



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos finitos e profinitos com pequenos *sinks* de Engel de p -elementos

por

Lucas Matheus de Lima Dal Berto

Brasília
2025



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos finitos e profinitos com pequenos *sinks* de Engel de p -elementos

por

Lucas Matheus de Lima Dal Berto

sob orientação do

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Brasília
2025

*Dedico esse trabalho trabalhoso
à toda minha família.*

Agradecimentos

Este trabalho é fruto de muito esforço, dedicação, noites em claro e pausas para amamentar e trocar o Dom e a Sílvia. Ainda assim, no meio de tudo isso, consegui encaixar uma pequena peça no imenso quebra-cabeça que é a matemática. Com a ajuda, o incentivo e o carinho de pessoas especiais ao longo do caminho, esta jornada ganhou forma e sentido — e se concretiza agora neste trabalho.

Gostaria de começar agradecendo ao Professor Pavel Shumyatsky — primeiramente por ter aceitado me orientar, mas, acima de tudo, pela paciência, pela compreensão e por todas as conversas e reuniões realizadas, muitas vezes fora do horário de expediente.

Agradeço imensamente ao Professor Jhone, que me acompanha desde a graduação, sempre com conselhos, ideias, dicas valiosas e, sobretudo, por ser uma das minhas maiores fontes de inspiração no universo da matemática.

Agradeço, do fundo do coração, à minha família — pelo amor, pelo apoio incansável e por estarem ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis. Obrigado por me escutarem, me acolherem e me lembrarem, sempre, do que realmente importa.

Aos colegas que tive o prazer de conhecer ao longo do doutorado, meus sinceros agradecimentos. Em especial ao Mateus, sempre disposto a me ajudar, e ao Koba, Zaban e Tarcios, que me acolheram na sala mais animada do programa.

Aos professores Igor, Emerson, Raimundo, Cátia, Pavel Zalesski e Sheila, meu agradecimento pelos ensinamentos, orientações e valiosas contribuições ao longo das disciplinas cursadas.

Aos professores Alex, Danilo e Yerko, agradeço pelas contribuições e pelos apontamentos precisos que enriqueceram este trabalho, tanto em sua estrutura quanto em seu conteúdo.

Por fim, agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UnB por ter me acolhido e possibilitado a realização deste doutorado, e à CAPES pelo apoio financeiro por meio da bolsa de estudos.

*"If I have seen further,
it is by standing on the shoulders of giants."
(Isaac Newton)*

Resumo

Estudamos grupos finitos e profinitos nos quais os *sinks* de Engel à esquerda de p -elementos têm cardinalidade limitada. Um *sink* à esquerda de Engel de um elemento g de um grupo G é um subconjunto que contém todos os comutadores suficientemente longos da forma $[\dots [[x, g], g], \dots, g]$, com $x \in G$. Mostramos que, se p é um número primo e G é um grupo finito no qual todo p -elemento possui um *sink* de Engel com no máximo m elementos, então G possui um subgrupo normal N tal que G/N é um p' -grupo e o índice $[N : O_p(G)]$ é limitado em função de m apenas. No caso profinito, provamos que, se todo p -elemento possui um *sink* de Engel à esquerda finito, então existe um subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ tal que N é virtualmente pro- p e G/N é pro- p' . As demonstrações utilizam técnicas da teoria de grupos finitos, como ações coprimas, séries de Fitting e argumentos estruturais clássicos, aprofundando resultados anteriores sobre grupos quase Engel e refinando abordagens desenvolvidas por Khukhro e Shumyatsky, agora com foco nos p -elementos.

Palavras-chave: *Sink* de Engel; Grupos Finitos; Subgrupos de Sylow; Grupos Profinitos.

Abstract

We study finite and profinite groups in which the *left Engel sinks* of p -elements have bounded cardinality. A left Engel sink of an element g of a group G is a subset that contains all sufficiently long commutators of the form $[\dots[[x, g], g], \dots, g]$, where $x \in G$. We show that if p is a prime and G is a finite group in which every p -element has a left Engel sink with at most m elements, then G has a normal subgroup N such that G/N is a p' -group and the index $[N : O_p(G)]$ is bounded in terms of m only. In the profinite case, we prove that if every p -element has a finite left Engel sink, then there exists a normal subgroup $N \trianglelefteq G$ such that N is virtually pro- p and G/N is pro- p' . The proofs use techniques from the theory of finite groups, such as coprime actions, Fitting series, and classical structural arguments, extending previous results on almost Engel groups and refining approaches developed by Khukhro and Shumyatsky, now focusing on p -elements.

Keywords: Engel sink; Finite Group; Sylow Subgroups; Profinite Groups.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 Princípios Básicos	6
1.2 Grupos Solúveis, Grupos Nilpotentes e o Subgrupo de Fitting	9
1.3 Ações de Grupos	15
2 Limitações por <i>sinks</i> de Engel	21
2.1 Condições de Engel	21
2.2 Limitação da altura de Fitting	23
2.3 Limitação na ordem do subgrupo $[N, P]$	26
2.4 Limitação do comprimento não-solúvel	30
3 Limitação na ordem do p'-residual	35
3.1 Demonstração do Teorema 4	35
4 Grupos Profinitos	40
4.1 Resultados Preliminares	40
4.2 Grupos Profinitos Quase Engel	51
5 Considerações Finais	55
5.1 Limitações por <i>sinks</i> à direita de Engel	55
5.2 Síntese dos Resultados e Perspectivas	56
Bibliografia	59

Introdução

O estudo de propriedades de um grupo G a partir do comportamento de subconjuntos gerados por comutadores repetidos tem sido uma ferramenta recorrente em Teoria de Grupos, especialmente no contexto de condições do tipo Engel, onde temos por definição que um elemento $g \in G$ é dito elemento de Engel à esquerda se, para todo $x \in G$, existe um inteiro positivo $n = n(x, g)$ tal que:

$$[x, \underbrace{g, \dots, g}_n] = 1.$$

É imediato observar que, em qualquer grupo nilpotente, todos os seus elementos satisfazem a condição de elemento de Engel à esquerda. De fato, como a série central descendente de um grupo nilpotente termina na identidade após um número finito de passos, qualquer comutador do tipo $[x, \underbrace{g, \dots, g}_n] = 1$ para algum n suficientemente grande. Em outras palavras, a definição de nilpotência implica diretamente que todo elemento do grupo é de Engel. Dizemos que um grupo é de Engel quando todos os seus elementos são de Engel à esquerda. Assim, todo grupo nilpotente é, necessariamente, um grupo de Engel.

A recíproca, contudo, não é verdadeira. Estabelecer que a condição de Engel para todos os elementos implica a nilpotência do grupo exige um argumento mais elaborado. Esse resultado foi demonstrado por Zorn no contexto de grupos finitos, como formalizado a seguir:

Teorema 1. [23, Teorema 12.3.4] *Um grupo de Engel finito é nilpotente.*

Esse teorema constitui um marco clássico na teoria de Engel, ao mostrar que, no contexto de grupos finitos, a condição de Engel é suficiente para garantir a nilpotência.

Ainda considerando as condições de Engel, destacamos um resultado clássico devido a Baer, que estabelece uma importante caracterização dos elementos de Engel à esquerda no contexto de grupos finitos. Tal caracterização permite vincular propriedades de comutação à estrutura do grupo, em especial ao seu subgrupo de Fitting.

