

Aplicação da equação de Schrödinger ao modelo nuclear de camadas: obtenção dos números mágicos

Schrödinger equation applied to nuclear shell model: obtaining the magical numbers

Mariana M. Gomes¹, Ronni G. G. Amorim^{*1,2,3}, Wytler C. Santos^{1,4}, Vinicius C. Rispoli¹,
Leandro X. Cardoso¹

¹Universidade de Brasília, Faculdade do Gama, 72444-240, Brasília, DF, Brasil.

²Centro Internacional de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

³Canadian Quantum Research Center, 204-3002, British Columbia, Canada.

⁴Universidade de Brasília, Instituto de Física, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

Recebido em 01 de maio de 2024. Revisado em 03 de setembro de 2024. Aceito em 09 de setembro de 2024.

In this work, we present a pedagogical approach to describing the atomic nucleus based on the shell model. The proposed analysis is based on the Schrödinger equation. In this sense, we analyze two systems, both based on mean field theory, in which nuclear and electromagnetic interactions are modeled by harmonic oscillators, but in one of them the interaction between the nucleon spins is considered. As a result, some aspects of the nucleus were explained, where the obtaining of nuclear magic numbers deserves emphasis. Thus, the proposed approach can be used in quantum mechanics courses, such as the application of the Schrödinger equation, as well as in physics and nuclear engineering subjects.

Keywords: Shell model, nuclear physics, Schrödinger equation, magic numbers.

Apresentamos neste trabalho uma abordagem pedagógica da descrição do núcleo atômico a partir do modelo de camadas. A análise proposta está alicerçada na equação de Schrödinger. Neste sentido, analisamos dois sistemas, ambos baseadas na teoria de campo médio, em que as interações nucleares e eletromagnéticas são modeladas por osciladores harmônicos, mas que em um deles a interação entre os spins dos núcleons é considerada. Como resultado, alguns aspectos do núcleo foram explicados, onde merece destaque a obtenção dos números mágicos nucleares. Assim, a abordagem proposta pode ser utilizada em cursos de mecânica quântica, como aplicação da equação de Schrödinger, bem como em disciplinas de física e engenharia nuclear.

Palavras-chaves: Modelo de camadas, física nuclear, equação de Schrödinger, números mágicos.

1. Introdução

É verificado experimentalmente que entre 2500 núcleos atômicos conhecidos, menos de 300 núcleos não passam pelo processo da radioatividade, ou seja, não decaem com emissão alfa, beta ou gama. Esses núcleos estáveis são catalogados em um diagrama conhecido como Gráfico de Segrè, veja o diagrama da Figura 43.4 na referência [1] página 335. Observa-se também que de acordo com o diagrama de energia de ligação dos núcleos estáveis, visto na Figura 43.2 da referência [1] página 332, destaca-se que um isótopo de hélio ${}^4\text{He}$ tem uma energia de ligação de aproximadamente 7 MeV e o isótopo de níquel ${}^{62}\text{Ni}$ tem o maior valor para a energia de ligação igual a 8,8 MeV. Nos anos iniciais do desenvolvimento da Física Nuclear, houve uma busca pela compreensão do motivo pelo qual alguns núcleos são estáveis e outros não.

A primeira proposta teórica para explicar a física do núcleo atômico foi o modelo da gota líquida introduzida

por George Gamow em 1928 e expandida e aperfeiçoada por Niels Bohr e Carl Friedrich von Weizsäcker [2–4]. Esse modelo é baseado no curto alcance das forças nucleares, sendo que os núcleons interagem fortemente com seus vizinhos mais próximos, assim como as moléculas fazem em uma gota d'água. Portanto, pode-se tentar descrever suas propriedades pelas quantidades correspondentes, ou seja, o raio, a densidade, a tensão superficial e a energia volumétrica.

Muito pode ser compreendido sobre núcleos supondo que, dentro do núcleo, núcleons individuais se movem em um potencial bem definido pela interação média com os outros núcleons. A discussão do modelo de potencial médio nos conduz a algumas conclusões importantes sobre as energias de ligação relativas de diferentes isóbaros. O modelo de potencial médio baseia-se na observação de que, com boa aproximação, os núcleons individuais se comportam dentro do núcleo como partículas independentes colocadas em um potencial médio (ou campo médio) devido aos outros núcleons [4]. Para obter uma descrição qualitativa deste potencial médio $V(r)$, escrevemos como a soma dos potenciais $v(r - r')$

*Endereço de correspondência: ronniamorim@gmail.com

entre um núcleon na posição r e outro núcleon na posição r' conforme a equação abaixo:

$$V(r) = \int v(r - r')\rho(r')dr'. \quad (1)$$

Nesta equação, a densidade nuclear $\rho(r')$, é proporcional à probabilidade por unidade de volume de encontrar um núcleon na vizinhança de r' . A interação nuclear forte $v(r - r')$ é atrativa e de curto alcance. Ela cai para zero rapidamente em distâncias maiores que ~ 2 fm (2×10^{-15} m), enquanto o diâmetro típico em um núcleon é muito maior, da ordem de 6 fm para um núcleon leve como o oxigênio e de 14 fm para o chumbo. Para simplificar a expressão, vamos aproximar o potencial v por uma função delta, ou seja, uma interação pontual,

$$v(r - r') = -v_0\delta(r - r'), \quad (2)$$

onde v_0 é um valor estimado em aproximadamente igual a 200 MeV fm^3 . Então o potencial médio na equação (1) se reduz a

$$V(r) = v_0\rho(r). \quad (3)$$

Dos dados experimentais, para $\rho(r) \sim 0,15 \text{ (fm)}^{-3}$ nós encontramos que o mínimo no poço de energia potencial, para uma distância r menor que o raio nuclear, é em torno de -30 MeV . Uma expressão analítica que descreve o problema do potencial médio é o potencial proposto por Roger D. Woods e David S. Saxon [5], visto na equação abaixo:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R)/R]}, \quad (4)$$

Onde V_0 é a profundidade do poço da ordem de 30 a 60 MeV e o raio do núcleon dado pela expressão $R \approx 1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$, onde $A = Z + N$ [1, 6]. Combinando certas conclusões baseadas no modelo de potencial médio descrito acima é possível derivar a fórmula de massa semi-empírica de Bethe e Weizsäcker que fornece a energia de ligação como uma função do número de nêutrons N e do número de prótons Z [4].

Uma excelente parametrização das energias de ligação dos núcleos em seu estado fundamental foi proposta em 1935 por Bethe e Weizsäcker. Esta fórmula se baseia no modelo da gota líquida, mas também incorpora dois ingredientes quânticos: um é uma energia de assimetria que tende a favorecer números iguais de prótons e nêutrons e o outro é uma energia de pareamento que favorece configurações onde dois férmions idênticos são pareados. A fórmula de massa de Bethe e Weizsäcker é

$$B(Z, N) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A), \quad (5)$$

onde os coeficientes a_v, a_s, a_c e a_a são calculados para resultarem em boas aproximações com as energias de ligação dos núcleons no núcleon atômico. Esses

coeficientes têm valores iguais a: $a_v = 15,753 \text{ MeV}$, $a_s = 17,804 \text{ MeV}$, $a_c = 0,7103 \text{ MeV}$ e $a_a = 23,69 \text{ MeV}$

$$\delta(A) = \begin{cases} 33,6A^{-3/4} & \text{se } N \text{ e } Z \text{ são pares;} \\ -33,6A^{-3/4} & \text{se } N \text{ e } Z \text{ são ímpares;} \\ 0 & \text{se } A = N + Z \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

O primeiro termo a_v é um termo de volume que reflete as interações do vizinho mais próximo e que por si só levaria a uma energia de ligação constante por núcleon $B/A \approx 16 \text{ MeV}$. O segundo termo a_s , que diminui a energia de ligação, é um termo de superfície. Núcleons internos sentem interações isotrópicas, enquanto núcleons próximos à superfície do núcleon sentem forças vindas somente de dentro. Portanto, este é um termo de tensão superficial, proporcional à área $4\pi R^2 \approx A^{2/3}$. O terceiro termo a_c é o termo de repulsão de Coulomb de prótons, proporcional a Q^2/R , ou seja, aproximadamente igual $Z^2/A^{1/3}$, e este termo favorece um excesso de nêutrons sobre prótons. O quarto termo a_a é um termo de assimetria e favorece a simetria entre prótons e nêutrons, negligenciando as forças elétricas, o número $Z = N$ é energeticamente favorável. E $\delta(A)$ é um termo de pareamento quântico.

O modelo da gota líquida é útil para calcular as energias de ligações de diversos núcleos atômicos, por exemplo o isótopo de níquel $^{62}_{28}\text{Ni}$, tem energia de ligação calculada pelo modelo da gota líquida igual a $548,5 \text{ MeV}$, o que difere apenas de $0,6\%$ do valor real de $545,3 \text{ MeV}$ [1].

