Universidade de Brasília

Sobre Hipersuperfícies Isotrópicas de Laguerre

Fernanda Alves Caixeta

Orientadora: Profª Drª Keti Tenenblat

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Doutor(a) em Matemática*

Brasília

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado tanta força, fé e esperança para conseguir concluir mais esta etapa da minha vida.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram em todos os meus sonhos acadêmicos e estiveram ao meu lado comemorando os momentos bons e me ajudando a seguir em frente nos momentos difíceis. Sou eternamente grata por serem pais tão maravilhosos.

Às minhas avós Maria José e Terezinha e aos meus avôs Fernando e Divino por todas as orações que foram feitas em minha intenção, por todo incentivo e carinho. Tenho certeza que mesmo lá do céu, o vovô Fernando continua torcendo mim e me protegendo todos o dias.

Às minhas madrinhas, padrinho, primos, amigos e a Tia Lusimar, por todas as orações, apoio e carinho.

À professora Keti, por seus ensinamentos, pela orientação, pelo apoio, o incentivo e o esforço para a execução desde trabalho. Sou extremamente grata por ter tido a oportunidade de trabalhar com uma mulher e profissional tão admirável.

À professora Luciana e ao professor João Paulo por todos os ensinamentos e pelo apoio ao longo de toda minha formação.

Aos membros da banca, aos meus colegas e a todos os professores do Departamento de Matemática.

Resumo

Estudamos as hipersuperfícies L-isotrópicas do espaço Euclidiano, que são hipersuperfícies cuja forma de Laguerre é nula e os autovalores do tensor de Laguerre são constantes e iguais a $\lambda \geq 0$. Provamos um resultado de rigidez para as hipersuperfícies L-isotrópicas parametrizadas por linhas de curvatura. Além disso, estudamos as hipersuperfícies que são L-isotrópicas e L-isoparamétricas simultaneamente, verificando que para tais hipersuperfícies $\lambda = 0$. Obtemos condições necessárias para a existência de hipersuperfícies L-isotrópicas com $\lambda > 0$ e provamos que uma certa função, determinada pelos raios de curvatura da hipersuperfície, é limitada superiormente por $1/2\lambda$.

Palavras-chaves: Geometria de Laguerre, hipersuperfície isotrópica de Laguerre, hipersuperfície isoparamétrica de Laguerre.

Abstract

We study Laguerre isotropic hypersurfaces in the Euclidean space, which are hypersurfaces whose Laguerre form is zero and the eigenvalues of the Laguerre tensor are constant and equal to $\lambda \geq 0$. We prove a rigidity theorem for the L-isotropic hypersurfaces parametrized by lines of curvature. Moreover, we study the hypersurfaces that are L-isotropic and L-isoparametric simultaneously and we show that for such a hypersurface $\lambda = 0$. We obtain necessary conditions for the existence of L-isotropic hypersurfaces with $\lambda > 0$ and we prove that a certain function, determined by the radii of curvature of the hypersurface, is bounded above by $1/2\lambda$.

Keywords: Laguerre geometry, Laguerre isotropic hypersurfaces, Laguerre isoparametric hypersurfaces.

Conteúdo

Introdução

A teoria da geometria de Laguerre iniciou no começo do século XX com o estudo das superfícies de Laguerre em $\mathbb{R}^3$, no livro de Blaschke [1]. Em 1996, Musso e Nicolodi [20] estudaram um problema variacional, onde definiram um funcional invariante sob o grupo das transformações de Laguerre e estudaram as superfícies mínimas, no sentido de Laguerre.

No final da década de 90, Palmer [22] estudou a estabilidade das superfícies mínimas de Laguerre. Em [21], Musso e Nicolodi apresentaram resultados sobre a geometria de Laguerre de superfícies cujas linhas de curvatura são planas. Desde então, diversos matemáticos se dedicaram ao estudo da geometria diferencial de Laguerre.

A geometria de Laguerre das superfícies em $\mathbb{R}^3$ continuou em 2005 com o trabalho de Li [11]. Em seguida, no ano de 2008, os autores Song e Wang [32] estudaram as superfícies mínimas de Laguerre em $\mathbb{R}^3$ com uma nova abordagem. O desenvolvimento da geometria de Laguerre para superfícies motivou uma generalização natural para o caso de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$. A partir de então, começaram a surgir trabalhos relacionados a esse caso mais geral.

Na geometria diferencial de Laguerre, são estudadas as propriedades de hipersuperfícies de Laguerre invariantes pelo grupo das transformações de Laguerre no fibrado tangente unitário $U\mathbb{R}^{n+1}$. Em 2007, Li e Wang [16] estudaram essa geometria para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, usando o método do referencial móvel de Cartan. Para uma imersão $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ sem pontos umbílicos com curvaturas principais distintas que não se anulam e $\xi : M^n \to \mathbb{S}^n$ um campo normal unitário de x, eles definiram os invariantes básicos de Laguerre, a saber, uma métrica invariante de Laguerre g, a segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$, a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ e o tensor de Laguerre $\mathbb{L}$.

Uma vez definidos esses invariantes, diversos matemáticos se empenharam em classificar as hipersuperfícies, no sentido de Laguerre, de acordo com propriedades satisfeitas por esses invariantes. O primeiro trabalho neste sentido foi o de Li, Li e Wang [12], em 2010, onde os autores introduziram o conceito de hipersuperfície com segunda forma fundamental de

Laguerre $\mathbb{B}$ paralela, isto é, $\nabla\mathbb{B} = 0$, onde ∇ é a derivada covariante em relação à métrica de Laguerre g. Além disso, obtiveram a classificação completa dessas hipersuperfícies, a menos de transformação de Laguerre.

Na sequência, em 2011, Li, Li e Wang [13] começaram o estudo de uma classe de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ com a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ nula e autovalores do tensor $\mathbb{L}$ todos constantes e iguais a λ. Vamos chamar as hipersuperfícies com essa propriedade de hipersuperfícies L-isotrópicas. Li, Li e Wang provaram que $\lambda \geq 0$ e apresentaram um resultado de caracterização das L-isotrópicas. Por outro lado, obtiveram uma classificação explícita das hipersuperfícies com $\mathbb{C} = 0$ e os autovalores do tensor $\mathbb{L}$ constantes mas não todos iguais. A motivação para o nosso trabalho surgiu da pergunta: Quais são as hipersuperfícies L-isotrópicas?

Em 2012, Li e Sun em [15] definiram uma outra classe de hipersuperfícies, as L-isoparamétricas, que são as hipersuperfícies tais que os autovalores da segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$ são constantes e a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ é nula, e apresentaram uma classificação dessas hipersuperfícies no caso de variedades tridimensionais em $\mathbb{R}^4$. Mostraram também, que uma hipersuperfície L-isoparamétrica é uma hipersuperfície de Dupin. Uma hipersuperfície de Dupin, com a hipótese adicional de ter a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ nula, é uma hipersuperfície L-isoparamétrica.

Em 2014, Song [31], Cezana e Tenenblat [5], obtiveram a classificação das hipersuperfícies L-isoparamétricas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas e não nulas. Posteriormente, em 2015, Li e Shu [17] obtiveram a classificação das hipersuperfícies L-isoparamétricas com três curvaturas principais distintas sendo uma delas simples.

Ainda no ano de 2015, Shu publicou dois artigos obtendo a classificação das hipersuperfícies L-isoparamétricas em $\mathbb{R}^5$ [29] e em $\mathbb{R}^6$ [28], provando também que tais hipersuperfícies têm segunda forma fundamental paralela, quando não são L-isotrópicas. Recentemente em um artigo de 2018, Shu [30] estudou as hipersuperfícies L-isoparamétricas e as hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ apresentando alguns teoremas de classificação. Em um desses resultados, considerando uma hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^{n+1}$, ele provou que os autovalores do tensor $\mathbb{L}$ são todos constantes, podendo ser todos iguais ou não. Quando os autovalores do tensor $\mathbb{L}$ são todos constantes mas não todos iguais, a classificação foi obtida por Li, Li e Wang em [13]. Observe que para a classificação completa das L-isoparamétricas basta explicitar quais são as hipersuperfícies L-isotrópicas.

Ainda sobre o artigo de Shu [30], usando o teorema de classificação das L-isoparamétricas, ele apresentou a classificação das hipersuperfícies de Dupin próprias em $\mathbb{R}^{n+1}$ com o número de curvaturas principais distintas $g \geq 2$. Esse resultado, de certa forma, é uma generalização do teorema obtido por Cezana e Tenenblat [6], onde provaram que as hipersuperfícies de Dupin próprias $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com n curvaturas principais distintas que não se anulam e curvatura de Laguerre constante e que admitem um sistema de coordenadas por linhas de curvatura, são determinadas por n constantes. Além disso, eles provaram que qualquer hipersuperfície de Dupin, nessas condições, em $\mathbb{R}^{n+1}$ é descrita por

$$x(u_1,\ldots,u_n) = (u_1,\ldots,u_n,0) - \frac{\sum_{i=1}^n a_i u_i^2 + \phi}{\sum_{i=1}^n a_i^2 u_i^2 + 1}(a_1u_1,\ldots,a_nu_n,-1), \tag{1}$$

onde $\phi \in \mathbb{R}$ e a_i são constantes distintas que não se anulam.

Essa família de hipersuperfícies de Dupin foi obtida primeiramente por Corro, Fereira e Tenenblat [7] em 1999 por uma transformação de Ribaucour de um hiperplano. Esse exemplo apesar de obtido em um contexto de estudo diferente, foi aplicado no ambiente da geometria de Laguerre. Considerando $\phi = 0$ em (1) temos,

$$x(u_1,\ldots,u_n) = (u_1,\ldots,u_n,0) - \frac{\sum_{i=1}^n a_i u_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2 u_i^2 + 1}(a_1u_1,\ldots,a_nu_n,-1), \tag{2}$$

onde a_i são constantes distintas que não se anulam. Essa família (2) apareceu primeiramente em [12] como exemplo de hipersuperfície L-isoparamétrica.

Desde então, (2) está presente em todos os resultados de classificação das hipersuperfícies L-isoparamétricas. Além disso, essa família também fornece um exemplo de uma hipersuperfície L-isotrópica com todos os autovalores λ do tensor $\mathbb{L}$ contantes e iguais a zero.

Neste trabalho, motivados pela família (2) e pelo artigo de Shu [30], investigamos as hipersuperfícies que possuem as duas propriedades simultaneamente, de serem L-isotrópicas e L-isoparamétricas. Mais precisamente, obtivemos a seguinte proposição:

Proposição 1. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos com curvaturas principais distintas que não se anulam. Se x é L-isotrópica e L-isoparamétrica então os autovalores do tensor $\mathbb{L}$ são todos iguais e nulos, isto é, $\lambda = 0$.*

Outra pergunta natural que fizemos foi saber se a família de hipersuperfícies descrita em (2) seria a única L-isotrópica quando $\lambda = 0$. Vamos responder parcialmente a essa questão de forma positiva apresentando um resultado de rigidez das hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizadas por linhas de curvatura, a menos de transformação de Laguerre. Considerando uma hipersuperfície $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ com normal $\xi : M^n \to \mathbb{S}^n$, o vetor posição de Laguerre $Y : M^n \to \mathbb{C}^{n+3} \subset \mathbb{R}^{n+4}_2$ é definido por $Y = \rho(x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1)$, onde

$$\rho = \sqrt{\sum_i (r - r_i)^2} \tag{3}$$

é uma função definida em termos dos raios de curvatura, $r_i = \dfrac{1}{k_i}$, e do raio de curvatura média, $r = \dfrac{\sum_i r_i}{n}$, de x. Provamos então o seguinte resultado:

Teorema 1. *Sejam $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com n curvaturas principais distintas que não se anulam, $Y : M^n \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}^{n+4}_2$ o vetor posição de Laguerre com a métrica de Laguerre $g = \langle dY, dY \rangle$ e λ os autovalores do tensor $\mathbb{L}$. Suponha que M^n é conexa e admite uma parametrização por linhas de curvatura com respeito a métrica g. Se x é uma hipersuperfície L-isotrópica, então $\lambda = 0$ e x é hipersuperfície $L-$ isoparamétrica. Além disso, a menos de transformação de Laguerre, esta hipersuperfície é equivalente à descrita em* (2).

Em um primeiro momento, a hipersuperfície (1) pode parecer uma generalização de (2), onde as duas se diferem pela escolha de ϕ. Porém, com a prova do Teorema 1 fica claro que escolher a constante ϕ é nada mais que escolher o vetor posição Y, o que nos dá equivalência no sentido de Laguerre. Dessa forma, do ponto de vista da geometria de Laguerre, a família (1) quando $\phi = 0$ ou $\phi \neq 0$ são equivalentes.

Estudar a classificação das hipersuperfícies L-isotrópicas é importante, pois a partir delas conseguimos classificar todas as hipersuperfícies L-isoparamétricas, usando o resultado provado por Shu em [30]. O mundo das L-isotrópicas com $\lambda > 0$ ainda deve ser investigado, tendo em vista que nenhum exemplo ainda é conhecido. Neste trabalho, obtivemos condições necessárias para a existência de tais hipersuperfícies. O Teorema 1 nos diz que uma hipersuperfície L-isotrópica com $\lambda > 0$ não poderá admitir parametrização por linhas de curvatura. Além disso, verificamos que uma hipersuperfície L-isotrópica com $\lambda > 0$, possui pelo menos três curvaturas principais distintas que não se anulam.

Para a classe de hipersuperfícies L-isotrópicas com $\lambda > 0$ provamos ainda a seguinte proposição:

Proposição 2. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Se x é uma hipersuperfície L-isotrópica com $\lambda > 0$ então*

$$0 < \rho^2 < \frac{1}{2\lambda}, \tag{4}$$

onde ρ é definida por (3).

Agora, apresentamos uma breve descrição da estrutura do nosso trabalho.

No Capítulo 1, estudamos a geometria das esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ tendo como base o trabalho de Cecil [2]. Descrevemos a correspondência bijetiva, estabelecida por Lie, entre o conjunto de todas as esferas orientadas e os hiperplanos orientados em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e os pontos da quádrica de Lie $\mathbb{Q}^{n+2}$. Estudamos o grupo das transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e introduzimos o conceito de transformação de Laguerre. Além disso, definimos uma hipersuperfície de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ mostrando que a métrica de Laguerre é invariante por transformações de Laguerre. Concluímos este capítulo estudando a geometria de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$, com base no artigo de Li e Wang [16].

No Capítulo 2, definimos as hipersuperfícies L-isotrópicas, apresentamos a teoria da geometria de Laguerre aplicada a esse caso e mostramos a Proposição 2. Além disso, obtemos condições necessárias para a existência de hipersuperfícies L-isotrópicas com $\lambda > 0$. Na sequência, estudamos a classe de hipersuperfícies que são simultaneamente L-isotrópicas e L-isoparamétricas provando a Proposição 1. Finalizamos o capítulo apresentando a prova do Teorema 1, que consiste em um resultado de rigidez na geometria de Laguerre das hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizadas por linhas de curvatura.

Capítulo 1

Geometria de Laguerre no espaço Euclidiano

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos e resultados básicos da geometria das esferas de Lie que serão usados no decorrer do texto. A teoria pode ser vista com mais detalhes em [2]. Estudamos o grupo das transformações de Laguerre, que é um importante subgrupo do grupo das transformações de Lie, consistindo de todos os elementos de $O(n+2,2)$ que fixam os vetores tipo luz em $\mathbb{R}_2^{n+4}$. Definimos uma hipersuperfície de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e mostramos que a métrica de Laguerre é um invariante de Laguerre. Por invariantes de Laguerre, entendemos como objetos invariantes por transformações de Laguerre. Concluímos este capítulo apresentando os invariantes básicos de Laguerre estudados por Li e Wang [16] para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, tais como a segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$, a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ e o tensor de Laguerre $\mathbb{L}$. Além disso, mostramos expressões que relacionam esses invariantes.

1.1 Geometria das esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$

Iniciamos essa seção introduzindo o conceito de contato orientado entre esferas e hiperplanos orientados. Apresentamos a correspondência bijetiva, estabelecida por Lie, entre o conjunto de todas as esferas orientadas e hiperplanos orientados em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e o conjunto dos pontos da quádrica de Lie $\mathbb{Q}^{n+2}$ contida no espaço projetivo real $\mathbb{P}^{n+3}$. Mostramos que a quádrica $\mathbb{Q}^{n+2}$ contém apenas retas projetivas mas nenhum subespaço de dimensão maior. Por fim, apresentamos o conceito de feixe de esferas, que consiste em uma família a

1-parâmetro de esferas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ que corresponde aos pontos de uma reta projetiva em $\mathbb{Q}^{n+2}$.

Considere sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ o fibrado tangente unitário, definido por:

$$U\mathbb{R}^{n+1} = \{(x,\xi)\ ;\ x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \xi \in \mathbb{S}^n\} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2n+2}. \tag{1.1}$$

Definição 1. Uma *esfera orientada* em $U\mathbb{R}^{n+1}$ de centro p e raio r é uma subvariedade n-dimensional em $U\mathbb{R}^{n+1}$ dada por:

$$S(p,r) = \{(x,\xi) \in U\mathbb{R}^{n+1};\ x - p = r\xi\}. \tag{1.2}$$

Geometricamente, $S(p,r)$ com $r \neq 0$ corresponde a uma esfera orientada em $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ e raio r. Se $r > 0$ (respectivamente $r < 0$), o vetor normal unitário ξ de $S(p,r)$ é exterior (respectivamente interior). Se $r = 0$, então $S(p,0)$ representa todos os vetores tangentes a $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Denotamos $S(p,0)$ o *ponto esférico* em $p \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 2. Dado $\xi \in \mathbb{S}^n$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, dizemos que um *hiperplano orientado* em $U\mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade n-dimensional em $U\mathbb{R}^{n+1}$ dada por:

$$P(\xi,\lambda) = \{(x,\xi) \in U\mathbb{R}^{n+1};\ x \cdot \xi = \lambda\}, \tag{1.3}$$

em que "." é a métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Geometricamente, $P(\xi,\lambda)$ é o hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \cdot \xi = \lambda\}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ com normal unitário ξ.

Considere o conjunto $\sum = \{\Gamma\ ;\ \Gamma$ é esfera orientada ou Γ é hiperplano orientado$\} \subset U\mathbb{R}^{n+1}$. De agora em diante, as esferas e hiperplanos serão orientados.

Definição 3. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$. Dizemos que Γ_1 e Γ_2 têm *contato orientado* se $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ou se a intersecção $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ é um único ponto $(x,\xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$.

Geometricamente, Γ_1 e Γ_2 têm contato orientado em (x,ξ) se, e somente se, elas são esferas orientadas ou hiperplanos orientados em $\mathbb{R}^{n+1}$ tangentes a x com o mesmo normal unitário ξ. Com o objetivo de determinar uma condição analítica para o contato orientado entre elementos do conjunto $\sum$ vamos apresentar algumas definições.

Seja $\mathbb{R}^{n+4}_2$ o espaço $\mathbb{R}^{n+4}$ munido com o produto interno

$$\langle X,Y\rangle = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_{n+3}Y_{n+3} - X_{n+4}Y_{n+4}. \tag{1.4}$$

A fim de realizar cálculos futuros, vamos apresentar também a definição da métrica de Lorentz juntamente com algumas observações. Considere $\mathbb{R}_1^{n+3}$ o espaço $\mathbb{R}^{n+3}$ munido com a métrica de Lorentz

$$(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = -\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1 + \mathrm{X}_2\mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{X}_{\mathrm{n}+3}\mathrm{Y}_{\mathrm{n}+3},\ \mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}+3}. \tag{1.5}$$

Definição 4. *Dado $Y \in \mathbb{R}_1^{n+3}$ dizemos que Y é um vetor*

- *tipo espaço, se $(Y,Y) > 0$ ou se $Y = 0$;*
- *tipo tempo, se $(Y,Y) < 0$;*
- *tipo luz, se $(Y,Y) = 0$ e $Y \neq 0$.*

O conjunto de todos os vetores em $\mathbb{R}_1^{n+3}$ tipo luz formam um cone de revolução, chamado *cone de luz*. O interior do cone, isto é, conjunto delimitado pelo cone, (respectivamente o exterior) é formado pelo conjunto dos vetores tipo tempo (respectivamente tipo espaço). Se Y é tipo espaço, o complemento ortogonal $Y^{\perp} \in \mathbb{R}_1^{n+3}$ é um hiperplano constituído por vetores tipo espaço, tipo tempo e tipo luz. Se Y é tipo tempo, o complemento ortogonal $Y^{\perp}$ é um hiperplano formado por vetores tipo espaço intersectando o cone na origem. Se Y é tipo luz o complemento ortogonal $Y^{\perp}$ é um hiperplano que contém vetores tipo espaço e luz.

Analogamente, dado o vetor $X \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ com a métrica (1.4), dizemos que X é um vetor

- tipo espaço, se $\langle X,X\rangle > 0$ ou se $X = 0$;
- tipo tempo, se $\langle X,X\rangle < 0$;
- tipo luz, se $\langle X,X\rangle = 0$ e $X \neq 0$.

Observação 2. No contexto de métricas, utilizamos a notação $\langle , \rangle$ para nos referir à métrica de assinatura 2 do espaço $\mathbb{R}_2^{n+4}$ definida em (1.4). A notação $(,)$ é referente à métrica definida em (1.5) no espaço $\mathbb{R}_1^{n+3}$.

Definição 5. Seja $\mathbb{R}_2^{n+4}$ o espaço $\mathbb{R}^{n+4}$ munido com a métrica (1.4). Definimos o *cone de luz* C^{n+3} em $\mathbb{R}_2^{n+4}$ por

$$C^{n+3} = \{X \in \mathbb{R}^{n+4}\ ;\ \langle X,X\rangle = 0\}. \tag{1.6}$$

O espaço projetivo $\mathbb{P}^{n+3}$ é o conjunto das classes de equivalência $[X] = \{cX\ ;\ c \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{P}^{n+3}$ e as coordenadas $X = (X_1, X_2, \ldots, X_{n+4})$ são chamadas coordenadas homogêneas de $[X]$.

Observação 3. De agora em diante é importante esclarecer a notação que vamos usar. Um ponto $[X] \in \mathbb{P}^{n+3}$ é uma classe de equivalência, onde $X \in \mathbb{R}_2^{n+4}$. Analogamente, um ponto arbitrário $[Y] \in \mathbb{P}^{n+2}$ é uma classe de equivalência, onde $Y \in \mathbb{R}_1^{n+3}$. Quando estivermos fazendo os produtos internos $\langle , \rangle$ e $(,)$ dados por (1.4) e (1.5) respectivamente, o colchete para indicar que estamos trabalhando com classe de equivalência será omitido.

Definição 6. No espaço projetivo real $\mathbb{P}^{n+3}$, definimos a *quádrica de Lie*, denotada por $\mathbb{Q}^{n+2}$, da seguinte forma,

$$\mathbb{Q}^{n+2} = \{[X] \in \mathbb{P}^{n+3} \; ; \; \langle X, X \rangle = 0\}. \tag{1.7}$$

Com a finalidade de obter uma correspondência bijetiva entre os pontos de $\mathbb{Q}^{n+2}$ e os elementos do conjunto $\sum$, vamos inicialmente estabelecer uma correspondência entre os pontos tipo espaço de $\mathbb{P}^{n+2}$ e os pontos do conjunto $\sum$. Consideramos inicialmente a imersão $\varphi : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{P}^{n+2}$, dada por

$$\varphi(v) = [(1, v)], \;\; \forall v \in \mathbb{R}^{n+2}. \tag{1.8}$$

Seja a projeção estereográfica $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \setminus \{P\}$, dada por

$$\sigma(u) = \left(\frac{1 - u \cdot u}{1 + u \cdot u}, \frac{2u}{1 + u \cdot u} \right), \;\; \forall u \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{1.9}$$

onde $P = (-1, \vec{0}, 0)$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ e "$\cdot$" é a métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Observe que a imagem de σ exclui o ponto P, caso contrário teríamos uma contradição.

Considere $\mathbb{R}_1^{n+3}$ o espaço $\mathbb{R}^{n+3}$ munido com a métrica de Lorentz (1.5). Defina o seguinte conjunto,

$$\Omega^{n+1} = \{[z] \in \mathbb{P}^{n+2} \setminus \{[P]\} \; ; \; (z, z) = 0\}, \tag{1.10}$$

onde $[P] = [(1, -1, \vec{0}, 0)]$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$, é o ponto em $\mathbb{P}^{n+2}$ correspondente a $P = (-1, \vec{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$. O conjunto definido em (1.10) é chamado $(n+1)$*-esfera de Möbius*.

Proposição 3. *Sejam φ e σ as aplicações definidas em* (1.8) *e* (1.9)*, respectivamente. Então,* $\Big(\varphi \circ \sigma\Big)\Big(\mathbb{R}^{n+1}\Big) = \Omega^{n+1}$.

Demonstração. Fazendo a composição das aplicações (1.8) e (1.9) obtemos, $\varphi \circ \sigma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{P}^{n+2}$ dada por,

$$\varphi(\sigma(u)) = \left[\left(1, \frac{1 - u \cdot u}{1 + u \cdot u}, \frac{2u}{1 + u \cdot u} \right) \right] = \left[\left(\frac{1 + u \cdot u}{2}, \frac{1 - u \cdot u}{2}, u \right) \right]. \tag{1.11}$$

Denote $w = \left(\dfrac{1-u\cdot u}{1+u\cdot u}, \dfrac{2u}{1+u\cdot u}\right)$. Note que $w\cdot w = 1$. Portanto, temos que

$$((1,w),(1,w)) = -1 + w\cdot w = 0.$$

$\square$

Proposição 4. *Sejam $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$ um vetor tipo espaço, $[\alpha^{\perp}]$ seu complemento ortogonal em $\mathbb{P}^{n+2}$ e $[P] = [(1,-1,\vec{0},0)]$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Se $[P] \notin [\alpha^{\perp}]$ então $[\alpha^{\perp}] \cap \Omega^{n+1} = \Omega^n = \big(\varphi\circ\sigma\big)\big(\mathbb{S}^n\big)$, onde $\mathbb{S}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Caso contrário, $[\alpha^{\perp}] \cap \Omega^{n+1}$ é a imagem pela composição $\varphi\circ\sigma$ de um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Seja $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$ um vetor tipo espaço. O complemento ortogonal $[\alpha^{\perp}]$ de $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$ pode conter vetores do tipo tempo, tipo espaço e tipo luz. Suponha que $[P] \notin [\alpha^{\perp}]$. Sem perda de generalidade, considere o vetor tipo espaço $[\alpha] = [(0,1,\ldots,0)] \in \mathbb{P}^{n+2}$. Temos que $[\alpha^{\perp}] = [(\alpha_1, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+3})]$, com $\alpha_1 \neq 0$. Como $[\alpha^{\perp}]$ é classe de equivalência, dividindo por α_1 temos, $[\alpha^{\perp}] = [(1,0,u)]$, onde $u = \left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}, \cdots, \dfrac{\alpha_{n+3}}{\alpha_1}\right)$. Assim, usando (1.11) temos que,

$$\left((1,0,u), \left(\frac{1+u\cdot u}{2}, \frac{1-u\cdot u}{2}, u\right)\right) = 0 \Leftrightarrow u\cdot u = 1,\ u \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Então, $[\alpha^{\perp}] \cap \Omega^{n+1} = \Omega^n$ é a imagem pela composição $\varphi\circ\sigma$ de uma n-esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$. Caso contrário, se $[P] \in [\alpha^{\perp}]$, a interseção $[\alpha^{\perp}] \cap \Omega^{n+1}$ é a imagem pela composição $\varphi\circ\sigma$ de um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Dessa forma, estabelecemos uma correspondência bijetiva entre os pontos tipo espaço em $\mathbb{P}^{n+2}$ e os elementos de $\sum$. No que segue, vamos obter fórmulas específicas para estas correspondências. Primeiramente para as esferas e depois para os hiperplanos.

1. Considere a esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro p e raio $r > 0$ dada por

$$(u-p)\cdot(u-p) = r^2,\ u \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1.12}$$

Sejam $\varphi(\sigma(u))$ dado em (1.11) e $[N]$ um vetor tipo espaço em $\mathbb{P}^{n+2}$ dado por

$$[N] = \left[\left(\frac{1+p\cdot p-r^2}{2}, \frac{1-p\cdot p+r^2}{2}, p\right)\right]. \tag{1.13}$$

Um cálculo mostra que,

$$
\begin{aligned}
&(N,\varphi(\sigma(u))) = \left(\left(\frac{1+p\cdot p-r^2}{2},\frac{1-p\cdot p+r^2}{2},p\right),\left(\frac{1+u\cdot u}{2},\frac{1-u\cdot u}{2},u\right)\right)\\
&= -\left(\frac{(1+p\cdot p-r^2)(1+u\cdot u)}{4}\right)+\left(\frac{(1-p\cdot p+r^2)(1-u\cdot u)}{4}\right)+u\cdot p\\
&= -u\cdot u-p\cdot p+2u\cdot p+r^2.
\end{aligned}
$$

Então,

$$(N,\varphi(\sigma(u))) = 0 \Leftrightarrow (u-p)\cdot(u-p) = r^2. \tag{1.14}$$

Observe que $N_1+N_2=1$, onde $N_i,\ 1\leq i\leq n+3$, são as coordenadas de N. Então $(N,P)\neq 0$, isto é, $[P]\notin[N^{\perp}]$. Segue, por (1.14), que $u\in\mathbb{R}^{n+1}$ está na esfera dada pela equação (1.12) se, e somente se, $\varphi(\sigma(u))\in[N^{\perp}]$. Portanto, usando a Proposição 3 e Proposição 4 temos que a esfera de Möbius Ω^n, obtida através da interseção $[N^{\perp}]\cap\Omega^{n+1}$, corresponde à esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada pela equação (1.12).

Reciprocamente, dado $[\alpha]\in\mathbb{P}^{n+2}$ tipo espaço com $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$, podemos determinar uma esfera correspondente em $\mathbb{R}^{n+1}$ como segue. Seja $[N]=\dfrac{[\alpha]}{\alpha_1+\alpha_2}\Rightarrow N_1+N_2\neq 0$. Então, pela expressão (1.13), o centro da esfera correspondente é o ponto $p=(N_3,N_4,\ldots,N_{n+3})$ e o raio é $r=\sqrt{(N,N)}$.

2. Agora, considere o hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$x\cdot\xi=\lambda,\quad x,\xi\in\mathbb{R}^{n+1} \text{ e } |\xi|=1. \tag{1.15}$$

Semelhante ao que foi feito para a esfera, seja $\varphi(\sigma(u))$ como em (1.11) e $[\eta]$ e um vetor tipo espaço em $\mathbb{P}^{n+2}$ dado por

$$[\eta]=\Big[(\lambda,-\lambda,\xi)\Big]. \tag{1.16}$$

Temos,

$$
\begin{aligned}
(\eta,\varphi(\sigma(u))) &= \left((\lambda,-\lambda,\xi),\left(\frac{1+u\cdot u}{2},\frac{1-u\cdot u}{2},u\right)\right)\\
&= -\left(\frac{(1+u\cdot u)\lambda}{2}\right)-\left(\frac{(1-u\cdot u)\lambda}{2}\right)+\xi\cdot u.
\end{aligned}
$$

Então,

$$(\eta,\varphi(\sigma(u)))=0\Leftrightarrow u\cdot\xi=\lambda. \tag{1.17}$$

Note que $\eta_1 + \eta_2 = 0$ então, $(\eta, P) = 0$, ou seja, $[P] \in [\eta^{\perp}]$. Por (1.17), $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ está no hiperplano dado por (1.15) se, e somente se, $\varphi(\sigma(u)) \in [\eta^{\perp}]$. Assim, usando a Proposição 3 e Proposição 4 temos que a interseção $[\eta^{\perp}] \cap \Omega^{n+1}$ é um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, o hiperplano (1.15) é representado em $\mathbb{P}^{n+2}$ por $[\eta] = [(\lambda, -\lambda, \xi)]$.

Reciprocamente, seja $[\theta] \in \mathbb{P}^{n+2}$ tipo espaço com $\theta_1 + \theta_2 = 0 \Rightarrow (\theta, \theta) = v \cdot v$, onde $v = (\theta_3, \ldots, \theta_{n+3})$. Seja $[\eta] = \dfrac{[\theta]}{|\, v\,|}$ temos,

$$[\eta] = \frac{[\theta]}{|\, v\,|} = \left(\frac{\theta_1}{|\, v\,|}, \frac{-\theta_1}{|\, v\,|}, \frac{v}{|\, v\,|}\right).$$

Portanto, $[\eta]$ tem a forma dada em (1.16) e $[\theta]$ corresponde ao hiperplano (1.15).

A proposição a seguir fornece uma correspondência bijetiva entre os elementos do conjunto $\sum$ e os pontos de $\mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, onde

$$[P] = [(1, -1, \vec{0}, 0)], \ \vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1.18}$$

Proposição 5. *Podemos associar uma esfera orientada $S(p,r) \in \sum$ a um ponto $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ por*

$$S(p,r) \longleftrightarrow [\gamma], \text{ onde } \gamma = \left[\left(\frac{1 + p\cdot p - r^2}{2}, \frac{1 - p \cdot p + r^2}{2}, p, r\right)\right], \tag{1.19}$$

e associar um hiperplano orientado $P(\xi, \lambda) \in \sum$ a um ponto $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ por

$$P(\xi, \lambda) \longleftrightarrow [\gamma], \text{ onde } \gamma = [(\lambda, -\lambda, \xi, 1)]. \tag{1.20}$$

Demonstração. Seja $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ com coordenadas homogêneas $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+3}, \gamma_{n+4}) \in \mathbb{R}^{n+4}_2$. Suponha primeiro o caso em que $\gamma_{n+4} \neq 0$. Então, $[\gamma]$ pode ser representado por

$$[\gamma] = [(\alpha, 1)], \ [\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}.$$

Como $\langle \gamma, \gamma \rangle = 0$ temos que,

$$\begin{aligned} \langle \gamma, \gamma \rangle = \langle (\alpha, 1), (\alpha, 1) \rangle &= \langle (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+3}, 1), (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+3}, 1) \rangle \\ &= -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n+3}^2 - 1. \end{aligned}$$

Então, $(\alpha, \alpha) = 1$, ou seja, $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$ é tipo espaço.

Suponha primeiro que $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ então, pela correspondência estabelecida entre os pontos de $\mathbb{P}^{n+2}$ com o conjunto das esferas e hiperplanos em $\mathbb{R}^{n+1}$, $[\alpha]$ representa uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro p e raio r. Seja N dado em (1.13). Como $(\alpha,\alpha) = 1$ e $(N,N) = r^2$ podemos representar $[\alpha] = \left[\pm\frac{N}{r}\right]$. Logo, em $\mathbb{P}^{n+3}$, temos

$$[(\alpha,1)] = \left[\left(\pm\frac{N}{r},1\right)\right] = [(N,\pm r)] = \left[\left(\left(\frac{1+p\cdot p-r^2}{2},\frac{1-p\cdot p+r^2}{2},p\right),\pm r\right)\right].$$

Portanto, fica estabelecida a seguinte correspondência:

$$S(p,r) \longleftrightarrow [\gamma], \text{ onde } \gamma = \left[\left(\frac{1+p\cdot p-r^2}{2},\frac{1-p\cdot p+r^2}{2},p,r\right)\right].$$

Agora, se $\alpha_1+\alpha_2 = 0$ então, pela correspondência estabelecida entre os pontos de $\mathbb{P}^{n+2}$ com o conjunto das esferas e hiperplanos em $\mathbb{R}^{n+1}$, $[\alpha] \in \mathbb{P}^{n+2}$ representa um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ como em (1.15). Para $[\alpha] = \big[(\lambda,-\lambda,\xi)\big]$ com $|\xi| = 1$ temos,

$$(\alpha,\alpha) = ((\lambda,-\lambda,\xi),(\lambda,-\lambda,\xi)) = 1.$$

Então, em $\mathbb{P}^{n+3}$ temos

$$[(\alpha,1)] = [(\lambda,-\lambda,\xi,\pm 1)].$$

Portanto, temos a correspondência

$$P(\xi,\lambda) \longleftrightarrow [\gamma], \text{ onde } \gamma = [(\lambda,-\lambda,\xi,1)].$$

Suponha agora que $\gamma_{n+4} = 0$. Então, $[\gamma]$ pode ser representado por

$$[\gamma] = [(u,0)], \ \ u \in \mathbb{P}^{n+2}.$$

Uma vez que $\langle\gamma,\gamma\rangle = 0$ obtemos que,

$$\langle\gamma,\gamma\rangle = \langle(u,0),(u,0)\rangle = (u,u) = 0,$$

ou seja, $[u]$ é um ponto da esfera de Möbius. Logo, temos a correspondência

$$u \in \mathbb{R}^{n+1} \longleftrightarrow [\gamma], \text{ onde } \gamma = \left[\left(\frac{1+u\cdot u}{2},\frac{1-u\cdot u}{2},u,0\right)\right].$$

$\square$

Chamamos $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ de *coordenadas esféricas* de $S(p,r)$ e $P(\xi,\lambda)$.

Pela maneira como obtivemos a correspondência dada pela Proposição 5, segue o seguinte corolário:

Corolário 4. *Seja* $\Gamma \in \sum$ *uma esfera orientada com coordenada esférica* $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$*, então pelas expressões (1.19), (1.20) temos que:*

- Γ *é uma esfera orientada se, e somente se,* $\langle \gamma, P \rangle \neq 0$.
- Γ *é uma hiperplano orientado se, e somente se,* $\langle \gamma, P \rangle = 0$.

Portanto, obtemos a correspondência bijetiva entre os elementos do conjunto de esferas ou hiperplanos $\sum$ e os pontos da quádrica de Lie $\mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ como segue:

$\sum$	$\mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$
$S(p,r)$	$\left[\left(\frac{1+p\cdot p-r^2}{2}, \frac{1-p\cdot p+r^2}{2}, p, r\right)\right]$
$P(\xi,\lambda)$	$[(\lambda, -\lambda, \xi, 1)]$
$u \in \mathbb{R}^{n+1}$ (esfera de raio 0)	$\left[\left(\frac{1+u\cdot u}{2}, \frac{1-u\cdot u}{2}, u, 0\right)\right]$

Geometricamente, o ponto $[P]$, dado por (1.18), é a coordenada do ponto esférico no infinito de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é,

$$[P] = \lim_{|p|\to\infty} \frac{1}{|\, p\,|^2} \left[\left(\frac{1+p\cdot p}{2}, \frac{1-p\cdot p}{2}, p, 0\right)\right].$$

Uma vez obtidas as correspondências dadas na Proposição 5, vamos fazer uma análise dos contatos orientados entre os elementos de $\sum$ obtendo uma expressão analítica para a Definição 3.

Proposição 6. $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ *têm contato orientado se, e somente se, suas coordenadas esféricas* $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ *satisfazem,*

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0.$$

Demonstração. Considerando $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$, vamos analisar os seguintes casos: duas esferas, dois hiperplanos e uma esfera e um hiperplano.

1. Primeiro, considere $\Gamma_1 = S(p,r)$ e $\Gamma_2 = S(q,s)$ duas esferas distintas em $\sum$ cujas coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left(\frac{1}{2}(1+|p|^2-r^2), \frac{1}{2}(1-|p|^2+r^2), p, -r\right),\\ \gamma_2 &= \left(\frac{1}{2}(1+|q|^2-s^2), \frac{1}{2}(1-|q|^2+s^2), q, -s\right).\end{aligned}$$

Como $S(p,r)$ e $S(q,s)$ são distintas, as duas esferas possuem contato orientado se existe um único ponto $(x,\xi) \in S(p,r) \cap S(q,s)$. Então, por (1.2) o ponto (x,ξ) deve satisfazer,

$$x - p = r\xi, \tag{1.21}$$

$$x - q = s\xi. \tag{1.22}$$

Subtraindo as equações (1.21), (1.22) e usando o fato que $\xi \in \mathbb{S}^n$ obtemos,

$$|p-q| = |s-r|. \tag{1.23}$$

Agora observe que,

$$\begin{aligned}\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{1+p^2-r^2}{2}, \frac{1-p^2+r^2}{2}, p, r\right), \left(\frac{1+q^2-s^2}{2}, \frac{1-q^2+s^2}{2}, q, s\right)\right\rangle\\ &= -\left(\frac{1+p^2-r^2}{2}\right)\left(\frac{1+q^2-s^2}{2}\right) + \left(\frac{1-p^2+r^2}{2}\right)\left(\frac{1-q^2+s^2}{2}\right) + pq - rs\\ &= -p^2 + 2pq - q^2 + r^2 - 2rs + s^2\\ &= -(p^2-q^2)^2 + (r^2-s^2)^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow |p-q| = |r-s|.$$

Assim, por (1.23) temos $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$ se, e somente se, $S(p,r)$ e $S(q,s)$ estão em contato orientado. O mesmo resultado se verifica para os casos de contato orientado entre dois pontos esféricos e entre ponto esférico e esfera orientada.

2. Considere agora $\Gamma_1 = S(p,r)$ e $\Gamma_2 = P(\xi,\lambda)$ uma esfera orientada e um hiperplano, respectivamente. Suas coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left(\frac{1}{2}(1+|p|^2-r^2), \frac{1}{2}(1-|p|^2+r^2), p, -r\right),\\ \gamma_2 &= (\lambda, -\lambda, \xi, 1).\end{aligned}$$

$S(p,r)$ e $P(\xi,\lambda)$ possuem contato orientado se existe um único ponto $(x,\xi)\in S(p,r)\cap P(\xi,\lambda)$. Então, por (1.2) e (1.3) o ponto (x,ξ) deve satisfazer,

$$x-p=r\xi, \tag{1.24}$$

$$x\cdot\xi=\lambda. \tag{1.25}$$

Substituindo (1.24) em (1.25) e usando o fato que $\xi\in\mathbb{S}^n$ obtemos,

$$p\cdot\xi=-r+\lambda. \tag{1.26}$$

Como,

$$\begin{aligned}\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle &= \left\langle\left(\frac{1+p^2-r^2}{2},\frac{1-p^2+r^2}{2},p,-r\right),(\lambda,-\lambda,\xi,1)\right\rangle\\ &= -\lambda+p\cdot\xi+r,\end{aligned}$$

segue, por (1.26) que $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle=0$ se, e somente se, $S(p,r)$ e $P(\xi,\lambda)$ estão em contato orientado. Segue também o resultado para o caso em que $\Gamma_1=S(p,0)$ e $\Gamma_2=P(\xi,\lambda)$.