Teorema 2. [9, Capítulo III, Teorema 6.15] *Seja G finito. Um elemento g de G é Engel à esquerda se, e somente se, g pertence ao subgrupo de Fitting $F(G)$ de G .*

Esse resultado é particularmente útil, pois fornece um critério para reconhecer elementos de Engel à esquerda como pertencentes ao subgrupo de Fitting. Com isso, é possível, em diversas demonstrações, deduzir que certos elementos se encontram necessariamente na parte nilpotente do grupo.

Essa ideia foi estendida nos últimos anos por Khukhro e Shumyatsky ao considerar os subgrupos

$$E_n(g) = \langle [x, \underbrace{g, \dots, g}_n] \mid x \in G \rangle,$$

provando o seguinte resultado:

Teorema 3. [13, Teorema 1.1] *Seja g um elemento de um grupo solúvel finito G , e n um inteiro positivo. Se a altura de Fitting de $E_n(g)$ é igual a k , então g pertence a $F_{k+1}(G)$.*

Ainda considerando comutadores repetidos, Khukhro e Shumyatsky introduzem em [14] a ideia de grupos quase Engel (*almost Engel groups*). Nessa abordagem, não se exige que os comutadores eventualmente se tornem triviais, mas sim que pertençam a um conjunto finito $\mathcal{E}(g)$ (denominado *sink* ou *sink* à esquerda de g), para cada $g \in G$.

A análise dos grupos para os quais existe uma uniformidade no tamanho desses conjuntos - isto é, $|\mathcal{E}(g)| \leq m$ para todo $g \in G$ - revelou fortes consequências sobre a estrutura de G .

Em particular, foi provado em [14, Teorema 3.1] que, se todos os elementos de um grupo finito possuem *sinks* de Engel com cardinalidade no máximo m , então existe um subgrupo normal N , cuja ordem é limitada em função de m , tal que o quociente G/N é nilpotente. Esse resultado não apenas fornece uma generalização quantitativa do teorema de Baer, como também abre caminho para aplicações em contextos mais gerais, como grupos profinitos, que veremos a seguir.

Além disso, alguns resultados na literatura reforçam o papel estrutural dos *sinks* à esquerda com cardinalidade limitada. Um exemplo aparece em [2, Teorema 1.2], onde se considera a ação coprima de um grupo abeliano elementar A de ordem q^2 , com q primo, sobre um grupo finito G . Supondo que, para todo $a \in A^\#$, cada elemento $g \in C_G(a)$ possui *sink* $\mathcal{E}(g)$ com no máximo m elementos, os autores demonstram que a ordem de $\gamma_\infty(G)$ — o residual nilpotente de G — é limitada em função apenas de m . Esse resultado exemplifica como a presença de *sinks* pequenos permite controlar aspectos profundos da estrutura do grupo, mesmo em situações envolvendo ações externas.

Outro exemplo relevante é apresentado em [16, Teorema 1.3], onde se mostra que, se um grupo finito G admite um automorfismo φ de ordem prima coprima com $|G|$, e cada elemento de $C_G(\varphi)$ possui um *sink* à esquerda de cardinalidade no máximo m , então G possui um subgrupo normal metanilpotente de índice limitado em função apenas de m . Tal resultado reforça a ideia de que *sinks* de Engel de tamanho controlado impõem restrições significativas à estrutura do grupo, permitindo o controle quantitativo de parâmetros importantes.

Neste trabalho, aprofundamos essa linha de investigação ao considerar o seguinte cenário:

Teorema 4. *Seja p um número primo e G um grupo finito tal que $|\mathcal{E}(g)| \leq m$ para todo p -elemento $g \in G$. Então, G possui um subgrupo normal N tal que G/N é um p' -grupo e o índice $[N : O_p(G)]$ é limitado em função apenas de m .*

O resultado acima pode ser interpretado como uma extensão natural dos trabalhos anteriores, mas que exige novas técnicas, pois a análise é feita exclusivamente sobre os p -elementos, em vez de todos os elementos de G .

Cabe observar que, se todos os p -elementos de G satisfazem a condição $|\mathcal{E}(g)| \leq m$, então N coincide com o subgrupo residual $O^{p'}(G)$, que é o menor subgrupo normal de G tal que o quociente $G/O^{p'}(G)$ é um p' -grupo. Nesse cenário, o teorema assegura que a existência de *sinks* de Engel limitados para todos os p -elementos de G implica uma forte restrição estrutural sobre o p -residual do grupo.

A prova utiliza ferramentas da teoria de ações coprimas, estruturas envolvendo subgrupos quase Engel, bem como argumentos relacionados à série de Fitting e à série não-solúvel. Além disso, demonstramos como a estrutura dos *sinks* de p -elementos pode ser explorada para controlar limites quantitativos sobre a estrutura de certos subgrupos.

Como discutido anteriormente, diversos resultados estabelecidos para grupos finitos admitem extensões significativas no contexto dos grupos profinitos. Um marco relevante nesse sentido é o teorema de Wilson e Zelmanov [27], que afirma que todo grupo profinito de Engel é localmente nilpotente — estabelecendo uma ponte conceitual entre a condição de Engel e a estrutura local desses grupos topológicos.

Um exemplo importante encontra-se em [14, Teorema 1.2], onde Khukhro e Shumyatsky demonstram que, se G é um grupo compacto quase Engel, então existe um subgrupo normal finito N tal que o quociente G/N é localmente nilpotente. Esse resultado evidencia que a presença de *sinks* finitos, continua a produzir fortes implicações estruturais, inclusive em contextos topológicos.

Adicionalmente, estendemos essa linha de investigação ao contexto profinito, obtendo um resultado análogo àquele demonstrado para grupos finitos. Demonstramos o seguinte:

Teorema 5. *Seja p um número primo e G um grupo profinito no qual todo p -elemento possui um sink de Engel finito. Então, G possui um subgrupo normal N tal que N é virtualmente pro- p e G/N é um grupo pro- p' .*

Estendemos esses resultados ao contexto dos grupos profinitos, mesmo diante dos desafios adicionais impostos pela topologia. Considerando a continuidade das operações, a estrutura dos subgrupos fechados e o comportamento das ações conjugacionais, observamos que, se todos os p -elementos de um grupo profinito possuem *sinks* de Engel finitos, então o grupo possui um subgrupo normal que é virtualmente pro- p , com quociente pro- p' . Trata-se de uma generalização significativa do caso finito, que evidência como a finitude dos *sinks* continua impondo restrições estruturais mesmo em grupos com topologia profinita.

Lembre-se de que um grupo profinito é dito possuir uma propriedade *virtualmente* se admite um subgrupo aberto com tal propriedade. De forma um tanto surpreendente, a demonstração do Teorema 5 apresentada não utiliza o Teorema 4.

Nas linhas que se seguem, apresentamos a organização deste trabalho.