Apesar da relativa eficiência do modelo nuclear da gota líquida para calcular as energias de ligações de diversos nuclídeos, esse modelo não foi suficiente para explicar a estabilidade nuclear de núcleos atômicos com números de nêutrons N e/ou número de prótons Z igual a 2, 8, 20, 28, 50 ou 126; esses números são usualmente referidos como “números mágicos” e os núcleos que apresentam esses números mágicos, são particularmente estáveis. Na física atômica, a energia de ionização, ou seja, a energia necessária para extrair um elétron de um átomo neutro com elétrons Z , exibe descontinuidades em torno de $Z = 2, 10, 18, 36, 54$ e 86 , ou seja, para gases nobres. Essas descontinuidades estão associadas a camadas eletrônicas fechadas. Um fenômeno análogo ocorre na física nuclear. Existem muitas indicações experimentais mostrando que os núcleos atômicos possuem uma estrutura de camadas e que eles podem ser construídos, tal como ocorre nos átomos, preenchendo as camadas sucessivas de um poço de potencial efetivo. Por exemplo, os análogos nucleares das energias de ionização atômica são as “energias de separação” S_n e S_p , obtidas através da equação (5), que são necessárias para extrair um nêutron ou um próton de um núcleon de acordo com as equações, $S_n = B(Z, N) - B(Z, N - 1)$ e $S_p = B(Z, N) - B(Z - 1, N)$. Essas duas quantidades apresentam descontinuidades em valores especiais de N ou Z , que são chamados números mágicos. Os mais comumente mencionados são: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Como exemplo, a Figura 1 fornece a energia de separação

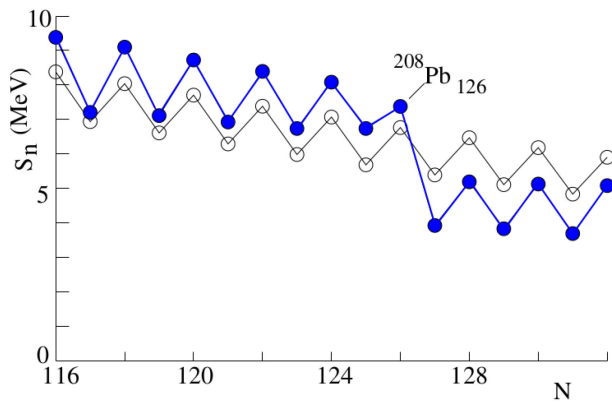


Figura 1: A energia de separação de nêutrons em isótopos de chumbo como uma função de N . Os pontos preenchidos mostram os valores medidos e os pontos abertos mostram as previsões da fórmula de Bethe-Weizsäcker [4].

de nêutrons dos isótopos de chumbo ($Z = 82$) como uma função de N . A descontinuidade no número mágico $N = 126$ é vista claramente.

A descontinuidade nas energias de separação é devida ao excesso de energia de ligação para núcleos mágicos em comparação com o previsto pela fórmula de massa semi-empírica de Bethe-Weizsäcker. Pode-se ver isso nas Figuras 2 e 3 que plotam o excesso de energia de ligação como uma função de N e Z . Grandes valores positivos de $\Delta(B/A) = B/A(\text{experimental}) - B/A(\text{teoria})$ são observados na vizinhança dos números mágicos para prótons Z , bem como nêutrons N . Observe nas duas Figuras 2 e 3 que os picos de máximo ocorrem para os núcleos com números duplamente mágicos 28, 50, 82, 126.

A Mecânica Quântica explicou com elegância como os elétrons são distribuídos em camadas $K, L, M, \dots$ e subcamadas $s, p, d, f, \dots$ nos átomos, assumindo inicialmente que na média os elétrons, cada um com carga $-e$, se movem independentemente no campo Coulombiano do núcleo com carga $+Ze$, para em seguida realizar

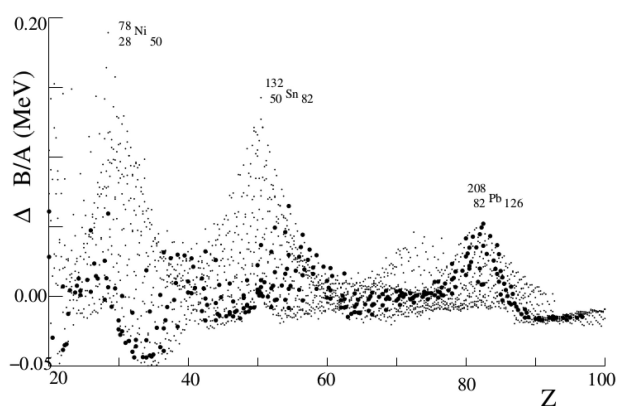


Figura 2: Diferença em MeV entre o valor medido experimentalmente de B/A e o valor calculado com a fórmula de massa empírica como uma função do número de prótons [4].

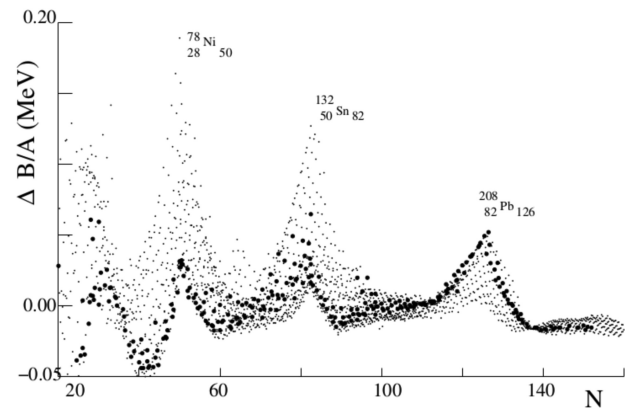


Figura 3: Diferença em MeV entre o valor medido experimentalmente de B/A e o valor calculado com a fórmula de massa empírica como uma função do número de nêutrons [4].

sucessivas aproximações para preencher as devidas camadas de energia com um número Z de elétrons. Quando uma camada $K, L, M, \dots$ está completamente preenchida, dizemos que a camada está fechada. Um elétron fora de uma camada fechada pode ser facilmente removido do átomo ao passo que um elétron em uma camada fechada necessita de uma energia bem mais elevada para ser removido do átomo. Por exemplo, o átomo de sódio tem um elétron de valência fora de uma camada fechada de elétrons, sendo necessário apenas cerca de 5 eV para remover o elétron da camada de valência de um átomo de sódio; mas para remover um segundo elétron, que deve ser retirado de uma camada fechada, são necessários cerca de 22 eV. No caso dos átomos de gases nobres que têm todas as camadas fechadas, observa-se uma extrema estabilidade eletrônica. Para um exemplo nuclear pode-se considerar o isótopo antimônio $^{121}_{51}\text{Sb}$ que tem um próton a mais do número mágico 50. Para remover esse próton necessita-se de 5,8 MeV; porém para remover um segundo próton, será necessário cerca de 11 MeV [6]. As flutuações energéticas observadas para os elétrons nos átomos bem como para os núcleos atômicos sugerem que algumas propriedades nucleares também devem ser explicadas em termos de um modelo nuclear de camadas.

Se a mesma abordagem das camadas energéticas realizada para a eletrosfera dos átomos é feita para compreender um cenário de camadas para os núcleos, um potencial diferente deve ser usado para representar o curto alcance das forças nucleares. Enfatizamos que a Mecânica Quântica impõe a toda partícula confinada em um poço de potencial energético a condição de assumir estados quânticos com níveis de energia discretos, como observado nos exemplos da partícula em um poço retangular infinito e o oscilador harmônico simples. Então se consideramos um modelo de potencial energético quântico para núcleos atômicos, deveremos ter uma discretização dos níveis de energia que podem ser identificados ao modelo de camadas. Uma aproximação é assumir que os núcleons (prótons e nêutrons) se

movem em um potencial aproximado de um oscilador harmônico tridimensional esférico $V = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$, cujo o resultado quântico resulta em níveis de energia dados por: $E = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$. Como será demonstrado nas seções IV e V, com uma subsequente aproximação obteremos $N = 2n + l$, onde l é o número quântico do momento angular orbital. Essa abordagem resulta que os níveis das camadas comportam 2, 8, 20, 28, 50 e 126 núcleons.

Maria Goeppert Mayer e Johannes Hans Daniel Jensen em 1949, cada um independentemente trabalhando com a Mecânica Quântica [7, 8], propuseram que a interação spin-órbita deveria ser adicionada ao potencial do oscilador harmônico para obterem os números mágicos observados nos núcleos atômicos. Por essas descobertas concernentes à estrutura nuclear eles receberam o prêmio Nobel de 1963 [6].

Neste artigo iremos abordar didaticamente com a Mecânica Quântica o formalismo teórico do Modelo de Camadas que foi utilizado por Maria Goeppert Mayer e Johannes Hans Daniel Jensen para a explicação da estabilidade dos núcleos que são favorecidos com os números mágicos. Um dos objetivos deste trabalho é a construção de um texto que auxilie tanto os estudantes de disciplinas que versem sobre física nuclear a compreender o modelo de camadas nucleares, quanto estudantes e professores da disciplina de mecânica quântica a vislumbrarem uma aplicação dos conteúdos abordados no curso.

2. Modelos Nucleares

Nesta seção, apresentaremos uma perspectiva histórica dos principais modelos nucleares, reverberando a evolução das propostas e a relevância de cada um. Os modelos nucleares consistem em construções teóricas da estrutura do núcleo atômico, de modo que possam corresponder com os resultados experimentais da física nuclear [9]. Nessa perspectiva, esses modelos surgiram com o intuito de descrever e explicar certas propriedades nucleares [10]. Assim, tendo em vista a complexidade inerente à interação entre os núcleons, tais modelos possuem limitações e se destinam a especificidades no que concerne às explicações de certos comportamentos nucleares, já que nenhum modelo por si só é capaz de explicar completamente todos esses comportamentos [11]. Com isso, a compreensão abrangente do núcleo requer a integração e complementaridade de múltiplos modelos, cada um contribuindo para uma visão mais completa da complexidade subjacente dos fenômenos e propriedades nucleares.

À vista disso, o desenvolvimento dos modelos nucleares se consolidou ao passo que os conhecimentos da física nuclear e de partículas estavam sendo construídos a fim de explicarem fenômenos intrínsecos ao núcleo atômico. De acordo com A. Kamal na referência [12], os modelos nucleares mais antigos visavam abordar os problemas relacionados ao decaimento alfa e as interações

dos núcleons no núcleo, tais modelos assumiam uma interação muito fraca correspondente ao movimento de partículas independentes, tal qual no potencial de Bethe, e com interações fortes, como no modelo do núcleo composto de Bohr.

Posteriormente, com o alto grau de sofisticação tanto de forma semiclássica quanto quântica, os modelos puderam ser classificados em categorias, de acordo com a explicação para as dinâmicas que regem os núcleons: partículas independentes e coletivas [12]. No entanto, há outros autores que classificam como coletivos e microscópicos, como é abordado na referência [13]. Ademais, Greiner e Maruhn na referência [13] sugerem um limite inferior a 31 modelos nucleares estabelecidos até então, de modo a comportá-los na divisão conceitual supra-mencionada, sendo que os modelos coletivos se referem aos modelos com princípios semelhantes ao da gota líquida e os microscópicos às partículas independentes, além de inserir modelos mistos situados em algum ponto intermediário entre a classificação estabelecida pelos autores, como pode ser observado na Figura 4.

