

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Tratamento Numérico para Equações  
Diferenciais Estocásticas através do Método  
da Linearização Local**

por

**Sérgio Souza Bento**

Brasília  
2007

# Resumo

Neste trabalho, estudamos o método numérico da Linearização Local (LL) para resolução numérica de Equações Diferenciais Estocásticas (EDE's). Inicialmente, apresentamos definições e resultados preliminares que fornecem o devido suporte teórico para o desenvolvimento deste trabalho, incluindo: processo de Wiener, teorema de existência e unicidade de solução de EDE's e a expansão de Ito-Taylor estocástica. Em seguida, apresentamos duas versões recentes do método LL, com as respectivas implementações computacionais, seguidas de exemplos numéricos. Mencionamos, ainda, algumas vantagens do método LL em relação aos métodos numéricos tradicionais. O estudo está baseado nos trabalhos de Biscay, Jimenez, Rivera, e Valdes (An. Inst. Stat. Math. 48: 631-644, 1996) e Jimenez, Shoji, e Ozaki (J. of Stat. Phys., 94:587-602, 1999).

Palavras-chave: Equação Diferencial Estocástica, Linearização Local.

# Abstract

In this work, we study the Local Linearization method for the numerical solution of Stochastic Differential Equations (SDE's). Initially, we present definitions and preliminaries results that provide the theoretical support for the development of this work, such as: Wiener process, existence and uniqueness theorem of solution for SDE's and the stochastic Ito-Taylor expansion. We present the two recent versions of the LL method, with their respective computational implementations, followed by numerical examples. We also mention, some advantages of the LL method over traditional numerical methods. The study is based on the works by Biscay, Jimenez, Riera, and Valdes (An. Inst. Stat. Math. 48: 631-644, 1996) and Jimenez, Shoji, and Ozaki (J. of Stat. Phys., 94:587-602, 1999).

Key-words: Stochastic Differential Equation, Local Linearization.

# Introdução

As Equações Diferenciais Estocásticas (EDE's) vem, crescentemente, sendo utilizadas em modelos complexos em várias áreas de aplicação, como biologia, química, neurociência, economia, finanças, dentre outros. Devido ao fato de soluções analíticas serem raramente possíveis em situações realistas, métodos numéricos são, freqüentemente, usados para calcular as soluções. Uma grande variedade de tais métodos tem sido desenvolvida por diversos pesquisadores. Citamos, como exemplo, os métodos de Euler-Maruyama, Milshtein, Kloeden e Platen, Saito e Mitsui (veja referências [2] e [16]). A base teórica comum desses métodos é a expansão de Ito-Taylor estocástica em termos de integrais múltiplas de Wiener. Em geral, possuem boas propriedades de convergência, as quais tem sido observadas por meio de simulações (veja referências [2], [9] e [16]). Porém, duas limitações são apontadas: (1) em geral, as aproximações calculadas, não dão solução exata para equações diferenciais ordinárias lineares (isto é, EDE's lineares com coeficiente de difusão igual a zero) e (2) as soluções numéricas nem sempre preservam a característica qualitativa da solução exata. Em particular, há muitos exemplos de EDE's com trajetórias limitadas em que a solução numérica torna-se explosiva quando o valor inicial está em uma certa região do espaço de fase. Um método alternativo que tenta superar essas limitações, chamado método da Linearização Local (LL), foi introduzido por Ozaki em 1985 (veja referências [14] e [15]).

Uma das motivações em desenvolver esse trabalho decorre da aplicação do método LL na análise não linear do Eletroencefalograma (EEG) em um modelo de massa neural. O EEG é uma técnica de exame cerebral usada desde 1929, depois da descoberta do psiquiatra alemão Hans Berger de que o cérebro gera uma atividade elétrica capaz de ser registrada [4]. Na prática, o EEG é realizado através da colocação de eletrodos na pele da cabeça do paciente, que são conectados a um

amplificador de corrente elétrica.

O modelo de massa neural (Figura 1) é um exemplo do modelo introduzido por Valdes, Jimenez, Riera, Biscay, e Ozaki [18].

