Resumo

Os fenômenos oscilatórios da natureza podem ser estudados por modelos matemáticos. Neste trabalho estudamos a dinâmica de um oscilador do tipo Liénard, que modela o comportamento das pregas vocais durante a fonação utilizando a teoria qualitativa das equações diferenciais. Estudamos o número de Lyapunov e a bifurcação de Andronov-Hopf para o caso bidimensional sobre a geração de um ciclo limite quando variamos um parâmetro do sistema. Verificamos que a oscilação é produzida com valores fisiológicos realistas para os parâmetros. Ela é gerada através de uma bifurcação de Andronov-Hopf, a qual pode assumir as formas supercrítica e subcrítica. Ilustramos os resultados encontrados fazendo uma análise numérica com retratos de fase e diagramas de bifurcação.

Palavras Chaves: Bifurcação de Andronov-Hopf, número de Lyapunov, ciclo limite, pregas vocais, equação de Liénard.

Abstract

Oscillatory phenomena in nature may be studied by mathematical models. In this work, we explore the dynamics of an oscillator of the Liénard type, which models the behavior of the vocal folds at phonation, using the qualitative theory of differential equations. We study the Lyapunov number and the Andronov-Hopf bifurcation for the bidimensional case, about the generation of a limit cycle when a system's parameter is varied. We verify that the oscillation is produced with realistic physiological values for the parameters. It is generated through an Andronov-Hopf bifurcation, which can assume supercritical and subcritical forms. We illustrate the results by a numerical analysis with phase portraits and bifurcation diagrams.

Key-words: Andronov-Hopf bifurcation, Lyapunov number, limit cycle, vocal fold, Liénard equation.

Introdução

Os fenômenos oscilatórios da natureza podem ser estudados por modelos matemáticos, pois as oscilações encontradas na biologia, na fisiologia e em outros áreas da ciência estão associadas a soluções períodicas de equações matemáticas [28].

Há mais de 100 anos o cientista e matemático francês J.H.Poincaré foi o precursor do estudo da moderna dinâmica não linear, criando as ferramentas para a análise desses fenômenos.

Em 1952, os fisiologistas britânicos A.L.Huxley e A.F.Hodgkin elaboraram um modelo [6] baseado em equações diferenciais para estudar o comportamento oscilatório do axônio de uma lula gigante. Este trabalho despertou o interesse dos matemáticos para estudar os osciladores biológicos e fisiológicos utilizando a teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares.

Em 1968, J.L FLanagan propôs um modelo matemático [18] que analisava o comportamento das pregas vocais quando o ar proveniente dos pulmões passava pela glote durante a fonação. Com um modelo do tipo massa-mola-amortecedor, iniciou o estudo do movimento oscilatório das pregas vocais durante o processo de fonação. Depois do estudo pioneiro de Flanagam tivemos uma variedade de modelos matemáticos para analisar esse comportamento oscilatório. Modelo com duas massas [26], um modelo de três massas [14], modelos contínuos [15] e modelos que prevêem um comportamento caótico do movimento das pregas vocais para determinados parâmetros [12], [16], [17] e [29].

Entre as ferramentas matemáticas para analisar a dinâmica destes modelos temos aquelas baseadas na Teoria das Bifurcações.

O presente trabalho tem como objetivo estudar a bifurcação de Andronov-Hopf em $\mathbb{R}^2$ e aplicá-la no entendimento de um modelo de uma massa para as pregas vocais. Este modelo é baseado nos artigos [7], [13] e [24], no qual obtemos um modelo matemático descrito por uma equação de Liérnard.

O trabalho está dividido em três capítulos.

No capítulo 1, iremos calcular os valores focais para um foco múltiplo (número de Lyapunov) e provaremos o Teorema da Bifurcação de Andronov-Hopf para o caso bidimensional.

No capítulo 2, analisaremos o modelo do tipo Liénard para as pregas vocais, dado por uma equação de Liénard

$$u^{''} + f(u)u^{'} + u \;\; = \;\; 0,$$

onde

$$f(u) \;\; = \;\; \alpha(1 + \beta u^2) - \frac{\gamma}{1+u}, \quad \text{com} \quad 1 + u > 0.$$

utilizando a teoria qualitativa das equações diferenciais.

No capítulo 3, faremos uma análise numérica sobre bifurcações e ciclos limites apresentados pelo modelo.

Aplicaremos os resultados do capítulo 1, com o intuito de determinar se o modelo apresenta uma bifurcação de Andronov-Hopf subcrítica ou supercrítica. Iremos investigar se o modelo, a partir de parâmetros realísticos, produz uma oscilação. Finalizamos com um breve sumário dos resultados encontrados e direções de pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

[1] A.A.Andronov, E.A. Leontovich, I.I.Gordon e A.G.Maier; *Qualitative Theory of second-order Dynamical Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1973.