Além disso, os modelos nucleares podem ser classificados de forma cronológica, como mostrado na Figura 5 em concordância com a referência [14], na qual o autor enfatiza que é possível observar um isolamento relativo dos modelos que assumem os efeitos da força nuclear forte e aqueles que assumem uma força central de ligação mais fraca.

Diante da complexidade dessas classificações, destaca-se que não há um consenso definitivo em relação a elas [14], o que, muitas vezes, desafia uma classificação rígida, permitindo o desenvolvimento contínuo de abordagens híbridas e outras categorias. Na referência [15], o autor utiliza três classificações diferentes, todavia complementares às citadas acima: (i) modelos microscópicos, (ii) modelos macroscópicos ou geométricos e (iii) modelos algébricos.

Entretanto, os diversos modelos abarcam as principais explicações acerca da estrutura do núcleo. Prezando-se pela objetividade, optamos por interpretar e seguir a classificação mais utilizada e difundida na literatura: modelos coletivos e partículas independentes. Sendo assim, os modelos coletivos tratam o núcleo atômico como um sistema de partículas, descrevendo-o como um objeto macroscópico sujeito a vibrações, rotações e deformações [13]. Já os modelos de partículas independentes visam abordar as propriedades intrínsecas dos constituintes nucleares, como prótons e nêutrons, e nas interações fundamentais entre eles [9]. Considerando que esses últimos, devemos levar em conta o princípio de exclusão de Pauli, o qual afirma que não há dois núcleons que possam ocupar o mesmo estado quântico, obedecendo a distribuição estatística de Fermi-Dirac para partículas de spin semi-inteiro, em que a função de onda é antissimétrica [16].

Nesse segmento, os modelos mais importantes a serem mencionados, e que explicam fenômenos nucleares

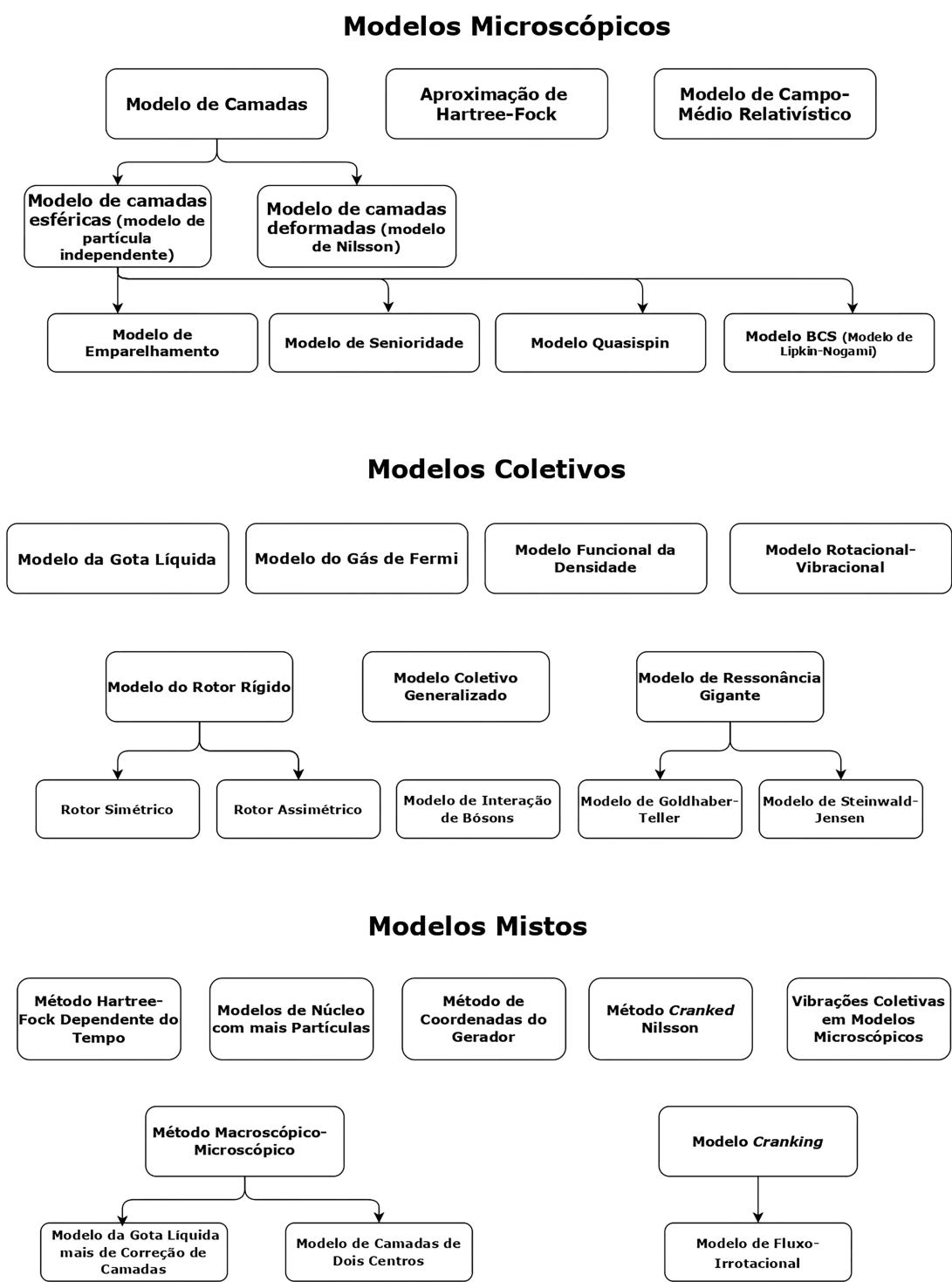


Figura 4: Resumo das três classes gerais de modelos nucleares, adaptado de [14].

fundamentais e sendo sustentados por resultados experimentais, são o modelo da gota líquida, o modelo do gás de Fermi e o modelo de camadas [10, 16]. De modo que os primeiros modelos citados se referem, respectivamente, ao movimento coletivo de núcleons e ao comportamento dos núcleons como um gás de partículas não interagentes, os quais são modelos

semiclássicos, todavia precursores dos modelos quânticos mais importantes, como o modelo de camadas e o chamado modelo coletivo, que lidam com rotação e vibração [12]. Nesse sentido, abordaremos didaticamente o Modelo de Camadas proposto por Maria Goeppert Mayer e Johannes Hans Daniel Jensen [8].

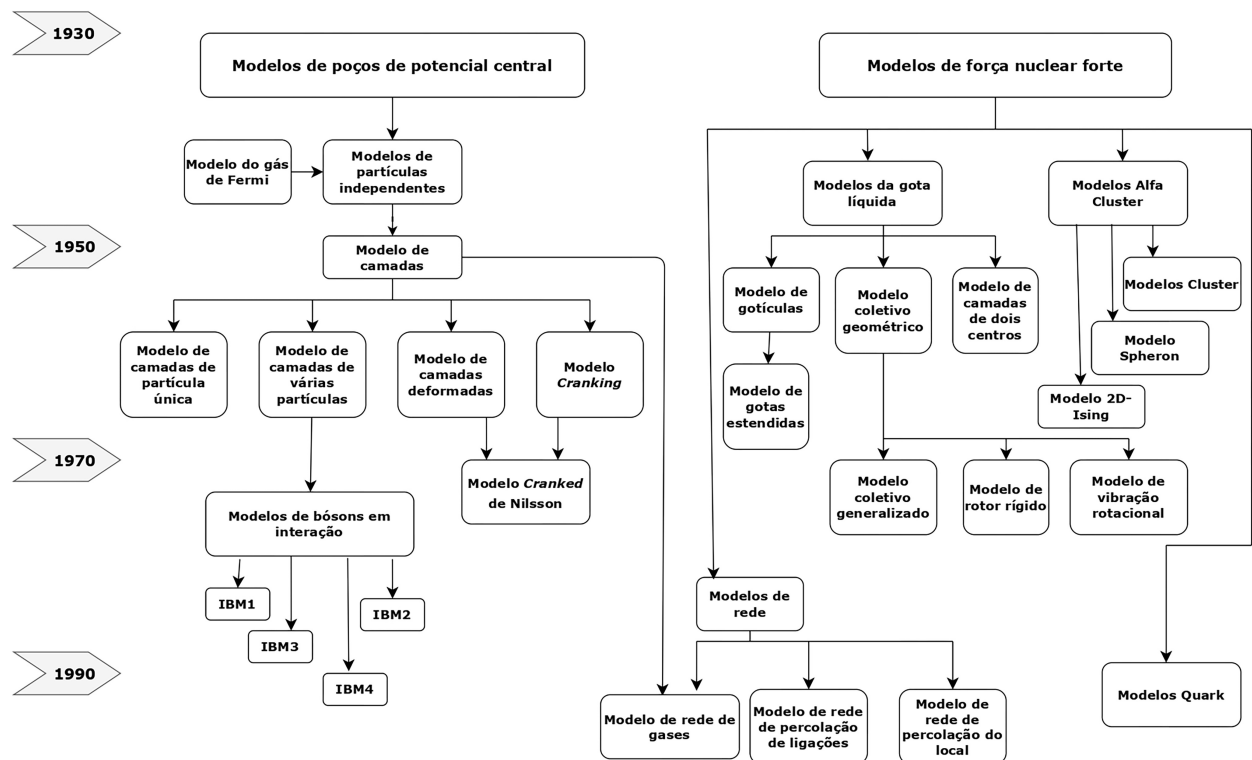


Figura 5: Evolução cronológica dos modelos nucleares, adaptada de [14].

3. Modelo de Camadas

O modelo de camadas corresponde a um dos modelos mais bem-sucedidos da física nuclear, especialmente no que concerne às determinações dos números mágicos e às previsões sobre a interação spin-órbita nuclear [10]. Acerca desse último aspecto, esse modelo é capaz de prever, satisfatoriamente, os spins e os momentos magnéticos dos núcleons, particularmente nas vizinhanças de camadas completas [9].