3. Sejam $\Gamma_1=P(\xi_1,\lambda_1)$ e $\Gamma_2=P(\xi_2,\lambda_2)$ dois hiperplanos orientados. Suas coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (\lambda_1,-\lambda_1,\xi_1,1),\\ \gamma_2 &= (\lambda_2,-\lambda_2,\xi_2,1).\end{aligned}$$

Pela definição de contato orientado $\gamma_1=\gamma_2$ ou existe um único ponto $(x,\xi)\in P(\xi_1,\lambda_1)\cap P(\xi_2,\lambda_2)$. Usando (1.3) o ponto (x,ξ) deve satisfazer,

$$x\cdot\xi=\lambda_1,$$

$$x\cdot\xi=\lambda_2,$$

ou seja, $\lambda_1=\lambda_2$. Então, dois hiperplanos orientados tem contato orientado no caso em coincidem, isto é, $\Gamma_1=P(\xi,\lambda)=\Gamma_2$. Logo, $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle=0$ se, e somente se, dois hiperplanos estão em contato orientado, pois são o mesmo hiperplano.

Portanto, em qualquer caso $\Gamma_1,\Gamma_2\in\sum$ têm contato orientado se, e somente se, suas coordenadas esféricas $[\gamma_1],[\gamma_2]\in\mathbb{Q}^{n+2}\setminus\{[P]\}$, respectivamente, satisfazem $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle=0$. $\square$

Observação 5. Até o momento, dado $\Gamma \in \sum$, fizemos distinção se estávamos tratando de esferas orientadas ou hiperplanos orientados. De agora em diante, o termo esferas orientadas pode se referir a esferas de raio $r \neq 0$ (esferas orientadas), a esferas de raio $r = 0$ ou a esferas de raio $r = \infty$ (hiperplanos orientados).

Note que qualquer ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina um único conjunto de esferas orientadas de contato orientado em $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ com o mesmo normal unitário ξ. Esse conjunto é denominado *feixe de esferas orientadas* em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Neste feixe, existe um único ponto esférico $S(x,0)$, de coordenada esférica $[\gamma_1]$, e um único hiperplano orientado $P(\xi, x\cdot\xi)$, de coordenada esférica $[\gamma_2]$, onde

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right), \quad \gamma_2 = (x\cdot\xi, -x\cdot\xi, \xi, 1). \tag{1.27}$$

Os resultados a seguir têm por objetivo apresentar informações necessárias para demonstrarmos a proposição que caracteriza os pontos de um reta em $\mathbb{Q}^{n+2}$ com o correspondente feixe de esferas em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 7. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ com coordenadas esféricas $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, respectivamente. Definimos a *reta projetiva gerada por* $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$, denotado por $[\gamma_1, \gamma_2]$ por,

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \{[\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2] \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}. \tag{1.28}$$

Usando um resultado de Álgebra Linear, vamos mostrar o fato importante de que $\mathbb{Q}^{n+2}$ contém apenas retas projetivas, ou seja, contém apenas subespaços projetivos.

Lema 6. *([2]) Seja $\mathbb{R}^n_k$ um espaço vetorial real munido com uma métrica de assinatura $(n-k, k)$. Então, a dimensão máxima de um subespaço de luz (que contém apenas vetores tipo luz) é o mínimo entre os números k e $n-k$.*

Teorema 7. *A quádrica de Lie $\mathbb{Q}^{n+2}$ contém retas projetivas mas nenhum subespaço tipo luz de dimensão maior.*

Demonstração. De fato, por definição $\mathbb{Q}^{n+2} = \{[X] \in \mathbb{P}^{n+3} \ ; \ \langle X, X\rangle = 0\}$, onde $\mathbb{P}^{n+3} \subset \mathbb{R}^{n+4}_2$. Como $\mathbb{R}^{n+4}_2$ é o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+4}$ munido com a métrica (1.4) de assinatura $(n+2, 2)$, segue pelo Lema 6 que a dimensão máxima de um subespaço tipo luz de $\mathbb{R}^{n+4}_2$ é $k = 2$. Então, o subespaço tipo luz de dimensão 2 em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ corresponde a um subespaço tipo luz linear $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{n+3}$. Note que $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{Q}^{n+2}$, pois $\mathbb{Q}^{n+2}$ contém todos os vetores tipo luz de $\mathbb{P}^{n+3}$. Portanto, $\mathbb{Q}^{n+2}$ contém apenas retas projetivas. □

A proposição a seguir caracteriza o contato orientado em termos das retas projetivas.

Proposição 7. *Sejam* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ *com coordenadas esféricas* $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$*, respectivamente. Então,* Γ_1 *e* Γ_2 *possuem contato orientado se, e somente se,* $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ possuem contato orientado, com coordenadas esféricas $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, respectivamente. Então, pela Proposição 6, $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$. Considere a reta projetiva $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$. Pela definição (1.28) temos que,

$$[\gamma_3] = [\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2],$$

onde $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_3, \gamma_3 \rangle = \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 \rangle &= \lambda^2 \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle + 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle + \mu^2 \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle \\ &= 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo, $[\gamma_3] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, para todo $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$.

Reciprocamente, suponha que $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, então γ_1 e γ_2 são, respectivamente, coordenadas esféricas de duas esferas orientadas $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$. Seja $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$ então, $[\gamma_3] = [\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2]$, onde $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ temos,

$$0 = \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 \rangle = \lambda^2 \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle + 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle + \mu^2 \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle = 2\lambda\mu \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle.$$

Portanto, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ possuem contato orientado. $\square$

Note que, pela Proposição 7, dada qualquer reta projetiva de $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, ficam determinados $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ que possuem contato orientado gerando assim um ponto de contato $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$.

A próxima proposição estabelece uma relação entre os pontos de uma reta em $\mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ e o correspondente feixe de esferas em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 8. *Sejam* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ *com coordenadas esféricas* $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$*, respectivamente. Se* $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ *então o feixe de esferas em* $U\mathbb{R}^{n+1}$ *correspondente a qualquer* $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$ *é precisamente o conjunto de todas as esferas orientadas em* $\sum$ *que possuem contato orientado com ambos* Γ_1 *e* Γ_2.

Demonstração. Seja $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$ então, podemos escrever $[\gamma_3] = [\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2]$, com $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, pela Proposição 7, Γ_1 e Γ_2 possuem contato orientado. Com isso, segue pela Proposição 6 que $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_3, \gamma_1 \rangle &= \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \gamma_1 \rangle = 0 \\ \langle \gamma_3, \gamma_2 \rangle &= \langle \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2, \gamma_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo, $[\gamma_3] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ é coordenada esférica de uma esfera orientada $\Gamma_3 \in \sum$ que está em contato orientado com $\Gamma_1 \in \sum$ e $\Gamma_2 \in \sum$, de acordo com a Proposição 6.

Reciprocamente, seja $\Gamma_3 \in \sum$ com respectiva coordenada esférica $[\gamma_3] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$. Suponha que Γ_3 está em contado orientado com $\Gamma_1 \in \sum$ e $\Gamma_2 \in \sum$. Então, pela Proposição 6 temos que $\langle \gamma_3, \gamma_1 \rangle = 0$ e $\langle \gamma_3, \gamma_2 \rangle = 0$. Logo,

$$\langle \gamma_3, \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 \rangle = 0,$$

ou seja, $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]^{\perp}$. Como $[\gamma_3] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ então, $[\gamma_3] \in [\gamma_1, \gamma_2]$, uma vez que pelo Teorema 7, $\mathbb{Q}^{n+2}$ possui apenas retas projetivas e não contém subespaço de dimensão maior. $\square$

Portanto, qualquer esfera Γ no feixe pode ser determinada mediante sua coordenada esférica $[\gamma]$, que pode ser escrita como

$$[\gamma] = [\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\} \tag{1.29}$$

para algum $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Assim, um ponto $(x, \xi) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina uma única reta projetiva em $\mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ dada por (1.28).

Observação 8. Vamos denotar por Λ^{2n+1} o conjunto de todas as retas projetivas contidas em $\mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$.

Finalizamos essa sessão com a seguinte definição,

Definição 8. O difeomorfismo $L : U\mathbb{R}^{n+1} \to \Lambda^{2n+1}$ definido por

$$L((x, \xi)) = \{[\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\} \ ; \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \tag{1.30}$$

é chamado de *difeomorfismo de Lie*.

1.2 Grupo das transformações de Laguerre

Nesta seção vamos introduzir o conceito de transformação de Laguerre e apresentar o grupo das transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$, que consiste em um importante subgrupo do grupo das transformações de Lie.

Começamos com um breve comentário a respeito do grupo ortogonal e das transformações projetivas. Para maiores detalhes referimos à [2] e [19].

Considere $\mathbb{R}^{n+4}$ munido com a métrica (1.4) e uma matriz real $A \in \mathbb{M}_{(n+4)\times(n+4)}(\mathbb{R})$. Dizemos que A preserva o produto interno se

$$\langle A(X), A(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle,\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^{n+4}_2.$$

Denote por $\mathbb{O}(n+2,2)$ o conjunto das matrizes reais de ordem $(n+4)\times(n+4)$ que preserva o produto interno (1.4). Então $\mathbb{O}(n+2,2)$ é um subgrupo fechado de $GL(n+4)$. Tome $A \in GL(n+4)$. A transformação linear associada a esta matriz induz uma transformação projetiva $W(A)$ em $\mathbb{P}^{n+3}$ dada por

$$\begin{aligned} W(A):\ \ \mathbb{P}^{n+3} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n+3} \\ [X] &\mapsto W(A)([X]) = [XA]. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Vamos agora definir uma transformação de Laguerre.

Seja $L\mathbb{G}$ o subgrupo do grupo ortogonal $\mathbb{O}(n+2,2)$ em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ dado por

$$L\mathbb{G} = \{T \in \mathbb{O}(n+2,2)\ ;\ PT = P\}, \tag{1.32}$$

onde P é o vetor tipo luz em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ dado por (1.18) e $\mathbb{O}(n+2,2)$ é formado pelo grupo ortogonal que deixa o produto interno (1.4) invariante.

Considere $T \in L\mathbb{G}$ então, $T \in \mathbb{O}(n+2,2)$. Como $\mathbb{O}(n+2,2) \subset GL(n+4)$, segue de (1.31) que T induz uma transformação projetiva em $\mathbb{P}^{n+3}$, que pode ser restrita a $\mathbb{Q}^{n+2}$, dada por

$$T([X]) = [XT],\ X \in \mathbb{Q}^{n+2}. \tag{1.33}$$

Chamamos, $T \in L\mathbb{G}$ e $T : \mathbb{Q}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{Q}^{n+2}$, de *transformações de Laguerre* e $L\mathbb{G}$ o *grupo das transformações de Laguerre*.

Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \sum$ duas esferas ou hiperplanos distintos em contato orientado, com coordenadas esféricas associadas $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$, respectivamente. Pela Proposição 7 temos que

$[\gamma_1,\gamma_2] \subset \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$. Isto é, $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$ definem uma reta projetiva em $\mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ por

$$[\gamma_1,\gamma_2] = \{[\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2] \ ; \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \in \Lambda^{2n+1}. \tag{1.34}$$

Como qualquer $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$ pode ser escrito como em (1.34) e qualquer $T \in L\mathbb{G}$ induz uma transformação em $\mathbb{Q}^{n+2}$ dada por (1.33), então qualquer $T \in L\mathbb{G}$ define uma transformação $T : \Lambda^{2n+1} \longrightarrow \Lambda^{2n+1}$ por

$$T([\gamma_1,\gamma_2]) = [[\gamma_1 T],[\gamma_2 T]]. \tag{1.35}$$

Definição 9. Seja $L : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \Lambda^{2n+1}$ o difeomorfismo dado em (1.30). Então, qualquer $T \in L\mathbb{G}$ induz uma transformação

$$\phi = L^{-1} \circ T \circ L : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}, \tag{1.36}$$

chamada de *transformação de Laguerre em* $U\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, o grupo das transformações de Laguerre sobre $U\mathbb{R}^{n+1}$ é dado por

$$L\mathbb{G} = \{\phi : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \phi = L^{-1} \circ T \circ L, T \in \mathbb{O}(n+2,2), PT = P\}.$$

Proposição 9. *Qualquer transformação de Laguerre* $\phi : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ *preserva esferas orientadas e hiperplanos orientados.*

Demonstração. Seja $T \in L\mathbb{G}$ uma transformação de Laguerre. Então, $T : \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\} \longrightarrow \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$, $T \in \mathbb{O}(n+2,2)$ e $PT = P$. Considere $\Gamma \in \sum$ uma esfera orientada com coordenadas esférica $[\gamma] \in \mathbb{Q}^{n+2} \setminus \{[P]\}$. Note que $[\gamma] \in \Lambda^{2n+1}$. Então,

$$\langle \gamma T, P \rangle = \langle \gamma T, \gamma P \rangle = \langle \gamma, P \rangle. \tag{1.37}$$

No caso de Γ ser uma esfera orientada, segue do Corolário 4 que

$$\langle \gamma, P \rangle \neq 0. \tag{1.38}$$

Então, por (1.37) e (1.38) temos

$$\langle \gamma T, P \rangle \neq 0.$$

Logo, $T([\gamma]) = [\gamma T]$ é a coordenada esférica de uma esfera orientada. Portanto, $\phi(\Gamma) \in \sum$ continua sendo uma esfera orientada. O caso em que Γ é um hiperplano orientado é análogo. $\square$

No que segue, vamos determinar a matriz que representa uma transformação $T \in L\mathbb{G}$. Como $T \in L\mathbb{G}$ temos que $PT = P$, onde $[P] = [(1,-1,\vec{0},0)]$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ então, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n+4)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n+4)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n+4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+4)1} & a_{(n+4)2} & a_{(n+4)3} & \cdots & a_{(n+4)(n+4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} a_{11} = 1 + a_{21}, \\ a_{22} = 1 + a_{12}, \\ a_{1i} = a_{2i}, \quad i \geq 3. \end{cases}$$

Desta forma, T é reescrita como

$$T = \begin{bmatrix} 1+a_{21} & a_{12} & a & z \\ a_{21} & 1+a_{12} & a & z \\ b & c & A & u \\ a_{(n+4)1} & a_{(n+4)2} & v & w \end{bmatrix}_{(n+4)\times(n+4)}, \tag{1.39}$$

onde

$$a := \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1(n+3)} \end{bmatrix}_{1\times(n+1)}, \tag{1.40}$$

$$v := \begin{bmatrix} a_{(n+4)3} & a_{(n+4)4} & \dots & a_{(n+4)(n+3)} \end{bmatrix}_{1\times(n+1)}, \tag{1.41}$$

$$b := \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \\ \vdots \\ a_{(n+3)1} \end{bmatrix}_{(n+1)\times 1}, \quad c := \begin{bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \\ \vdots \\ a_{(n+3)2} \end{bmatrix}_{(n+1)\times 1}, \quad u := \begin{bmatrix} a_{3(n+4)} \\ a_{4(n+4)} \\ \vdots \\ a_{(n+3)(n+4)} \end{bmatrix}_{(n+1)\times 1}, \tag{1.42}$$

$$A := \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3(n+3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+3)3} & a_{(n+3)4} & \cdots & a_{(n+3)(n+3)} \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}, \quad z := a_{1(n+4)} \text{ e } w := a_{(n+4)(n+4)}.$$

Uma vez que $T \in L\mathbb{G}$, o fato de $T \in \mathbb{O}(n+2,2)$ significa que

$$T.T^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{(n+4)\times(n+4)}, \tag{1.43}$$

onde a matriz transposta de T é dada por

$$T^t = \begin{bmatrix} 1+a_{21} & a_{21} & b^t & a_{(n+4)1} \\ a_{12} & 1+a_{12} & c^t & a_{(n+4)2} \\ a^t & a^t & A^t & v^t \\ z & z & u^t & w \end{bmatrix}_{(n+4)\times(n+4)}. \tag{1.44}$$

O índice t é usado para denotar a matriz transposta das matrizes T, a, b, u, v e A.

Como as colunas e as linhas das matrizes T e T^t, dadas em (1.39) e (1.44), são pseudo-ortonormais na métrica (1.4) segue que,

$$-1-2a_{21}-a_{21}^2+a_{12}^2+a.a^t-z^2 \;=\; -1, \tag{1.45}$$

$$-a_{21}-a_{21}^2+a_{12}+a_{12}^2+a.a^t-z^2 \;=\; 0, \tag{1.46}$$

$$-a_{21}^2+1+2a_{12}+a_{12}^2+a.a^t-z^2 \;=\; 1. \tag{1.47}$$

Subtraindo a equação (1.45) da equação (1.46) temos,

$$a_{12} = -a_{21}.$$

Usando o resultado acima na equação (1.47) obtemos que,

$$a_{12} = \frac{-a.a^t+z^2}{2}. \tag{1.48}$$

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+4}\}$ uma base canônica para $\mathbb{R}_2^{n+4}$. Como $T \in L\mathbb{G}$ temos

$$\langle e_iT, P\rangle = \langle e_iT, PT\rangle = \langle e_i, P\rangle, \;\; 1 \le i \le n+4. \tag{1.49}$$

Então, considerando $3 \leq i \leq n+3$ em (1.49) segue por (1.39) que,

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle (b_{i-2}\ ,\ c_{i-2}\ ,\ A_{i-2}\ ,\ u_{i-2})\ ,\ (1,-1,0,0) \Big\rangle = 0 \\
&-b_{i-2} + c_{i-2} = 0,
\end{aligned}
$$

onde b_{i-2}, c_{i-2}, A_{i-2}, u_{i-2} são as $(i-2)$-ésima linhas das matrizes b , c , A e u. Logo,

$$
b_{i-2} = -c_{i-2},\ \ \forall\, 3 \leq i \leq n+3 \Rightarrow b = -c. \tag{1.50}
$$

Note que, considerando $i = n+4$ em (1.49) e usando (1.39) obtemos

$$
a_{(n+4)1} = -a_{(n+4)2}. \tag{1.51}
$$

Usando as equações (1.48), (1.50) e (1.51) podemos reescrever a matriz T dada em (1.39) como sendo,

$$
T = \begin{bmatrix}
1+\dfrac{a.a^t - z^2}{2} & \dfrac{-a.a^t + z^2}{2} & a & z \\
\dfrac{a.a^t - z^2}{2} & 1+\dfrac{z^2 - a.a^t}{2} & a & z \\
b & -b & A & u \\
a_{(n+4)1} & -a_{(n+4)1} & v & w
\end{bmatrix}_{(n+4)\times(n+4)} . \tag{1.52}
$$

Novamente, usando o fato que as linhas e as colunas da matriz T, dada em (1.52), são pseudo-ortonormais segue que,

$$
-b\left(\frac{a.a^t - z^2}{2}\right) - b\left(1+\frac{z^2 - a.a^t}{2}\right) + Aa^t - zu = 0 \Rightarrow b = Aa^t - zu,
$$

$$
-a_{(n+4)1}\left(\frac{a.a^t - z^2}{2}\right) - a_{(n+4)1}\left(1+\frac{z^2 - a.a^t}{2}\right) + va^t - zw = 0 \Rightarrow a_{(n+4)1} = va^t - zw.
$$

Portanto,

$$
T = \begin{bmatrix}
1+\dfrac{a.a^t - z^2}{2} & \dfrac{-a.a^t + z^2}{2} & a & z \\
\dfrac{a.a^t - z^2}{2} & 1+\dfrac{z^2 - a.a^t}{2} & a & z \\
Aa^t - zu & -Aa^t + zu & A & u \\
va^t - zw & -va^t + zw & v & w
\end{bmatrix}_{(n+4)\times(n+4)} , \tag{1.53}
$$

para alguma matriz

$$\begin{bmatrix} A & u \\ v & w \end{bmatrix} \in O(n+1,1),\ (a,z) \in \mathbb{R}^{n+2}, w \in \mathbb{R},$$

onde A, a, u, v, z e w são dadas como em (1.40), (1.41) e (1.42).

No que segue, vamos obter uma relação entre os elementos da matriz T que será usada na próxima seção. Considerando a matriz T, dada em (1.53) e usando novamente o fato (1.43) obtemos,

$$\begin{aligned} &\Big\langle (Aa^t - zu,\ -Aa^t + zu,\ A,\ u), (va^t - zw,\ -va^t + zw,\ v,\ w)\Big\rangle = 0 \Rightarrow Av^t = uw, \\ &\Big\langle (Aa^t - zu,\ -Aa^t + zu,\ A,\ u), (Aa^t - zu,\ -Aa^t + zu,\ A,\ u)\Big\rangle = I \Rightarrow uu^t = 0, \end{aligned} \tag{1.54}$$

onde I é a matriz identidade

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} . \tag{1.55}$$

1.3 Hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção introduzimos as hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ e o conceito de equivalência por transformações de Laguerre de duas hipersuperfícies orientadas, com curvaturas principais que não se anulam. Além disso, vamos definir a métrica de Laguerre g que será invariante por transformações de Laguerre.

Definição 10. Uma hipersuperfície $f = (x, \xi) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hipersuperfície de Laguerre*, se $\xi : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma imersão e se $dx \cdot \xi = 0$.

Com a finalidade de verificar que hipersuperfícies de Laguerre são preservadas por transformações de Laguerre, vamos obter algumas informações.

Sejam $(x, \xi) : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ imersão canônica, $\gamma_1 : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+4}_2$ e $\gamma_2 : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+4}_2$ dados em (1.27).

Considere $T \in L\mathbb{G}$ uma transformação de Laguerre e

$$\begin{aligned} \phi = L^{-1} \circ T \circ L: \quad U\mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1} && (1.56)\\ (x,\xi) &\mapsto \phi((x,\xi)) = (\tilde{x},\tilde{\xi}). && (1.57) \end{aligned}$$

Vamos obter expressões para $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$, associados a $\phi((x,\xi)) = (\tilde{x},\tilde{\xi})$, em termos de γ_1 e γ_2 associados a (x,ξ). Segue de (1.27) e (1.53) que

$$\begin{aligned} \gamma_1 T &= \left(\frac{1}{2}(1+a.a^t+|x|^2-z^2)+xAa^t-zxu\,,\,\frac{1}{2}(1-a.a^t-|x|^2+z^2)-xAa^t+zxu\,,\,a+xA\,,\,\overline{a}\right),\\ \gamma_2 T &= \left(x\cdot\xi+\xi Aa^t+va^t-z\overline{b}\,,\,-x\cdot\xi-\xi Aa^t-va^t+z\overline{b}\,,\,\xi A+v\,,\,\overline{b}\right), \end{aligned} \tag{1.58}$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{a} &= z+xu \in \mathbb{R},\\ \overline{b} &= \xi u+w \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Como vimos na seção 1.1, um ponto $(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in U\mathbb{R}^{n+1}$ determina um único feixe de esferas que tem contato orientado em $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ com o mesmo normal $\tilde{\xi}$. Com isso, $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ são coordenadas esféricas, dadas como em (1.27), do único ponto esférico $S(\tilde{x},0)$ e do único hiperplano orientado $P(\tilde{\xi},\tilde{x}\cdot\tilde{\xi})$ neste feixe, respectivamente. Assim,

$$\tilde{\gamma}_1 = \left(\frac{1}{2}(1+|\tilde{x}|^2),\frac{1}{2}(1-|\tilde{x}|^2),\tilde{x},0\right),\quad \tilde{\gamma}_2 = \left(\tilde{x}\cdot\tilde{\xi},-\tilde{x}\cdot\tilde{\xi},\tilde{\xi},1\right). \tag{1.60}$$

Então, a fim de expressar $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ na forma (1.60), utilizando as expressões (1.54), (1.58) e (1.59) obtemos a relação

$$\gamma_1 T - \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\gamma_2 T = \left(\frac{1}{2}(1+|\tilde{x}|^2),\frac{1}{2}(1-|\tilde{x}|^2),\tilde{x},0\right) = \tilde{\gamma}_1, \tag{1.61}$$

$$\frac{1}{\overline{b}}\gamma_2 T = \left(\tilde{x}\cdot\tilde{\xi},-\tilde{x}\cdot\tilde{\xi},\tilde{\xi},1\right) = \tilde{\gamma}_2, \tag{1.62}$$

em que

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi A+v}{\overline{b}},\quad \tilde{x} = a+xA-\overline{a}\tilde{\xi},$$

onde $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são dados como em (1.59).

Proposição 10. *Seja $f = (x,\xi) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Laguerre. Considerando qualquer transformação de Laguerre $\phi : U\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ dada como em* (1.56) *temos que* $\tilde{f} = \phi(f) = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ *também é uma hipersuperfície de Laguerre em* $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Usando as expressões dadas em (1.27) e o produto interno dado em (1.4), segue que são satisfeitas as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\begin{aligned}
&\langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0, \\
&\langle d\gamma_1, d\gamma_1 \rangle = dx \cdot dx, \quad \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle = d\xi \cdot d\xi, \\
&\langle d\gamma_1, \gamma_2 \rangle = dx \cdot \xi, \quad \langle d\gamma_2, \gamma_1 \rangle = d\xi \cdot x, \\
&\langle d\gamma_1, \gamma_1 \rangle = dx \cdot x, \quad \langle d\gamma_2, \gamma_2 \rangle = d\xi \cdot \xi = 0.
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Assim, por (1.61), (1.62) e (1.63) temos

$$d\tilde{x} \cdot \tilde{\xi} = \langle d\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \rangle = \left\langle d(\gamma_1 T - \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \gamma_2 T), \frac{1}{\overline{b}} \gamma_2 T \right\rangle = \frac{1}{\overline{b}} \langle d\gamma_1, \gamma_2 \rangle = \frac{1}{\overline{b}} dx \cdot \xi, \tag{1.64}$$

$$d\tilde{\xi} \cdot d\tilde{\xi} = \langle d\tilde{\gamma}_2, d\tilde{\gamma}_2 \rangle = \frac{1}{\overline{b}^2} \langle d\gamma_2, d\gamma_2 \rangle = \frac{1}{\overline{b}^2} d\xi \cdot d\xi. \tag{1.65}$$

Portanto, dada uma hipersuperfície de Laguerre $f = (x, \xi) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$, segue de (1.64) e (1.65) que $\tilde{f} = \phi(f) = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ também é uma hipersuperfície de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$. □

Note que, as esferas e os hiperplanos orientados definidos por (1.2) e (1.3) são hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada com curvaturas principais que não se anulam. Então, a aplicação normal $\xi : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma imersão. Assim, $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induz unicamente uma hipersuperfície de Laguerre $f = (x, \xi) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$. Note que, dada uma hipersuperfície de Laguerre $f = (x, \xi) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$, a aplicação $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ pode não ser uma imersão. No entanto, Pinkall [24] mostrou que a transformação paralela $f_t = (x + t\xi, \xi)$ de f é uma imersão em qualquer ponto $p \in M^n$ para quase todo $t \in \mathbb{R}$. Nesse sentido, podemos assumir que $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão.

Definição 11. Sejam $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam. Dizemos que x e $\tilde{x}$ são *equivalentes por transformações de Laguerre (Laguerre equivalentes)*, se as hipersuperfícies de Laguerre correspondentes $f = (x, \xi)$, $\tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ são diferentes apenas por uma transformação de Laguerre, isto é, $\tilde{f} = \phi \circ f$, onde $\phi = L^{-1} \circ T \circ L$, $T \in L\mathbb{G}$ e L é dado por (1.30).

Na geometria diferencial de Laguerre são estudadas as propriedades de hipersuperfícies de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$ que são invariantes pelo grupo das transformações de Laguerre em $U\mathbb{R}^{n+1}$.

No que segue, apresentamos um critério para que hipersuperfícies orientadas sejam equivalentes por transformações de Laguerre. Em seguida, utilizamos esse resultado para mostrar que a métrica de Laguerre é um invariante de Laguerre.

Seja $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada com normal unitário ξ. Considere

$$[y] : M^n \longrightarrow \mathbb{Q}^{n+2}, \ y = (x\cdot\xi, -x\cdot\xi, \xi, 1). \tag{1.66}$$

Teorema 9. *Sejam $x, x^* : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam e $[y]$ e $[y^*]$ as aplicações correspondentes dadas por* (1.66). *Então x e x^* são equivalentes por transformações de Laguerre se, e somente se, existe $T \in L\mathbb{G}$ tal que $[y^*] = [yT]$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $x, x^* : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ são duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam. Suponha que x e $\tilde{x}$ são equivalentes por transformações de Laguerre. Então, pela Definição 11, as hipersuperfícies de Laguerre correspondentes $f = (x, \xi),\ f^* = (x^*, \xi^*) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ diferem apenas por uma transformação de Laguerre, isto é, existe $T \in \mathbb{G}$ tal que $f^* = \phi \circ f$, onde $\phi = L^{-1} \circ T \circ L$, $\phi(x, \xi) = (x^*, \xi^*)$ e L é dado por (1.30). Como $y = (x\cdot\xi, -x\cdot\xi, \xi, 1) = \gamma_2$, segue de (1.62) que $[y^*] = [yT]$.

Reciprocamente, suponha que existe $T \in L\mathbb{G}$ tal que $[y^*] = [yT]$. Defina $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \phi(x, \xi)$ onde $\phi = L^{-1} \circ T \circ L$ e L é dado por (1.30), isto é, $f = (x, \xi),\ \tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ são hipersuperfícies de Laguerre, associadas a $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, que diferem apenas por uma transformação de Laguerre ϕ, ou seja, $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ são equivalentes por transformações de Laguerre. Resta agora mostrar que $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = (x^*, \xi^*)$, onde $f^* = (x^*, \xi^*) : M^n \longrightarrow U\mathbb{R}^{n+1}$ é a hipersuperfície de Laguerre associada a $x^* : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. De fato, por (1.62) e pela hipótese temos, $[\tilde{y}] = [yT] = [y^*]$. Então,

$$(\tilde{x}\cdot\tilde{\xi}, -\tilde{x}\cdot\tilde{\xi}, \tilde{\xi}, 1) = (x^*\cdot\xi^*, -x^*\cdot\xi^*, \xi^*, 1) \Rightarrow\ \tilde{x}\cdot\tilde{\xi} = x^*\cdot\xi^*,\ \ \tilde{\xi} = \xi^*. \tag{1.67}$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ uma base local para TM. Como $\xi^* : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma imersão temos que, $\{e_1(\xi^*), \ldots, e_n(\xi^*), \xi^*\}$ é uma base para $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, segue de (1.67) e da Definição

10 que

$$\begin{aligned} &d((\tilde{x}-x^*)\xi^*) = 0 \\ &d((\tilde{x}-x^*))\xi^* + (\tilde{x}-x^*)d\xi^* = 0 \\ &(\tilde{x}-x^*)d\xi^* = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{x} = x^*$. Portanto, $(x^*, \xi^*) = (\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \phi(x, \xi)$, o que implica que $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ são equivalentes por transformações de Laguerre. $\square$

Por (1.66) temos que $\langle dy, dy \rangle = d\xi \cdot d\xi = III$, que é chamada a *terceira forma fundamental de x*. Pelo Teorema 9, segue o seguinte corolário.

Corolário 10. *A classe conforme da terceira forma fundamental de uma hipersuperfície* $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *é um invariante de Laguerre.*

Demonstração. Sejam $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies orientadas com curvaturas principais que não se anulam. Considere $III = d\xi \cdot d\xi$ e $\tilde{III} = d\tilde{\xi} \cdot d\tilde{\xi}$ a terceira forma fundamental de x e $\tilde{x}$, respectivamente. Pelo, Teorema 9, x e $\tilde{x}$ são equivalentes por transformações de Laguerre se, e somente se, existe $T \in L\mathbb{G}$ tal que $[\tilde{y}] = [yT]$. Logo,

$$\langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle = \frac{1}{\overline{b}^2} \langle dyT, dyT \rangle = \frac{1}{\overline{b}^2} \langle dy, dy \rangle \Rightarrow \tilde{III} = \frac{1}{\overline{b}^2}(III).$$

Portanto, $[\tilde{III}] = [III]$. $\square$

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com curvaturas principais que não se anulam, com campo normal unitário $\xi : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ e $III = \langle dy, dy \rangle$ a terceira forma fundamental de x. Para qualquer base ortonormal $\{E'_1, \ldots, E'_n\}$ em relação a III definimos

$$\mathbb{V} = span\{y, \Delta_{III} y, E'_1(y), E'_2(y), \ldots, E'_n(y)\}, \tag{1.68}$$

onde Δ_{III} é o *operador Laplaciano em relação à III*.

Na proposição a seguir, vamos determinar as relações na métrica (1.4).

Proposição 11. *Sejam* $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície com curvaturas principais que não se anulam com normal unitário* ξ *e* y *como em* (1.66). *Considere* $III = \langle dy, dy \rangle$ *a terceira forma fundamental de* x *e* $\{E'_1, \ldots, E'_n\}$ *uma base ortonormal em relação a III. Então, os* *elementos de $\mathbb{V}$, definido em* (1.68)*, satisfazem as seguintes relações na métrica (1.4),*

$$\begin{aligned}
&\langle y,y\rangle = \langle y,E_i'(y)\rangle = \langle \Delta_{III}y,E_i'(y)\rangle = 0, \ \ \forall i = 1\dots,n,\\
&\langle y,\Delta_{III}y\rangle = -n,\\
&\langle E_i'(y),E_j'(y)\rangle = \delta_{ij}, \ \ \forall i,j = 1\dots,n.
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Demonstração. Pela ortogonalidade da base $\{E_1',\dots,E_n'\}$, temos $\langle E_i'(y),E_j'(y)\rangle = \delta_{ij}$. Então,

$$\langle E_i'(y),E_i'(y)\rangle = 1 \text{ e } \langle E_j'(E_i'(y)),E_i'(y)\rangle = 0. \tag{1.70}$$

Por (1.70) para $i = j$ segue que,

$$\langle \Delta_{III}y,E_i'(y)\rangle = \left\langle \sum_i E_i'(E_i'(y)),E_i'(y) \right\rangle = \sum_i \langle E_i'(E_i'(y)),E_i'(y)\rangle = 0. \tag{1.71}$$

Como $[y] \in \mathbb{Q}^{n+2}$ temos que

$$\langle y,y\rangle = 0 \ \text{ e } \ \langle E_i'(y),y\rangle = 0. \tag{1.72}$$

Além disso, usando (1.70) temos que

$$\langle E_i'(E_i'(y)),y\rangle + \langle E_i'(y),E_i'(y)\rangle = 0 \Rightarrow \langle E_i'(E_i'(y)),y\rangle = -1.$$

Então,

$$\langle \Delta_{III}y,y\rangle = \sum_i \langle E_i'(E_i'(y)),y\rangle = -n. \tag{1.73}$$

Reunindo as informações (1.71), (1.72) e (1.73) obtemos (1.69). □

Note que, em cada ponto de $\mathbb{V}$ temos um subespaço $(n+2)$-dimensional não degenerado em $\mathbb{R}_2^{n+4}$. Então, temos a seguinte decomposição ortogonal

$$\mathbb{R}_2^{n+4} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\perp = span\{y,\Delta_{III}y,E_1'(y),E_2'(y),\dots,E_n'(y)\} \oplus \mathbb{V}^\perp.$$

Isto é, $\mathbb{V}^\perp$ é um subespaço 2-dimensional não degenerado em $\mathbb{R}_2^{n+4}$.

Considere $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ uma base ortonormal com relação a métrica $dx \cdot dx$ para TM, consistindo de vetores principais unitários, isto é,

$$e_i(\xi) = -k_i e_i(x), \ \ 1 \leq i \leq n, \tag{1.74}$$

onde k_i é a curvatura principal que não se anula correspondente a e_i. Definimos

$$r_i = \frac{1}{k_i} \quad \text{e} \quad r = \frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{n}, \tag{1.75}$$

onde r_i é o *raio de curvatura* e r é o *raio de curvatura média* de x. Então a esfera de centro $x + r\xi$ e raio r, $S(x + r\xi, r)$, tem coordenadas esféricas dadas pela correspondência (1.19), e assim,

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{1}{2}(1 + |x + r\xi|^2 - r^2), \frac{1}{2}(1 - |x + r\xi|^2 + r^2), x + r\xi, r\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0\right) + r(x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1). \end{aligned} \tag{1.76}$$

A aplicação $\eta : M^n \longrightarrow C^{n+3} \subset \mathbb{R}^{n+4}_2$ definida por (1.76) é chamada *aplicação normal de Laguerre*, onde C^{n+3} é o cone de luz dado em (1.6).

No que segue, vamos verificar que o subespaço 2-dimensional $\mathbb{V}^\perp$ é $\mathbb{V}^\perp = span\{\eta, P\}$, onde $P = (1, -1, \vec{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+4}_2$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 12. *Nas mesmas condições da proposição anterior, temos que*

$$E_i' = r_i e_i, \ 1 \leq i \leq n, \tag{1.77}$$

onde $\{E_1', \ldots, E_n'\}$ *é a base ortonormal em relação a III considerada na proposição anterior e* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *a base ortonormal com relação a métrica* $dx \cdot dx$ *como em* (1.74)*. Então, valem as seguintes relações:*

$$E_i'(y) = (-x \cdot e_i(x), x \cdot e_i(x), -e_i(x), 0), \tag{1.78}$$

$$\langle E_i'(y), E_i'(y) \rangle = e_i(x) e_i(x), \tag{1.79}$$

$$E_i'(\eta) = (r - r_i) E_i'(y) + E_i'(r) y, \tag{1.80}$$

$$\langle y, E_i'(\eta) \rangle = 0, \quad \sum_i \langle E_i'(\eta), E_i'(\eta) \rangle = \sum_i (r - r_i)^2, \tag{1.81}$$

$$\langle y, \eta \rangle = 0, \tag{1.82}$$

$$\langle E_i'(y), \eta \rangle = 0, \tag{1.83}$$

$$\langle \Delta_{III} y, \eta \rangle = 0. \tag{1.84}$$

Além disso, definindo $\mathbb{V}$ *de acordo com* (1.68) *obtemos,*

$$\mathbb{V}^\perp = span\{\eta, P\}, \tag{1.85}$$

onde $P=(1,-1,\vec{0},0)\in\mathbb{R}_2^{n+4}$, $\vec{0}\in\mathbb{R}^{n+1}$ *e* η *é dado como em (1.76).*

Demonstração. Primeiramente, como $\{e_i\}$, $1\leq i\leq n$ é base ortonormal para TM com relação a $dx\cdot dx$ tal que $e_i(\xi)=-k_ie_i(x)$ temos,

$$\delta_{ij}=e_i(x)\cdot e_j(x)=r_ie_i(\xi)\cdot r_je_j(\xi),\ \ \forall i,j=1,\dots,n.$$

Logo, podemos escrever uma relação entre as bases ortonormais referentes a III e a $dx\cdot dx$ como em (1.77). Agora, observe que

$$e_i(x)\cdot\xi=-r_ie_i(\xi)\cdot\xi=-\frac{r_i}{2}(e_i(\xi\cdot\xi))=0. \tag{1.86}$$

A fim de verificar que $\mathbb{V}^{\perp}=span\{\eta,P\}$, vamos determinar algumas relações que também serão importantes para o desenvolvimento de cálculos do próximo capítulo.

Pelas equações (1.66), (1.74), (1.77) e (1.86) obtemos,

$$\begin{aligned}
E_i'(y)=r_ie_i(y) &= r_i(e_i(x)\cdot\xi+x\cdot e_i(\xi),-e_i(x)\cdot\xi-x\cdot e_i(\xi),e_i(\xi),0)\\
&= r_i(x\cdot e_i(\xi),-x\cdot e_i(\xi),e_i(\xi),0)\\
&= (-x\cdot e_i(x),x\cdot e_i(x),-e_i(x),0),
\end{aligned}$$

o que prova (1.78). Além disso, obtemos (1.79) já que,

$$\begin{aligned}
\langle E_i'(y),E_i'(y)\rangle &= \langle(-x.\cdot e_i(x),x\cdot e_i(x),-e_i(x),0),(-x\cdot e_i(x),x\cdot e_i(x),-e_i(x),0)\rangle\\
&= e_i(x)e_i(x).
\end{aligned}$$

Agora, por (1.76), (1.77) e (1.78) temos,

$$\begin{aligned}
E_i'(\eta)=r_ie_i(\eta) &= r_i\,(x\cdot e_i(x),-x\cdot e_i(x),e_i(x),0)+r_ie_i(r)y+rr_ie_i(y)\\
&= -r_iE_i'(y)+E_i'(r)y+rE_i'(y),
\end{aligned}$$

o que prova (1.80). Por (1.69) e (1.80) temos a prova de (1.81),

$$\langle y,E_i'(\eta)\rangle=0,\ \ \sum_i\langle E_i'(\eta),E_i'(\eta)\rangle=\sum_i(r-r_i)^2.$$

Reunindo as equações (1.66), (1.69), (1.76), (1.78) e (1.80) temos,

$$\langle y,\eta\rangle = \left\langle (x\cdot\xi, -x\cdot\xi, \xi, 1), \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right)\right\rangle + r\langle y,y\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}(x\cdot\xi)(1+|x|^2) - \frac{1}{2}(x\cdot\xi)(1-|x|^2) + x\cdot\xi = 0,$$

$$\langle E_i'(y),\eta\rangle = \left\langle (-x\cdot e_i(x), x\cdot e_i(x), -e_i(x), 0), \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right)\right\rangle + r\langle E_i'(y),y\rangle$$
$$= \frac{1}{2}(x\cdot e_i(x))(1+|x|^2) + \frac{1}{2}(x\cdot e_i(x))(1-|x|^2) - x\cdot e_i(x) = 0,$$

isto é, (1.82) e (1.83) se verificam. Segue de (1.83) que,

$$\langle E_i'(E_i'(y)),\eta\rangle + \langle E_i'(y), E_i'(\eta)\rangle = 0. \tag{1.87}$$

Utilizando (1.69), (1.79), (1.80) e (1.87), temos ainda

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_{III} y,\eta\rangle = \sum_i \langle E_i'(E_i'(y)),\eta\rangle &= -\sum_i \langle E_i'(y), E_i'(\eta)\rangle \\
&= -\sum_i \langle E_i'(y), (r-r_i)E_i'(y) + E_i'(r)y\rangle \\
&= -\sum_i (r-r_i)e_i(x)e_i(x) = 0,
\end{aligned}$$

o que prova (1.84). Logo, $\langle y,\eta\rangle = 0$, $\langle E_i'(y),\eta\rangle = 0$ e $\langle \Delta_{III} y,\eta\rangle = 0$. Portanto, $\eta \in \mathbb{V}^\perp$.