[2] A.A.Andronov, E.A. Leontovich, I.I.Gordon e A.G.Maier; *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.

[3] A.A. Andronov, E.A. Vitt, e S.E. Khaiken; *Theory of Oscillators*, Pergamon, Oxford, 1966.

[4] A.Dhooge, W.Govaerts e Y.A.Kutznetsov; *MATCONT: A Matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs*, ACM Transactions on Mathematical Software, 29, pp.141-164, 2003.

[5] A.Gasull, A.Guillamon, V.Manosa; *An Explicit Expression of the first lyapunov and period constants with applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 211(1997), pp.190-212.

[6] A.L.Hodgkin e A.F.Huxley; *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, J.Physiol., 117(1952), pp.500-544.

[7] C.Drioli; *A flow waveform-matched low-dimensional glottal model basead on physical knowledge*, J. Acoust. Soc. Am., 117(2002), pp.3184-3195.

[8] D.A.Berry, H.Herzel, I.R.Titze e B.H.Story; *Bifurcations in excised larynx experiments*, J.Voice 10(1996), pp.129-138.

[9] E.L.Lima; *Curso de Análise: Volume 1*, Projeto Euclides Impa, Rio de Janeiro, 1989.

[10] E.V.Appleton e B.Van der Pol; *On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator*, Philosophical Magazine, 43(1922), pp.177-193.

[11] F.Alipour-Haghighi e I.R.Titze; *Viscoelatic modeling of canine vocalis muscle in relaxation*, J. Acoust. Soc. Am., 78(1985), pp.1939-1943.

[12] H.Herzel e C. Knusen; *Bifurcation in a vocal fold model*, Nonlinear Dyn., 7 (1995), pp.53-54.

[13] I.R. Titze; *The physics of small-amplitude of the vocal folds*, J. Acoust. Soc. Am., 83(1988), pp.1536-1552.

[14] I.R.Titze; *Principles of Voice Production*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.

[15] I.R.Titze; *Parametrization of the glottal area, glottal flow, and vocal fold contact area*, J. Acoust. Soc. Am., 75(1984), pp.570-580.

[16] J.J.Jiang, Y.Zhang, e J.Stern; *Modeling of chaotic vibrations in symmetric vocal folds*, J. Acoust. Soc. Am., 110(2001), pp.2120-2128.

[17] J.J.Jiang, Y.Zhang, e J.Stern; *Chaotic vibration induced by turbulent noise in a two-mass model of vocal folds*, J. Acoust. Soc. Am., 112(2002), pp.2127-2133.

[18] J.L.Flanagan e L.L.Landgraf; *Self-oscillating source for vocal-tract synthesis*, IEEE Trans. Audio Eletroacoust., AU-16(1968), pp.57-64.

[19] J.E.Marsden e M.McCrcken; *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[20] J.Sotomayor; *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Projeto Euclides, Impa, 1979.

[21] J.Guckenheimer e P.Holmes; *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] J.C.Lucero; *A theorical study of the hysteresis phenomenon at vocal fold oscillation onset-offset*, J. Acoust. Soc. Am., 105(1999), pp.423-431.

[23] J.C.Lucero e L.L.Koenig; *Simulations of temporal patterns of oral airflow in men and womem using a two-mass model of the vocal folds under dynamic control*, J. Acoust. Soc. Am., 1116(2004), pp.3640-3646.

[24] J.C.Lucero; *Bifurcations and Limit Cycles in a Model for a Vocal Fold Oscillator*, Communications in Mathematical Sciences, 3(2005), pp.517-529.

[25] J.C.Lucero; *A subcritical Hopf bifurcation at phonation onset*, Journal of Sound and Vibration, 218(1998), pp.344-349.

[26] K.Ishizaka e J.L.Flanagan; *Synthesis of voiced sound from a two-mass model of the vocal cords*, Bell Syst.Tech.J., 51(1972), pp.1233-1268.

[27] L. Perko; *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York, 1991.

[28] L.Glass e M.C. Mackey; *Dos Relógios ao Caos*, Editora da USP, São Paulo, 1997.

[29] P.Mergell, H.Herzel, I.R.Titze; *Irregular vocal-fold vibration- High-speed observation and modeling*, J. Acoust. Soc. Am., 108(2000), pp.2996-3002.

[30] R.Lage,T.J.Gardner, e G.B Mindlin; *Continuous model for vocal fold oscillations to study the effect of feedback*, Phys.Rev.E, 64(2001), pp.056201.

[31] X.Pelorson, A.Hirschberg. R.R.Van Hassel, e A.P.J.Wijnards; *Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified two-massa model*, J. Acoust. Soc. Am., 96(1994), pp.3416-3431.

[32] W.Rudin; *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[33] Ye Yan-qian et al.; *Theory of limit cycles*, American Mathematical Society, Providence, 1986.

[34] Zhang Zhi-fen et al.; *Qualitative theory of ordinary differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1992.