui um número infinito de pontos singulares. De modo mais geral, os mesmos autores provam no artigo [19] que não existem sólitons de translação completos para o inverso da curvatura média.

Finalmente, podemos definir de maneira inteiramente análoga o fluxo do inverso da curvatura média para hipersuperfícies em \mathbb{R}^n , bem como os seus sólitons de translação. No contexto das cíclicas, são consideradas hipersuperfícies folheadas por esferas contidas em hiperplanos paralelos também no artigo [18]. A conclusão é que tais sólitons devem ser hipersuperfícies de revolução. A prova, no entanto, baseia-se no princípio do máximo para equações diferenciais parciais elípticas e no método da reflexão de Alexandrov.

Bibliografia

- [1] Alencar, H., Santos, W., and Silva Neto, G. (2020). *Geometria Diferencial das curvas no \mathbb{R}^2* . Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção Coetâneas de Matemática.
- [2] Altschuler, S. J. and Wu, L. F. (1994). Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2(1):101–111.
- [3] Bray, H. L. and Neves, A. (2004). Classification of prime 3-manifolds with yamabe invariant greater than $\mathbb{R}P^3$. *Ann. Math.*, 159(1):407–424.
- [4] Brendle, S., Hung, P.-K., and Wang, M.-T. (2016). A minkowski inequality for hypersurfaces in the anti-de sitter–schwarzschild manifold. *Commun. Pure Appl. Math.*, 69(1):124–144.
- [5] Bueno, H. P., Ercole, G., Rodrigues, H. C., and Zumpano, A. (2021). *Ortogonalidade: um passeio pela Análise Funcional*. SBM.
- [6] Castro, I. and Lerma, A. M. (2017). Lagrangian homothetic solitons for the inverse mean curvature flow. *Results Math.*, 71(3–4):1109–1125.
- [7] Clutterbuck, J., Schnürer, O. C., and Schulze, F. (2007). Stability of translating solutions to mean curvature flow. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 29(3):281–293.
- [8] do Carmo, M. P. (2010). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Textos Universitários, 4ª Edição.
- [9] Drugan, G., Lee, H., and Wheeler, G. (2016). Solitons for the inverse mean curvature flow. *Pac. J. Math.*, 284(2):309–326.
- [10] Gerhard, C. (1990). Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. *J. Differ. Geom.*, 32(1):299–314.
- [11] Guan, P. and Li, J. (2009). The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains. *Adv. Math.*, 221(5):1725–1732.
- [12] Hieu, D. T. and Hoang, N. M. (2009). Ruled minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with density e^z . *Pacific J. Math.*, 243(2):277–285.
- [13] Huisken, G. and Ilmanen, T. (1997). The riemannian penrose inequality. *Int. Math. Res. Not.*, pages 1045–1058.
- [14] Huisken, G. and Ilmanen, T. (2001). The inverse mean curvature flow and the riemannian penrose inequality. *J. Differ. Geom.*, 59(3):353–437.

-
- [15] Huisken, G. and Ilmanen, T. (2008). Higher regularity of the inverse mean curvature flow. *J. Differ. Geom.*, 80(3):433–451.
- [16] Huisken, G. and Sinestrari, C. (1999). Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 8(1):1–14.
- [17] Kim, D. and Pyo, J. (2017). Translating solitons foliated by spheres. *Internat. J. Math.*, 28(1):1750006, 11.
- [18] Kim, D. and Pyo, J. (2019). Translating solitons for the inverse mean curvature flow. *Results Math.*, 74(1):Art. 64, 28 pp.
- [19] Kim, D. and Pyo, J. (2020). Remarks on solitons for inverse mean curvature flow. *Math. Nachr.*, 293(12):2363–2369.
- [20] López, R. (2018). Some geometric properties of translating solitons in Euclidean space. *J. Geom.*, 109(3):Paper No. 40, 15.
- [21] López, R. and Perdomo, O. (2017). Minimal translation surfaces in Euclidean space. *J. Geom. Anal.*, 27(4):2926–2937.
- [22] Pólya, G. and Szegő, G. (1998). Polynomials and trigonometric polynomials. In *Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry*, Classics in Mathematics, pages 71–91. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [23] Smoczyk, K. (2000). Remarks on the inverse mean curvature flow. *Asian J. Math.*, 4(2):331–335.
- [24] Urbas, J. I. E. (1990). On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. *Math. Z.*, 205(3):355–372.