A cronologia do desenvolvimento dos modelos nucleares indica que até a década de 1930, o modelo do núcleo composto de Bohr era dominante e possuía sucessos notáveis, com explicações para a energia de ligação nuclear e a fissão [14]. Todavia, no final da década de 1940, certas discontinuidades nas energias de ligação e a atribuição de novas propriedades a determinados números de prótons e nêutrons indicavam a necessidade de modelos nucleares de partícula única, já que aos coletivos não comportavam as novas demandas de explicações [14]. Com isso, dados experimentais acerca dos números mágicos sugeriam uma estrutura nuclear com níveis de energias associados, e foi a partir dessa premissa que Mayer, Jensen e outros físicos começaram a elaborar o modelo nuclear de camadas. Diante disso, em 1949, foi-se atribuída ao modelo uma descrição coerente da mecânica quântica dos núcleons com a introdução da energia de acoplamento spin-órbita [8, 12, 14].

Assim, trata-se de um modelo de partículas independentes e ele se baseia em uma analogia com o

modelo da estrutura orbital dos elétrons no átomo [16]. De modo que assim como os elétrons ocupam níveis discretos de energia, os núcleons também ocupariam camadas nesse modelo [7, 8]. A ocupação completa de determinadas camadas (camadas fechadas) resulta em maior estabilidade nuclear e ela está intrinsecamente relacionada aos chamados números mágicos [7].

No modelo de camadas, compreende-se que cada núcleon se movimenta em um campo autoconsistente proveniente de todos os demais núcleons (ou seja, um potencial médio), sem que haja interação entre eles, apenas entre o núcleon e o potencial [10, 17]. Assim, em razão da pequena faixa de ação das forças nucleares, esse campo diminui rapidamente fora do volume delimitado, o que é considerado a “superfície do núcleo” [17]. Por isso, o estado do núcleo em sua completude é descrito de modo a especificar os estados dos núcleons individualmente [12, 17].

4. A Mecânica Quântica Aplicada ao Núcleo Atômico

Nesta seção, apresentaremos o comportamento coletivo dos núcleons em um núcleo atômico. Usaremos a equação de Schrödinger da Mecânica Quântica para descrever as interações entre os núcleons. A expressão matemática da energia potencial nos conduz ao modelo do oscilador harmônico simples em três dimensões que resulta em um modelo de separação energética, que fornece números quânticos específicos de ocupação para os núcleons em

um núcleo atômico. Porém essa primeira abordagem fornece a quantidade correta de núcleons por camada somente até a terceira camada.

4.1. Modelo da energia potencial nuclear

O hamiltoniano a ser utilizado na equação de Schrödinger para uma descrição rigorosa do núcleo atômico, levando em consideração que ele seja constituído de prótons e nêutrons é proposto como sendo,

$$\mathcal{H} = \sum_k (\mathcal{H}_k^N + \mathcal{H}_k^P), \quad (6)$$

onde $\mathcal{H}_k^N$ é o hamiltoniano referente ao k -ésimo nêutron e $\mathcal{H}_k^P$ é o hamiltoniano referente ao k -ésimo próton. Então, para os nêutrons temos:

$$\mathcal{H}_k^N = \frac{p_k^2}{2m_N} + \sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|), \quad (7)$$

sendo que o primeiro termo, $\frac{p_k^2}{2m_N}$, representa a energia cinética do k -ésimo nêutron, m_N é a massa do nêutron; e o segundo, $\sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)$, representa a energia de interação entre o k -ésimo nêutron e os demais núcleons. Nesse sentido $\vec{r}_k$ representa o vetor posição do k -ésimo nêutron e $\vec{r}_i$ o vetor posição do i -ésimo núcleon. O hamiltoniano para os prótons, o segundo termo na equação (6), é dado por

$$\mathcal{H}_k^P = \frac{p_k^2}{2m_P} + \sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|) + \sum_{i < k} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}, \quad (8)$$

representando o hamiltoniano referente ao k -ésimo próton, cujo a energia cinética do k -ésimo próton é o termo $\frac{p_k^2}{2m_P}$, sendo m_P a massa do próton; o termo $\sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)$, refere-se a interação entre o k -ésimo próton e os outros núcleons; e $\sum_{i < k} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$ está relacionada apenas aos prótons, já que estabelece a interação eletrostática coulombiana repulsiva entre o k -ésimo e os demais prótons. Somando as contribuições de todos os prótons e nêutrons, obtemos o hamiltoniano da equação (6).

No entanto, solucionar a equação (6) é uma tarefa muito complicada, pois trata-se de um problema de muitos corpos, além de que apenas soluções numéricas são plausíveis. Com o objetivo de abordar o problema de maneira mais simples e encontrar soluções analíticas, utilizaremos uma abordagem baseada na teoria do campo médio. Nesse caminho, consideraremos um potencial de campo médio que independe da posição do núcleon, ou seja, consideraremos o núcleon numa posição fixa. Iniciemos a modelagem do campo médio pela escolha da energia potencial entre os núcleons. Escolhamos a energia potencial entre dois núcleons representada por um poço de potencial de profundidade $-V_0$ e alcance R_0 , em que R_0 é da ordem do núcleo atômico, isto é, $R_0 \approx 10^{-15} \text{ m}$ e $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$. A soma dos poços de potenciais que descrevem a interação entre um dado

núcleon e os demais núcleons pode ser representado pelo potencial parabólico dado por

$$V_1(r) \approx -V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right), \quad (9)$$

em que $V_1(r)$ descreve a interação que um dado núcleon sofre dos demais.

Em relação aos prótons, temos que além da interação nuclear, eles também sofrem interação eletrostática dos demais prótons. Para descrever como essa interação ocorre na média, ou seja, a energia eletrostática sobre um dos prótons, utilizamos o potencial eletrostático de uma esfera de raio R_0 contendo uma densidade uniforme de carga $(Z-1)e$ produzida pelos demais $(Z-1)$ prótons, isto é,

$$V_2(r) = \frac{(Z-1)e^2}{R_0} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{3R_0^2}\right). \quad (10)$$

A dedução da equação (10) pode ser realizada através da lei de Gauss e a deixaremos como exercício para o leitor.

Dessa forma, obtemos que a energia potencial efetiva para descrever o nêutron é dada por $V_1(r)$ e para o próton é $V_2(r)$. Notem que podemos escrever

$$\begin{aligned} V_1(r) + V_2(r) &= \left(\frac{V_0}{R_0^2} - \frac{(Z-1)e^2}{2R_0^3}\right)r^2 - V_0 + \frac{3}{2} \frac{(Z-1)e^2}{R_0} \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + V, \end{aligned}$$

em que $\frac{1}{2} m\omega^2 = \frac{V_0}{R_0^2} - \frac{(Z-1)e^2}{2R_0^3}$ e $V = V_0 + \frac{3}{2} \frac{(Z-1)e^2}{R_0}$. Percebemos que $V = V_0$ quando o núcleon é um nêutron. Ou seja, em ambos os casos, prótons ou nêutrons, a energia potencial pode ser modelada pela interação do oscilador harmônico. Assim, o hamiltoniano que descreve um dado núcleon pode ser escrito como

$$\mathcal{H}^N = \frac{p^2}{2m_N} + \frac{1}{2} m_N \omega^2 r^2 + V_0, \quad (11)$$

no caso de nêutrons; e

$$\mathcal{H}^P = \frac{p^2}{2m_P} + \frac{1}{2} m_P \omega^2 r^2 + V, \quad (12)$$

no caso de prótons.

4.2. A solução da parte angular

A partir de agora, passaremos a analisar a equação de Schrödinger para os núcleons. Tendo em vista que as energias potenciais que analisaremos não dependerem das coordenadas angulares, analisaremos nesta seção apenas a separação das coordenadas na equação diferencial. Nesse bojo, iniciaremos a nossa discussão

escrevendo a equação de Schrödinger estacionária na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + U(r)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (13)$$

em que $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ representa o operador laplaciano em coordenadas esféricas, $U(r)$ representa a energia potencial relacionada ao sistema analisado, e E é o autovalor de energia. Note que na equação (13) $m = m_N$ e $U(r) = \frac{1}{2}m_N\omega^2r^2 + V_0$ no caso de nêutrons, e $m = m_P$ e $U(r) = \frac{1}{2}m_P\omega^2r^2 + V$ no caso de prótons. A nossa suposição é que o núcleo seja esférico, com raio da ordem de $10^{-15}m$, logo, admitindo a simetria esférica, utilizaremos o sistema de coordenadas esférico. O operador laplaciano escrito em coordenadas esféricas pode ser consultado nas referências. Dessa forma, a função de onda fica escrita como $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \phi)$. A equação de Schrödinger fica escrita na forma [18]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right) + U(r)\psi = E\psi. \quad (14)$$

Note que para abreviar a notação, estamos escrevendo $\psi(r, \theta, \phi) = \psi$. Resolveremos a equação (14) usando a técnica de separação de variáveis. Para esse fim, consideremos $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Q(\theta)F(\phi)$. Substituindo na equação (14) e dividindo por $R(r)Q(\theta)F(\phi) = RQF$, obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2Q}\frac{d^2Q}{d\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2Q}\frac{dQ}{d\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta F}\frac{d^2F}{d\phi^2}\right) + U(r)\psi = E\psi. \quad (15)$$

Note que a equação (15) pode ser escrita na forma

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2Q}\frac{d^2Q}{d\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2Q}\frac{dQ}{d\theta} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))\right] = -\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2}. \quad (16)$$

A partir da equação (16), percebemos que o membro esquerdo é função das variáveis θ e r , enquanto que o membro direito é função da variável ϕ . Assim, para que os membros sejam iguais, ambos devem ser iguais a uma constante, a qual denotaremos por m_l . Com isso, obtemos a equação

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} = -m_l F, \quad (17)$$

o que nos fornece a solução

$$F(\phi) = C_1 e^{im_l\phi} + C_2 e^{-im_l\phi}. \quad (18)$$

Lembrando que $\psi(r, \theta, \phi)$ deve ser contínua, finita e unívoca, inferimos que $F(\phi)$ deve assumir o mesmo valor

para $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$, e isso ocorre se m_l assumir somente valores inteiros, isto é, $m_l = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Ou seja, m_l é quantizado.

