



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Dissertação de Mestrado

Viés na estimativa de Theil, Atkinson e no índice de dispersão para populações de mistura gama

por

Jackson Maíke Veiga de Assis

Brasília, 18 de novembro de 2025

Viés na estimativa de Theil, Atkinson e no índice de dispersão para populações de mistura gama

por

Jackson Maike Veiga de Assis

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como requisito para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vila Gabriel

Coorientador: Prof. Dr. Helton Saulo Bezerra dos Santos

Brasília, 18 de novembro de 2025

Dissertação submetida ao Programa de do Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Texto aprovado por:

Prof. Dr. Roberto Vila Gabriel

Orientador, PPGEST/UnB

Prof. Dr. Helton Saulo Bezerra dos Santos

Coorientador, PPGEST/UnB

Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti

MAT/UnB

Profª. Dra. Cecília Maria Vasconcelos Costa

Universidade do Minho, Portugal

We have not got the money, so we have got to think.

(Ernest Rutherford)

Para Fernanda.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos aos professores do PPGEST/UnB, em especial, aos professores Helton e Roberto por todos os conselhos e sacadas, as quais não teria a genialidade de deduzir; a Nandinha por ter me suportado todo esse tempo; e aos meus pais que sempre me apoiam. Registro, igualmente, meus agradecimentos aos servidores e colaboradores do Departamento de Estatística da UnB, pelo trabalho contínuo que torna possível o bom funcionamento do programa e o acolhimento aos estudantes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Estimadores obtidos pelo princípio de substituição (plug-in) são amplamente utilizados na mensuração da desigualdade, porém seu comportamento em amostras finitas pode ser sensivelmente afetado pela presença de heterogeneidade populacional. Esta dissertação analisou o viés em amostras finitas dos estimadores plug-in dos índices de Theil e de Atkinson, bem como da razão da variância pela média (VMR), sob a hipótese de que a população segue uma mistura finita de distribuições gama com parâmetro de taxa comum. A partir do teorema de independência proporção–soma de Mosimann e da relação estrutural entre as distribuições gama e Dirichlet, foi possível reescrever esses estimadores como funções de vetores Dirichlet e, com isso, deduzir expressões analíticas fechadas para seus valores esperados. Simulações de Monte Carlo e uma aplicação empírica corroboraram os resultados teóricos, evidenciando que a heterogeneidade da mistura induz viés sistemático, mesmo em tamanhos amostrais moderados. Os achados ressaltam a importância de considerar explicitamente a estrutura de mistura para obter estimativas de desigualdade mais precisas e inferências estatísticas mais robustas.

Palavras-chave: desigualdade; viés amostral; estimadores plug-in; misturas gama; estrutura Dirichlet–Gamma; Teorema de Mosimann; Theil e Atkinson; Monte Carlo.

Abstract

BIAS IN ESTIMATING THEIL, ATKINSON, AND DISPERSION INDICES FOR GAMMA MIXTURE POPULATIONS

Plug-in estimators are widely used in the measurement of inequality, yet their finite-sample behavior can be substantially affected by population heterogeneity. This dissertation examined the finite-sample bias of plug-in estimators for the Theil and Atkinson indices, as well as for the variance-to-mean ratio (VMR), under the assumption that the population follows a finite mixture of gamma distributions with a common rate parameter. Based on Mosimann's proportion–sum independence theorem and on the structural relationship between the Gamma and Dirichlet distributions, these estimators were rewritten as functions of Dirichlet random vectors, which enabled the derivation of closed-form expressions for their expected values. Monte Carlo simulations and an empirical application corroborated the theoretical results, showing that mixture-induced heterogeneity generates systematic bias even in moderate sample sizes. These findings highlight the importance of explicitly accounting for mixture structure in order to obtain more accurate inequality estimates and more robust statistical inference.

Keywords: inequality; sampling bias; plug-in estimators; gamma mixtures; Dirichlet–Gamma structure; Mosimann's Theorem; Theil and Atkinson; Monte Carlo.

Sumário

1	Introdução	1
2	Origem e evolução das medidas de desigualdade	5
2.1	Theil e Entropia Generalizada	7
2.2	O índice de Atkinson	9
2.3	Relação entre os índices	10
2.4	O índice de dispersão	11
3	Estimadores e Correção do Viés	13
3.1	Métodos de obtenção de estimadores	13
3.2	Estimadores do tipo razão	14
3.3	A importância de corrigir o viés	16
4	Revisão da Literatura	18
5	Fundamentação Teórica	25
5.1	Mistura de Distribuições Gama	25
5.2	Distribuição de Dirichlet	30
5.3	Teorema de Mosimann	31
5.4	Índices de Theil, de Atkinson e de dispersão	33
5.4.1	Índice de Theil	33

5.4.2	Índice de Atkinson	35
5.4.3	Índice de dispersão	37
5.5	Obtenção dos estimadores	38
5.6	Dedução dos vieses	39
5.6.1	Viés do estimador do índice de Theil	39
5.6.2	Viés do estimador do índice de Atkinson	44
5.6.3	Viés do estimador do índice de dispersão	49
5.7	O papel do EQM na análise de viés	52
5.8	Métodos de Monte Carlo	53
6	Estudo de Simulação	56
6.1	Estimação dos Parâmetros da Mistura Gama	58
6.2	Dificuldades de Implementação Computacional	58
6.3	Resultados da Simulação	60
6.3.1	Heterogeneidade populacional	60
6.3.2	Tamanho amostral	62
7	Aplicação em Dados Reais	66
8	Conclusões	70
A	Funções Especiais	73
A.1	Função Gama	73
A.2	Função Digama	74
A.3	Função Beta Multivariada	74
B	Provas e Resultados Auxiliares	75
B.1	Demonstração da identidade $\mathbb{E}[Z \log Z]$ para $Z \sim \text{Gama}(a, b)$	75
B.2	Lei da Esperança Total	76

B.3	Teorema Multinomial	77
B.4	Média de Potência	77
B.5	Teorema do Mapeamento Contínuo	78
B.6	Teorema de Tonelli	80
C	Resultados das simulações de Monte Carlo	81
D	Resumo Geral dos Índices, Estimadores e Vieses	85

Lista de Tabelas

7.1	Estimativas empíricas dos índices de desigualdade e correções analíticas de viés sob mistura gama ajustada ao PIB per capita global.	68
C.1	Resultados das simulações de Monte Carlo para cada índice e para cada combinação de α_2 e n , apresentando o valor verdadeiro θ , a média das estimativas $\hat{\theta}$, o viés empírico $V(\hat{\theta})$, o erro quadrático médio e os erros-padrão do viés e do EQM, tanto para o estimador original quanto para o estimador corrigido. Os resultados referem-se ao cenário com $R = 1.000$ réplicas e $\alpha_1 = 0,5$	81
D.1	Estatística, estimador e viés analítico do índice de Theil-T.	85
D.2	Estatística, estimador e viés analítico do índice de Theil-L.	85
D.3	Estatística, estimador e viés analítico do índice de Atkinson com $\varepsilon = 1$	86
D.4	Estatística, estimador e viés analítico do índice de Atkinson com $\varepsilon \rightarrow \infty$	86
D.5	Estatística, estimador e viés analítico do índice de dispersão (VMR).	86

Lista de Figuras

5.1	Relações entre distribuições do tipo Mistura Gama (Vila e Saulo (2025a)).	26
6.1	Viés (à esquerda) e Erro Quadrático Médio (EQM) (à direita) dos índices em função do parâmetro α_2 para $\alpha_1 = 0,5$ e $n = 15$	61
6.2	Viés (à esquerda) e Erro Quadrático Médio (EQM) (à direita) dos índices em função do tamanho da amostra n para $\alpha_1 = 0,5$ e $\alpha_2 = 2,0$	63
7.1	Distribuição do PIB per capita (em milhares de dólares) dos países da América do Norte e da Oceania em 2023.	66
7.2	Distribuição empírica do PIB per capita (em milhares de dólares) dos países da América do Norte e da Oceania em 2023, evidenciando a bimodalidade capturada pela curva ajustada.	67

Capítulo 1

Introdução

A mensuração da desigualdade desempenha papel central nas ciências sociais aplicadas, e índices como os de Gini, Theil e Atkinson tornaram-se referências para quantificar a concentração de renda, consumo e riqueza. A construção dessas medidas não é neutra, uma vez que cada índice se baseia em escolhas conceituais sobre o que deve ser considerado desigualdade e sobre como as diferenças entre indivíduos devem ser ponderadas. Por isso, a literatura clássica concentrou-se na discussão de seus fundamentos éticos e axiomáticos, enfatizando o conteúdo normativo que sustenta sua formulação (Sen, 1973; Atkinson et al., 1970). Uma apresentação sistemática dessas bases pode ser encontrada em Chakravarty (2009). De forma paralela, o debate passou gradualmente a incorporar aspectos inferenciais, com atenção crescente ao comportamento dos estimadores em amostras finitas e sob diferentes formas de heterogeneidade populacional.

Dentre os índices que incorporam, de forma explícita, critérios normativos para a avaliação da desigualdade, destacam-se as contribuições de Theil e de Atkinson, uma vez que ambos incorporam princípios normativos claros sobre aversão à desigualdade e sensibilidade a diferentes regiões da distribuição (Bourguignon, 1979; Cowell, 2000). Além disso, eles também respeitam propriedades fundamentais, como a invariância a mudanças proporcionais e o princípio de transferências (Pigou-Dalton), o que os torna úteis para comparações entre grupos e para aná-

lises de bem-estar social (Shorrocks, 1980)⁽¹⁾. No entanto, suas estruturas conceituais não são idênticas, enquanto os índices de Theil permitem uma decomposição aditiva rigorosa entre e dentro de grupos, o índice de Atkinson, embora também possibilite análises de componentes, baseia-se no rendimento equivalente igualmente distribuído e não admite a mesma forma exata de decomposição.

Apesar de apresentar propriedades desejáveis, esses índices apresentam, em sua formulação, razões e transformações não lineares, o que dificulta uma análise estatística rigorosa em amostras finitas. A maior parte da literatura assume populações homogêneas, modeladas por distribuições contínuas específicas (como a lognormal, a Pareto ou a Gama), de modo que o impacto da heterogeneidade estrutural ou de modelos de mistura sobre o desempenho dos estimadores permanece relativamente pouco explorado.

Quando se adota a hipótese de homogeneidade populacional, entre as distribuições contínuas positivas empregadas na análise de desigualdade, a Distribuição Gama destaca-se como uma escolha particularmente conveniente. Sua forma funcional pertence à família exponencial e admite momentos em forma fechada, o que facilita o tratamento analítico de medidas baseadas em razões e transformações logarítmicas, como os índices de Theil e Atkinson. Além disso, seus parâmetros de forma e de taxa conferem flexibilidade para representar diferentes graus de dispersão e assimetria, o que explica sua ampla aplicação empírica (Salem e Mount, 1974; McDonald e Jensen, 1979; Bourguignon, 1979).

Entretanto, o modelo gama simples pressupõe homogeneidade populacional, hipótese frequentemente insustentável quando o fenômeno em estudo resulta da composição de subgrupos com características distintas. Nesses casos, a distribuição observada pode apresentar multimodalidade ou caudas mais pesadas do que aquelas capturadas por uma única gama. Como destacam Chotikapanich e Griffiths (2008), modelos de mistura de distribuições gama oferecem,

⁽¹⁾As propriedades mencionadas referem-se às características específicas dos índices de Theil e Atkinson. Na sequência, discuto critérios axiomáticos mais gerais, como monotonicidade, anonimato, invariância a mudanças proporcionais e diferentes noções de decomponibilidade, que passaram a orientar a avaliação teórica de medidas de desigualdade.

nesse contexto, uma alternativa mais flexível, preservando a interpretabilidade paramétrica e acomodando heterogeneidade estrutural.

Esse aspecto é particularmente relevante no âmbito inferencial. Mesmo sob a Distribuição Gama simples, estudos recentes demonstram que estimadores comumente empregados na mensuração dos índices de desigualdade, em especial os de Gini, Theil e Atkinson, podem apresentar viés não desprezível em amostras finitas (Deltas, 2003; Vila e Saulo, 2025b; Vila e Saulo, 2025c; Shih, 2025). Se o viés já emerge em populações homogêneas, sua magnitude tende a aumentar diante de heterogeneidade estrutural, dada a natureza não linear dessas medidas. Desse modo, estudar o comportamento dos estimadores sob modelos de mistura torna-se uma necessidade metodológica, e não apenas uma extensão técnica.

A amplificação desse fenômeno em contextos de heterogeneidade tem sido amplamente documentada. Diversos trabalhos mostram que, para várias medidas, a heterogeneidade populacional intensifica o viés em amostras finitas, efeito que depende do índice considerado e do contraste entre componentes. Mesmo quando a Distribuição de referência é Gama, misturas finitas introduzem distorções adicionais decorrentes da não linearidade estrutural dessas medidas. Esse efeito já foi caracterizado analiticamente para o coeficiente de Gini, com a demonstração de que o viés amostral cresce à medida que aumenta a divergência entre os componentes da mistura, e com a proposição de estimadores corrigidos que apresentam melhor desempenho em simulações de Monte Carlo (Vila e Saulo, 2025a). Em conjunto, esses resultados reforçam que ignorar a heterogeneidade populacional não é apenas uma simplificação da modelagem, mas um fator que compromete diretamente a validade inferencial. Ao mesmo tempo, indicam que a análise do viés sob modelos de mistura não se limita ao caso do Gini, sugerindo a necessidade de estender a investigação para outras medidas, como os índices de Theil e Atkinson.

Inspirado por esse avanço, o presente trabalho insere-se nesse esforço recente de caracterização analítica do viés. Busca-se investigar o comportamento dos estimadores dos índices de Theil, de Atkinson e do índice de dispersão (VMR) em populações cuja distribuição é representada por uma mistura finita de distribuições gama com parâmetro de taxa comum.

No âmbito teórico, empregam-se ferramentas probabilísticas baseadas no teorema da independência proporção-soma de Mosimann e nas propriedades da distribuição Dirichlet para derivar expressões fechadas para o valor esperado dos estimadores e, conseqüentemente, avaliar analiticamente o viés introduzido pela heterogeneidade estrutural da mistura.

Em seguida, realizam-se experimentos de simulação de Monte Carlo com o objetivo de avaliar empiricamente a precisão das deduções teóricas, variando o número de componentes da mistura, o contraste entre seus parâmetros e o tamanho amostral. Essa análise possibilita comparar, de forma sistemática, o desempenho dos estimadores amostrais e de suas versões corrigidas em termos de viés e erro quadrático médio, tanto sob a Distribuição Gama simples quanto sob misturas finitas.

Por fim, desenvolve-se uma aplicação empírica com dados reais, na qual distribuições de mistura são ajustadas a um conjunto de dados socioeconômicos (PIB per capita). Essa etapa permite avaliar a aderência dos modelos propostos e a relevância prática das correções de viés, complementando as análises teórica e de simulação. Os resultados obtidos evidenciam o potencial de aplicação das correções derivadas e sua utilidade em contextos socioeconômicos reais.

Acredita-se que os resultados alcançados contribuam para um entendimento mais profundo das limitações dos estimadores tradicionais de desigualdade e forneçam fundamentos teóricos e empíricos para o desenvolvimento de metodologias estatísticas mais robustas frente à heterogeneidade populacional.

Capítulo 2

Origem e evolução das medidas de desigualdade

A preocupação com a desigualdade na distribuição de renda remonta às origens da estatística econômica e social no final do século XIX e início do século XX. Embora discussões sobre justiça distributiva sejam muito mais antigas, foi apenas com o desenvolvimento das ferramentas estatísticas modernas que se tornou possível quantificar a desigualdade de forma sistemática e comparável.

O primeiro avanço significativo nessa direção ocorreu com o trabalho de Gini (1912), que introduziu uma medida baseada na diferença média absoluta entre todas as combinações de rendas individuais. O coeficiente de Gini rapidamente se consolidou como a medida mais conhecida e amplamente aplicada, em razão de sua interpretação intuitiva, simplicidade computacional e aplicabilidade empírica.

Ao longo das décadas seguintes, no entanto, diversas limitações do coeficiente de Gini foram sendo reconhecidas, especialmente no que diz respeito à decomposição entre grupos e à ausência de fundamentação normativa explícita. Essas limitações motivaram o surgimento de novas medidas, capazes de capturar diferentes aspectos da desigualdade.

Uma dessas medidas é o índice proposto por Theil (1967), que incorporou conceitos da te-

oria da informação ao definir a desigualdade como uma perda de entropia em relação a uma situação de equipartição. Sua principal contribuição foi permitir a decomposição aditiva da desigualdade em componentes intra e intergrupos, propriedade altamente valorizada em estudos comparativos. Outra medida que merece destaque é o índice desenvolvido por Atkinson et al. (1970), o qual introduziu uma inovação conceitual importante ao incluir explicitamente uma *função de utilidade social*⁽¹⁾ e um parâmetro de aversão à desigualdade. Diferentemente das medidas puramente descritivas, o índice de Atkinson permite ao analista escolher o grau de sensibilidade à desigualdade em diferentes partes da distribuição, tornando-o uma medida normativamente orientada.

Com o avanço dessas formulações, a literatura passou a buscar critérios mais gerais para avaliar a consistência teórica das medidas de desigualdade, estabelecendo as bases da abordagem axiomática. A partir dos anos 1980, essa discussão consolidou-se com os trabalhos de Cowell (1980) e Shorrocks (1983), que sistematizaram propriedades fundamentais como monotonicidade, invariância a mudanças proporcionais, decomponibilidade e anonimato. A propriedade de monotonicidade assegura que transferências progressivas de renda, das unidades mais ricas para as mais pobres, devem reduzir o valor do índice de desigualdade, refletindo uma resposta coerente do indicador a alterações na distribuição. A invariância a mudanças proporcionais estabelece que multiplicar todas as rendas por uma constante positiva não modifica o grau de desigualdade, pois o indicador depende apenas das relações relativas entre rendas e não de seus níveis absolutos. A decomponibilidade exige que a desigualdade total possa ser expressa como a soma da desigualdade dentro dos grupos e da desigualdade entre grupos, permitindo identificar a origem das disparidades em termos de contribuições internas e externas. Por fim, o anonimato garante que o índice seja insensível à identidade dos indivíduos, dependendo ape-

⁽¹⁾A função de utilidade social agregada expressa o bem-estar coletivo como uma combinação (geralmente aditiva) das utilidades individuais, refletindo juízos de valor normativos sobre equidade e aversão à desigualdade. Em sua formulação clássica, Atkinson supõe uma função do tipo $W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(y_i)$, em que $u(y_i)$ é a utilidade do indivíduo i e y_i sua renda. A forma funcional $u(y) = \frac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$ incorpora o parâmetro de aversão à desigualdade ε , determinando a sensibilidade do bem-estar social às rendas mais baixas (Atkinson et al., 1970; Cowell, 1980).

nas dos valores de renda observados, de modo que permutações na ordenação dos rendimentos não alterem o resultado da medida. Essas propriedades se tornaram critérios centrais para a avaliação da qualidade de um indicador.

Mais recentemente, com o avanço de métodos computacionais e da modelagem estatística paramétrica, estudos têm se voltado para aspectos inferenciais dessas medidas, como viés, variância e consistência dos estimadores, sobretudo em amostras finitas. Trabalhos como os de Chotikapanich e Griffiths (2008) e de Vila e Saulo (2025a) têm contribuído significativamente para esse campo, especialmente ao considerar populações complexas, como aquelas modeladas por misturas de distribuições gama. Assim, as medidas de desigualdade evoluíram de ferramentas puramente descritivas para instrumentos analíticos sofisticados, com aplicações em políticas públicas, avaliação de bem-estar e comparação entre grupos sociais, exigindo atenção tanto à sua fundamentação teórica quanto às suas propriedades estatísticas.

2.1 Índice de Theil e Entropia Generalizada

O índice proposto por Theil (1967) baseia-se no conceito de entropia de Shannon e mede a desigualdade como uma perda de informação em relação à distribuição de perfeita igualdade. Sua forma populacional é dada por

$$T_T = \mathbb{E} \left[\frac{Y}{\mu} \log \left(\frac{Y}{\mu} \right) \right], \quad (2.1)$$

em que Y é uma variável aleatória positiva e $\mu = \mathbb{E}(Y)$ representa a média populacional.

O índice assume valor nulo sob perfeita igualdade ($Y = \mu$) e aumenta conforme cresce a dispersão relativa entre as observações. Seu valor é sempre não negativo e não possui limite superior fixo, podendo aumentar indefinidamente à medida que se intensifica a concentração da variável analisada.

Outro caso, associado à mesma estrutura funcional, é o índice *Theil-L*, também conhecido

como *desvio logarítmico médio*, definido por

$$T_L = \mathbb{E} \left[\log \left(\frac{\mu}{Y} \right) \right]. \quad (2.2)$$

Assim como T_T , o índice T_L é nulo sob perfeita igualdade e cresce com o aumento da desigualdade, diferindo, entretanto, em sua sensibilidade, pois T_L é mais responsivo às variações nas menores rendas, já T_T enfatiza as discrepâncias entre os valores mais elevados. Dessa forma, ambos captam aspectos complementares da dispersão relativa da variável analisada.

Uma forma de unificar essas duas medidas é enquadrá-las na classe das *medidas de Entropia Generalizada* (GE), cuja definição populacional é

$$\text{GE}(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)} \left[\mathbb{E} \left(\frac{Y}{\mu} \right)^\alpha - 1 \right], \quad \alpha \neq 0, 1.$$

O parâmetro α atua como um coeficiente de sensibilidade à desigualdade e pode assumir qualquer valor real distinto de 0 e 1, sendo usualmente considerado $\alpha > 0$. Valores menores que 1 tornam a medida mais sensível às variações na parte inferior da distribuição, enquanto valores maiores que 1 acentuam o peso das observações mais elevadas. Os casos-limite são dados por

$$\text{GE}(0) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{GE}(\alpha) = T_L, \quad (2.3)$$

$$\text{GE}(1) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{GE}(\alpha) = T_T.$$

Essa formulação unificada evidencia a conexão estrutural entre os índices de Theil e a entropia generalizada, permitindo comparações teóricas sob diferentes graus de sensibilidade à desigualdade. Para uma discussão detalhada dessa classe de medidas e de suas propriedades, ver Bellù e Liberati (2006) e Sitthiyot e Holasut (2020).

2.2 O índice de Atkinson

O índice proposto por Atkinson et al. (1970) baseia-se em uma abordagem normativa explícita, na qual o bem-estar social é avaliado por meio de uma função de utilidade agregada. Para um parâmetro de aversão à desigualdade $\varepsilon \geq 0$, sua forma populacional é definida por

$$A(\varepsilon) = 1 - \left[\frac{\mathbb{E}(Y^{1-\varepsilon})}{\mu^{1-\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \neq 1, \quad (2.4)$$

No caso limite $\varepsilon \rightarrow 1$, obtém-se a forma logarítmica

$$A(1) = 1 - \exp\left(-\mathbb{E}\left[\log\left(\frac{\mu}{Y}\right)\right]\right) = 1 - \exp(-T_L). \quad (2.5)$$

Para $\varepsilon \rightarrow \infty$, o índice converge para

$$A(\infty) = 1 - \frac{y_{\min}}{\mu}, \quad (2.6)$$

em que y_{\min} representa o menor valor possível de Y . Esse caso limite corresponde ao denominado *relative maximin index* e decorre da dominância das potências negativas para níveis extremos de aversão à desigualdade (veja Atkinson et al., 1970 para a formulação original do índice e Chakravarty, 2009 para a caracterização do limite). Para distribuições contínuas positivas cujo suporte tem ínfimo zero, tem-se $y_{\min} = 0$ e, portanto, $A(\infty) = 1$. Esse caso expressa uma situação de *avaliação extrema da desigualdade*, em que o bem-estar social passa a depender apenas da renda do indivíduo mais pobre (Sitthiyot e Holasut, 2020).