No Capítulo 1, reunimos as definições, notações e resultados elementares que serão utilizados ao longo do texto, algumas vezes sem menção explícita. Essa seção serve como base técnica para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, estabelecemos limites para parâmetros como a altura de Fitting, a ordem de subgrupos específicos e o comprimento não-solúvel, todos em função da cardinalidade dos *sinks* de Engel. O capítulo também reúne resultados clássicos e apresenta novos avanços que aprofundam a compreensão do impacto da existência de *sinks* limitados na estrutura dos grupos finitos.

No Capítulo 3, demonstramos o Teorema 4, investigando como a existência de *sinks* de Engel com cardinalidade limitada para p -elementos impõe restrições estruturais significativas em grupos finitos. A abordagem concentra-se na análise do fecho normal dos p -subgrupos de Sylow, cuja ordem é controlada em função de m , por meio de técnicas envolvendo ações coprimas, séries de Fitting e outras ferramentas da teoria de grupos finitos. O capítulo mostra como essas limitações impõem vínculos quantitativos sobre o p -residual do grupo, destacando a influência das condições de Engel na estrutura dos grupos finitos.

O Capítulo 4 é dedicado à extensão dos resultados para o contexto dos grupos profinitos. Iniciamos com a apresentação de conceitos topológicos fundamentais, incluindo a definição de

grupos profinitos. Em seguida, analisamos propriedades de grupos quase Engel nesse ambiente e demonstramos o Teorema 5, que constitui uma generalização do caso finito. Esse resultado evidencia que a finitude dos *sinks* continua impondo restrições estruturais relevantes, mesmo em grupos profinitos.

Por fim, o Capítulo 5 apresenta a definição dos *sinks* à direita de Engel e discute brevemente a possibilidade de adaptação dos resultados obtidos para essa nova configuração. Comentamos que o resultado principal pode ser estendido ao caso de grupos finitos solúveis, embora a generalização para grupos simples apresente obstáculos significativos. Encerramos esse capítulo com as considerações finais do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições essenciais e resultados fundamentais da Teoria de Grupos, que constituem a base teórica indispensável para as discussões desenvolvidas ao longo deste trabalho. Em particular, abordamos conceitos como grupos solúveis, grupos nilpotentes e ações de grupos, fundamentando-nos em referências consagradas, como os trabalhos de Blackburn e Huppert [4], Isaacs [10], Robinson [23] e Rose [24].

1.1 Princípios Básicos

Neste trabalho, trabalharemos extensivamente com noções da Teoria de Grupos. Iniciamos, portanto, apresentando um dos conceitos fundamentais que estará presente em grande parte das construções e argumentos desenvolvidos: o **comutador** de dois elementos de um grupo.

Definição 1.1.1. Seja G um grupo e sejam a, b elementos de G . Definimos o **comutador** de a e b como o elemento $a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^b$ e denotamos ele por $[a, b]$.

Definimos, recursivamente, o **comutador simples** (ou normado à esquerda) dos elementos $a_1, \dots, a_n \in G$ da seguinte forma:

$$[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n],$$

e por convenção $[a_1] = a_1$.

A seguir, enunciamos um lema que contém propriedades elementares dos comutadores, cuja demonstração pode ser encontrada em [23, Teorema 5.1.5].

Lema 1.1.2. Se G é um grupo e $a, b, c \in G$, então:

- (i) $[a, b] = [b, a]^{-1}$;
- (ii) $[ab, c] = [a, c]^b [b, c] = [a, c][[a, c], b][b, c]$;
- (iii) $[a, b^{-1}] = ([a, b]^{b^{-1}})^{-1}$;
- (iv) $[a, b^{-1}, c]^b [b, c^{-1}, a]^c [c, a^{-1}, b]^a = 1$ (*Identidade de Hall-Witt*).

Outras propriedades elementares são decorrentes dessas, como por exemplo, $[a, b]^c = [a^c, b^c]$ e $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$.

Lembrando que, dado um subconjunto S de um grupo G , definimos o subgrupo **gerado** por S , denotado por $\langle S \rangle$, como o menor subgrupo de G que contém S . Para H e K subconjuntos de um grupo G , definimos o **subgrupo comutador** como:

$$[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle.$$

Note que $[H, K] = [K, H]$, já que $[h, k] = [k, h]^{-1}$ e os inversos dos geradores geram o mesmo subgrupo. Em particular, $[G, G]$ é o subgrupo derivado de G , o qual denotaremos por G' .

Lema 1.1.3 (Lema dos Três Subgrupos). Sejam X, Y, Z subgrupos de um grupo G tais que $[X, Y, Z] = [Y, Z, X] = 1$. Então $[Z, X, Y] = 1$.

Introduzimos agora um subgrupo importante na teoria dos grupos: o **subgrupo de Frattini**, denotado por $\Phi(G)$. Ele é definido como a interseção de todos os subgrupos maximais de G . No caso em que G não tem subgrupos maximais, por convenção $\Phi(G) = G$.

Um conceito útil relacionado ao subgrupo de Frattini é o de elemento não-gerador de G . Dizemos que um elemento $g \in G$ é um **não-gerador** se, para todo subconjunto $X \subseteq G$, a igualdade $G = \langle g, X \rangle$ implicar necessariamente que $G = \langle X \rangle$. Em outras palavras, g não contribui de forma essencial para a geração de G .

Com isso, o subgrupo de Frattini também pode ser caracterizado em termos dos elementos não-geradores, como afirma o lema a seguir.

Lema 1.1.4. [23, Lema 5.2.12] Em qualquer grupo G , o subgrupo de Frattini é igual ao conjunto formado pelos elementos não-geradores de G .

Apresentamos agora um resultado fundamental para a manipulação de interseções e produtos de subgrupos: a Lei Modular de Dedekind, cuja demonstração pode ser encontrada em [23, Teorema 1.3.14]. Essa identidade é uma ferramenta útil na estrutura dos grupos, permitindo reescrever interseções de forma conveniente e facilitando a análise de subgrupos normais e séries de subgrupos.

Lema 1.1.5 (Lei Modular de Dedekind). Sejam H, K e L subgrupos de um grupo G com $H \leq L$. Então, $H \cap (LK) = (H \cap L)K$.

O próximo lema apresenta propriedades fundamentais do subgrupo de Frattini.

Lema 1.1.6 ([23, Teorema 5.2.13]). Seja G um grupo finito.

- (i) Se $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$ e $N \leq \Phi(H)$, então $N \leq \Phi(G)$.
- (ii) Se $K \trianglelefteq G$, então $\Phi(K) \leq \Phi(G)$.
- (iii) Se $N \trianglelefteq G$, então $\Phi(G/N) \geq (\Phi(G)N)/N$, com igualdade se $N \leq \Phi(G)$.
- (iv) Se A é um subgrupo normal abeliano de G tal que $\Phi(G) \cap A = 1$, então existe um subgrupo H tal que $G = HA$ e $H \cap A = 1$.

No decorrer do texto, utilizamos as definições de π -elementos da seguinte maneira. Consideremos $\mathbb{P}$ como o conjunto de todos os números primos, π como um subconjunto não vazio de $\mathbb{P}$ e π' como o complementar de π em $\mathbb{P}$, ou seja, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

Definimos um número natural m como sendo um π -**número** se todos os seus divisores pertencem a π . Um elemento de um grupo é denominado um π -**elemento** se a sua ordem é um π -número. Analogamente, definimos um π' -**número** e um π' -**elemento**.

