

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Propriedades Assintóticas de Somas
Ponderadas de Variáveis Aleatórias com
Aplicação à Teoria da Ruína

por

Fabiana Tristão de Santana

Brasília
2006

Resumo

Neste trabalho, estudamos as propriedades assintóticas das caudas de somas de variáveis aleatórias, independentes e com função de distribuição comum subexponencial, ponderadas aleatoriamente. Além disso, apresentamos uma aplicação ao problema da probabilidade de ruína no tempo finito de um modelo de risco a tempo discreto.

Palavras Chave: Relações assintóticas, subexponencial, cauda pesada, soma ponderada, processo de risco, probabilidade da ruína.

Abstract

In this work we study asymptotic properties of the tail probability of the randomly weighted sums of independent random variables with common subexponential distribution function. Moreover, an application to the finite time ruin probability problem in a discrete time risk model is presented.

Key-Words: Asymptotic relations, subexponential, heavy-tailed, weighted sums, risk process, ruin probabilities.

Introdução

Somas de variáveis aleatórias ponderadas aleatoriamente têm um importante papel em vários problemas teóricos e aplicados. No campo da teoria de filas, por exemplo, somas ponderadas podem ser usadas para representar a produção total de um usuário servido por um determinado número de máquinas. Em estatística, na análise de séries temporais, os processos lineares, incluindo os processos de média móvel, são somas ponderadas de variáveis aleatórias. Em atuária, particularmente na teoria de risco, somas de variáveis aleatórias ponderadas são utilizadas na modelagem do superávit de uma empresa de seguros.

Assim, o estudo de diversos modelos encontrados na literatura baseia-se nas propriedades de somas parciais do tipo

$$S_m^\theta = \sum_{k=1}^m \theta_k X_k, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

onde X_k , $1 \leq k \leq n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), θ_k , $1 \leq k \leq n$ são variáveis aleatórias positivas e as sequências $\{X_k\}$ e $\{\theta_k\}$ são mutuamente independentes.

O comportamento limite de S_m^θ quando $m \rightarrow \infty$, incluindo a sequência normalizada, tem sido amplamente investigado na literatura (vide por exemplo, Taylor et al (1984), Rosalsky e Sreehari (1998) e Hu et al (2001), dentre muitos outros). No entanto, o comportamento assintótico da cauda da distribuição da soma S_m^θ ainda necessita ser devidamente estudado.

O caso particular em que as variáveis X_k têm distribuição de cauda pesada é de grande interesse. Em problemas práticos, nas mais variadas áreas de aplicação, em particular em modelos de seguros, observa-se a presença de dados ajustados por distribuições de cauda pesada, ou seja, distribuições cujas caudas (à direita) decaem a zero mais lentamente do que qualquer exponencial $e^{-\varepsilon x}$, $\varepsilon > 0$.

Dentre a classe de distribuições de cauda pesada, as distribuições subexponenciais, merecem destaque. Precisamente, uma função de distribuição F , concentrada em $[0, \infty)$, é subexponencial se sua cauda $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ satisfizer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} = n, \quad \forall n \geq 2, \quad (2)$$

onde $F^{*n} = F * \dots * F$ denota a n -ésima convolução de F . A classe de distribuições subexponenciais inclui a grande maioria das distribuições de cauda pesada utilizadas na literatura, tais como: Pareto, Loggamma, Weibull com parâmetros $0 < r < 1$ e $c > 0$, entre outros.

Uma interpretação para a relação (2) pode ser dada considerando-se uma amostra aleatória (X_1, \dots, X_n) da distribuição F e definindo-se $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Desta forma, a relação (2) indica que a cauda das distribuições de S_n e M_n são assintoticamente da mesma ordem, ou seja,

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \quad \text{quando } x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Em modelos de risco, por exemplo, podemos interpretar X_1, \dots, X_n como as respectivas quantias de indenizações pagas em n períodos sucessivos de tempo, a soma parcial S_n representa a quantia total das indenizações pagas e M_n o maior valor pago nos n períodos considerados. Assim, a relação (3) indica uma forte influência da maior indenização paga sobre a quantia total das indenizações.

Nosso interesse neste trabalho, baseados em Tang e Tsiashvili (2003), refere-se ao comportamento assintótico da cauda das distribuições das somas S_m^θ quando as variáveis X_k têm distribuição subexponencial.