Seja $P = (1,-1,\vec{0},0) \in \mathbb{R}_2^{n+4}$, onde $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Segue de (1.66), (1.76) e (1.78) que,

$$\langle y,P\rangle = \langle E_i'(y),P\rangle = \langle \Delta_{III} y,P\rangle = 0, \tag{1.88}$$

$$\langle \eta,P\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right), (1,-1,\vec{0},0)\right\rangle + r\langle y,P\rangle = -1.$$

Portanto, $\mathbb{V}^\perp = span\{\eta, P\}$. □

Definição 12. Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com curvaturas principais que não se anulam e sem pontos umbílicos, com campo normal unitário ξ. Considere e $III = \langle dy, dy\rangle$ a terceira forma fundamental de x. A *métrica de Laguerre de x* é definida por,

$$g = \left(\sum_i (r-r_i)^2\right) III, \tag{1.89}$$

onde r_i e r são, respectivamente, os raios de curvatura e o raio de curvatura média de x dados em (1.75).

No que segue, vamos verificar que a métrica de Laguerre é um invariante de Laguerre.

Proposição 13. *Sejam $x, \tilde{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ duas hipersuperfícies orientadas, com curvaturas principais que não se anulam, equivalentes por transformações de Laguerre. A métrica de Laguerre, definida em* (1.89)*, é invariante de Laguerre em qualquer ponto não umbílico de x.*

Demonstração. Pelo Teorema 9 e pela relação (1.62) temos,

$$\tilde{y} = \frac{1}{\overline{b}} yT, \tag{1.90}$$

para algum $\overline{b} \neq 0$. Considere $III = d\xi \cdot d\xi = \langle dy, dy \rangle$ e $I\tilde{I}I = d\tilde{\xi} \cdot d\tilde{\xi} = \langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle$ a terceira forma fundamental de x e $\tilde{x}$, respectivamente. Então, pelo Corolário 10, temos que a terceira forma fundamental é um invariante de Laguerre, isto é,

$$I\tilde{I}I = \langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle = \frac{1}{\overline{b}^2} \langle dy, dy \rangle = \frac{1}{\overline{b}^2} III. \tag{1.91}$$

Além disso, $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}^{\perp}$ e η também são invariantes de Laguerre, ou seja,

$$\tilde{\mathbb{V}} = \mathbb{V}T, \ \tilde{\mathbb{V}^{\perp}} = \mathbb{V}^{\perp}T, \ \tilde{\eta} = \eta T. \tag{1.92}$$

Como $\{E'_1, \ldots, E'_n\}$ é uma base ortonormal para $III = \langle dy, dy \rangle$, temos que $\{\tilde{E'}_1, \ldots, \tilde{E'}_n\}$ é uma base ortonormal para $I\tilde{I}I = \langle d\tilde{y}, d\tilde{y} \rangle$, onde

$$\tilde{E'}_i = \overline{b} E'_i, \ 1 \leq i \leq n. \tag{1.93}$$

Então, por (1.92) e (1.93) obtemos,

$$\sum_i \langle \tilde{E'}_i(\tilde{\eta}), \tilde{E'}_i(\tilde{\eta}) \rangle = \overline{b}^2 \sum_i \langle E'_i(\eta), E'_i(\eta) \rangle. \tag{1.94}$$

Portanto, pela definição (1.89) e por (1.81), (1.91) e (1.94) temos,

$$
\begin{aligned}
\tilde{g} = \left(\sum_i (\tilde{r} - \tilde{r}_{ii})^2\right) I\tilde{I}I &= \left(\sum_i \langle \tilde{E}'{}_i(\tilde{\eta}), \tilde{E}'{}_i(\tilde{\eta})\rangle\right) I\tilde{I}I \\
&= \overline{b}^2 \sum_i \langle E_i'(\eta), E_i'(\eta)\rangle \frac{1}{\overline{b}^2} III \\
&= \left(\sum_i \langle E_i'(\eta), E_i'(\eta)\rangle\right) III \\
&= \left(\sum_i (r - r_i)^2\right) III = g,
\end{aligned}
$$

como queríamos. □

1.4 Geometria de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção, apresentamos alguns invariantes básicos de Laguerre para hipersuperfícies de Laguerre em $\mathbb{R}^{n+1}$, estudados pelos autores Li e Wang [16], tais como, a segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$, a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ e o tensor de Laguerre $\mathbb{L}$. Além disso, mostramos expressões que relacionam esses invariantes.

Vamos obter um referencial móvel e as equações de estrutura de uma hipersuperfície orientável $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, com curvaturas principais que não se anulam e sem pontos umbílicos, para a métrica invariante de Laguerre $g = \rho^2 d\xi \cdot d\xi$, onde $\xi : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é o campo normal unitário de x e

$$\rho^2 = \sum_i (r - r_i)^2. \tag{1.95}$$

Em seguida, obtemos três invariantes de Laguerre e algumas relações entre esses invariantes. Por invariantes de Laguerre entendemos como objetos invariantes por transformações de Laguerre.

Seja $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Definimos a aplicação

$$Y = \rho(x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1) : M^n \longrightarrow C^{n+3} \subset \mathbb{R}^{n+4}_2, \tag{1.96}$$

onde C^{n+3} é dado por (1.6) e $\rho = \sqrt{\sum_i (r - r_i)^2}$, como em (1.95). O vetor Y é denotado o *vetor posição de Laguerre da imersão* x sendo responsável por fazer a imersão da hipersuperfície x no cone de luz de $\mathbb{R}^{n+4}_2$.

Observe que ρ nunca se anula, pois x não possui pontos umbílicos. Além disso, podemos escrever

$$Y = \rho y, \tag{1.97}$$

onde $y = (x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1)$ dado em (1.66).

Utilizando o fato que $\langle dy, dy \rangle = d\xi \cdot d\xi = III$ e (1.97) temos por (1.89) que a métrica de Laguerre g é conforme à terceira forma fundamental

$$g = \langle dY, dY \rangle = \rho^2 d\xi \cdot d\xi. \tag{1.98}$$

A partir de agora, quando referirmos à métrica de Laguerre, estaremos considerando g dada pela expressão em (1.98).

Seja Δ_g o operador Laplaciano da métrica g, definimos

$$N = \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y, \Delta_g Y \rangle Y. \tag{1.99}$$

Sejam $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ campos tangentes a Y consistindo de uma base ortonormal na métrica g com base dual $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Em (1.77), consideramos $\{E'_1, E'_2, \dots, E'_n\}$ uma base ortonormal para $III = \langle dy, dy \rangle = d\xi \cdot d\xi$, onde os elementos dessa base podem ser escritos como $E'_i = r_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Dessa forma, obtemos uma relação entre os elementos da base referente à métrica g e os elementos da base ortonormal para III, ou seja, se $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ consiste de uma base ortonormal na métrica g, então

$$E_i = \rho^{-1} E'_i = \rho^{-1} r_i e_i, \ 1 \leq i \leq n. \tag{1.100}$$

Observação 11. A partir de agora, vamos usar a notação E_i, E'_i e e_i para referir as bases ortonormais com respeito as métricas g, $III = d\xi \cdot d\xi$ e $dx \cdot dx$, respectivamente. A relação entre essas bases é dada por meio da expressão (1.100).

Vamos agora determinar as relações satisfeitas na métrica (1.4).

Proposição 14. *Sejam $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere $P = (1, -1, \vec{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+4}$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$, η dado por* (1.76) *e Y como em* (1.96)*. Então, as seguintes relações na métrica (1.4) são* *satisfeitas,*

$$
\begin{aligned}
&\langle \Delta_g Y, E_i(Y)\rangle = 0,\ \langle Y, \Delta_g Y\rangle = -n,\ \langle E_i(Y), E_j(Y)\rangle = \delta_{ij},\\
&\langle Y, Y\rangle = \langle Y, E_i(Y)\rangle = 0,\ \langle Y, \eta\rangle = \langle Y, P\rangle = 0,\ \langle Y, N\rangle = -1,\\
&\langle N, N\rangle = 0,\ \langle N, \eta\rangle = \langle N, P\rangle = \langle N, E_i(Y)\rangle = 0,\\
&\langle \eta, \eta\rangle = \langle P, P\rangle = \langle \eta, E_i(Y)\rangle = 0,\ \langle \eta, P\rangle = -1.
\end{aligned} \tag{1.101}
$$

Demonstração. Por (1.72) e (1.97) temos,

$$
\langle Y, Y\rangle = \langle \rho y, \rho y\rangle = \rho^2\langle y, y\rangle = 0. \tag{1.102}
$$

Analogamente ao cálculos feitos para obter as relações dadas em (1.69) temos,

$$
\begin{aligned}
&\langle Y, E_i(Y)\rangle = \langle \Delta_g Y, E_i(Y)\rangle = 0,\\
&\langle Y, \Delta_g Y\rangle = -n,\\
&\langle E_i(Y), E_j(Y)\rangle = \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{1.103}
$$

Pelas equações (1.76) e (1.82), temos que

$$
\begin{aligned}
\langle \eta, \eta\rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right), \eta \right\rangle + r\langle y, \eta\rangle\\
&= \left\langle \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right), \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right) \right\rangle\\
&+ r\left\langle \left(\frac{1}{2}(1+|x|^2), \frac{1}{2}(1-|x|^2), x, 0\right), (x\cdot\xi, -x\cdot\xi, \xi, 1) \right\rangle\\
&= -\frac{1}{4}(1+|x|^2)^2 + \frac{1}{4}(1-|x|^2)^2 + x^2 + r\left(-\frac{x\cdot\xi(1+|x|^2)}{2} - \frac{x\cdot\xi(1-|x|^2)}{2} + x\cdot\xi\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Utilizando (1.99) e (1.103), segue que

$$\begin{aligned}
\langle N,N\rangle &= \left\langle \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle Y, \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle Y \right\rangle = \\
&= \frac{1}{n^2}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle - \frac{1}{n^3}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle n = 0, \\
\langle Y,N\rangle &= \left\langle Y, \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle Y \right\rangle = \frac{1}{n}\langle Y,\Delta_g Y\rangle = -1, \\
\langle N,E_i(Y)\rangle &= \left\langle \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle Y, E_i(Y) \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Por fim, vamos obter as últimas relações. Por (1.82), (1.88) e (1.97),

$$\langle Y,\eta\rangle = \rho\langle y,\eta\rangle = 0,$$

$$\langle Y,P\rangle = \rho\langle y,P\rangle = 0,$$

onde $P=(1,-1,\vec{0},0)\in\mathbb{R}^{n+4}$, $\vec{0}\in\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, utilizando que $\langle Y,P\rangle = 0$ e $\langle \Delta_g Y,P\rangle = 0$ temos,

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_g Y,P\rangle &= \langle \sum_i E_i(E_i(Y)),P\rangle = \sum_i \langle E_i(E_i(Y)),P\rangle = 0, \\
\langle N,P\rangle &= \left\langle \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle Y, P \right\rangle = \frac{1}{n}\langle \Delta_g Y,P\rangle + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y,\Delta_g Y\rangle\langle Y,P\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Segue de (1.82), (1.83), (1.97) e (1.100), que

$$\begin{aligned}
\langle E_i(Y),\eta\rangle &= \langle \rho^{-1}(yE_i'(\rho)+\rho E_i'(y)),\eta\rangle \\
&= \rho^{-1}E_i'(\rho)\langle y,\eta\rangle + \langle E_i'(y),\eta\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\langle E_i(E_i(Y)),\eta\rangle = -\langle E_i(Y),E_i(\eta)\rangle. \tag{1.104}$$

Logo, utilizando (1.81), (1.87), (1.84), (1.100) e (1.104) temos,

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta_g Y, \eta \rangle &= \sum_i \langle E_i(E_i(Y)), \eta \rangle \\
&= -\sum_i \langle E_i(Y), E_i(\eta) \rangle \\
&= -\sum_i \langle \rho^{-1}(yE_i'(\rho) + \rho E_i'(y)), \rho^{-1}E_i'(\eta) \rangle \\
&= -\rho^{-1} \sum_i \langle E_i'(y), E_i'(\eta) \rangle \\
&= \rho^{-1} \sum_i \langle E_i'(E_i'(y)), \eta \rangle \\
&= \rho^{-1} \langle \Delta_{III} y, \eta \rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, obtemos

$$\langle N, \eta \rangle = \left\langle \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y, \Delta_g Y \rangle Y, \eta \right\rangle = \frac{1}{n}\langle \Delta_g Y, \eta \rangle + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y, \Delta_g Y \rangle \langle Y, \eta \rangle = 0.$$

$\square$

Observe que, através das relações (1.101) obtidas na Proposição 14, temos a seguinte decomposição ortogonal

$$\mathbb{R}_2^{n+4} = span\{Y, N\} \oplus span\{E_1(Y), E_2(Y), \ldots, E_n(Y)\} \oplus \{\eta, P\}.$$

Chamamos $\{Y, N, E_1(Y), E_2(Y), \ldots, E_n(Y), \eta, P\}$ de *referencial móvel de Laguerre* em $\mathbb{R}_2^{n+4}$ de x. Considerando a diferencial exterior desse referencial temos,

$$
\begin{aligned}
&dY = \sum_i \omega_i E_i(Y), \\
&dN = \sum_i \psi_i E_i(Y) + \phi P, \\
&dE_i(Y) = \psi_i Y + \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} E_j(Y) + \beta_i P, \\
&d\eta = -\phi Y + \sum_i \beta_i E_i(Y),
\end{aligned}
\tag{1.105}
$$

onde $\{\psi_i, \omega_i, \omega_{ij}, \phi_i, \beta_i\}$ são 1-formas diferenciáveis em M^n com $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Queremos agora obter expressões para as formas diferenciáveis ψ_i, β_i, ϕ utilizando o Lema de Cartan.

Proposição 15. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere o referencial de La-*

guerre $\{Y,N,E_1(Y),E_2(Y),\ldots,E_n(Y),\eta,P\}$ *em* $\mathbb{R}^{n+4}_2$ *de* x *e as 1-formas diferenciáveis* $\{\psi_i,\omega_i,\omega_{ij},\phi_i,\beta_i\}$ *definidas em (1.105). Então, essas 1-formas satisfazem as equações de estrutura dadas a seguir,*

$$\begin{aligned}
&\sum_i \omega_i \wedge \psi_i = 0,\\
&\sum_i \omega_i \wedge \beta_i = 0,\\
&d\omega_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j = 0,\\
&d\psi_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \psi_j = 0,\\
&d\phi - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i = 0,\\
&d\beta_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j - \omega_i \wedge \phi = 0,\\
&d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

Demonstração. Considerando a derivada exterior da primeira equação de (1.105) e substituindo a terceira equação de (1.105) temos,

$$\begin{aligned}
0 &= d(dY) = \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge dE_i(Y)\\
&= \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \left(\psi_i Y + \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} E_j(Y) + \beta_i P\right)\\
&= \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P.
\end{aligned} \tag{1.107}$$

Realizando o produto interno de (1.107) com N e utilizando as relações de ortogonalidade (1.101) obtemos,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P, N \right\rangle\\
&= -\sum_i \omega_i \wedge \psi_i \langle Y,N\rangle\\
&= \sum_i \omega_i \wedge \psi_i.
\end{aligned}$$

Considerando o produto interno de (1.107) com η temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P, \eta \right\rangle \\
&= -\sum_i \omega_i \wedge \beta_i \langle P, \eta \rangle \\
&= \sum_i \omega_i \wedge \beta_i.
\end{aligned}$$

Realizando o produto interno de (1.107) com $E_i(Y)$ e usando as relações de ortogonalidade (1.101) segue que,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_i d\omega_i E_i(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \psi_i Y - \sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \omega_i \wedge \beta_i P, E_i(Y) \right\rangle \\
&= \sum_i d\omega_i \langle E_i(Y), E_i(Y) \rangle - \sum_{i,j} \omega_j \wedge \omega_{ji} \langle E_i(Y), E_i(Y) \rangle \\
&= d\omega_i - \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} \\
&= d\omega_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j.
\end{aligned}$$

Agora, efetuando a derivada exterior da segunda equação de (1.105) e substituindo a terceira equação de (1.105) temos,

$$\begin{aligned}
0 &= d(dN) = \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge dE_i(Y) + d\phi P \\
&= \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \left(\psi_i Y + \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} E_j(Y) + \beta_i P \right) + d\phi P \\
&= \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \omega_i N - \sum_{i,j} \psi_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i P + d\phi P. \quad (1.108)
\end{aligned}$$

Considerando, primeiramente, o produto interno de (1.108) com η e utilizando as relações de ortogonalidade (1.101) temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \omega_i N - \sum_{i,j} \psi_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i P + d\phi P, \eta \right\rangle \\
&= -\sum_i \psi_i \wedge \beta_i \langle P, \eta \rangle + d\phi \langle P, \eta \rangle \\
&= d\phi - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i.
\end{aligned}$$

Analogamente, considerando o produto interno de (1.108) com $E_i(Y)$ e usando as relações de ortogonalidade (1.101) obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_i d\psi_i E_i(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \omega_i N - \sum_{i,j} \psi_i \wedge \omega_{ij} E_j(Y) - \sum_i \psi_i \wedge \beta_i P + d\phi P, E_i(Y) \right\rangle \\ &= \sum_i d\psi_i \langle E_i(Y), E_i(Y)\rangle - \sum_{i,j} \psi_j \wedge \omega_{ji} \langle E_i(Y), E_i(Y)\rangle \\ &= d\psi_i - \sum_i \omega_{ij} \wedge \psi_j. \end{aligned}$$

Realizando a derivada exterior da terceira equação de (1.105) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= d(dE_i(Y)) = d\psi_i Y - \psi_i \wedge dY + d\omega_i N - \omega_i \wedge dN + \sum_i d\omega_{ij} E_i(Y) \\ &- \sum_i \omega_{ij} \wedge dE_i(Y) + d\beta_i P. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Substituindo as três primeiras equações de (1.105) em (1.109) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi_i Y - \sum_j \psi_i \wedge \omega_j E_j(Y) + d\omega_i N - \sum_j \omega_i \wedge \psi_j E_j(Y) - \omega_i \wedge \phi P + \sum_i d\omega_{ij} E_j(Y) \\ &- \sum_j \omega_{ij} \wedge \psi_j Y - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j N - \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j P + d\beta_i P - \sum_{jk} \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} E_k(Y). \end{aligned}$$

Em seguida fazendo o produto interno com η e $E_j(Y)$, utilizando as relações de ortogonalidade (1.101), temos

$$\begin{aligned} d\beta_i &- \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j - \omega_i \wedge \phi = 0, \\ d\omega_{ij} &- \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \psi_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \psi_j, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Note que $\{\omega_i\}$ é um conjunto de 1-formas linearmente independentes e pelas equações (1.106) temos $\sum_i \omega_i \wedge \psi_i = 0$ e $\sum_i \omega_i \wedge \beta_i = 0$. Então, pelo Lema de Cartan, podemos escrever

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_j L_{ij}\omega_j, \\ \beta_i &= \sum_j B_{ij}\omega_j, \\ \phi &= \sum_i C_i\omega_i, \end{aligned} \tag{1.110}$$

onde L_{ij}, B_{ij} e C_i são funções diferenciáveis em M^n, satisfazendo $L_{ij} = L_{ji}$ e $B_{ij} = B_{ji}$.

Definição 13. Definimos os tensores invariantes de Laguerre $\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ e $\mathbb{L} = \sum_{ij} L_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ denominados *tensor segunda forma fundamental de Laguerre* e *tensor de Laguerre*, respectivamente. Definimos também a forma $\mathbb{C} = \sum_i C_i\omega_i$ chamada *forma de Laguerre*.

Por (1.105) e (1.110) as equações de estrutura para o referencial $\{Y, N, E_1(Y), \ldots, E_n(Y), \eta, P\}$ são escritas por

$$\begin{aligned} E_i(N) &= \sum_j L_{ij}E_j(Y) + C_iP, \\ E_j(E_i(Y)) &= L_{ij}Y + \delta_{ij}N + \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k(Y) + B_{ij}P, \\ E_i(\eta) &= -C_iY + \sum_j B_{ij}E_j(Y), \end{aligned} \tag{1.111}$$

onde $\Gamma_{ij}^k = \omega_{ik}(E_j)$ são funções diferenciáveis definidas em M^n.

Conforme a primeira expressão de (A.1), dada no Apêndice A, as derivadas covariantes de primeira ordem dos tensores $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{L}$, e a forma de curvatura, com relação à métrica g, são dadas por,

$$\begin{aligned} dC_i + \sum_j C_j\omega_{ji} &= \sum_j C_{i,j}\omega_j, \\ dL_{ij} + \sum_k L_{ik}\omega_{kj} + \sum_k L_{kj}\omega_{ki} &= \sum_k L_{ij,k}\omega_k, \\ dB_{ij} + \sum_k B_{ik}\omega_{kj} + \sum_k B_{kj}\omega_{ki} &= \sum_k B_{ij,k}\omega_k, \\ d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \Omega_{ij} &= -\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l, \end{aligned} \tag{1.112}$$

onde Ω_{ij} é dita a *forma de curvatura* e as funções R_{ijkl} são as componentes do operador curvatura.

De acordo com a segunda expressão de (A.1), dada no Apêndice A, a expressão da derivada covariante de segunda ordem do tensor $\mathbb{B}$, é dada por,

$$dB_{ij,k}+\sum_l B_{lj,k}\omega_{li}+\sum_l B_{il,k}\omega_{lj}+\sum_l B_{ij,l}\omega_{lk}=\sum_l B_{ij,kl}\omega_l. \tag{1.113}$$

Além disso, a seguinte identidade de Ricci é satisfeita conforme vimos no Apêndice A,

$$B_{ij,kl}-B_{ij,lk}=\sum_m B_{mj}R_{mikl}+\sum_m B_{im}R_{mjkl}. \tag{1.114}$$

Observação 12. Uma observação muito importante que deve ser feita nesse momento é com relação a notação usada. Quando escrevemos, por exemplo, $B_{ij,k}$ não estamos nos referindo a derivadas parciais. Essa notação significa que estamos fazendo a derivada das componentes do tensor $\mathbb{B}$ no referencial na direção do campo E_k, onde a expressão dessa derivada no referencial é dada por (1.112).

No que segue, vamos obter relações entre os invariantes de Laguerre.

Proposição 16. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere as equações de estrutura de x, com relação à métrica de Laguerre g, dadas em (1.105). Fazendo a derivada exterior das equações dadas em (1.110), obtemos as seguintes relações entre estes invariantes:*

$$\begin{aligned}
&L_{ij,k}=L_{ik,j},\\
&C_{i,j}-C_{j,i}=\sum_k\left(B_{ki}L_{kj}-B_{jk}L_{ik}\right),\\
&B_{ij,k}-B_{ik,j}=C_j\delta_{ik}-C_k\delta_{ij},\\
&R_{ijkl}=L_{jk}\delta_{il}+L_{il}\delta_{jk}-L_{ik}\delta_{jl}-L_{jl}\delta_{ik},
\end{aligned} \tag{1.115}$$

onde R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica g.

Demonstração. Considerando a derivada exterior de ψ_i dado em (1.110) e utilizando a terceira equação de (1.106) temos

$$\begin{aligned}
d\psi_i=d\left(\sum_j L_{ij}\omega_j\right) &= \sum_j dL_{ij}\wedge\omega_j+\sum_j L_{ij}d\omega_j\\
&= \sum_j dL_{ij}\wedge\omega_j+\sum_k L_{ik}d\omega_k\\
&= \sum_j dL_{ij}\wedge\omega_j+\sum_{jk} L_{ik}\omega_{kj}\wedge\omega_j.
\end{aligned} \tag{1.116}$$

Substituindo $\psi_k = \sum_j L_{kj}\omega_j$ na quarta equação de (1.106), obtemos

$$d\psi_i = \sum_{ij} L_{kj}\omega_{ik}\wedge\omega_j. \tag{1.117}$$

Igualando as expressões (1.116) e (1.117) e utilizando (1.112) temos

$$\begin{aligned} \sum_{jk} L_{ij,k}\omega_k\wedge\omega_j &= 0\\ \sum_{j<k} L_{ij,k}\omega_k\wedge\omega_j + \sum_{j>k} L_{ij,k}\omega_k\wedge\omega_j &= 0\\ \sum_{j<k} L_{ij,k}\omega_k\wedge\omega_j - \sum_{k>j} L_{ik,j}\omega_k\wedge\omega_j &= 0. \end{aligned} \tag{1.118}$$

Como o conjunto $\{\omega_k\wedge\omega_j\}_{j<k}$ é L.I, segue de (1.118) que

$$L_{ij,k} = L_{ik,j}.$$

Considerando a derivada exterior de ϕ, dado em (1.110), utilizando a terceira equação de (1.106) e a primeira expressão de (1.112) temos

$$\begin{aligned} d\phi = d\left(\sum_i C_i\omega_i\right) &= \sum_i dC_i\wedge\omega_i + \sum_i C_i d\omega_i\\ &= \sum_i dC_i\wedge\omega_i + \sum_{ij} C_i\omega_{ij}\wedge\omega_j\\ &= \sum_i dC_i\wedge\omega_i + \sum_{ij} C_j\omega_{ji}\wedge\omega_i\\ &= \sum_{ij} C_{i,j}\omega_j\wedge\omega_i. \end{aligned} \tag{1.119}$$

Utilizando (1.110) na quinta equação de (1.106) segue que

$$\begin{aligned} d\phi &= \sum_k \psi_k\wedge\beta_k\\ &= -\sum_{ijk} B_{kj}L_{ki}\omega_j\wedge\omega_i. \end{aligned} \tag{1.120}$$

Igualando (1.119) com (1.120) e lembrando que $L_{ij} = L_{ji}$ e $B_{ij} = B_{ji}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{ij} C_{i,j}\omega_j \wedge \omega_i = -\sum_{ijk} B_{kj}L_{ki}\omega_j \wedge \omega_i \\
&\sum_{ij}\left(C_{i,j} + \sum_k B_{kj}L_{ki}\right)\omega_j \wedge \omega_i = 0 \\
&\sum_{i<j}\left(C_{i,j} + \sum_k B_{kj}L_{ki}\right)\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{i>j}\left(C_{i,j} + \sum_k B_{kj}L_{ki}\right)\omega_j \wedge \omega_i = 0 \\
&\sum_{i<j}\left(C_{i,j} + \sum_k B_{kj}L_{ki}\right)\omega_j \wedge \omega_i - \sum_{i<j}\left(C_{j,i} + \sum_k B_{ki}L_{kj}\right)\omega_j \wedge \omega_i = 0 \\
&\sum_{i<j}\left(C_{i,j} + \sum_k B_{kj}L_{ki}\right)\omega_j \wedge \omega_i = \sum_{i<j}\left(C_{j,i} + \sum_k B_{ki}L_{kj}\right)\omega_j \wedge \omega_i,
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
C_{i,j} + \sum_k B_{kj}L_{ki} &= C_{j,i} + \sum_k B_{ki}L_{kj} \\
C_{i,j} - C_{j,i} &= \sum_k B_{ki}L_{kj} - \sum_k B_{kj}L_{ki} \\
C_{i,j} - C_{j,i} &= \sum_k \left(B_{ki}L_{kj} - B_{jk}L_{ik}\right).
\end{aligned} \tag{1.121}
$$

Considere a derivada exterior de β_i, dado em (1.110), utilizando a terceira equação de (1.106) segue

$$
\begin{aligned}
d\beta_i = d\left(\sum_j B_{ij}\omega_j\right) &= \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_j B_{ij}d\omega_j \\
&= \sum_j dB_{ij} \wedge \omega_j + \sum_{jk} B_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k.
\end{aligned} \tag{1.122}
$$

Substituindo as expressões de ϕ e β na sexta equação de (1.106) temos

$$
\begin{aligned}
d\beta_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \beta_j + \omega_i \wedge \phi \\
&= \sum_{jk} B_{jk}\omega_{ij} \wedge \omega_k + \sum_k C_k\omega_i \wedge \omega_k.
\end{aligned} \tag{1.123}
$$

Igualando (1.122) e (1.123) usando (1.112) obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_j dB_{ij}\wedge\omega_j+\sum_{jk}B_{ij}\omega_{jk}\wedge\omega_k=\sum_{jk}B_{jk}\omega_{ij}\wedge\omega_k+\sum_k C_k\omega_i\wedge\omega_k\\
&\sum_j dB_{ij}\wedge\omega_j+\sum_{kj}B_{ik}\omega_{kj}\wedge\omega_j-\sum_{kj}B_{kj}\omega_{ik}\wedge\omega_j=\sum_k C_k\omega_i\wedge\omega_k\\
&\sum_j dB_{ij}\wedge\omega_j+\sum_{jk}B_{ik}\omega_{kj}\wedge\omega_j+\sum_{jk}B_{kj}\omega_{ki}\wedge\omega_j=\sum_k C_k\omega_i\wedge\omega_k\\
&\sum_{jk}B_{ij,k}\omega_k\wedge\omega_j=\sum_k C_k\omega_i\wedge\omega_k\\
&\sum_{jk}\left(-B_{ij,k}-C_k\delta_{ij}\right)\omega_j\wedge\omega_k=0\\
&\sum_{j<k}\left(-B_{ij,k}-C_k\delta_{ij}\right)\omega_j\wedge\omega_k+\sum_{j>k}\left(-B_{ij,k}-C_k\delta_{ij}\right)\omega_j\wedge\omega_k=0\\
&\sum_{j<k}\left(-B_{ij,k}-C_k\delta_{ij}\right)\omega_j\wedge\omega_k=\sum_{k>j}\left(-B_{ik,j}-C_j\delta_{ik}\right)\omega_j\wedge\omega_k.
\end{aligned}$$

Então, usando um argumento análogo ao usado em (1.121) segue que

$$\begin{aligned}
-B_{ij,k}-C_k\delta_{ij} &= -B_{ik,j}-C_j\delta_{ik}\\
B_{ij,k}-B_{ik,j} &= C_j\delta_{ik}-C_k\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Por fim, vamos obter a última relação entre esses invariantes. Igualando a expressão do tensor de curvatura dada em (1.112) com a última equação de (1.106) e substituindo $\psi_i=\sum_j L_{ij}\omega_j$ temos

$$\begin{aligned}
d\omega_{ij}-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj} &= \psi_i\wedge\omega_j+\omega_i\wedge\psi_j\\
-\sum_{k<l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l &= \psi_i\wedge\omega_j+\omega_i\wedge\psi_j\\
-\sum_{k<l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l &= \sum_k L_{ik}\omega_k\wedge\omega_j+\sum_k L_{jk}\omega_i\wedge\omega_k\\
-\sum_{k<l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l &= \sum_{kl}L_{ik}\delta_{jl}\omega_k\wedge\omega_l-\sum_{kl}L_{jk}\delta_{il}\omega_k\wedge\omega_l.
\end{aligned}$$

Usando um argumento similar ao usado em (1.121) obtemos

$$
\begin{aligned}
-\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l &= \sum_{kl} L_{ik}\delta_{jl}\omega_k\wedge\omega_l + \sum_{kl} L_{jk}\delta_{il}\omega_l\wedge\omega_k\\
-\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l &= \sum_{k<l} L_{ik}\delta_{jl}\omega_k\wedge\omega_l + \sum_{l>k} L_{il}\delta_{jk}\omega_l\wedge\omega_k - \sum_{k<l} L_{jk}\delta_{il}\omega_k\wedge\omega_l\\
&- \sum_{l>k} L_{jl}\delta_{ik}\omega_l\wedge\omega_k\\
-\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l &= \sum_{k<l}\left(L_{ik}\delta_{jl} - L_{il}\delta_{jk} - L_{jk}\delta_{il} + L_{jl}\delta_{ik}\right)\omega_k\wedge\omega_l.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}.$$

Portanto, obtemos as relações (1.115), como queríamos. □

Na proposição seguinte, apresentamos algumas identidades satisfeitas pelos invariantes de Laguerre da imersão x.

Proposição 17. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável, sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Considere as equações de estrutura de x, com relação à métrica de Laguerre g, dadas em (1.105). As seguintes identidades são satisfeitas:*

$$\sum_{ij} B_{ij}^2 = 1,\ \sum_i B_{ii} = 0,\ \sum_i L_{ii} = -\frac{1}{2n}\langle\Delta_g Y, \Delta_g Y\rangle,\quad \sum_i B_{ij,i} = (n-1)C_j. \tag{1.124}$$

Demonstração. De fato, pelas equações de estrutura (1.111) e as relações de ortogonalidade (1.101) temos

$$
\begin{aligned}
\langle E_i(\eta), E_i(\eta)\rangle &= \langle -C_iY + \sum_j B_{ij}E_j(Y), -C_iY + \sum_j B_{ij}E_j(Y)\rangle\\
&= \langle \sum_j B_{ij}E_j(Y), \sum_j B_{ij}E_j(Y)\rangle\\
&= \sum_j (B_{ij})^2.
\end{aligned} \tag{1.125}
$$

Substituindo (1.81) e (1.100) em (1.125) segue

$$
\begin{aligned}
\sum_{ij}(B_{ij})^2 &= \sum_i \langle E_i(\eta), E_i(\eta)\rangle\\
&= \rho^{-2}\sum_i \langle E_i'(\eta), E_i'(\eta)\rangle\\
&= \rho^{-2}\sum_i (r - r_i)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Da terceira equação de (1.111), temos que o operador Laplaciano Δ_g do vetor posição Y de x, com relação à métrica g, é dado por

$$\Delta_g Y = \sum_i E_i(E_i(Y)) = \sum_i L_{ii} Y + nN + \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k E_k(Y) + \sum_i B_{ii} P. \tag{1.126}$$

Como $\langle \Delta_g Y, E_k(Y) \rangle = 0$, segue de (1.126) que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Delta_g Y, E_k(Y) \rangle = \left\langle \sum_i L_{ii} Y + \sum_i \delta_{ii} N + \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k E_k(Y) + \sum_i B_{ii} P, E_k(Y) \right\rangle \\ &= \sum_i L_{ii} \langle Y, E_k(Y) \rangle + n \langle N, E_k(Y) \rangle + \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k \langle E_k(Y), E_k(Y) \rangle + \sum_i B_{ii} \langle P, E_k(Y) \rangle \\ &= \sum_{ik} \Gamma_{ii}^k. \end{aligned}$$

Então,

$$\Delta_g Y = \sum_i E_i(E_i(Y)) = \sum_i L_{ii} Y + nN + \sum_i B_{ii} P. \tag{1.127}$$

Considerando o produto interno de (1.127) com $\Delta_g Y$, usando a definição de N e as relações de ortogonalidade temos,

$$\begin{aligned} \langle \Delta_g Y, \Delta_g Y \rangle &= \left\langle \sum_i L_{ii} Y, \Delta_g Y \right\rangle + \langle nN, \Delta_g Y \rangle \\ &= -\sum_i L_{ii} n + \frac{\langle \Delta_g Y, \Delta_g Y \rangle}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_i L_{ii} = \frac{-1}{2n} \langle \Delta_g Y, \Delta_g Y \rangle. \tag{1.128}$$

Fazendo o produto interno de (1.127) e usando que $\langle \Delta_g Y, \eta \rangle = 0$, e as demais relações de ortogonalidade (1.101), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Delta_g Y, \eta \rangle = \left\langle \sum_i E_i(E_i(Y)), \eta \right\rangle = \left\langle \sum_i L_{ii} Y + nN + \sum_i B_{ii} P, \eta \right\rangle \\ &= -\sum_i B_{ii}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_i B_{ii} = 0. \tag{1.129}$$

Por fim, pela relação $B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}$ e usando (1.129) temos,

$$\sum_{ik}(B_{ij,k} - B_{ik,j}) = \sum_{ik}(C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij})$$
$$\sum_{i}(B_{ij,i} - B_{ii,j}) = \sum_{i}(C_j\delta_{ii} - C_i\delta_{ij})$$
$$\sum_{i} B_{ij,i} = nC_j - \sum_{i} C_i\delta_{ij}$$
$$\sum_{i} B_{ij,i} = (n-1)C_j.$$

□

A seguir, vamos obter relações entre os invariantes de Laguerre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ e os invariantes Euclidianos de $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 18. *Considere $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$, uma base ortonormal com relação a métrica $dx \cdot dx$ para TM, consistindo de vetores principais unitários, isto é, $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, onde k_i é a curvatura principal correspondente a e_i. Seja $E_i' = r_i e_i$, $1 \leq i \leq n$ base ortonormal para $d\xi \cdot d\xi$. Além disso, os campos $E_i = \rho^{-1}E_i'$, $1 \leq i \leq n$, formam uma base ortonormal na métrica de Laguerre $g = \rho^2 d\xi \cdot d\xi$ com base dual ω_i. Então, as seguintes igualdades se verificam*

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \rho^{-1}(r - r_i)\delta_{ij}, \\ C_i &= -\rho^{-2} r_i\{e_i(r) - (r - r_i)e_i(log\rho)\}. \end{aligned} \tag{1.130}$$

Demonstração. Temos de (1.101) e (1.111) que

$$B_{ij} = \langle E_i(\eta), E_j(Y)\rangle, \; C_i = \langle E_i(\eta), N\rangle. \tag{1.131}$$

Como $E_i = \rho^{-1}E'_i$, $1 \leq i \leq n$ e $Y = \rho y$, usando (1.69), (1.79) e (1.80) temos

$$\begin{array}{rcl} B_{ij} & = & \langle E_i(\eta), E_j(Y)\rangle \\ & = & \rho^{-2}\langle E'_i(\eta), E'_j(\rho y)\rangle \\ & = & \rho^{-2}\left\langle \left((r-r_i)E'_i(y)+E'_i(r)y\right), \left(\rho E'_j(y)+E'_j(\rho)y\right)\right\rangle \\ & = & \rho^{-2}[(r-r_i)\rho\langle E'_i(y), E'_j(y)\rangle + (r-r_i)E'_j(\rho)\langle E'_i(y), y\rangle + \\ & + & E'_i(r)\rho\langle y, E'_j(y)\rangle + E'_j(\rho)E'_i(r)\langle y, y\rangle] \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)\langle E'_i(y), E'_j(y)\rangle \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)e_i(x)e_j(x) \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)\delta_{ij}. \end{array}$$

No que segue, vamos determinar a expressão de C_i. Usando que $E_i = \rho^{-1}E'_i$, $E'_i = r_ie_i$, $1 \leq i \leq n, \quad Y = \rho y \quad$ e $\quad$ (1.80) temos

$$\begin{array}{rcl} E_i(\eta) & = & \rho^{-1}E'_i(\eta) = \rho^{-1}\left((r-r_i)E'_i(y)+E'_i(r)y\right) \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)r_ie_i(y)+\rho^{-1}r_ie_i(r)y \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)r_ie_i\left(\dfrac{Y}{\rho}\right)+\rho^{-1}r_ie_i(r)\dfrac{Y}{\rho} \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)r_i\left(\dfrac{e_i(Y)\rho - Ye_i(\rho)}{\rho^2}\right)+\rho^{-2}r_ie_i(r)Y \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)r_i(e_i(Y)\rho^{-1}-\rho^{-1}Y\rho^{-1}e_i(\rho))+\rho^{-2}r_ie_i(r)Y \\ & = & \rho^{-2}(r-r_i)r_ie_i(Y)-\rho^{-2}(r-r_i)r_ie_i(log\rho)Y+\rho^{-2}r_ie_i(r)Y \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)E_i(Y)-\rho^{-2}(r-r_i)r_ie_i(log\rho)Y+\rho^{-2}r_ie_i(r)Y. \end{array} \tag{1.132}$$

Segue das relações de ortogonalidade (1.101) e (1.132) que

$$\begin{array}{rcl} C_i & = & \langle E_i(\eta), N\rangle \\ & = & \langle \rho^{-1}(r-r_i)E_i(Y)-\rho^{-2}(r-r_i)r_ie_i(log\rho)Y+\rho^{-2}r_ie_i(r)Y, N\rangle \\ & = & \rho^{-1}(r-r_i)\langle E_i(Y), N\rangle - \rho^{-2}(r-r_i)r_ie_i(log\rho)\langle Y, N\rangle + \rho^{-2}r_ie_i(r)\langle Y, N\rangle \\ & = & -\rho^{-2}r_i\left(e_i(r)-(r-r_i)e_i(log\rho)\right). \end{array}$$

$\square$

Observação 13. Nas condições da Proposição 18 temos também uma expressão que relaciona o invariante de Laguerre L_{ij} e os invariantes Euclidianos

$$L_{ij} = \rho^{-2}\left\{(Hess_{ij}(log\rho))_{III} - r_i r_j e_i(log\rho)e_j(log\rho) + \frac{1}{2}\left(|\nabla_{III}log\rho|^2 - 1\right)\delta_{ij}\right\}, \quad (1.133)$$

onde $Hess_{ij}$ e ∇_{III} são respectivamente o elemento ij da matriz hessiana e o gradiente com respeito a terceira forma fundamental $III = d\xi.d\xi$ de x.

Para finalizarmos esta seção vamos definir curvatura de Laguerre e observar que esse conceito é também um invariante de Laguerre.

Denotamos os autovalores do operador da segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$ por curvaturas principais de Laguerre de x. Então, por (1.130), as *curvaturas principais de Laguerre* são

$$b_i = \rho^{-1}(r - r_i). \quad (1.134)$$

Definição 14. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Para quaisquer três curvaturas principais k_i, k_j e k_l, distintas, definimos*

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{(k_i - k_j)k_l}{(k_l - k_j)k_i} \quad (1.135)$$

como sendo a curvatura de Laguerre de x.