Para manter a coerência com as notações anteriores, quando $\pi = \{p\}$, simplificamos e chamamos de p -elemento. Além disso, dado um grupo finito G e um primo p , definimos o p -**core**, denotado por $O_p(G)$, como o maior p -subgrupo normal de G .

Se $\pi_1, \dots, \pi_m$ são conjuntos de primos, a definição do subgrupo normal $O_{\pi_1, \dots, \pi_m}(G)$ de G , de acordo com [4, p. 407], é realizada por indução em m , como segue:

$$O_{\pi_1, \dots, \pi_{m+1}}(G)/O_{\pi_1, \dots, \pi_m}(G) = O_{\pi_{m+1}}(G/O_{\pi_1, \dots, \pi_m}(G)).$$

Para um grupo finito arbitrário G , determinar $\Phi(G)$ pode ser uma tarefa desafiadora. No entanto, no caso de G ser um p -grupo finito, demonstra-se em [18, Teorema 5.2.8] que $\Phi(G)$ é o menor subgrupo normal de G cujo quociente induzido é abeliano elementar.

Lembre-se de que um p -grupo G é chamado **abeliano elementar** se G for abeliano e houver um primo p tal que todos os elementos de G , exceto a identidade, tenham ordem p . Em outras palavras, $G^p = \langle g^p \mid g \in G \rangle$ é trivial.

Com base nessa informação, podemos deduzir a seguinte descrição para o subgrupo de Frattini de p -grupos finitos:

Lema 1.1.7. Seja G um p -grupo finito. Então $\Phi(G) = G'G^p$.

Demonstração. Primeiramente, observe que o quociente $G/G'G^p$ é um p -grupo abeliano elementar, o que implica $\Phi(G) \leq G'G^p$.

Por outro lado, seja M um subgrupo maximal de G . Pelo [24, Teorema 6.6], M é normal e possui índice p em G , de modo que G/M tem ordem p . Consequentemente, $G'G^p \leq M$.

Como isso vale para todo subgrupo maximal M de G , segue que $G'G^p \leq \Phi(G)$.

Assim, concluímos que $\Phi(G) = G'G^p$. □

1.2 Grupos Solúveis, Grupos Nilpotentes e o Subgrupo de Fitting

A estrutura de um grupo pode ser estudada por meio de suas séries normais, sendo duas das mais relevantes a série abeliana e a série central, utilizadas na definição de grupos solúveis e nilpotentes.

Definição 1.2.1. Um grupo G é dito *solúvel* se possui uma série normal

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

cujos quocientes G_{i+1}/G_i são abelianos para todo i . Uma tal série é chamada *série abeliana* de G .

Quando G é solúvel, o comprimento da menor série abeliana de G é denominado *comprimento derivado* de G . Temos que a classe dos grupos solúveis é fechada com respeito a subgrupos, quocientes e extensões de seus membros. Em particular, como o produto finito de subgrupos normais solúveis é um subgrupo normal solúvel, para um grupo finito G podemos definir o *radical solúvel* de G , que será denotado por $R(G)$, como sendo o maior subgrupo normal solúvel de G .

Adicionalmente, vale destacar que, se G é um grupo solúvel finito e $N \trianglelefteq G$ é um subgrupo normal minimal, então N é um grupo abeliano elementar.

Uma caracterização alternativa da solubilidade de um grupo pode ser feita por meio da *série derivada*, definida indutivamente como:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G \\ G^{(1)} &= [G, G] = G', \\ G^{(n)} &= [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}], \end{aligned}$$

onde o subgrupo $G^{(n)}$ é denominado *n-ésimo derivado* de G .

Definida desta maneira, a série derivada de um grupo G é uma cadeia descendente de subgrupos característicos de G cujos fatores $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ são abelianos, refletindo o grau de não comutatividade do grupo. Um grupo G é solúvel se, e somente se, sua série derivada se torna trivial em alguma etapa, isto é, se existe n tal que $G^{(n)} = 1$.

Definição 1.2.2. Um grupo G é dito *nilpotente* se possui uma série normal

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

cujos quocientes G_{i+1}/G_i estão contidos no centro de G/G_i para todo i . Uma tal série é chamada *série central* de G .

Segue da própria definição que todo grupo nilpotente é solúvel. A classe dos grupos nilpotentes é fechada com respeito a subgrupos e quocientes de seus membros. Também é verdade que o produto de dois subgrupos normais nilpotentes de um grupo é nilpotente.

No entanto, ao contrário da classe dos grupos solúveis, a nilpotência não é fechada para extensões. Um exemplo clássico é o grupo simétrico S_3 , que possui comprimento derivado igual a 2, tornando-o solúvel. No entanto, S_3 não é nilpotente, pois sua série central inferior não atinge o grupo trivial, estabilizando-se no subgrupo alternado A_3 .

Quando G é nilpotente, o comprimento da menor série central de G é denominado *classe de nilpotência* de G . Para medir essa estrutura, podemos utilizar a *série central inferior* de G , definida por

$$\begin{aligned} \gamma_1(G) &= G, \\ \gamma_n(G) &= [\gamma_{n-1}(G), G]. \end{aligned}$$

Essa série nos informa o quão longe um grupo está de ser central e fornece uma condição equivalente para a nilpotência, onde um grupo G é nilpotente se, e somente se, existe um número n tal que $\gamma_n(G) = 1$.

A nilpotência de um grupo é uma propriedade estrutural que pode ser caracterizada de diversas formas. No caso de grupos finitos, algumas dessas caracterizações estão reunidas no próximo resultado.

Lema 1.2.3. Seja G um grupo finito. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) G é nilpotente;
- (ii) $\gamma_n(G) = 1$ para algum inteiro positivo n ;
- (iii) Se $H < G$, então $H < N_G(H)$;
- (iv) Todos os subgrupos maximais de G são normais em G ;
- (v) Todos os subgrupos de Sylow de G são normais em G ;
- (vi) G é isomorfo ao produto direto de seus subgrupos de Sylow;
- (vii) Se $a, b \in G$ têm ordens coprimas, então a e b comutam.

De maneira análoga à definição do radical solúvel de um grupo G , podemos definir o maior subgrupo normal nilpotente de G , cuja fundamentação baseia-se no seguinte resultado de H. Fitting.

Lema 1.2.4. [24, Teorema 10.22] Sejam M e N subgrupos normais nilpotentes de um grupo G . Então MN é nilpotente.

A partir disso, dado um grupo G , definimos o *subgrupo de Fitting* de G , denotado por $F(G)$, como sendo o subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de G . Claramente, se G é um grupo finito, então $F(G)$ é nilpotente.

Um grupo finito pode ter subgrupo de Fitting trivial, mesmo sem ser simples. Um exemplo disso é o grupo simétrico S_5 . No entanto, conforme argumentaremos a seguir, para todo grupo finito solúvel e não trivial G , o subgrupo de Fitting $F(G)$ é necessariamente não trivial.

No contexto dos grupos finitos, introduzimos o conceito de grupos caracteristicamente simples. Um grupo finito e não trivial G é chamado de *caracteristicamente simples* se não possuir nenhum subgrupo característico próprio e não trivial.

Lema 1.2.5. [6, Teorema 1.4] Um grupo caracteristicamente simples é um produto direto de um número finito de grupos simples mutuamente isomorfos.