Assim, no Capítulo 1 apresentamos inicialmente uma caracterização das distribuições de cauda pesada como sendo aquelas cujas funções geradoras de momentos são infinitas em todo ponto. Definimos as principais classes de distribuições de cauda pesada e demonstramos as relações de inclusão entre elas. Finalizamos o capítulo apresentando algumas propriedades assintóticas envolvendo caudas de distribuições subexponenciais que serão úteis para o desenvolvimento do restante do trabalho.

Basicamente no Capítulo 2 apresentamos os resultados de Yang e Tsitsiashvili (2003) sobre o comportamento assintótico de caudas de somas de variáveis aleatórias subexponenciais ponderadas aleatoriamente. Inicialmente, demonstramos dois resultados preliminares, envolvendo somas e máximos de variáveis aleatórias ponderadas. A seguir, demonstramos, no Teorema 2.1, o resultado principal que estabelece as seguintes relações assintóticas

$$P\left(\max_{1 \leq m \leq n} S_m^\theta > x\right) \sim P(S_n^\theta > x) \sim P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \theta_k X_k > x\right) \sim \sum_{k=1}^n P(\theta_k X_k > x), \quad (4)$$

quando $x \rightarrow \infty$ e sob a hipótese que as X_k têm distribuição subexponencial e as variáveis $\{\theta_k, 1 \leq k \leq n\}$ satisfazem $P(a \leq \theta_k \leq b) = 1$ para alguns $0 < a \leq b < \infty$. No entanto, nenhuma hipótese quanto à estrutura de dependência da sequência $\{\theta_k, 1 \leq k \leq n\}$ é assumida. Note que a relação (4) indica que a relação de definição (3) de variáveis subexponenciais também é mantida na situação em que as variáveis são ponderadas aleatoriamente. Casos especiais, envolvendo subclasses das distribuições subexponenciais como as de variação regular, também são apresentados.

Finalmente, apresentamos uma aplicação de (4) à teoria da ruína. Mais precisamente, consideramos o modelo de risco a tempo discreto

$$R_0 = x, \quad R_n = R_0 \prod_{i=1}^n \xi_i - \sum_{k=1}^n X_k \prod_{i=k+1}^n \xi_i, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

onde, $R_0 = x$ é o capital inicial de uma companhia de seguros, R_n representa a reserva de capital de risco da seguradora no final do período de tempo n , $X_k = Z_k - W_k$, $k \geq 1$ com Z_k e W_k denotando, respectivamente, as quantias totais de prêmios recebidos e indenizações pagas pela empresa no k -ésimo período considerado e ξ_k denota o coeficiente relativo ao

retorno estocástico do investimento financeiro realizado no período $(k-1, k)$, denominado coeficiente de inflação.

As hipóteses básicas do modelo são que os pares (W_k, Z_k) , $k \geq 1$ são i.i.d., ξ_k , $k \geq 1$ são v.a.'s positivas e as sequências $\{\xi_k, k \geq 1\}$ e $\{(W_k, Z_k), k \geq 1\}$ são mutuamente independentes.

Consideramos a probabilidade de ruína num horizonte finito $n \geq 1$ definida por

$$\Psi(x, n) = P\left(\min_{1 \leq m \leq n} R_m < 0 \mid R_0 = x\right),$$

que consiste na probabilidade de que a reserva de capital da seguradora atinja um valor negativo em algum dentre os n primeiros períodos de tempo considerados.

Sob a hipótese de que a distribuição das quantias agregadas $X_k = Z_k - W_k$ é subexponencial e o coeficiente de inflação é limitado obtemos a seguinte aproximação para a probabilidade de ruína $\Psi(x, n)$ quando o capital inicial x torna-se suficientemente grande

$$\Psi(x, n) \sim \sum_{k=1}^n P\left(X_k \prod_{i=1}^k \xi_i^{-1} > x\right).$$

Outros casos particulares também são considerados.

No caso especial em que $\xi_k = 1 + I_k$, onde $I_k > 0$ representa a taxa de juro referente ao k -ésimo período e as variáveis X_k têm distribuição regularmente variante no infinito com expoente α obtém-se como consequência do Teorema 2.1 que

$$\psi(x, n) \sim P(X_1 > x) \sum_{k=1}^n E \prod_{j=1}^k (1 + I_j)^{-\alpha}.$$

Este resultado estende os resultados obtidos por Cai e Dickson (2004), que consideraram as taxas de juros $\{I_j, j \geq 1\}$ como uma cadeia de Markov. Nos resultados apresentados neste trabalho considera-se uma estrutura de dependência arbitrária da sequência $\{\xi_n, n \geq 1\}$.