Para cada curvatura principal que não se anula, seja $r_i = \dfrac{1}{k_i}$ o raio de curvatura de x. Desta forma, podemos escrever as curvaturas de Laguerre de x como:

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j}. \quad (1.136)$$

Consequentemente, substituindo (1.134) em (1.136) temos,

$$\mathcal{L}^{ijl} = \frac{r_i - r_j}{r_l - r_j} = \frac{b_i - b_j}{b_l - b_j}. \quad (1.137)$$

Portanto, temos que as curvaturas de Laguerre $\mathcal{L}^{ijl}$ são invariantes de Laguerre.

Capítulo 2

Hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$

Neste capítulo iniciamos introduzindo o conceito de hipersuperfícies L-isotrópica (Laguerre isotrópicas) em $\mathbb{R}^{n+1}$, apresentamos as expressões da geometria de Laguerre para essa classe de hipersuperfícies e obtemos alguns resultados. Vamos definir também hipersuperfícies L-isoparamétricas (Laguerre isoparamétricas) em $\mathbb{R}^{n+1}$ e, motivados pelo teorema de classificação proposto por Shu, S. [30], estudamos as hipersuperfícies que são L-isotrópicas e L-isoparamétricas em $\mathbb{R}^{n+1}$, simultaneamente. Concluímos este capítulo apresentando o nosso resultado principal, que é um teorema rigidez das hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizadas por linha de curvatura.

Com a finalidade de deixar claro que estamos tratando do caso Laguerre vamos utilizar a notação hipersuperfície L-isotrópica e hipersuperfícies L-isoparamétricas. Nas referências é comum aparecer a notação hipersuperfície isotrópica de Laguerre e hipersuperfícies isoparamétricas de Laguerre ou simplesmente hipersuperfície isotrópica e hipersuperfícies isoparamétricas.

2.1 Hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção, vamos definir hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e aplicar a teoria da Geometria de Laguerre vista no capítulo anterior para essas hipersuperfícies. Na sequência, vamos apresentar alguns resultados importantes provados por Li, T.; Li, H.; Wang, C. em [13]. Fazendo uso desses resultados, vamos verificar que a função ρ^2, definida em termos dos raios de curvatura da imersão x (ver (3)), é limitada superiormente por $\frac{1}{2\lambda}$, onde λ é o valor comum aos autovalores do tensor de Laguerre $\mathbb{L}$. Finalizamos a seção apresentando um exemplo importante, já conhecido, de hipersuperfícies L-isotrópicas.

Definição 15. Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Dizemos que x é uma *hipersuperfície L-isotrópica* se a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ é nula e os autovalores do tensor de Laguerre $\mathbb{L}$ forem todos iguais a uma constante, isto é, $\mathbb{L} = \sum_{ij} L_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$, onde $L_{ij} = \lambda\delta_{ij}$.

No que segue, vamos aplicar a teoria da Geometria de Laguerre para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ do capítulo anterior restrita às hipersuperfícies L-isotrópicas.

Considere $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam e $\xi : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ o campo normal unitário de x. Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal para TM com relação a $dx \cdot dx$ formada por vetores principais, isto é, $e_i(\xi) = -k_i e_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, onde $-k_i$ é o autovalor correspondente a e_i. Definimos,

$$r_i = \frac{1}{k_i}, \ \ r = \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}, \ \ \rho^2 = \sum_i (r - r_i)^2, \tag{2.1}$$

onde r_i são os raios de curvatura, r o raio de curvatura média de x e ρ uma função suave em M. Note que, $r_i \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\rho > 0$.
Fazendo uso da Proposição 16 sabemos que

$$C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k \left(B_{ki}L_{kj} - B_{jk}L_{ik}\right). \tag{2.2}$$

A partir de agora, suponha que x é uma hipersuperfície L-isotrópica. Por definição, o tensor $\mathbb{L}$ é diagonalizável com todos autovalores iguais a uma constante. Além disso, $C_i = 0$, para todo $i = 1 \ldots, n$. Então, segue de (2.2) que,

$$\sum_k \left(B_{ki}L_{kj} - B_{jk}L_{ik}\right) = 0, \tag{2.3}$$

isto é, os tensores $\mathbb{B}$ e $\mathbb{L}$ comutam. Dessa forma, podemos considerar um referencial ortonormal $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ com respeito a métrica g que diagonalize os tensores $\mathbb{B}$ e $\mathbb{L}$ simultaneamente, isto é,

$$B_{ij} = b_i\delta_{ij}, \qquad L_{ij} = \lambda\delta_{ij} \quad \forall i, j = 1 \ldots, n, \tag{2.4}$$

onde b_i são as curvaturas principais de Laguerre de x.

Substituindo (2.4) e o fato de $C_i = 0$ nas equações dadas em (1.111) temos,

$$\begin{cases} E_i(N) = \lambda E_i(Y), \\ \\ E_j(E_i(Y)) = \lambda \delta_{ij} Y + \delta_{ij} N + \sum\limits_k \Gamma_{ij}^k E_k(Y) + b_i \delta_{ij} P, \quad i, j = 1 \ldots, n \\ \\ E_i(\eta) = b_i E_i(Y), \end{cases} \tag{2.5}$$

onde Y, N, η e P são vetores em $\mathbb{R}_2^{n+4}$ definidos por,

$$Y = \rho(x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1), \tag{2.6}$$
$$N = \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle \Delta_g Y, \Delta_g Y \rangle Y, \tag{2.7}$$
$$\eta = \left(\frac{1}{2}(1 + |x|^2), \frac{1}{2}(1 - |x|^2), x, 0 \right) + r(x \cdot \xi, -x \cdot \xi, \xi, 1), \tag{2.8}$$
$$P = (1, -1, 0, \vec{0}, 0), \;\; \vec{0} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.9}$$

Por meio da Proposição 18 obtemos relações entre os invariantes Euclidianos da imersão x e os invariantes de Laguerre B_{ij} e C_i. Como $r_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\rho > 0$, usando o fato que $C_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, as expressões de (1.130) se reduzem a,

$$b_i = \rho^{-1}(r - r_i), \tag{2.10}$$

$$e_i(r) - (r - r_i)e_i(log\rho) = 0, \;\; \forall i = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Além disso, pela definição de hipersuperfície L-isotrópica segue de (2.4), isto é, $L_{ij} = \lambda \delta_{ij}$, que a equação (1.133), para todo $i, j = 1, \ldots, n$, é dada por,

$$(Hess_{ij}(log\rho))_{III} - r_i r_j e_i(log\rho) e_j(log\rho) + \frac{1}{2}\left(|\nabla_{III} log\rho|^2 - 1 \right) \delta_{ij} = \lambda \rho^2 \delta_{ij}, \tag{2.12}$$

onde $Hess_{ij}$ e ∇_{III} são respectivamente o elemento ij da matriz hessiana e o gradiente com respeito a terceira forma fundamental $III = d\xi \cdot d\xi$ de x.

Uma informação importante que é pertinente frisar nesse momento, é a relação entre as bases ortonormais $\{E_i\}$, $\{E_i'\}$, $\{e_i\}$ com respeito as métricas g, III e $dx \cdot dx$, respectivamente.

A base ortonormal $\{E_1,\ldots,E_n\}$ com respeito à métrica de Laguerre g se relaciona com a base ortonormal referente à *III* por meio da seguinte expressão, obtida em (1.100),

$$E_i = \rho^{-1}E_i' = \rho^{-1}r_ie_i, \; i = 1,\ldots,n, \tag{2.13}$$

onde $\{e_i\}$, $i = 1,\ldots,n$ é a base ortonormal com relação a métrica $dx\cdot dx$ formada por direções principais. Vamos utilizar essa relação mais adiante.

No que segue, vamos apresentar um resultado obtido por Li, T.; Li, H.; Wang, C. [13] por ser um fato muito importante sobre os autovalores do tensor $\mathbb{L}$.

Proposição 19. *([13]) Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Se x é uma hipersuperfície L-isotrópica então os autovalores do tensor $\mathbb{L}$ são não negativos, isto é, $\lambda \geq 0$. Além disso, a segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$ e as componentes do tensor de curvatura R_{ijkl} com respeito à métrica de Laguerre g satisfazem as seguintes relações,*

$$B_{ij,k} = B_{ik,j}, \;\; i,j,k = 1,\ldots,n, \tag{2.14}$$

$$R_{ijkl} = 2\lambda(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \tag{2.15}$$

$$\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 = 2n\lambda. \tag{2.16}$$

Demonstração. Sejam $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam e $\mathbb{B} = \sum_{ij} B_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ o tensor segunda forma fundamental de Laguerre. Pela Proposição 17 do capítulo anterior sabemos que

$$\sum_{ij} B_{ij}^2 = 1, \tag{2.17}$$

$$\sum_i B_{ii} = 0. \tag{2.18}$$

Calculando o laplaciano, na métrica g, de (2.17) temos,

$$0 \;=\; \Delta_g \sum_{ij} B_{ij}^2 = \sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 + \sum_{ijk} B_{ij}B_{ij,kk}. \tag{2.19}$$

Agora, pela Proposição 16 sabemos que $B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}$. Como $C_i = 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$ então, $B_{ij,k} = B_{ik,j}, \forall i,j,k = 1,\ldots,n$, isto é, (2.14) ocorre. Por esse fato e por $B_{ij} = B_{ji}$ temos,

$$B_{ij,kk} = B_{ik,jk} = B_{ki,jk}, \;\; \forall i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{2.20}$$

De (1.114) e (1.115) temos,

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = \sum_m B_{mj}R_{mikl} + \sum_m B_{im}R_{mjkl}, \tag{2.21}$$

$$R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}. \tag{2.22}$$

Usando (2.19), (2.20) e (2.21) obtemos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 + \sum_{ijk} B_{ij}B_{ij,kk} = 0 \\
&\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 + \sum_{ijk} B_{ij}B_{ki,jk} = 0 \\
&\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 + \sum_{ijk}\left\{B_{ij}\left[\sum_m B_{mi}R_{mkjk} + \sum_m B_{km}R_{mijk} + B_{ki,kj}\right]\right\} = 0 \\
&\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 + \sum_{ijkm} B_{ij}B_{mi}R_{mkjk} + \sum_{ijkm} B_{ij}B_{km}R_{mijk} + \sum_{ijk} B_{ij}B_{kk,ij} = 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Uma vez que x é L-isotrópica, isto é, $L_{ij} = \lambda\delta_{ij}$ segue de (2.22) que,

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik} \\
R_{ijkl} &= \lambda\delta_{jk}\delta_{il} + \lambda\delta_{il}\delta_{jk} - \lambda\delta_{ik}\delta_{jl} - \lambda\delta_{jl}\delta_{ik} \\
R_{ijkl} &= 2\lambda\left(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}\right),
\end{aligned}$$

o que prova (2.15).

Logo, usando as informações (2.15), (2.17), (2.18) e (2.23) obtemos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 + 2\lambda\sum_{ijkm} B_{ij}B_{mi}\left(\delta_{kj}\delta_{mk} - \delta_{mj}\delta_{kk}\right) + \\
&+2\lambda\sum_{ijkm} B_{ij}B_{km}\left(\delta_{ij}\delta_{mk} - \delta_{mj}\delta_{ik}\right) + \sum_{ijk} B_{ij}B_{kk,ij} = 0 \\
&\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 + 2\lambda\left[\sum_{ik}(B_{ik})^2 + \sum_{ik} B_{ii}B_{kk} - n\sum_{ij}(B_{ij})^2 - \sum_{jk}(B_{kj})^2\right] + \sum_{ijk} B_{ij}B_{kk,ij} = 0 \\
&\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 - 2n\lambda = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\sum_{ijk}(B_{ij,k})^2 = 2n\lambda$, isto é, (2.16) se verifica. Portanto, $\lambda \geq 0$. □

Segue da expressão (2.16), obtida na Proposição 19, o seguinte corolário,

Corolário 14. *Se x é uma hipersuperfície L-isotrópica então $\nabla\mathbb{B} = 0$ se, e somente se, $\lambda = 0$, isto é, os autovalores de $\mathbb{B}$ são constantes se, e somente se, $\lambda = 0$.*

A proposição a seguir foi obtida por Song, Y.P. em [31].

Proposição 20. *([31]) Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com duas curvaturas principais distintas que não se anulam k_1 e k_2 ($k_2 < k_1$) com multiplicidades m e $n-m$, respectivamente. Então as curvaturas principais de Laguerre são constantes e dadas por,*

$$b_1 = \sqrt{\frac{(n-m)}{mn}}, \quad b_2 = -\sqrt{\frac{m}{n(n-m)}}. \tag{2.24}$$

Demonstração. Sejam $r_1 = \dfrac{1}{k_1}$ e $r_2 = \dfrac{1}{k_2}$ os raios de curvatura de x com multiplicidades m e $n-m$, respectivamente. Por (2.1) temos,

$$r = \frac{mr_1 + (n-m)r_2}{n}.$$

Então,

$$(r - r_1) = \frac{(n-m)(r_2 - r_1)}{n}, \quad (r - r_2) = -\frac{m(r_2 - r_1)}{n}. \tag{2.25}$$

Como $\rho^2 = \sum_i (r - r_i)^2$ segue que,

$$\rho^2 = m(r - r_1)^2 + (n-m)(r - r_2)^2. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.25) em (2.26) temos,

$$\rho = \frac{\sqrt{m(n-m)}}{n}(r_2 - r_1). \tag{2.27}$$

Usando (2.25) e (2.27) em (2.10) obtemos,

$$b_1 = \sqrt{\frac{(n-m)}{mn}}, \quad b_2 = -\sqrt{\frac{m}{n(n-m)}},$$

como queríamos. □

Como consequência do Corolário 14 e da Proposição 20 temos,

Proposição 21. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com duas curvaturas principais distintas que não se anulam. Se x é L-isotrópica então $\lambda = 0$.*

Demonstração. Com efeito, pela Proposição 20 temos que b_1 e b_2 são constantes com multiplicidades m e $(n-m)$, respectivamente. Assim, por (2.4), temos que $\nabla\mathbb{B} = 0$. Como x é hipersuperfície L-isotrópica, pelo Corolário 14 segue que $\lambda = 0$. □

Como consequência direta da Proposição 21 temos nosso primeiro resultado a respeito das hipersuperfícies L-isotrópicas a saber,

Corolário 15. *Se $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície L-isotrópica com $\lambda > 0$, então x possui pelo menos três curvaturas principais distintas que não se anulam ($n \geq 3$).*

Na próxima proposição vamos provar que a função ρ^2 é limitada superiormente por $\dfrac{1}{2\lambda}$, onde λ são os autovalores do tensor de Laguerre $\mathbb{L}$. Mais precisamente a seguinte proposição,

Proposição 22. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Se x é L-isotrópica com $\lambda > 0$, então*

$$0 < \rho^2 < \frac{1}{2\lambda}, \tag{2.28}$$

onde ρ é uma função positiva definida em termos das curvaturas principais e dos raios de curvatura da x dada por (2.1).

Demonstração. Seja x hipersuperfície L-isotrópica, ou seja,

$$C_i = 0, \quad L_{ij} = \lambda\delta_{ij}, \ \forall i, j = 1, \dots, n,$$

onde estamos considerando o caso onde $\lambda > 0$. Pela primeira equação de (2.5) temos que,

$$N = \lambda Y + \alpha, \tag{2.29}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^{n+4}_2$ é uma constante. A partir das relações de ortogonalidade dadas em (1.101) obtemos informações a respeito da constante α. Como $\langle N, Y\rangle = -1$, $\langle Y, Y\rangle = 0$ e $\langle N, P\rangle = 0$, temos de (2.29) que,

$$\langle \alpha, Y\rangle = -1, \ \langle \alpha, \alpha\rangle = 2\lambda, \ \langle \alpha, P\rangle = 0. \tag{2.30}$$

A menos de transformação de Laguerre, considere $\alpha = (0, 0, \sqrt{2\lambda}, \vec{0}, 0)$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Utilizando a relação (1.124) envolvendo o tensor $\mathbb{L}$, como x é L-isotrópica temos $L_{ij} = \lambda\delta_{ij}$ e portanto,

$$\lambda = -\frac{1}{2n^2}\langle\Delta_g Y, \Delta_g Y\rangle.$$

Reunindo as informações (2.7), (2.29) e (2.31) obtemos

$$\lambda Y + \alpha = \frac{1}{n}\Delta_g Y + \frac{1}{2n^2}\langle\Delta_g Y, \Delta_g Y\rangle Y = \frac{1}{n}\Delta_g Y - \lambda Y.$$

Portanto,

$$\Delta_g Y = 2n\lambda Y + n\alpha, \tag{2.31}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ é uma constante.
A relação (2.31) foi provada inicialmente por Li, T.; Li, H.; Wang, C. em [13].

No que segue, vamos calcular $\Delta_g Y$ obtendo uma expressão em termos de operadores referentes a terceira forma fundamental III. Assim como fizemos no capítulo anterior, podemos reescrever o vetor posição Y, definido em (2.6), como sendo

$$Y = \rho y, \tag{2.32}$$

onde $y = (x\cdot\xi, -x\cdot\xi, \xi, 1)$ e "$\cdot$" é o produto interno usual coordenada a coordenada.

Considerando um referencial geodésico num ponto p, por (2.13) e (2.32) temos,

$$
\begin{aligned}
\Delta_g Y &= \sum_t E_t\Big(E_t(Y)\Big)\\
&= \sum_t E_t\Big(E_t(Y)\Big)\\
&= \sum_t \Big[\rho^{-1} r_t e_t\Big(\rho^{-1} r_t e_t(\rho y)\Big)\Big]\\
&= \sum_t \left[\rho^{-1} r_t e_t\Big(\rho^{-1} r_t e_t(\rho) y + \rho^{-1}\rho r_t e_t(y)\Big)\right]\\
&= \sum_t \left[\rho^{-1} r_t e_t\Big(r_t e_t(log\rho) y + r_t e_t(y)\Big)\right]\\
&= \sum_t \left[\rho^{-1} r_t \left(e_t(r_t)e_t(log\rho)y + r_t e_t(e_t(log\rho))y + r_t e_t(log\rho)e_t(y) + e_t(r_t)e_t(y) + \right.\right.\\
&\left.\left. + r_t e_t(e_t(y))\right)\right]\\
&= \rho^{-1}\left\{ \sum_t \left[\Big(r_t e_t(r_t)e_t(log\rho) + r_t^2 e_t(e_t(log\rho))\Big) y + \Big(r_t e_t(r_t) e_t(y) + r_t^2 e_t(e_t(y))\Big) + \right.\right.\\
&\left.\left. + r_t e_t(log\rho) r_t e_t(y)\right]\right\}\\
&= \rho^{-1} y \Delta_{III}(log\rho) + \rho^{-1}\Delta_{III} y + \rho^{-1}\nabla_{III}(log\rho).\nabla_{III} y.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\Delta_g Y = \rho^{-1}\Delta_{III}(log\rho) y + \rho^{-1}\Delta_{III} y + \rho^{-1}\nabla_{III}(log\rho).\nabla_{III} y. \tag{2.33}$$

Substituindo (2.31) em (2.33) e usando (2.32) temos,

$$2n\lambda\rho^2 y + n\rho\alpha = \Delta_{III}(log\rho) y + \Delta_{III} y + \nabla_{III}(log\rho).\nabla_{III} y.$$

Como $y, \alpha \in \mathbb{R}_2^{n+4}$, podemos considerar cada coordenada da expressão (2.34), isto é,

$$2n\lambda\rho^2 y^l + n\rho\alpha^l = \Delta_{III}(log\rho) y^l + \Delta_{III} y^l + \nabla_{III}(log\rho).\nabla_{III} y^l, \;\; l = 1, \dots, (n+4). \tag{2.34}$$

Considere $l = (n+4)$. Pela definição de y temos que $y^{n+4} = 1$. Além disso, pela escolha do α, $\alpha^{l+4} = 0$. Então, segue de (2.34) a seguinte expressão,

$$\Delta_{III}(log\rho) = 2n\lambda\rho^2. \tag{2.35}$$

Agora, considerando o traço da expressão (2.12) segue que,

$$\Delta_{III}(log\rho) - \sum_i r_i^2 e_i(log\rho)^2 + \frac{n}{2}\left(|\nabla_{III} log\rho|^2 - 1\right) = n\lambda\rho^2$$
$$\Delta_{III}(log\rho) + \frac{(n-2)}{2}|\nabla_{III} log\rho|^2 - \frac{n}{2} = n\lambda\rho^2. \tag{2.36}$$

Substituindo (2.35) em (2.36) temos,

$$2n\lambda\rho^2 + \frac{(n-2)}{2}|\nabla_{III} log\rho|^2 - \frac{n}{2} = n\lambda\rho^2$$
$$\frac{(n-2)}{2}|\nabla_{III} log\rho|^2 = -n\lambda\rho^2 + \frac{n}{2}. \tag{2.37}$$

Pelo fato de $\lambda > 0$ segue do Corolário 15 que $n \geq 3$. Dessa forma, por (2.37) obtemos,

$$|\nabla_{III} log\rho|^2 = \frac{2n}{(n-2)}\left(\frac{1}{2} - \lambda\rho^2\right). \tag{2.38}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} - \lambda\rho^2 > 0.$$

Portanto,

$$0 < \rho^2 < \frac{1}{2\lambda}.$$

□

A Proposição 19 prova que, teoricamente, poderiam existir hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$, apenas se $\lambda \geq 0$. Uma pergunta natural a se fazer é saber quais são os exemplos que pertencem a essa classe de hipersuperfícies? Para o caso $\lambda = 0$, um exemplo é conhecido. Ele foi obtido primeiramente por Corro, Fereira e Tenenblat [7] em 1999, onde os autores aplicaram transformações de Ribaucour ao hiperplano para obter uma família de hipersuperfícies de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizada por linhas de curvatura com n curvaturas principais distintas. Esse exemplo, apesar de obtido em um contexto de estudo diferente, foi considerado no ambiente da geometria de Laguerre.

Com o objetivo de apresentar o exemplo mencionado acima, vamos introduzir algumas definições. Para mais detalhes, veja [16]. Seja $\mathbb{R}_1^{n+2}$ o espaço de Minkowski com o produto interno

$$\langle X, Y\rangle = X_1Y_1 + \cdots + X_{n+1}Y_{n+1} - X_{n+2}Y_{n+2}. \tag{2.39}$$

Seja $\nu = (1, \vec{0}, 1)$ o vetor tipo-luz em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ com $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Considere $\mathbb{R}_0^{n+1}$ o hiperplano degenerado em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ definido por

$$\mathbb{R}_0^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2}; \langle x, \nu \rangle = 0\}.$$

Definimos o fibrado $U\mathbb{R}_0^{n+1}$ por

$$U\mathbb{R}_0^{n+1} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}_1^{n+2} \times \mathbb{R}_1^{n+2}; \langle x, \nu \rangle = 0, \langle \xi, \xi \rangle = 0, \langle \xi, \nu \rangle = 1\}. \tag{2.40}$$

Note que, $\langle \xi, \nu \rangle = 1$ implica em $\xi_1 \neq 0$.

Definimos a *imersão de Laguerre* $\tau : U\mathbb{R}_0^{n+1} \to U\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\tau(x, \xi) = (x', \xi') \in U\mathbb{R}^{n+1},$$

onde $x = (x_1, \vec{x_0}, x_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1 + 1, \vec{\xi_0}, \xi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e

$$x' = \left(-\frac{x_1}{\xi_1}, \vec{x_0} - \frac{x_1}{\xi_1}\vec{\xi_0} \right), \;\; \xi' = \left(1 + \frac{1}{\xi_1}, \frac{\vec{\xi_0}}{\xi_1} \right). \tag{2.41}$$

Observe que ξ' é normal a x'. Com efeito,

$$dx' = \left(\frac{-dx_1}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1}{\xi_1^2}, d\vec{x_0} - \frac{dx_1 \vec{\xi_0}}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1 \vec{\xi_0}}{\xi_1^2} - \frac{x_1 d\vec{\xi_0}}{\xi_1} \right)$$

Então,

$$\begin{aligned} dx' \cdot \xi' &= \left(\frac{-dx_1}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1}{\xi_1^2} \right)\left(1 + \frac{1}{\xi_1} \right) + \frac{\vec{\xi_0}}{\xi_1}\left(d\vec{x_0} - \frac{dx_1 \vec{\xi_0}}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1 \vec{\xi_0}}{\xi_1^2} - \frac{x_1 d\vec{\xi_0}}{\xi_1} \right) \\ &= \left(\frac{-dx_1}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1}{\xi_1^2} \right)\left(1 + \frac{1}{\xi_1} \right) + \frac{\vec{\xi_0} \cdot d\vec{x_0}}{\xi_1} + \frac{\vec{\xi_0} \cdot \vec{\xi_0}}{\xi_1}\left(\frac{-dx_1}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1}{\xi_1^2} \right) - \frac{x_1 \vec{\xi_0} \cdot d\vec{\xi_0}}{\xi_1^2} \\ &= \left(\frac{-dx_1}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1}{\xi_1^2} \right)\left(1 + \frac{1}{\xi_1} + \frac{\vec{\xi_0} \cdot \vec{\xi_0}}{\xi_1} \right) + \frac{\vec{\xi_0} \cdot d\vec{x_0}}{\xi_1} - \frac{x_1 \vec{\xi_0} \cdot d\vec{\xi_0}}{\xi_1^2}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Como $\langle dx, \xi \rangle = 0$ e $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ temos,

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_0 \cdot d\vec{x}_0 &= -dx_1, \\ \vec{\xi}_0 \cdot \vec{\xi}_0 &= -(1+2\xi_1), \\ \vec{\xi}_0 \cdot d\vec{\xi}_0 &= -d\xi_1. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Substituindo (2.43) em (2.42) obtemos,

$$dx' \cdot \xi' = -\left(\frac{-dx_1}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1}{\xi_1^2}\right) - \frac{dx_1}{\xi_1} + \frac{x_1 d\xi_1}{\xi_1^2} = 0. \tag{2.44}$$

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}_0^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada tipo-espaço no espaço degenerado $\mathbb{R}_0^{n+1}$ e ξ o único vetor em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ satisfazendo

$$\langle \xi, dx \rangle = 0,\ \langle \xi, \xi \rangle = 0 \ \text{ e } \ \langle \xi, \nu \rangle = 1,$$

onde $\nu = (1, \vec{0}, 1) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ é o vetor tipo-luz com $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal para TM com relação a $\langle dx, dx \rangle$ tal que

$$e_i(\xi) = -k_i e_i(x),\ 1 \le i \le n. \tag{2.45}$$

Supondo que $k_i \neq 0$, definimos $r_i = \dfrac{1}{k_i}$ o raio de curvatura de x e $r = \dfrac{\sum_{i=1}^n r_i}{n}$ como o raio de curvatura média de x. Podemos relacionar a imersão x com a correspondente hipersuperfície $x' : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ como segue. Dada $x : M^n \to \mathbb{R}_0^{n+1}$, pela imersão τ obtemos uma hipersuperfície $x' : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, onde x' e ξ' são dados por (2.41).

A seguir apresentamos o exemplo de hipersuperfícies L-isotrópica.

Exemplo 16. *([7])* Para quaisquer inteiros $m_1, m_2, \ldots, m_s$, com $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$ $(s \ge 2)$ e constantes distintas não nulas $a_1, a_2, \ldots, a_s$, definimos $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada tipo-espaço em $\mathbb{R}_0^{n+1}$ dada por

$$x = \left(\frac{\sum_{i=1}^{s} a_i |u_i|^2}{2}, u_1, \ldots, u_s, \frac{\sum_{i=1}^{s} a_i |u_i|^2}{2} \right),$$

onde $(u_1, u_2, \ldots, u_s) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_s} = \mathbb{R}^n$, $|u_i|^2 = u_i \cdot u_i$, $i = 1, \ldots, s$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} a_i |u_i|^2}{2}, \\ x_0 &= (u_1, \ldots, u_s). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Neste caso, temos que o campo normal unitário ξ de x é dado por,

$$\xi = \left(\frac{-\sum\limits_{i=1}^{s} |a_i u_i|^2 + 1}{2}, -a_1 u_1, \ldots, -a_s u_s, \frac{-\sum\limits_{i=1}^{s} |a_i u_i|^2 - 1}{2} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{-\sum\limits_{i=1}^{s} |a_i u_i|^2 - 1}{2}, \\ \xi_0 &= (-a_1 u_1, \ldots, -a_s u_s). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Temos,

$$\begin{aligned} dx &= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i u_i du_i \ , \ du_1, \cdots, du_s \ , \ \sum_{i=1}^{s} a_i u_i du_i \right), \\ d\xi &= \left(-\sum_{i=1}^{s} a_i^2 u_i du_i, -a_1 du_1, -\cdots, -a_s du_s, -\sum_{i=1}^{s} a_i^2 u_i du_i \right). \end{aligned}$$

A primeira e segunda formas fundamentais de x são, respectivamente, dadas por

$$
\begin{aligned}
I = dx\cdot dx = &\left(\sum_{i=1}^{s} a_i u_i du_i\right)^2 + du_1du_1+\cdots+du_sdu_s - \left(\sum_{i=1}^{s} a_i u_i du_i\right)^2\\
= &\sum_{i=1}^{s} du_idu_i,\\
II = -dx\cdot d\xi = &-\left(\sum_{i=1}^{s} a_iu_idu_i\right)\left(-\sum_{i=1}^{s} a_i^2u_idu_i\right)+\sum_{i=1}^{s} a_idu_idu_i+\\
+&\left(\sum_{i=1}^{s} a_iu_idu_i\right)\left(-\sum_{i=1}^{s} a_i^2u_idu_i\right)\\
= &\sum_{i=1}^{s} a_idu_idu_i.
\end{aligned}
$$

Note que x está parametrizada por linhas de curvatura e suas curvaturas principais são $a_1,\dots,a_s$ com multiplicidade $m_1,m_2,\dots,m_s$. Assim,

$$r_i=\frac{1}{a_i},\;\; r=\sum_{i=1}^{s}\frac{m_i}{na_i}.$$

Então, obtemos que os invariantes de x são dados por

$$
\begin{aligned}
\rho^2 &= \sum_i m_i(r_i-r)^2=c_1,\\
C_i &= -\rho^{-2}r_i\{e_i(r)-e_i(log\rho)(r-r_i)\}=0,\;\; i,j=1,\dots,n,\\
L_{ij} &= \rho^{-2}\{\mathrm{Hess}_{ij}(log\rho)-r_ir_je_i(log\rho)e_j(log\rho)+\frac{1}{2}|\nabla log\rho|^2\delta_{ij}\}=0,\;\; i,j=1,\dots,n,\\
B_{ij} &= b_i\delta_{ij},\;\; i,j=1,\dots,n,
\end{aligned}
$$

onde

$$b_i=\frac{r-r_i}{\sqrt{\sum_j m_j(r_j-r)^2}}=c_2, \tag{2.48}$$

com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ são constantes. Portanto, x é uma hipersuperfície L-isotrópica com $\lambda=0$.

Considerando a imersão de Laguerre $\tau: U\mathbb{R}_0^{n+1}\to U\mathbb{R}^{n+1}$ podemos obter a hipersuperfície $x':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ correspondente a x descrita no exemplo anterior. Por (2.41), (2.46) e

(2.47) obtemos a hipersuperfície L-isotrópica no espaço euclidiano $x' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, dada por

$$x' = (0, u_1, \ldots, u_s) + \frac{\sum_{i=1}^{s} a_i |u_i|^2}{\sum_{i=1}^{s} a_i^2 |u_i|^2 + 1}(1, -a_1 u_1, \ldots, -a_s u_s), \tag{2.49}$$

e sua normal unitária $\xi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$

$$\xi' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{s} a_i^2 |u_i|^2 + 1}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i^2 |u_i|^2 - 1, 2a_1 u_1, \ldots, 2a_s u_s\right). \tag{2.50}$$

O exemplo dado em (2.49) foi obtido primeiramente por Corro, Fereira e Tenenblat [7] em 1999.

Um questionamento natural que fizemos foi saber se a família de hipersuperfícies descrita em (2.49) seria a única L-isotrópica quando $\lambda = 0$. Uma resposta parcial dessa questão é o que veremos no final desse capítulo.

2.2 Hipersuperfície L-isoparamétricas em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção, vamos apresentar a definição de uma hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^{n+1}$. Na sequência, motivados pelo trabalho de Shu [30], investigamos a classificação das hipersuperfícies que possuem as duas propriedades simultaneamente, ser L-isotrópica e L-isoparamétrica.

A fim de ter claramente em mente que estamos tratando de hipersuperfície isoparamétricas no sentido de Laguerre vamos utilizar a notação hipersuperfície L-isoparamétrica.

Definição 16. Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos e com curvaturas principais que não se anulam. Dizemos que x é uma *hipersuperfície L-isoparamétrica* se a forma de Laguerre $\mathbb{C}$ é nula e as curvaturas principais de Laguerre, dadas em (1.134), forem todas constantes.

Com o passar dos anos, diversos autores se dedicaram ao estudo da classificação das hipersuperfícies L-isoparamétricas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Recentemente, em 2018 Shu [30] apresentou um resultado de classificação das L-isoparamétricas que motivou os estudos que vamos descrever nesta seção.

Antes de apresentar o resultado proposto por Shu [30], vamos exibir exemplos, já conhecidos, de hipersuperfícies L-isoparamétricas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para maiores detalhes veja [13], [12] e [30].

Exemplo 17. Para qualquer inteiro m com $1 \leq m \leq n-1$ denotamos por

$$\mathbb{H}^{n-m} = \{(\vec{v}, w) \in \mathbb{R}_1^{n-m+1} \ ; \ \vec{v} \cdot \vec{v} - w^2 = -1, w > 0\};$$

o espaço hiperbólico imerso no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^{n-m+1}$. Considere $x : \mathbb{S}^m \times \mathbb{H}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$x(\vec{u}, \vec{v}, w) = \left(\frac{\vec{u}}{w}(1+w), \frac{\vec{v}}{w}\right), \ \vec{u} \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}, \ (\vec{v}, w) \in \mathbb{H}^{n-m}. \tag{2.51}$$

Como

$$\vec{v} \cdot \vec{v} - w^2 = -1, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 1, \tag{2.52}$$

temos,

$$d\vec{v} \cdot \vec{v} = w dw, \quad \vec{u} \cdot d\vec{u} = 0. \tag{2.53}$$

Então, por (2.52) e (2.53) o normal unitário de x é dado por

$$\xi = \left(\frac{\vec{u}}{w}, \frac{\vec{v}}{w}\right). \tag{2.54}$$

Com isso, usando (2.52) e (2.53) segue por (2.51) e (2.54) que a primeira e segunda formas fundamentais são, respectivamente,

$$I = dx \cdot dx = \frac{1}{w^2}\left((1+w)^2 d\vec{u} \cdot d\vec{u} + d\vec{v} \cdot d\vec{v} - dw^2\right),$$
$$II = -dx \cdot d\xi = -\frac{1}{w^2}\left((1+w) d\vec{u} \cdot d\vec{u} + d\vec{v} \cdot d\vec{v} - dw^2\right)$$

Logo, a hipersuperfície x está parametrizada por linhas de curvatura e possui duas curvaturas principais distintas dadas por $k_1 = -\dfrac{1}{w+1}$ e $k_2 = -1$ com multiplicidades m e $n-m$, respectivamente. Então os raios de curvaturas são

$$r_1 = \frac{1}{k_1} = -(w+1), \quad r_2 = \frac{1}{k_2} = -1,$$

com multiplicidades m e $n-m$, respectivamente. Pelas definições dadas em (2.1) temos que as expressões de r e ρ são dados por,

$$r = \frac{mr_1 + (n-m)r_2}{n} = \frac{-(mw+n)}{n},$$
$$\rho = \sqrt{m(r-r_1)^2 + (n-m)(r-r_2)^2} = \frac{w\sqrt{m(n-m)}}{\sqrt{n}}.$$

Então, para todo $i = 1, \ldots, n$,

$$e_i(r) = \frac{-e_i(w)m}{n}, \;\; e_i(og\rho) = \frac{e_i(w)}{w}. \tag{2.55}$$

De (1.130) temos que $C_i = 0$ se, e somente se, $e_i(r) - (r-r_i)e_i(log\rho) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Note que, para $i = 1, \ldots, m$ temos que w é constante. Assim, segue de (2.55) que $C_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Para $i = m+1, \ldots, n$, utilizando (2.55) temos,

$$e_i(r) - (r-r_i)e_i(log\rho) = e_i(w)\left(\frac{-m}{n} - \frac{(r-r_i)}{w}\right) = e_i(w)\left(\frac{-m}{n} + \frac{(mw+n)-n}{nw}\right) = 0.$$

Portanto, $C_i = 0, \;\; i = 1, \ldots, n.$

Além disso, conforme a Proposição 20, as curvaturas principais de Laguerre são,

$$b_1 = \sqrt{\frac{(n-m)}{mn}}, \;\; b_2 = -\sqrt{\frac{m}{n(n-m)}}.$$

Logo, x é uma hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas. Tal hipersuperfície é conhecida como *Cíclide de Dupin*.

Exemplo 18. Seja $y = (\vec{v}, w) : M^{n-m} \to \mathbb{R}_1^{n-m+1}$ uma hipersuperfície tipo espaço sem pontos umbílicos com curvaturas principais que não se anulam e $\xi = (\vec{\xi}_0, \xi_1) : M^{n-m} \to \mathbb{R}_1^{n-m+1}$ o campo normal unitário, onde $\vec{v}, \vec{\xi}_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $w, \xi_1 \in \mathbb{R}$, com $w \neq 0$ e $\xi_1 \neq 0$. As seguintes relações são satisfeitas,

$$\begin{aligned} &\xi_0 \cdot \xi_0 - \xi_1^2 = -1 \\ &d\vec{v} \cdot \vec{\xi}_0 - dw\xi_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Seja $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ a imersão canônica. Considere a hipersuperfície $x : \mathbb{S}^m \times M^{n-m} \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$x = \left(-\frac{w}{\xi_1} f, \vec{v} - \frac{w}{\xi_1}\vec{\xi}_0 \right). \tag{2.57}$$

Vamos verificar que a hipersuperfície descrita por (2.57), com hipóteses adicionais que vamos ver mais adiante, é L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^{n+1}$ e não é L-isotrópica. Inicialmente, observamos que o campo normal unitário de x, $\tilde{\xi} : \mathbb{S}^m \times M^{n-m} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é dado por

$$\tilde{\xi} = \left(\frac{f}{\xi_1}, \frac{\vec{\xi}_0}{\xi_1} \right). \tag{2.58}$$

De fato, por (2.56) temos,

$$\begin{aligned}
dx \cdot \tilde{\xi} &= \frac{f}{\xi_1}\left(-\frac{w}{\xi_1} df - \frac{dw}{\xi_1} f + \frac{w d\xi_1}{\xi_1^2} f \right) + \frac{\vec{\xi}_0}{\xi_1}\left(d\vec{v} - \frac{dw}{\xi_1}\vec{\xi}_0 + \frac{w d\xi_1}{\xi_1^2}\vec{\xi}_0 - \frac{w}{\xi_1} d\vec{\xi}_0 \right) \\
&= \frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{w d\xi_1}{\xi_1} - dw \right) + \frac{\vec{\xi}_0 \cdot \vec{\xi}_0}{\xi_1^2}\left(\frac{w d\xi_1}{\xi_1} - dw \right) + \frac{1}{\xi_1}\left(\vec{\xi}_0 \cdot d\vec{v} - \frac{w\vec{\xi}_0 \cdot d\vec{\xi}_0}{\xi_1} \right) \\
&= \frac{1}{\xi_1^2}\left(\frac{w d\xi_1}{\xi_1} - dw \right) + \frac{(\xi_1^2 - 1)}{\xi_1^2}\left(\frac{w d\xi_1}{\xi_1} - dw \right) + dw - \frac{w \cdot d\xi_1}{\xi_1} = 0.
\end{aligned}$$

Então, usando (2.56), a primeira e segunda formas fundamentais de x são, respectivamente

$$\begin{aligned}
I &= dx \cdot dx = \left(\frac{w}{\xi_1} \right)^2 df \cdot df + \left\langle dy - \frac{w}{\xi_1} d\tilde{\xi}, dy - \frac{w}{\xi_1} d\tilde{\xi} \right\rangle_1 \\
II &= -dx \cdot d\tilde{\xi} = \frac{w}{\xi_1^2} df \cdot df - \frac{1}{\xi_1}\left\langle dy - \frac{w}{\xi_1} d\tilde{\xi}, d\tilde{\xi} \right\rangle_1,
\end{aligned} \tag{2.59}$$

onde $\langle , \rangle_1$ é o produto interno de assinatura 1 em $\mathbb{R}_1^{n-m+1}$.

Agora, vamos fazer a seguinte convenção de índices,

$$A, B = 1, \ldots, n, \;\; i, j = 1, \ldots, m, \;\; \alpha, \beta = m+1, \ldots, n.$$

Considere $\{e_i\}$ base ortonormal de f com respeito a $df \cdot df$ com dual $\{\omega_i\}$. Note que, todas as direções da esfera são principais. Seja $\{e_\alpha\}$ base ortonormal de $T(M^{n-m})$ formada por direções principais com respeito a $\langle dy, dy\rangle_1$ com dual $\{\omega_\alpha\}$. De (2.59) temos,

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\frac{w}{\xi_1}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i \otimes \omega_i + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \left(1 + \frac{wk_\alpha^y}{\xi_1}\right)^2 \omega_\alpha \otimes \omega_\alpha \\
II &= \frac{w}{\xi_1^2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \otimes \omega_i + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \left(\frac{k_\alpha^y}{\xi_1} + \frac{w(k_\alpha^y)^2}{\xi_1^2}\right) \omega_\alpha \otimes \omega_\alpha,
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

onde k_α^y são as curvaturas principais de y que não se anulam. Assim, $\{e_A\}$ forma uma base ortonormal para $T(\mathbb{S}^m \times M^{n-m})$ formada por direções principais para x, onde as curvaturas principais são

$$
k_i = \frac{1}{w}, \;\; i = 1, \ldots, m, \;\; k_\alpha = \frac{k_\alpha^y}{(\xi_1 + wk_\alpha^y)}, \;\; \alpha = m+1, \ldots, n. \tag{2.61}
$$

De (2.61) temos que os raios de curvatura e o raio de curvatura média de x são dados por,

$$
\begin{aligned}
&r_i = w, \;\; i = 1, \ldots, m, \quad r_\alpha = \xi_1 r_\alpha^y + w, \;\; \alpha = m+1, \ldots, n, \\
&r = w + \frac{\xi_1 H_1}{n},
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

onde r_α^y são os raios de curvatura da y e $H_1 = \sum_{\alpha=m+1}^{n} r_\alpha^y$.