O resultado acima será fundamental na análise de subgrupos normais minimais em grupos finitos, com ênfase especial na estrutura dos grupos solúveis.

Lema 1.2.6. Seja G um grupo finito não trivial. Então, qualquer subgrupo normal minimal de G é caracteristicamente simples. Se, além disso, G for solúvel, tal subgrupo é p -abeliano elementar para algum primo p , e, em particular, $F(G) \neq 1$.

Demonstração. Seja N um subgrupo normal minimal de G . Como qualquer subgrupo característico de N também é normal em G , a minimalidade de N implica que ele não possui subgrupos característicos próprios não triviais. Assim, N é caracteristicamente simples.

No caso em que G é solúvel, pelo Lema 1.2.5, N é o produto direto de um número finito de grupos simples solúveis e mutuamente isomorfos. No entanto, um grupo simples solúvel não trivial tem ordem prima, o que implica que N é um grupo p -abeliano elementar para algum primo p .

Como N é normal em G e nilpotente, segue que $N \subseteq F(G)$, garantindo que $F(G) \neq 1$. $\square$

Outra propriedade importante do subgrupo de Fitting de grupos finitos solúveis é a seguinte.

Lema 1.2.7. [23, Teorema 5.4.4] Seja G um grupo finito solúvel. Então $C_G(F(G)) = Z(F(G))$.

Agora, definimos os subgrupos $F_n(G)$ indutivamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_0(G) &= 1 \\ F_1(G) &= F(G) \\ F_{i+1}(G)/F_i(G) &= F(G/F_i(G)), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte série

$$1 = F_0(G) < F_1(G) < F_2(G) < \dots$$

Essa sequência ascendente de subgrupos é conhecida como *série de Fitting* de G , e o menor número $h = h(G)$ com a propriedade $F_h(G) = G$, é denominado *altura de Fitting* de G .

No caso em que G é um grupo solúvel finito, este número minimal sempre existe. Além disso, mostra-se que a série de Fitting é a série de menor comprimento possível entre as séries ascendentes de G com fatores nilpotentes. Por fim, G é nilpotente se, e somente se, $h(G) = 1$.

Listamos aqui alguns resultados conhecidos sobre altura de Fitting, que serão usados em futuras demonstrações.

Lema 1.2.8. Sejam G e K grupos solúveis e sejam $H, N \leq G$, com $N \trianglelefteq G$. Então:

- (i) $h(H) \leq h(G)$;
- (ii) $h(G/N) \leq h(G)$;
- (iii) $h(G) \leq h(N) + h(G/N)$;
- (iv) $h(G \times K) = \max\{h(G), h(K)\}$.

Demonstração. Com o objetivo de simplificar a notação, seja $F_i = F_i(G)$ para todo i inteiro positivo. Assuma que $1 = F_0 \leq F_1 \leq \dots \leq F_n = G$ seja a série de Fitting de G .

- (i) Observe que a série de Fitting de G naturalmente induz uma série para H da seguinte maneira:

$$1 = H \cap F_0 \leq H \cap F_1 \leq \dots \leq H \cap F_n = H.$$

Perceba que cada quociente $H \cap F_i / H \cap F_{i-1}$ é isomorfo a um subgrupo de F_i / F_{i-1} , o qual é nilpotente. Portanto, temos $h(H) \leq h(G)$.

- (ii) Como em (i), observe que

$$1 = F_0 N / N \leq F_1 N / N \leq \dots \leq F_n N / N = G / N$$

é uma série de fatores nilpotentes de G/N , já que para todo $i = 1, \dots, n$ o grupo $\frac{F_i N / N}{F_{i-1} N / N}$ é nilpotente. Portanto, temos $h(G/N) \leq h(G)$.

- (iii) Considere as séries de Fitting

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_a = N \text{ e } 1 = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_b = G/N$$

de N e G/N , respectivamente. Para cada $i = 0, \dots, b$, existe único $N_{a+i} \trianglelefteq G$, tal que $N \leq N_{a+i}$ e $N_{a+i}/N = M_i$. Agora, a série normal

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_a = N \leq N_{a+1} \leq \dots \leq N_{a+b} = G$$

é uma série de Fitting de G . Logo, $h(G) \leq h(N) + h(G/N)$.

- (iv) Seja $1 = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_m = K$ uma série de Fitting de K . Assuma, sem perda de generalidade, que $n \leq m$. A série

$$1 = F_0 \times K_0 \leq F_1 \times K_1 \leq \dots \leq F_n \times K_n \leq F_n \times K_{n+1} \leq \dots \leq F_n \times K_m = G \times K$$

é uma série de Fitting de $G \times K$. Portanto, temos $h(G \times K) \leq \max\{h(G), h(K)\}$. No entanto, de acordo com (i), também temos $\max\{h(G), h(K)\} \leq h(G \times K)$. Portanto, a igualdade é estabelecida.

□

Lema 1.2.9. Seja G um grupo solúvel finito não trivial. Então

$$h(G) = h(G/F(G)) + 1.$$

Demonstração. Considere $\bar{G} = G/F(G)$ e suponha que $h(\bar{G}) = n$. Considere a série de Fitting para $\bar{G}$:

$$1 = \bar{F}_0(\bar{G}) \leq \bar{F}_1(\bar{G}) \leq \cdots \leq \bar{F}_n(\bar{G}) = \bar{G}.$$

Para cada $0 \leq i \leq n$, seja $F_i(G)$ o i -ésimo termo da série de Fitting de G . Com isso, temos a seguinte série para G :

$$F(G) = F_0(G) \leq F_1(G) \leq \cdots \leq F_n(G) = G.$$

Como $\bar{F}_{i+1}(\bar{G})/\bar{F}_i(\bar{G}) = F(\bar{G}/\bar{F}_i(\bar{G}))$, temos que $F_{i+1}(G)/F_i(G) = F(G/F_i(G))$, para todo $0 \leq i \leq n-1$, e sendo $F(G)$ nilpotente, temos que a série anterior torna-se:

$$1 \leq F(G) \leq F_1(G) \leq \cdots \leq F_n(G) = G,$$

que é uma série de Fitting para G de comprimento $n+1$.

Claramente, temos que $h(G) = n+1$, pois, caso contrário, poderíamos construir uma série de Fitting para $\bar{G}$ com altura menor do que n , o que seria um absurdo. Assim, o resultado segue. □

Um grupo finito G é dito **quase simples** se $G/Z(G)$ é simples e $G = G'$. Um subgrupo quase simples subnormal de um grupo G é chamado de **componente** de G . Denotemos por $Comp(G)$ o conjunto de todas as componentes de G e por $E(G)$ o subgrupo gerado por $Comp(G)$, ou seja, $E(G) = \langle Comp(G) \rangle$. Comumente, esse subgrupo é denominado de **layer** de G .

Note que $E(G)$ é o produto das componentes de G e é característico em G . Um grupo G pode não possuir componentes, por exemplo, isso ocorre quando G é solúvel, resultando em $E(G) = 1$.

Um fato importante sobre as componentes de um grupo finito pode ser encontrado no resultado a seguir.

Lema 1.2.10. [10, Teorema 9.4] Sejam H e K componentes distintas de um grupo finito G . Então $[H, K] = 1$.