Continuando a discussão, analisando o membro esquerdo da equação (16), podemos escrever

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2Q}\frac{d^2Q}{d\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2Q}\frac{dQ}{d\theta} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))\right] = m_l. \quad (19)$$

Na equação (19) podemos separar a dependência das variáveis r e θ , obtendo

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2r}{R}\frac{dR}{dr} + \frac{2mr^2}{\hbar^2}(E - U(r)) = -\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\theta^2} - \frac{\cot\theta}{Q}\frac{dQ}{d\theta} + \frac{m_l^2}{\sin^2\theta}. \quad (20)$$

Perceba que o membro esquerdo da equação (20) é função da variável r , enquanto o membro direito é função da variável θ ; assim, para que eles sejam iguais, ambos devem ser iguais a uma constante, a qual denotaremos por $l(l+1)$. Com isso, obtemos as equações

$$\frac{d^2Q}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dQ}{d\theta} + \left(l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right)Q = 0, \quad (21)$$

e

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(E - U(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R = 0. \quad (22)$$

A equação (22) será utilizada nas seções posteriores para energias potenciais $U(r)$ específicas.

Em relação à equação (21), façamos a mudança de variáveis $x = \cos\theta$. Assim, obtemos

$$\frac{dQ}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{d^2Q}{d\theta^2} = -\cos\theta\frac{dQ}{dx} - \sin\theta\frac{d^2Q}{dx^2},$$

e a equação (21) fica escrita como

$$(1-x^2)\frac{d^2Q}{dx^2} - 2x\frac{dQ}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m_l^2}{1-x^2}\right)Q = 0. \quad (23)$$

A equação (23) é a equação diferencial associada de Legendre, cuja solução são os polinômios associados de Legendre, denotados por $P_l^{m_l}(x)$ [18]. Para esses polinômios associados de Legendre, os valores de l são números naturais, isto é, $l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Tais polinômios podem ser obtidos através da fórmula de Rodrigues

$$P_l^{m_l}(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m_l}{2}} \frac{d^{l+m_l}}{dx^{l+m_l}} (x^2-1)^l, \quad (24)$$

e

$$P_l^{-m_l}(x) = (-1)^{m_l} \frac{(l-m_l)!}{(l+m_l)!} P_l^{m_l}(x).$$

Tabela 1: Polinômios associados de Legendre.

l	m_l	$P_l^{m_l}(x)$
1	1	$(1-x^2)^{1/2}$
2	1	$3x(1-x^2)^{1/2}$
2	2	$3(1-x^2)^{1/2}$
3	1	$\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$
3	2	$15x(1-x^2)$
3	3	$15(1-x^2)^{3/2}$

A Tabela 1 traz alguns polinômios associados de Legendre [18]. A equação (24) é muito importante para descobrirmos a relação entre l e m_l . Note que a derivada é de ordem $l + m_l$ e o polinômio que está sendo derivado tem grau $2l$. Assim, para que tenhamos resultados diferente de zero, m_l deve ser menor ou igual a l , isto é, $m_l \leq l$. Lembrando que m_l pode ser negativo, podemos escrever que

$$-l \leq m_l \leq l. \quad (25)$$

Essa inequação relaciona os valores possíveis para dos números quânticos m_l e l . O leitor deve se lembrar que nos cursos tradicionais de Mecânica Quântica, quando se estuda a dinâmica do elétron nos átomos, o valor do número quântico do momento angular orbital l pode ser denotado na representação espectroscópica. Assim, $l = 0$ corresponde ao orbital s , $l = 1$ ao orbital p , $l = 1$ ao d , $l = 3$ ao f , $l = 3$ ao g , e assim sucessivamente, ou seja, $(l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots) \rightarrow (s, p, d, f, g, h, i, \dots)$. Essa notação será utilizada na sequência deste trabalho. Na próxima subseção analisaremos a parte radial da equação (14).

4.3. Solução da parte radial – o modelo oscilador harmônico

Nesta seção, analisaremos a equação (22) sujeita à energia potencial do tipo oscilador harmônico. Se usarmos $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, obtemos

$$\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{r^2}u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr},$$

de forma que,

$$\frac{d^2R}{dr^2} = -\frac{2}{r^3}u - \frac{2}{r^2}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2u}{dr^2}.$$

Substituindo esses resultados na equação (22), podemos reescrevê-la na forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \right] u = Eu. \quad (26)$$

Para solucionar a equação (26), tomemos o ansatz

$$u(r) = r^{l+1}e^{-(m\omega/2\hbar)r^2}T(r). \quad (27)$$

Derivando a função dada na equação (27) e substituindo na equação (26), obtemos

$$r^{l+3}\frac{d^2T}{dr^2} + \left(2(l+1) - \frac{2m\omega}{\hbar}r^2 \right) r^l \frac{dT}{dr} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m\omega(2l+3)}{\hbar} \right) r^{l+1}T = 0. \quad (28)$$

Definindo, $T(r) = L\left(\frac{m\omega}{\hbar}r\right)$, temos que

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2m\omega}{\hbar}r\frac{dL}{dr},$$

e

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{4m^2\omega^2}{\hbar^2}r^2\frac{d^2L}{dr^2} + \frac{2m\omega}{\hbar}\frac{dL}{dr}.$$

Substituindo esses resultados na equação (28) obtemos a equação diferencial

$$\frac{m\omega}{\hbar^2}r^2\frac{d^2L}{dr^2} + \left(\frac{m\omega}{\hbar^2}r^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right) + 1 \right) \frac{dL}{dr} + \left(\frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4} \right) L = 0. \quad (29)$$

Se fizermos a identificação $z = \frac{m\omega}{\hbar^2}r^2$, a equação (29) pode ser vislumbrada como a equação diferencial associada de Laguerre, $xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$, em que $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, ou seja, $n \in \mathbb{N}$, e $y = L_n^\alpha(x)$ são os polinômios associados de Laguerre de ordem n . Dessa forma, a nossa solução ficada dada por

$$u_{l,n}(r) = Cr^{l+1}e^{-(m\omega/\hbar)r^2}L_n^{(l+1/2)}\left(\frac{m\omega}{\hbar^2}r^2\right), \quad (30)$$

em que C é uma constante de normalização. É notável que $\frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4} = n$, ou seja,

$$E_{n,l} = \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega. \quad (31)$$

Notemos que a relação dos níveis de energia, dada na equação (31), é bastante similar aos níveis de energia de um oscilador harmônico tridimensional, $E_N = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$. Assim, se definirmos $N = 2n + l$, podemos considerar os níveis de energia do problema analisado como correspondentes aos níveis do oscilador harmônico tridimensional. Substituindo os valores para as constantes, encontramos que o espaçamento entre dois níveis adjacentes do oscilador, $\Delta E = E_N - E_{N-1}$ está contido no intervalo $10 \text{ MeV} < \Delta E < 20 \text{ MeV}$, pois $\hbar\omega \approx 51A^{-1/3}$, em que A é a massa atômica do núcleo. Agora, vejamos as consequências que esses números quânticos, n , l , e N , exercem na definição dos números mágicos.

Relembremos que $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, assim como $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Da mesma forma, N também é inteiro positivo. Logo, os valores possíveis para l e n de uma dada camada são delineados pelos valor de N . Dessa forma, denotaremos a camada pelo número N . A quantidade de núcleons permitidas em cada camada é definida

pelo número de estados contidos no respectivo N . Por exemplo, o estado em que $N = 0$ só é possível se ambos, n e l , forem simultaneamente nulos, uma vez que ambos são inteiros e positivos. Logo, na camada $N = 0$, há apenas um estado, definido por $(n = 0, l = 0)$. Além disso, conforme definido na equação (25), m_l assume somente o valor zero, i.e., $m_l = 0$. Assim, o único estado é dado por $(n = 0, l = 0, m_l = 0)$, ou seja, um estado. Contudo, lembremos que os núcleons são férmions de spin $1/2$. Logo, em cada estado alocam-se dois núcleons. Assim, são permitidos até 2 núcleons na camada $N = 0$. Se tal camada tiver um par de nêutrons e um par de prótons, dizemos que essa camada está completa para ambos núcleons.

Podemos conduzir este raciocínio para as demais camadas. Por exemplo, a camada em que $N = 1$, podemos ter somente $(n = 0, l = 1)$. Como $l = 1$, o número quântico magnético pode ser $m_l = -1$, ou $m_l = 0$, ou ainda $m_l = 1$. Isso nos fornece três estados possíveis, quais sejam, $(n = 0, l = 1, m_l = -1)$, $(n = 0, l = 1, m_l = 0)$ e $(n = 0, l = 1, m_l = 1)$. Levando em consideração a natureza fermiônica dos núcleons, cada um desses estados pode comportar dois núcleons, assim para $N = 1$, podemos ter 6 núcleons na camada. Se considerarmos o número acumulado de núcleons, temos que são comportados 8 núcleons até esta camada.

Na camada em que $N = 2$, podemos ter $(n = 1, l = 0)$, e também $(n = 0, l = 2)$. Considerando m_l , dado na equação (25), esses estados ficam dados por $(n = 1, l = 0, m_l = 0)$, $(n = 0, l = 2, m_l = -2)$, $(n = 0, l = 2, m_l = -1)$, $(n = 0, l = 2, m_l = 0)$, $(n = 0, l = 2, m_l = 1)$, $(n = 0, l = 2, m_l = 2)$. Ou seja, seis estados. Considerando que são férmions, para $N = 2$ temos 12 estados. Assim, o número acumulado de núcleons até a terceira camada é 20.

Fica como tarefa ao leitor o cômputo do total de núcleons para as demais camadas. Na camada em que $N = 3$, o leitor vai encontrar que 20 núcleons podem ser comportados. Assim, o valor acumulado até essa camada é de 40 núcleons.

Sabendo que camadas com a quantidade de núcleons completamente preenchida definem núcleos estáveis, e levando em consideração que as quantidades acumuladas até o momento são 2, 8, 20 e 40, percebe-se que o modelo até então proposto fornece a quantidade correta de núcleons por camada somente até a terceira camada, pois dos dados empíricos não há núcleos fortemente estáveis com 40 núcleons. Os dados experimentais mostram que o próximo número de núcleo estável é o de 28 nêutrons ou prótons. A Tabela 2 destaca a quantidade de núcleons por camada que foi obtida a partir do modelo proposto.