O parâmetro ε atua como coeficiente de aversão à desigualdade, sendo que valores baixos (ε próximo de 0) indicam menor sensibilidade às rendas inferiores, enquanto valores elevados refletem maior preocupação com os estratos de menor renda. O índice $A(\varepsilon)$ varia no intervalo $[0, 1)$, sendo nulo sob perfeita igualdade ($Y = \mu$) e aproximando-se de 1 à medida que a concentração de renda se intensifica. Seu valor representa a *proporção da renda média que a sociedade*

estaria disposta a renunciar para alcançar uma distribuição perfeitamente igualitária com o mesmo nível de bem-estar social.

2.3 Relação entre os índices

Embora o índice de Atkinson seja derivado de uma abordagem normativa distinta daquela que fundamenta os índices GE, existe uma relação funcional direta entre ambos. Conforme demonstra Cowell (2000, Seção 3.4), para $\varepsilon > 0$, o índice de Atkinson com parâmetro de aversão à desigualdade ε pode ser obtido a partir do índice $GE(\alpha)$, com $\alpha = 1 - \varepsilon$, segundo a transformação

$$A(\varepsilon) = 1 - [\varepsilon(\varepsilon - 1) GE(1 - \varepsilon) + 1]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \neq 1,$$

e, no caso limite $\varepsilon = 1$,

$$A(1) = 1 - e^{-GE(0)},$$

como evidenciado ao combinar as identidades (2.3) e (2.5).

Essa correspondência revela que, embora os dois índices pertençam a classes conceituais distintas, o de Atkinson, enraizado em uma função explícita de bem-estar social, e o de Entropia Generalizada, derivado de propriedades estatísticas de dispersão, ambos são ordinalmente equivalentes sob a restrição $\alpha = 1 - \varepsilon$. Isso significa que as duas famílias de medidas produzem a mesma ordenação das distribuições em termos de desigualdade, diferindo apenas em sua escala e interpretação normativa.

Além disso, a relação entre os parâmetros ε e α permite identificar casos particulares de grande relevância. Para $\varepsilon > 0$, a correspondência funcional $\alpha = 1 - \varepsilon$ assegura uma equivalência ordinal entre o índice de Atkinson e as medidas de Entropia Generalizada. Entretanto, no caso-limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se $A(0) \equiv 0$, de modo que não há ordenação informativa entre distribuições. Já para $\varepsilon = 1$, tem-se $\alpha = 0$, o que conecta o caso logarítmico do índice de Atkinson ao índice $GE(0)$ (ou Theil-L), mais sensível à base da distribuição.

Essa equivalência funcional é particularmente útil neste trabalho, pois permite analisar, dentro de um mesmo arcabouço teórico, o comportamento dos estimadores desses índices sob diferentes condições de heterogeneidade populacional. Em especial, a correspondência $\alpha = 1 - \varepsilon$ possibilita integrar resultados obtidos para as medidas de Entropia Generalizada, de natureza estatística, com interpretações normativas em termos de perda relativa de bem-estar social, conferindo unidade conceitual à análise empírica da desigualdade.

2.4 O índice de dispersão

Historicamente, antes mesmo do surgimento das medidas normativas de desigualdade, a análise da dispersão já ocupava papel central na estatística descritiva. Entre essas medidas, destaca-se a *razão da variância pela média* (*Variance-to-Mean Ratio* - VMR), também conhecida como *índice de dispersão*, utilizada desde o início do século XX em estudos de variabilidade e experimentação estatística. Na década de 1950, por exemplo, Bliss e Fisher (1953) empregaram essa razão de forma sistemática como critério para detectar *sobredispersão* em dados biológicos, situação em que a variância excede a média, consolidando, dessa forma, seu uso como medida geral de heterogeneidade. Desde então, o VMR tem sido amplamente aplicado em diversas áreas, como demografia, biologia e economia. Formalmente, é definido como

$$\text{VMR} = \frac{\sigma^2}{\mu},$$

em que σ^2 representa a variância populacional.

Diferentemente de medidas de desigualdade de caráter normativo, como o índice de Atkinson, ou de medidas axiomáticamente estruturadas, como os índices de Theil, o VMR não incorpora pressupostos éticos nem princípios de bem-estar social⁽²⁾. Ele fornece uma quantifi-

⁽²⁾Os axiomas de bem-estar expressam princípios normativos gerais sobre equidade, como simetria, eficiência de Pareto e o princípio de transferências de Pigou-Dalton, que inspiraram o desenvolvimento das propriedades axiomáticas das medidas de desigualdade apresentadas no início deste capítulo (Pigou, 1920; Dalton, 1920; Atkinson et al., 1970; Sen, 1973; Shorrocks, 1983). Essas propriedades se tornaram critérios fundamentais para a consistência e a comparabilidade entre diferentes indicadores (Cowell, 1980).

cação estritamente estatística da dispersão em torno da média e, por essa razão, é amplamente utilizado em estatística aplicada, especialmente em estudos de desigualdade e na modelagem de heterogeneidade entre unidades observacionais.

Todavia, por se tratar de um estimador do tipo razão, o estimador amostral do VMR pode apresentar viés de expectativa, mesmo sob distribuições simples como a Distribuição Gama, conforme demonstrado por Shih (2025). Em populações mais complexas, como aquelas modeladas por misturas de distribuições gama, esse viés tende a se intensificar, pois a variância populacional passa a ser uma combinação não linear de componentes heterogêneos, o que amplia a discrepância entre a razão das médias e a média das razões.

Até este ponto, foram apresentadas as principais medidas de desigualdade sob suas perspectivas conceitual, normativa e axiomatizada. Contudo, ao se aplicar essas medidas a dados amostrais, surgem desafios de natureza estatística que extrapolam sua formulação teórica. Em particular, é necessário compreender como tais índices se comportam enquanto estimadores, avaliando suas propriedades de viés, variância e consistência. As seções seguintes abordam esses aspectos, discutindo a estrutura dos estimadores do tipo razão e a importância de se corrigir o viés amostral em contextos realistas.

Capítulo 3

Estimadores e Correção do Viés

3.1 Métodos de obtenção de estimadores

A inferência estatística dispõe de diferentes princípios para a obtenção de estimadores para os parâmetros de uma distribuição. A partir desses princípios derivam-se os métodos de estimação correspondentes, entre os quais se destacam o dos momentos, o da máxima verossimilhança e o dos mínimos quadrados, que constituem a base da estimação paramétrica clássica.

O *método dos momentos* (MM), formalmente apresentado por Pearson (1894), consiste em igualar momentos populacionais teóricos aos respectivos momentos amostrais, obtendo-se os estimadores pela solução do sistema resultante. Trata-se de um procedimento simples e de interpretação intuitiva, embora possa produzir estimadores ineficientes ou até inexistentes em modelos complexos ou de alta dimensionalidade.

Já o *método da máxima verossimilhança* (MV), proposto por Fisher (1922), fundamenta-se na maximização da função de verossimilhança $L(\theta | y)$, fornecendo estimadores com propriedades assintóticas desejáveis, como consistência, eficiência e normalidade assintótica. Apesar dessas vantagens, a aplicação da MV pode se tornar inviável em distribuições compostas ou quando a função de verossimilhança é analiticamente intratável, situação comum em modelos de mistura ou com múltiplos parâmetros de forma.

Por fim, o *método dos mínimos quadrados* (MQ), originalmente proposto por Legendre (1806) e fundamentado teoricamente por Gauss (1809), baseia-se na minimização da soma dos quadrados dos desvios entre valores observados e esperados, sendo amplamente empregado em modelos lineares e de regressão. Embora extremamente útil em contextos paramétricos, sua aplicação direta à estimação de medidas de desigualdade não é adequada, pois tais medidas não se originam de um modelo explicativo no sentido tradicional, mas de funcionais não lineares da distribuição amostral.

Em contraste com métodos paramétricos clássicos, índices como os de Theil, Atkinson e o índice de dispersão (VMR) são definidos como funcionais da distribuição populacional da variável de interesse, refletindo propriedades estruturais da desigualdade. A estimação segue o *princípio de substituição* (*plug-in principle*), pelo qual o funcional é aplicado à distribuição empírica da amostra. Assim, se $T(F_Y)$ representa uma medida populacional de desigualdade definida como funcional da distribuição F_Y , o estimador correspondente é dado por

$$\hat{T} = T(F_n),$$

em que F_n é a distribuição empírica.

O princípio fornece estimadores de interpretação direta e, para índices como Theil e Atkinson, invariantes a mudanças proporcionais de escala, além de consistentes sob condições gerais (Vaart, 1998; Chen, 2020; Wasserman, 2022; Sen, 2022). Contudo, ele não garante ausência de viés em amostras finitas, uma vez que a substituição de médias ou momentos populacionais por estatísticas amostrais não preserva, em geral, a linearidade do funcional. Essa limitação é particularmente importante para estimadores do tipo razão, discutidos a seguir.

3.2 Estimadores do tipo razão

As medidas de desigualdade abordadas neste trabalho, os índices de Theil, o de Atkinson e o índice de dispersão, possuem estimadores que pertencem à classe dos estimadores do tipo razão.

De forma geral, um estimador razão é definido como a razão entre duas estatísticas de soma, isto é, entre funções lineares das observações da amostra (McDonald e Jensen, 1979; Shorrocks, 1983). Essa estrutura confere propriedades desejáveis, como interpretação intuitiva e invariância a transformações escalares, o que explica sua ampla adoção tanto em análises empíricas quanto em comparações internacionais, como os estudos baseados na *Poverty and Inequality Platform* (PIP) do *World Bank*, que permitem comparar níveis e tendências de desigualdade de renda entre países em diferentes períodos. Nesses contextos, a invariância escalar dos estimadores razão garante que as diferenças observadas entre países não dependam da unidade monetária utilizada, mas apenas da estrutura distributiva relativa (Sen, 1973; Cowell, 1980; World Bank, 2025).

Apesar de suas vantagens conceituais, a análise do viés desses estimadores é particularmente desafiadora em contextos amostrais, pois o numerador e o denominador são, em geral, estatísticas dependentes, e sua razão não possui valor esperado simples. Como destacado por Shih (2025), o valor esperado de uma razão de estatísticas geralmente não equivale à razão entre os respectivos valores esperados, o que gera viés amostral mesmo em distribuições simples. Esse fenômeno, ilustrado anteriormente no caso do VMR, constitui uma característica estrutural dos estimadores do tipo razão. Em populações heterogêneas ou modeladas por misturas de distribuições gama, o viés tende a se intensificar, uma vez que a dependência não linear entre os componentes da razão amplia a discrepância entre a média das razões e a razão das médias. Em contextos como o de misturas Gama com parâmetro de taxa comum, Vila e Saulo (2025b) mostram que a magnitude do viés pode ser significativa, especialmente em amostras de tamanho moderado, tornando inadequadas aproximações ingênuas baseadas em simetrias ou independência.

Por fim, em amostras finitas, a dependência entre o numerador e o denominador torna a derivação exata do valor esperado desses estimadores bastante desafiadora, uma vez que impede simplificações analíticas usuais nesse tipo de expressão. Assintoticamente, porém, sob normalidade conjunta, aproximações baseadas no método delta continuam aplicáveis, embora o viés de

ordem possa persistir. Para a derivação exata, o uso de ferramentas específicas, como a reparametrização em termos de variáveis Dirichlet e o teorema da independência proporção-soma de Mosimann (1962), os quais permitem expressar a razão como função de variáveis com propriedades analíticas mais controláveis, podem ser adotados. Ainda assim, a dedução de expressões exatas para o viés permanece tecnicamente complexa, exigindo abordagens teóricas cuidadosas e, muitas vezes, validação por meio de simulação de Monte Carlo.

3.3 A importância de corrigir o viés

Em análises empíricas, é amplamente documentado que estimadores de desigualdade podem apresentar viés quando aplicados a amostras finitas, sobretudo em contextos de alta heterogeneidade ou sob distribuições assimétricas. Deltas (2003), utilizando simulações de Monte Carlo, mostrou que o coeficiente de Gini, apesar de amplamente utilizado, tende a subestimar a desigualdade em amostras pequenas, evidenciando a importância de considerar correções mesmo para medidas consagradas.

Esse problema torna-se ainda mais relevante quando se trata de estatísticas não lineares e do tipo razão, como os índices de Theil e Atkinson, cuja estrutura funcional dos estimadores, baseada em logaritmos, potências e dependência da média amostral, amplifica os efeitos do viés (Cowell, 1980; McDonald e Jensen, 1979). A presença de heterogeneidade estrutural na população, como nas distribuições de mistura gama, intensifica esse efeito, uma vez que os estimadores passam a depender de combinações não lineares de componentes com momentos distintos. Nesse contexto, Vila e Saulo (2025b) demonstram que o valor esperado dos estimadores de Theil e de Atkinson difere dos respectivos valores populacionais, mesmo em amostras de tamanho moderado.

A presença de viés sistemático compromete comparações entre grupos, regiões ou períodos, podendo levar a conclusões equivocadas sobre o nível ou a evolução da desigualdade. Por essa razão, a literatura recente tem enfatizado a necessidade de compreender e corrigir esse viés, in-

tegrando a análise de desigualdade ao domínio mais amplo da inferência estatística. A evolução das medidas, portanto, não se restringe a seu conteúdo conceitual ou normativo, mas estende-se à investigação de suas propriedades amostrais, refletindo a maturidade de um campo que combina teoria econômica, axiomas de equidade e fundamentos estatísticos. Esse movimento marca a transição das medidas puramente descritivas para abordagens estatisticamente fundamentadas de mensuração da desigualdade, tema aprofundado no capítulo seguinte, por meio de uma revisão da literatura.

Capítulo 4

Revisão da Literatura

A mensuração da desigualdade ocupa papel central nas análises socioeconômicas contemporâneas, com implicações diretas para a avaliação de bem-estar, a formulação de políticas públicas e o estudo da eficiência distributiva (Sen, 1973; Cowell, 1980). Embora o conceito de desigualdade possua natureza normativa e multidimensional, sua quantificação requer instrumentos formais capazes de conciliar fundamentos éticos com propriedades estatísticas bem definidas (Chakravarty, 2009). Essa necessidade levou ao desenvolvimento de diferentes medidas e abordagens analíticas, resultando em uma literatura interdisciplinar que integra contribuições da economia, da estatística e da teoria da informação (Theil, 1967; McDonald e Jensen, 1979).

Entre as medidas clássicas de desigualdade, o coeficiente proposto por Gini (1912) ficou consolidado como uma das representações mais difundidas da concentração de renda. Seu apelo empírico decorre da formulação baseada em diferenças absolutas médias, o que favorece interpretações diretas e comparações simples entre populações. No entanto, à medida que a literatura passou a enfatizar critérios axiomáticos formais e requisitos de decomposição, tornou-se evidente que o Gini não atende plenamente a esses referenciais teóricos, sobretudo no que diz respeito à separação entre desigualdade intragrupo e intergrupo. Esse reconhecimento não invalida seu uso, mas explica por que abordagens posteriores buscaram capturar, de maneira mais estruturada, propriedades desejáveis para análises distributivas em contextos socioeconômicos

mais complexos.

Nesse processo de refinamento conceitual, os índices de Theil (Theil, 1967) e de Atkinson (Atkinson et al., 1970) assumiram papel central na literatura. Não se tratou apenas da proposição de novas medidas, mas da incorporação explícita de referenciais teóricos distintos, enquanto Theil formulou um índice derivado de princípios de entropia que conduz naturalmente à decomposição aditiva entre e dentro de grupos, Atkinson introduziu uma métrica ancorada em economia do bem-estar, na qual o parâmetro de aversão à desigualdade expressa julgamentos distributivos normativos. A adoção desses índices permitiu análises mais sensíveis às diferentes regiões da distribuição e alinhadas a fundamentos éticos transparentes. Além disso, suas formulações não lineares revelaram interações importantes entre estrutura populacional e comportamento inferencial, motivando uma série de investigações posteriores sobre propriedades estatísticas, vieses amostrais e desempenho sob diferentes modelos paramétricos e cenários de heterogeneidade.

Ambos os índices são funcionais não lineares que envolvem razões e transformações e são valorizados por suas propriedades axiomáticas, como a invariância a mudanças proporcionais e o princípio de transferências (Pigou-Dalton) (Pigou, 1920; Dalton, 1920). No caso dos índices de Theil, pertencentes à família $GE(\alpha)$, acrescenta-se ainda a decomponibilidade aditiva, propriedade que não se estende ao índice de Atkinson, cuja estrutura é baseada no rendimento equivalente igualmente distribuído (Sen, 1973; Cowell, 1980; Chakravarty, 2009). Tais características os tornaram ferramentas centrais em estudos comparativos de desigualdade intertemporal, regional ou entre grupos sociais (Shorrocks, 1980; Cowell, 2000). No entanto, apesar de sua sofisticação teórica, esses índices envolvem estruturas matemáticas mais complexas do que o Gini, o que dificulta análises estatísticas exatas, especialmente no que diz respeito ao comportamento dos estimadores em amostras finitas (Vila e Saulo, 2025b; Shih, 2025).

A literatura clássica sobre medidas de desigualdade concentrou-se, por várias décadas, em estabelecer critérios normativos e propriedades desejáveis para os índices. Trabalhos como os de Pigou (1920), Dalton (1920), Sen (1973), Cowell (1980), Shorrocks (1983) e Lambert (2002)

contribuíram decisivamente para consolidar os fundamentos axiomáticos dessas medidas, mas raramente abordaram aspectos inferenciais ou propriedades de seus estimadores sob diferentes modelos estatísticos. Essa ênfase no aspecto normativo deixou em segundo plano questões como viés, variância e consistência sob diferentes estruturas populacionais, tópicos que têm ganhado maior atenção na literatura estatística recente, sobretudo com o avanço de modelos paramétricos e técnicas de simulação computacional.

Seguindo essa ótica, a literatura empírica passou a adotar a distribuição Gama como modelo probabilístico para a renda, motivada por sua capacidade de representar diferentes graus de heterogeneidade e assimetria. Um dos primeiros trabalhos a empregar essa abordagem de forma sistemática foi o estudo de Salem e Mount (1974). Nesse artigo, os autores propõem o uso dessa distribuição em alternativa a modelos amplamente utilizados à época, como a lognormal e a Pareto. Além de apresentarem evidências empíricas favoráveis ao seu ajuste aos dados de renda, os autores destacam a interpretabilidade direta de seus parâmetros, enquanto o parâmetro de taxa se relaciona ao nível médio de renda e o parâmetro de forma controla a assimetria da distribuição, característica fundamental para capturar a desigualdade. Essa flexibilidade e fundamentação estatística sólida explicam, em grande parte, sua adoção subsequente em estudos de renda, tempo de espera e outras variáveis positivas assimétricas.

Do ponto de vista estatístico, Salem e Mount (1974) destacam-se pela dedução explícita dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α (forma) e λ (taxa), a partir das médias aritmética e geométrica da amostra. Embora a equação para α não possua solução fechada, os autores propõem métodos gráficos e de interpolação para sua estimação, baseando-se na razão entre as médias citadas. Essa abordagem oferece uma via computacionalmente acessível para estimação paramétrica com dados agrupados.

Os autores ainda derivam a variância assintótica conjunta dos estimadores via matriz de informação de Fisher, considerando a aproximação normal bivariada para $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})^\top$. Com isso, constroem um teste de razão de verossimilhança para igualdade do parâmetro de forma α entre subpopulações ou ao longo do tempo. A estatística resultante segue assintoticamente uma

distribuição qui-quadrado sob a hipótese nula, conforme o teorema clássico de Wilks.

Entretanto, a contribuição mais relevante de Salem e Mount (1974) para o contexto deste trabalho consiste em tratar diretamente da estimação de medidas de desigualdade, mostrando que índices como os de Gini e, em especial, de Theil podem ser expressos em função dos parâmetros da distribuição Gama. Em particular, demonstram que o índice de Theil pode ser representado como uma função do parâmetro de forma α , envolvendo a função digama $\psi(\alpha)$, o que permite sua estimação indireta a partir dos estimadores de máxima verossimilhança da distribuição. Essa formulação estabelece um elo fundamental entre modelagem paramétrica e mensuração de desigualdade, sendo de especial interesse para este estudo, que investiga o viés de estimadores sob populações heterogêneas com estrutura de mistura Gama.

Um trabalho que lida diretamente com a modelagem paramétrica e mensuração da desigualdade é o estudo proposto por McDonald e Jensen (1979). Nesse artigo, os autores exploram com rigor as propriedades teóricas de diferentes medidas de desigualdade, incluindo o coeficiente de Gini, o índice de Theil e a razão de Pietra ⁽¹⁾, sob a suposição de que a renda segue uma distribuição Gama. Cada medida é expressa como função explícita dos parâmetros da densidade, permitindo uma análise comparativa de sua sensibilidade a variações na forma da distribuição. Tais resultados oferecem suporte teórico direto à abordagem adotada nesta dissertação, ao aprofundar o entendimento do comportamento dessas medidas em populações modeladas por distribuições Gama.

A principal contribuição de McDonald e Jensen (1979) foi derivar os estimadores obtidos por MV e pelo MM para os parâmetros da distribuição e, por meio do princípio de substituição, obter as estimativas das medidas de desigualdade e suas variâncias assintóticas. Essa formulação reforçou a importância da distribuição Gama como modelo para a renda e estabeleceu fundamentos consistentes para a estimação e a avaliação da incerteza dessas medidas sob o

⁽¹⁾O índice de Pietra, proposto originalmente por Pietra (1915), é também referido na literatura como coeficiente de Schutz ou índice de Robin Hood. Ele mede a fração mínima da renda total que precisaria ser redistribuída para se alcançar perfeita igualdade. Em formulações modernas, sua expressão é dada pelo máximo desvio entre a curva de Lorenz e a linha de igualdade (Duclos e Araar, 2006; Sarabia, 2008).

pressuposto de homogeneidade populacional.

Já no contexto do uso de densidades de mistura para modelar distribuições de renda complexas e heterogêneas, destaca-se o trabalho de Chotikapanich e Griffiths (2008). Neste capítulo de livro, os autores abordam diretamente a estimativa de distribuições de renda utilizando misturas de densidades Gama. Eles justificam essa abordagem paramétrica pela sua conveniência para inferências subsequentes sobre medidas de desigualdade e pobreza, e pela sua capacidade de combinar a flexibilidade (evitando a inflexibilidade de uma única distribuição paramétrica) com as vantagens da estimação paramétrica em comparação à não paramétrica. Utilizando dados de renda canadenses, os autores demonstram a flexibilidade da mistura com exemplos usando inferência Bayesiana para misturas Gama com dois e três componentes. De forma particularmente relevante para este trabalho, os autores descrevem o procedimento para obter a densidade preditiva e a função de distribuição da renda, e ilustram como as densidades a posteriori das ordenadas da curva de Lorenz e do coeficiente de Gini podem ser derivadas, fornecendo um arcabouço metodológico consistente para a análise de medidas de desigualdade com base em modelos de mistura Gama.