A ideia central da demonstração é provar, por indução na ordem de G , que duas componentes distintas comutam entre si. O argumento explora o fato de que, em um grupo simples, duas componentes não podem coincidir com G , levando a uma contradição. No caso geral, analisa-se o quociente $\bar{G} = G/N$, onde N é um subgrupo normal minimal, e mostra-se que as imagens de H e K nesse quociente continuam sendo componentes. A indução é então aplicada a $\bar{G}$, e, combinando com o Lema dos Três Subgrupos, conclui-se que $[H, K] = 1$. No caso final, se $H = K$, a suposição de que são distintas leva a uma contradição estrutural.

Desta maneira, segue do Lema 1.2.10 que as componentes de um grupo finito normalizam-se e cada componente é normal em $E(G)$. Agora, sendo G um grupo finito, o **subgrupo de Fitting generalizado** de G é definido por $F^*(G) = F(G)E(G)$. E de acordo com [10, Teorema 9.8], o subgrupo de Fitting generalizado possui a seguinte propriedade: $C_G(F^*(G)) \subseteq F^*(G)$.

1.3 Ações de Grupos

Nesta seção, abordaremos as ações de grupos, com ênfase na ação coprima, destacando suas principais propriedades.

Sejam G um grupo e Ω um conjunto não vazio. Suponha que exista uma operação " $\star$ " tal que, para cada elemento $g \in G$ e $x \in \Omega$ é bem definido um elemento $x \star g \in \Omega$. Para simplificar a notação, frequentemente denotamos o elemento $x \star g$ como x^g . Dizemos que essa operação define uma **ação** de G sobre Ω se as seguintes condições são satisfeitas:

- $x^1 = x$ para todo $x \in \Omega$;
- $(x^g)^h = x^{gh}$ para todo $x \in \Omega$ e $g, h \in G$.

Uma ação de um grupo G sobre um conjunto Ω é denominada **fiel** se $x^g = x$ implica necessariamente $g = 1$. Em contrapartida, se $x^g = x$ para todo $g \in G$ e para todo $x \in \Omega$, dizemos que a ação é **trivial**.

Um elemento $x \in \Omega$ é dito **G -invariante** se é fixado por todos os elementos de G , ou seja, $x^g = x$ para todo $g \in G$. De maneira mais geral, um subconjunto $Y \subseteq \Omega$ é chamado **G -invariante** se, para cada $y \in Y$ e $g \in G$, temos $y^g \in Y$, isto é, Y é estável sob a ação do grupo.

O conjunto dos elementos $g \in G$ que fixam um dado $\alpha \in \Omega$ é chamado de **estabilizador** de α , denotado por

$$\text{stab}_G(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}.$$

É imediato verificar que $\text{stab}_G(\alpha)$ é um subgrupo de G . De fato, o elemento identidade $1 \in G$ pertence ao estabilizador, e se $a, b \in \text{stab}_G(\alpha)$, então $\alpha^a = \alpha = \alpha^b$. Isso implica que $\alpha^{b^{-1}} = \alpha$, logo $b^{-1} \in \text{stab}_G(\alpha)$. Além disso, $\alpha^{ab^{-1}} = (\alpha^a)^{b^{-1}} = \alpha$, e assim $ab^{-1} \in \text{stab}_G(\alpha)$, garantindo que $\text{stab}_G(\alpha) \leq G$.

Agora, suponha que o grupo G age sobre o conjunto Ω . Podemos definir uma relação $\sim$ em Ω da seguinte forma: para quaisquer $x, y \in \Omega$, dizemos que $x \sim y$ se existir $g \in G$ tal que $x^g = y$. Essa relação é facilmente verificada como uma relação de equivalência, e, portanto, induz uma partição de Ω . Para cada $x \in \Omega$, o conjunto

$$\text{orb}(x) = \{x^g \mid g \in G\}$$

é chamado de **órbita** de x . O resultado a seguir fornece informações importantes sobre a cardinalidade de $\text{orb}(x)$ com base na estrutura do grupo.

Lema 1.3.1 (Teorema 3.1.5). [18] Seja G um grupo que age sobre um conjunto Ω . Então, para cada $x \in \Omega$ tem-se que, $|\text{orb}(x)| = [G : \text{stab}_G(x)]$.

Uma situação particular ocorre quando a ação de um grupo G sobre um conjunto Ω resulta em uma única órbita. Nesse caso, dizemos que G age **transitivamente** sobre Ω . Essa condição nos conduz ao célebre resultado apresentado a seguir.

Lema 1.3.2 (Teorema 3.1.4 - Argumento de Frattini). [18] Seja G um grupo agindo sobre um conjunto Ω . Suponha que G contenha um subgrupo normal N que age transitivamente sobre Ω . Então, para todo $x \in \Omega$, temos $G = \text{stab}_G(x)N$.

Demonstração. Seja $g \in G$. Como N age transitivamente sobre Ω , existe $n \in N$ tal que:

$$x^n = x^g.$$

Ou seja, $x^{(gn^{-1})} = x$, o que significa que $gn^{-1} \in \text{stab}_G(x)$. Assim, podemos reescrever g como:

$$g = (gn^{-1})n,$$

onde $gn^{-1} \in \text{stab}_G(x)$ e $n \in N$. Portanto, $g \in \text{stab}_G(x)N$, provando que $G \subseteq \text{stab}_G(x)N$.

A outra inclusão é imediata, visto que $\text{stab}_G(x) \subseteq G$ e $N \subseteq G$. Portanto, $G = \text{stab}_G(x)N$, como desejado. $\square$

Corolário 1.3.3. Seja G um grupo finito e $N \trianglelefteq G$. Seja P um p -subgrupo de Sylow de N . Então $G = N_G(P)N$.

Demonstração. Consideramos a ação do grupo G sobre o conjunto dos conjugados de P , ou seja, a ação de G sobre $X = \{P^g \mid g \in G\}$ por conjugação, dada por:

$$g \cdot P^h = P^{gh}, \text{ para todo } g, h \in G.$$

Por definição, $N_G(P)$ é o estabilizador de P nessa ação, pois contém exatamente os elementos de G que deixam P invariante por conjugação, ou seja:

$$N_G(P) = \{g \in G \mid P^g = P\}.$$

Além disso, como N é normal em G , ele age transitivamente sobre os conjugados de P . De fato, para qualquer $P^g \in X$, temos que $P^g = P^{gn}$ para algum $n \in N$, pois N é normal e, portanto, seus elementos conjugam P dentro do conjunto dos seus conjugados.

Agora, aplicamos o Lema 1.3.2, que nos garante que, sob essas condições, $G = \text{stab}_G(P)N$. Como vimos, o estabilizador de P é precisamente $N_G(P)$, logo obtemos $G = N_G(P)N$. $\square$

Sejam A e G grupos. Dizemos que A age por **automorfismos** sobre G , se A age sobre G como conjunto e além disso, $(g_1 g_2)^a = g_1^a g_2^a$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $a \in A$. Nesse contexto, se A e G são grupos finitos tais que $(|A|, |G|) = 1$, dizemos que tal ação é **copríma**.