5. Momento Angular – Uma Breve Revisão

Antes de apresentar um modelo mais realístico para o modelo nuclear das camadas, convém discutir alguns

Tabela 2: Modelo Nuclear – Oscilador Harmônico Simples tridimensional.

N	l	$-l \leq m_l \leq l$	Número de Estados	Número de Núcleons Acumulados
0	0	0	2	2
1	1	-1, 0, 1	6	8
2	0	0	12	20
	2	-2, -1, 0, 1, 2		
3	1	-1, 0, 1	20	40
	3	-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3		
	0	0		
4	2	-2, -1, 0, 1, 2	30	70
	4	-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4		

pontos sobre o momento angular total. Assim, com o objetivo de tornar este trabalho o mais autocontido quanto possível, apresentaremos nesta seção uma rápida revisão sobre a teoria do momento angular. Nesse sentido, discutiremos alguns elementos sobre o momento angular no âmbito da mecânica quântica, passando brevemente pelo spin. Os conteúdos discutidos nesta seção serão importantes na continuidade do trabalho, sobretudo na compreensão da interação spin-órbita.

5.1. O momento angular

No âmbito da mecânica clássica, o momento angular é definido como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{32}$$

em que $\vec{r}$ é o vetor deslocamento a partir da origem, e $\vec{p}$ é o momento linear. Em coordenadas cartesianas, os componentes do momento angular são dados por $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$ e $L_z = xp_y - yp_x$. Utilizando o procedimento canônico de quantização, isto é, escrever os operadores posição na forma $\hat{x} \rightarrow x$, $\hat{y} \rightarrow y$, e $\hat{z} \rightarrow z$; e os operadores momentum na forma $\hat{p}_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ e $\hat{p}_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$, podemos mostrar que os operadores momento angular satisfazem a álgebra dada pelos comutadores a seguir

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z, \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x, \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y. \end{aligned}$$

Deixamos como exercício ao leitor a demonstração dessas relações de comutação. Essas relações de comutação diferentes de zero implicam que os momentos angulares em direções perpendiculares não podem ser medidos simultaneamente com precisão absoluta.

Em coordenadas esféricas, os operadores do momento angular podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= i\hbar \left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right), \\ \hat{L}_y &= i\hbar \left(-\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}.\end{aligned}$$

Com o uso dessas últimas equações, e usando o fato que $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L}$, podemos escrever o operador

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right). \quad (33)$$

O leitor pode verificar que a equação (13) pode ser escrita na forma

$$\hat{H}\psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi), \quad (34)$$

em que

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + U(r).$$

Com isso, os resultados da subseção IV-B nos diz ainda que

$$\hat{L}^2\psi(r, \theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1)\psi(r, \theta, \phi). \quad (35)$$

E ainda,

$$\hat{L}_z\psi(r, \theta, \phi) = \hbar m_l\psi(r, \theta, \phi). \quad (36)$$

As equações (35) e (36), advêm do fato que já conhecemos, como resultado da subseção IV-B, que

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d}{d\theta} + \frac{m_l^2}{\sin^2\theta} \right) Q(\theta) = l(l+1)Q(\theta),$$

e

$$\frac{dF(\phi)}{d\phi} - m_l F(\phi).$$

E assim, $\hbar^2 l(l+1)$ e $\hbar m_l$ são os autovalores dos operadores $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$, respectivamente. O estado quântico representado por $\psi(r, \theta, \phi)$ é então definido por três números quânticos, n , l , e m_l , os quais são relacionados aos autovalores da energia e momento angular, respectivamente. Por isso, denotaremos tal estado por $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)$.

5.2. O spin

O spin é uma propriedade intrínseca das partículas, e o seu tratamento algébrico é similar ao do momento angular, embora não se possa dizer que o spin é uma espécie de momento angular intrínseco das partículas, como usualmente aparece em muitos livros-textos. Não

é o nosso objetivo aqui neste texto travar a discussão sobre o significado do spin; assim, tal problemática será deixada para outro momento. Em suma, nos problemas em que o spin da partícula deve ser considerado, o estado quântico do sistema é definido com um número quântico extra, denotado por m_s , o qual é autovalor do operador $\hat{S}$. Dessa forma, a função de onda passa a ser dada por $\psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi)$. Em suma, para os elétrons e núcleons, que são partículas de spin $1/2$, o valor do spin s é fixo, ou seja, $s = 1/2$, e m_s pode assumir apenas dois valores $m_s = 1/2$ e $m_s = -1/2$, os quais relacionamos ao spin up e spin down, respectivamente. Os operadores de spin quando aplicados à função de onda nos fornece

$$\hat{S}^2\psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi) = \hbar^2 s(s+1)\psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi), \quad (37)$$

e

$$\hat{S}_z\psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi) = \hbar m_s\psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi). \quad (38)$$

E os operadores de spin satisfazem as relações de comutação dadas por

$$\begin{aligned}[\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= i\hbar \hat{S}_z, \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z] &= i\hbar \hat{S}_x, \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= i\hbar \hat{S}_y,\end{aligned}$$

as quais são idênticas aquelas satisfeitas pelos operadores que representam o momento angular. Por esse motivo, muitas vezes o spin é identificado, erroneamente, como uma espécie de rotação.

Em relação aos núcleons, que tem spin fixo, ou seja, $s = 1/2$, a aplicação dos operadores de spin nos fornece

$$\hat{S}^2\psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi) = \frac{3}{4}\hbar^2\psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi), \quad (39)$$

$$\hat{S}_z\psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2}\hbar\psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi), \quad (40)$$

para o caso do spin up, $m_s = 1/2$. E também,

$$\hat{S}^2\psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{4}\hbar^2\psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi), \quad (41)$$

$$\hat{S}_z\psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{2}\hbar\psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi), \quad (42)$$

para o caso de spin down, $m_s = -1/2$.

5.3. O momento angular total

Nesta subseção, discutiremos sobre o momento angular total, o qual denotaremos por $\vec{J}$, o qual inclui a soma do momento angular orbital $\vec{L}$ e o spin $\vec{S}$, isto é, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Com isso, podemos definir o operador momento angular total $\hat{J}$, o qual, juntamente com $\hat{J}_z$ satisfaz as equações de autovalores dadas por

$$\hat{J}^2\Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi) = \hbar^2 j(j+1)\Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi), \quad (43)$$

$$\hat{J}_z\Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi) = \hbar m_j\Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi). \quad (44)$$

Nesse arcabouço, o número j pode assumir valores dados por $j = l + s$; enquanto o número m_j pode assumir os valores $m_j = -j, -j + 1, \dots, 0, \dots, j - 1, j$. É importante notar que nos casos de partículas de spin semi-inteiro, como elétrons e núcleons, j pode assumir valores inteiros e semi-inteiros; nestes casos, m_j também será semi-inteiro, e $m_j = 0$ não é um valor permitido.

Como exemplo, tomemos um elétron que esteja num estado em que seu momento angular orbital seja igual a zero, isto é, $l = 0$. Como para o elétron $s = 1/2$, o número j pode assumir somente o valor $j = 1/2$, enquanto $m_j = 1/2$ ou $m_j = -1/2$.

No caso de um elétron cujo momento angular orbital seja igual a $l = 1$, podemos ter $j = 3/2$ (pois $j = l + s$), e assim, m_j pode assumir os valores $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$.

Note que para um dado l , a inclusão do spin do elétron dobra a quantidade de estados permitidos. Por exemplo, se $n = 0$ e $l = 0$, teríamos a função de onda $\Psi_{0,0,0}$, pois só teríamos $m_l = 0$. Contudo, se o spin for considerado, podemos ter os estados representados pelas funções de onda $\Psi_{0,0,0,1/2}$ e $\Psi_{0,0,0,-1/2}$. Os aspectos aqui esboçados sobre momento angular serão bastante úteis na próxima seção. O leitor encontrará as deduções das propriedades aqui enunciadas em livros-texto básicos de mecânica quântica [19, 20], e assim, demonstrá-las é deixado como exercício.

6. A Interação Spin-Órbita

Considerando que o modelo até aqui desenvolvido não ter sido suficiente para prever a quantidade de núcleons por camada que esteja de acordo com a experiência, foi necessário aprimorá-lo. Uma proposta é considerar uma interação análoga à interação spin-órbita estabelecida na resolução do átomo de hidrogênio na Mecânica Quântica. A proposta é acrescentar no hamiltoniano o termo de spin-órbita [7, 8, 13],

$$\mathcal{H}_{SL} = \Phi(r) \vec{S} \cdot \vec{L}, \quad (45)$$

em que $\vec{S}$ é o vetor spin do núcleon, enquanto $\vec{L}$ é o vetor momento angular do núcleon, e $\Phi(r)$ uma função com dependência radial que pode ser modelada com base na fenomenologia. Aqui neste trabalho não estamos preocupados com os valores da energia, mas somente com a contagem da quantidade de núcleons permitidos em cada estado; por esse motivo, não detalharemos a forma de $\Phi(r)$. O termo spin-órbita adicionado à interação entre núcleons encontra embasamento experimental, conforme pode ser visto no trabalho [13, 21]. Na abordagem que construiremos nesta seção, utilizaremos o momento angular total $\vec{J}$, o qual é definido por $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Se usarmos o fato que $J^2 = (\vec{L} + \vec{S}) \cdot (\vec{L} + \vec{S}) = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$, podemos escrever que $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$. A escrita dessa última forma facilitará a resolução do problema posto.