Complementarmente, Chotikapanich et al. (2009) ilustram a utilidade prática de modelos de mistura em uma escala global. Eles ajustam distribuições Beta-2 a dados de renda de 91 países, inovando ao obter as distribuições de renda regionais e globais como misturas ponderadas pela população das distribuições específicas de cada país. Essa abordagem permitiu não apenas a estimação de medidas de Gini e Theil para níveis nacional, regional e global, expressas em termos dos parâmetros das distribuições Beta-2, mas também a decomposição dessas medidas em componentes intra e inter-países. A relevância de empregar densidades de mistura é, portanto, diretamente justificada pela necessidade de capturar a diversidade e a heterogeneidade inerentes às populações agregadas, oferecendo uma representação mais rica e precisa da estrutura da desigualdade de renda.

No contexto do estudo de viés em indicadores de desigualdade, vários autores trabalham com o índice de Gini, como Allison (1978), Beach e Davidson (1983) e Deltas (2003), que

discutem suas propriedades estatísticas, desempenho em amostras pequenas e sensibilidade a diferentes distribuições de renda. Esses estudos consolidaram o Gini como medida central na análise empírica da desigualdade, sobretudo pela sua simplicidade interpretativa e ampla utilização em bases de dados econômicos. Por sua vez, no tocante aos índices de Theil e Atkinson, poucas referências são encontradas na literatura que tratem explicitamente do viés de seus estimadores, sobretudo sob suposições paramétricas ou em contextos de heterogeneidade populacional. Estudos clássicos como os de Cowell (1980) e Shorrocks (1983) abordam propriedades gerais dessas medidas, mas não fornecem estimativas sistemáticas de viés. Essa lacuna tem sido preenchida apenas recentemente, com o avanço de abordagens teóricas mais refinadas.

Nesse cenário, Baydil et al. (2025) oferecem uma contribuição fundamental ao demonstrar, de forma rigorosa, que o estimador clássico do coeficiente de Gini é não viesado quando a população segue uma distribuição Gama (α, λ) . Para isso, os autores desenvolvem uma abordagem analítica baseada em rearranjos funcionais, que supera a dificuldade tradicional de tratar o denominador do estimador. Além disso, eles quantificam o viés decorrente do agrupamento em subconjuntos de tamanhos fixos, o que amplia o escopo aplicado de sua proposta. Essa fundamentação teórica robusta fornece a base para desenvolvimentos posteriores, inclusive no tratamento de populações mais complexas.

A partir dessas ideias, Vila e Saulo (2025a) generalizam o problema ao considerar populações heterogêneas modeladas por uma mistura finita de distribuições Gama. Utilizando estratégias analíticas inspiradas em Baydil et al. (2025), Vila e Saulo (2025a) derivaram uma fórmula fechada para o viés do estimador de Gini nesse contexto, evidenciando que a heterogeneidade entre as componentes da mistura intensifica o viés amostral. Os autores propõem ainda um estimador corrigido, cuja eficácia é avaliada por meio de simulações Monte Carlo. Essa extensão é fundamental para contextos empíricos em que a suposição de homogeneidade é irrealista.

No mesmo espírito, Vila e Saulo (2025b) aplicam a mesma abordagem analítica ao estudo do viés nos estimadores dos índices de Theil e de Atkinson sob a hipótese de distribuição Gama clássica. Os autores obtêm expressões fechadas para os respectivos vieses e propõem correções

explícitas. Esse trabalho é particularmente relevante porque, até então, não foram encontrados resultados formais sobre o viés dessas medidas em cenários paramétricos, o que constitui uma lacuna importante, dado o uso frequente dos índices de Theil e Atkinson em estudos empíricos de desigualdade.

Complementarmente, Shih (2025) desenvolve uma análise geral dos valores esperados de estimadores do tipo razão sob a distribuição Gama, incluindo os índices de Gini, Theil, Atkinson e o índice de dispersão. Utilizando o Teorema de Lukacs (Lukacs, 1955) e a relação entre as distribuições Gama e Dirichlet, o autor fornece demonstrações alternativas e mais concisas para os valores esperados desses estimadores. Os resultados de Shih (2025) confirmam os obtidos por Vila e Saulo (2025a) e Vila e Saulo (2025c), mas oferecem também uma interpretação mais sintética das expressões, reforçando a validade dos métodos utilizados e apontando possíveis simplificações futuras.

Por fim, Vila e Saulo (2025c) contribuem ao mostrar que o estimador amostral do m -ésimo índice de Gini, proposto por Gavilan-Ruiz et al. (2024), é não viesado sob a distribuição Gama. Esse resultado amplia a classe de estimadores teoricamente válidos e demonstra que, sob certas condições, é possível obter famílias inteiras de medidas de desigualdade com boas propriedades estatísticas em amostras finitas.

Esses trabalhos recentes articulam uma nova etapa na literatura sobre o viés em medidas de desigualdade, conectando resultados teóricos rigorosos com aplicações práticas. Na verdade, exceto pelo índice de Gini, a maioria dos estudos citados evidencia que os estimadores tradicionais, embora possam parecer adequados sob hipóteses restritivas, apresentam vieses não desprezíveis em cenários mais realistas, como aqueles marcados por heterogeneidade estrutural. Esse comportamento reforça a necessidade de desenvolver estimadores corrigidos ou alternativas mais robustas, especialmente quando se busca precisão inferencial em aplicações empíricas.

Capítulo 5

Fundamentação Teórica

Este capítulo apresenta o referencial teórico e metodológico adotado para a modelagem de variáveis positivas por meio de *misturas de distribuições gama* e para a análise das principais medidas de desigualdade abordadas no Capítulo 2. Os estimadores amostrais são construídos pelo princípio da substituição (*plug-in*), apresentado na Seção 3.1, e, a partir desses estimadores, é feita a dedução dos vieses sob o modelo de mistura. Por fim, descrevem-se os procedimentos de simulação de Monte Carlo empregados na avaliação e correção desses vieses.

5.1 Mistura de Distribuições Gama

Definição 5.1.1 (Mistura de Distribuições Gama). Uma variável aleatória X segue uma distribuição mistura de gamas com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\pi_1, \dots, \pi_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda)^\top$, denotada por $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, se sua função densidade de probabilidade é dada por,

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^m \pi_j f_{Z_j}(x; \alpha_j, \lambda), \quad x > 0, \quad (5.1)$$

em que $m \in \mathbb{N}$ é o número de componentes, π_j são as proporções de mistura, com $\sum_{j=1}^m \pi_j = 1$ e $\pi_j > 0$. Além disso, $f_{Z_j}(x; \alpha_j, \lambda)$ é a densidade da variável aleatória Z_j com Distribuição

Gama com parâmetro de forma $\alpha_j > 0$ e taxa $\lambda > 0$, denotada por $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$, isto é,

$$f_{Z_j}(x; \alpha_j, \lambda) = \frac{\lambda^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad (5.2)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ denota a função gama (completa) (ver Apêndice A).

A Figura 5.1, extraída de Vila e Saulo (2025a), ilustra a estrutura hierárquica das distribuições pertencentes à classe das *misturas de distribuições gama*. O diagrama mostra como esse modelo atua como uma estrutura unificadora e flexível, englobando casos especiais amplamente utilizados na literatura, como as distribuições de Lindley, Quasi-Lindley, Shanker e Weighted Exponential. Essa representação destaca o caráter abrangente do modelo e sua capacidade de acomodar diferentes padrões de assimetria e dispersão em variáveis positivas.

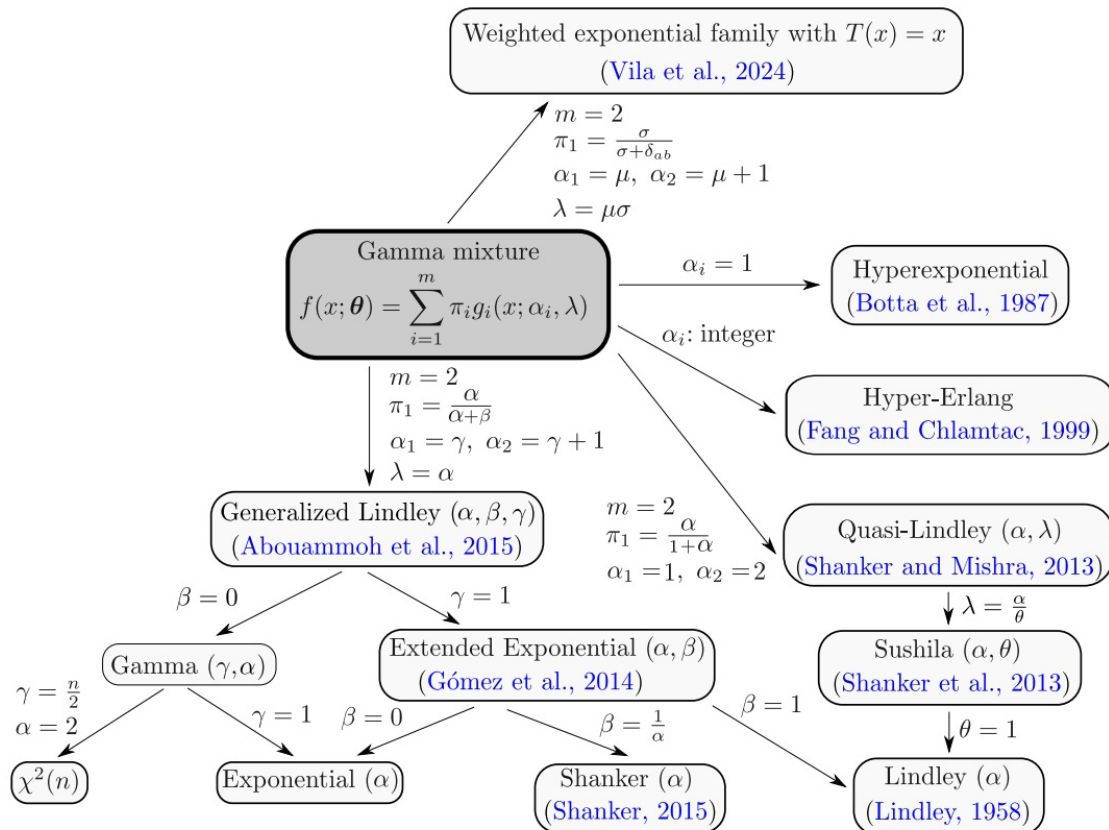


Figura 5.1 Relações entre distribuições do tipo Mistura Gama (Vila e Saulo (2025a)).

Embora a distribuição Gama seja uma família de escala, esse fechamento sob reescala só se preserva em misturas quando as componentes compartilham uma mesma taxa. Nesse caso, multiplicar a variável por uma constante $k > 0$ implica apenas a transformação $kX \sim \text{MG}(\pi, \alpha, \lambda/k)$, de modo que a classe permanece invariável à mudança de unidade de medida. Quando as taxas diferem entre componentes, essa propriedade de fechamento pode se perder, pois a reescala afeta cada componente de maneira distinta. Ainda assim, mesmo com essa limitação, misturas de distribuições Gama oferecem uma representação flexível e empiricamente adequada para variáveis positivas, heterogêneas e assimétricas.

Uma característica estrutural das misturas de distribuições Gama é a identificabilidade apenas até permutações de rótulos, pois, para $m = 2$, a troca de (π_1, α_1) por (π_2, α_2) não altera a função densidade, originando a conhecida simetria de rotulagem (*label switching*). Embora esse fenômeno seja crítico em métodos bayesianos baseados em MCMC, no presente estudo, que utiliza estimação por máxima verossimilhança, não ocorre *label switching* dinâmico. Ainda assim, a simetria da verossimilhança pode gerar soluções permutadas entre réplicas independentes. Para evitar essa ambiguidade e manter a interpretação das componentes, é possível trabalhar com restrições de ordenação nos parâmetros de forma, como, no caso $m = 2$, ao impor $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = a + \exp(\delta)$, é garantido que $\alpha_1 < \alpha_2$, assegurando a identificação prática do modelo (McLachlan e Peel, 2000; Frühwirth-Schnatter, 2006).

Outro ponto relevante sobre a variável da mistura é que ela pode ser representada em termos de variáveis indicadoras. Isto é, a variável X , conforme a Definição 5.1.1, admite a seguinte representação

$$X = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{\{Y=j\}} Z_j, \quad (5.3)$$

em que $Y \in \{1, \dots, m\}$ é uma variável aleatória discreta com $\mathbb{P}(Y = j) = \pi_j$, independente de $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$, para cada $j = 1, \dots, m$, e $\mathbb{1}_A$ é a função indicadora do evento A . Além disso, como a sequência de eventos $\{\{Y = j\} : j = 1, \dots, m\}$ formam uma partição do espaço

amostral Ω , ao aplicar a Lei da Probabilidade Total e a independência entre Y e Z_j , a função de distribuição acumulada (FDA) de X pode ser escrita como

$$F_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^m \pi_j F_{Z_j}(x; \alpha_j, \lambda),$$

em que $F_{Z_j}(x; \alpha_j, \lambda)$ denota a função de distribuição acumulada da variável aleatória $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$. Usando essa formulação, o resultado a seguir decorre de maneira imediata.

Proposição 5.1.1. Se $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, então, para qualquer função Borel-mensurável h e tal que $h(X)$ seja integrável no sentido usual, tem-se

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{j=1}^m \pi_j \mathbb{E}[h(Z_j)].$$

Na Proposição 5.1.1, exige-se que h seja *Borel-mensurável* para garantir que $h(X)$ seja uma variável aleatória bem definida. Já a existência da esperança requer adicionalmente que $h(X)$ seja integrável, conforme indicado na proposição. Uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *Borel-mensurável* se, para todo conjunto boreliano $B \subseteq \mathbb{R}$, o conjunto inverso $h^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \in B\}$ pertence à σ -álgebra de Borel. Além disso, ao se tomar $h(x) = x^p$ e utilizar o fato de que $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$, obtém-se a seguinte proposição para o p -ésimo momento de X .

Proposição 5.1.2. Se $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, então o seu p -ésimo momento é dado por

$$\mathbb{E}[X^p] = \frac{1}{\lambda^p} \sum_{j=1}^m \pi_j \frac{\Gamma(p + \alpha_j)}{\Gamma(\alpha_j)}.$$

A expressão acima é válida desde que $p > -\min\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. A restrição garante a existência do momento $\mathbb{E}[X^p]$, pois, para cada componente $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$, o momento $\mathbb{E}[Z_j^p] = \lambda^{-p} \Gamma(\alpha_j + p) / \Gamma(\alpha_j)$ só é finito se $\alpha_j + p > 0$, uma vez que a função gama diverge para argumentos não positivos. Como o momento da mistura é uma média ponderada dos momentos de suas componentes, a condição mais restritiva $p > -\min\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ assegura

que todos os termos sejam bem definidos.

Como extensão do resultado anterior, passa-se à caracterização do valor esperado de funções da soma de uma amostra independente e identicamente distribuída (i.i.d.) de X .

Proposição 5.1.3. Se X_1, \dots, X_n é uma amostra i.i.d., de tamanho n , de $X \sim \text{MG}(\theta)$, então, para qualquer função Borel-mensurável h , temos

$$\mathbb{E} \left[h \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right] = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \mathbb{E} [h(Z_{j_1, \dots, j_n}^*)],$$

em que $Z_{j_1, \dots, j_n}^* \sim \text{Gama}(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}, \lambda)$.

Demonstração. A demonstração é imediata, pois, devido à natureza i.i.d. das variáveis X_1, \dots, X_n , para qualquer função mensurável de Borel h , tem-se

$$\mathbb{E} \left[h \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right] \tag{5.4}$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) f_{Z_{j_1}}(x_1) \cdots f_{Z_{j_n}}(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \mathbb{E} \left[h \left(\sum_{i=1}^n Z_{j_i} \right) \right], \tag{5.5}$$

em que Z_{j_1}, \dots, Z_{j_n} gamas independentes com vetores de parâmetros $(\alpha_{j_1}, \lambda)^\top, \dots, (\alpha_{j_n}, \lambda)^\top$, respectivamente. Definindo $Z_{j_1, \dots, j_n}^* \equiv \sum_{i=1}^n Z_{j_i}$, a demonstração segue. \square

5.2 Distribuição de Dirichlet

Um dos primeiros registros da forma analítica que viria a fundamentar a distribuição de Dirichlet aparece nos trabalhos de Lejeune Dirichlet no século XIX (Dirichlet, 1839), nos quais são estudadas integrais múltiplas cuja estrutura viria, mais tarde, a dar origem à formulação da função Beta multivariada. Essas integrais surgem naturalmente em problemas de partição da unidade, em análise de composições e em transformações definidas no simplex (Aitchison, 1982; Olkin e Rubin, 1964). No tratamento moderno, conforme discutido em Ng, Tian e Tang (2011), a Dirichlet é interpretada como o modelo probabilístico padrão para vetores de proporções positivos, cujos componentes representam contribuições relativas a um todo.

Uma das principais motivações para essa distribuição advém de sua construção a partir de variáveis gama independentes. Se Y_1, \dots, Y_k são variáveis independentes com distribuições $\text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$ e um único parâmetro de taxa $\lambda > 0$, a normalização

$$X_i = \frac{Y_i}{\sum_{j=1}^k Y_j}, \quad i = 1, \dots, k,$$

define um vetor cujos componentes são positivos e somam exatamente um. A distribuição induzida por essa transformação é precisamente a distribuição de Dirichlet, que pode ser vista como uma generalização multivariada da distribuição Beta e como a distribuição natural para modelar incerteza sobre composições, alocações relativas e pesos probabilísticos.

Formalmente, o vetor aleatório $(X_1, \dots, X_k)^\top$ segue uma distribuição de Dirichlet com parâmetros $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\top$, denotado por $(X_1, \dots, X_k)^\top \sim \text{Dirichlet}_k(\alpha)$, quando seu suporte é o simplex

$$\Delta^{k-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : x_i > 0 \text{ e } \sum_{i=1}^k x_i = 1 \right\},$$

e sua densidade é dada por

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i - 1},$$

em que $B(\alpha)$ denota a função Beta multivariada (ver Apêndice A). A parametrização $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ controla tanto a concentração das proporções quanto a regularidade da distribuição sobre o simplex.

A representação via normalização de variáveis gama desempenha papel essencial neste trabalho por estabelecer a conexão entre vetores de proporções e a soma total, relação expressa em termos de independência entre razão e soma. Tal propriedade, inicialmente estudada por Lukacs (1955) no caso bivariado e posteriormente generalizada por Mosimann (1962) para dimensão arbitrária, constitui o ponto de partida das simplificações analíticas empregadas nos capítulos subsequentes.

5.3 Teorema de Mosimann

A relação estrutural mencionada é formalizada pelo Teorema de Mosimann (1962), apresentado a seguir.

Teorema 5.3.1 (Mosimann, 1962). Sejam Y_1, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes tais que $Y_i \sim \text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$, todas com a mesma taxa $\lambda > 0$. Defina $S = \sum_{k=1}^n Y_k$ e $D_i = Y_i/S$. Então, $D = (D_1, \dots, D_n)^\top$ é independente de S se, e somente se, $D \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Reciprocamente, se D é Dirichlet e independente de S , então necessariamente $Y_i \sim \text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$ para uma taxa comum λ .

Esse resultado é empregado em sua forma bidirecional, sendo crucial a hipótese de taxa comum entre as componentes. Tal condição garante a independência entre soma e proporções e permite as reduções analíticas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho. A partir do Teorema 5.3.1, obtém-se a proposição apresentada a seguir, a qual fundamenta a dedução dos vieses

dos estimadores discutida na Seção 5.6.

Proposição 5.3.2. Para $(D_1, \dots, D_n)^\top \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=1}^n D_i^{c_i} \right)^r \log \left(\prod_{i=1}^n D_i^{c_i} \right) \right] \\ &= \frac{\Gamma(\sum_{l=1}^n \alpha_l)}{\Gamma(\sum_{l=1}^n (\alpha_l + r c_l))} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_i + r c_i)}{\Gamma(\alpha_i)} \left[c_i \psi(\alpha_i + r c_i) - \sum_{l=1}^n c_l \psi \left(\sum_{l=1}^n (\alpha_l + r c_l) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que $c_1, \dots, c_n \geq 0$, $r \geq 0$ e $\psi(\cdot)$ denota a função digama (ver Apêndice A).

Demonstração. Note, antes, que para $x > 0$ vale a representação $x^p = e^{p \log x}$, de modo que

$$\frac{\partial}{\partial p} x^p = \log(x) x^p.$$

Assim,

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial p} X^p \right] = \mathbb{E}[\log(X) X^p],$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada, pode-se permutar derivada e esperança. Avaliando em $p = 0$, obtém-se

$$x^r \log x = \frac{\partial}{\partial p} x^{p+r} \Big|_{p=0} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} x^{p+r},$$

o que justifica a identidade utilizada a seguir.

$$\mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=1}^n D_j^{c_j} \right)^r \log \left(\prod_{j=1}^n D_j^{c_j} \right) \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n D_j^{(p+r)c_j} \right], \quad (5.7)$$

em que a troca de ordem entre esperança, limite e derivada já foi justificada acima. Aplicando a fórmula para o momento misto de $(D_1, \dots, D_n)^\top$ (ver Item (2.5) de Ng, Tian e Tang, 2011):

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n D_i^{d_i} \right] = \frac{\Gamma(\sum_{l=1}^n \alpha_l)}{\Gamma(\sum_{l=1}^n (\alpha_l + d_l))} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_i + d_i)}{\Gamma(\alpha_i)}, \quad (5.8)$$

a esperança no lado direito de (5.7) pode ser escrita como

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n D_i^{(p+r)c_i} \right] = \frac{\Gamma(\sum_{l=1}^n \alpha_l)}{\Gamma(\sum_{l=1}^n (\alpha_l + (p+r)c_l))} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_i + (p+r)c_i)}{\Gamma(\alpha_i)}.$$

Consequentemente, a derivada parcial correspondente em relação a p resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n D_i^{(p+r)c_i} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\sum_{l=1}^n \alpha_l)}{\Gamma(\sum_{l=1}^n (\alpha_l + (p+r)c_l))} \\ & \times \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_i + (p+r)c_i)}{\Gamma(\alpha_i)} \left[c_i \psi(\alpha_i + (p+r)c_i) - \sum_{l=1}^n c_l \psi \left(\sum_{l=1}^n (\alpha_l + (p+r)c_l) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Fazendo $p \rightarrow 0$ em (5.9) e substituindo em (5.7) completa-se a demonstração. \square

5.4 Índices de Theil, de Atkinson e de dispersão

Os índices apresentados nesta seção correspondem às formas *populacionais* das medidas de desigualdade abordadas no Capítulo 2, ou seja, são definidos em termos das esperanças sob a distribuição de X . Essas expressões constituem a base teórica para a construção dos estimadores amostrais e para a análise de seus vieses nos tópicos subsequentes.

5.4.1 Índice de Theil

No contexto da mistura de distribuições gama, o índice Theil-T assume a forma apresentada na proposição a seguir.