Suponhamos que um grupo H age por automorfismos sobre um grupo N . Então, existe um homomorfismo $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ definido por $h \mapsto \varphi_h$. Assim, podemos sempre construir um grupo, unicamente determinado por H, N e o homomorfismo φ , que é o **produto semidireto** de H e N , que denotamos por $N \rtimes H$.

Definimos o **centralizador** de A em G como $C_G(A) = \{g \in G \mid g \text{ é } A\text{-invariante}\}$. Especificamente, para $\varphi \in A$, podemos expressar o subgrupo comutador $[G, \varphi]$ da seguinte maneira: $[G, \varphi] = \langle g^{-1} g^\varphi \mid g \in G \rangle$. De maneira mais geral, temos $[G, A] = \langle [G, \varphi] \mid \varphi \in A \rangle$.

Por fim, listamos alguns fatos fundamentais sobre ações de automorfismos, que serão usados ao longo do texto. As demonstrações detalhadas podem ser encontradas nos Capítulos 3 e 4 de [10].

Lema 1.3.4. [10, Corolário 4.20] Seja A agindo via automorfismos sobre G , onde A e G são grupos, e seja $H \subseteq G$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) Toda classe lateral à direita de H em G é um subconjunto A -invariante.
- (ii) Toda classe lateral à esquerda de H em G é um subconjunto A -invariante.

(iii) $[G, A] \subseteq H$.

Em particular, $[G, A]$ é o menor subgrupo de G com a propriedade de que todas as suas classes laterais à direita são A -invariantes, e de forma similar se "esquerda" substituir "direita".

Outra propriedade fundamental é a preservação de centralizadores sob quocientes em ações de automorfismos quando a ordem do grupo que age é coprima à do subgrupo normal envolvido.

Lema 1.3.5. [10, Corolário 3.28] Seja A um grupo que age via automorfismos sobre G , onde A e G são grupos finitos, e seja $N \triangleleft G$ um subgrupo A -invariante. Assuma que $(|A|, |N|) = 1$. Escrevendo $\overline{G} = G/N$, temos que $C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$.

A ideia central da demonstração é identificar os elementos fixados por A no quociente G/N . Esses elementos correspondem exatamente às classes laterais gN que são fixadas pela ação induzida de A , o que ocorre quando $g \in C_G(A)$. Assim, os elementos fixos de A em $\overline{G}$ são exatamente as classes laterais que contêm elementos de $C_G(A)$, isto é, a imagem de $C_G(A)$ em $\overline{G}$, que é $\overline{C_G(A)}$.

Além disso, a ação sobre o quociente de Frattini pode ser usada para deduzir a trivialidade de toda a ação em G .

Lema 1.3.6. [10, Corolário 3.29] Seja A um grupo que age via automorfismos sobre G , onde A e G são grupos finitos, e assumamos que $(|A|, |G|) = 1$. Se a ação induzida de A no quociente de Frattini $G/\Phi(G)$ é trivial, então a ação de A em G é trivial.

A ideia central da prova consiste em mostrar que cada elemento $a \in A$ pertence a $C_A(G)$, ou seja, que A centraliza G . Como estamos lidando com uma ação coprima e o argumento se reduz ao comportamento de cada automorfismo individualmente, não há perda de generalidade em assumir que $A = \langle a \rangle$ é cíclico. Nesse caso, como subgrupos cíclicos finitos são sempre solúveis, pode-se aplicar o Lema 1.3.5 com $\overline{G} = G/\Phi(G)$, o que garante que $C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$. Utilizando o fato de que a ação é trivial em $\overline{G}$, deduzimos que $G = C_G(A)\Phi(G)$, e pela caracterização do subgrupo de Frattini, isso implica que $G = C_G(A)$. Assim, a ação de A em G é trivial.

Uma importante consequência das ações de automorfismos em grupos de ordem coprima está na relação entre comutadores, conforme o próximo lema.

Lema 1.3.7. [10, Lema 4.28 e Lema 4.29] Seja A um grupo que age por automorfismos sobre um grupo G , onde A e G são grupos finitos e assumamos que $(|A|, |G|) = 1$. Então $G = C_G(A)[G, A]$ e $[G, A, A] = [G, A]$.

Demonstração. Para primeira parte, consideremos o quociente $\overline{G} = G/[G, A]$. Como $[G, A]$ é o subgrupo gerado pelos comutadores de G com A , temos que a ação de A sobre $\overline{G}$ é trivial. Em outras palavras, $\overline{G} \subseteq C_{\overline{G}}(A)$.

Por outro lado, pelo Lema 1.3.5, temos que $C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$. Logo,

$$\overline{C_G(A)[G, A]} = \overline{C_G(A)} = \overline{G}.$$

Isso implica que a imagem de $C_G(A)[G, A]$ em $\overline{G}$ é todo $\overline{G}$. Pelo Teorema da Correspondência [10, Teorema X.21], isso significa que:

$$G = C_G(A)[G, A],$$

como queríamos demonstrar.

Para demonstrar a segunda parte do lema, observe inicialmente que $[G, A, A] \subseteq [G, A]$ por definição. Resta, portanto, mostrar a inclusão reversa. Para isso, basta provar que, para todo $g \in G$ e $a \in A$, o comutador $[g, a] \in [G, A, A]$.

Assumamos inicialmente que A é solúvel. Pelo caso anterior, temos que $G = C_G(A)[G, A]$. Assim, dado $g \in G$, podemos escrever $g = cx$, com $c \in C_G(A)$ e $x \in [G, A]$. Seja $a \in A$. Como $c \in C_G(A)$, segue que $[c, a] = 1$. Aplicando a identidade dos comutadores para produtos, temos:

$$[g, a] = [cx, a] = [c, a]^x [x, a] = [x, a] \in [G, A, A].$$

Para o caso geral, em que A não é necessariamente solúvel, consideremos $a \in A$ fixado. O subgrupo cíclico $\langle a \rangle$ é, por construção solúvel. Assim, aplicando o resultado ao grupo $\langle a \rangle$, temos:

$$[g, a] \in [G, \langle a \rangle] = [G, \langle a \rangle, \langle a \rangle] \subseteq [G, A, A].$$

Logo, em todos os casos, $[G, A] \subseteq [G, A, A]$, e portanto $[G, A] = [G, A, A]$, conforme queríamos demonstrar. $\square$

Além disso, quando a ação ocorre sobre um grupo abeliano, obtemos uma decomposição do grupo entre o centralizador e o comutador do grupo um resultado clássico atribuído a Fitting.

Teorema 1.3.8. [10, Teorema 4.34] *Seja A um grupo que age por automorfismos sobre um grupo abeliano G . Além disso, assuma que A e G são finitos e que $(|G|, |A|) = 1$. Então $G = C_G(A) \times [G, A]$.*

Quando consideramos automorfismos de um grupo que atuam trivialmente sobre o quociente de Frattini, podemos obter restrições sobre a ordem desses automorfismos.

Lema 1.3.9. [9, Teorema 3.18] Seja α um automorfismo de G tal que $(|\alpha|, |\Phi(G)|) = 1$. Além disso, seja $g^\alpha \Phi(G) = g\Phi(G)$ para todos os $g \in G$, ou seja, α atua sobre $G/\Phi(G)$ como o automorfismo identidade. Então, $\alpha = 1$.