A presença do termo dado na equação (45) causará um desmembramento de cada nível de energia, autovalores

das equações (11, 12), em dois, os quais são correspondentes aos autovalores de $\vec{L} \cdot \vec{S}$. Ou seja, originalmente, pelas equações (11, 12), tínhamos uma equação de autovalores dada por $\mathcal{H}\psi = E\psi$, na qual E são os autovalores. Agora, temos uma equação de autovalores dada por $(\mathcal{H} + \mathcal{H}_{SL})\psi = E'\psi$, em que $E' = E_{n,l} + E_j$, ou $E_{n,l,j} = (2n + l + \frac{3}{2})\hbar\omega + E_j$, sendo que E_j representa os autovalores do termo spin-órbita. Definamos $\psi = u_{n,l}F$, em que F é uma função dependente das variáveis angulares e de spin. Dos cursos de mecânica quântica [19, 20], sabemos que os autovalores de $\vec{L} \cdot \vec{S}$, ou melhor, de $\frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$, são dados por

$$\frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)F = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]F, \quad (46)$$

em que podemos definir $E_j = \kappa \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$, em que $\kappa = \int_0^{R_0} u_{n,l}\Phi(r)dr$. Como os núcleons são partículas de spin $s = 1/2$, podemos escrever

$$E_j = \kappa \frac{\hbar^2}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]. \quad (47)$$

Deve-se observar que $j = l + s$ resulta em dois possíveis valores para cada valor de l : $j = l - 1/2$ e $j = l + 1/2$. Assim podemos escrever, respectivamente

$$E_{j=l-1/2} = -\kappa \frac{\hbar^2}{2}(l+1), \quad (48)$$

e

$$E_{j=l+1/2} = \kappa \frac{\hbar^2}{2}l. \quad (49)$$

A separação energética entre dois níveis orbitais é $\Delta E_l = E_{j=l+1/2} - E_{j=l-1/2} = \kappa \hbar^2(l+1/2)$. Experimentalmente, sabe-se que a energia do nível em que $j = l - 1/2$ é mais elevada que do nível em que $j = l + 1/2$. Por esse motivo, o termo de acoplamento spin-órbita deve ser negativo, então cada nível de energia possível $E_{n,l,j}$ contém os desdobramentos: $E_{n,l} - E_{l+1/2}$ e $E_{n,l} - E_{l-1/2}$. Além disso, o arcabouço experimental nos diz que o coeficiente κ possui valor absoluto entre $0,3 \text{ MeV}/\hbar^2$ e $0,6 \text{ MeV}/\hbar^2$ [13].

Vamos tabular os primeiros valores de E_j , para $l = 0, \dots, 6$, a partir das equações (48) e (49) com os respectivos subníveis rotulados com a notação espectroscópica, $(l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots) \rightarrow (s, p, d, f, g, h, i, \dots)$.

A partir da Tabela 3 podemos posicionar os níveis e subníveis energéticos do modelo de camadas com a interação spin-órbita e assim contarmos o número de degenerescência D de núcleons permitidos de acordo com o princípio de exclusão de Pauli em uma camada completamente ocupada. Então, pelo princípio de exclusão de Pauli dois núcleons não podem ter o mesmo conjunto de números quânticos (n, l, j, m_j) . Da Mecânica Quântica (semelhante a análise discutida na Seção IV e obtida na equação (25) para um dado valor de j temos que

$$m_j = -j, -(j-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, j-1, j.$$

Tabela 3: Valores de energia do desdobramento spin-órbita e as respectivas camadas espectroscópicas.

l	j	notação espectroscópica	Energia
0	$-1/2$	—	—
	$1/2$	$s_{1/2}$	0
1	$1/2$	$p_{1/2}$	$-\kappa\hbar^2$
	$3/2$	$p_{3/2}$	$\frac{1}{2}\kappa\hbar^2$
2	$3/2$	$d_{3/2}$	$-\frac{3}{2}\kappa\hbar^2$
	$5/2$	$d_{5/2}$	$\kappa\hbar^2$
3	$5/2$	$f_{5/2}$	$-2\kappa\hbar^2$
	$7/2$	$f_{7/2}$	$\frac{3}{2}\kappa\hbar^2$
4	$7/2$	$g_{7/2}$	$-\frac{5}{2}\kappa\hbar^2$
	$9/2$	$g_{9/2}$	$2\kappa\hbar^2$
5	$9/2$	$h_{9/2}$	$-3\kappa\hbar^2$
	$11/2$	$h_{11/2}$	$\frac{5}{2}\kappa\hbar^2$
6	$11/2$	$i_{11/2}$	$-\frac{7}{2}\kappa\hbar^2$
	$13/2$	$i_{13/2}$	$3\kappa\hbar^2$

Isso nos dá um total de $2j + 1$ valores para cada j . Conclui-se que pelo princípio de exclusão de Pauli, um orbital completo pode conter um máximo de $D(j) = 2j + 1$ núcleons. Vejamos a seguir a distribuição dos núcleons nesse modelo de camadas, lembrando que da equação (31) tem-se que $N = 2n + l$.

- $N = 0$, resulta que $n = 0$ e $l = 0$. De acordo com a Tabela 3 temos apenas um subnível e corresponde a $1s_{1/2}$. De acordo com a regra do princípio de exclusão de Pauli, da expressão, pode-se alocar $2j + 1$ núcleons nesse nível. Com $j = 1/2$ obtemos que apenas dois núcleons completam esse nível, então $D = 2$.
- $N = 1$, resulta que $n = 0$ e $l = 1$. De acordo com a Tabela 3 temos apenas dois subníveis correspondente a $1p_{1/2}$ e $1p_{3/2}$. De acordo com a expressão $2j + 1$, em $1p_{1/2}$ tem-se $j = 1/2$, e dois núcleons podem ocupar esse subnível; em $1p_{3/2}$ tem-se $j = 3/2$, e quatro núcleons podem ocupar esse subnível. Resulta que $D = 6$ núcleons no máximo podem ocupar esse nível.
- $N = 2$ apresenta duas possíveis combinações:
 - (i) $n = 0$ e $l = 2$, que de acordo com a Tabela 3 temos os dois subníveis correspondentes a $1d_{1/2}$ e $1d_{3/2}$. De acordo com a expressão $2j + 1$, em $1d_{3/2}$ tem-se $j = 3/2$, tal que quatro núcleons podem ocupar esse subnível; em $1d_{5/2}$ tem-se $j = 5/2$, e seis núcleons podem ocupar esse subnível.
 - (ii) $n = 1$ e $l = 0$, que de acordo com a Tabela 3 tem um subnível e corresponde a $2s_{1/2}$ com a possibilidade de mais dois núcleons ocuparem esse estado. Resulta então que $D = 4 + 6 + 2 = 12$ núcleons no máximo podem ocupar esse nível. É importante também observar na Tabela 3 a ordem dos níveis de energia, que do menor para o maior fica $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ e $1d_{3/2}$. O nível $2s_{1/2}$ não é afetado pelo acoplamento spin-órbita, ao passo que

o subnível $1d_{3/2}$ sobe e o subnível $1d_{5/2}$ desce em concordância com a regra que o subnível $j + 1/2$ fica abaixo do subnível $j - 1/2$ para um mesmo n e l .

Até aqui vemos que um núcleo atômico com a camada $N = 0$ tem o número mágico igual a 2, para $N = 1$ as camadas completas resultam no número mágico 8 e para $N = 2$ as camadas completas resultam no número mágico igual a 20. Estes três primeiros números estão de acordo com o previsto na seção III visto na Tabela 2. Entretanto para a camada $N = 3$ o acoplamento spin-órbita afeta a separação dos subníveis conforme veremos a seguir.

- $N = 3$ é um nível dividido em duas camadas. Vejamos a seguir como isso é analisado. Para $n = 0$ e $l = 3$ temos os dois subníveis correspondentes a $1f_{5/2}$ e $1f_{7/2}$, que de acordo com a Tabela 3 a energia do subnível $1f_{7/2}$ será $E = \frac{9}{2}\omega\hbar - \frac{3}{2}\kappa\hbar^2$ que está abaixo do subnível $1f_{5/2}$ com energia $E = \frac{9}{2}\omega\hbar + 2\kappa\hbar^2$. A separação entre esses dois níveis vale $\Delta E_l = \kappa\hbar^2(l + \frac{1}{2}) = \frac{7}{2}\kappa\hbar^2$, de forma que se observa uma separação energética considerável. O subnível $1f_{7/2}$ é apreciavelmente baixo, de tal forma que este é levado a um isolamento justificável, o que leva o subnível $1f_{7/2}$ ao status de uma camada fechada com um número de ocupação igual a $D(7/2) = (2 \cdot 7/2 + 1) = 8$, alcançando o próximo número mágico igual a 28 [8].

O subnível $1f_{5/2}$, com $D = 6$ irá se associar aos outros subníveis de $N = 3$, $n = 1$ e $l = 1$, que são $2p_{1/2}$ e $2p_{3/2}$ com $D = 2$ e $D = 4$ respectivamente. Isso resulta em um número de ocupação igual a 12, que somado com o número mágico anterior 28 resulta em 40 que não é um número mágico. Da mesma forma que aconteceu com o subnível $1f_{7/2}$, um subnível do nível $N = 4$ devido ao acoplamento spin-órbita, desce para se associar com os subníveis $1f_{5/2}$, $2p_{1/2}$ e $2p_{3/2}$ para formarem uma camada estável. Esse subnível vem dos números quânticos $N = 4$, $n = 0$ e $l = 4$, como se observa na Tabela 3, o subnível $1g_{9/2}$ está abaixo do subnível $1g_{7/2}$, e sendo também observado na experiência, que o subnível $1g_{9/2}$ com $D = 10$ se associa subníveis $1f_{5/2}$, $2p_{1/2}$ e $2p_{3/2}$ para obter a camada completa com número mágico igual a 50. Os dados empíricos mostram que os níveis de energia do menor para o maior é $2p_{3/2}$, $1f_{5/2}$, $2p_{1/2}$ e $1g_{9/2}$ [8].