Além disso, segue de (2.1) e (2.62) que a expressão de ρ são dados por

$$
\begin{aligned}
\rho^2 &= m(r - r_i)^2 + \sum_{\alpha=m+1}^{n} (r - r_\alpha)^2 \\
&= m\left(w + \frac{\xi_1 H_1}{n} - w\right)^2 + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \left(w + \frac{\xi_1 H_1}{n} - \xi_1 r_\alpha^y - w\right)^2 \\
&= \xi_1^2 \left(H_2 - \frac{H_1^2}{n}\right),
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

onde $H_2 = \sum_{\alpha=m+1}^{n} (r_\alpha^y)^2$.

Então, de (2.58) e (2.63) a métrica de Laguerre g é,

$$g = \rho^2 d\tilde{\xi}\cdot d\tilde{\xi} = \left(H_2 - \frac{H_1^2}{n}\right)\left[df\cdot df + \langle d\xi, d\xi\rangle\right].$$

Logo, as componentes do tensor de curvatura métrica g são dadas por,

$$R_{ijij} = \frac{1}{\left(H_2 - \frac{H_1^2}{n}\right)}, \;\; i \neq j = 1,\ldots,m, \;\; R_{\alpha\beta\alpha\beta} = -\frac{1}{\left(H_2 - \frac{H_1^2}{n}\right)}, \;\; \alpha \neq \beta = m+1,\ldots,n. \tag{2.64}$$

Utilizando (2.64) segue de (1.115) que,

$$L_{ii} = -\frac{1}{2\left(H_2 - \frac{H_1^2}{n}\right)}, \;\; i \neq j = 1,\ldots,m, \;\; L_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2\left(H_2 - \frac{H_1^2}{n}\right)}, \;\; \alpha \neq \beta = m+1,\ldots,n. \tag{2.65}$$

Agora, de (1.130) temos que $C_A = 0$ se, e somente se, $e_A(r) - (r - r_A)e_A(log\rho) = 0$, para todo $A = 1,\ldots,n$. Segue de (2.62) e (2.63) temos,

$$e_A(r) = e_A(w) + \frac{e_A(\xi_1)H_1}{n} + \frac{\xi_1 e_A(H_1)}{n}, \tag{2.66}$$

$$e_A(\rho) = e_A(\xi_1)\sqrt{H_2 - \frac{H_1^2}{n}} + \xi_1 e_A\left(\sqrt{H_2 - \frac{H_1^2}{n}}\right). \tag{2.67}$$

Note que, para $i = 1,\ldots,m$ temos que $C_i = 0$, pois w, ξ_1, H_1 e H_2 são constantes com relação as m primeiras direções. Agora, para $\alpha = m+1,\ldots,n$. Se as seguintes hipóteses forem satisfeitas,

$$\sum_{\alpha=m+1}^{n-1} r_\alpha^y = \text{constante}, \;\; \sum_{\alpha=m+1}^{n-1} (r_\alpha^y)^2 = \text{constante}, \;\; k_\alpha^y = \text{constante}, \;\; \alpha = m+1\ldots,n, \tag{2.68}$$

onde k_α^y e r_α^y são as curvaturas principais e os raios de curvatura de y, respectivamente. Segue de (2.62), (2.66) e (2.67) que

$$\begin{aligned} e_\alpha(r) - (r - r_\alpha)\frac{e_\alpha(\rho)}{\rho} &= e_\alpha(w) + \frac{e_\alpha(\xi_1)H_1}{n} - \left(\frac{H_1}{n} - r_\alpha^y\right)e_\alpha(\xi_1) \\ &= e_\alpha(w) + r_\alpha^y e_\alpha(\xi_1). \end{aligned}$$

Como $e_\alpha(\xi_1) = -k^y_\alpha e_\alpha(w)$, obtemos que $C_\alpha = 0$, para $\alpha = m+1\ldots,n$.

Ademais, usando a expressão das curvaturas principais de Laguerre, dadas em (1.130) segue por (2.62), (2.63) e (2.68) que

$$b_i = \frac{H_1}{n\sqrt{H_2 - \frac{H_1^2}{n}}}, \quad i = 1,\ldots,m,$$
$$b_\alpha = \frac{1}{n\sqrt{H_2 - \frac{H_1^2}{n}}}\left(\frac{H_1}{n} - r^y_\alpha\right), \quad \alpha = m+1,\ldots,n.$$

Portanto, com as hipóteses (2.68), a hipersuperfície descrita em (2.57) é hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^{n+1}$ que não é L-isotrópica.

Um questionamento que também gostaríamos de responder em trabalhos futuros é saber se existe algum exemplo de hipersuperfícies como a do Exemplo 18, satisfazendo as hipóteses (2.68). Isso seria importante pois estaríamos obtendo mais um exemplo de hipersuperfície que percente a classe das L-isoparamétricas e não pertence a classe das L-isotrópicas.

No que segue, apresentamos o teorema de classificação provado por Shu, S.[30] que motivou nosso trabalho.

Teorema 19. *([30]) Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$ uma hipersuperfície L-isoparamétrica n-dimensional. Então,*

1) x é uma hipersuperfície L-isotrópica; ou

2) x é Laguerre equivalente a um subconjunto aberto das seguintes hipersuperfícies:

i) a hipersuperfície orientada $x : S^k \times H^{n-k} \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada no Exemplo 17; ou

ii) a hipersuperfície orientada $x : S^m \times M^{n-m} \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada no Exemplo 18.

Já sabemos que as hipersuperfícies L-isotrópicas possuem $\lambda \geq 0$. Motivados por esse teorema, uma pergunta natural que tivemos foi saber quais as hipersuperfícies que estão na interseção das classes L-isotrópicas e L-isoparamétrica. Uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ que possui a propriedade de ser L-isoparamétrica e L-isotrópica simultaneamente é dada pelo Exemplo 16, onde nesse caso $\lambda = 0$. Sabendo disso, fizemos uma nova pergunta: O caso $\lambda = 0$ seria o único nessa interseção?

Para responder a essa pergunta vamos utilizar a identidade generalizada de Cartan, provada por Li, H.Z em [10]. Detalhes da prova dessa identidade para um tensor simétrico arbitrário está presente no Apêndice A. No lema a seguir, vamos aplicar essa identidade ao nosso contexto de estudo, usando o tensor segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$.

Lema 20. *Considere $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos curvaturas principais distintas que não se anulam. Suponha que x é L-isoparamétrica. Então para todo $i = 1, \ldots, n$ a seguinte identidade se verifica*

$$\sum_{j \notin [i]} \frac{R_{ijij}}{(b_i - b_j)} = 0, \tag{2.69}$$

onde R_{ijij} é a curvatura seccional em M^n na métrica de Laguerre g, b_i são as curvaturas principais de Laguerre e $[i] = \{l \ ; \ b_i = b_l\}$.

Demonstração. Por construção sabemos que o tensor segunda forma fundamental de Laguerre $\mathbb{B}$ é simétrico. Considere $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal tal que,

$$B_{ij} = b_i \delta_{ij}, \ \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.70}$$

onde b_i são as curvaturas principais de Laguerre. Note que estamos supondo que temos pelo menos três curvaturas principais distintas que não se anulam, consequentemente temos pelos três b_i distintas que não se anulam, onde $[i] = \{l \ ; \ b_i = b_l\}$ é um conjunto de índices que representa a multiplicidade de cada b_i.

Como x é L-isoparamétrica sabemos que b_i são constantes e $C_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Agora, pela expressão (1.115), obtida na Proposição 16, temos,

$$B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij}.$$

Então, usando o fato que $C_i = 0$ temos,

$$B_{ij,k} = B_{ik,j}, \ \ i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{2.71}$$

Logo, o tensor segunda forma fundamental $\mathbb{B}$ é um tensor simétrico satisfazendo (2.71) com todos os autovalores b_i constantes. Portanto, aplicando o Teorema 32 (Apêndice A) segue a identidade (2.69).

□

No que segue, fazendo uso da identidade provada no Lema 20 e adicionando a hipótese da hipersuperfície ser L-isotrópica obtemos,

Proposição 23. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$ uma hipersuperfície sem pontos umbílicos com curvaturas principais distintas que não se anulam. Se x é L-isotrópica e L-isoparamétrica então os autovalores do tensor $\mathbb{L}$ são todos nulos, isto é, $\lambda = 0$.*

Demonstração. Seja x é L-isotrópica, então,

$$C_i = 0, \quad L_{ij} = \lambda\delta_{ij}, \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.72}$$

onde $\lambda \geq 0$. Como $C_i = 0$ segue de (2.2) a informação que os tensores $\mathbb{B}$ e $\mathbb{L}$ comutam. Então, podemos escolher uma referencial ortonormal $\{E_i, \ldots, E_n\}$ tal que,

$$B_{ij} = b_i\delta_{ij}, \ L_{ij} = \lambda\delta_{ij}, \tag{2.73}$$

onde b_i, $i = 1, \ldots, n$ são as curvaturas principais de Laguerre.
Uma vez que x é L-isoparamétrica, Lema 20 temos,

$$\sum_{j \notin [i]} \frac{R_{ijij}}{(b_i - b_j)} = 0. \tag{2.74}$$

Agora, como x é L-isotrópica, segue de (2.15) que,

$$R_{ijkl} = 2\lambda(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik}), \quad i, j, k, l = 1, \ldots, n.$$

Logo,

$$R_{ijij} = 2\lambda, \quad i \neq j = 1, \ldots, n. \tag{2.75}$$

Reunindo as informações (2.74) e (2.75) obtemos,

$$\sum_{j \notin [i]} \frac{2\lambda}{(b_i - b_j)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.76}$$

Como as curvaturas principais de Laguerre, dadas em (1.134) por $b_i = \rho^{-1}(r - r_i)$ são constantes para todo $i = 1, \ldots, n$ e não temos pontos umbílicos, podemos reordenar o referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de modo que para algum $i_0 = 1, \ldots, n$

$$b_{i_0} > b_j, \quad \forall j \neq i_0 = 1, \ldots, n. \tag{2.77}$$

Então, para esse índice i_0 temos que

$$\sum_{j\notin[i]} \frac{1}{(b_{i_0} - b_j)} > 0.$$

Portanto, segue de (2.76) que $\lambda = 0$. □

A técnica usada na Proposição 23 está presente no artigo de Li, T.Z.; Qing, Jie.; Wang C.P [14].

Finalizamos a sessão com um corolário obtido a partir dos resultados provados por Shu, S. em [29] e [28].

Teorema 21. *([29]) Seja $x : M \to \mathbb{R}^5$ uma hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^5$. Então x é Laguerre equivalente a um subconjunto aberto das seguintes hipersuperfícies:*

i) a hipersuperfície orientada $x : S^k \times H^{4-k} \to \mathbb{R}^5$ dada no Exemplo 17; ou

ii) a imagem pela imersão τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5_0$ dada no Exemplo 16, ou

iii) A imagem por σ de uma hipersuperfície $\bar{x}$ em $\mathbb{R}^5_1$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante, ou

iv) A imagem por τ de uma hipersuperfície $\bar{x}$ em $\mathbb{R}^5_0$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante.

Teorema 22. *([28]) Seja $x : M \to \mathbb{R}^6$ uma hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^6$. Então x é Laguerre equivalente a um subconjunto aberto das seguintes hipersuperfícies:*

i) a hipersuperfície orientada $x : S^k \times H^{5-k} \to \mathbb{R}^6$ dada no Exemplo 17; ou

ii) a imagem pela imersão τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6_0$ dada no Exemplo 16, ou

iii) A imagem por σ de uma hipersuperfície $\bar{x}$ em $\mathbb{R}^6_1$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante, ou

iv) A imagem por τ de uma hipersuperfície $\bar{x}$ em $\mathbb{R}^6_0$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante.

A prova dos Teoremas 21 e 22 encontram-se no Apêndice B.

Observação 23. Na prova desses resultados, Shu,S. provou que hipersuperfícies L-isoparamétricas em $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^6$ tem a segunda forma fundamental paralela se não forem L-isotrópicas.

Dessa forma, reunindo a Observação 23 com o Corolário 14 e a Proposição 23 obtemos,

Corolário 24. *Seja* $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície L-isoparamétrica com* $n = 4,5$. *Então* $\nabla\mathbb{B} = 0$.

Demonstração. De fato, suponha por absurdo que $\nabla\mathbb{B} \neq 0$. Pela Observação 23 temos que x é L-isotrópica. Assim, x seria L-isoparamétrica e L-isotrópica. Então, pela Proposição 23 segue que $\lambda = 0$. Portanto, pelo Corolário 14 $\nabla\mathbb{B} = 0$, o que é uma contradição. □

2.3 Hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizada por linhas de curvatura

Nesta seção vamos investigar se a família de hipersuperfícies descrita em (2.49) seria a única L-isotrópica quando $\lambda = 0$. Vamos responder parcialmente a essa questão de forma positiva apresentando um resultado de rigidez das hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizadas por linhas de curvaturas, a menos de transformação de Laguerre. Para isso, vamos obter o vetor posição de Laguerre $Y : M^n \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$. Uma vez obtido Y, é possível determinar a aplicação normal de Laguerre $\eta : M^n \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$, e por sua vez a imersão x e o campo normal unitário ξ.

Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$ uma hipersuperfície L-isotrópica parametrizada por linhas de curvatura, que possua n curvaturas principais distintas que não se anulam. Por (2.3) podemos escolher uma base ortonormal $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ com respeito a métrica de Laguerre g tal que

$$B_{ij} = b_i\delta_{ij} \;\; e \;\; L_{ij} = \lambda\delta_{ij} \;\; 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.78}$$

Considere um sistema de coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$ em torno de $p \in M^n$ dados por linhas de curvatura com respeito a métrica de Laguerre g. Então

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \left\langle dY\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right), dY\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)\right\rangle = \langle Y_{,i}, Y_{,j}\rangle = \delta_{ij}g_{ii}, \tag{2.79}$$

onde a notação $,i$ indica a derivada parcial com relação a coordenada u_i.
Nesse sistema de coordenadas, os campos $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ são dados por

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial}{\partial u_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.80}$$

A proposição a seguir tem como objetivo organizar o sistema (2.5).

Proposição 24. *Considere $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície L-isotrópica com n curvaturas principais distintas que não se anulam, $Y : M^n \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$ o vetor posição de Laguerre com a métrica de Laguerre $g = \langle dY, dY\rangle$ e λ o autovalor do tensor $\mathbb{L}$. Suponha que M^n é conexa e admite uma parametrização por linhas de curvatura $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, onde U é aberto com respeito a métrica de Laguerre g. Então o seguinte sistema de equações é satisfeito por P, N, Y e η, dados em* (2.6) - (2.9),

$$\begin{cases} N_{,i} = \lambda Y_{,i} \\ \dfrac{Y_{,ii}}{g_{ii}} - \dfrac{g_{ii,i}Y_{,i}}{2g_{ii}^2} = \lambda Y + N + b_i P \\ Y_{,ij} = \displaystyle\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^l \frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}} Y_{,l}, \ \forall i \neq j = 1, \ldots, n \\ \eta_{,i} = b_i Y_{,i}. \end{cases} \tag{2.81}$$

Demonstração. Substituindo as informações (2.78) e (2.80) nas equações de estrutura (2.5) obtemos o seguinte sistema de equações diferencias,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g_{ii}}} N_{,i} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \lambda Y_{,i}, \ \forall i = 1, \ldots, n \\ \dfrac{Y_{,ii}}{g_{ii}} - \dfrac{g_{ii,i}Y_{,i}}{2g_{ii}^2} = \lambda Y + N + \displaystyle\sum_k \Gamma_{ii}^k \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} Y_{,k} + b_i P, \ \forall i = 1, \ldots, n \\ \dfrac{Y_{,ij}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} - \dfrac{g_{ii,j}Y_{,i}}{2g_{ii}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} = \displaystyle\sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} Y_{,k}, \ \forall i \neq j = 1, \ldots, n \\ \dfrac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \eta_{,i} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{ii}}} b_i Y_{,i}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.82}$$

onde b_i são as curvaturas principais de Laguerre e Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel na métrica g. Vamos provar que (2.82) se reduz a (2.81).

Primeiramente, queremos provar que $\Gamma_{ij}^i = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ iguais ou distintos. Além disso, vamos provar que $\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = 0$ é equivalente a $g_{ii,j} = 0$, para todo $i \neq j = 1, \ldots, n$.

Como definido em (1.111) temos que $\Gamma_{ij}^{k} = \omega_{ik}(E_j)$ para todo $i, j, k = 1, \ldots, n$. Então obtemos que,

$$\Gamma_{ij}^{i} = 0, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.83}$$

Uma observação importante a ser feita a respeito dos símbolos de Christoffel é com relação a simetria nos índices inferiores, isto é, $\Gamma_{ij}^{i} = \Gamma_{ji}^{i}$ se, e somente se, $g_{ii,j} = 0$, para todo $i \neq j = 1, \ldots, n$. De fato, já vimos anteriormente que $\Gamma_{ij}^{i} = 0$, para todo $i \neq j = 1, \ldots, n$. Note que pela terceira equação de (2.82) temos,

$$\frac{Y_{,ji}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} - \frac{g_{jj,i}Y_{,j}}{2g_{jj}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} = \sum_{k} \Gamma_{ji}^{k} \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} Y_{,k}, \quad \forall i \neq j = 1, \ldots, n.$$

Assim como procedemos anteriormente, considerando o produto interno dessa expressão com $\frac{Y_{,i}}{\sqrt{g_{ii}}}$, $i \neq j$ e diferenciando (2.79) com relação a u_j, $i \neq j$ vemos que

$$\Gamma_{ji}^{i} = \frac{g_{ii,j}}{2\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}, \quad \forall i \neq j = 1, \ldots, n.$$

Então, segue de (2.83) que, para termos simetria nos símbolos de Christoffel é necessário e suficiente que

$$g_{ii,j} = 0, \ \ \forall i \neq j. \tag{2.84}$$

Pelo fato das derivadas parciais mistas de Y comutarem, os demais símbolos satisfazem $\Gamma_{ij}^{l} = \Gamma_{ji}^{l}$, para todo $i \neq j \neq l$.

Portanto, segue de (2.83) e (2.84) que o sistema (2.82) é dado como em (2.81), como queríamos.

□

Observe que as hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizadas por linhas de curvaturas ficam determinadas por meio da integração do sistema (2.81). Integrar esse sistema e determinar Y, N e η nos fornece uma parametrização explícita para x. Dito isso, esse será nosso objetivo. No que segue, aplicando o Teorema de Frobenius para equações diferenciais, vamos obter condições necessárias para que o sistema (2.81) seja integrável.

Lema 25. *Nas mesmas condições da Proposição 24, o sistema* (2.81) *é integrável se, e somente se,*

1. $\lambda = 0$,

2. $\Gamma_{li}^{j} = 0$ *para todo* $i \neq j \neq l = 1, \ldots, n$,

3. b_i *são constantes para todo* $1, \ldots, n$.

Demonstração. De acordo com as hipóteses da Proposição 24, temos o seguinte sistema de equações, para todo $i, j = 1, \ldots, n$

$$\begin{cases} N_{,i} = \lambda Y_{,i} \\[2ex] \dfrac{Y_{,ii}}{g_{ii}} - \dfrac{g_{ii,i} Y_{,i}}{2g_{ii}^2} = \lambda Y + N + b_i P \\[2ex] Y_{,ij} = \displaystyle\sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i \neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}} Y_{,l}, \ \forall i \neq j = 1, \ldots, n \\[2ex] \eta_{,i} = b_i Y_{,i} \end{cases} \tag{2.85}$$

Para que esse sistema tenha solução é necessário verificar a condição do Teorema de Frobenius, isto é, a condição

$$(Y_{,ii})_{,j} = (Y_{,ij})_{,i}, \quad \forall i \neq j,$$

deve ser satisfeita.

Diferenciando a segunda equação de (2.85) com relação a $u_j, i \neq j$ temos,

$$(Y_{,ii})_{,j} = g_{ii,j}(\lambda Y + N + b_i P) + g_{ii}(\lambda Y_{,j} + N_{,j} + b_{i,j} P) + \left(\frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} \right)_{,j} Y_{,i} + \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} Y_{,ij}. \tag{2.86}$$

Usando a primeira e a terceira equação de (2.85) e também a informação que $g_{ii,j} = 0, \ i \neq j$ temos,

$$(Y_{,ii})_{,j} = g_{ii}(2\lambda Y_{,j} + b_{i,j} P) + \left(\frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} \right)_{,j} Y_{,i} + \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i \neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}} Y_{,l}, \ i \neq j. \tag{2.87}$$

Agora, diferenciando a equação de $Y_{,ij}, i \neq j$, dada em (2.85), com relação à coordenada u_i obtemos,

$$(Y_{,ij})_{,i} = \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i \neq j}}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{l} \frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}} \right)_{,i} Y_l + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i \neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}} Y_{,li}.$$

Utilizando a terceira equação de (2.85) segue que:

$$
\begin{aligned}
(Y_{,ij})_{,i} &= \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}\right)_{,i} Y_{,l} + \left(\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}\right)\left(\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq i\neq l}}^{n} \Gamma_{li}^{s}\frac{\sqrt{g_{ll}}\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ss}}}Y_{,s}\right)\\
&= \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}\right)_{,i} Y_{,l} + g_{ii}\sqrt{g_{jj}}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\left[\Gamma_{li}^{j}\frac{Y_{,j}}{\sqrt{g_{jj}}} + \sum_{\substack{s=1,\\ s\neq i\neq j\neq l}}^{n} \Gamma_{li}^{s}\frac{Y_{,s}}{\sqrt{g_{ss}}}\right]\\
&= \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}\right)_{,i} Y_{,l} + g_{ii}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{li}^{j}Y_{,j} + g_{ii}\sqrt{g_{jj}}\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq i\neq j\neq l}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{li}^{s}\frac{Y_{,s}}{\sqrt{g_{ss}}}.
\end{aligned}
$$

Então, para $i\neq j$ obtemos,

$$
(Y_{,ij})_{,i} = \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}\right)_{,i} Y_{,l} + g_{ii}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{li}^{j}Y_{,j} + g_{ii}\sqrt{g_{jj}}\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq i\neq j\neq l}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{li}^{s}\frac{Y_{,s}}{\sqrt{g_{ss}}}. \quad (2.88)
$$

Igualando (2.87) e (2.88) obtemos para todo $i\neq j$:

$$
\begin{aligned}
&2g_{ii}\lambda Y_{,j} + g_{ii}b_{i,j}P + \left(\frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}\right)_{,j} Y_{,i} + \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}Y_{,l}\\
&= \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}\right)_{,i} Y_{,l} + g_{ii}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{li}^{j}Y_{,j}\\
&+ g_{ii}\sqrt{g_{jj}}\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq i\neq j\neq l}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{li}^{s}\frac{Y_{,s}}{\sqrt{g_{ss}}}
\end{aligned}
$$

Como o referencial é composto por vetores linearmente independente segue que, os coeficientes de Y_i, Y_j, Y_l $l \neq i \neq j$ e P se anulam, isto é,

$$\left(\frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}\right)_{,j} = 0 \Rightarrow g_{ii,ij} = 0, \ \forall i \neq j \tag{2.89}$$

$$2\lambda = \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{li}^{j}, \ \forall i \neq j \tag{2.90}$$

$$g_{ii}b_{i,j} = 0 \Rightarrow b_{i,j} = 0, \ \forall i \neq j \tag{2.91}$$

$$\Gamma_{ij}^{l}\frac{g_{ii,i}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{2g_{ii}\sqrt{g_{ll}}} = \left(\Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}\right)_{,i} + g_{ii}\sqrt{g_{jj}}\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq i\neq j\neq l}}^{n} \Gamma_{ij}^{s}\Gamma_{si}^{l}\frac{1}{\sqrt{g_{ll}}}, \forall l \neq i \neq j. \tag{2.92}$$

Segue da expressão (2.91) que b_i só depende da variável u_i. Como $\sum_i B_{ii} = 0$ temos que,

$$b_{i,i} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} b_{j,i} = 0.$$

Portanto, b_i são constantes para todo $i = 1, \ldots, n$.

Por fim, vamos olhar para a equação (2.90). Segue de (2.85) que para quaisquer $i \neq j = 1 \ldots, n$,

$$Y_{,ij} = \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma_{ij}^{l}\frac{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{ll}}}Y_{,l}.$$

Considerando o produto interno dessa equação com $\dfrac{Y_{,s}}{\sqrt{g_{ss}}}, s \neq i \neq j$ temos,

$$\Gamma_{ij}^{s} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}\sqrt{g_{ss}}}\langle Y_{,ij}, Y_{,s}\rangle. \tag{2.93}$$

Como $s \neq j$ sabemos que $\langle Y_{,j}, Y_{,s}\rangle = 0$, derivando com relação à coordenada u_i,

$$\langle Y_{,ji}, Y_{,s}\rangle + \langle Y_{,j}, Y_{,si}\rangle = 0. \tag{2.94}$$

Como as derivadas mistas de Y comutam e usando (2.93) - (2.94) temos,

$$\Gamma_{ji}^{s} = \Gamma_{ij}^{s} \ = \ \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}\sqrt{g_{ss}}}\langle Y_{,ij}, Y_{,s}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}\sqrt{g_{ss}}}\langle Y_{,j}, Y_{,si}\rangle.$$

Usando novamente (2.93), com uma reordenação nos índice, segue de (2.95) que,

$$\Gamma^s_{ji} = -\Gamma^j_{si}, \quad \forall i \neq j \neq s. \tag{2.95}$$

Assim, por (2.90) e (2.95) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda - \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma^l_{ij}\Gamma^j_{li} \\ &= 2\lambda - \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} \Gamma^l_{ji}\Gamma^j_{li} \\ &= 2\lambda - \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} (-\Gamma^j_{li})\Gamma^j_{li} \\ &= 2\lambda + \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq i\neq j}}^{n} (\Gamma^j_{li})^2. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Pela Proposição 19 temos $\lambda \geq 0$ então, para a equação (2.96) ser satisfeita,

$$\lambda = \Gamma^j_{li} = 0, \quad \forall i \neq j \neq l.$$

Portanto, o sistema tem solução para as hipersuperfícies L-isotrópicas com $\lambda = 0$. Além disso, b_i é constante para todo $i = 1,\dots,n$ e $\Gamma^j_{li} = 0$ para todo $i \neq j \neq l = 1,\dots,n$. □

De maneira direta, segue do Lema 25 o seguinte corolário,

Corolário 26. *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície L-isotrópica com $\lambda > 0$. Então x não admite parametrização por linhas de curvatura.*

No que segue, o próximo lema nos diz como o vetor posição Y e as componentes da métrica g são dados por meio de somas de funções de variáveis separadas.

Lema 27. *Sejam Y, N e η campos de vetores em $\mathbb{R}^{n+4}_2$ satisfazendo* (2.81). *Então,*

$$\begin{cases} N_{,i} = 0 \\ \dfrac{Y_{,ii}}{g_{ii}} - \dfrac{g_{ii,i}Y_{,i}}{2g_{ii}^2} = N + b_i P \\ Y_{,ij} = 0, \quad \forall i \neq j = 1,\dots,n \\ \eta_{,i} = b_i Y_{,i} \end{cases} \tag{2.97}$$

e

$$Y=\left(\sum_{k=1}^{n}F_k^1,-\sum_{k=1}^{n}F_k^1,\sum_{k=1}^{n}F_k^3,\sum_{k=1}^{n}F_k^4,\ldots,\sum_{k=1}^{n}F_k^{n+3},\sum_{k=1}^{n}F_k^3+1\right), \tag{2.98}$$

onde F_k^l é função diferenciável que depende apenas de u_k com $l=1,\ldots,n+4$ e $k=1,\ldots,n$. Além disso,

$$g_{ii}=\langle Y_{,i},Y_{,i}\rangle=\sum_{t=1}^{n}\left(F_{i,i}^{t+3}\right)^2,\ \forall i=1,\ldots,n. \tag{2.99}$$

Demonstração. Pelo Lema 25 se (2.81) tem solução então,

$$\lambda=0, \tag{2.100}$$

$$\Gamma_{li}^{j}=0,\quad \forall i\neq j\neq l=1,\ldots,n, \tag{2.101}$$

$$b_i\quad \text{são constantes}\quad \forall i=1,\ldots,n. \tag{2.102}$$

Fazendo uso das condições (2.100)-(2.102), o sistema dado em (2.81) se reduz a (2.97).

Pelo fato de $Y_{,ij}=0,\ i\neq j=1,\ldots,n$ podemos escrever Y como uma soma de funções diferenciáveis que dependem de uma única variável,

$$Y=\sum_{k=1}^{n}F_k(u_k), \tag{2.103}$$

onde $F_k(u_k)=(F_k^1(u_k),F_k^2(u_k),\ldots,F_k^{n+4}(u_k))\in\mathbb{R}^{n+4}$ para todo $k=1,\ldots,n$.

Como $Y\in\mathbb{R}_2^{n+4}$, vamos considerar as funções coordenadas de Y,

$$Y^l=\sum_{k=1}^{n}F_k^l(u_k), \tag{2.104}$$

em que $F_k^l(u_k)$ $k=1,\ldots,n$ e $l=1,\ldots,(n+4)$ significa a l-ésima coordenada da função diferenciável que depende apenas da variável u_k. Fixado essa notação, vamos omitir a variável u_k.

No que segue, das relações de ortogonalidade da métrica de Laguerre g sabemos que $\langle Y,P\rangle=0$, onde $P=(1,-1,0,\vec{0},0)$, com $\vec{0}\in\mathbb{R}^n$. Assim,

$$-\sum_{k=1}^{n}F_k^1-\sum_{k=1}^{n}F_k^2=0,$$

isto é,

$$Y^2=-Y^1. \tag{2.105}$$

Então podemos escrever

$$Y = \left(\sum_{k=1}^{n} F_k^1, -\sum_{k=1}^{n} F_k^1, \sum_{k=1}^{n} F_k^3, \sum_{k=1}^{n} F_k^4, \ldots, \sum_{k=1}^{n} F_k^{n+3}, \sum_{k=1}^{n} F_k^{(n+4)} \right). \tag{2.106}$$

Nosso objetivo é, a partir das relações de ortogonalidade da métrica g, obter mais alguma relação entre as funções coordenadas do vetor posição Y.

Primeiramente, vejamos algumas informações a respeito do vetor N. O vetor tipo luz $N \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ é constante, não-nulo e não múltiplo de P. De fato, da primeira equação do sistema (2.97) temos que $N = (N^1, -N^1, \ldots, N^{n+4}) \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ é constante, onde $N^2 = -N^1$, pois $\langle N, P \rangle = 0$. Uma vez que $\langle N, Y \rangle = -1$, N é não nulo. Além disso, se $N = N^1 P$ temos, uma contradição:

$$-1 = \langle N, Y \rangle = N^1 \langle P, Y \rangle = 0.$$

Logo, $N = (N^1, -N^1, \ldots, N^{n+4}) \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ é um vetor tipo luz constante onde existe pelo menos um índice $m = 3, \ldots, (n+4)$ tal que $N^m \neq 0$. Vamos escolher, sem perda de generalidade, $N = (0, 0, 1, \vec{0}, 1)$, onde $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Assim, utilizando a informação que $\langle N, Y \rangle = -1$ temos, $Y^3 - Y^{n+4} = -1$, ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F_k^3 - \sum_{k=1}^{n} F_k^{(n+4)} &= -1 \\ \sum_{k=1}^{n} F_k^{(n+4)} &= \sum_{k=1}^{n} F_k^3 + 1. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Portanto, segue por (2.106) e (2.107) que o vetor posição Y é dado como em (2.98).

Agora, diferenciando a equação (2.107) com relação a u_i e lembrando que as funções diferenciáveis $F_k^l(u_k)$ só dependem da variável u_k temos,

$$F_{i,i}^{n+4} = F_{i,i}^3, \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{2.108}$$

Escrevendo as componentes da métrica g nesse sistema de coordenadas em termos das funções F_k^l e utilizando as informações (2.105) e (2.108) segue que

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \langle Y_{,i}, Y_{,i} \rangle = -\left(F_{i,i}^1\right)^2 + \left(F_{i,i}^1\right)^2 + \left(F_{i,i}^3\right)^2 + \left(F_{i,i}^4\right)^2 + \ldots - \left(F_{i,i}^{n+4}\right)^2 \\ &= \sum_{t=1}^{n} \left(F_{i,i}^{t+3}\right)^2, \ \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.109}$$

□

Uma vez em posse desses lemas, podemos retornar ao nosso objetivo principal dessa seção, integrar o sistema (2.97) a fim de obter $Y,\eta \in \mathbb{R}_2^{n+4}$. Em primeiro lugar, vamos determinar Y.

Proposição 25. *Seja $Y \in \mathbb{R}_2^{n+4}$ nas condições do Lema 27. Então as funções diferenciáveis $F_k^l(u_k)$ $l = 1,\dots,n+4$ e $k = 1,\dots,n$ são dadas por:*

$$F_i^1 = \frac{h_i^2 b_i}{2\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i\beta_i^1 + \gamma_i^1, \;\; \forall i = 1,\dots,n, \tag{2.110}$$

$$F_i^{s+3} = \frac{c_i^{s+3}}{c_i^{i+3}} h_i + \alpha_i^{s+3}, \;\; \forall i,s = 1,\dots,n, \tag{2.111}$$

$$F_i^3 = \frac{h_i^2}{2\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i\beta_i^3 + \gamma_i^3, \;\; \forall i = 1,\dots,n, \tag{2.112}$$

onde para todo $i = 1,\dots,n$, $h_i(u_i)$ são funções diferenciáveis que dependem apenas da variável u_i, b_i são as curvaturas principais de Laguerre e c_i^{i+3}, β_i^1, β_i^3, γ_i^1, γ_i^3, α_i^{s+3} são constantes de integração. Ademais,

$$g_{ii} = \frac{h_i'^2}{\left(c_i^{i+3}\right)^2}, \;\; \forall i = 1,\dots,n, \tag{2.113}$$

e

$$\begin{aligned} Y^l \;=\; & \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[\frac{h_k^2}{2\left(c_k^{k+3}\right)^2} b_k + h_k\beta_k^1 + \gamma_k^1 \right] \Big(\delta_{l1} - \delta_{l2}\Big) \right. \\ & + \left[\frac{h_k^2}{2\left(c_k^{k+3}\right)^2} + h_k\beta_k^3 + \gamma_k^3 \right] \Big(\delta_{l3} + \delta_{l(n+4)}\Big) \\ & \left. + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{c_k^{s+3} h_k}{c_k^{k+3}} + \alpha_k^{s+3} \right) \delta_{(s+3)l} \right\} + \delta_{l(n+4)}, \;\; \forall l = 1,\dots,(n+4). \end{aligned} \tag{2.114}$$

Demonstração. Uma vez que $N = (0,0,1,\vec{0},1)$ e $P = (1,-1,0,0,\vec{0})$, onde $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$, podemos reescrever a segunda equação do sistema (2.97) em termos das funções F_k^l e suas derivadas como segue,

$$\frac{Y_{,ii}^l}{g_{ii}} - \frac{g_{ii,i} Y_{,i}^l}{2g_{ii}^2} = \delta_{l3} + \delta_{l(n+4)} + b_i(\delta_{l1} - \delta_{l2}), \tag{2.115}$$

isto é,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} F^l_{k,ii}}{g_{ii}} - \frac{g_{ii,i}\sum_{k=1}^{n} F^l_{k,i}}{2g_{ii}^2} = \delta_{l3} + \delta_{l(n+4)} + b_i(\delta_{l1} - \delta_{l2}). \tag{2.116}$$

Como F^l_k só depende de u_k temos,

$$\frac{F^l_{i,ii}}{g_{ii}} - \frac{g_{ii,i}F^l_{i,i}}{2g_{ii}^2} \quad = \quad \delta_{l3} + \delta_{l(n+4)} + b_i(\delta_{l1} - \delta_{l2}), \begin{cases} l = 1,\ldots,(n+4) \\ i = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{2.117}$$

Seja $l = s+3, \;\; s = 1,\ldots,n$ em (2.117),

$$\frac{F^{s+3}_{i,ii}}{g_{ii}} - \frac{g_{ii,i}F^{s+3}_{i,i}}{2g_{ii}^2} = 0.$$

Portanto,

$$\left(\frac{F^{s+3}_{i,i}}{\sqrt{g_{ii}}}\right)_{,i} = 0, \;\; \forall i, s = 1,\ldots,n. \tag{2.118}$$

Integrando (2.118) com relação à variável u_i,

$$\frac{F^{s+3}_{i,i}}{\sqrt{g_{ii}}} = c^{s+3}_i, \;\; \forall i, s = 1,\ldots,n, \tag{2.119}$$

donde

$$\left(c^{s+3}_i\right)^2 g_{ii} - \left(F^{s+3}_{i,i}\right)^2 = 0, \;\; \forall i, s = 1,\ldots,n, \tag{2.120}$$

onde c^{s+3}_i são constantes de integração. Note que, por (2.119), escolher as constantes c^{s+3}_i para $i, s = 1,\ldots,n$ significa escolher $Y^{s+3}_{,i}$, que são condições iniciais para o sistema de equações diferencias parciais (2.97).

Denote

$$V^{s+3}_i = \left(F^{s+3}_{i,i}\right)^2. \tag{2.121}$$

Então, segue de (2.109) e (2.119) que,

$$\begin{aligned} \left(c^{s+3}_i\right)^2 \sum_{t=1}^{n} V^{t+3}_i - V^{s+3}_i &= 0 \\ \left[\left(c^{s+3}_i\right)^2 - 1\right] V^{s+3}_i + \left(c^{s+3}_i\right)^2 \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq s}}^{n} V^{t+3}_i &= 0, \;\; \forall i, s = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2.122}$$

Para cada $i = 1,\ldots,n$ fixo, podemos reescrever (2.122) matricialmente da seguinte forma,

$$(C_i)_{n\times n} V_{n\times 1} = 0_{n\times 1},$$

onde

$$(C_i)_{n\times n} = \begin{pmatrix} \left(c_i^4\right)^2 - 1 & \left(c_i^4\right)^2 & \ldots & \left(c_i^4\right)^2 \\ \left(c_i^5\right)^2 & \left(c_i^5\right)^2 - 1 & \ldots & \left(c_i^5\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(c_i^{n+3}\right)^2 & \left(c_i^{n+3}\right)^2 & \ldots & \left(c_i^{n+3}\right)^2 - 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \quad V_{n\times 1} = \begin{pmatrix} V_i^4 \\ V_i^5 \\ \vdots \\ V_i^{n+3} \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad 0_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Note que $det(C_i) = 1 - \sum\limits_{t=1}^{n} \left(c_i^{t+3}\right)^2$. Uma vez que buscamos soluções não triviais desse sistema de equações, o determinante da matriz C_i deve ser nulo. Isto é,

$$\sum_{t=1}^{n} \left(c_i^{t+3}\right)^2 = 1 \qquad \forall i = 1,\ldots,n. \tag{2.123}$$

Para cada $i = 1,\ldots,n$ fixado basta que pelo menos um elemento da soma (2.123) seja não nulo. Isto é, que para cada i exista um t tal que $c_i^{t+3} \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $\left(c_i^{i+3}\right)^2 \neq 0$, para todo $i = 1,\ldots,n$. Note que, a derivada do vetor posição Y na direção u_i é o vetor tangente das curvas coordenadas em um ponto de M. Como essas derivadas são dadas por meio das constantes $c's$, conforme (2.119), quando escolhemos essas constantes estamos determinando o espaço tangente de M nesse ponto.