Proposição 5.4.1. O índice Theil-T de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$ é dado por

$$T_T = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \pi_j \alpha_j} \left[\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j \psi(\alpha_j) + 1 \right] - \log \left(\sum_{i=1}^m \pi_j \alpha_j \right).$$

Demonstração. Note que T_T , definido em (2.1), pode ser escrito como

$$T_T = \frac{1}{\mu} \mathbb{E}[X \log(X)] - \log(\mu). \quad (5.10)$$

Pela Proposição 5.1.1, temos

$$\mathbb{E}[X \log(X)] = \sum_{j=1}^m \pi_j \mathbb{E}[Z_j \log(Z_j)], \quad (5.11)$$

em que $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$, para cada $j = 1, \dots, m$. Como $\mathbb{E}[Z \log(Z)] = (a/b)[\psi(a) + 1/a - \log(b)]$ para $Z \sim \text{Gama}(a, b)$ (veja Apêndice B.1), e $\mu = \sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j / \lambda$ (Proposição 5.1.2), combinando (5.11) com (5.10), a demonstração da proposição segue. \square

De modo análogo, o índice Theil-L é definido por

Proposição 5.4.2. O índice Theil-L de $X \sim \text{MG}(\theta)$ é dado por

$$T_L = \log \left(\sum_{i=1}^m \pi_i \alpha_i \right) - \sum_{j=1}^m \pi_j \psi(\alpha_j).$$

Demonstração. Como o índice T_L , definido em (2.2), pode ser expresso como $T_L = \log(\mu) - \mathbb{E}[\log(X)]$, ao aplicar a Proposição 5.1.1 obtém-se

$$\mathbb{E}[\log(X)] = \sum_{j=1}^m \pi_j \mathbb{E}[\log(Z_j)], \quad (5.12)$$

em que $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$ para cada $j = 1, \dots, m$. Além disso, pela Proposição 5.1.2, tem-se $\mu = \sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j / \lambda$, e, uma vez que $\mathbb{E}[\log(Z)] = \psi(a) - \log(b)$ para $Z \sim \text{Gama}(a, b)$, segue que a prova da proposição está concluída. \square

5.4.2 Índice de Atkinson

De forma análoga aos índices de Theil, o índice de Atkinson também admite formulações explícitas sob o modelo de mistura de distribuições gama, conforme apresentado nas proposições a seguir.

Proposição 5.4.3. Quando $\varepsilon \rightarrow 1$, o índice de Atkinson de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$ é dado por

$$A(1) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} A(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j} \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \pi_j \psi(\alpha_j) \right\}.$$

Demonstração. É simples verificar que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathbb{E}^{1/(1-\varepsilon)}[X^{1-\varepsilon}] &= \exp \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{1-\varepsilon} \log(\mathbb{E}[X^{1-\varepsilon}]) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \log(\mathbb{E}[X^{1-\varepsilon}]) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}[X^{1-\varepsilon}]}{\mathbb{E}[X^{1-\varepsilon}]} \right\} \\ &= \exp\{\mathbb{E}[\log(X)]\}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

em que, na segunda igualdade, aplica-se a regra de L'Hôpital, e, na última, utiliza-se a identidade

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x^{1-\varepsilon} = -x^{1-\varepsilon} \log(x), \quad x > 0.$$

Consequentemente, combinando as identidades (2.5) e (5.13), obtém-se

$$A(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} A(\varepsilon) = 1 - \frac{\exp\{\mathbb{E}[\log(X)]\}}{\mu}. \tag{5.14}$$

Por outro lado, de (5.12), tem-se que

$$\mathbb{E}[\log(X)] = \sum_{j=1}^m \pi_j [\psi(\alpha_j) - \log(\lambda)],$$

e, da Proposição 5.1.2, segue que $\mu = \sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j / \lambda$. Substituindo essas expressões em (5.14), obtém-se o resultado desejado. \square

Proposição 5.4.4. Quando $\varepsilon \rightarrow \infty$, o índice de Atkinson de $X \sim \text{MG}(\theta)$ é dado por

$$A(\infty) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} A(\varepsilon) = 1.$$

Demonstração. A partir de (2.4), o índice de Atkinson pode ser reescrito como

$$A(\varepsilon) = 1 - \frac{\mathbb{E}^{-1/(\varepsilon-1)}[X^{-(\varepsilon-1)}]}{\mu}, \quad \varepsilon \geq 0, \varepsilon \neq 1.$$

Para simplificar a notação, introduz-se a aplicação

$$\|Y\|_p \equiv (\mathbb{E}[|Y|^p])^{1/p} = \left[\int_0^\infty y^p dF_Y(y) \right]^{1/p}, \quad p > 0,$$

a qual coincide com a norma usual de L^p apenas quando $p \geq 1$, sendo interpretada como uma *quasinorma*⁽¹⁾ utilizada aqui apenas como abreviação para potências de momentos.

$$A(\varepsilon) = 1 - \frac{\left\| \frac{1}{X} \right\|_{\varepsilon-1}^{-1}}{\mu}. \quad (5.15)$$

Utiliza-se o fato clássico de que, para qualquer variável aleatória Y (ver Exercício 4.6 do

⁽¹⁾Para $p \geq 1$, $\|Y\|_p$ satisfaz a desigualdade triangular (Minkowski) e, portanto, define uma norma em L^p . Já para $0 < p < 1$, a função $t \mapsto t^p$ é côncava e implica a desigualdade $|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p$, de onde segue que $\|X + Y\|_p^p \leq \|X\|_p^p + \|Y\|_p^p$. Assim, $\|\cdot\|_p$ continua sendo homogênea e positiva, mas falha na desigualdade triangular clássica, caracterizando uma *quasinorma*.

Capítulo 4 em Brezis e Brézis, 2011),

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|Y\|_p = \|Y\|_\infty,$$

em que

$$\|Y\|_\infty \equiv \inf\{M \geq 0 : \mathbb{P}(|Y| \leq M) = 1\}$$

denota o supremo essencial.

No caso $Y = 1/X$, observa-se que a mistura gama possui suporte $(0, \infty)$, de modo que $\mathbb{P}(X < \delta) > 0$ para todo $\delta > 0$. Assim, $1/X$ assume valores arbitrariamente grandes e não existe $M < \infty$ tal que $\mathbb{P}(1/X \leq M) = 1$. Portanto,

$$\left\| \frac{1}{X} \right\|_\infty = \infty.$$

Como consequência,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{X} \right\|_{\varepsilon-1}^{-1} = 0,$$

e tomando o limite em (5.15), a demonstração é concluída. \square

5.4.3 Índice de dispersão

Por fim, o VMR também pode ser expresso de forma explícita no contexto da mistura de distribuições gama, conforme estabelecido no corolário a seguir.

Corolário 5.4.5. Se $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, então a razão entre a variância e a média da mistura de gamas com $\lambda > 0$ fixo é dada por,

$$\text{VMR} \equiv \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{1}{\lambda \sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j} \left[\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j (\alpha_j + 1) - \left(\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j \right)^2 \right].$$

O resultado segue diretamente da Proposição 5.1.2.

5.5 Obtenção dos estimadores

Conforme apresentado na Seção 3.1, os estimadores empregados neste trabalho são obtidos pelo *princípio de substituição (plug-in principle)*, que consiste em aplicar o mesmo funcional definido para a distribuição populacional à sua versão empírica. Assim, cada medida de desigualdade pode ser formalmente expressa como um *funcional estatístico* $T(F)$, que associa a cada função de distribuição F um valor real representando o grau de desigualdade.

No contexto dos índices considerados, têm-se, por exemplo,

$$T_T(F) = \mathbb{E}_F[X \log(X/\mu)] \quad \text{e} \quad T_L(F) = -\mathbb{E}_F[\log(X/\mu)],$$

em que $\mu = E_F[X]$ representa a média populacional.

A partir de uma amostra i.i.d. X_1, \dots, X_n de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, substitui-se F por sua distribuição empírica

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}},$$

definindo-se o estimador correspondente como

$$\hat{T}_n = T(\hat{F}_n).$$

Nesse caso, a integral $\int g(x) d\hat{F}_n(x)$ reduz-se à média amostral $n^{-1} \sum_{i=1}^n g(X_i)$, de modo que as quantidades populacionais, como $\mathbb{E}_F[g(X)]$ e μ , são substituídas por suas contrapartes empíricas $n^{-1} \sum g(X_i)$ e \bar{X} , respectivamente.

Sob condições usuais de integrabilidade, a *Lei dos Grandes Números* e o *Teorema do Mapeamento Contínuo* (veja Apêndice B.5) garantem que $T(\hat{F}_n)$ converge em probabilidade para $T(F)$, assegurando a consistência dos estimadores (ver Vaart, 1998, Seção 2.3). Além disso, essa formulação preserva propriedades essenciais das medidas originais, como invariância de escala e interpretação informacional. Os índices de Theil mantêm sua natureza entrópica, \hat{T}_T

reflete o desvio médio ponderado das rendas relativas, enquanto \widehat{T}_L enfatiza desigualdades na cauda inferior. Os estimadores de Atkinson derivam de uma função de utilidade social agregada e refletem diferentes graus de aversão à desigualdade: $\widehat{A}(1)$ é ordinalmente equivalente a \widehat{T}_L , e $\widehat{A}(\infty)$ corresponde ao caso limite de aversão extrema, com a substituição de $\text{ess inf}_F X$ por $\min_i X_i$. Por fim, o estimador $\widehat{\text{VMR}}$, definido pela razão entre os momentos empíricos de segunda e primeira ordem, fornece uma medida puramente estatística de dispersão relativa em torno da média.

5.6 Dedução dos vieses

A partir da formulação geral dos estimadores baseada no princípio da substituição, apresentada na seção anterior, é possível obter expressões analíticas para o viés de cada medida de desigualdade.

5.6.1 Viés do estimador do índice de Theil

A aplicação do princípio da substituição a (2.1) e a (2.2), os estimadores amostrais correspondentes dos índices de Theil são obtidos.

$$\widehat{T}_T = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \log\left(\frac{X_i}{\bar{X}}\right)}{\sum_{i=1}^n X_i}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.16)$$

e

$$\widehat{T}_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\bar{X}}{X_i}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.17)$$

respectivamente, em que $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ é a média amostral e X_1, \dots, X_n são observações i.i.d. de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$.

Note que esses estimadores podem ser expressos de forma alternativa. O estimador \widehat{T}_T pode ser reescrito como

$$\widehat{T}_T = \sum_{i=1}^n D_i \log(D_i) + \log(n), \quad D_i = \frac{X_i}{S_n}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (5.18)$$

enquanto \widehat{T}_L pode ser expresso como

$$\widehat{T}_L = \log(\bar{X}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i). \quad (5.19)$$

A partir dessas reescritas, deduzem-se os teoremas e corolários apresentados a seguir.

Teorema 5.6.1. Se X_1, \dots, X_n são cópias independentes de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, conforme a Definição 5.1.1, então

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\widehat{T}_T \right] \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \psi(\alpha_{j_i}) - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right) \psi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right) + n - 1 \right] \\ &+ \log(n). \end{aligned}$$

Demonstração. Como X_1, \dots, X_n são i.i.d. com a mesma distribuição de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, e X possui a representação estocástica conforme (5.3), então é claro que X_i admite a seguinte representação

$$X_i \equiv \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{\{Y_i=j\}} Z_j^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.20)$$

em que $Y_1, \dots, Y_n \in \{1, \dots, m\}$ são variáveis aleatórias discretas i.i.d. com $\mathbb{P}(Y_i = j) = \pi_j$,

independentes de $Z_j^i \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$, para cada $j = 1, \dots, m$. Agora, utilizando a notação adotada em (5.18), note que

$$S_n | Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n Z_{j_i}^i \sim \text{Gama} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}, \lambda \right), \quad (5.21)$$

em que $\stackrel{d}{=}$ denota igualdade em distribuição de variáveis aleatórias.

Neste ponto, ao definirmos $D_i = X_i/S_n$, segue-se do Teorema 5.3.1 que, dado $Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n$, S_n e $(D_1, \dots, D_n)^\top$ são independentes. Além disso,

$$(D_1, \dots, D_n)^\top | Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \sim \text{Dirichlet}(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}). \quad (5.22)$$

Portanto, ainda de (5.18), o valor esperado do estimador \widehat{T}_T , condicionado a $Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n$, é dado por

$$\mathbb{E} \left[\widehat{T}_T \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[D_i \log(D_i) \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n] + \log(n).$$

Como (5.22) é satisfeita, usamos a Proposição 5.3.2 com $r = 1$ e $c_j = \delta_{ji}$, em que δ_{ji} é o delta de Kronecker, para obter

$$\mathbb{E} \left[\widehat{T}_T \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \right] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}} \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \left[\psi(\alpha_{j_i} + 1) - \psi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} + 1 \right) \right] + \log(n).$$

Finalmente, utilizando a conhecida relação de recorrência $\psi(x + 1) = \psi(x) + 1/x$ e, em seguida, aplicando a Lei da Esperança Total (veja Apêndice B.2), obtém-se a expressão apresentada no enunciado. \square

Por fim, ao combinar a Proposição 5.4.1 com o Teorema 5.6.1, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.6.2. O viés de \widehat{T}_T em relação a T_T , denotado por $\text{Viés}(\widehat{T}_T, T_T)$, pode ser expresso

como

$$\begin{aligned} & \text{Viés}(\widehat{T}_T, T_T) \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \psi(\alpha_{j_i}) - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right) \psi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right) + n - 1 \right] \\ &+ \log(n) - \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j} \left(\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j \psi(\alpha_j) + 1 \right) - \log \left(\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j \right) \right]. \end{aligned}$$

Ao considerar $\alpha_j = \alpha$ para todo $j = 1, \dots, m$, o viés é simplificado para

$$\text{Viés}(\widehat{T}_T, T_T) = \log(n\alpha) - \frac{1}{n\alpha} - \psi(n\alpha) < 0.$$

Corroborando o achado reportado no Corolário 3.6 de Vila e Saulo (2025b). Além disso, observa-se que o viés de \widehat{T}_T é negativo para todo $n, \alpha > 0$. Esse fato decorre da desigualdade da função digama $\psi(x) < \log(x) - \frac{1}{2x}$, válida para $x > 0$. Pelo seu desenvolvimento assintótico, tem-se, para $x \rightarrow \infty$,

$$\psi(x) = \log(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + O(x^{-4}),$$

e, portanto, com $x = n\alpha$,

$$\text{Viés}(\widehat{T}_T) = -\frac{1}{2n\alpha} + O((n\alpha)^{-2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Logo, \widehat{T}_T é assintoticamente não viesado.

Ressalta-se ainda que a simplificação do viés acima decorre do fato de que todos os termos α_{j_i} se tornam constantes para cada combinação de índices (j_1, \dots, j_n) , além disso, o somatório

resultante satisfaz

$$\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} = (\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m)^n = 1,$$

por aplicação direta do Teorema Multinomial (veja Apêndice B.3).

Teorema 5.6.3. Se X_1, \dots, X_n são cópias independentes de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, então

$$\mathbb{E} \left[\widehat{T}_L \right] = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \psi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right) - \log(n) - \sum_{j=1}^m \pi_j \psi(\alpha_j).$$

Demonstração. Utilizando (5.19) e o fato de que X_1, \dots, X_n são i.i.d. com X , temos

$$\mathbb{E} \left[\widehat{T}_L \right] = \mathbb{E} \left[\log \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right] - \log(n) - \mathbb{E}[\log(X)].$$

Aplicando as Proposições 5.1.1 e 5.1.3, a identidade acima pode ser escrita como

$$\mathbb{E} \left[\widehat{T}_L \right] = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \mathbb{E} \left[\log \left(Z_{j_1, \dots, j_n}^* \right) \right] - \log(n) - \sum_{j=1}^m \pi_j \mathbb{E}[\log(Z_j)].$$

Uma vez que $Z_{j_1, \dots, j_n}^* \sim \text{Gama}(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}, \lambda)$ e $Z_j \sim \text{Gama}(\alpha_j, \lambda)$, para cada $j = 1, \dots, m$, a partir da identidade $\mathbb{E}[\log(Z)] = \psi(a) - \log(b)$ para $Z \sim \text{Gama}(a, b)$, a demonstração segue imediatamente. \square

O Corolário a seguir decorre de se combinar a Proposição 5.4.2 e o Teorema 5.6.3.

Corolário 5.6.4. O viés de \widehat{T}_L em relação a T_L , denotado por $\text{Viés}(\widehat{T}_L, T_L)$, pode ser expresso como

$$\text{Viés}(\widehat{T}_L, T_L) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \psi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right) - \log(n) - \log \left(\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j \right).$$

Novamente, caso $\alpha_j = \alpha$ para todo $j = 1, \dots, m$, é possível simplificar o viés usando o

mesmo raciocínio aplicado ao somatório sobre todas as combinações de índices, o que resulta em

$$\text{Viés}(\widehat{T}_L, T_L) = \psi(n\alpha) - \log(n\alpha) < 0.$$

De modo análogo ao que ocorre com \widehat{T}_T , o viés resultante é negativo para todo $n, \alpha > 0$ e assintoticamente nulo, pela mesma argumentação apresentada anteriormente. Esse resultado ainda coincide com o demonstrado na Proposição 3.11 de Vila e Saulo (2025b).

5.6.2 Viés do estimador do índice de Atkinson

A aplicação do princípio da substituição a (2.4) conduz ao seguinte estimador para o índice de Atkinson

$$\widehat{A}(\varepsilon) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}}{\bar{X}}, \quad 0 \leq \varepsilon \neq 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

em que $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ é a média amostral e X_1, \dots, X_n são observações i.i.d. de $X \sim \text{MG}(\theta)$.

Observa-se que o termo $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$ corresponde à *média de potência* (ou média generalizada) dos valores amostrais, com parâmetro $p = 1 - \varepsilon$. Assim, o estudo dos casos limite $\varepsilon \rightarrow 1$ e $\varepsilon \rightarrow \infty$ requer introduzir formalmente esse conceito.

Definição 5.6.1. A *média de potência* (ou *média generalizada*) de um conjunto de números reais positivos x_1, \dots, x_n , com expoente $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é definida por

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}.$$

Utilizando os limites conhecidos para essa média (ver Apêndice B.4),

$$\lim_{p \rightarrow p_0} M_p(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \sqrt[p]{x_1 \cdots x_n}, & \text{se } p_0 = 0, \\ \min\{x_1, \dots, x_n\}, & \text{se } p_0 = -\infty, \end{cases}$$

obtêm-se as seguintes formas limite para o estimador de Atkinson:

$$\widehat{A(1)} = 1 - \frac{\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}}{\bar{X}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e

$$\widehat{A(\infty)} = 1 - \frac{\min\{X_1, \dots, X_n\}}{\bar{X}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Os mesmos resultados também podem ser obtidos aplicando o princípio da substituição diretamente em $A(1)$ e $A(\infty)$, definidos em (2.5) e (2.6), respectivamente.

A partir desses estimadores, é possível deduzir os teoremas e corolários apresentados a seguir.

Teorema 5.6.5. Se X_1, \dots, X_n são cópias independentes de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, então

$$\mathbb{E} \left[\widehat{A(1)} \right] = 1 - n \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_{j_i} + \frac{1}{n})}{\Gamma(\alpha_{j_i})}.$$

Demonstração. Note que $\widehat{A(1)}$ pode ser escrito como

$$\widehat{A(1)} = 1 - n \left(\prod_{i=1}^n D_i \right)^{1/n},$$

em que $D_i = X_i/S_n$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Por (5.22), dado $Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n$, o vetor $(D_1, \dots, D_n)^\top$ possui distribuição de Dirichlet com vetor de parâmetros $(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n})^\top$. As-

sim, aplicando (5.8) com $d_i = 1/n$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\widehat{A(1)} \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \right] &= 1 - n \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=1}^n D_i \right)^{1/n} \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \right] \\ &= 1 - n \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i})}{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} + 1)} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_{j_i} + \frac{1}{n})}{\Gamma(\alpha_{j_i})} \\ &= 1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_{j_i} + \frac{1}{n})}{\Gamma(\alpha_{j_i})}, \end{aligned}$$

em que a última linha decorre da identidade bem conhecida: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Finalmente, aplicando a Lei da Probabilidade Total, o resultado declarado segue imediatamente. \square

A partir do Teorema 5.6.5 e da Proposição 5.4.3, segue-se que:

Corolário 5.6.6. O viés de $\widehat{A(1)}$ em relação a $A(1)$, denotado por $\text{Viés}(\widehat{A(1)}, A(1))$, é dado por

$$\begin{aligned} &\text{Viés}(\widehat{A(1)}, A(1)) \\ &= -n \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_{j_i} + \frac{1}{n})}{\Gamma(\alpha_{j_i})} + \frac{1}{\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j} \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \pi_j \psi(\alpha_j) \right\}. \end{aligned}$$

Quando $\alpha_j = \alpha$ para todo $j = 1, \dots, m$, o viés resultante torna-se:

$$\text{Viés}(\widehat{A(1)}, A(1)) = \frac{1}{\alpha} \left[\exp \{ \psi(\alpha) \} - \frac{\Gamma^n(\alpha + \frac{1}{n})}{\Gamma^n(\alpha)} \right],$$

A simplificação obtida decorre do mesmo argumento utilizado na dedução dos vieses dos índices de Theil, em que a igualdade dos parâmetros α_j permite fatorar o termo comum e a soma sobre todos os rótulos resulta em 1, em virtude do Teorema Multinomial.

De modo análogo ao que ocorre com os estimadores de Theil, o viés resultante é negativo

para todo $n \geq 2$ e $\alpha > 0$. De fato, tem-se

$$n(\log \Gamma(\alpha + \frac{1}{n}) - \log \Gamma(\alpha)) = n \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{1}{n}} \psi(t) dt > \psi(\alpha),$$

uma vez que a função digama $\psi(t)$ é crescente em $(0, \infty)$, dado que $\psi'(t) > 0$. Assim,

$$\frac{\Gamma^n(\alpha + \frac{1}{n})}{\Gamma^n(\alpha)} > \exp\{\psi(\alpha)\}.$$

Além disso, como $\Gamma(\alpha + \frac{1}{n}) / \Gamma(\alpha) \rightarrow 1$ e $\psi(\alpha + \frac{1}{n}) \rightarrow \psi(\alpha)$ quando $n \rightarrow \infty$, o viés tende a zero, evidenciando que o estimador é assintoticamente não viesado. Esse resultado coincide ainda com o demonstrado no Corolário 3.17 de Vila e Saulo (2025b).

Teorema 5.6.7. Se X_1, \dots, X_n são cópias independentes de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, então

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\widehat{A(\infty)} \right] \\ &= 1 - n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \pi_1^{k_1} \dots \pi_m^{k_m} \frac{1}{\sum_{j=1}^m \alpha_j k_j} \int_0^{\infty} \frac{\Gamma^{k_1}(\alpha_1, u)}{\Gamma^{k_1}(\alpha_1)} \dots \frac{\Gamma^{k_m}(\alpha_m, u)}{\Gamma^{k_m}(\alpha_m)} du, \end{aligned}$$

em que

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!},$$

é um coeficiente multinomial.