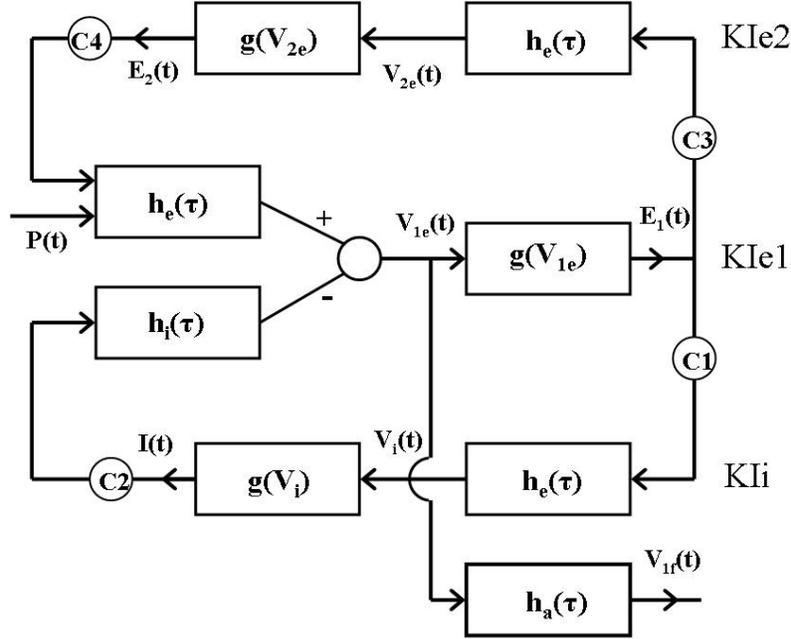


Figura 1: Diagrama em blocos de uma população neuronal envolvida em um modelo de massa.

No modelo,  $V_{1e}$ ,  $V_{2e}$  e  $V_i$  são potenciais de membrana e  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são coeficientes de eficiência sináptica. A função impulso  $h_r$  é dada por  $h_r(\tau) = A_r[e^{-a_r\tau} - e^{-b_r\tau}]$ , com  $r = \{e, i\}$ . A função  $g$  é definida pela expressão

$$g(V) = \begin{cases} g_0\lambda e^{y(V-V_0)}, & V \leq V_0, \\ g_0\lambda[2 - e^{-y(V-V_0)}], & V > V_0, \end{cases}$$

onde  $E_1$ ,  $E_2$  e  $I$  são dadas pelas relações

$$E_1(t) = g[V_{1e}(t)],$$

$$E_2(t) = g[V_{2e}(t)],$$

$$I(t) = g[V_i(t)].$$

As constantes  $g_0\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $V_0$ ,  $A_r$ ,  $a_r$ ,  $b_r$  e  $\tau$  são dadas na Tabela 1.

KIe e KIi são conglomerados de neurônios excitatórios e inibitórios, respectivamente, interconectados (ver detalhes em [18]). A entrada externa, é representada

pela densidade de pulso  $P(t)$ , que é modelado por um processo estocástico Gaussiano (processo de Wiener).

Símbolos	Definição	Unidade	Valor
$g_0\lambda$	Valor máximo da função $g$	$s^{-1}$	25
$\gamma$	Parâmetro escalar da função $g$	$MV^{-1}$	0.34
$V_0$	Potencial inicial da função $g$	$MV$	6
$A_e$	Máximo de $h_e$	$MV$	1.6
$a_e$	Constante de tempo de $h_e$	$s^{-1}$	55
$b_e$	Constante de tempo de $h_e$	$s^{-1}$	605
$A_i$	Máximo de $h_i$	$MV$	32
$a_i$	Constante de tempo de $h_i$	$s^{-1}$	27.5
$b_i$	Constante de tempo de $h_i$	$s^{-1}$	5
$\tau$	Constante de tempo do filtro passa-alto $h_a$	$s$	0.32
$\delta$	Fator de amortecimento do filtro $h_a$	$s$	0.707
$\omega_n$	Frequência angular de corte do filtro $h_a$	$HZ$	$2\pi 30$

Tabela 1: Constantes envolvidas na definição do modelo neural.

O modelo é descrito pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{1e}^1(t) &= \alpha_e V_{1e}^1(t) + \beta_e V_{1e}(t) + \epsilon_e c_{4g}[V_{2e}(t)] + c_2 \alpha I_f^1(t) + c_2 \beta I_f(t) + \\
&\quad c_2 \epsilon_i g[V_i(t)] + \epsilon_e \Pi + w(t), \\
\dot{V}_{2e}^1(t) &= \alpha_e V_{2e}^1(t) + \beta_e V_{2e}(t) + \epsilon_e c_{3g}[V_{1e}(t)], \\
\dot{V}_i^1(t) &= \alpha_e V_i^1(t) + \beta_e V_i(t) + \epsilon_e c_{1g}[V_{1e}(t)], \\
\dot{I}_f^1(t) &= \alpha_i I_f^1(t) + \beta_i I_f(t) + \epsilon_i g[V_i(t)], \\
\dot{V}_{1e}(t) &= V_{1e}^1(t), \\
\dot{V}_{2e}(t) &= V_{2e}^1(t), \\
\dot{V}_i(t) &= V_i^1(t), \\
\dot{I}_f(t) &= I_f^1(t), \\
\dot{V}_{1f}^2(t) &= k_2 V_{1f}^2(t) + k_1 V_{1f}^1(t) + k_0 V_{1f}(t) + a w_n^2 V_{1e}^1(t), \\
\dot{V}_{1f}(t) &= V_{1f}^1(t), \\
\dot{V}_{1f}^1(t) &= V_{1f}^2(t),
\end{aligned}$$

onde  $w$  é um ruído branco com média zero e variância  $\epsilon_e^2 \delta_P^2$  e

$$\begin{aligned}
\alpha_r &= -(a_r + b_r), \\
\beta_r &= -a_r b_r, \\
\epsilon_r &= (b_r - a_r) A_r, \\
\alpha &= \alpha_e - \alpha_i, \\
\beta &= \beta_e - \beta_i, \\
k_0 &= \frac{-\omega_n^2}{\tau}, k_1 = \frac{-2\delta\omega_n}{\tau} - \omega_n^2 \text{ e } k_2 = -2\omega_n - \frac{1}{\tau}.
\end{aligned}$$