Observe que em (2.122) temos um sistema linear com n^2 equações e n^2 funções, vamos determinar as funções V por meio de substituições. Fixe em (2.122) um índice $i = 1,\ldots,n$ e considere $s = i$,

$$\left[\left(c_i^{i+3}\right)^2 - 1\right] V_i^{i+3} + \left(c_i^{i+3}\right)^2 \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq i}}^{n} V_i^{t+3} = 0.$$

Como $\left(c_i^{i+3}\right)^2 \neq 0$, isolando V_i^{n+3} obtemos,

$$V_i^{n+3} = \frac{\left[1 - \left(c_i^{i+3}\right)^2\right]}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} V_i^{i+3} - \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq i}}^{n-1} V_i^{t+3}. \tag{2.124}$$

Agora, considere um outro índice fixo $s \neq i$ e $s \neq n$ em (2.122),

$$\begin{aligned}
\left[\left(c_i^{s+3}\right)^2 - 1\right] V_i^{s+3} + \left(c_i^{s+3}\right)^2 \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq s}}^{n} V_i^{t+3} &= 0 \\
\left[\left(c_i^{s+3}\right)^2 - 1\right] V_i^{s+3} + \left(c_i^{s+3}\right)^2 \left(\sum_{\substack{t=1,\\ t\neq s}}^{n-1} V_i^{t+3} + V_i^{n+3}\right) &= 0 \quad s \neq n. \qquad (2.125)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.124) em (2.125) temos,

$$\left[\left(c_i^{s+3}\right)^2 - 1\right] V_i^{s+3} + \left(c_i^{s+3}\right)^2 \left(\sum_{\substack{t=1,\\ t\neq s}}^{n-1} V_i^{t+3} + \frac{[1-\left(c_i^{i+3}\right)^2]}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} V_i^{i+3} - \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq i}}^{n-1} V_i^{t+3}\right) = 0$$

$$\left[\left(c_i^{s+3}\right)^2 - 1\right] V_i^{s+3} + \left(c_i^{s+3}\right)^2 \left(V_i^{i+3} + \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq s, t\neq i}}^{n-1} V_i^{t+3} + \frac{[1-\left(c_i^{i+3}\right)^2]}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} V_i^{i+3} - V_i^{s+3} - \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq s, t\neq i}}^{n-1} V_i^{t+3}\right) = 0$$

$$-V_i^{s+3} + \left(\frac{\left(c_i^{s+3}\right)^2 [1-\left(c_i^{i+3}\right)^2]}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} + \left(c_i^{s+3}\right)^2\right) V_i^{i+3} = 0.$$

Logo,

$$V_i^{s+3} = \frac{\left(c_i^{s+3}\right)^2}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} V_i^{i+3} \quad s = 1, \ldots, (n-1),\ s \neq i,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (2.126)$$

Por fim, utilizando a expressão obtida (2.126) em (2.124) segue que,

$$\begin{aligned}
V_i^{n+3} &= \frac{[1-\left(c_i^{i+3}\right)^2]}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} V_i^{i+3} - \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq i}}^{n-1} \frac{\left(c_i^{t+3}\right)^2}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} V_i^{i+3} \\
&= \frac{V_i^{i+3}}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} \left(1 - \left(c_i^{i+3}\right)^2 - \sum_{\substack{t=1,\\ t\neq i}}^{n-1} \left(c_i^{t+3}\right)^2\right) \\
&= \frac{V_i^{i+3}}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} \left(1 - \sum_{t=1}^{n-1} \left(c_i^{t+3}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Utilizando (2.123) obtemos,

$$V_i^{n+3} = \frac{\left(c_i^{n+3}\right)^2}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} V_i^{i+3}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (2.127)$$

Portanto, segue por (2.126) e (2.127) que todas as funções V_i^{s+3}, para todo $i,s \in \{1,\ldots,n\}$ com $s \neq i$ são escritas em termos de uma função diferenciável V_i^{i+3} que depende apenas da variável u_i. Considere $V_i^{i+3} = h_i'(u_i)^2$, para todo $i = 1,\ldots,n$. A partir de agora, com o intuito de simplificar a notação, omitiremos a variável das funções $h_i'(u_i)$. Subentendendo que h_i, e suas derivadas, são funções diferenciável que dependem apenas da variável u_i.

Segue de (2.121), (2.126) e (2.127) que para todo $i,s = 1,\ldots,n$ temos,

$$\left(F_{i,i}^{s+3}\right)^2 = V_i^{s+3} = \frac{\left(c_i^{s+3}\right)^2}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} h_i'^2. \tag{2.128}$$

Portanto,

$$F_{i,i}^{s+3} = \frac{c_i^{s+3}}{c_i^{i+3}} h_i', \ \ \forall i,s = 1,\ldots,n. \tag{2.129}$$

Integrando (2.129) com relação a u_i obtemos,

$$F_i^{s+3} = \frac{c_i^{s+3}}{c_i^{i+3}} h_i + \alpha_i^{s+3}, \ \ \forall i,s = 1,\ldots,n, \tag{2.130}$$

onde α_i^{s+3} são constantes de integração.

Uma vez obtidas essas funções, podemos reescrever as componentes da métrica g_{ii} em termos das derivadas das funções h_i e das constantes c. Fazendo uso das informações (2.109), (2.129) e (2.123) obtemos,

$$g_{ii} = \sum_{t=1}^{n} \left(F_{i,i}^{t+3}\right)^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left(c_i^{t+3}\right)^2}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} h_i'^2, \ \ \forall i = 1,\ldots,n. \tag{2.131}$$

Portanto, provamos (2.113). Derivando a expressão de g_{ii} dada em (2.113) com relação a u_i temos,

$$g_{ii,i} = \frac{2h_i' h_i''}{\left(c_i^{i+3}\right)^2}, \ \ \forall i = 1,\ldots,n. \tag{2.132}$$

No que segue, vamos determinar as funções que restam para expressar o vetor posição Y, a saber as funções F_i^1 e F_i^3, para todo $i = 1,\ldots,n$.
Escolhendo $l = 1$ em (2.117) temos,

$$\frac{F_{i,ii}^1}{g_{ii}} - \frac{g_{ii,i} F_{i,i}^1}{2g_{ii}^2} = b_i, \ \ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Substituindo (2.113) e (2.132) na equação anterior obtemos a seguinte equação diferencial ordinária,

$$
\begin{aligned}
\frac{F^1_{i,ii}\left(c_i^{i+3}\right)^2}{h'^2_i} - \frac{h'_i h''_i F^1_{i,i}\left(c_i^{i+3}\right)^4}{\left(c_i^{i+3}\right)^2 h'^4_i} &= b_i \\
\frac{F^1_{i,ii}\left(c_i^{i+3}\right)^2}{h'^2_i} - \frac{h''_i F^1_{i,i}\left(c_i^{i+3}\right)^2}{h'^3_i} &= b_i.
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos os lados por $\dfrac{h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2}$, lembrando que $\left(c_i^{i+3}\right)^2 \neq 0$, para todo $i = 1\ldots,n$ obtemos,

$$
F^1_{i,ii} - \frac{h''_i F^1_{i,i}}{h'_i} = \frac{b_i h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2}, \quad \forall i = 1,\ldots,n. \tag{2.133}
$$

Integrando a equação (2.133) segue que,

$$
F^1_i = \frac{h_i^2 b_i}{2\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i \beta^1_i + \gamma^1_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n, \tag{2.134}
$$

onde β^1_i e γ^1_i são constantes de integração para todo $i = 1,\ldots,n$.

Por fim, considerando $l = 3$ em (2.117) temos,

$$
\frac{F^3_{i,ii}}{g_{ii}} - \frac{g_{ii,i}F^3_{i,i}}{2g^2_{ii}} = 1, \quad \forall i = 1,\ldots,n.
$$

De maneira essencialmente análoga aos cálculos anteriores, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária,

$$
F^3_{i,ii} - \frac{h''_i F^3_{i,i}}{h'_i} = \frac{h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2}, \quad \forall i = 1,\ldots,n. \tag{2.135}
$$

Via integração de (2.135) obtemos,

$$
F^3_i = \frac{h_i^2}{2\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i \beta^3_i + \gamma^3_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n, \tag{2.136}
$$

onde β^3_i e γ^3_i são constantes de integração para todo $i = 1,\ldots,n$. Detalhes para obter as expressões (2.134) e (2.136) podem ser vistas no Apêndice C.

Reunindo as equações (2.130), (2.134) e (2.136) em (2.98) obtemos a primeira parte da proposição. Agora, substituindo essas informações em (2.98) obtemos que cada função coordenada do vetor posição Y é dada por (2.114), como queríamos. $\square$

Agora, nosso propósito é determinar o campo $\eta \in C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$.

Proposição 26. *Considere Y, N e η campos de vetores em $\mathbb{R}_2^{n+4}$ satisfazendo (2.97). Seja Y conforme* (2.114). *Então as funções coordenadas de η, η^l com $l = 1, \ldots, (n+4)$ são dadas por:*

$$\begin{aligned} \eta^l &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[\frac{h_k^2 b_k^2}{2\left(c_k^{k+3}\right)^2} + h_k \beta_k^1 b_k \right] \left(\delta_{l1} - \delta_{l2}\right) + \left[\frac{h_k^2 b_k}{2\left(c_k^{k+3}\right)^2} + h_k \beta_k^3 b_k \right] (\delta_{l3} + \delta_{l(n+4)}) \right. \\ &+ \left. \sum_{s=1}^{n} \frac{c_k^{s+3} h_k b_k}{c_k^{k+3}} \delta_{l(s+3)} \right\} + \psi^l, \;\; \forall l = 1, \ldots, (n+4), \end{aligned} \tag{2.137}$$

onde $h_k(u_k)$ são funções diferenciáveis, da Proposição 25, que dependem apenas da variável u_k, b_k são as curvaturas principais de Laguerre e c_k^{k+3}, β_k^1 e β_k^3 são as constantes de (2.114) *e ψ^l são constantes de integração, tal que $\psi^3 = \psi^{n+4}$.*

Demonstração. Primeiramente, das relações de ortogonalidade da métrica g sabemos que $\langle \eta, N \rangle = 0$. Lembrando que $N = (0,0,1,\vec{0},1)$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ temos,

$$\eta^3 - \eta^{(n+4)} = 0, \tag{2.138}$$

onde η^l, para todo $l = 1, \ldots, (n+4)$ são as funções coordenadas de η.

No que segue, vamos trabalhar com a última equação do sistema (2.97), dada por

$$\eta_{,i} = b_i Y_{,i}, \;\; \forall i = 1, \ldots, n. \tag{2.139}$$

Como b_i são constantes e $Y_{,ij} = 0$, para todo $i \neq j = 1, \ldots, n$, note que η também é uma função de variáveis separadas, ou seja, para cada $l = 1, \ldots, (n+4)$, as funções coordenadas de η são escritas como soma de funções diferenciáveis que dependem de uma única variável. Reescrevendo matricialmente a equação (2.139) temos,

$$\begin{pmatrix} \eta_{,1}^1 & \eta_{,1}^2 & \ldots & \eta_{,1}^{(n+4)} \\ \eta_{,2}^1 & \eta_{,2}^2 & \ldots & \eta_{,2}^{(n+4)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{,n}^1 & \eta_{,n}^2 & \ldots & \eta_{,n}^{(n+4)} \end{pmatrix}_{n\times(n+4)} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} Y_{,1}^1 & Y_{,1}^2 & \ldots & Y_{,1}^{(n+4)} \\ Y_{,2}^1 & Y_{,2}^2 & \ldots & Y_{,2}^{(n+4)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{,n}^1 & Y_{,n}^2 & \ldots & Y_{,n}^{(n+4)} \end{pmatrix}_{n\times(n+4)}$$

onde, análogo ao caso do vetor posição Y, $\eta^l_{,i}$, $i=1,\ldots,n$, $l=1,\ldots,(n+4)$ significa a derivada da $l-$ésima função coordenada de η com relação a variável u_i.

Diferenciando (2.114) com relação a u_i obtemos para todo $i=1,\ldots,n$ e $l=1,\ldots,(n+4)$ que,

$$Y^l_{,i} = \left[\frac{h_i h_i'}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} b_i + h_i'\beta_i^1\right]\left(\delta_{l1}-\delta_{l2}\right) + \left[\frac{h_i h_i'}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i'\beta_i^3\right]\left(\delta_{l3}+\delta_{l(n+4)}\right) + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{c_i^{s+3}h_i'}{c_i^{i+3}}\right)\delta_{l(s+3)}.$$

Como $\eta_{,i} = b_i Y_{,i}$ temos que $\eta^l_{,i} = b_i Y^l_{,i}$, isto é,

$$\eta^l_{,i} = \left[\frac{h_i h_i'}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} b_i^2 + h_i'\beta_i^1 b_i\right]\left(\delta_{l1}-\delta_{l2}\right) + \left[\frac{h_i h_i' b_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i'\beta_i^3 b_i\right]\left(\delta_{l3}+\delta_{l(n+4)}\right) + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{c_i^{s+3}h_i' b_i}{c_i^{i+3}}\right)\delta_{l(s+3)}.$$

Integrando a expressão anterior e usando (2.138) obtemos,

$$\begin{aligned} \eta^l &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{h_k^2 b_k^2}{2\left(c_k^{k+3}\right)^2} + h_k\beta_k^1 b_k\right]\left(\delta_{l1}-\delta_{l2}\right) + \left[\frac{h_k^2 b_k}{2\left(c_k^{k+3}\right)^2} + h_k\beta_k^3 b_k\right]\left(\delta_{l3}+\delta_{l(n+4)}\right)\right. \\ &+ \left.\sum_{s=1}^{n}\frac{c_k^{s+3}h_k b_k}{c_k^{k+3}}\delta_{l(s+3)}\right\} + \psi^l, \quad \forall l=1,\ldots,(n+4), \end{aligned}$$

onde $\psi^l \in \mathbb{R}$ é constante de integração tal que $\psi^3 = \psi^{n+4}$, já que (2.138) é satisfeita. $\square$

Com a finalidade de simplificar os cálculos, vamos considerar a seguinte mudança de variáveis

$$v_i = \frac{h_i}{\sqrt{2}c_i^{i+3}} + \frac{c_i^{i+3}\beta_i^3}{\sqrt{2}}, \quad \forall i=1,\ldots,n. \tag{2.140}$$

Uma vez que estamos trabalhando com soma de funções de variáveis separadas, conforme no Lema 27, realizar a mudança (2.140) significa que estamos reparametrizando separadamente cada linha de curvatura considerada no início do nosso estudo. Em um primeiro momento essa modificação pode parecer artificial. No entanto, completando quadrados na expressão de Y^3 dada em (2.114) essa mudança aparece de maneira natural.

De acordo com a mudança (2.140), as expressões (2.114) e (2.137) de Y e η, respectivamente, podem ser reescritas como segue,

$$
\begin{aligned}
Y^l &= \sum_{k=1}^{n}\Bigg\{\left[v_k^2 b_k + \sqrt{2}v_k c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k) + \left(c_k^{k+3}\right)^2 \beta_k^3\left(\frac{\beta_k^3 b_k}{2} - \beta_k^1\right) + \gamma_k^1\right]\left(\delta_{l1} - \delta_{l2}\right) \\
&+ \left[v_k^2 - \frac{\left(c_k^{k+3}\beta_k^3\right)^2}{2} + \gamma_k^3\right]\left(\delta_{l3} + \delta_{l(n+4)}\right) \qquad (2.141) \\
&+ \sum_{s=1}^{n}\left\{\sqrt{2}v_k c_k^{s+3} - c_k^{s+3}c_k^{k+3}\beta_k^3 + \alpha_k^{s+3}\right\}\delta_{l(s+3)}\Bigg\} + \delta_{l(n+4)}, \quad \forall l = 1, \ldots, (n+4),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\eta^l &= \sum_{k=1}^{n}\Bigg\{\left[v_k^2 b_k^2 + \sqrt{2}v_k b_k c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k) + \left(c_k^{k+3}\right)^2 \beta_k^3 b_k\left(\frac{\beta_k^3 b_k}{2} - \beta_k^1\right)\right]\left(\delta_{l1} - \delta_{l2}\right) \\
&+ \left[v_k^2 b_k - \frac{b_k\left(c_k^{k+3}\beta_k^3\right)^2}{2}\right]\left(\delta_{l3} + \delta_{l(n+4)}\right) \qquad (2.142) \\
&+ \sum_{s=1}^{n}\left\{\sqrt{2}v_k b_k c_k^{s+3} - c_k^{s+3}c_k^{k+3}\beta_k^3 b_k\right\}\delta_{l(s+3)}\Bigg\} + \psi^l, \quad \forall l = 1, \ldots, (n+4).
\end{aligned}
$$

Tendo obtido Y e η, nosso objetivo agora é verificar que as relações da métrica g, não utilizadas até o momento, são satisfeitas. Com isso, vamos obter condições necessárias sobre as constantes de integração que apareceram ao longo dos cálculos. Observe que já fizemos uso de quase todas as relações de ortogonalidade da métrica g, falta usar que $Y, \eta \in C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$ são tipo luz e $\langle Y, \eta \rangle = 0$. A partir disso, podemos reescrever (2.141) e (2.142), obtendo assim uma expressão final para Y^l e η^l, $l = 1, \ldots, (n+4)$ nas duas próximas proposições.

É o que vamos ver na proposição a seguir,

Proposição 27. *Sejam $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície L-isotrópica com n curvaturas principais distintas que não se anulam. Considere $Y : M^n \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$ o vetor posição de Laguerre com a métrica de Laguerre $g = \langle dY, dY \rangle$ e $\eta : M^n \to C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$ a aplicação normal de Laguerre. Suponha que M^n é conexa e admite uma parametrização por linhas de* *curvatura com respeito a métrica g. Então, as funções coordenadas de Y são dadas por,*

$$
\begin{aligned}
Y^l &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\left[v_k^2 b_k+\sqrt{2}v_k c_k^{k+3}(\beta_k^1-\beta_k^3 b_k)+\left(c_k^{k+3}\right)^2\beta_k^3\left(\frac{\beta_k^3 b_k}{2}-\beta_k^1\right)+\gamma_k^1\right]\left(\delta_{l1}-\delta_{l2}\right)\right\}\\
&+\left[\sum_{k=1}^{n} v_k^2-\frac{1}{2}\right]\left(\delta_{l3}+\delta_{l(n+4)}\right)\\
&+\sum_{k,s=1}^{n}\left\{\sqrt{2}v_k c_k^{s+3}\right\}\delta_{l(s+3)}+\delta_{l(n+4)},\ \ \forall l=1,\dots,(n+4), \qquad (2.143)
\end{aligned}
$$

Demonstração. Para começar, usando (2.105), (2.107) e $\langle Y,Y\rangle=0$ temos,

$$
\begin{aligned}
&-(Y^1)^2+(Y^1)^2+(Y^3)^2+\sum_{s=1}^{n}(Y^{s+3})^2-(1+Y^3)^2=0\\
&\sum_{s=1}^{n}(Y^{s+3})^2-2Y^3-1=0, \qquad (2.144)
\end{aligned}
$$

onde agora Y é função de $(v_1,v_2,\dots,v_n)$.

Diferenciando (2.144) com relação a v_i, $i=1,\dots,n$, temos,

$$\sum_{s=1}^{n} Y^{s+3}Y^{s+3}_{,i}-Y^3_{,i}=0 \qquad (2.145)$$

Como, por (2.141),

$$Y^{s+3}_{,i}=\sqrt{2}c_i^{s+3} \ \text{ e } \ Y^3_{,i}=2v_i, \qquad (2.146)$$

derivando novamente (2.145) com relação a v_j, $j\neq i=1,\dots,n$ obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n} Y^{s+3}_{,j}Y^{s+3}_{,i}=0\\
&\sum_{s=1}^{n} c_j^{s+3}c_i^{s+3}=0,\ \ \forall i\neq j=1,\dots,n. \qquad (2.147)
\end{aligned}
$$

A condição obtida em (2.147) é um fato muito importante para nosso cálculos. Reunindo essa informação e lembrando que $\sum_{s=1}^{n}\left(c_i^{s+3}\right)^2=1$, $\forall i=1,\dots,n$, temos

$$\sum_{s=1}^{n} c_i^{s+3}c_j^{s+3}=\delta_{ij},\ \ \forall i,j=1,\dots,n, \qquad (2.148)$$

ou seja, a matriz $\mathcal{C}_{n\times n}$ composta por todas as constantes c_i^{s+3} é ortogonal, isto é, $\mathcal{C}$ admite inversa e $\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^T$, onde

$$\mathcal{C}_{n\times n} = \begin{pmatrix} c_1^4 & c_1^5 & c_1^6 & \dots & c_1^{n+3} \\ c_2^4 & c_2^5 & c_2^6 & \dots & c_2^{n+3} \\ c_3^4 & c_3^5 & c_3^6 & \dots & c_3^{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n^4 & c_n^5 & c_n^6 & \dots & c_n^{n+3} \end{pmatrix}_{n\times n} . \tag{2.149}$$

A partir de agora, sempre que mencionada a matriz $\mathcal{C}$ estaremos referindo a (2.149).

Agora, usando o fato que a matriz $\mathcal{C}$ é ortogonal, vamos obter mais condições sobre as constantes de integração presentes em (2.141). Substituindo as condições (2.148) em (2.145) temos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n} Y^{s+3}Y^{s+3}_{,i} - Y^3_{,i} = 0\\
&\sum_{s=1}^{n} \sqrt{2}c_i^{s+3}Y^{s+3} - 2v_i = 0\\
&\sum_{s,k=1}^{n} \left\{ 2v_k c_i^{s+3}c_k^{s+3} - \sqrt{2}c_i^{s+3}c_k^{s+3}c_k^{k+3}\beta_k^3 + \sqrt{2}c_i^{s+3}\alpha_k^{s+3} \right\} - 2v_i = 0\\
&\sum_{k=1}^{n} 2v_k\delta_{ik} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2}c_k^{k+3}\beta_k^3 k\delta_{ik} + \sum_{s,k=1}^{n} \sqrt{2}c_i^{s+3}\alpha_k^{s+3} - 2v_i = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$\sum_{s,k=1}^{n} c_i^{s+3}\alpha_k^{s+3} = c_i^{i+3}\beta_i^3, \ \ \forall i = 1,\dots,n. \tag{2.150}$$

Reescrevendo essa última expressão matricialmente temos,

$$\mathcal{C}_{n\times n}\alpha_{n\times 1} = \mathcal{A}_{n\times 1}, \tag{2.151}$$

onde

$$\alpha_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^4 \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^5 \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^6 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{n+3} \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \mathcal{A}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} c_1^4\beta_1^3 \\ c_2^5\beta_2^3 \\ c_3^6\beta_3^3 \\ \vdots \\ c_n^{n+3}\beta_n^3 \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Como $\mathcal{C}$ é ortogonal, segue de (2.151)

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_{n\times n}\alpha_{n\times 1} = \mathcal{A}_{n\times 1} \\ &\mathcal{C}_{n\times n}^{-1}\mathcal{C}_{n\times n}\alpha_{n\times 1} = \mathcal{C}_{n\times n}^{-1}\mathcal{A}_{n\times 1} \\ &\alpha_{n\times 1} = \mathcal{C}_{n\times n}^{T}\mathcal{A}_{n\times 1}, \end{aligned} \tag{2.152}$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^{s+3}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\beta_k^3 c_k^{s+3} c_k^{k+3}\right), \quad \forall s = 1,\ldots,n. \tag{2.153}$$

Observe que cada s indica uma linha da matriz dada pela equação (2.152).

Passamos nesse momento à análise da equação (2.144), a fim de escrever as constantes γ_k^3 em termo de $c's$ e β_k^3. De (2.141) e (2.153) temos,

$$Y^{s+3} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2} v_k c_k^{s+3}. \tag{2.154}$$

De (2.141),

$$Y^3 = \sum_{k=1}^{n}\left[v_k^2 - \frac{\left(c_k^{k+3}\beta_k^3\right)^2}{2} + \gamma_k^3\right]. \tag{2.155}$$

Note que, usando (2.148) temos,

$$\sum_{s=1}^{n}(Y^{s+3})^2 = \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2}v_k c_k^{s+3}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{2}v_j c_j^{s+3}\right] = 2\sum_{s,k,j=1}^{n} v_k v_j c_j^{s+3} c_k^{s+3} = 2\sum_{k=1}^{n} v_k^2. \tag{2.156}$$

Então, substituindo (2.154), (2.155) e (2.156) em (2.144) obtemos,

$$2\sum_{k=1}^{n} v_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\left[v_k^2 - \frac{\left(c_k^{k+3}\beta_k^3\right)^2}{2} + \gamma_k^3\right] - 1 = 0.$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\gamma_k^3\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\left(c_k^{k+3}\beta_k^3\right)^2}{2}\right] - \frac{1}{2}. \tag{2.157}$$

Portanto, usando (2.153) e (2.157) em (2.141) obtemos (2.143). □

Na sequência, usando as relações de ortogonalidade da métrica g, vamos obter condições sobre as constantes de integração envolvidas nas funções coordenadas de η.

Proposição 28. *Nas mesmas condições da Proposição 27, as funções coordenadas de $\eta \in C^{n+3} \subset \mathbb{R}_2^{n+4}$ são dadas como segue,*

$$\begin{aligned}
\eta^l &= \sum_{k=1}^{n}\left[v_k^2 b_k^2 + \sqrt{2} v_k b_k c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k) + \frac{(c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k))^2}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\right]\Big(\delta_{l1} - \delta_{l2}\Big) \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\left\{v_k^2 b_k - \left[(c_k^{k+3})^2 \beta_k^3 \left(\frac{\beta_k^3 b_k}{2} - \beta_k^1\right) + \gamma_k^1\right]\right\}\Big(\delta_{l3} + \delta_{l(n+4)}\Big) \\
&+ \sum_{k,s=1}^{n}\left\{\sqrt{2} v_k b_k + c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k)\right\} c_k^{s+3}\delta_{l(s+3)}, \quad \forall l = 1, \ldots, (n+4),
\end{aligned} \tag{2.158}$$

onde $\varepsilon = 1$, se $l = 1$ e $\varepsilon = -1$, se $l = 2$.

Demonstração. Primeiramente, lembrando que $\langle \eta, P \rangle = -1$, onde $P = (1, -1, 0, \vec{0}, 0)$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ segue que,

$$\eta^1 + \eta^2 = 1. \tag{2.159}$$

Dessa forma, usando (2.142) obtemos,

$$\psi^1 + \psi^2 = 1. \tag{2.160}$$

Note que em virtude da expressão (2.159) não temos a propriedade que $\eta^2 = -\eta^1$, como acontecia no caso do vetor posição Y. Porém as duas primeiras funções coordenadas de η se assemelham em grande parte.

Agora, vamos utilizar a condição que $\langle \eta, \eta \rangle = 0$. Por (2.138) e (2.159) temos,

$$
\begin{aligned}
&-(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 + \sum_{s=1}^{n} (\eta^{s+3})^2 - (\eta^{n+4})^2 = 0\\
&-(\eta^1)^2 + (1-\eta^1)^2 + \sum_{s=1}^{n} (\eta^{s+3})^2 = 0\\
&1 - 2\eta^1 + \sum_{s=1}^{n} (\eta^{s+3})^2 = 0, \qquad (2.161)
\end{aligned}
$$

onde η é função de $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Diferenciando (2.161) com relação a v_i, $i = 1 \ldots, n$ obtemos,

$$\sum_{s=1}^{n} \eta^{s+3} \eta^{s+3}_{,i} - \eta^1_{,i} = 0, \qquad (2.162)$$

na qual, por (2.142), temos que,

$$\eta^{s+3}_{,i} = \sqrt{2} b_i c_i^{s+3}, \quad \text{e,} \quad \eta^1_i = 2 v_i b_i^2 + \sqrt{2} b_i c_i^{i+3} (\beta_i^1 - \beta_i^3 b_i). \qquad (2.163)$$

Substituindo (2.142) (para $l = s+3$) e (2.163) em (2.162), e usando (2.148), obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n} \left\{ \sqrt{2} b_i c_i^{s+3} \left[\psi^{s+3} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2} v_k b_k c_k^{s+3} - c_k^{s+3} c_k^{k+3} \beta_k^3 b_k \right) \right] \right\} - 2 v_i b_i^2 - \sqrt{2} b_i c_i^{i+3} (\beta_i^1 - \beta_i^3 b_i) = 0\\
&\sum_{s=1}^{n} \sqrt{2} b_i c_i^{s+3} \psi^{s+3} + 2 \sum_{k=1}^{n} v_k b_k b_i \delta_{ik} - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} c_k^{k+3} \beta_k^3 b_k b_i - 2 v_i b_i^2 - \sqrt{2} b_i c_i^{i+3} (\beta_i^1 - \beta_i^3 b_i) = 0.
\end{aligned}
$$

Então, temos que a última igualdade se reduz a,

$$\sum_{s=1}^{n} \sqrt{2} b_i c_i^{s+3} \psi^{s+3} - \sqrt{2} b_i c_i^{i+3} \beta_i^1 = 0$$

Logo, como $b_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ obtemos a seguinte relação,

$$\sum_{s=1}^{n} c_i^{s+3} \psi^{s+3} = c_i^{i+3} \beta_i^1, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \qquad (2.164)$$

Recorrendo novamente as matrizes, vamos reescrever essa última expressão matricialmente,

$$\mathcal{C}_{n\times n} \psi_{n\times 1} = \mathcal{D}_{n\times 1}, \qquad (2.165)$$

onde

$$\psi_{n\times 1}=\begin{pmatrix}\psi^4\\ \psi^5\\ \psi^6\\ \vdots\\ \psi^{n+3}\end{pmatrix}_{n\times 1},\quad \mathcal{D}_{n\times 1}=\begin{pmatrix}c_1^4\beta_1^1\\ c_2^5\beta_2^1\\ c_3^6\beta_3^1\\ \vdots\\ c_n^{n+3}\beta_n^1\end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Como $\mathcal{C}$ é ortogonal, segue de (2.165)

$$\psi_{n\times 1}=\mathcal{C}^t_{n\times n}\mathcal{D}_{n\times 1},$$

ou seja,

$$\psi^{s+3}=\sum_{k=1}^{n}\left(c_k^{s+3}c_k^{k+3}\beta_k^1\right),\quad \forall s=1,\ldots,n. \tag{2.166}$$

Observe que cada s indica uma linha da matriz dada pela equação (2.166).

Considere (2.161). Usando (2.142), (2.148) e (2.166) obtemos,

$$\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}v_kb_kc_k^{s+3}-c_k^{s+3}c_k^{k+3}\beta_k^3b_k\right)+\psi^{s+3}\right]^2-\sum_{k=1}^{n}\Bigg[2v_k^2b_k^2+$$
$$+2\sqrt{2}v_kb_kc_k^{k+3}(\beta_k^1-\beta_k^3b_k)++2(c_k^{k+3})^2\beta_k^3b_k\left(\frac{\beta_k^3b_k}{2}-\beta_k^1\right)\Bigg]-2\psi^1+1=0.$$

Logo,

$$2\sum_{k,t=1}^{n}v_kv_tb_kb_t\delta_{kt}+2\sqrt{2}\sum_{t,k=1}^{n}\left[v_tb_tc_k^{k+3}(\beta_k^1-\beta_k^3b_k)\delta_{kt}\right]+$$
$$+\sum_{t,k=1}^{n}\left[c_k^{k+3}c_t^{t+3}(\beta_k^1-\beta_k^3b_k)(\beta_t^1-\beta_t^3b_t)\delta_{kt}\right]-\sum_{k=1}^{n}\Bigg[2v_k^2b_k^2+2\sqrt{2}v_kb_kc_k^{k+3}(\beta_k^1-\beta_k^3b_k)+$$
$$+2(c_k^{k+3})^2\beta_k^3b_k\left(\frac{\beta_k^3b_k}{2}-\beta_k^1\right)\Bigg]-2\psi^1+1=0,$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(c_k^{k+3})^2(\beta_k^1-\beta_k^3b_k)^2\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[2(c_k^{k+3})^2\beta_k^3b_k\left(\frac{\beta_k^3b_k}{2}-\beta_k^1\right)\right]-2\psi^1+1=0.$$

Portanto obtemos,

$$\psi^1 = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\left(c_k^{k+3}\beta_k^1\right)^2}{2}\right] + \frac{1}{2}. \tag{2.167}$$

Usando (2.160), (2.166) e (2.167) em (2.142) podemos reescrever η^l como segue,

$$\begin{aligned}
\eta^l &= \sum_{k=1}^{n}\left[v_k^2 b_k^2 + \sqrt{2}v_k b_k c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k) + \frac{(c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k))^2}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\right]\left(\delta_{l1} - \delta_{l2}\right) \\
&+ \left\{\psi^3 + \sum_{k=1}^{n}\left[v_k^2 b_k - \frac{b_k\left(c_k^{k+3}\beta_k^3\right)^2}{2}\right]\right\}\left(\delta_{l3} + \delta_{l(n+4)}\right) \\
&+ \sum_{k,s=1}^{n}\left\{\sqrt{2}v_k b_k + c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k)\right\}c_k^{s+3}\delta_{l(s+3)}, \quad \forall l = 1, \ldots, (n+4),
\end{aligned} \tag{2.168}$$

onde $\varepsilon = 1$, se $l = 1$ e $\varepsilon = -1$, se $l = 2$.

Resta considerar a condição $\langle Y, \eta\rangle = 0$ para obter a expressão de ψ^3. Usando as informações (2.105), (2.107), (2.138) e (2.159) temos,

$$-Y^1\eta^1 + (-Y^1)(1-\eta^1) + Y^3\eta^3 + \sum_{s=1}^{n} Y^{s+3}\eta^{s+3} - (1+Y^3)\eta^3 = 0,$$

que se reduz a

$$-Y^1 + \sum_{s=1}^{n} Y^{s+3}\eta^{s+3} - \eta^3 = 0. \tag{2.169}$$

De maneira essencialmente análoga aos cálculos anteriores, substituindo (2.143) e (2.168) em (2.169) e usando (2.148) obtemos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}v_k c_k^{s+3}\right)\right]\left[\sum_{t=1}^{n}\left(\sqrt{2}v_t c_t^{s+3} b_t + c_t^{s+3}c_t^{t+3}(\beta_t^1 - \beta_t^3 b_t)\right)\right] + \\
&- \sum_{k=1}^{n}\left[v_k^2 b_k + \sqrt{2}v_k c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k) + \left(c_k^{k+3}\right)^2\beta_k^3\left(\frac{\beta_k^3 b_k}{2} - \beta_k^1\right) + \gamma_k^1\right] + \\
&- \sum_{k=1}^{n}\left[v_k^2 b_k - \frac{b_k(c_k^{k+3}\beta_k^3)^2}{2}\right] - \psi^3 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k,t=1}^{n}\left[2v_kv_tb_t\delta_{kt}+\sqrt{2}v_kc_t^{t+3}(\beta_t^1-\beta_t^3b_t)\delta_{kt}\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(c_k^{k+3}\right)^2\beta_k^3\beta_k^1-2v_k^2b_k-\sqrt{2}v_kc_k^{k+3}(\beta_k^1-\beta_k^3b_k)-\gamma_k^1\right]-\psi^3=0.$$

Logo, obtemos a seguinte relação

$$\psi^3=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(c_k^{k+3}\right)^2\beta_k^3\beta_k^1-\gamma_k^1\right]. \tag{2.170}$$

Por fim, substituindo (2.170) em (2.168) obtemos a expressão (2.158). □

No que segue, uma vez obtidos os vetores $Y,\eta\in\mathbb{R}_2^{n+4}$, podemos apresentar uma expressão explícita para x e seu normal unitário ξ. Note que isso é equivalente a obter, a menos de transformação de Laguerre, as hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizadas por linhas de curvatura. Mais precisamente o seguinte resultado,

Teorema 28. *Sejam $x:M^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com n curvaturas principais distintas que não se anulam, $Y:M^n\to C^{n+3}\subset\mathbb{R}_2^{n+4}$ o vetor posição de Laguerre com a métrica de Laguerre $g=\langle dY,dY\rangle$ e λ os autovalores do tensor $\mathbb{L}$. Suponha que M^n é conexa e admite uma parametrização por linhas de curvatura com respeito a métrica g. Se x é uma hipersuperfície L-isotrópica, então $\lambda=0$ e x é hipersuperfície $L-$ isoparamétrica. Além disso, a menos de transformação de Laguerre, esta hipersuperfície é equivalente à descrita em* (2.49).

Demonstração. Pelo Lema 25 temos $\lambda=0$ e x e hipersuperfície $L-$ isoparamétrica. Resta verificar que x é Laguerre equivalente à hipersuperfície descrita em (2.49). Com esse objetivo, vamos determinar explicitamente x.

Por definição $Y=\rho(x\cdot\xi,-x\cdot\xi,\xi,1)$, por outro lado, segue de (2.143) que,

$$\rho=Y^{n+4}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}v_k^2. \tag{2.171}$$

Observe que $\xi^q = \dfrac{Y^{q+2}}{\rho}$, $q = 1, \ldots, (n+1)$, onde ξ^q são as coordenadas do campo normal unitário $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$. Então, de (2.143) obtemos que,

$$\xi^q = \frac{1}{\rho}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} v_k^2 - \frac{1}{2}\right]\delta_{q1} + \sum_{k,s=1}^{n} \sqrt{2} v_k c_k^{s+3} \delta_{q(s+1)}\right\}, \; q = 1, \ldots, (n+1). \tag{2.172}$$

Note que, usando (2.171) podemos reescrever a expressão (2.172) da seguinte maneira,

$$\xi^q = \frac{\rho - 1}{\rho}\delta_{q1} + \frac{1}{\rho}\left\{\sum_{k,s=1}^{n} \sqrt{2} v_k c_k^{s+3} \delta_{q(s+1)}\right\}, \; q = 1, \ldots, (n+1). \tag{2.173}$$

Agora, sabemos que segundo a definição (2.8),

$$\eta = \Big(\frac{1+|x|^2}{2} + rx\cdot\xi \, , \, \frac{1-|x|^2}{2} - rx\cdot\xi \, , \, x + r\xi \, , \, r\Big).$$

Comparando a definição com o η determinado em (2.158) vemos que,

$$r = \sum_{k=1}^{n}\left\{v_k^2 b_k - \left[\big(c_k^{k+3}\big)^2 \beta_k^3 \left(\frac{\beta_k^3 b_k}{2} - \beta_k^1\right) + \gamma_k^1\right]\right\}. \tag{2.174}$$

Além disso, obtemos que as funções coordenadas da imersão $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ são dadas como segue,

$$x^q = \eta^{q+2} - r\xi^q, \quad q = 1, \ldots, (n+1), \tag{2.175}$$

onde, por (2.158),

$$\begin{aligned}\eta^{q+2} = &\sum_{k=1}^{n}\left\{v_k^2 b_k - \left[\big(c_k^{k+3}\big)^2 \beta_k^3 \left(\frac{\beta_k^3 b_k}{2} - \beta_k^1\right) + \gamma_k^1\right]\right\}\delta_{q1} \\ &+ \sum_{k,s=1}^{n}\Big\{\sqrt{2} v_k b_k + c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k)\Big\} c_k^{s+3} \delta_{q(s+1)}, \;\; \forall q = 1, \ldots, (n+1).\end{aligned} \tag{2.176}$$

Por (2.174), podemos reescrever a expressão (2.176) como sendo,

$$\eta^{q+2} = r\delta_{q1} + \sum_{k,s=1}^{n}\Big\{\sqrt{2} v_k b_k + c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k)\Big\} c_k^{s+3} \delta_{q(s+1)}, \;\; \forall q = 1, \ldots, (n+1). \tag{2.177}$$

Então, segue de (2.173), (2.175) (2.177) que

$$x^q = r\delta_{q1} + \sum_{k,s=1}^{n} \left\{ \sqrt{2} v_k b_k + c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k) \right\} c_k^{s+3} \delta_{q(s+1)} +$$
$$-\frac{r(\rho-1)}{\rho}\delta_{q1} - \frac{r}{\rho}\left\{ \sum_{k,s=1}^{n} \sqrt{2} v_k c_k^{s+3} \delta_{q(s+1)} \right\}.$$

Logo, as funções coordenadas da imersão x são dada por,

$$x^q = \frac{r}{\rho}\delta_{q1} + \sum_{k,s=1}^{n} \left\{ \sqrt{2} v_k \left(b_k - \frac{r}{\rho} \right) + c_k^{k+3}(\beta_k^1 - \beta_k^3 b_k) \right\} c_k^{s+3} \delta_{q(s+1)}, \quad q = 1, \ldots, (n+1). \tag{2.178}$$

Por fim, considere a seguinte mudança de coordenadas

$$\overline{v_k} = \frac{\sqrt{2} v_k}{\overline{b_k}},$$

onde $\overline{b_k} = \dfrac{1}{b_k}$.

Fazendo essa mudança na expressão de ρ dada em (2.171) obtemos,

$$\rho = \frac{1}{2}\left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{v_k}\,\overline{b_k})^2 \right\}.$$

Agora, fazendo essa mesma mudança na expressão de r dada em (2.174) obtemos,

$$r = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\overline{v_k}^2 \overline{b_k}}{2} - \left[(c_k^{k+3})^2 \beta_k^3 \left(\frac{\beta_k^3}{2\overline{b_k}} - \beta_k^1 \right) + \gamma_k^1 \right] \right\}.$$

Portanto, as expressões finais para ρ e r são dadas por,

$$\rho = \frac{1}{2}\left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{v_k}\,\overline{b_k})^2 \right\}, \tag{2.179}$$

$$r = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\overline{v_k}^2 \overline{b_k}}{2} \right\} + \phi, \tag{2.180}$$

onde

$$\phi = -2\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\left(c_k^{k+3}\right)^2\beta_k^3\left(\frac{\beta_k^3}{2\overline{b_k}}-\beta_k^1\right)+\gamma_k^1\right]\right\}. \quad (2.181)$$

Com essa nova mudança, segue de (2.172) e (2.178) que a imersão x e seu normal ξ são dados por,

$$x^q = \frac{r}{\rho}\delta_{q1} + \sum_{k,s=1}^{n}\left\{\overline{v_k}\left(1-\frac{r\overline{b_k}}{\rho}\right)+c_k^{k+3}\left(\beta_k^1-\frac{\beta_k^3}{\overline{b_k}}\right)\right\}c_k^{s+3}\delta_{q(s+1)}, \quad q=1,\ldots,(n+1), \quad (2.182)$$

e

$$\xi^q = \frac{1}{2\rho}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(\overline{v_k}\overline{b_k})^2-1\right]\delta_{q1}+\sum_{k,s=1}^{n}\overline{v_k}\overline{b_k}c_k^{s+3}\delta_{q(s+1)}\right\}, \; q=1,\ldots,(n+1). \quad (2.183)$$

Portanto,

$$x = \left(0,\sum_{k=1}^{n}\overline{v_k}c_k^4,\ldots,\sum_{k=1}^{n}\overline{v_k}c_k^{n+3}\right)-\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{b_k}\overline{v_k}^2+\phi}{1+\sum_{k=1}^{n}(\overline{v_k}\overline{b_k})^2}\right]\left(-1,\sum_{k=1}^{n}\overline{v_k}\overline{b_k}c_k^4,\ldots,\sum_{k=1}^{n}\overline{v_k}\overline{b_k}c_k^{n+3}\right)$$
$$+\left(0,\sum_{k=1}^{n}c_k^4c_k^{k+3}\left(\beta_k^1-\frac{\beta_k^3}{\overline{b_k}}\right),\ldots,\sum_{k=1}^{n}c_k^{n+3}c_k^{k+3}\left(\beta_k^1-\frac{\beta_k^3}{\overline{b_k}}\right)\right), \quad (2.184)$$

onde ϕ é dada por (2.181).