Demonstração. Utilizando a identidade

$$\int_0^{\infty} \exp(-\xi z) dz = \frac{1}{\xi}, \quad \xi > 0,$$

com $\xi = \sum_{i=1}^n X_i$, obtemos

$$\mathbb{E} \left[\frac{\min\{X_1, \dots, X_n\}}{\sum_{i=1}^n X_i} \right] = \mathbb{E} \left[\min\{X_1, \dots, X_n\} \int_0^\infty \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) z \right\} dz \right]. \quad (5.23)$$

Aplicando a identidade

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\cap_{i=1}^n \{X_i \geq t\}} dt,$$

a expressão em (5.23) torna-se

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\cap_{i=1}^n \{X_i \geq t\}} \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) z \right\} \right] dt dz,$$

em que a troca da ordem das integrais é justificada pelo Teorema de Tonelli (mais detalhes, ver Apêndice B.6). Como X_1, \dots, X_n são i.i.d. com a mesma distribuição de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, a última expressão simplifica-se para

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}^n \left[\mathbb{1}_{\{X \geq t\}} \exp(-Xz) \right] dt dz. \quad (5.24)$$

Quando $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, cálculos diretos mostram que

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X \geq t\}} \exp(-Xz) \right] = \sum_{j=1}^m \pi_j \frac{\lambda^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j, (z + \lambda)t)}{(z + \lambda)^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)}.$$

Consequentemente, usando a identidade acima e o Teorema Multinomial, a integral em (5.24)

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sum_{j=1}^m \pi_j \frac{\lambda^{\alpha_j}}{(z+\lambda)^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)} \Gamma(\alpha_j, (z+\lambda)t) \right]^n dt dz \\ &= \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=n \\ k_1, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \prod_{j=1}^m \pi_j^{k_j} \int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{j=1}^m \frac{\lambda^{\alpha_j k_j} \Gamma^{k_j}(\alpha_j, (z+\lambda)t)}{(z+\lambda)^{\alpha_j k_j} \Gamma^{k_j}(\alpha_j)} dt dz. \end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $u = (z + \lambda)t$, concluímos assim a demonstração do teorema. □

Ao combinarmos o Teorema 5.6.7 com a Proposição 5.4.4, obtemos:

Corolário 5.6.8. O viés de $\widehat{A(\infty)}$ relativo a $A(\infty)$, denotado por $\text{Viés}(\widehat{A(\infty)}, A(\infty))$, é dado por

$$\begin{aligned} & \text{Viés}(\widehat{A(\infty)}, A(\infty)) \\ &= -n \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=n \\ k_1, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \pi_1^{k_1} \dots \pi_m^{k_m} \frac{1}{\sum_{j=1}^m \alpha_j k_j} \int_0^\infty \frac{\Gamma^{k_1}(\alpha_1, u)}{\Gamma^{k_1}(\alpha_1)} \dots \frac{\Gamma^{k_m}(\alpha_m, u)}{\Gamma^{k_m}(\alpha_m)} du. \end{aligned}$$

As integrais no Teorema 5.6.7 e no Corolário 5.6.8 não admitem expressões em forma fechada em termos de funções matemáticas padrão, exigindo, portanto, métodos numéricos para sua avaliação.

5.6.3 Viés do estimador do índice de dispersão

Finalmente, o estimador associado ao índice de dispersão, definido pela razão entre a variância e a média (VMR), é o último a ser obtido por meio do princípio da substituição, cuja aplicação resulta em

$$\widehat{\text{VMR}} = \frac{\widehat{\text{Var}(X)}}{\bar{X}},$$

em que $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e $\widehat{\text{Var}}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ denotam, respectivamente, a média amostral e a estimativa *plug-in* da variância populacional para uma amostra X_1, \dots, X_n i.i.d. de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$.

Como é sabido, a variância *plug-in* $\widehat{\text{Var}}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ constitui um estimador viesado de $\text{Var}(X)$ sob amostragem i.i.d., apresentando expectativa inferior ao valor populacional. Para evitar a propagação desse viés para o índice VMR e para as demais quantidades derivadas, a versão não viesada $\widehat{\text{Var}}(X)_{\text{umb}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ é mais adequada e será a forma empregada neste trabalho, sendo o correspondente estimador do índice denotado por $\widehat{\text{VMR}}_{\text{umb}}$.

Teorema 5.6.9. Se X_1, \dots, X_n são cópias independentes de $X \sim \text{MG}(\boldsymbol{\theta})$, então

$$\mathbb{E} \left[\widehat{\text{VMR}}_{\text{umb}} \right] = \frac{n}{(n-1)\lambda} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} + 1} \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} (\alpha_{j_i} + 1) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right].$$

Demonstração. Note que, utilizando as notações de (5.18), o estimador $\widehat{\text{VMR}}_{\text{umb}}$ pode ser escrito como

$$\widehat{\text{VMR}}_{\text{umb}} = \frac{n}{n-1} S_n \sum_{i=1}^n \left(D_i - \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{n}{n-1} S_n \left(\sum_{i=1}^n D_i^2 - \frac{1}{n} \right).$$

Dado que $Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n$, pelo Teorema 5.3.1, S_n e $(D_1, \dots, D_n)^\top$ são independentes. Assim,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\widehat{\text{VMR}}_{\text{umb}} \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \mathbb{E} [S_n \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n] \times \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n D_i^2 - \frac{1}{n} \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \right]. \end{aligned}$$

Como $S_n \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \sim \text{Gama}(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}, \lambda)$, temos que $\mathbb{E}[S_n \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n] = \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} / \lambda$. Consequentemente, utilizando a Proposição 5.3.2 com $r = 1$ e

$$c_j = 2\delta_{j_i},$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}} \mid Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i}}{\lambda} \left[\frac{1}{(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i})(\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} + 1)} \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} (\alpha_{j_i} + 1) - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a Lei da Esperança Total, o resultado segue. \square

Como resultado direto do Corolário 5.4.5 e do Teorema 5.6.9, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.6.10. O viés de $\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}}$ em relação a VMR, denotado por $\text{Viés}(\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}}, \text{VMR})$, é dado por

$$\begin{aligned} & \text{Viés}(\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}}, \text{VMR}) \\ &= \frac{n}{(n-1)\lambda} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} + 1} \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} (\alpha_{j_i} + 1) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{j_i} \right] \\ & \quad - \frac{1}{\lambda \sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j} \left[\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j (\alpha_j + 1) - \left(\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_j \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Quando $\alpha_j = \alpha$ para todo $j = 1, \dots, m$, obtém-se

$$\text{Viés}(\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}}, \text{VMR}) = \frac{n\alpha}{\lambda(n\alpha + 1)} - \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda(n\alpha + 1)} < 0,$$

indicando que o estimador apresenta viés negativo para todo $n \geq 2$ e $\alpha > 0$. A simplificação obtida decorre de argumento análogo ao empregado na dedução dos vieses dos índices anteriores, em que, sob a homogeneidade dos parâmetros α_j , os termos idênticos podem ser fatorados e a soma sobre os rótulos reduz-se à unidade, conforme o Teorema Multinomial. Como o denominador cresce linearmente com n , o viés tende a zero quando $n \rightarrow \infty$, confirmando o comportamento assintoticamente não tendencioso do estimador. Esse resultado está em conformidade

com Shih (2025).

Neste ponto, cabe destacar que a propriedade de invariância à escala dos estimadores \widehat{T}_T , \widehat{T}_L , $\widehat{A}(1)$ e $\widehat{A}(\infty)$ implica que seus respectivos valores esperados não são afetados pela taxa λ , conforme demonstrado nos Teoremas 5.6.1, 5.6.3, 5.6.5 e 5.6.7, respectivamente. Esse mesmo comportamento, entretanto, não se verifica para o estimador $\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}}$, como evidenciado no Teorema 5.6.9.

No Apêndice D, apresentamos o resumo dos vieses analíticos dos estimadores obtidos nas Subseções 5.6.1, 5.6.2 e 5.6.3.

5.7 O papel do EQM na análise de viés

Como o viés de um estimador $\hat{\theta}$ é definido por

$$\text{Viés}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta,$$

ele quantifica o desvio sistemático entre o valor esperado do estimador e o verdadeiro parâmetro populacional θ . Valores positivos indicam superestimação, enquanto valores negativos refletem subestimação.

Uma medida intimamente relacionada ao viés é o *erro quadrático médio* (EQM), definido como

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \text{Var}(\hat{\theta}) + [\text{Viés}(\hat{\theta})]^2,$$

que combina a variabilidade e o viés em uma única métrica de desempenho, refletindo tanto o erro aleatório associado à dispersão das estimativas quanto o erro sistemático decorrente do viés.

Essa decomposição torna o EQM particularmente relevante em experimentos de simulação de Monte Carlo, nos quais múltiplas réplicas são geradas sob condições controladas. Nesses cenários, o EQM permite comparar estimadores distintos quanto ao seu desempenho global, in-

corporando simultaneamente precisão (via variância) e acurácia (via viés). Assim, ele constitui uma ferramenta essencial na avaliação empírica conduzida neste trabalho, servindo de referência para quantificar o ganho efetivo obtido pelas versões corrigidas dos estimadores em relação às suas formas originais.

5.8 Métodos de Monte Carlo

Os métodos de Monte Carlo correspondem a uma ampla classe de algoritmos da análise numérica que fazem uso de simulação computacional. Embora sejam aplicados em diversas áreas do conhecimento, neste trabalho será apresentada apenas uma visão geral de seu uso no contexto da inferência estatística, com foco na avaliação do comportamento de estimadores, em especial no estudo de seu viés. Para uma introdução mais abrangente aos fundamentos desses métodos, recomenda-se a leitura de Rizzo (2019).

A ideia central desses métodos pode ser ilustrada a partir de um problema de integração. Suponha que se queira calcular uma integral da forma

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx,$$

em que $g(x)$ é uma função conhecida. Em muitos casos, essa integral não pode ser resolvida de forma exata ou envolveria alto custo computacional. Uma alternativa é reescrevê-la como a esperança matemática de uma função em relação a uma densidade de probabilidade $f(x)$ escolhida de modo que $f(x) > 0$ sempre que $g(x) \neq 0$:

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = \mathbb{E} \left[\frac{g(X)}{f(X)} \right] = \mathbb{E}[h(X)],$$

em que X é uma variável aleatória com densidade $f(x)$ e $h(x) = g(x)/f(x)$. Dessa forma, o problema de integração é convertido no cálculo de um valor esperado.

Caso seja possível gerar N_{rep} amostras independentes $\{X_1^{(r)}, X_2^{(r)}, \dots, X_n^{(r)}\}$, $r = 1, \dots, N_{\text{rep}}$,

segundo a densidade $f(x)$, define-se o estimador de Monte Carlo

$$\hat{\theta}_{N_{\text{rep}}} = \frac{1}{N_{\text{rep}}} \sum_{r=1}^{N_{\text{rep}}} h\left(X_1^{(r)}, X_2^{(r)}, \dots, X_n^{(r)}\right),$$

que fornece uma aproximação para θ . A precisão da estimativa aumenta com o número de replicações N_{rep} , enquanto o tamanho amostral n afeta a variabilidade de cada estimador $h(\cdot)$. A consistência dessa estimativa é garantida pela Lei dos Grandes Números, enquanto o Teorema do Limite Central assegura a normalidade assintótica sob condições regulares (Rizzo, 2019).

Ao delimitar o uso dos métodos de Monte Carlo no contexto deste trabalho, ainda que existam expressões analíticas para os valores esperados dos estimadores, tais métodos permitem validar empiricamente os resultados teóricos e avaliar o desempenho prático das versões corrigidas e não corrigidas em termos de viés e EQM. Nos experimentos de Monte Carlo, essas duas medidas são estimadas empiricamente a partir de N_{rep} repetições independentes por

$$\widehat{\text{Viés}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N_{\text{rep}}} \sum_{r=1}^{N_{\text{rep}}} (\hat{\theta}^{(r)} - \theta), \quad \widehat{\text{EQM}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N_{\text{rep}}} \sum_{r=1}^{N_{\text{rep}}} (\hat{\theta}^{(r)} - \theta)^2. \quad (5.25)$$

Essas estimativas fornecem aproximações numéricas para os valores teóricos correspondentes, permitindo comparar o desempenho de diferentes estimadores sob as mesmas condições populacionais e amostrais e quantificar o ganho obtido pelas correções propostas.

Para avaliar a *precisão* dessas estimativas de Monte Carlo, consideram-se também seus erros-padrão. Se $\hat{\theta}^{(1)}, \dots, \hat{\theta}^{(N_{\text{rep}})}$ denotam as réplicas, então o erro-padrão de Monte Carlo do viés e do EQM são dados por

$$\text{EP}_{\text{MC}}(\widehat{\text{Viés}}) = \frac{\text{desv}\left(\hat{\theta}^{(r)}\right)}{\sqrt{N_{\text{rep}}}}, \quad \text{EP}_{\text{MC}}(\widehat{\text{EQM}}) = \frac{\text{desv}\left((\hat{\theta}^{(r)} - \theta)^2\right)}{\sqrt{N_{\text{rep}}}}, \quad (5.26)$$

em que $\text{desv}(\cdot)$ denota o desvio-padrão amostral das N_{rep} réplicas.

Esses erros-padrão indicam a variabilidade inerente às estimativas geradas por simulação

e permitem verificar se o número de repetições é suficiente para garantir a estabilidade dos resultados apresentados.

Por fim, cabe salientar que os métodos de Monte Carlo são particularmente úteis quando as distribuições amostrais são assimétricas ou de difícil tratamento analítico, como ocorre no caso de misturas de distribuições gama. Nesses contextos, a simulação fornece uma estimativa empírica das propriedades de segunda ordem dos estimadores (viés e variância), permitindo avaliar sua robustez frente à heterogeneidade populacional e ao tamanho da amostra. Em especial, a comparação entre os estimadores corrigidos e não corrigidos evidencia o impacto das correções analíticas na redução do viés e, conseqüentemente, no desempenho global medido pelo EQM.

Capítulo 6

Estudo de Simulação

Conforme discutido na Seção 5.8, os métodos de Monte Carlo constituem uma ferramenta fundamental para avaliar empiricamente o desempenho de estimadores sob diferentes condições amostrais e populacionais. Neste trabalho, são empregados para comparar as versões tradicionais e corrigidas pelo viés dos índices de desigualdade (Theil-T, Theil-L, Atkinson com $\varepsilon = 1$, Atkinson no limite $\varepsilon \rightarrow \infty$ e o índice de dispersão, VMR), analisando o impacto das correções analíticas em termos de *viés* e *EQM*, especialmente em amostras pequenas e moderadas.

O delineamento experimental segue a metodologia de Vila e Saulo (2025a), estruturada para capturar os efeitos conjuntos do tamanho amostral e da heterogeneidade da mistura sobre o desempenho dos estimadores. Considerou-se uma mistura bidimensional com pesos fixos $(\pi_1, \pi_2) = (0,60; 0,40)$, parâmetro de forma da primeira componente $\alpha_1 = 0,5$ e da segunda variando em $\alpha_2 \in \{0,5; 1; 2; 3; 4; 5\}$, mantendo o parâmetro de taxa fixo em $\lambda = 1$. Essa configuração abrange desde um caso homogêneo ($\alpha_2 = 0,5$) até distribuições mais concentradas ($\alpha_2 = 5,0$).

Os tamanhos amostrais variaram de $n = 10$ a $n = 100$, e o número de réplicas foi fixado em $N_{\text{rep}} = 1.000$, assegurando estabilidade estatística sem comprometer a viabilidade computacional. As observações foram geradas segundo a Definição 5.1.1, em que cada X_i provém da k -ésima componente com probabilidade π_k . Para cada amostra, estimaram-se os parâmetros da

mistura por máxima verossimilhança, obtendo-se $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda})$, e calcularam-se os índices e suas versões corrigidas:

$$\hat{\theta}_{bc} = \hat{\theta} - \widehat{\text{Bias}}(\theta, \hat{\theta}),$$

em que $\widehat{\text{Bias}}(\theta, \hat{\theta})$ representa o termo de correção analítico.

Por fim, a análise avalia se as correções reduzem o viés sem aumentar substancialmente a variância, resultando em estimadores mais precisos e estáveis. A precisão das estimativas é quantificada pelos erros-padrão de Monte Carlo do viés e do EQM, que medem a variabilidade residual associada ao processo de simulação e asseguram a confiabilidade numérica dos resultados apresentados. Todo o procedimento, desde a geração das amostras, estimação dos parâmetros, cálculo dos índices, aplicação das correções e avaliação final, é sintetizado no Algoritmo 1, executado de forma idêntica para todos os índices considerados, variando apenas o funcional θ de interesse.

Algoritmo 1: Simulação de Monte Carlo para estimadores corrigidos de viés

Entrada: Número de réplicas $N_{\text{rep}} = 1.000$;

Tamanhos amostrais $n \in \{10, 11, \dots, 100\}$;

Parâmetros verdadeiros $(\pi_1, \pi_2) = (0,6; 0,4)$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 \in \{0,5, 1, 2, 3, 5\}$ e $\lambda = 1$.

Saída: Viés, EQM e erros-padrão de Monte Carlo dos estimadores tradicionais e corrigidos.

para cada combinação de (n, α_2) **faça**

para $r = 1$ até N_{rep} **faça**

 Gerar $X_1^{(r)}, \dots, X_n^{(r)}$ da mistura gama;

 Estimar os parâmetros da mistura via máxima verossimilhança;

para cada $\theta \in \{\text{Theil-T}, \text{Theil-L}, A(1), A(\infty), \text{VMR}\}$ **faça**

 Calcular o estimador tradicional $\hat{\theta}^{(r)}$;

 Calcular o termo de correção $\widehat{B}^{(r)}(\theta)$;

 Calcular o estimador corrigido $\hat{\theta}_{bc}^{(r)} = \hat{\theta}^{(r)} - \widehat{B}^{(r)}(\theta)$;

fim

fim

 Calcular o viés e o EQM conforme Eq. (5.25);

 Calcular os erros-padrão de Monte Carlo conforme Eq. (5.26);

fim

retorna As estimativas de viés, EQM e erros-padrão de Monte Carlo para $\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}_{bc}$.

6.1 Estimação dos Parâmetros da Mistura Gama

A simulação requer a estimação, em cada réplica, dos parâmetros da mistura de distribuições Gama, $MG(\pi, \alpha, \lambda)$, a partir das amostras geradas segundo a Definição 5.1.1. A estimação foi realizada por máxima verossimilhança, mediante otimização numérica direta da função de log-verossimilhança da mistura.

A parametrização adotada impõe, de forma contínua e diferenciável, todas as restrições necessárias à definição do modelo, evitando dificuldades numéricas comuns em estimação de misturas. Para garantir que $\pi_1 \in (0, 1)$, utilizou-se a transformação logística $\pi_1 = \exp(\eta)/(1 + \exp(\eta))$. A positividade dos parâmetros de forma e de taxa foi assegurada mediante restrições de caixa no algoritmo de otimização. Além disso, seguiu-se a convenção de ordenação apresentada na Seção 5.1, na qual os parâmetros de forma são reparametrizados em termos de (a, δ) , com $a > 0$ e $\delta \in \mathbb{R}$. Essa formulação garante uma ordenação consistente entre as componentes ao longo da otimização, evitando soluções numericamente instáveis ou a necessidade de reordenamento posterior.

A otimização foi conduzida com o método L-BFGS-B (*Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno with Bounds*), por meio da função `optim` do R, especificando limites inferiores positivos para a e λ . Os valores iniciais foram definidos a partir de um vetor pré-especificado na escala reparametrizada, e a convergência foi avaliada pelo critério padrão do método, baseado na estabilização relativa da função de verossimilhança. Para cada réplica, a solução final corresponde ao máximo local obtido a partir desse ponto inicial.

6.2 Dificuldades de Implementação Computacional

Durante o desenvolvimento das rotinas de cálculo dos vieses dos estimadores, implementadas no ambiente R (versão 4.4.2) (R Core Team, 2024), observou-se que a principal limitação prática residia no custo computacional associado às somas sobre todas as composições possíveis do tamanho amostral. Essas expressões envolvem termos combinatórios de alta ordem, cuja

cardinalidade cresce exponencialmente com o número de componentes e com o tamanho da amostra n . Como consequência, a avaliação direta das fórmulas teóricas torna-se rapidamente inviável, sobretudo em cenários de maior heterogeneidade e quando se busca estimar o viés para várias configurações de parâmetros.

Além disso, o uso de fatoriais em expressões envolvendo coeficientes combinatórios, como $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$, levou ao estouro da capacidade numérica em operações envolvendo fatoriais, uma vez que os valores de $n!$ crescem de forma superexponencial. Tal comportamento inviabiliza o cálculo direto para amostras moderadamente grandes, produzindo resultados indefinidos ou imprecisos na aritmética de ponto flutuante padrão do R.

Para contornar essas dificuldades, adotou-se uma estratégia dupla de otimização. Primeiramente, as somatórias foram reorganizadas de modo a agrupar termos com pesos combinatórios idênticos, reduzindo a redundância e o número efetivo de operações. Para ilustrar isso, sob cenário estudado, o de apenas duas componentes, é possível mostrar que o somatório multinomial pode ser reorganizado como

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \pi_1^{k_1} \dots \pi_m^{k_m} \stackrel{m=2}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_1^k (1 - \pi_1)^{n-k}.$$

Já para o caso geral, o número de termos do somatório à esquerda é dado pelo número de composições inteiras de n em m partes, isto é,

$$N_{\text{comp}} = \binom{n + m - 1}{m - 1},$$

o que implica um custo computacional da ordem de $\mathcal{O}\left(\binom{n+m-1}{m-1}\right)$. Entretanto, ao explorar as simetrias das composições e agrupar os termos com pesos combinatórios idênticos, o número de operações reduz-se para $\mathcal{O}(n)$ quando $m = 2$. Essa simplificação representa uma redução de uma a duas ordens de grandeza no tempo de execução, sem perda de exatidão analítica.

A segunda estratégia de otimização refere-se a substituição do cálculo direto de fatoriais

pela função log-gama, `lgamma`, que oferece uma forma numericamente estável para computar $\log(\Gamma(x))$ sem risco de estouro. Essa reformulação preserva a precisão aritmética e possibilita trabalhar com valores de n bem maiores, transformando multiplicações e divisões de grandes números em operações de soma e subtração no espaço logarítmico.

Tais modificações foram decisivas para tornar o algoritmo executável em tempo razoável, viabilizando a estimação dos vieses em múltiplas configurações paramétricas e tamanhos amostrais. Em resumo, a reformulação dos somatórios e o uso de representações logarítmicas constituíram um compromisso entre exatidão teórica e eficiência numérica, aspecto fundamental para o sucesso da implementação.

6.3 Resultados da Simulação

Os resultados das simulações são apresentados nas Figuras 6.1 e 6.2, que mostram o comportamento médio do viés e do EQM dos estimadores em função de α_2 e de n , respectivamente. O Apêndice C complementa essas figuras ao elencar, para cada combinação de parâmetros, os valores de θ e $\hat{\theta}$, o viés empírico, o EQM e os erros-padrão associados a essas estimativas, permitindo avaliar a precisão numérica das simulações e confirmando as tendências gerais observadas nos gráficos.

6.3.1 Heterogeneidade populacional

De forma geral, pela Figura 6.1, que apresenta o viés médio (coluna à esquerda) e o EQM (coluna à direita) dos estimadores em função de α_2 , mantendo fixos $\alpha_1 = 0,5$ e $n = 15$, observa-se variação sistemática dessas métricas conforme aumenta a heterogeneidade. Esse comportamento evidencia que diferenças entre as componentes da mistura afetam distintamente cada índice, refletindo a dependência dos termos α_j/λ discutida no Capítulo 5.6. Os valores do Apêndice C reforçam essa tendência, mostrando redução dos vieses empíricos e dos erros-padrão à medida que cresce a separação entre as componentes.