O sistema de equações diferenciais que descreve o modelo, pode ser expresso sucintamente como a equação diferencial estocástica:

$$\dot{X} = f(X, \theta) + W,$$

onde

$$X = \left( V_{1e}^1, V_{2e}^1, V_i^1, I_f^1, V_{1e}, V_{2e}, V_i, I_f, V_{1f}^2, V_{1f}, V_{1f}^1 \right)^T$$

e

$$W = (w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

é um vetor aleatório com média zero e uma matriz de covariância  $11 \times 11$  da forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \epsilon_e^2 \delta_P^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$\theta = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \Pi \quad \sigma_P^2 \quad a]$  é o conjunto de parâmetros pré-definidos.

Esta dissertação objetiva estudar o método da Linearização Local para resolução numérica de Equações Diferenciais Estocásticas. O estudo baseia-se nos trabalhos de Biscay, Jimenez, Riera, e Valdes [2] e Jimenez, Shoji, e Ozaki [9].

No primeiro capítulo, são introduzidos alguns conceitos da teoria de probabilidade e de processos estocásticos, resultados como o processo de Wiener e o teorema de existência e unicidade de solução de EDE's. O capítulo é finalizado com alguns teoremas, incluindo o teorema da expansão de Ito-Taylor estocástica.

No segundo capítulo são apresentadas duas versões recentes do método LL, com suas respectivas implementações computacionais, mostrando as diferenças que há nas expressões de computação iterativa que definem os métodos.

O terceiro capítulo traz alguns exemplos numéricos, onde é feita uma estimativa numérica para a ordem de convergência do método de Euler-Maruyama, também são dados vários gráficos ilustrando a aproximação pelo método LL e um exemplo mostrando, que em alguns casos, este método preserva a característica qualitativa da solução exata. Nos apêndices está disposto o código fonte, em Matlab, da maioria dos programas que foram implementados neste trabalho.

# Referências Bibliográficas

- [1] Arnold, L. “*Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*”, Wiley-Interscience Publications, New York (1974).
- [2] Biscay, R., Jimenez, J. C., Riera, J. J. e Valdes, P. A. “*Local Linearization Method for the Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*”, *Annals Inst. Statist. Math.* 48: 631-644 (1996).
- [3] Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. “*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*”, Sexta Edição, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1999).
- [4] Bruce, E. N. “*Biomedical Signal Processing and Signal Modeling*”, John Wiley & Sons, New York (2001).
- [5] Golub, G. H. e Van Loan, C. F. “*Matrix Computations*”, Second Edition, The Johns Hopkins University Press, Maryland (1989).
- [6] Guerra, João. “*Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*”, CEMAPRE, Lisboa (2005).
- [7] Higham, D. J. “*An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*”, *SIAM Review*, Vol. 43, No 3: 525-546 (2001).
- [8] James, Barry R. “*Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*”, Segunda Edição, IMPA, Rio de Janeiro (2002).
- [9] Jimenez, J. C., Shoji, I. e Ozaki, T. “*Simulation of Stochastic Differential Equations Through the Local Linearization Method. A Comparative Study*”, *Journal of Statistical Physics*, 94:587-602 (1999).

- 
- [10] Jimenez, J. C. “A Simple Algebraic Expression to Evaluate the Local Linearization Schemes of Stochastic Differential Equations”, Applied Mathematics Letters, 15: 775-780 (2002).
- [11] Kannan, D. “An Introduction to Stochastic Processes”, North Holland, New York (1979).
- [12] Kloeden, P. E. e Platen, E. “Numerical Solution of Stochastic Differential Equations”, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [13] Oksendal, B. “Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications”, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [14] Ozaki, T. “Nonlinear time series models and dynamical systems”, in Handbook of statistics, Vol. 5, E. J. Hannan, P. R. Krishnaiah and M. M. Rao, eds. (North Holland, 1985).
- [15] Ozaki, T. “Statistical identification of storage models with application to stochastic hydrology”, Water Resource Bull. 21: 663-675(1985).
- [16] Saito, Y. e Mitsui, T. “Simulation of Stochastic Differential Equations”, Annals Inst. Statist. Math. 45: 419-432 (1993)
- [17] Schuss, Z. “Theory and Applications of Stochastic Differential Equations”, John Wiley & Sons, New York (1980).
- [18] Valdes, P. A., Jimenez, J. C., Riera J., Biscay, R., Ozaki, T. “Nolinear EEG analysis based on a neural mass model”, Biological Cybernetics, 81:415-424 (1999).