Além disso, o campo normal unitário é dado por ξ

$$\xi = \left[\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n}(\overline{v_k}\overline{b_k})^2}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}(\overline{v_k}\overline{b_k})^2-1\,,\,2\sum_{k=1}^{n}\overline{v_k}\overline{b_k}c_k^4\,,\,\ldots\,,\,2\sum_{k=1}^{n}\overline{v_k}\overline{b_k}c_k^{n+3}\right). \quad (2.185)$$

Observe que as constantes de integração β_k^1,β_k^3 e γ_k^1, para todo $k=1,\ldots,n$ podem ser escolhidas de forma arbitrária. A indicação mais importe é sobre as constantes $c's$ que devem ser escolhidas de modo que a matriz $\mathcal{C}$ dada em (2.149) seja ortogonal. Essa escolha está essencialmente dizendo quem são os vetores tangentes de Y, conforme (2.146). Uma vez obtido Y é possível determinar η, e por sua vez x e ξ. Dessa forma, ao escolher constantes, estamos obtendo hipersuperfícies que são Laguerre equivalentes. Portanto, a família de hipersuperfícies obtidas em (2.184) é Laguerre equivalente a (2.49). $\square$

No que segue, para exemplicar, vamos descrever a escolha de constantes que reduz a hipersuperfícies (2.184) a (2.49).

Exemplo 29. Considere primeiramente a matriz $\mathcal{C}$ como sendo a matriz identidade,

$$\mathcal{C}_{n\times n} = \begin{pmatrix} c_1^4 & c_1^5 & c_1^6 & \dots & c_1^{n+3} \\ c_2^4 & c_2^5 & c_2^6 & \dots & c_2^{n+3} \\ c_3^4 & c_3^5 & c_3^6 & \dots & c_3^{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n^4 & c_n^5 & c_n^6 & \dots & c_n^{n+3} \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{2.186}$$

Com essa escolha, a imersão x obtida em (2.184) se reduz a,

$$\begin{aligned} x = & \left(0, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}\right) - \left[\frac{\sum_{k=1}^n \overline{b_k}\overline{v_k}^2 + \phi}{1 + \sum_{k=1}^n (\overline{v_k}\overline{b_k})^2}\right] \left(-1, \overline{v_1}\overline{b_1}, \overline{v_2}\overline{b_2}, \dots, \overline{v_n}\overline{b_n}\right) \\ & + \left(0, \left(\beta_1^1 - \frac{\beta_1^3}{\overline{b_1}}\right), \left(\beta_2^1 - \frac{\beta_2^3}{\overline{b_2}}\right), \dots, \left(\beta_n^1 - \frac{\beta_n^3}{\overline{b_n}}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.187}$$

onde $\phi = -2\sum_{k=1}^n \left\{ \left[\beta_k^3 \left(\frac{\beta_k^3}{2\overline{b_k}} - \beta_k^1 \right) + \gamma_k^1 \right] \right\}$.
O campo normal unitário é dado por

$$\xi = \left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n (\overline{v_k}\overline{b_k})^2}\right] \left(\sum_{k=1}^n (\overline{v_k}\overline{b_k})^2 - 1, 2\overline{v_1}\overline{b_1}, 2\overline{v_2}\overline{b_2}, \dots, 2\overline{v_n}\overline{b_n}\right). \tag{2.188}$$

Note que, basta escolher as constantes $c's$ para obter o mesmo normal dado em (2.50).

Agora, considerando
$$\beta_k^1 - \frac{\beta_k^3}{\overline{b_k}} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$$
em (2.187) temos,

$$x = \left(0, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}\right) - \left[\frac{\sum_{k=1}^n \overline{b_k}\overline{v_k}^2 + \phi}{1 + \sum_{k=1}^n (\overline{v_k}\overline{b_k})^2}\right] \left(-1, \overline{v_1}\overline{b_1}, \overline{v_2}\overline{b_2}, \dots, \overline{v_n}\overline{b_n}\right), \tag{2.189}$$

onde $\phi = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{(\beta_k^3)^2}{\overline{b_k}} - 2\gamma_k^1 \right\}$. Fazendo $\phi = 0$ obtemos (2.49).

Observação 30. Em [7] Corro, A.V.; Ferreira, W.; Tenenblat, K obtiveram a hipersuperfície descrita em (2.189) como exemplo de uma família de hipersuperfícies de Dupin. Em um primeiro momento, a hipersuperfície (2.189) pode parecer uma generalização de (2.49), onde as duas se diferem pela escolha de ϕ. Porém, com os nossos cálculos vimos que escolher a constante ϕ é nada mais que escolher o vetor posição Y, o que nos dá equivalência no sentido de Laguerre. Dessa forma, do ponto de vista da geometria de Laguerre (2.189) e (2.49) são equivalentes.

Observação 31. Observe que ao longo desse trabalho obtivemos resultados a respeito das hipersuperfícies L-isotrópicas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\lambda = 0$. Para trabalhos futuros gostaríamos de conhecer melhor o mundo das L-isotrópicas quando $\lambda > 0$. O principal objetivo seria classificar de maneira explícita quem são essas hipersuperfícies, a menos de transformação de Laguerre.

Apêndice A

No que segue, considerando um tensor simétrico arbitrário $\mathbb{T}$, definido em uma variedade Riemanniana (M^n, g), vamos apresentar a identidade generalizada de Cartan provada por Li, H.Z em [10]. As informações apresentadas são utilizadas na segunda seção do Capítulo 2.

Seja $T = \sum_{ij} T_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ um tensor simétrico definido em uma variedade Riemanniana M^n. A derivada covariante primeira e segunda desse tensor são dada por, respectivamente,

$$\sum_k T_{ij,k}\omega_k = dT_{ij} + \sum_k T_{kj}\omega_{ki} + \sum_k T_{ik}\omega_{kj}, \tag{A.1}$$

$$\sum_l T_{ij,kl}\omega_l = dT_{ij,k} + \sum_l T_{lj,k}\omega_{li} + \sum_l T_{il,k}\omega_{lj} + \sum_l T_{ij,l}\omega_{lk}. \tag{A.2}$$

Considerando a derivada exterior da primeira expressão de (A.1) temos,

$$\sum_{k,l} T_{ij,kl}\omega_l \wedge \omega_k = \sum_l T_{lj}\Omega_{li} + \sum_l T_{il}\Omega_{lj} \tag{A.3}$$

Assim, obtemos a seguinte identidade,

$$T_{ij,km} - T_{ij,mk} = \sum_l T_{lj}R_{likm} + \sum_l T_{il}R_{ljkm}, \tag{A.4}$$

onde R_{likm} são as componentes do tensor curvatura de M^n com respeito a métrica g.

Definição 17. Dizemos que um tensor simétrico $T = \sum_{ij} T_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$, isto é, $T_{ij} = T_{ji}$ é um *tensor de Codazzi*, se

$$T_{ij,k} = T_{ik,j}. \tag{A.5}$$

Definição 18. Seja $T = \sum\limits_{ij} T_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ um tensor de Codazzi em uma variedade Riemanniana (M^n, g). Dizemos que T é um *tensor isoparamétrico* se seus autovalores são todos constantes com multiplicidades constantes.

Em [10] Li, H.Z provou a identidade descrita a seguir,

Teorema 32. *Considere* $\mathbb{T} = \sum\limits_{ij} T_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ *um tensor isoparamétrico em* M^n*. Seja* $T_{ij} = t_i\delta_{ij}$*, onde* t_i *são os autovalores constantes de* $\mathbb{T}$ *então segue a seguinte identidade para todo* $i = 1, \ldots, n$*,*

$$\sum_{j \notin [i]} \frac{R_{ijij}}{(t_i - t_j)} = 0, \tag{A.6}$$

onde R_{ijij} *é a curvatura seccional em* M^n *e* $[i] = \{l \mid t_i = t_l\}$*.*

Demonstração. Seja $\mathbb{T} = \sum\limits_{ij} T_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ um tensor isoparamétrico em M^n. Na vizinhança de $p \in M$, escolha um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ com base dual $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ tal que

$$T_{ij} = t_i\delta_{ij}, \tag{A.7}$$

onde, pela hipótese, t_i são constantes.
Primeiro vamos considerar o caso em que $n = 2$. Seja $t_1 \neq t_2$ os autovalores constantes do tensor $\mathbb{T}$. Considerando em (A.1) $i = 1$, $j = 2$ e usando (A.7) temos,

$$\begin{aligned} &\sum_k T_{12,k}\omega_k = dT_{12} + \sum_k T_{k2}\omega_{k1} + \sum_k T_{1k}\omega_{k2} \\ &T_{12,1}\omega_1 + T_{12,2}\omega_2 = (t_1 - t_2)\omega_{12}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Por outro lado, escolhendo em (A.1) $i = j = 1$ e usando (A.7) temos,

$$\begin{aligned} &\sum_k T_{11,k}\omega_k = dT_{11} + \sum_k T_{k1}\omega_{k1} + \sum_k T_{1k}\omega_{k1} \\ &T_{11,1}\omega_1 + T_{11,2}\omega_2 = 0, \end{aligned}$$

então

$$T_{11,2} = 0. \tag{A.9}$$

Analogamente, escolhendo $i = j = 2$ em (A.1) obtemos,

$$T_{22,1} = 0. \tag{A.10}$$

Como $\mathbb{T}$ é um tensor de Codazzi,

$$T_{11,2} = T_{12,1}, \quad T_{22,1} = T_{21,1} = T_{12,1}.$$

Logo, segue por (A.8) - (A.10) que

$$(t_1 - t_2)\omega_{12} = 0.$$

Uma vez que $t_1 \neq t_2$ temos que $\omega_{12} = 0$. Portanto, a identidade (A.6) é satisfeita.
Agora, considere o caso $n \geq 3$. Dessa forma temos pelo menos três autovalores t_i distintos e não nulos, onde $[i] = \{l \mid t_i = t_l\}$ é um conjunto de índices que representa a multiplicidade de cada t_i.
Por (A.1) e (A.7) temos,

$$\begin{aligned}
\sum_k T_{ij,k}\omega_k &= dT_{ij} + \sum_k T_{ik}\omega_{kj} + \sum_k T_{kj}\omega_{ki} \\
\sum_k T_{ij,k}\omega_k &= \sum_k t_i\delta_{ik}\omega_{kj} + \sum_k t_k\delta_{kj}\omega_{ki} \\
\sum_k T_{ij,k}\omega_k &= (t_i - t_j)\omega_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Então,

$$\omega_{ij} = \sum_k \frac{T_{ij,k}}{(t_i - t_j)}\omega_k, \quad j \notin [i]. \tag{A.12}$$

O objetivo é calcular, por meio da derivada covariante de segunda ordem $T_{ii,jj} - T_{jj,ii}$, $i \neq j$. Vamos determinar $T_{ii,jj}$ e os cálculos para $T_{jj,ii}$ seguem análogos. Pela expressão da derivada covariante segunda do tensor $\mathbb{T}$ dada em (A.2) temos,

$$\sum_l T_{ij,kl}\omega_l = dT_{ij,k} + \sum_l T_{lj,k}\omega_{li} + \sum_l T_{il,k}\omega_{lj} + \sum_l T_{ij,l}\omega_{lk}.$$

Trocando j por i e k por j temos,

$$\sum_l T_{ii,jl}\omega_l = dT_{ii,j} + \sum_l T_{li,j}\omega_{li} + \sum_l T_{il,j}\omega_{li} + \sum_l T_{ii,l}\omega_{lj}. \tag{A.13}$$

Usando (A.5) e (A.11) em (A.13) temos,

$$
\begin{aligned}
\sum_l T_{ii,jl}\omega_l &= dT_{ii,j} + \sum_l T_{li,j}\omega_{li} + \sum_l T_{il,j}\omega_{li} + \sum_l T_{ii,l}\omega_{lj}\\
\sum_l T_{ii,jl}\omega_l &= \sum_l T_{li,j}\omega_{li} + \sum_l T_{il,j}\omega_{li}\\
\sum_l T_{ii,jl}\omega_l &= 2\sum_l T_{il,j}\omega_{li}\\
\sum_l T_{ii,jl}\omega_l &= 2\sum_{l\notin[i],[j]} T_{il,j}\omega_{li}. \qquad (A.14)
\end{aligned}
$$

Note que a condição no somatório é devido ao fato de que por (A.11), $T_{il,j} = 0$ quando $l \in [i]$ ou $l \in [j]$.
Usando (A.12) em (A.14) temos,

$$
\begin{aligned}
\sum_l T_{ii,jl}\omega_l &= 2\sum_{l\notin[i],[j]} T_{il,j}\omega_{li} \qquad (A.15)\\
\sum_l T_{ii,jl}\omega_l &= 2\sum_k\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{T_{il,j}T_{li,k}}{(t_l - t_i)}\omega_k. \qquad (A.16)
\end{aligned}
$$

Por fim aplicando E_j em ambos os lados da expressão anterior e usando (A.5) obtemos,

$$
\begin{aligned}
\sum_l T_{ii,jl}\omega_l(E_j) &= 2\sum_k\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{T_{il,j}T_{li,k}}{(t_l - t_i)}\omega_k(E_j)\\
T_{ii,jj} &= 2\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{il,j})^2}{(t_l - t_i)}. \qquad (A.17)
\end{aligned}
$$

Analogamente obtemos,

$$
T_{jj,ii} = 2\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{jl,i})^2}{(t_l - t_j)}. \qquad (A.18)
$$

Subtraindo (A.17) de (A.18) e usando (A.5) segue que,

$$
\begin{aligned}
T_{ii,jj} - T_{jj,ii} &= 2\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{il,j})^2}{(t_l - t_i)} - 2\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{jl,i})^2}{(t_l - t_j)}\\
T_{ii,jj} - T_{jj,ii} &= 2\sum_{l\notin[i],[j]} (T_{il,j})^2\left[\frac{1}{(t_l - t_i)} - \frac{1}{(t_l - t_j)}\right]\\
T_{ii,jj} - T_{jj,ii} &= 2\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{il,j})^2(t_i - t_j)}{(t_l - t_i)(t_l - t_j)}. \qquad (A.19)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, segue de (A.4) a seguinte identidade,

$$T_{ij,km} - T_{ij,mk} = \sum_l T_{lj}R_{likm} + \sum_l T_{il}R_{ljkm}.$$

Trocando o índice k por i e m por j temos,

$$T_{ij,ij} - T_{ij,ji} = \sum_l T_{lj}R_{liij} + \sum_l T_{il}R_{ljij}. \tag{A.20}$$

Segue então (A.7) que,

$$\begin{aligned}
T_{ij,ij} - T_{ij,ji} &= \sum_l T_{lj}R_{liij} + \sum_l T_{il}R_{ljij}\\
T_{ij,ij} - T_{ij,ji} &= \sum_l t_l\delta_{lj}R_{liij} + \sum_l t_i\delta_{il}R_{ljij}\\
T_{ij,ij} - T_{ij,ji} &= (t_i - t_j)R_{ijij}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Agora, pelo fato de $\mathbb{T}$ ser simétrico e satisfazer (A.5) temos,

$$T_{ij,ij} - T_{ij,ji} = T_{ii,jj} - T_{ji,ji} = T_{ii,jj} - T_{jj,ii}. \tag{A.22}$$

Então, segue de (A.19), (A.21) e (A.22) que,

$$2\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{il,j})^2(t_i - t_j)}{(t_l - t_i)(t_l - t_j)} = (t_i - t_j)R_{ijij}. \tag{A.23}$$

Observe que $i \neq j = 1,\ldots,n$ estão fixos. Deixando somente $i = 1,\ldots,n$ fixo e somando $j \notin [i]$ em (A.23) obtemos a seguinte igualdade,

$$2\sum_{j\notin[i]}\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{il,j})^2}{(t_l - t_i)(t_l - t_j)(t_i - t_j)} = \sum_{j\notin[i]} \frac{R_{ijij}}{(t_i - t_j)}. \tag{A.24}$$

Por fim, vamos compreender melhor o somatório do lado esquerdo da igualdade anterior.

$$\begin{aligned}
\sum_{j\notin[i]}\sum_{l\notin[i],[j]} \frac{(T_{il,j})^2}{(t_l - t_i)(t_l - t_j)(t_i - t_j)} &= \sum_{j\notin[i]}\sum_{\substack{l\notin[i]\cup[j],\\ l<j}} \frac{(T_{il,j})^2}{(t_l - t_i)(t_l - t_j)(t_i - t_j)}\\
&+ \sum_{j\notin[i]}\sum_{\substack{l\notin[i]\cup[j],\\ l>j}} \frac{(T_{il,j})^2}{(t_l - t_i)(t_l - t_j)(t_i - t_j)}.
\end{aligned}$$

Trocando l por j no último somatório e usando (A.5) temos,

$$\sum_{j\notin[i]}\sum_{\substack{l\notin[i]\cup[j],\\ l<j}}\frac{(T_{il,j})^2}{(t_l-t_i)(t_l-t_j)(t_i-t_j)}+\sum_{l\notin[i]}\sum_{\substack{j\notin[i]\cup[l],\\ j>l}}\frac{(T_{ij,l})^2}{(t_j-t_i)(t_j-t_l)(t_i-t_l)}$$

$$\sum_{j\notin[i]}\sum_{\substack{l\notin[i]\cup[j],\\ l<j}}\frac{(T_{ij,l})^2}{(t_l-t_i)(t_l-t_j)(t_i-t_j)}-\sum_{l\notin[i]}\sum_{\substack{j\notin[i]\cup[l],\\ j>l}}\frac{(T_{ij,l})^2}{(t_i-t_j)(t_l-t_j)(t_l-t_i)}=0,$$

isto é,

$$\sum_{j\notin[i]}\sum_{l\notin[i],[j]}\frac{(T_{ij,l})^2}{(t_l-t_i)(t_l-t_j)(t_i-t_j)}=0. \tag{A.25}$$

Portanto, para todo $i=1,\ldots,n$ segue de (A.24) e (A.25) que,

$$\sum_{j\notin[i]}\frac{R_{ijij}}{(t_i-t_j)}=0.$$

$\square$

Apêndice B

Neste Apêndice vamos apresentar as demonstrações dos Teoremas 21 e 22 apresentados Capítulo 2 seção 2.2.

Teorema 33. *(Shu,S. [29]) Seja $x : M \to \mathbb{R}^5$ uma hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^5$. Então x é Laguerre equivalente a uma parte aberta das seguintes hipersuperfícies:*

i) a hipersuperfície orientada $x : S^k \times H^{4-k} \to \mathbb{R}^5$ dada no Exemplo 17; ou

ii) a imagem pela imersão τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5_0$ dada no Exemplo 16, ou

iii) A imagem pela σ de uma hipersuperfície $\overline{x}$ em $\mathbb{R}^5_1$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante, ou

iv) A imagem pela τ de uma hipersuperfície $\overline{x}$ em $\mathbb{R}^5_0$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante.

Demonstração. Primeiramente, temos que o números γ de curvaturas principais de Laguerre distintas pode assumir os valores $\gamma = 2, 3, 4$. Como x é uma hipersuperfície L-isoparamétrica, $C_i = 0$, $\forall i$. Então, pelas relações (1.115), obtidas na Proposição 16 temos

$$\sum_k B_{ik} L_{kj} = \sum_k B_{kj} L_{ki}.$$

Logo, podemos escolher uma base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_4\}$ que diagonaliza as matrizes $B = (B_{ij})$ e $L = (L_{ij})$, isto é,

$$B_{ij} = b_i \delta_{ij} \ e \ L_{ij} = L_i \delta_{ij}. \tag{B.1}$$

Sejam b_1, b_2, b_3, b_4 curvaturas principais de Laguerre de x. Como x é L-isoparamétrica temos, b_i, $\forall i = 1, \ldots, 4$ são constantes. Assim, utilizando a expressão da derivada covariante do tensor $\mathbb{B}$ dada por

$$dB_{ij}+\sum_k B_{ik}\omega_{kj}+\sum_k B_{kj}\omega_{ki}=\sum_k B_{ij,k}\omega_k \tag{B.2}$$

obtemos,

$$\sum_k B_{ij,k}\omega_k=(b_i-b_j)\omega_{ij}. \tag{B.3}$$

Vamos analisar os casos:

1) $\gamma=2$

Neste caso, x possui duas curvaturas principais de Laguerre constantes e distintas b_1 e b_2 com multiplicidades m_1 e m_2, respectivamente. Por (B.3) temos,

$$B_{ij,k}=(b_i-b_j)\Gamma^j_{ik}, \tag{B.4}$$

onde

$$\omega_{ij}=\sum_k \Gamma^j_{ik}\omega_k,\ \Gamma^j_{ik}=-\Gamma^i_{jk}. \tag{B.5}$$

Logo,

$$B_{ij,k}=0,\ 1\leq i,j\leq m_1\ ou\ m_1+1\leq i,j\leq m_1+m_2=4.$$

Pela simetria de $B_{ij,k}$, seque que $B_{ij,k}=0$, $\forall 1\leq i,j,k\leq 4$, isto é, x tem segunda forma fundamental de Laguerre paralela. Portanto, pelo teorema apresentado em [12] de classificação das hipersuperfícies com segunda forma fundamental de Laguerre paralela temos que x é Laguerre equivalente a uma parte aberta da hipersuperfície orientável $x: S^{k-1}\times H^{4-k}\longrightarrow\mathbb{R}^5$, dada no Exemplo 17.

2) $\gamma=3$

Quando a segunda forma fundamental é paralela, pelo teorema apresentado em [12], x é Laguerre equivalente a uma parte aberta da imagem de τ de uma hipersuperfície orientada $x:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^5_0$ dada no Exemplo 16.

Quando a segunda forma fundamental de Laguerre não é paralela, vamos provar que esse caso não acontece. Considere, sem perda de generalidade, as curvaturas principais de Laguerre, $b_1\neq b_2\neq b_3=b_4$. Por (B.3) temos,

$$B_{ii,k}=0,\ B_{34,k}=0,\ \forall i,k, \tag{B.6}$$

e

$$\omega_{ij}=\sum_k\frac{B_{ij,k}}{B_i-B_j}\omega_k,\ b_i\neq b_j. \tag{B.7}$$

Lembre-se que a expressão da derivada covariante de segunda ordem do tensor $\mathbb{B}$ é dada por

$$\sum_l B_{ij,kl}\omega_l = dB_{ij,k} + \sum_l B_{lj,k}\omega_{li} + \sum_l B_{il,k}\omega_{lj} + \sum_l B_{ij,k}\omega_{lk}. \tag{B.8}$$

Usando (B.6), (B.7) e (B.8) temos,

$$\sum_l B_{13,4l}\omega_l = B_{12,4}\omega_{23} + B_{12,3}\omega_{24} = \frac{2B_{12,3}B_{12,4}}{(b_2-b_3)}\omega_1, \tag{B.9}$$

$$\sum_l B_{11,3l}\omega_l = 2B_{12,3}\omega_{21} = \frac{2B_{12,3}}{(b_2-b_1)}\omega_3 + \frac{2B_{12,3}B_{12,4}}{(b_2-b_3)}\omega_4. \tag{B.10}$$

Comparando os dois lados das expressões (B.9) e (B.10) obtemos,

$$B_{13,41} = \frac{2B_{12,3}B_{12,4}}{(b_2-b_3)}, \tag{B.11}$$

$$B_{11,33} = \frac{2B_{12,3}}{(b_2-b_1)}, \tag{B.12}$$

$$B_{11,34} = \frac{2B_{12,3}B_{12,4}}{(b_2-b_3)}, \tag{B.13}$$

$$B_{13,42} = B_{13,43} = B_{13,44} = B_{11,32} = 0. \tag{B.14}$$

Agora, pela identidade de Ricci dada por

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = \sum_m B_{mj}R_{mikl} + \sum_m B_{im}R_{mjkl}, \tag{B.15}$$

temos,

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = (b_i - b_j)R_{ijkl}. \tag{B.16}$$

Lembrando que a expressão das componentes do tensor de curvatura na métrica g é dada por

$$R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}, \tag{B.17}$$

temos que para três índices $\{i,j,k,l\}$ iguais ou distintos $R_{ijkl} = 0$. Então, para esses três índices $\{i,j,k,l\}$ iguais ou distintos segue de (B.16) que,

$$B_{ij,kl} = B_{ij,lk}. \tag{B.18}$$

Sabendo que $B_{ij,k} = B_{ik,j}$ segue de (B.11), (B.13) e (B.18) obtemos, $B_{12,3}B_{12,4} = 0$. Como a segunda forma fundamental não é paralela podemos assumir, sem perda de generalidade, que $B_{12,3} \neq 0$ e $B_{12,4} = 0$. Vamos verificar que $B_{12,3}$ é constante. Usando (B.6), (B.7) e (B.8) temos,

$$\sum_k B_{12,3k}\omega_k = dB_{12,3}, \tag{B.19}$$

$$\sum_k B_{ii,jk}\omega_k = 2\sum_{l\neq i,j} B_{li,j}\omega_{li} = 2\sum_k \sum_{l\neq i,j} \frac{B_{li,j}B_{li,k}}{(b_l - b_i)}\omega_k,\ \ b_l \neq b_i. \tag{B.20}$$

Logo,

$$B_{ii,jk} = 2\frac{B_{li,j}B_{li,k}}{(b_l - b_i)},\quad b_l \neq b_i. \tag{B.21}$$

Por (B.6) e (B.21) sabemos que

$$B_{ii,ji} = B_{ii,jl},\quad \forall i \neq j \neq l. \tag{B.22}$$

Então, segue de (B.18) e (B.22) que

$$B_{12,31} = B_{11,23} = 0,\ B_{12,32} = B_{22,13} = 0,\ B_{12,33} = B_{33,12} = 0. \tag{B.23}$$

Por outro lado, por (B.6), (B.7) e $B_{12,4} = 0$ obtemos,

$$\sum_l B_{34,1l}\omega_l = B_{12,3}\omega_{24} = \sum_l \frac{B_{12,3}B_{24,k}}{(b_2 - b_4)}\omega_1. \tag{B.24}$$

Logo, $B_{34,12} = 0$ e usando (B.18) temos,

$$B_{34,12} = B_{12,34} = 0. \tag{B.25}$$

Portanto, segue de (B.19), (B.23) e (B.25) que $dB_{12,3} = 0$, isto é, $B_{12,3}$ é constante.

Agora, por (B.6) e (B.7) temos,

$$\omega_{12} = \frac{B_{12,3}\omega_3}{(b_1 - b_2)},\ \ \omega_{13} = \frac{B_{12,3}\omega_2}{(b_1 - b_3)},\ \ \omega_{23} = \frac{B_{12,3}\omega_1}{(b_2 - b_3)},\ \ \omega_{14} = \omega_{24} = 0. \tag{B.26}$$

Usando (B.26) na expressão $d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l$ seguem os cálculos,

$$\sum_{k<l} R_{12kl}\omega_k \wedge \omega_l = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_3)(b_2-b_3)}\omega_1 \wedge \omega_2 + \frac{B_{12,3}}{(b_1-b_2)}\omega_4 \wedge \omega_{34}, \tag{B.27}$$

$$\sum_{k<l} R_{13kl}\omega_k \wedge \omega_l = \omega_{12} \wedge \omega_{23} - d\omega_{13} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_2)(b_3-b_2)}\omega_1 \wedge \omega_3, \tag{B.28}$$

$$\sum_{k<l} R_{14kl}\omega_k \wedge \omega_l = \omega_{13} \wedge \omega_{34} = \frac{B_{12,3}}{(b_1-b_3)}\omega_2 \wedge \omega_{34}, \tag{B.29}$$

$$\sum_{k<l} R_{23kl}\omega_k \wedge \omega_l = \omega_{21} \wedge \omega_{13} - d\omega_{23} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2-b_1)(b_3-b_1)}\omega_2 \wedge \omega_3, \tag{B.30}$$

$$\sum_{k<l} R_{24kl}\omega_k \wedge \omega_l = \omega_{23} \wedge \omega_{34} - d\omega_{24} = \frac{B_{12,3}}{(b_2-b_3)}\omega_1 \wedge \omega_{34}. \tag{B.31}$$

Comparando os dois lados das expressões (B.27) - (B.31) obtemos,

$$R_{1212} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_3)(b_2-b_3)}, \; R_{1313} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_2)(b_3-b_2)}, \tag{B.32}$$

$$R_{2323} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2-b_1)(b_3-b_1)}, \; R_{1414} = R_{2424} = 0. \tag{B.33}$$

Por (B.27), (B.29) e (B.31) temos,

$$R_{12k4} = \frac{B_{12,3}}{(b_2-b_1)}\Gamma_{k4}^3, \; R_{142k} = \frac{B_{12,3}}{(b_1-b_3)}\Gamma_{k4}^3, \; R_{24k1} = \frac{B_{12,3}}{(b_3-b_2)}\Gamma_{k4}^3. \tag{B.34}$$

Usando a identidade de Bianchi $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ e $R_{ijkl} = R_{klij}$, $R_{ijkl} = R_{jilk}$ temos $R_{142k} + R_{12k4} + R_{24k1} = 0$. Então, por (B.34) obtemos $\Gamma_{k4}^3 = 0$, para todo k. Como $\omega_{34} = \sum_k \Gamma_{k4}^3\omega_k$ temos que $\omega_{34} = 0$. Dessa forma, usando novamente $d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l$ e (B.26) concluímos que

$$R_{3434} = 0. \tag{B.35}$$

Por fim, segue de (B.17), (B.32), (B.33) e (B.35) obtemos,

$$-L_1 - L_2 = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_3)(b_2-b_3)}, \tag{B.36}$$
$$-L_2 - L_3 = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2-b_1)(b_3-b_1)}, \tag{B.37}$$
$$-L_1 - L_3 = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_2)(b_3-b_2)}, \tag{B.38}$$
$$L_1 + L_4 = L_2 + L_4 = L_3 + L_4 = 0. \tag{B.39}$$

Fazendo operações nas expressões (B.36) - (B.39) obtemos $b_1 = b_2 = b_3$, o que é uma contradição. Portanto, o caso da segunda forma fundamental não ser paralela não acontece, ou seja, a segunda forma fundamental é paralela.

2) $\gamma = 3$

Quando a segunda forma fundamental é paralela, pelo teorema apresentado em [12], x é Laguerre equivalente a uma parte aberta da imagem de τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_0^5$ dada no Exemplo 16.

Quando a segunda forma fundamental não é paralela, como $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$, por (B.3) temos que $B_{ii,k} = 0$, para todo i,k. Considere i,j,k,l quatro índices distintos de $\{1,2,3,4\}$. Então, segue por (B.3) que

$$\omega_{ij} = \frac{B_{ij,k}\omega_k + B_{ij,l}\omega_l}{(b_i - b_j)}, \;\; i \neq j. \tag{B.40}$$

Por cálculos similares ao que já foi feito, usando $-\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$, $d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j$ e (B.40) obtemos a seguinte expressão,

$$R_{ijij} = \frac{2B_{ij,k}^2}{(b_i-b_k)(b_j-b_k)} + \frac{2B_{ij,l}^2}{(b_i-b_l)(b_j-b_l)}. \tag{B.41}$$

Como a segunda forma fundamental não é paralela, pela simetria dos índices $B_{ij,k}$, vamos considerar dois casos

Caso i) Se pelo menos dois elementos de $\{B_{12,3}, B_{12,4}, B_{13,4}, B_{23,4}\}$ são não nulos, sem perda de generalidade, assuma que $B_{12,3} \neq 0$ e $B_{12,4} \neq 0$. Pela expressão da derivada covariante dos tensores $\mathbb{L}$ e $\mathbb{B}$, dadas em (1.112) temos,

$$L_{ij,k} = E_k(L_i)\delta_{ij} + \Gamma_{ik}^{j}(L_i - L_j), \tag{B.42}$$
$$B_{ij,k} = \Gamma_{ik}^{j}(b_i - b_j). \tag{B.43}$$

Então, pela simetria dos índices $B_{ij,k}$ e $L_{ij,k}$ temos,

$$L_{12,3} = \Gamma_{32}^{1}(L_1 - L_2) = \Gamma_{23}^{1}(L_1 - L_3) = \Gamma_{13}^{2}(L_2 - L_3), \tag{B.44}$$
$$B_{12,3} = \Gamma_{32}^{1}(b_1 - b_2) = \Gamma_{23}^{1}(b_1 - b_3) = \Gamma_{13}^{2}(b_2 - b_3) \neq 0, \tag{B.45}$$
$$L_{12,4} = \Gamma_{42}^{1}(L_1 - L_2) = \Gamma_{24}^{1}(L_1 - L_4) = \Gamma_{14}^{2}(L_2 - L_4), \tag{B.46}$$
$$B_{12,4} = \Gamma_{42}^{1}(b_1 - b_2) = \Gamma_{24}^{1}(b_1 - b_4) = \Gamma_{14}^{2}(b_2 - b_4) \neq 0. \tag{B.47}$$

logo,

$$\frac{L_{12,3}}{B_{12,3}} = \frac{L_1 - L_2}{b_1 - b_2} = \frac{L_1 - L_3}{b_1 - b_3} = \frac{L_2 - L_3}{b_2 - b_3},$$
$$\frac{L_{12,4}}{B_{12,4}} = \frac{L_1 - L_2}{b_1 - b_2} = \frac{L_1 - L_4}{b_1 - b_4} = \frac{L_2 - L_4}{b_2 - b_4}.$$

Portanto, existe função ϕ tal que

$$\frac{L_1 - L_2}{b_1 - b_2} = \frac{L_1 - L_3}{b_1 - b_3} = \frac{L_2 - L_3}{b_2 - b_3} = \frac{L_1 - L_4}{b_1 - b_4} = \frac{L_2 - L_4}{b_2 - b_4} = -\phi, \tag{B.48}$$

e existe outra função μ tal que

$$L_1 + \phi b_1 = L_2 + \phi b_2 = L_3 + \phi b_3 = L_4 + \phi b_4 = \mu, \tag{B.49}$$

isto é,

$$L_{ij} + \phi B_{ij} = \mu\delta_{ij}, \ \ \forall i, j = 1, \ldots, 4. \tag{B.50}$$

Vamos agora verificar que ϕ e μ são constantes. Segue pela primeira e última expressões de (1.111) e (B.50) que

$$dN = \mu dY - \phi dP. \tag{B.51}$$

Considerando a derivada exterior de (B.51),

$$d\mu \wedge dY - d\phi \wedge dP = 0. \tag{B.52}$$

Escrevendo $d\phi = \sum_i \phi_i \omega_i$, $d\phi = \sum_i \mu_i \omega_i$, onde ϕ_i e μ_i são as derivadas das funções ϕ e μ na direção do campo E_i. Novamente usando as equações de estrutura (1.111) em (B.52) temos,

$$\sum_{i,j,k} (\mu_j \delta_{ik} - \phi_i B_{ij}) \omega_i \wedge \omega_k Y_i = 0. \tag{B.53}$$

Então,

$$\mu_j \delta_{ik} - \phi_k B_{ij} = \mu_k \delta_{ij} - \phi_j B_{ik}, \;\; i,j,k = 1\dots,4. \tag{B.54}$$

Se ϕ não for constante em M, então existe uma vizinhança de $p \in M$ tal que $\nabla\phi \neq 0$. Dessa forma, escolha um referencial ortonormal local E_1, E_2, E_3, E_4 para (M,g) tal que $E_1 = \dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$.

Considere os índices $i,j,k = 1,\dots,4$ e $p,q = 2\dots,4$, então,

$$\phi_p = E_p(\phi) = g(\nabla\phi, E_p) = 0, \;\; \phi_1 = |\nabla\phi| \neq 0.$$

Fazendo $i = p$, $j = q$ e $k = 1$ em (B.54) temos

$$\phi_1 B_{pq} = \mu_1 \delta_{pq}, \;\; p,q = 2\dots,4,$$

o que implica que $B_2 = B_3 = B_4$, o que é uma contradição. Logo, ϕ é constante e consequentemente μ também são. Logo, segue de (B.49) que L_1, L_2, L_3, L_4 são constantes. Se $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$, então x é L-isotrópica e o teorema segue pelo resultado presente em [13].

Se tem pelo menos dois L_1, L_2, L_3, L_4 não são iguais, segue por um resultado presente em [13] que o tensor $\mathbb{L}$ é paralelo. Portanto, obtemos de (B.44) - (B.47) que $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$, o que é uma contradição.

Caso ii) Se exatamente um elemento de $\{B_{12,3}, B_{12,4}, B_{13,4}, B_{23,4}\}$ é não nulo, sem perda de generalidade, assuma que $B_{12,3} \neq 0$. Usando (B.17) e (B.41) temos,

$$-L_1 - L_2 = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1 - b_3)(b_2 - b_3)}, \tag{B.55}$$

$$-L_2 - L_3 = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)}, \tag{B.56}$$

$$-L_1 - L_3 = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1 - b_2)(b_3 - b_2)}, \tag{B.57}$$

$$L_1 + L_4 = L_2 + L_4 = L_3 + L_4 = 0, \tag{B.58}$$

o que implica $L_2 = L_3 = L_4$. Fazendo cálculos essencialmente análogos ao que já foi feito nas expressões (B.55) - (B.58) segue que $b_2 = b_3 = b_4$, o que é uma contradição. Portanto o caso ii) não acontece.

$\square$

A proposição a seguir será usada como ferramenta para a prova do Teorema 22. A demonstração desse proposição encontra-se em [17].

Proposição 29. *(Li, Y. Shu,S. [17]) Seja $x : M \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície L-isoparamétrica com três curvaturas principais distintas sendo uma simples. Então x é Laguerre equivalente a uma parte da imagem pela imersão τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5_0$ dada no Exemplo 16.*

No que segue, vamos apresentar alguns lemas técnicos necessários para a prova do Teorema 22.

Lema 34. Sejam $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^6$ hipersuperfície L-isoparamétrica e b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 curvaturas principais de Laguerre constantes de x com $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4 = b_5$. Então temos,

$$\begin{aligned} \frac{B_{12,4}B_{12,5}}{(b_1-b_2)(b_4-b_2)} + \frac{B_{13,4}B_{13,5}}{(b_1-b_3)(b_4-b_3)} &= 0, \\ \frac{B_{12,4}B_{12,5}}{(b_2-b_1)(b_4-b_1)} + \frac{B_{23,4}B_{23,5}}{(b_2-b_3)(b_4-b_3)} &= 0, \end{aligned} \tag{B.59}$$

Lema 35. Nas mesmas condições do Lema 34, considere i, j, k três elementos distintos de $\{1,2,3\}$ com ordem arbitrária dada. Então,

$$\begin{aligned} R_{ijij} &= \frac{2B^2_{12,3}}{(b_k-b_i)(b_k-b_j)} + \frac{2(B^2_{ij,4}+B^2_{ij,5})}{(b_4-b_i)(b_4-b_j)}, \\ R_{i4i4} &= \frac{2B^2_{ij,4}}{(b_j-b_i)(b_j-b_4)} + \frac{2B^2_{ik,4}}{(b_k-b_i)(b_k-b_4)}, \\ R_{i5i5} &= \frac{2B^2_{ij,5}}{(b_j-b_i)(b_j-b_5)} + \frac{2B^2_{ik,5}}{(b_k-b_i)(b_k-b_5)}. \end{aligned} \tag{B.60}$$

A prova dos Lemas 34 e 35 pode ser vista em [28].

Lema 36. Sejam $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^6$ hipersuperfície L-isoparamétrica e b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 curvaturas principais de Laguerre constantes de x com $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4 = b_5$. Se x não é hipersuperfície L-isotrópica, então

i) Para qualquer $i, j \in \{1,2,3\}$ distintos e qualquer $\alpha, \beta \in \{4,5\}$ distintos, se $B_{12,3}B_{ij,\alpha} \neq 0$ temos, $B_{12,\beta} = B_{13,\beta} = B_{23,\beta} = 0$;

ii) $B_{12,4}B_{12,5} = B_{13,4}B_{13,5} = B_{23,4}B_{23,5} = 0.$

A prova do Lema 36 utiliza essencialmente, a menos de algumas adaptações, do mesmo argumento apresentado no $\gamma = 3$ Caso i) do Teorema 21. Detalhes podem ser encontrados em [28].

Por um método semelhante ao da prova do Lema 35, temos o seguinte:

Lema 37. Sejam $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^6$ hipersuperfície L-isoparamétrica e b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 curvaturas principais de Laguerre constantes tais que $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4 \neq b_5$. Considere i, j, k, l, s cinco elementos distintos de $\{1,2,3,4,5\}$ com ordem arbitrária dada. Então,

$$R_{ijij} = \frac{2B_{ij,k}^2}{(b_k - b_i)(b_k - b_j)} + \frac{2B_{ij,l}^2}{(b_l - b_i)(b_l - b_j)} + \frac{2B_{ij,s}^2}{(b_s - b_i)(b_s - b_j)}. \tag{B.61}$$

Passamos agora para a prova do teorema a seguir.

Teorema 38. *(Shu,S. [28]) Seja $x : M \to \mathbb{R}^6$ uma hipersuperfície L-isoparamétrica em $\mathbb{R}^6$. Então x é Laguerre equivalente a uma parte aberta das seguintes hipersuperfícies:*

i) a hipersuperfície orientada $x : S^k \times H^{5-k} \to \mathbb{R}^6$ dada no Exemplo 17; ou

ii) a imagem pela imersão τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6_0$ dada no Exemplo 16, ou

iii) A imagem pela σ de uma hipersuperfície $\bar{x}$ em $\mathbb{R}^6_1$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante, ou

iv) A imagem pela τ de uma hipersuperfície $\bar{x}$ em $\mathbb{R}^6_0$ com $r = 0$ e $\rho =$ constante.