- $N = 4$ tem um subnível $1g_{7/2}$, com $D = 8$ para os números quânticos $n = 0$ e $l = 4$. Existem dois subníveis para $n = 1$ e $l = 2$ que são $2d_{3/2}$ e $2d_{5/2}$ com $D = 4$ e $D = 6$ respectivamente. E existe um subnível para $n = 2$ e $l = 0$ que é o subnível $3s_{1/2}$ com $D = 2$. Até aqui tem-se um número de ocupação para esses subníveis igual a 20, que resulta um número de núcleons acumulados igual a 70, que não é um número mágico. E como antes os dados empíricos mostram que um subnível de

$N = 5$ desce para compor uma camada com $1g_{7/2}$, $2d_{3/2}$, $2d_{5/2}$ e $3s_{1/2}$. O subnível que tem números quânticos $N = 5$, $n = 0$ e $l = 5$ que desce do nível $N = 5$ é o subnível $1h_{11/2}$ com $D = 12$. Assim essa camada tem subníveis com ordem energética do menor para o maior dado por $1g_{7/2}$, $2d_{5/2}$, $2d_{3/2}$, $3s_{1/2}$ e $1h_{11/2}$ totalizando $D = 32$ e número de ocupação igual a 82, um número mágico.

- $N = 5$ tem o subnível $1h_{9/2}$ com $n = 0$ e $l = 5$ com $D = 10$. Para $n = 1$ e $l = 3$ temos dois subníveis $2f_{5/2}$ e $2f_{7/2}$ com $D = 6$ e $D = 8$ respectivamente. Para $n = 2$ e $l = 1$ temos mais dois subníveis $3p_{1/2}$ e $3p_{3/2}$ com $D = 2$ e $D = 4$ respectivamente. Como nos casos anteriores um subnível de $N = 6$, com $n = 0$ e $l = 6$ desce para compor essa camada. É o subnível $1i_{13/2}$ com $D = 14$ que desce e completa a camada com níveis de energia do menor para o maior dado por $1h_{9/2}$, $2f_{7/2}$, $2f_{5/2}$, $3p_{3/2}$, $3p_{1/2}$ e $1i_{13/2}$ totalizando $D = 44$ e o número de ocupação igual a 126, outro número mágico.
- $N = 6$ com $n = 0$ e $l = 5$ tem um subnível $1i_{11/2}$ com $D = 12$, o subnível $1i_{13/2}$, como explicado acima tem nível energético baixo que o coloca na camada anterior. Para $n = 1$ e $l = 4$, em concordância com a Tabela 3 corresponde aos subníveis $2g_{9/2}$ e $2g_{7/2}$ cada $D = 10$ e $D = 8$ respectivamente. Para $n = 2$ e $l = 2$ tem subníveis $3d_{5/2}$ e $3d_{3/2}$ com $D = 6$ e $D = 4$ respectivamente. Para $n = 3$ e $l = 0$ tem um único subnível $4s_{1/2}$ com $D = 2$. A ordem energética nessa camada, de acordo com os dados experimentais, do menor valor para o maior valor é dada por: $2g_{9/2}$, $3d_{5/2}$, $1i_{11/2}$, $2g_{7/2}$, $4s_{1/2}$, $3d_{3/2}$ mais um subnível $1j_{15/2}$ que desce do nível $N = 7$, $n = 0$ e $l = 7$ com $D(15/2) = 16$, resultando no número de degenerescência total para essa camada, $D = 58$. Até essa camada o número de ocupação é igual a 184, outro número mágico.

E assim, obtemos todos os números mágicos: 2, 8, 20, 28, 50, 82 e 126. A análise aqui realizada abrange tanto prótons, quanto nêutrons. Assim, o núcleo é estável se possui o número de prótons ou o número de nêutrons igual a algum número mágico. Existem os núcleos denominados de duplamente mágicos que possuem tanto o número de prótons como o de nêutrons igual a um dos números mágicos. Apresentamos na Tabela 4 o resumo descritivo do modelo de camadas seguindo a ordem energética de baixo para cima (ordem crescente).

Vejamos o exemplo do isótopo de potássio $^{39}_{19}\text{K}$, cuja configuração do estado fundamental no modelo de camadas é mostrado na Figura 6, Observamos que o potássio $^{39}_{19}\text{K}$ tem o número de prótons $Z = 19$ distribuído até a camada $1d_{3/2}$. O número de nêutrons distribuídos nas camadas completam o número mágico igual a 20. Todos os núcleons estão pareados exceto o próton $1d_{3/2}$. Isso resulta que o momento angular do estado fundamental é $j = l - s = 2 - 1/2 = 3/2$.

Tabela 4: Predição dos números mágicos no Modelo de Camadas. O valor de D é o número de núcleons em cada nível N .

N	l	notação		D	número mágico
		espectroscópica	spin-orbital		
6	0	4s	.	58	184
	2	3d	.		
	4	2g	.		
	6	1i	$1i_{11/2}$		
5	1	3p	$1i_{13/2}$	44	126
			$3p_{1/2}$		
			$3p_{3/2}$		
	3	2f	$2f_{5/2}$		
			$2f_{7/2}$		
4	5	1h	$1h_{9/2}$	32	82
	0	3s	$1h_{11/2}$		
			$3s_{1/2}$		
			$2d_{3/2}$		
			$2d_{5/2}$		
3	4	1g	$1g_{7/2}$	22	50
	1	2p	$1g_{9/2}$		
			$2p_{1/2}$		
			$1f_{5/2}$		
	3	1f	$2p_{3/2}$		
2	0	2s	$1f_{7/2}$	8	28
			$1d_{3/2}$	12	20
			$2s_{1/2}$		
			$1d_{5/2}$		
	2	1d	$1d_{5/2}$		
1	1	1p	$1p_{1/2}$	6	8
			$1p_{3/2}$		
0	0	1s	$1s_{1/2}$	2	2

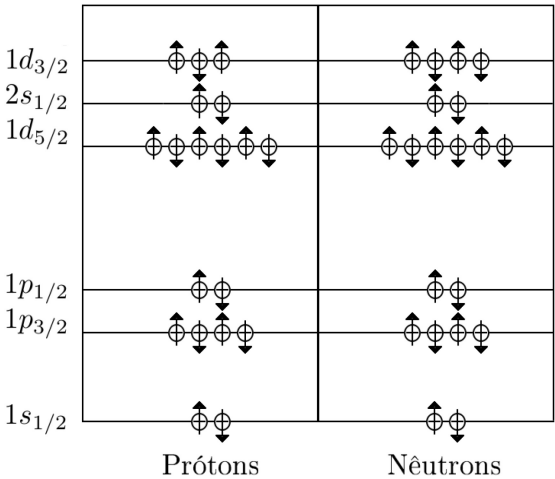


Figura 6: Modelo de camadas para o $^{39}_{19}\text{K}$.

7. Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho, realizamos uma revisão pedagógica do modelo de camadas. O resultado primordial foi a obtenção dos números mágicos, que definem a estabilidade dos

núcleos atômicos, a partir da equação de Schrödinger. A suposição feita na elaboração do modelo foi a de que os núcleons interagem uns com os outros, tanto em relação à força forte, e no caso dos prótons também como com respeito à força eletrostática. Esta interação foi modelada via um campo médio, o qual foi aproximado pela energia potencial do oscilador harmônico. Com isso, pudemos fazer o tratamento de uma única partícula. Porém, somente essa suposição foi insuficiente para descrever todos os números mágicos; e assim, tivemos que incluir no hamiltoniano uma forte interação do tipo spin-órbita. Feito isso, obtivemos todos os números mágicos, quais sejam: 2, 8, 20, 28, 50, 82 e 126. Assim, o núcleo é estável se possui o número de prótons ou o número de nêutrons igual a algum número mágico. Como perspectiva, pretendemos abordar o problema da estabilidade nuclear por diferentes modelos, desde hamiltonianos de muitos corpos até outros tipos de energia potencial. Esperamos que este trabalho cumpra com um dos seus objetivos, o qual foi fornecer subsídios didáticos para estudantes que queiram compreender melhor o modelo de camadas nucleares.

Referências

- [1] H.D. Young e R.A. Freedman, *Física IV – Ótica e Física Moderna* (Addison Wesley, São Paulo, 2009), 12 ed.
- [2] R. Gautreau e W. Savin, *Modern Physics* (Schaum's Outline Series, Nova York, 1999), 2 ed.
- [3] K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach* (IOP Publishing Ltd, Londres, 1999).
- [4] J.L. Basdevant, J. Rich e M. Spiro, *Fundamentals in Nuclear Physics – From Nuclear Structure to Cosmology* (Springer Science+Business Media, Nova York, 2005).
- [5] R.D. Woods e D.S. Saxon, *Phys. Rev.* **95**, 577 (1954).
- [6] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física 4 – Ótica e Física Moderna* (LTC Editora, Rio de Janeiro, 1993), 4 ed.
- [7] M.G. Mayer, *Phys. Rev.* **75**, 1969 (1949).
- [8] M.G. Mayer e J.H.D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure* (John Wiley & Sons, Nova York, 1955).
- [9] K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics* (John Wiley & Sons, Nova York, 1991).
- [10] R. Eisberg e R. Resnick, *Física Quântica* (Campus, Rio de Janeiro, 1989).
- [11] J.R. Lamarsh e A.J. Baratta, *Introduction to Nuclear Engineering* (Prentice Hall, Nova Jersey, 2001), v. 3.
- [12] A. Kamal, *Nuclear Models: In Nuclear Physics* (Springer, Berlin, 2014).
- [13] W. Greiner e J.A. Maruhn, *Nuclear Models* (Springer, Berlin, 1996).
- [14] N.D. Cook, *Models of atomic nuclei: Unification through a lattice of nucleons* (Springer, Berlin, 2010), 2 ed.
- [15] R. Fóssion, em: *Proceedings of the 6th Mexican Nuclear Physics School*, Mexico City, 2009, editado por E. Padilla-Rodal (AIP Conference Proceedings, Nova York, 2010).
- [16] B.R. Martin e G. Shaw, *Nuclear and Particle Physics: An Introduction* (John Wiley & Sons, Nova York, 2019), 3 ed.
- [17] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory): Course on Theoretical Physics* (Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2013), v. 3.
- [18] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, San Diego, 2005), 6 ed.
- [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics* (John Wiley & Sons, Nova York, 1977), v. 2.
- [20] D.J. Griffiths, *Introdução à Mecânica Quântica* (Pearson, São Paulo, 2016), 2 ed.
- [21] A. Bohr e B.R. Mottelson, *Nuclear Structure* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1998).