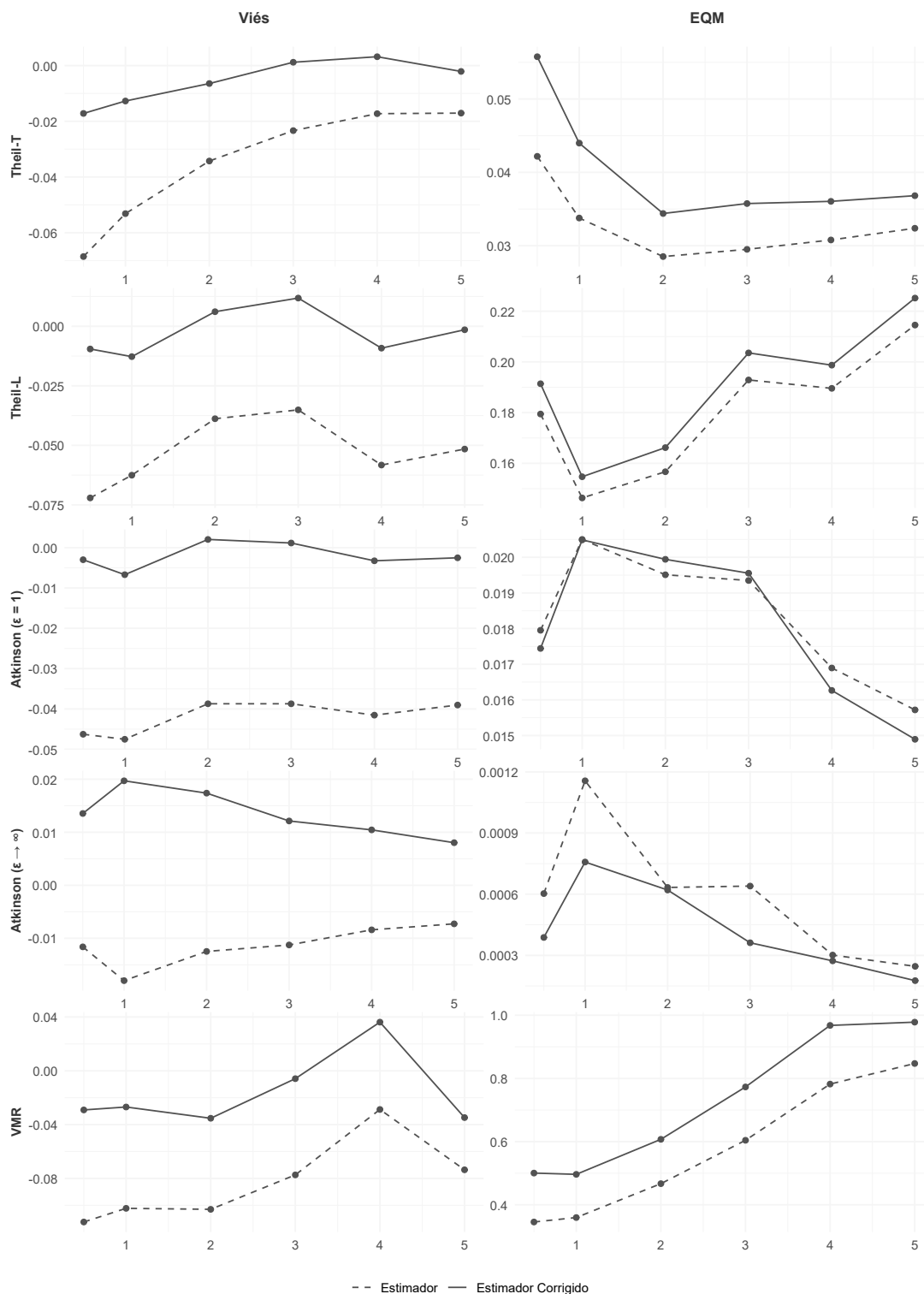


Figura 6.1 Viés (à esquerda) e Erro Quadrático Médio (EQM) (à direita) dos índices em função do parâmetro α_2 para $\alpha_1 = 0,5$ e $n = 15$.

Para o índice Theil-T, o estimador tradicional (linha tracejada) apresenta viés negativo expressivo para pequenas α_2 , o qual se reduz à medida que a heterogeneidade aumenta. Esse padrão é coerente com as expressões analíticas apresentadas no Capítulo 5.6, nas quais o viés depende de diferenças entre as quantidades α_j/λ : quando α_2 se afasta de α_1 (mantendo a taxa comum), os termos que compõem o valor esperado do estimador variam de forma não linear, atenuando o viés negativo presente em cenários de baixa separação entre grupos. A versão corrigida (linha sólida) praticamente elimina esse viés, mantendo-se próxima de zero em toda a faixa, aspecto confirmado também nos valores tabulados no Apêndice C, cujos erros-padrão de Monte Carlo permanecem pequenos em todas as combinações de parâmetros.

O mesmo comportamento é observado para o índice Theil-L, em que a correção reduz substancialmente a magnitude do viés e estabiliza o comportamento das estimativas. Resultados semelhantes são verificados para o índice de Atkinson com $\varepsilon = 1$, cujo viés é reduzido e torna-se praticamente nulo após a correção. No caso limite $\varepsilon \rightarrow \infty$, observa-se leve inversão de sinal ("supercorreção") para pequenas α_2 . Esse efeito é esperado porque $A(\infty)$ depende fortemente do mínimo amostral, o qual apresenta elevada variabilidade quando n é reduzido; em tais situações, a correção analítica baseada em valores esperados populacionais pode sobrecompensar temporariamente o viés, fenômeno que desaparece conforme α_2 aumenta ou o tamanho amostral cresce. Por fim, para o índice de dispersão (VMR), a correção diminui significativamente o viés negativo, embora ainda persista certa variabilidade com o aumento de α_2 , padrão igualmente refletido nos valores apresentados no apêndice.

6.3.2 Tamanho amostral

De forma geral, pela Figura 6.1, que apresenta o viés médio (coluna à esquerda) e o EQM (coluna à direita) dos estimadores em função de α_2 , mantendo fixos $\alpha_1 = 0,5$ e $n = 15$, observa-se variação sistemática dessas métricas à medida que cresce a heterogeneidade. Esse comportamento evidencia que diferenças entre as componentes da mistura afetam de modo distinto cada índice, refletindo a dependência dos termos α_j/λ discutida no Capítulo 5.6.

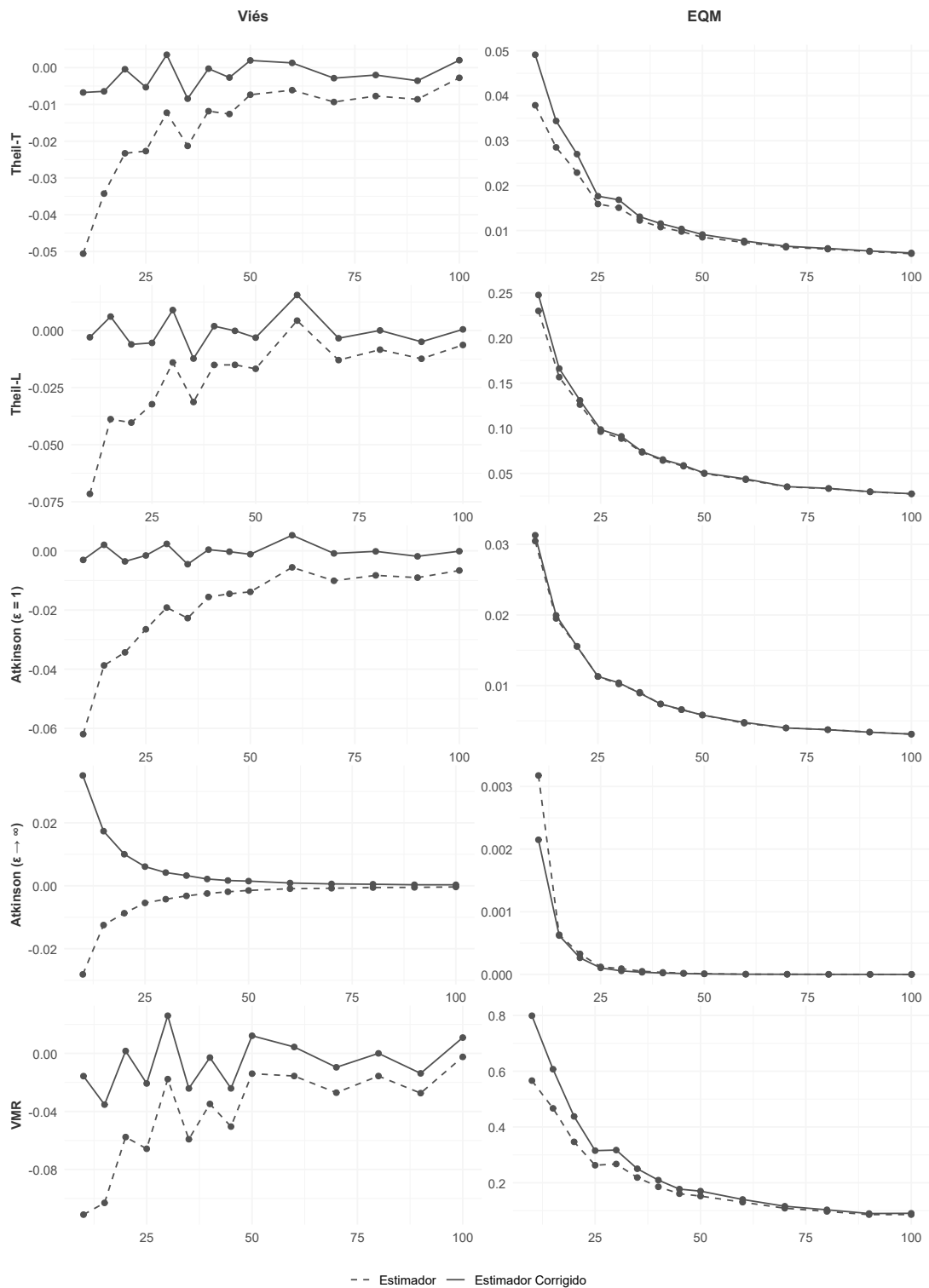


Figura 6.2 Viés (à esquerda) e Erro Quadrático Médio (EQM) (à direita) dos índices em função do tamanho da amostra n para $\alpha_1 = 0,5$ e $\alpha_2 = 2,0$.

Ademais, os valores reunidos no Apêndice C reforçam essa tendência, mostrando redução consistente dos vieses empíricos e dos erros-padrão conforme aumenta a separação entre as componentes. Esses resultados confirmam, de forma numérica, as mesmas relações estruturais observadas nas curvas da figura.

Nos índices de Theil e Atkinson ($\varepsilon = 1$), nota-se inicialmente um viés negativo para amostras pequenas, indicando *subestimação sistemática* da desigualdade sob tamanhos reduzidos. Esse viés é gradualmente corrigido com o aumento de n , tornando-se praticamente nulo a partir de $n = 30$. O estimador de Theil-L apresenta maior variabilidade em pequenas amostras, refletindo sua sensibilidade às caudas inferiores da distribuição. Já o índice Atkinson ($\varepsilon \rightarrow \infty$), que enfatiza a desigualdade entre os indivíduos mais pobres, apresenta viés próximo de zero de maneira mais acentuada, sugerindo menor suscetibilidade a flutuações amostrais. Por fim, o VMR mostra padrão mais oscilatório em pequenas amostras, mas converge rapidamente com o aumento de n .

O EQM reforça as mesmas conclusões, de que existe uma redução monótona dessa métrica à medida que n cresce, evidenciando ganho simultâneo em precisão e estabilidade. A diferença entre o estimador tradicional (linha tracejada) e o corrigido por viés (linha contínua) é relevante apenas para amostras pequenas: por exemplo, para $n = 15$, a razão $\text{EQM}_{\text{corr}}/\text{EQM}_{\text{trad}}$ situa-se tipicamente entre 0,80 e 0,90 nos índices de Theil e Atkinson, indicando ganho relativo de 10% a 20% em precisão. Esse efeito torna-se praticamente irrelevante em amostras maiores, nas quais ambos os estimadores convergem para o mesmo limite assintótico.

Cabe observar que as estimativas de viés e de EQM apresentadas nas figuras estão sujeitas à variabilidade inerente ao procedimento de simulação, quantificada pelo erro-padrão de Monte Carlo definido anteriormente na Seção 5.8. Para $N_{\text{sim}} = 1.000$, esses erros-padrão situam-se tipicamente entre 10^{-3} e 10^{-2} , valores pequenos quando comparados às diferenças observadas entre os estimadores tradicional e corrigido. Dessa forma, as curvas reportadas são numericamente estáveis e não apresentam distorções decorrentes do número finito de simulações. Os valores completos dos erros-padrão, para diferentes números de réplicas, encontram-se reunidos

no Apêndice C, permitindo verificar que as conclusões qualitativas se mantêm mesmo quando N_{sim} é aumentado em uma ordem de grandeza.

Esses resultados indicam que todos os estimadores são consistentes e assintoticamente não viesados, apresentando eficiência crescente à medida que o tamanho amostral aumenta. As medidas de desigualdade mantêm robustez sob o modelo de mistura de distribuições Gama, com desempenho satisfatório já em amostras moderadas ($n \approx 30$).

Capítulo 7

Aplicação em Dados Reais

Os dados utilizados correspondem ao Produto Interno Bruto (PIB) per capita⁽¹⁾ de países da América do Norte e da Oceania. Foram consideradas as observações para o ano mais recente disponível (2023), totalizando $n = 18$ países. Os valores foram expressos em milhares de dólares para facilitar a interpretação e a comparação entre as economias analisadas.

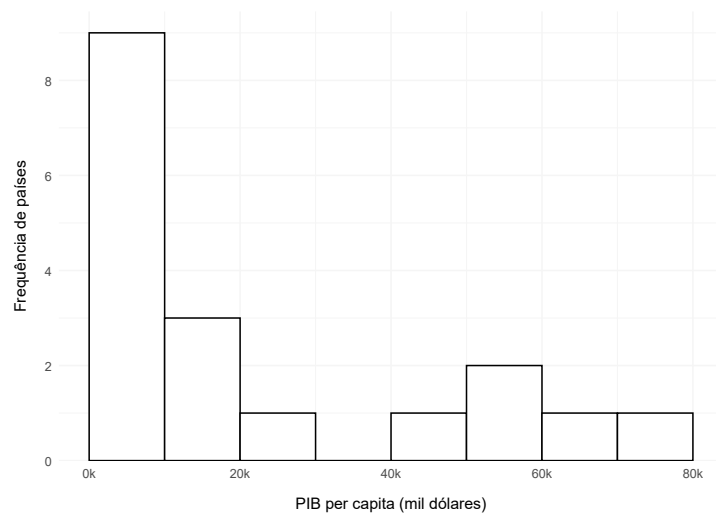


Figura 7.1 Distribuição do PIB per capita (em milhares de dólares) dos países da América do Norte e da Oceania em 2023.

⁽¹⁾Indicador *GDP (Gross Domestic Product) per capita, PPP (constant 2021 international \$)*, que mede o PIB per capita ajustado pela Paridade de Poder de Compra (PPP) e expresso em dólares internacionais constantes de 2021. Fonte: *World Bank Open Data* (Banco Mundial, 2024).

O histograma da Figura 7.1 revela uma distribuição assimétrica à direita, com predominância de países nas faixas de menor PIB per capita. A diferença entre a média (22,99 mil dólares) e a mediana (9,68 mil dólares) confirma essa assimetria, enquanto o desvio-padrão elevado (25,50 mil dólares) indica ampla dispersão e reforça a heterogeneidade entre as economias. Observa-se ainda uma bimodalidade incipiente, com um grupo majoritário de países de renda inferior e outro menor, formado por economias desenvolvidas.

A Figura 7.2 evidencia esse padrão bimodal por meio do ajuste de uma mistura de distribuições gama, adequada para representar tanto a separação entre grupos quanto a assimetria interna de cada componente. O modelo estimou proporções de $\hat{\pi}_1 = 0,7221$ e $\hat{\pi}_2 = 0,2779$, parâmetros de forma $\hat{\alpha}_1 = 2,7966$ e $\hat{\alpha}_2 = 21,9126$, e taxa comum $\hat{\lambda} = 0,3528$. As médias e desvios-padrões estimados dos componentes, calculados por $\hat{\mu}_j = \hat{\alpha}_j / \hat{\lambda}$ e $\hat{\sigma}_j = \sqrt{\hat{\alpha}_j / \hat{\lambda}}$, são de aproximadamente 9,9 mil e 5,9 mil dólares para o primeiro grupo e 77,4 mil e 16,5 mil dólares para o segundo. Esses resultados indicam que cerca de 72% dos países integram um grupo de menor renda e maior variabilidade relativa, enquanto os demais compõem um grupo mais homogêneo e de alta renda, refletindo a dualidade estrutural observada na distribuição.

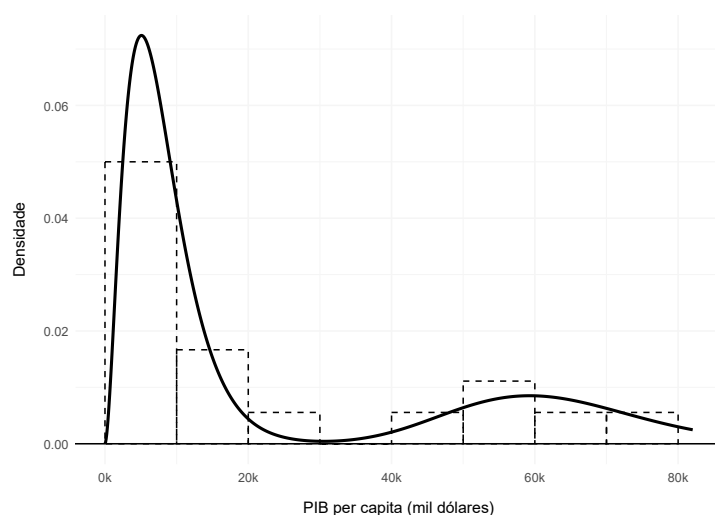


Figura 7.2 Distribuição empírica do PIB per capita (em milhares de dólares) dos países da América do Norte e da Oceania em 2023, evidenciando a bimodalidade capturada pela curva ajustada.

Com base no modelo ajustado à amostra de países, foram obtidas estimativas empíricas dos índices de desigualdade. Para cada medida, calculou-se o estimador padrão $\hat{\theta}$, o viés analítico estimado $\widehat{\text{Bias}}$, avaliado nos parâmetros ajustados do modelo, e a versão corrigida de viés $\hat{\theta}_{\text{corr}} = \hat{\theta} - \widehat{\text{Bias}}$. Os resultados estão dispostos na Tabela 7.1, cuja leitura conjunta permite uma interpretação abrangente da desigualdade observada.

Tabela 7.1 Estimativas empíricas dos índices de desigualdade e correções analíticas de viés sob mistura gama ajustada ao PIB per capita global.

Índice	$\hat{\theta}$	$\widehat{\text{Bias}}$	$\hat{\theta}_{\text{corr}}$
Theil-T	0,5282	-0,0246	0,5529
Theil-L	0,6354	-0,0364	0,6718
Atkinson ($\varepsilon=1$)	0,4703	-0,0233	0,4936
Atkinson ($\varepsilon \rightarrow \infty$)	0,8898	-0,1002	0,9899
VMR	28,2871	-0,3068	28,5939

Entre as medidas analisadas, destacam-se novamente os índices T_T e T_L , com valores corrigidos de 0,5529 e 0,6718, respectivamente. A proximidade relativa entre ambos indica que a maior parte da desigualdade global é explicada pelas faixas inferiores da distribuição de renda, com predominância de países de baixa e média renda. O índice T_L , ao atribuir maior peso relativo às rendas mais baixas, apresenta valor ligeiramente superior ao T_T , que capta a desigualdade em torno da média e tende a refletir também as diferenças entre os estratos médios e superiores.

O índice de Atkinson com $\varepsilon = 1$ apresentou valor corrigido de 0,4936, implicando que uma distribuição perfeitamente igualitária que preservasse o mesmo nível de bem-estar social corresponderia a aproximadamente 50,6% da renda média global. Já no caso limite de $\varepsilon \rightarrow \infty$, o valor corrigido de 0,9899 sugere um rendimento equivalente próximo de 1% da média. Embora esse valor seja numericamente extremo, ele decorre diretamente da sensibilidade infinita às rendas mais baixas e é coerente com a forte assimetria da amostra, pois a mediana (9,68 mil dólares) é cerca de um terço da média (22,99 mil dólares), e o grupo de países mais pobres concentra-se perto do limite inferior da distribuição ajustada. Assim, o valor elevado de $A(\infty)$

não indica inconsistência do modelo, mas reflete a severa penalização das caudas inferiores sob aversão à desigualdade extrema.

As estimativas de viés apresentadas na Tabela 7.1 foram obtidas por meio de correções analíticas avaliadas nos parâmetros ajustados do modelo de mistura, isto é, tratam-se de correções *do tipo plug-in*: substitui-se os parâmetros estimados pelos verdadeiros na expressão de viés deduzida teoricamente. Embora esse procedimento seja consistente e amplamente utilizado, ele não propaga a incerteza adicional decorrente do ajuste da mistura, razão pela qual o valor corrigido deve ser interpretado como aproximação ao estimador não viesado sob o modelo ajustado, e não como correção exata em sentido estritamente frequentista.

O valor estimado do índice de dispersão reforça o diagnóstico obtido pelas demais medidas. Entretanto, a interpretação de $\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}}^{\text{corr}} = 28,5939$ requer atenção, ao contrário dos índices de entropia, o VMR não é invariante a escala. Como $\text{Var}(X)$ e $\mathbb{E}[X]$ têm unidades distintas, a razão $\text{Var}(X)/\mathbb{E}[X]$ mantém a unidade de medida de X . Isso implica que a simples troca da unidade de "mil dólares" para "dólares" multiplicaria todas as estimativas de VMR por 1,000, sem alterar qualquer aspecto substantivo da distribuição, mas mudando sua magnitude numérica. Assim, o valor observado reflete a unidade monetária escolhida e não deve ser comparado diretamente a resultados expressos em escalas distintas.

Por fim, as correções analíticas de viés apresentaram magnitude da ordem de 10^{-2} , indicando que os estimadores empíricos se aproximam do não viesado sob o modelo ajustado; ainda assim, sua aplicação mostrou-se essencial para eliminar o viés residual e confirmar empiricamente a validade das expressões teóricas deduzidas na Seção 5.6. Em conjunto, esses resultados demonstram que o modelo de mistura gama é adequado não apenas para representar a heterogeneidade estrutural das rendas, mas também como base consistente e robusta para a avaliação e correção do viés dos estimadores de desigualdade.

Capítulo 8

Conclusões

O presente trabalho investigou o comportamento dos estimadores dos índices de desigualdade de Theil, de Atkinson e do índice de dispersão (VMR) sob cenários de heterogeneidade populacional modelados por misturas finitas de distribuições gama com parâmetro de taxa comum. Motivou-se essa análise pelo fato de tais medidas apresentarem formulações não lineares, baseadas em razões e transformações logarítmicas, o que induz viés sistemático em amostras finitas, especialmente quando a heterogeneidade estrutural é pronunciada. Evidências recentes indicam que ignorar a estrutura de mistura pode comprometer a validade inferencial, mesmo sob consistência assintótica (Vila e Saulo, [2025a](#); Vila e Saulo, [2025b](#); Shih, [2025](#)).