Demonstração. Primeiramente, temos que o número γ de curvaturas principais de Laguerre distintas pode assumir os valores $\gamma = 2,3,4,5$. Como x é uma hipersuperfície L-isoparamétrica, $C_i = 0$, $\forall i$. Então, pelas relações (1.115), obtidas na Proposição 16 temos

$$\sum_k B_{ik}L_{kj} = \sum_k B_{kj}L_{ki}.$$

Logo, podemos escolher uma base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_5\}$ que diagonaliza as matrizes $B = (B_{ij})$ e $L = (L_{ij})$, isto é,

$$B_{ij} = b_i \delta_{ij} \; e \; L_{ij} = L_i \delta_{ij}. \tag{B.62}$$

Sejam b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 curvaturas principais de Laguerre de x. Como x é L-isoparamétrica temos, b_i, $\forall i = 1, \ldots, 5$ são constantes. Assim, utilizando a expressão da derivada covariante do tensor $\mathbb{B}$ dada por

$$dB_{ij} + \sum_k B_{ik}\omega_{kj} + \sum_k B_{kj}\omega_{ki} = \sum_k B_{ij,k}\omega_k$$

obtemos,

$$\sum_k B_{ij,k}\omega_k = (b_i - b_j)\omega_{ij}. \tag{B.63}$$

Vamos analisar os casos:

1) $\gamma = 2$

Neste caso, x possui duas curvaturas principais de Laguerre constantes e distintas B_1 e B_2 com multiplicidades m_1 e m_2, respectivamente. Por (B.63) temos,

$$B_{ij,k} = (b_i - b_j)\Gamma^j_{ik}, \tag{B.64}$$

onde

$$\omega_{ij} = \sum_k \Gamma^j_{ik}\omega_k, \; \Gamma^j_{ik} = -\Gamma^i_{jk}. \tag{B.65}$$

Logo,

$$B_{ij,k} = 0, \; 1 \leq i, j \leq m_1 \; ou \; m_1 + 1 \leq i, j \leq m_1 + m_2 = 5.$$

Pela simetria de $B_{ij,k}$, seque que $B_{ij,k} = 0$, $\forall 1 \leq i, j, k \leq 5$, isto é, x tem segunda forma fundamental de Laguerre paralela. Portanto, pelo teorema apresentado em [12] de classificação das hipersuperfícies com segunda forma fundamental de Laguerre paralela temos que x é Laguerre equivalente a uma parte aberta da hipersuperfície orientável $x : S^{k-1} \times H^{6-k} \longrightarrow \mathbb{R}^6$, dada no Exemplo 17.

2) $\gamma = 3$

Como temos 3 curvaturas principais de Laguerre distintas, então temos que pelo menos uma dessas curvaturas principais de Laguerre é simples. Logo, pela Proposição 29,

x é Laguerre equivalente a uma parte aberta da imagem de τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^6_0$ dada no Exemplo 16.

3) $\gamma = 4$

Quando a segunda forma fundamental é paralela, pelo teorema apresentado em [12], x é Laguerre equivalente a uma parte aberta da imagem de τ de uma hipersuperfície orientada $x : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^6_0$ dada no Exemplo 16.

Quando a segunda forma fundamental de Laguerre não é paralela, considere, sem perda de generalidade, as curvaturas principais de Laguerre, $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4 = b_5$. Por (B.63) temos,

$$B_{ii,k} = 0, \ B_{45,k} = 0, \ \forall i,k, \tag{B.66}$$

e

$$\omega_{ij} = \sum_k \frac{B_{ij,k}}{b_i - b_j}\omega_k, \ b_i \neq b_j. \tag{B.67}$$

Como, neste caso, a segunda forma fundamental de Laguerre não paralela, temos $B_{ij,k} \neq 0$, para algum $1 \leq i,j,k \leq 5$.

Por (B.66), os possíveis elementos de $B_{ij,k}$, $1 \leq i,j,k \leq 5$ não nulos são

$$\{B_{12,3}, B_{12,4}, B_{12,5}, B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\}.$$

Se x é hipersuperfície L-isotrópica, pelo Teorema 1.1 presente em [13], segue o resultado. Para continuar a prova, vamos supor que x não é uma hipersuperfície L-isotrópica.

Agora, vamos considerar dois casos: $B_{12,3} = 0$ ou $B_{12,3} \neq 0$.

Caso i) $B_{12,3} = 0$.

Como a segunda forma fundamental não é paralela, existe pelo menos um elemento não nulo de

$$\{B_{12,4}, B_{12,5}, B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\},$$

sem perda de generalidade, suponha que $B_{12,4} \neq 0$. Pelo Lema 36 item ii), $B_{12,5} = 0$. Novamente pelo Lema 36 item ii), temos que existe no máximo dois elementos não nulos em $\{B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\}$. Assim, temos que analisar os seguintes subcasos:

Subcaso i) Se $B_{13,4} = B_{13,5} = B_{23,4} = B_{23,5} = 0$. Lembrando que

$$B_{12,3} = 0, \ B_{12,4} \neq 0, \ B_{12,5} = 0. \tag{B.68}$$

Pela segunda e última expressão do Lema 35 e usando $R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}$ temos,

$$\begin{aligned} -L_2 - L_4 &= \frac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)}, \\ -L_2 - L_5 &= 0, \\ -L_3 - L_4 &= 0, \\ -L_3 - L_5 &= 0. \end{aligned} \tag{B.69}$$

Segue de (B.69) que $\frac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)} = 0$, ou seja, $B_{12,4} = 0$, o que é uma contradição.

Subcaso ii) Se exatamente um de $\{B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\}$ é diferente de zero.
Pela simetria dos índices é necessário considerar dois casos: $B_{23,4} \neq 0$ e $B_{13,4} = B_{13,5} = B_{23,5} = 0$ ou $B_{23,5} \neq 0$ e $B_{13,4} = B_{13,5} = B_{23,4} = 0$.
a) Se $B_{23,4} \neq 0$ e $B_{13,4} = B_{13,5} = B_{23,5} = 0$, como

$$B_{12,3} = 0, \ B_{12,4} \neq 0, \ B_{12,5} = 0, \tag{B.70}$$

segue, pela primeira e última expressões do Lema 35 que

$$\begin{aligned} -L_1 - L_2 &= \frac{2B_{12,4}^2}{(b_4-b_1)(b_4-b_2)}, \\ -L_2 - L_3 &= \frac{2B_{23,4}^2}{(b_4-b_2)(b_4-b_3)}, \\ -L_1 - L_3 &= 0, \\ -L_1 - L_5 &= 0, \\ -L_2 - L_5 &= 0, \\ -L_3 - L_5 &= 0. \end{aligned}$$

O que implica que $L_1 = L_2 = L_3 = 0$ e $B_{12,4} = B_{23,4} = 0$ o que é uma contradição.

b) Se $B_{23,5} \neq 0$ e $B_{13,4} = B_{13,5} = B_{23,4} = 0$, análogo ao que foi feito anteriormente obtemos,

$$\begin{aligned}
-L_1 - L_2 &= \frac{2B_{12,4}^2}{(b_4-b_1)(b_4-b_2)},\\
-L_2 - L_3 &= \frac{2B_{23,5}^2}{(b_4-b_2)(b_4-b_3)},\\
-L_2 - L_4 &= \frac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)},\\
-L_2 - L_5 &= \frac{2B_{23,5}^2}{(b_3-b_2)(b_3-b_5)},\\
-L_1 - L_3 &= 0,\\
-L_1 - L_5 &= 0,\\
-L_3 - L_4 &= 0.
\end{aligned}$$

O que implica que $L_1 = L_4$, $L_3 = L_5$ e

$$\begin{aligned}
\frac{2B_{12,4}^2}{(b_4-b_1)(b_4-b_2)} &= \frac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)},\\
\frac{2B_{23,5}^2}{(b_4-b_2)(b_4-b_3)} &= \frac{2B_{23,5}^2}{(b_3-b_2)(b_3-b_5)}.
\end{aligned} \tag{B.71}$$

Como $b_4 = b_5$ obtemos das expressões anteriores que $2b_2 = b_1 + b_4$ e $2b_2 = b_3 + b_4$. Assim, $b_1 = b_3$ o que é uma contradição.

Subcaso iii) Se exatamente dois de $\{B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\}$ é diferente de zero. Pela simetria dos índices e pelo Lema 36 item ii) é necessário considerar três casos: $B_{23,4} \neq 0$, $B_{13,4} \neq 0$ com $B_{13,5} = B_{23,5} = 0$, ou $B_{23,4} \neq 0$, $B_{13,5} \neq 0$ com $B_{13,4} = B_{23,5} = 0$, ou $B_{23,5} \neq 0$, $B_{13,5} \neq 0$ com $B_{13,4} = B_{23,4} = 0$.

a)$B_{23,4} \neq 0$, $B_{13,4} \neq 0$ com $B_{13,5} = B_{23,5} = 0$.

Como $B_{12,3}=0,\ B_{12,4}\neq 0,\ B_{12,5}=0$, por (B.66) e (B.67) temos,

$$
\begin{aligned}
\omega_{12} &= \frac{\sum_k B_{12,k}\omega_k}{(b_1-b_2)} = \frac{B_{12,4}\omega_4}{(b_1-b_2)},\ \omega_{13} = \frac{\sum_k B_{13,k}\omega_k}{(b_1-b_3)} = \frac{B_{13,4}\omega_4}{(b_1-b_3)},\\
\omega_{14} &= \frac{\sum_k B_{14,k}\omega_k}{(b_1-b_4)} = \frac{B_{12,4}\omega_2}{(b_1-b_4)} + \frac{B_{13,4}\omega_3}{(b_1-b_4)},\ \omega_{15}=0,\\
\omega_{23} &= \frac{\sum_k B_{23,k}\omega_k}{(b_2-b_3)} = \frac{B_{23,4}\omega_4}{(b_2-b_3)},\ \omega_{24} = \frac{\sum_k B_{24,k}\omega_k}{(b_2-b_4)} = \frac{B_{12,4}\omega_1}{(b_2-b_4)} + \frac{B_{23,4}\omega_3}{(b_2-b_4)},\\
\omega_{25} &= 0,\ \omega_{34} = \frac{\sum_k B_{34,k}\omega_k}{(b_3-b_4)} = \frac{B_{13,4}\omega_1}{(b_3-b_4)} + \frac{B_{23,4}\omega_2}{(b_3-b_4)},\ \omega_{35}=0.
\end{aligned}
$$

Além disso, pelas expressões $d\omega_{ij} = \sum\limits_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} - \sum\limits_{k<l} R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l$ e $d\omega_i = \sum\limits_j \omega_{ij}\wedge\omega_j$ temos,

$$
\begin{aligned}
- &\ R_{2323}\omega_2\wedge\omega_3 = -\sum_{k<l} R_{23kl}\omega_k\wedge\omega_l = d\omega_{23} - \sum_k \omega_{2k}\wedge\omega_{k3}\\
= &\ \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_3)}d\omega_4 + \frac{dB_{23,4}}{(b_2-b_3)}\wedge\omega_4 - \omega_{21}\wedge\omega_{13} - \omega_{24}\wedge\omega_{43}\\
= &\ \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_3)}(\sum_j \omega_{4j}\wedge\omega_j) + \frac{dB_{23,4}}{(b_2-b_3)}\wedge\omega_4 - \omega_{21}\wedge\omega_{13} - \omega_{24}\wedge\omega_{43}\\
= &\ \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_3)}\omega_1\wedge\left[\frac{B_{12,4}}{(b_1-b_4)}\omega_2 + \frac{B_{13,4}}{(b_1-b_4)}\omega_3\right]\\
+ &\ \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_3)}\omega_2\wedge\left[\frac{B_{12,4}}{(b_2-b_4)}\omega_1 + \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_4)}\omega_3\right]\\
+ &\ \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_3)}\omega_3\wedge\left[\frac{B_{13,4}}{(b_3-b_4)}\omega_1 + \frac{B_{23,4}}{(b_3-b_4)}\omega_2\right]\\
+ &\ \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_3)}\omega_5\wedge\omega_{54} + \frac{dB_{23,4}}{(b_2-b_3)}\wedge\omega_4\\
+ &\ \left[\frac{B_{12,4}}{(b_2-b_4)}\omega_1 + \frac{B_{23,4}}{(b_2-b_4)}\omega_3\right]\wedge\left[\frac{B_{13,4}}{(b_3-b_4)}\omega_1 + \frac{B_{23,4}}{(b_3-b_4)}\omega_2\right].
\end{aligned}
$$

Comparando os coeficientes de $\omega_1\wedge\omega_2$ e $\omega_1\wedge\omega_3$ em ambos os lados da equação e lembrando que estamos no caso onde $B_{12,4}B_{23,4}\neq 0$ e $B_{12,4}B_{13,4}\neq 0$ temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(b_2-b_3)(b_1-b_4)} - \frac{1}{(b_2-b_3)(b_2-b_4)} + \frac{1}{(b_2-b_4)(b_3-b_4)} &= 0,\\
\frac{1}{(b_2-b_3)(b_1-b_4)} - \frac{1}{(b_2-b_3)(b_3-b_4)} - \frac{1}{(b_2-b_4)(b_3-b_4)} &= 0.
\end{aligned}
$$

Segue dessas duas equações que $\frac{3}{(b_2-b_4)(b_3-b_4)}=0$, o que é uma contradição.

b)$B_{23,4}\neq 0$, $B_{13,5}\neq 0$ com $B_{13,4}=B_{23,5}=0$. C Nesse caso, segue por um argumento análogo a demonstração do Caso i) do Teorema 21, quando $\gamma=3$, que x é uma hipersuperfície L-isotrópica, o que é uma contradição.

c)$B_{23,5}\neq 0$, $B_{13,5}\neq 0$ com $B_{13,4}=B_{23,4}=0$. Nesse caso, segue por um argumento análogo a demonstração Caso i) do Teorema 21, quando $\gamma=3$ que x é uma hipersuperfície L-isotrópica, o que é uma contradição.

Caso ii) $B_{12,3}\neq 0$.

Pelo Lema 34 e 36 (item ii) temos que existe no máximo três elementos não nulos em $\{B_{12,4},B_{12,5},B_{13,4},B_{13,5},B_{23,4},B_{23,5}\}$. Vamos analisar os subcasos:

Subcaso i) Se $B_{12,4}=B_{12,5}=B_{13,4}=B_{13,5}=B_{23,4}=B_{23,5}=0$. Pela primeira e segunda expressão do Lema 35 temos,

$$\begin{aligned}
-L_1-L_2 &= \frac{2B_{12,3}^2}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)},\\
-L_1-L_3 &= \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)},\\
-L_2-L_3 &= \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)},\\
-L_1-L_4 &= 0,\\
-L_2-L_4 &= 0,\\
-L_3-L_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos $L_1=L_2=L_3$. Então, segue das equações anteriores que $b_1=b_2=b_3$ o que é uma contradição.

Subcaso ii) Se existe exatamente um elemento não nulo em $\{B_{12,4},B_{12,5},B_{13,4},B_{13,5},B_{23,4},B_{23,5}\}$. Sem perda de generalidade, suponha $B_{12,4}\neq 0$ com $B_{12,5}=B_{13,4}=B_{13,5}=B_{23,4}=B_{23,5}=0$.

Pela segunda e terceira expressão do Lema 35 temos,

$$\begin{aligned}
-L_2-L_4 &= \frac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)},\\
-L_2-L_5 &= 0,\\
-L_3-L_4 &= 0,\\
-L_3-L_5 &= 0.
\end{aligned}$$

O que implica que $\dfrac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)}=0$, isto é, $B_{12,4}=0$, o que é uma contradição.

Subcaso iii) Se existe exatamente dois elemento não nulo em $\{B_{12,4},B_{12,5},B_{13,4},B_{13,5},B_{23,4},B_{23,5}\}$. Sem perda de generalidade, suponha $B_{12,4}\neq 0$. Pelo Lema 36 item i) temos $B_{12,5}=B_{13,5}=B_{23,5}=0$. Logo, existe exatamente um elemento não nulo em $\{B_{13,4},B_{23,4}\}$, sem perda de generalidade, considere $B_{13,4}\neq 0$, $B_{23,4}=0$. Por (B.66) e (B.67) temos,

$$
\begin{aligned}
\omega_{12} &= \frac{\sum_k B_{12,k}\omega_k}{(b_1-b_2)}=\frac{B_{12,3}\omega_3}{(b_1-b_2)}+\frac{B_{12,4}\omega_4}{(b_1-b_2)},\\
\omega_{13} &= \frac{\sum_k B_{13,k}\omega_k}{(b_1-b_3)}=\frac{B_{12,3}\omega_2}{(b_1-b_3)}+\frac{B_{13,4}\omega_4}{(b_1-b_3)},\\
\omega_{14} &= \frac{\sum_k B_{14,k}\omega_k}{(b_1-b_4)}=\frac{B_{12,4}\omega_2}{(b_1-b_4)}+\frac{B_{13,4}\omega_3}{(b_1-b_4)},\ \ \omega_{15}=0,\\
\omega_{23} &= \frac{\sum_k B_{23,k}\omega_k}{(b_2-b_3)}=\frac{B_{12,3}\omega_1}{(b_2-b_3)},\ \ \omega_{24}=\frac{\sum_k B_{24,k}\omega_k}{(b_2-b_4)}=\frac{B_{12,4}\omega_1}{(b_2-b_4)},\ \ \omega_{25}=0,\\
\omega_{43} &= \frac{\sum_k B_{43,k}\omega_k}{(b_4-b_3)}=\frac{B_{13,4}\omega_1}{(b_4-b_3)},\ \ \omega_{35}=0.
\end{aligned}
$$

Além disso, pelas expressões $d\omega_{ij}=\sum\limits_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\sum\limits_{k<l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l$ e $d\omega_i=\sum\limits_j\omega_{ij}\wedge\omega_j$ temos,

$$
\begin{aligned}
- &\ R_{2323}\omega_2\wedge\omega_3=\sum_{k<l}R_{23kl}\omega_k\wedge\omega_l=d\omega_{23}-\sum_k\omega_{2k}\wedge\omega_{k3}\\
= &\ \frac{B_{12,3}}{(b_2-b_3)}d\omega_1+\frac{dB_{12,3}}{(b_2-b_3)}\wedge\omega_1-\omega_{21}\wedge\omega_{13}-\omega_{24}\wedge\omega_{43}\\
= &\ \frac{B_{12,3}}{(b_2-b_3)}(\sum_j\omega_{1j}\wedge\omega_j)+\frac{dB_{12,3}}{(b_2-b_3)}\wedge\omega_1-\omega_{21}\wedge\omega_{13}-\omega_{24}\wedge\omega_{43}\\
= &\ \frac{B_{12,3}}{(b_2-b_3)}\left[\frac{B_{12,3}}{(b_1-b_2)}\omega_3+\frac{B_{12,4}}{(b_1-b_2)}\omega_4\right]\wedge\omega_2\\
+ &\ \frac{B_{12,3}}{(b_2-b_3)}\left[\frac{B_{12,3}}{(b_1-b_3)}\omega_2+\frac{B_{13,4}}{(b_1-b_3)}\omega_4\right]\wedge\omega_3\\
+ &\ \frac{B_{12,3}}{(b_2-b_3)}\left[\frac{B_{12,4}}{(b_1-b_4)}\omega_2+\frac{B_{13,4}}{(b_1-b_4)}\omega_3\right]\wedge\omega_4+\frac{dB_{12,3}}{(b_2-b_3)}\wedge\omega_1\\
+ &\ \left[\frac{B_{12,3}}{(b_1-b_2)}\omega_3+\frac{B_{12,4}}{(b_1-b_2)}\omega_4\right]\wedge\left[\frac{B_{12,3}}{(b_1-b_3)}\omega_2+\frac{B_{13,4}}{(b_1-b_3)}\omega_4\right].
\end{aligned}
$$

Comparando os coeficientes de $\omega_2 \wedge \omega_4$ e $\omega_3 \wedge \omega_4$ em ambos os lados da equação, uma vez que $B_{12,3}B_{12,4} \neq 0$ e $B_{12,3}B_{13,4} \neq 0$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b_2-b_3)(b_1-b_2)} - \frac{1}{(b_2-b_3)(b_1-b_4)} + \frac{1}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)} &= 0,\\
\frac{1}{(b_2-b_3)(b_1-b_3)} - \frac{1}{(b_2-b_3)(b_1-b_4)} - \frac{1}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)} &= 0.
\end{aligned}$$

O que implica que, $\dfrac{3}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)} = 0$, o que é uma contradição.

Subcaso iv) Se existe exatamente três elemento não nulo em $\{B_{12,4}, B_{12,5}, B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\}$. Vamos analisar os casos a seguir:

a) Se $B_{12,5} = B_{13,5} = B_{23,5} = 0$ então devemos ter $B_{12,4} \neq 0$,$B_{13,4} \neq 0$, $B_{23,4} \neq 0$.

Pela expressão (B.67) temos,

$$\omega_{15} = \omega_{25} = \omega_{35} = 0. \tag{B.72}$$

Além disso, pelo Lema 35 temos,

$$-L_1 - L_2 = R_{1212} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)} + \frac{2B_{12,4}^2}{(b_4-b_1)(b_4-b_2)}, \tag{B.73}$$

$$-L_1 - L_3 = R_{1313} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)} + \frac{2B_{13,4}^2}{(b_4-b_1)(b_4-b_3)}, \tag{B.74}$$

$$-L_1 - L_4 = R_{1414} = \frac{2B_{12,4}^2}{(b_2-b_1)(b_2-b_4)} + \frac{2B_{13,4}^2}{(b_3-b_1)(b_3-b_4)}, \tag{B.75}$$

$$-L_2 - L_3 = R_{2323} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)} + \frac{2B_{23,4}^2}{(b_4-b_2)(b_4-b_3)}, \tag{B.76}$$

$$-L_2 - L_4 = R_{2424} = \frac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)} + \frac{2B_{23,4}^2}{(b_3-b_2)(b_3-b_4)}, \tag{B.77}$$

$$-L_3 - L_4 = R_{3434} = \frac{2B_{23,4}^2}{(b_2-b_3)(b_2-b_4)} + \frac{2B_{13,4}^2}{(b_1-b_3)(b_1-b_4)}, \tag{B.78}$$

$$-L_1 - L_5 = R_{1515} = 0, \tag{B.79}$$

$$-L_2 - L_5 = R_{2525} = 0, \tag{B.80}$$

$$-L_3 - L_5 = R_{3535} = 0. \tag{B.81}$$

Como $R_{ijkl} = 0$ se três índices de $\{i, j, k, l\}$ são iguais ou distintos. Pela última expressão de (1.112), (B.65), (B.72) e (B.79)-(B.81) temos,

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{k<l} R_{15kl}\omega_k \wedge \omega_l = d\omega_{15} - \sum_k \omega_{1k} \wedge \omega_{k5} \\
&= -\omega_{14} \wedge \omega_{45} = -\left(\Gamma_{24}^1 \omega_2 + \Gamma_{34}^1 \omega_3\right) \wedge \omega_{45}, \\
0 &= -\sum_{k<l} R_{25kl}\omega_k \wedge \omega_l = d\omega_{25} - \sum_k \omega_{2k} \wedge \omega_{k5} \\
&= -\omega_{24} \wedge \omega_{45} = -\left(\Gamma_{14}^2 \omega_1 + \Gamma_{34}^2 \omega_3\right) \wedge \omega_{45}, \\
0 &= -\sum_{k<l} R_{35kl}\omega_k \wedge \omega_l = d\omega_{35} - \sum_k \omega_{3k} \wedge \omega_{k5} \\
&= -\omega_{34} \wedge \omega_{45} = -\left(\Gamma_{14}^3 \omega_1 + \Gamma_{24}^3 \omega_2\right) \wedge \omega_{45}.
\end{aligned}$$

Segue então que $\omega_{45}=0$. Logo, usando (B.72) temos,

$$-R_{4545}\omega_4\wedge\omega_5=-\sum_{k<l}R_{45kl}\omega_k\wedge\omega_l=d\omega_{45}-\sum_k\omega_{4k}\wedge\omega_{k5}. \qquad \text{(B.82)}$$

Então,

$$-L_4-L_5=R_{4545}=0. \qquad \text{(B.83)}$$

Segue de (B.79)-(B.81) e (B.83) que, $L_1=L_2=L_3=L_4$. Somando as equações (B.73)-(B.78) obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= R_{1212}+R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}+R_{3434} \\ &= -3(L_1+L_2+L_3+L_4)=-12L_1. \end{aligned}$$

Portanto, $L_1=0$, o que implica que $L_1=L_2=L_3=L_4=L_5=0$, o que é uma contradição com o fato de x não ser L-isotrópica.

b)Se existe dois elementos nulos de $\{B_{12,5},B_{13,5},B_{23,5}\}$, sem perda de generalidade, $B_{12,5}=B_{13,5}=0$ e $B_{23,5}\neq 0$ então pelo Lema 36 item ii) $B_{23,4}=0$. Como estamos no caso de existe exatamente três elemento não nulo em $\{B_{12,4},B_{12,5},B_{13,4},B_{13,5},B_{23,4},B_{23,5}\}$, temos que $B_{12,4}\neq 0$ e $B_{13,4}\neq 0$. Raciocinando de maneira análoga a demonstração do Caso i) do Teorema 21, quando $\gamma=3$, vemos que x é uma hipersuperfície L-isotrópica, uma contradição.

c)Se existe um elemento nulo de $\{B_{12,5},B_{13,5},B_{23,5}\}$, sem perda de generalidade, $B_{12,5}=0$, $B_{13,5}\neq 0$ e $B_{23,5}\neq 0$ então pelo Lema 36 item ii) temos que $B_{13,4}=B_{23,4}=0$. Como estamos no caso de existe exatamente três elemento não nulo em $\{B_{12,4},B_{12,5},B_{13,4},B_{13,5},B_{23,4},B_{23,5}\}$, temos que $B_{12,4}\neq 0$. Segue por um argumento análogo a demonstração do Caso i) do Teorema 21, quando $\gamma=3$, que x é uma hipersuperfície L-isotrópica, uma contradição.

Portanto, concluímos que o caso $\gamma=4$ e segunda forma fundamental não paralela não pode acontecer.

4) $\gamma=5$

Quando a segunda forma fundamental é paralela, pelo teorema apresentado em [12], x é Laguerre equivalente a uma parte aberta da imagem de τ de uma hipersuperfície orientada $x:\mathbb{R}^5\longrightarrow\mathbb{R}^6_0$ dada no Exemplo 16.

Quando a segunda forma fundamental de Laguerre não é paralela, sem perda de generalidade, podemos assumir que $B_{12,3} \neq 0$. Lembre-se que estamos considerando x não L-isotrópica.

Como temos as curvaturas principais de Laguerre, $b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4 \neq b_5$. Por (B.63) temos,

$$B_{ii,k} = 0, \ \forall i,k, \tag{B.84}$$

Por (B.84), os possíveis elementos de $B_{ij,k}$, $1 \leq i,j,k \leq 5$ não nulos são

$$\{B_{12,3}, B_{12,4}, B_{12,5}, B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}, B_{14,5}, B_{24,5}, B_{34,5}\}.$$

Vamos considerar dois casos:

Caso i) Se $B_{12,3} \neq 0$ e todos os elementos de $\{B_{12,4}, B_{12,5}, B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\}$ são nulos, nesse caso, podemos mostrar que existe no máximo um elemento nulo em $\{B_{14,5}, B_{24,5}, B_{34,5}\}$.

De fato, sem perda de generalidade, se $B_{14,5} = B_{24,5} = 0$, pelo Lema 37 e usando $R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}$ temos,

$$\begin{aligned}
-L_1 - L_2 &= R_{1212} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}, && \text{(B.85)}\\
-L_1 - L_3 &= R_{1313} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)}, && \text{(B.86)}\\
-L_2 - L_3 &= R_{2323} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)}, && \text{(B.87)}\\
-L_3 - L_4 &= R_{3434} = \frac{2B_{34,5}^2}{(b_5-b_3)(b_5-b_4)}, && \text{(B.88)}\\
-L_3 - L_5 &= R_{3535} = \frac{2B_{34,5}^2}{(b_4-b_3)(b_4-b_5)}, && \text{(B.89)}\\
-L_4 - L_5 &= R_{4545} = \frac{2B_{34,5}^2}{(b_3-b_4)(b_3-b_5)}, && \text{(B.90)}\\
-L_1 - L_4 &= 0, \ -L_1 - L_5 = 0, \ -L_2 - L_4 = 0, \ -L_2 - L_5 = 0. && \text{(B.91)}
\end{aligned}$$

De (B.91) temos, $L_1 = L_2$ e $L_4 = L_5$. Somando (B.85), (B.86) e (B.87) temos que, $-L_1 - L_2 - L_3 = 0$. Somando (B.88), (B.89) e (B.90) obtemos, $-L_3 - L_4 - L_5 = 0$. Logo, $-L_1 - L_2 = -L_4 - L_5$. Assim, temos $L_2 = L_5$ e $-L_1 - L_2 = -L_1 - L_5 = 0$, o que implica que $\dfrac{2B_{12,3}^2}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)} = 0$, o que é uma contradição. Agora, vamos assumir que $B_{24,5} \neq 0$ e $B_{34,5} \neq 0$. Pelo método similar ao feito na prova do Lema 35, vemos que existem constantes ϕ e μ tais que,

$$
\begin{aligned}
&L_2 + \phi b_2 = L_3 + \phi b_3 = L_4 + \phi b_4 = L_5 + \phi b_5, \\
&L_1 + \mu b_1 = L_2 + \mu b_2 = L_3 + \mu b_3,
\end{aligned}
$$

o que implica que $\phi = \mu$ e

$$
L_1 + \phi b_1 = L_2 + \phi b_2 = L_3 + \phi b_3 = L_4 + \phi b_4 = L_5 + \phi b_5. \tag{B.92}
$$

Seguindo com um argumento análogo a demonstração do Caso i) do Teorema 21, quando $\gamma = 3$, temos que x é L-isotrópica, o que é uma contradição.

Caso ii) Se $B_{12,3} \neq 0$ e existe pelo menos um elemento não nulo de $\{B_{12,4}, B_{12,5}, B_{13,4}, B_{13,5}, B_{23,4}, B_{23,5}\}$, sem perda de generalidade, podemos assumir $B_{12,4} \neq 0$. Vamos considerar dois subcasos:

Subcaso i) Se todos os elementos de $\{B_{12,5}, B_{13,5}, B_{23,5}, B_{14,5}, B_{24,5}, B_{34,5}\}$ são nulos. Como $B_{12,3} \neq 0$ e $B_{12,4} \neq 0$ pelo Lema 37 temos,

$$
\begin{aligned}
-L_1 - L_2 &= R_{1212} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)} + \frac{2B_{12,4}^2}{(b_4-b_1)(b_4-b_2)}, && \text{(B.93)} \\
-L_1 - L_3 &= R_{1313} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)}, && \text{(B.94)} \\
-L_1 - L_4 &= R_{1414} = \frac{2B_{12,4}^2}{(b_2-b_1)(b_2-b_4)}, && \text{(B.95)} \\
-L_2 - L_3 &= R_{2323} = \frac{2B_{12,3}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)}, && \text{(B.96)} \\
-L_2 - L_4 &= R_{2424} = \frac{2B_{12,4}^2}{(b_1-b_2)(b_1-b_4)}, && \text{(B.97)} \\
-L_1 - L_5 &= 0, \ -L_2 - L_5 = 0, \ -L_3 - L_5 = 0, \ -L_4 - L_5 = 0. && \text{(B.98)}
\end{aligned}
$$

Por (B.98) temos , $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$. Somando (B.93)-(B.97) obtemos,

$$
\begin{aligned}
0 &= R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} + R_{3434} \\
&= -3L_1 - 3L_2 - 2L_3 - 2L_4 = -10L_1,
\end{aligned}
$$

isto é, $L_1 = 0$. Logo, $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 0$, o que é uma contradição.

Subcaso ii) Se pelo menos um elemento de $\{B_{12,5}, B_{13,5}, B_{23,5}, B_{14,5}, B_{24,5}, B_{34,5}\}$ é não nulo, sem perda de generalidade, $B_{12,5} \neq 0$. Como $B_{12,3} \neq 0$ e $B_{12,4} \neq 0$, por um método semelhante a demonstração do Caso i) do Teorema 21, quando $\gamma = 3$, temos que x é uma hipersuperfície L-isotrópica, uma contradição. Portanto, o caso $\gamma = 5$ e a segunda forma fundamental de Laguerre não é paralela acontece. Isso completa a prova do Teorema Principal.

$\square$

Apêndice C

Neste apêndice vamos apresentar com detalhes os cálculos feitos para obter as funções F_i^1 dadas em (2.134). A determinação das funções F_i^3, expressas conforme (2.136), se dará de maneira análoga. Para isso, vamos utilizar uma integração presente no livro de Polyanin e Zaitev [25].

Sejam $f = f(x)$ e $g = g(x)$ funções arbitrárias. Considere a equação diferencial ordinária de segunda ordem linear dada por,

$$y'' + fy' = g. \tag{C.1}$$

Utilizando a integração feita em [25], Capítulo 2, seção 2.1.9-1, a solução da equação (C.1) é dada por,

$$y = \varphi_1 + \int \left[e^{-F} \left(\varphi_2 + \int e^F g dx \right) \right] dx, \tag{C.2}$$

onde $F = \displaystyle\int f(x) dx$ e φ_1, φ_2 constantes de integração.

No que segue, vamos aplicar essas informações para obter as funções F_i^1, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Pela expressão (2.133) temos que as funções F_i^1, que dependem apenas da variável u_i, satisfazem a seguinte equação diferencial

$$F^1_{i,ii} - \frac{h_i'' F^1_{i,i}}{h'_i} = \frac{b_i h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{C.3}$$

onde h_i são funções diferenciáveis não nulas que dependem de u_i, b_i e $c_i^{i+3} \neq 0$ são constantes para todo $i = 1, \ldots, n$. Reescrevendo (C.3) nos moldes da equação diferencial ordinária geral dada em (C.1) temos,

$$F^1_{i,ii} + fF^1_{i,i} = g \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{C.4}$$

onde $f = f(u_i) = -\dfrac{h_i''}{h'_i}$ e $g = g(u_i) = \dfrac{b_i h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2}$. Então, segue (C.2) que

$$F_i^1 = \varphi_1 + \int \left[e^{-F} \left(\varphi_2 + \int e^F g du_i \right) \right] du_i, \tag{C.5}$$

onde $F = \displaystyle\int f(u_i) du_i$, $g = g(u_i) = \dfrac{b_i h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2}$ e φ_1, φ_2 constantes de integração. Agora, vamos determinar (C.5).
Como $f(u_i) = -\dfrac{h_i''}{h'_i}$ temos que $f(u_i) = -(ln(h_i'))'$. Integrando com relação a u_i obtemos,

$$F = -ln(h_i') + \varphi_3. \tag{C.6}$$

Logo, substituindo (C.6) em (C.5) e também a expressão da função g segue que,

$$\begin{aligned}
F_i^1 &= \varphi_1 + \int \left[e^{-F} \left(\varphi_2 + \int e^F g du_i \right) \right] du_i \\
F_i^1 &= \varphi_1 + \int \left[e^{ln(h_i') - \varphi_3} \left(\varphi_2 + \int e^{-ln(h_i') + \varphi_3} \frac{b_i h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} du_i \right) \right] du_i \\
F_i^1 &= \varphi_1 + \int \left[\frac{h_i'}{e^{\varphi_3}} \left(\varphi_2 + \int \frac{e^{\varphi_3}}{h_i'} \frac{b_i h'^2_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} du_i \right) \right] du_i \\
F_i^1 &= \varphi_1 + \int \left[\frac{h_i'}{\varphi_4} \left(\varphi_2 + \int \frac{\varphi_4 b_i h'_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} du_i \right) \right] du_i \\
F_i^1 &= \varphi_1 + \int \left[\frac{h_i'}{\varphi_4} \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_4 b_i h_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} + \varphi_5 \right) \right] du_i \\
F_i^1 &= \varphi_1 + \frac{(\varphi_2 + \varphi_5)}{\varphi_4} \int h_i' du_i + \int \frac{b_i h_i' h_i}{\left(c_i^{i+3}\right)^2} du_i \\
F_i^1 &= \varphi_1 + \frac{(\varphi_2 + \varphi_5)}{\varphi_4} h_i + \varphi_6 + \frac{b_i h_i^2}{2\left(c_i^{i+3}\right)^2} + \varphi_7,
\end{aligned}$$

onde $e^{\varphi_3} = \varphi_4$ e φ_s, $s = 1, \ldots, 7$ são constantes de integração. Portanto, denotando essas constantes conforme a notação apresentada no Capítulo 2, chegamos na expressão apresentada em (2.134),

$$F_i^1 = \frac{b_i h_i^2}{2\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i \beta_i^1 + \mu_i^1, \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{C.7}$$

onde

$$\beta_i^1 = \frac{(\varphi_2 + \varphi_5)}{\varphi_4}, \qquad \mu_i^1 = \varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_7, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{C.8}$$

Observe que a situação das constantes φ_s, $s = 1, 2, 3, 5, 6, 7$ serem todas nulas, pode acontecer. Isso implicaria que $\beta_i^1 = 0$ e $\mu_i^1 = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

De maneira precisamente análoga, obtemos as funções F_i^3 dadas, conforme a expressão (2.136), por

$$F_i^3 = \frac{h_i^2}{2\left(c_i^{i+3}\right)^2} + h_i\beta_i^3 + \mu_i^3, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{C.9}$$

Bibliografia

[1] Blaschke, W.: *Vorlesunger über Differential Geometrie*, vol. 3. Berlin Heidelberg, New York (1929).

[2] Cecil, T. E.: *Lie Sphere Geometry: with applications to submanifolds*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1992).

[3] Cecil, T. E.; Chern, S. S.: *Tautness and Lie sphere geometry*, Math. Ann., 278, 381-399 (1987).

[4] Cecil, T. E.; Chern, S. S.: *Dupin submanifolds in Lie sphere geometry*, Differential geometry and topology, pp. 1-48, Lecture Notes in Math., vol. 1369. Springer, Berlin (1989).

[5] Cezana, M. J.; Tenenblat K.: *A characterization of Laguerre isoparametric hypersurfaces of the Euclidean space*, Monatsh. Math., 175, 187-194 (2014).

[6] Cezana, M. J.; Tenenblat K.: *Dupin hypersurfaces with constant Laguerre curvatures*, Manuscripta Math., 154, 169-184 (2017).

[7] Corro, A. V.; Ferreira, W.; Tenenblat, K.: *On Ribaucour transformations for hypersurfaces*, Mat. Contemp., 17, 137-160 (1999).

[8] Do Carmo, M. P.: *O método do referencial móvel*, Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, ISBN: 978-85-244- 0281-4, (2012).

[9] Ferro, M. L.; Rodrigues, L. A.; Tenenblat, K.: *On Dupin Hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$ *parametrized by lines of curvature*, Results. Math, 70, 499-531 (2016).

[10] Li, H. Z.: *Generalized Cartan identities on isoparametric manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom., 15, 45-50 (1997).

[11] Li, T. Z.: *Laguerre geometry of surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Acta Mathematica Sinica, English Series., Vol. 21, Nº 6 1525-1534 (2005).

[12] Li, T. Z.; Li, H.; Wang C. P.: *Classification of hypersurfaces with parallel Laguerre second fundamental form in* $\mathbb{R}^n$, Differential Geom. Appl., 28, 148-157 (2010).

[13] Li, T. Z.; Li, H.; Wang, C. P.: *Classification of hypersurfaces with constant Laguerre eigenvalues in* $\mathbb{R}^n$. Sci. China Math. 54, 1129–1144 (2011).

[14] Li, T. Z.; Qing, J.; Wang C. P.: *Möbius and Laguerre geometry of Dupin hypersurface*, Advances in Mathematics, vol. 311; 249-294 (2017).

[15] Li, T. Z.; Sun, H. F.: *Laguerre isoparametric hypersurfaces in* $\mathbb{R}^4$, Acta Math. Sinica, English Series 28, 1179-1186 (2011).

[16] Li, T. Z.; Wang C. P.: *Laguerre geometry of hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$, Manuscripta Math., 122, 73-95 (2007).

[17] Li, Y.; Shu, S.: *Laguerre characterization and rigidity of hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 58 (106), Nº 1, 67-79 (2015).

[18] Lie, S.: *Über Komplexe, indesondere Linien und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf der Theorie der partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. 5, 145-208, 209-256 (Ges. Abh. 2, 1-121) (1872).

[19] Marques, C. H.; Mendes, L. O.; Bortotti, M. F. A.; Montanho, S. B.; Souza, J. A.: *Isometrias no espaço de Minkowski: grupo ortogonal generalizado e grupo de Poicaré*, Bol.Soc. Paran. Mat., vol. 34 1, 99-128 (2016).

[20] Musso, E.; Nicolodi, L.: *A variational problem for surfaces in Laguerre geometry.* Trans. Am. Math. soc. 348, 4321–4337 (1996).

[21] Musso, E.; Nicolodi, L.: *Laguerre geometry of surfaces with plane lines of curvature.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 69, 123–138 (1999).

[22] Palmer, B.: *Remarks on a variation problem in Laguerre geometry*. Rendiconti di Mathematica, Serie VII, Roma, vol. 19, pp. 281–293 (1999).

[23] Pinkall, U.: *Dupin'sche Hyperflächen*, Dissertation, Univ. Freiburg, (1981).

[24] Pinkall, U.: *Dupin hypersurfaces*, Math. Ann., 270, 427-440 (1985).

[25] Polyanin, A. D.; Zaitsev, V. F.: *Handbook of Exact Solutions for ordinary differential equations*, 2nd ed., ISBN 1-58488-297-2, Chapman e Hall/CRC,BocaRaton, (2003).

[26] Riveros, C. M. C.; Rodrigues, L. A.; Tenenblat, K.: *On Dupin hypersurfaces with constant Möbius curvature*, Pacific Journal of Mathematic, 236, nº 1, 89-103 (2008).

[27] Rodrigues, L. A.; Tenenblat, K.: *A characterization of Möbius isoparametric hypersurfaces on the sphere*, Monatshefte fur Mathematic, 158, 321-327 (2009).

[28] Shu, S.: *Classification of Laguerre isoparametric hypersurfaces in* $\mathbb{R}^6$*,* Math. Nachr, 288, Nº 5-6, 680–695 (2015).

[29] Shu, S.: *Laguerre isoparametric hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$*,* Bulletin Mathématique de La Société Des Sciences Mathématiques de Roumanie. 58 (106)(2), 211–220 (2015).

[30] Shu, S.: *Laguerre isoparametric and Dupin hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$. RACSAM 112, 361–372 (2018).

[31] Song, Y. P.: *Laguerre isoparametric hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$ *with two distinct non-zero principal curvatures.* Acta Math. Sin. Engl. Ser. 30, 169–180 (2014).

[32] Song, Y. P.; Wang, C. P.: *Laguerre Minimal Surface in* $\mathbb{R}^3$. Acta Math. Sin. Engl, vol. 24, Nº 11, 1861-1870 (2008).