Do ponto de vista analítico, foram obtidas expressões fechadas para o valor esperado dos estimadores plug-in, utilizando o teorema de independência proporção–soma de Mosimann e propriedades fundamentais da distribuição Dirichlet. Esses resultados caracterizam formalmente o viés decorrente da heterogeneidade e revelam sua dependência direta da divergência entre os parâmetros de forma das componentes. Assim, o viés não é apenas reflexo da variabilidade amostral, mas também consequência da interação funcional entre subpopulações distintas.

As simulações de Monte Carlo corroboraram esses achados teóricos. De modo geral, o viés absoluto diminuiu com o crescimento de n , confirmando a consistência dos estimadores. Contudo, o efeito da heterogeneidade não é uniforme entre as medidas, mesmo assim, os índices

apresentaram predominância de viés negativo, enquanto o coeficiente de Gini, segundo Vila e Saulo (2025a), tende a apresentar viés positivo sob estruturas de mistura. Esse contraste evidencia que a direção do viés decorre da estrutura funcional das medidas, ao passo que o Gini amplifica desigualdades intergrupais, as transformações logarítmicas suavizam contrastes extremos, levando predominantemente a viés negativo nas medidas baseadas em entropia. As correções propostas reduziram o viés de forma sistemática, sobretudo em amostras pequenas e moderadas, enquanto as diferenças em termos de erro quadrático médio se mostraram modestas e diminuíram à medida que n aumentou, refletindo a convergência assintótica.

A aplicação a dados reais de PIB per capita confirmou que misturas gama representam adequadamente a heterogeneidade econômica entre países. Embora o viés observado tenha sido da ordem de 10^{-2} , as correções mostraram-se relevantes para garantir precisão inferencial e evitar distorções interpretativas, indicando que o uso de estimadores corrigidos não constitui mero refinamento matemático, mas uma etapa necessária para conclusões robustas em contextos empíricos com heterogeneidade estrutural.

Dentre as limitações deste estudo, algumas merecem destaque:

- A hipótese de taxa comum entre as componentes da mistura, embora necessária para a obtenção de expressões fechadas, restringe a flexibilidade do modelo em cenários mais gerais.
- Os cenários de simulação considerados, ainda que representativos, não abrangem todas as possíveis configurações paramétricas; diferentes estruturas de mistura podem alterar a magnitude e o padrão do viés.
- As correções propostas utilizam estimativas plug-in dos parâmetros da mistura, sem propagação formal da incerteza associada ao ajuste do modelo.
- A aplicação empírica entre países foi conduzida sem ponderação populacional, o que limita a interpretação normativa ao nível das unidades agregadas.

- O índice VMR não é *scale-free*, sendo sensível à unidade monetária utilizada, diferentemente das medidas baseadas em entropia.

Como desdobramentos naturais deste estudo, destaca-se a possibilidade de desenvolver um pacote de software em R ou Python que reúna as correções plug-in apresentadas, além de rotinas de simulação e *vignettes* que reproduzam integralmente as análises e figuras discutidas ao longo do trabalho. Outra direção promissora consiste na extensão pragmática do arcabouço para misturas com parâmetros de taxa distintos, utilizando *bootstrap* paramétrico como mecanismo numérico de correção do viés, preservando a lógica analítica, porém com maior flexibilidade. Estudos envolvendo versões bivariadas do modelo, combinando margens gama com uma cópula simples, também constituem um passo seguro para investigar como estruturas de dependência influenciam medidas de desigualdade, preparando terreno para formulações plenamente multivariadas.

Em síntese, este trabalho aprofunda o entendimento teórico e empírico do viés em estimadores de desigualdade sob heterogeneidade populacional e estabelece bases consistentes para avanços metodológicos futuros, tanto no plano computacional quanto no analítico, capazes de fortalecer aplicações em cenários empíricos cada vez mais complexos.

Bibliografia

- Abouammoh, AM, Alshangiti, Arwa M e Ragab, IE (2015). “A new generalized Lindley distribution”. *Journal of Statistical computation and simulation* 85.18, pp. 3662–3678.
- Aitchison, John (1982). “The Statistical Analysis of Compositional Data”. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 44.2, pp. 139–177.
- Allison, Paul D. (1978). “Measures of Inequality”. *American Sociological Review* 43.6, pp. 865–880.
- Atkinson, Anthony B et al. (1970). “On the measurement of inequality”. *Journal of Economic Theory* 2.3, pp. 244–263.
- Banco Mundial (2024). *PIB per capita, PPA (dólares internacionais constantes de 2021)*. Programa de Comparação Internacional (ICP), Banco Mundial (BM); Programa de PPA da Eurostat (ESTAT); Programa de PPA da OCDE; Banco de Dados do Panorama Econômico Mundial (FMI); Arquivos de Contas Nacionais. Dados publicados em: 30 maio 2024. Licença: CC BY-4.0. URL: <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.PP.KD> (acesso em 14/10/2024).
- Baydil, Banu et al. (2025). “Unbiased estimation of the Gini coefficient”. *Statistics & Probability Letters* 222.C. DOI: [10.1016/j.spl.2025.110376](https://doi.org/10.1016/j.spl.2025.110376).
- Beach, Charles M. e Davidson, Russell (1983). “Distribution-Free Statistical Inference with Lorenz Curves and Income Shares”. *The Review of Economic Studies* 50.4, pp. 723–735.
- Bellù, Lorenzo Giovanni e Liberati, Paolo (2006). *Describing Income Inequality: Theil Index and Entropy Class Indexes*. Rel. técn. EASYPol Module 057. Rome: Food e Agriculture Or-

- ganization of the United Nations (FAO). URL: <http://www.fao.org/tc/easypol> (acesso em 18/09/2024).
- Billingsley, Patrick (1995). *Probability and Measure*. 3rd. John Wiley & Sons.
- Bliss, C. I. e Fisher, Ronald A. (1953). “Fitting the Negative Binomial Distribution to Biological Data”. *Biometrics* 9.2, pp. 176–200. DOI: [10.2307/3001636](https://doi.org/10.2307/3001636). URL: <https://doi.org/10.2307/3001636> (acesso em 17/09/2024).
- Botta, Robert F, Harris, Carl M e Marchal, William G (1987). “Characterizations of generalized hyperexponential distribution functions”. *Stochastic Models* 3.1, pp. 115–148.
- Bourguignon, Francois (1979). “Decomposable income inequality measures”. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* 47.4, pp. 901–920.
- Brezis, Haim e Brézis, Haim (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer.
- Bullen, Peter S (2003). *The power means*. Springer, pp. 175–265.
- Chakravarty, Satya R (2009). *Inequality, polarization and poverty: Advances in distributional analysis*. Springer.
- Chen, Yen-Chi (2020). *Lecture 10: Statistical Functionals and the Bootstrap*. Lecture notes, STAT 512, University of Washington. URL: https://faculty.washington.edu/yenchic/20A_stat512/Lec10_functional.pdf (acesso em 14/09/2024).
- Chotikapanich, Duangkamon e Griffiths, William E. (2008). “Estimating Income Distributions Using a Mixture of Gamma Densities”. Em: *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*. Ed. por Duangkamon Chotikapanich. New York, NY: Springer New York, pp. 285–302. ISBN: 978-0-387-72796-7. DOI: [10.1007/978-0-387-72796-7_16](https://doi.org/10.1007/978-0-387-72796-7_16). URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-72796-7_16 (acesso em 29/09/2024).
- Chotikapanich, Duangkamon et al. (2009). *Global Income Distribution and Inequality: 1993 and 2000*. Department of Economics - Working Papers Series 1062. The University of Melbourne. URL: <https://ideas.repec.org/p/mlb/wpaper/1062.html> (acesso em 11/10/2024).

- Cowell, Frank A. (1980). “On the Structure of Additive Inequality Measures”. *The Review of Economic Studies* 47.3, pp. 521–531.
- Cowell, Frank Alan (2000). “Measurement of inequality”. *Handbook of income distribution* 1, pp. 87–166.
- Dalton, Hugh (1920). “The Measurement of the Inequality of Incomes”. *The Economic Journal* 30.119, pp. 348–361.
- Deltas, G. (2003). “The small-sample bias of the gini coefficient: results and implications for empirical research”. *Review of Economics and Statistics* 85, pp. 226–234.
- Dirichlet, P. G. L. (1839). “Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples”. *Liouville Journal des Mathématiques*. I 4, pp. 164–168.
- Duclos, Jean-Yves e Araar, Abdelkrim (2006). *Poverty and Equity: Measurement, Policy and Estimation with DAD*. New York: Springer.
- Fang, Yuguang e Chlamtac, Imrich (1999). “Teletraffic analysis and mobility modeling of PCS networks”. *IEEE Transactions on Communications* 47.7, pp. 1062–1072.
- Fisher, Ronald A (1922). “On the mathematical foundations of theoretical statistics”. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series A* 222.594-604, pp. 309–368.
- Frühwirth-Schnatter, Sylvia (2006). *Finite mixture and Markov switching models*. Springer.
- Gauss, Carl Friedrich (1809). *Theoria motus corporum coelestium*. Frid. Perthes et IH Besser.
- Gavilan-Ruiz, José Manuel et al. (2024). “Some Notes on the Gini Index and New Inequality Measures: The nth Gini Index”. *Stats* 7.4, pp. 1354–1365.
- Gini, C. (1912). “Variabilità e mutabilità: contributo allo studio delle distribuzioni e delle relazioni statistiche. [Fasc. I.]” Studi economico-giuridici pubblicati per cura della facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Cagliari. URL: <https://books.google.com.br/books?id=fqjaBPMxB9kC> (acesso em 07/10/2024).
- Gómez, Yolanda M, Bolfarine, Heleno e Gómez, Héctor W (2014). “A new extension of the exponential distribution”. *Revista Colombiana de Estadística* 37.1, pp. 25–34.
- James, Barry (2006). *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*. 3rd. IMPA.

- Lambert, Peter (2002). “The Distribution and Redistribution of Income”. Em: *Current Issues in Public Sector Economics*. Ed. por Ivan Preston. London: Macmillan Education UK, pp. 200–226.
- Legendre, Adrien Marie (1806). *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Courcier.
- Lindley, Dennis V (1958). “Fiducial distributions and Bayes’ theorem”. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 102–107.
- Lukacs, Eugene (1955). “A characterization of the gamma distribution”. *The Annals of Mathematical Statistics* 26.2, pp. 319–324.
- McDonald, James B e Jensen, Bartell C (1979). “An analysis of some properties of alternative measures of income inequality based on the gamma distribution function”. *Journal of the American Statistical Association* 74.368, pp. 856–860.
- McLachlan, Geoffrey J e Peel, David (2000). *Finite mixture models*. John Wiley & Sons.
- Mosimann, J. E. (1962). “On the compound multinomial distribution, the multivariate β -distribution, and correlations among proportions”. *Biometrika* 49, pp. 65–82.
- Ng, Kai Wang, Tian, Guo-Liang e Tang, Man-Lai (2011). *Dirichlet and related distributions: Theory, methods and applications*. John Wiley & Sons.
- Olkin, Ingram e Rubin, Herman (1964). “Multivariate Beta Distributions and Independence Properties of the Wishart Distribution”. *Annals of Mathematical Statistics*, pp. 261–269.
- Pearson, Karl (1894). “Contributions to the mathematical theory of evolution”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* 185, pp. 71–110.
- Pietra, Gaetano (1915). *Delle relazioni tra gli indici di variabilità: nota I*. Ferrari.
- Pigou, Arthur Cecil (1920). *The Economics of Welfare*. London: Macmillan.
- R Core Team (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Version 4.4.2 (2024-10-31). Platform: x86_64-w64-mingw32/x64. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org/> (acesso em 21/10/2024).

- Rizzo, Maria L. (2019). *Statistical Computing with R*. 2nd. Boca Raton, FL: Chapman e Hall/CRC.
- Rolla, Leonardo T. e Lima, Bernardo N. B. (2025). *Probabilidade*. Versão digital, IME-USP. URL: <https://www.ime.usp.br/~leorolla/probabilidade/> (acesso em 27/10/2024).
- Salem, Ali B. Z. e Mount, Timothy D. (1974). “A Convenient Descriptive Model of Income Distribution: The Gamma Density”. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* 42.6, pp. 1115–1127.
- Sarabia, José María (2008). “Parametric Lorenz Curves: Models and Applications”. *Physica A* 387.15, pp. 3847–3852.
- Sen, Amartya (1973). *On Economic Inequality*. Oxford: Oxford University Press.
- Sen, Bodhisattva (2022). *A Gentle Introduction to Empirical Process Theory and Applications*. Lecture notes, Department of Statistics, Columbia University. URL: <https://sites.stat.columbia.edu/bodhi/Talks/Emp-Proc-Lecture-Notes.pdf> (acesso em 26/09/2024).
- Shanker, Rama (2015). “Shanker distribution and its applications”. *International journal of statistics and Applications* 5.6, pp. 338–348.
- Shanker, Rama e Mishra, A (2013). “A quasi Lindley distribution”. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research* 6.4, pp. 64–71.
- Shanker, Rama et al. (2013). “Sushila distribution and its application to waiting times data”. *International Journal of Business Management* 3.2, pp. 1–11.
- Shih, Jia-Han (2025). “Expectations of Some Ratio-Type Estimators under the Gamma Distribution”. *arXiv preprint arXiv:2505.05080*. URL: <https://arxiv.org/abs/2505.05080> (acesso em 05/10/2024).
- Shorrocks, Anthony F. (1980). “The class of additively decomposable inequality measures”. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* 48.3, pp. 613–625.
- (1983). “Ranking Income Distributions”. *Economica* 50.197, pp. 3–17.

- Sitthiyot, Thitithep e Holasut, Kanyarat (2020). “A Simple Method for Measuring Inequality”. *Palgrave Communications* 6.112. DOI: [10.1057/s41599-020-0484-6](https://doi.org/10.1057/s41599-020-0484-6). URL: <https://doi.org/10.1057/s41599-020-0484-6> (acesso em 02/10/2024).
- Theil, Henri (1967). *Economics and information theory*. Vol. 7. Amsterdam: Nort-Holland.
- Vaart, Aad W. van der (1998). *Asymptotic Statistics*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Seção 2.3 – Continuous Mapping Theorem. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN: 9780521496032.
- Vila, Roberto, Nakano, Eduardo e Saulo, Helton (2024). “Novel Closed-Form Point Estimators for a Weighted Exponential Family Derived From Likelihood Equations”. *Stat* 13.3, e723.
- Vila, Roberto e Saulo, Helton (2025a). “Bias in Gini coefficient estimation for gamma mixture populations”. *Statistical Papers* 66.7, p. 146. ISSN: 1613-9798. DOI: [10.1007/s00362-025-01768-w](https://doi.org/10.1007/s00362-025-01768-w). URL: <https://doi.org/10.1007/s00362-025-01768-w>.
- (2025b). “Closed-Form Formulas for the Biases of the Theil and Atkinson Index Estimators in Gamma Distributed Populations”. *arXiv preprint arXiv:2504.13806*. URL: <https://arxiv.org/abs/2504.13806> (acesso em 12/10/2024).
- (2025c). “The mth Gini Index Estimator: Unbiasedness for Gamma Populations”. *arXiv preprint arXiv:2504.19381*. To appear in *The Journal of Economic Inequality*, 2025. URL: <https://arxiv.org/abs/2504.19381> (acesso em 19/10/2024).
- Wasserman, Larry (2022). *Lecture Notes 19: Statistical Functionals and Plug-in Estimators*. Course 36-705: Advanced Statistical Theory, Carnegie Mellon University. URL: <https://www.stat.cmu.edu/~larry/=stat705/Lecture19.pdf> (acesso em 08/10/2024).
- World Bank (2025). *Poverty and Inequality Platform (PIP)*. URL: <https://datacatalog.worldbank.org/search/dataset/0063646/-Poverty-and-Inequality-Platform--PIP---Percentiles> (acesso em 30/09/2024).

Apêndice A

Funções Especiais

Nesta seção são apresentadas as definições das funções especiais empregadas ao longo do texto, incluindo a função Gama, a função digama e a função Beta multivariada.

A.1 Função Gama

A função Gama, denotada por $\Gamma(\alpha)$, é definida para $\alpha > 0$ por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.1})$$

Ela satisfaz a relação de recorrência

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad (\text{A.2})$$

e, para inteiros positivos, coincide com o fatorial:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Função Digama

A função digama, denotada por $\psi(\alpha)$, é definida como a derivada logarítmica da função Gama e é expressa por

$$\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \log \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (\text{A.4})$$

A função desempenha papel central nas expressões analíticas dos vieses dos estimadores derivados neste trabalho.

A.3 Função Beta Multivariada

Para um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ com componentes positivos, a função Beta multivariada é definida por

$$B(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)}. \quad (\text{A.5})$$

Essa função aparece naturalmente na densidade da distribuição de Dirichlet, que é dada por

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{B(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i-1}, \quad (x_1, \dots, x_k) \in \Delta^{k-1}. \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Provas e Resultados Auxiliares

B.1 Demonstração da identidade $\mathbb{E}[Z \log Z]$ para $Z \sim \text{Gama}(a, b)$

Proposição B.1.1. Se $Z \sim \text{Gama}(a, b)$, com $a > 0$ e $b > 0$, então

$$\mathbb{E}[Z \log Z] = \frac{a}{b} [\psi(a) + 1/a - \log b] = \frac{a}{b} [\psi(a+1) - \log b].$$

Demonstração. A função geradora de momentos de Z é dada por

$$\mathbb{E}[Z^t] = b^{-t} \frac{\Gamma(a+t)}{\Gamma(a)}, \quad t > -a.$$

Derivando em relação a t e avaliando em $t = 1$, obtemos

$$\mathbb{E}[Z \log Z] = \frac{d}{dt} \left(b^{-t} \frac{\Gamma(a+t)}{\Gamma(a)} \right) \Big|_{t=1} = \frac{a}{b} [\psi(a+1) - \log b].$$

□

B.2 Lei da Esperança Total

A identidade abaixo decorre diretamente da definição de esperança condicional, conforme apresentada em James (2006, Seção 4.1) e Billingsley (1995, Cap. 6, Seção 34).

Teorema B.2.1 (Lei da Esperança Total). Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória integrável, isto é, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Seja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ uma sub- σ -álgebra. Então,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}[X].$$

Em particular, se Y é uma variável aleatória e $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, vale

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)].$$

Demonstração. Pela definição de esperança condicional, para todo evento $A \in \mathcal{G}$ tem-se

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Tomando $A = \Omega$, segue

$$\int_{\Omega} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X d\mathbb{P},$$

isto é, $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}[X]$. □

Observação B.2.2. A Lei da Esperança Total permanece válida no caso $X \geq 0$ mesmo que $\mathbb{E}[X] = \infty$, por aplicação direta do Teorema da Convergência Monótona. No contexto desta dissertação, a lei é utilizada para remover o condicionamento em variáveis latentes (por exemplo, os rótulos Y_1, \dots, Y_n na mistura gama), garantindo a validade das expressões de esperança obtidas em forma condicional.

B.3 Teorema Multinomial

Teorema B.3.1 (Teorema Multinomial). Sejam $m \in \mathbb{N}$ e x_1, x_2, \dots, x_m variáveis reais. Para todo inteiro $n \geq 1$, tem-se

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_i \geq 0}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Demonstração. O resultado decorre por indução a partir do Binômio de Newton e da contagem das permutações dos n fatores em cada termo. A constante combinatória $\frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$ representa o número de formas distintas de escolher k_1 termos de tipo x_1 , k_2 de tipo x_2 , e assim sucessivamente. □

Observação B.3.2. No desenvolvimento analítico dos estimadores sob mistura Gama, o Teorema Multinomial é utilizado para expandir potências do tipo $(\pi_1 + \dots + \pi_m)^n$ e decompor expectativas de somatórios múltiplos, como em $\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \dots \pi_{j_n}$, fundamentando expressões como as do Teorema 5.6.1.

B.4 Média de Potência

Teorema B.4.1 (Média de Potência (Bullen, 2003, Cap. 2)). Sejam $x_1, \dots, x_n > 0$ e $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Define-se a *média de potência de ordem p* como

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}.$$

Então:

- (a) $\lim_{p \rightarrow 0} M_p(x_1, \dots, x_n) = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \right) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$;
- (b) $\lim_{p \rightarrow \infty} M_p(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$.

Demonstração. (a) Para p próximo de zero, escreva $x_i^p = e^{p \log x_i}$. Da expansão $e^{p \log x_i} = 1 + p \log x_i + o(p)$, obtém-se

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p = 1 + p \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \right) + o(p).$$

Tomando logaritmo e dividindo por p ,

$$\frac{1}{p} \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i + o(1),$$

e passando ao limite $p \rightarrow 0$ resulta $\log M_p \rightarrow \frac{1}{n} \sum_i \log x_i$, ou seja, $M_p \rightarrow \exp\left(\frac{1}{n} \sum_i \log x_i\right)$.

(b) Seja $M = \max_i x_i$. Como $x_i \leq M$, tem-se

$$\frac{1}{n} M^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \leq M^p.$$

Elevando a $1/p$, $n^{-1/p} M \leq M_p \leq M$. Pelo limite $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{-1/p} = 1$, conclui-se $M_p \rightarrow M$. \square

Observação B.4.2. O resultado (a) mostra que a função $p \mapsto M_p(x_1, \dots, x_n)$ é contínua em $p = 0$, definindo-se

$$M_0(x_1, \dots, x_n) \equiv \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \right).$$

No contexto desta dissertação, esse limite é útil para relacionar índices de desigualdade formulados como médias L^p com suas versões logarítmicas no caso limite $p \rightarrow 0$, bem como para analisar comportamentos assintóticos quando $p \rightarrow \infty$, em que o índice passa a refletir apenas o maior valor da amostra.

B.5 Teorema do Mapeamento Contínuo

Teorema B.5.1 (Teorema do Mapeamento Contínuo). Seja $(Z_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e seja Z uma variável aleatória

tal que

$$Z_n \xrightarrow{p} Z \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad Z_n \xrightarrow{q.c.} Z.$$

Seja $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua em todos os pontos do conjunto em que Z assume valores com probabilidade 1. Então,

$$g(Z_n) \xrightarrow{p} g(Z) \quad (\text{respectivamente, } g(Z_n) \xrightarrow{q.c.} g(Z)).$$

Demonstração. Para uma demonstração rigorosa, ver Vaart (1998, Seção 2.3). □

Observação B.5.2. O teorema assegura que a convergência de uma sequência de estatísticas é preservada por transformações contínuas. Em termos práticos, se um estimador converge para o verdadeiro parâmetro populacional, qualquer função contínua desse estimador também converge para a função correspondente do parâmetro. Assim, o teorema constitui uma extensão direta da Lei dos Grandes Números, permitindo que expressões compostas de médias amostrais, como razões, logaritmos ou produtos, mantenham a propriedade de consistência.

Observação B.5.3. No contexto deste trabalho, os estimadores dos índices de Theil (\widehat{T}_T e \widehat{T}_L), de Atkinson ($\widehat{A}(1)$ e $\widehat{A}(\infty)$) e o índice de dispersão ($\widehat{\text{VMR}}$) podem ser escritos como funções contínuas de quantidades do tipo $n^{-1} \sum_{i=1}^n g(X_i)$, que convergem para suas esperanças correspondentes por meio da Lei dos Grandes Números. Pelo Teorema do Mapeamento Contínuo, conclui-se que

$$T(\widehat{F}_n) \xrightarrow{p} T(F),$$

isto é, os estimadores obtidos pelo princípio de substituição (*plug-in*) são consistentes para os respectivos funcionais populacionais.

B.6 Teorema de Tonelli

O resultado apresentado a seguir corresponde ao caso não negativo do Teorema de Fubini. Uma demonstração completa pode ser encontrada em Rolla e Lima (2025, Apêndice D.4). Ver também Billingsley (1995, Cap. 3, Seção 18), onde este caso é apresentado como a parte não negativa do Teorema de Fubini.

Teorema B.6.1 (Teorema de Tonelli). Seja $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável não negativa, definida sobre o produto de dois espaços de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ e $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$. Então,

$$\int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} f(x, y) (\mu \times \nu)(dx, dy) = \int_{\mathcal{X}} \left(\int_{\mathcal{Y}} f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_{\mathcal{Y}} \left(\int_{\mathcal{X}} f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Em particular, é sempre permitido trocar a ordem das integrais iteradas, isto é,

$$\int_{\mathcal{X}} \left(\int_{\mathcal{Y}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathcal{Y}} \left(\int_{\mathcal{X}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y),$$

mesmo que f não seja absolutamente integrável, desde que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Ideia da demonstração. O resultado segue da construção da integral de Lebesgue via funções simples e do Teorema da Convergência Monótona. Primeiro, demonstra-se a igualdade para funções simples não negativas. Em seguida, aproxima-se f por uma sequência crescente de funções simples $f_k \uparrow f$, aplicando o Teorema da Convergência Monótona para trocar o limite e as integrais iteradas. Assim, a igualdade permanece válida para qualquer $f \geq 0$. \square

Apêndice C

Resultados das simulações de Monte Carlo

Tabela C.1 Resultados das simulações de Monte Carlo para cada índice e para cada combinação de α_2 e n , apresentando o valor verdadeiro θ , a média das estimativas $\hat{\theta}$, o viés empírico $V(\hat{\theta})$, o erro quadrático médio e os erros-padrão do viés e do EQM, tanto para o estimador original quanto para o estimador corrigido. Os resultados referem-se ao cenário com $R = 1.000$ réplicas e $\alpha_1 = 0,5$.

Índice	α_2	θ	n	Estimador					Estimador Corrigido				
				$\hat{\theta}$	$V(\hat{\theta})$	EQM($\hat{\theta}$)	EP(B)	EP(EQM)	$\hat{\theta}$	$V(\hat{\theta})$	EQM($\hat{\theta}$)	EP(B)	EP(EQM)
Theil-T	0,5	0,7296	10	0,6385	-0,0912	0,0652	0,0075	0,0027	0,7083	-0,0213	0,0932	0,0096	0,0059
			25	0,6941	-0,0355	0,0287	0,0052	0,0014	0,7266	-0,0031	0,0358	0,0060	0,0023
			50	0,7178	-0,0118	0,0153	0,0039	0,0007	0,7353	0,0057	0,0176	0,0042	0,0009
			100	0,7165	-0,0131	0,0073	0,0027	0,0003	0,7253	-0,0043	0,0077	0,0028	0,0004
	1,0	0,6139	10	0,5407	-0,0732	0,0456	0,0063	0,0019	0,5951	-0,0188	0,0615	0,0078	0,0038
			25	0,5814	-0,0325	0,0205	0,0044	0,0009	0,6046	-0,0093	0,0237	0,0049	0,0012
			50	0,6015	-0,0125	0,0105	0,0032	0,0006	0,6141	0,0002	0,0116	0,0034	0,0007
			100	0,6075	-0,0064	0,0057	0,0024	0,0003	0,6141	0,0002	0,0060	0,0024	0,0003
	2,0	0,5858	10	0,5378	-0,0479	0,0433	0,0064	0,0021	0,5800	-0,0058	0,0583	0,0076	0,0043
			25	0,5656	-0,0202	0,0177	0,0042	0,0008	0,5824	-0,0034	0,0196	0,0044	0,0009
			50	0,5797	-0,0060	0,0095	0,0031	0,0005	0,5888	0,0030	0,0101	0,0032	0,0005
			100	0,5842	-0,0016	0,0045	0,0021	0,0002	0,5888	0,0031	0,0047	0,0022	0,0002
	3,0	0,6067	10	0,5617	-0,0450	0,0441	0,0065	0,0021	0,5996	-0,0072	0,0579	0,0076	0,0042
			25	0,6015	-0,0052	0,0190	0,0044	0,0010	0,6163	0,0095	0,0214	0,0046	0,0013
			50	0,6002	-0,0066	0,0092	0,0030	0,0004	0,6068	0,000*	0,0096	0,0031	0,0005
			100	0,6030	-0,0037	0,0045	0,0021	0,0002	0,6064	-0,0003	0,0046	0,0021	0,0002
	4,0	0,6322	10	0,5983	-0,0339	0,0471	0,0068	0,0023	0,6353	0,0031	0,0635	0,0080	0,0043
			25	0,6200	-0,0122	0,0179	0,0042	0,0008	0,6305	-0,0017	0,0192	0,0044	0,0009
			50	0,6295	-0,0027	0,0096	0,0031	0,0004	0,6343	0,0020	0,0099	0,0031	0,0005
			100	0,6298	-0,0024	0,0045	0,0021	0,0002	0,6321	-0,0002	0,0046	0,0021	0,0002

Theil-L	5,0	0,6554	10	0,6377	-0,0177	0,0483	0,0069	0,0022	0,6712	0,0158	0,0648	0,0080	0,0042
			25	0,6493	-0,0061	0,0198	0,0044	0,0009	0,6571	0,0016	0,0212	0,0046	0,0010
			50	0,6534	-0,0021	0,0101	0,0032	0,0005	0,6563	0,0009	0,0103	0,0032	0,0005
			100	0,6537	-0,0017	0,0049	0,0022	0,0002	0,6551	-0,0003	0,0050	0,0022	0,0002
	0,5	1,2704	10	1,1753	-0,0950	0,2930	0,0169	0,0145	1,2681	-0,0022	0,3257	0,0181	0,0175
			25	1,2346	-0,0357	0,1186	0,0108	0,0054	1,2728	0,0025	0,1239	0,0111	0,0060
			50	1,2587	-0,0116	0,0602	0,0078	0,0026	1,2783	0,0079	0,0618	0,0079	0,0028
			100	1,2657	-0,0047	0,0296	0,0054	0,0013	1,2753	0,0049	0,0300	0,0055	0,0013
	1,0	1,0523	10	0,9570	-0,0953	0,2200	0,0145	0,0123	1,0290	-0,0233	0,2384	0,0154	0,0144
			25	1,0243	-0,0280	0,0924	0,0096	0,0043	1,0536	0,0013	0,0955	0,0098	0,0046
			50	1,0370	-0,0153	0,0438	0,0066	0,0021	1,0520	-0,0003	0,0445	0,0067	0,0022
			100	1,0470	-0,0053	0,0231	0,0048	0,0011	1,0545	0,0022	0,0233	0,0048	0,0011
	2,0	1,1043	10	1,0531	-0,0512	0,2639	0,0162	0,0136	1,1219	0,0176	0,2903	0,0170	0,0158
			25	1,0696	-0,0347	0,1021	0,0100	0,0046	1,0962	-0,0081	0,1046	0,0102	0,0049
			50	1,0927	-0,0116	0,0511	0,0071	0,0023	1,1062	0,0019	0,0519	0,0072	0,0024
			100	1,1067	0,0024	0,0259	0,0051	0,0012	1,1135	0,0092	0,0261	0,0051	0,0012
3,0	1,2145	10	1,1229	-0,0915	0,2618	0,0159	0,0145	1,1937	-0,0207	0,2817	0,0168	0,0165	
		25	1,1883	-0,0261	0,1109	0,0105	0,0053	1,2162	0,0018	0,1144	0,0107	0,0057	
		50	1,2104	-0,0040	0,0551	0,0074	0,0031	1,2239	0,0094	0,0561	0,0075	0,0032	
		100	1,2067	-0,0078	0,0268	0,0052	0,0012	1,2134	-0,0011	0,0270	0,0052	0,0012	
4,0	1,3175	10	1,2327	-0,0848	0,2998	0,0171	0,0128	1,3097	-0,0078	0,3262	0,0181	0,0153	
		25	1,2838	-0,0337	0,1133	0,0106	0,0047	1,3120	-0,0055	0,1161	0,0108	0,0049	
		50	1,3062	-0,0113	0,0587	0,0077	0,0026	1,3200	0,0024	0,0595	0,0077	0,0026	
		100	1,3134	-0,0041	0,0314	0,0056	0,0014	1,3201	0,0026	0,0316	0,0056	0,0014	
5,0	1,4086	10	1,3288	-0,0797	0,3043	0,0173	0,0137	1,4115	0,0029	0,3335	0,0183	0,0166	
		25	1,3806	-0,0280	0,1177	0,0108	0,0053	1,4096	0,0011	0,1208	0,0110	0,0056	
		50	1,3992	-0,0093	0,0622	0,0079	0,0027	1,4132	0,0046	0,0631	0,0079	0,0028	
		100	1,3955	-0,0131	0,0279	0,0053	0,0012	1,4023	-0,0062	0,0280	0,0053	0,0012	
A(1)	0,5	0,7193	10	0,6504	-0,0689	0,0312	0,0051	0,0016	0,7130	-0,0063	0,0309	0,0056	0,0014
			25	0,6924	-0,0268	0,0106	0,0032	0,0005	0,7190	-0,0003	0,0104	0,0032	0,0005
			50	0,7075	-0,0117	0,0051	0,0022	0,0002	0,7210	0,0018	0,0050	0,0022	0,0002
			100	0,7138	-0,0055	0,0024	0,0015	0,0001	0,7206	0,0014	0,0024	0,0015	0,0001
	1,0	0,6509	10	0,5791	-0,0718	0,0324	0,0052	0,0014	0,6376	-0,0132	0,0327	0,0057	0,0013
			25	0,6249	-0,0260	0,0124	0,0034	0,0006	0,6504	-0,0005	0,0126	0,0036	0,0005
			50	0,6379	-0,0130	0,0056	0,0023	0,0003	0,6508	-0,0001	0,0056	0,0024	0,0002
			100	0,6450	-0,0059	0,0028	0,0017	0,0001	0,6516	0,0007	0,0028	0,0017	0,0001
	2,0	0,6686	10	0,6090	-0,0596	0,0332	0,0054	0,0015	0,6676	-0,0009	0,0351	0,0059	0,0014
			25	0,6399	-0,0286	0,0126	0,0034	0,0006	0,6645	-0,0041	0,0126	0,0035	0,0006
			50	0,6564	-0,0122	0,0056	0,0023	0,0002	0,6692	0,0007	0,0056	0,0024	0,0002
			100	0,6651	-0,0035	0,0029	0,0017	0,0001	0,6716	0,0031	0,0029	0,0017	0,0001
	3,0	0,7031	10	0,6363	-0,0668	0,0303	0,0051	0,0015	0,6946	-0,0086	0,0300	0,0055	0,0014
			25	0,6791	-0,0241	0,0105	0,0032	0,0005	0,7033	0,0002	0,0104	0,0032	0,0005
			50	0,6939	-0,0092	0,0048	0,0022	0,0002	0,7062	0,0031	0,0049	0,0022	0,0002
			100	0,6968	-0,0063	0,0025	0,0016	0,0001	0,7030	-0,0001	0,0025	0,0016	0,0001

		10	0,6685	-0,0637	0,0282	0,0049	0,0013	0,7263	-0,0059	0,0274	0,0052	0,0011
		25	0,7076	-0,0246	0,0097	0,0030	0,0005	0,7306	-0,0016	0,0094	0,0031	0,0004
		50	0,7212	-0,0110	0,0046	0,0021	0,0002	0,7327	0,0005	0,0046	0,0021	0,0002
		100	0,7269	-0,0053	0,0024	0,0015	0,0001	0,7326	0,0004	0,0024	0,0015	0,0001
		10	0,6972	-0,0583	0,0259	0,0047	0,0015	0,7529	-0,0026	0,0249	0,0050	0,0013
		25	0,7341	-0,0214	0,0081	0,0028	0,0005	0,7564	0,0008	0,0079	0,0028	0,0004
		50	0,7456	-0,0099	0,0039	0,0020	0,0002	0,7566	0,0011	0,0038	0,0020	0,0002
		100	0,7489	-0,0067	0,0018	0,0013	0,0001	0,7544	-0,0012	0,0017	0,0013	0,0001
		10	0,9741	-0,0259	0,0028	0,0015	0,0004	1,0290	0,0290	0,0015	0,0008	0,0001
		25	0,9953	-0,0047	0,0001	0,0003	0,000*	1,0047	0,0047	0,0001	0,0002	0,000*
		50	0,9988	-0,0012	0,000*	0,0001	0,000*	1,0010	0,0010	0,000*	0,0001	0,000*
		100	0,9997	-0,0003	0,000*	0,000*	0,000*	1,0002	0,0002	0,000*	0,000*	0,000*
		10	0,9635	-0,0365	0,0040	0,0016	0,0003	1,0383	0,0383	0,0024	0,0010	0,0001
		25	0,9922	-0,0078	0,0003	0,0005	0,000*	1,0075	0,0075	0,0001	0,0003	0,000*
		50	0,9978	-0,0022	0,000*	0,0001	0,000*	1,0019	0,0019	0,000*	0,0001	0,000*
		100	0,9995	-0,0005	0,000*	0,000*	0,000*	1,0005	0,0005	0,000*	0,000*	0,000*
		10	0,9696	-0,0304	0,0041	0,0018	0,0005	1,0333	0,0333	0,0019	0,0009	0,0001
		25	0,9943	-0,0057	0,0002	0,0003	0,000*	1,0063	0,0063	0,0001	0,0003	0,000*
		50	0,9985	-0,0015	0,000*	0,0001	0,000*	1,0013	0,0013	0,000*	0,0001	0,000*
		100	0,9996	-0,0004	0,000*	0,000*	0,000*	1,0002	0,0002	0,000*	0,000*	0,000*
		10	0,9774	-0,0226	0,0022	0,0013	0,0003	1,0295	0,0295	0,0016	0,0009	0,0001
		25	0,9959	-0,0041	0,0001	0,0002	0,000*	1,0042	0,0042	0,000*	0,0002	0,000*
		50	0,9990	-0,0010	0,000*	0,0001	0,000*	1,0008	0,0008	0,000*	0,0001	0,000*
		100	0,9997	-0,0003	0,000*	0,000*	0,000*	1,0002	0,0002	0,000*	0,000*	0,000*
		10	0,9823	-0,0177	0,0012	0,0009	0,0002	1,0251	0,0251	0,0012	0,0007	0,0001
		25	0,9965	-0,0035	0,0001	0,0002	0,000*	1,0031	0,0031	0,000*	0,0002	0,000*
		50	0,9992	-0,0008	0,000*	0,0001	0,000*	1,0007	0,0007	0,000*	0,000*	0,000*
		100	0,9998	-0,0002	0,000*	0,000*	0,000*	1,0001	0,0001	0,000*	0,000*	0,000*
		10	0,9840	-0,0160	0,0012	0,0010	0,0002	1,0201	0,0201	0,0008	0,0006	0,0001
		25	0,9971	-0,0029	0,000*	0,0002	0,000*	1,0023	0,0023	0,000*	0,0001	0,000*
		50	0,9993	-0,0007	0,000*	0,000*	0,000*	1,0005	0,0005	0,000*	0,000*	0,000*
		100	0,9998	-0,0002	0,000*	0,000*	0,000*	1,0001	0,0001	0,000*	0,000*	0,000*
		10	0,8609	-0,1391	0,4264	0,0202	0,0369	0,9544	-0,0456	0,6198	0,0249	0,0687
		25	0,9286	-0,0714	0,2351	0,0152	0,0277	0,9866	-0,0134	0,3190	0,0179	0,0488
		50	0,9718	-0,0282	0,1342	0,0116	0,0117	1,0053	0,0053	0,1611	0,0127	0,0161
		100	0,9728	-0,0272	0,0696	0,0083	0,0047	0,9899	-0,0101	0,0763	0,0087	0,0058
		10	0,9243	-0,1614	0,3815	0,0189	0,0251	1,0056	-0,0801	0,5317	0,0229	0,0459
		25	1,0237	-0,0620	0,2311	0,0151	0,0211	1,0691	-0,0167	0,2874	0,0170	0,0342
		50	1,0696	-0,0162	0,1308	0,0114	0,0085	1,0957	0,0100	0,1479	0,0122	0,0108
		100	1,0690	-0,0167	0,0688	0,0083	0,0035	1,0828	-0,0029	0,0733	0,0086	0,0040
		10	1,3737	-0,1172	0,6434	0,0251	0,0400	1,4621	-0,0288	0,8866	0,0298	0,0726
		25	1,4096	-0,0813	0,2791	0,0165	0,0151	1,4505	-0,0404	0,3193	0,0178	0,0193
		50	1,4773	-0,0136	0,1705	0,0131	0,0118	1,5016	0,0107	0,1883	0,0137	0,0146
		100	1,4949	0,0040	0,0821	0,0091	0,0038	1,5075	0,0165	0,0858	0,0093	0,0041

3,0	2,0000	10	1,8531	-0,1469	0,8766	0,0293	0,0626	1,9453	-0,0547	1,1630	0,0341	0,1111
		25	1,9939	-0,0061	0,4104	0,0203	0,0270	2,0413	0,0413	0,4813	0,0219	0,0353
		50	1,9738	-0,0262	0,2014	0,0142	0,0106	1,9946	-0,0054	0,2147	0,0147	0,0118
		100	1,9922	-0,0078	0,0999	0,0100	0,0049	2,0029	0,0029	0,1031	0,0102	0,0052
4,0	2,5474	10	2,3781	-0,1692	1,0873	0,0326	0,0677	2,4771	-0,0703	1,4307	0,0378	0,1189
		25	2,5114	-0,0360	0,4675	0,0216	0,0268	2,5467	-0,0007	0,5302	0,0230	0,0365
		50	2,5421	-0,0052	0,2464	0,0157	0,0118	2,5574	0,0100	0,2576	0,0161	0,0128
		100	2,5503	0,0030	0,1189	0,0109	0,0058	2,5572	0,0099	0,1213	0,0110	0,0059
5,0	3,1130	10	3,0522	-0,0608	1,5423	0,0392	0,0942	3,1433	0,0302	1,9668	0,0444	0,1688
		25	3,0927	-0,0203	0,5514	0,0235	0,0313	3,1158	0,0027	0,6020	0,0245	0,0353
		50	3,1020	-0,0110	0,3029	0,0174	0,0154	3,1091	-0,0039	0,3124	0,0177	0,0161
		100	3,1188	0,0058	0,1419	0,0119	0,0074	3,1218	0,0088	0,1441	0,0120	0,0076

* Valor real abaixo do limite de precisão ($< 0,0001$).

Apêndice D

Resumo Geral dos Índices, Estimadores e Vieses

Tabela D.1 Estatística, estimador e viés analítico do índice de Theil-T.

Índice Theil-T

$$T_T = \frac{1}{\mu} \mathbb{E} \left[X \log \left(\frac{X}{\mu} \right) \right], \quad \widehat{T}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\bar{X}} \log \left(\frac{X_i}{\bar{X}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Viés}(\widehat{T}_T, T_T) &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \frac{1}{\sum_i \alpha_{j_i}} \left[\sum_i \alpha_{j_i} \psi(\alpha_{j_i}) - \left(\sum_i \alpha_{j_i} \right) \psi \left(\sum_i \alpha_{j_i} \right) + n - 1 \right] + \log n - \\ &\left[\frac{1}{\sum_j \pi_j \alpha_j} \left(\sum_j \pi_j \alpha_j \psi(\alpha_j) + 1 \right) - \log \left(\sum_j \pi_j \alpha_j \right) \right]. \end{aligned}$$

Tabela D.2 Estatística, estimador e viés analítico do índice de Theil-L.

Índice Theil-L

$$T_L = -\mathbb{E} \left[\log \left(\frac{X}{\mu} \right) \right], \quad \widehat{T}_L = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{X_i}{\bar{X}} \right)$$

$$\text{Viés}(\widehat{T}_L, T_L) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \psi \left(\sum_i \alpha_{j_i} \right) - \log n - \log \left(\sum_j \pi_j \alpha_j \right).$$

Tabela D.3 Estatística, estimador e viés analítico do índice de Atkinson com $\varepsilon = 1$.**Índice de Atkinson** ($\varepsilon = 1$)

$$A(1) = 1 - \frac{\exp\{\mathbb{E}[\log X]\}}{\mu}, \quad \widehat{A(1)} = 1 - \frac{\exp\left(\frac{1}{n} \sum_i \log X_i\right)}{\bar{X}}$$

$$\text{Viés}(\widehat{A(1)}, A(1)) = -n \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \frac{1}{\sum_i \alpha_{j_i}} \prod_i \frac{\Gamma(\alpha_{j_i} + 1/n)}{\Gamma(\alpha_{j_i})} + \frac{1}{\sum_j \pi_j \alpha_j} \exp\left\{ \sum_j \pi_j \psi(\alpha_j) \right\}.$$

Tabela D.4 Estatística, estimador e viés analítico do índice de Atkinson com $\varepsilon \rightarrow \infty$.**Índice de Atkinson** ($\varepsilon \rightarrow \infty$)

$$A(\infty) = 1 - \frac{x_{\min}}{\mu}, \quad \widehat{A(\infty)} = 1 - \frac{\min\{X_1, \dots, X_n\}}{\bar{X}}$$

$$\text{Viés}(\widehat{A(\infty)}, A(\infty)) = -n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_i \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} \pi_1^{k_1} \cdots \pi_m^{k_m} \frac{1}{\sum_j \alpha_j k_j} \int_0^\infty \prod_j \frac{\Gamma^{k_j}(\alpha_j, u)}{\Gamma^{k_j}(\alpha_j)} du.$$

Tabela D.5 Estatística, estimador e viés analítico do índice de dispersão (VMR).**Índice de dispersão (VMR)**

$$\text{VMR} = \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]}, \quad \widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}} = \frac{\widehat{\text{Var}}(\bar{X})_{\text{unb}}}{\bar{X}}, \quad \widehat{\text{Var}}(\bar{X})_{\text{unb}} = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$$

$$\begin{aligned} \text{Viés}(\widehat{\text{VMR}}_{\text{unb}}, \text{VMR}) &= \frac{n}{(n-1)\lambda} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} \pi_{j_1} \cdots \pi_{j_n} \left[\frac{1}{\sum_i \alpha_{j_i} + 1} \sum_i \alpha_{j_i} (\alpha_{j_i} + 1) - \frac{1}{n} \sum_i \alpha_{j_i} \right] - \\ &\frac{1}{\lambda \sum_j \pi_j \alpha_j} \left[\sum_j \pi_j \alpha_j (\alpha_j + 1) - \left(\sum_j \pi_j \alpha_j \right)^2 \right]. \end{aligned}$$