Se, em particular, G for um p -grupo e α um automorfismo de G com $g^\alpha \Phi(G) = g\Phi(G)$ para todos os $g \in G$, então $|\alpha|$ é uma potência de p .

Por fim, obtemos um resultado sobre a relação entre subgrupos normais e o centro do grupo quando um automorfismo age de forma transitiva sobre os comutadores.

Lema 1.3.10. Seja α um automorfismo do grupo G com a propriedade de que $[G, \alpha] = G$. Seja N um subgrupo normal α -invariante de G tal que $N \leq C_G(\alpha)$. Então $N \leq Z(G)$.

Demonstração. Como N é normal em G e $N \leq C_G(\alpha)$, então, para todo $x \in G$, temos $N \leq C_G(\alpha^x)$. Consequentemente, $N \leq C_G([x, \alpha])$ para todo $x \in G$.

Como $G = \langle [x, \alpha]; x \in G \rangle$, concluímos que $N \leq Z(G)$.

□

Capítulo 2

Limitações por *sinks* de Engel

Neste capítulo, buscamos estabelecer limites para certos parâmetros associados a grupos finitos, utilizando os *sinks* de Engel como ferramenta central. Esses limites incluem a altura de Fitting, a ordem de subgrupos específicos e o comprimento não-solúvel. O objetivo principal é caracterizar esses parâmetros em termos do *sinks*, criando uma base teórica sólida que será aplicada nas discussões subsequentes. Além disso, apresentamos resultados clássicos e recentes que fundamentam essas limitações, explorando suas consequências e aplicabilidade em diferentes contextos.

2.1 Condições de Engel

Nesta seção, introduziremos os conceitos de grupo localmente nilpotente e grupo de Engel, além de discutirmos algumas propriedades fundamentais associadas a condições de Engel que serão relevantes ao longo deste trabalho.

Um grupo G é dito *localmente nilpotente* se todo subgrupo finitamente gerado de G é nilpotente.

É possível demonstrar que subgrupos e quocientes de um grupo localmente nilpotente também são localmente nilpotentes. No entanto, o fato de um grupo ser localmente nilpotente não implica que ele seja nilpotente: existem grupos localmente nilpotentes que não são nilpotentes. Um exemplo clássico é o grupo diedral generalizado, dado por $A \rtimes C_2$, onde $A = \mathbb{Z}_{2^\infty}$ é o grupo abeliano conhecido como 2-grupo de Prüfer, C_2 é um grupo cíclico de ordem 2. O gerador de C_2 age sobre A levando qualquer elemento em seu inverso.

Apresentamos agora a definição de elemento de Engel, um conceito importante no estudo da estrutura dos grupos e de propriedades relacionadas à nilpotência.

Seja G um grupo. Um elemento $a \in G$ é denominado *elemento de Engel à esquerda* se para todo $g \in G$ existir um inteiro positivo $n = n(a, g)$, que depende possivelmente de a e g , tal que

$$[g, \underbrace{a, a, \dots, a}_n] = 1.$$

Nesse contexto, se todos os elementos de G são de Engel à esquerda, dizemos que G é um *grupo de Engel*.

O próximo lema mostra que todo grupo localmente nilpotente é, necessariamente, um grupo de Engel.

Lema 2.1.1. Se G é um grupo localmente nilpotente, então G é um grupo de Engel.

Demonstração. Sejam $x, g \in G$. Considere o subgrupo $H = \langle x, g \rangle$. Como G é localmente nilpotente, H é nilpotente.

Dessa maneira, existe um inteiro positivo $n = n(x, g)$ tal que:

$$[x, \underbrace{g, g, \dots, g}_n] = 1.$$

Como isso vale para todo par $(x, g) \in G \times G$, segue que G é um grupo de Engel. $\square$

Observamos, entretanto, que a recíproca do Lema não é verdadeira: existem grupos de Engel que não são localmente nilpotentes. Um exemplo clássico é fornecido pelos grupos construídos por Golod (veja, [11, Exemplo 18.3.2]): para cada inteiro $d \geq 2$, existe um grupo G_d que é gerado por d elementos, não é nilpotente, mas possui a propriedade de que todos os seus subgrupos gerados por no máximo $d - 1$ elementos são nilpotentes. Isso mostra que a condição de Engel pode ser satisfeita de forma pontual, sem garantir a estrutura localmente nilpotente do grupo.

Além disso, Zorn [23, Teorema 12.3.4] mostrou que todo grupo de Engel finito é nilpotente. É importante ressaltar que a condição de finitude não pode ser descartada, uma vez que $C_p \wr C_p^\infty$ - o produto entrelaçado de C_p por C_p^∞ , onde C_p^∞ representa o p -grupo abeliano elementar de posto infinito - é um p -grupo Engel, mas não é nilpotente, uma vez que seu centro é trivial (ver [20, Teorema 24.23]).

Antes de prosseguirmos, é relevante mencionar um resultado importante atribuído a Baer.

Teorema 2.1.2. [9, Capítulo III, Teorema 6.15] Suponha que G seja finito. Se g é um elemento Engel à esquerda de G , então g está contido no subgrupo de Fitting $F(G)$ de G .

Para demonstrar esse teorema, consideramos o subgrupo

$$M = \langle g \mid g \in G, g \text{ é um elemento de Engel à esquerda de } G \rangle.$$

Primeiramente, notamos que M é um subgrupo normal de G . Isso se deve ao fato de que, se g é um elemento de Engel à esquerda, então qualquer conjugado de g também possui a mesma propriedade, garantindo que M seja fechado sob conjugação.

Além disso, conforme estabelecido em [9, Capítulo III, Teorema 6.14], sabemos que um grupo finito gerado por elementos de Engel é necessariamente nilpotente. Portanto, M , sendo um subgrupo nilpotente normal de G , está contido no subgrupo de Fitting de G .

Essa ideia foi estendida nos últimos anos por Khukhro e Shumyatsky ao considerar os subgrupos

$$E_n(g) = \langle [x, \underbrace{g, g, \dots, g}_n] \mid x \in G \rangle,$$

e demonstraram, com base nessa construção, o seguinte resultado:

Teorema 2.1.3. [13, Teorema 1.1] *Seja g um elemento de um grupo solúvel finito G , e n um inteiro positivo. Se a altura de Fitting de $E_n(g)$ é igual a k , então g pertence a $F_{k+1}(G)$.*

A ideia central da demonstração consiste em analisar os subgrupos da forma $[\dots [[G, g], g], \dots, g]$ que são subnormais em G , e identificar o menor dele, denotado por H . Caso $H = 1$, então $g \in F(G)$, já que g nesse caso é um elemento de Engel.

Em seguida, considera-se $N = \langle H^G \rangle$ e observa-se que a imagem de g no quociente G/N é um elemento de Engel, implicando que $gN \in F(G/N)$. A partir disso, utiliza-se o fato de que a altura de Fitting se comporta bem com respeito a quocientes e fechos normais, concluindo que H tem altura de Fitting no máximo k .

2.2 Limitação da altura de Fitting

Dado um grupo G e $g \in G$, definimos o *sink de Engel para g* , ou simplesmente *g -sink*, como um conjunto $\mathcal{E}(g)$ tal que, para todo $a \in G$, todos comutadores de peso suficientemente grande $[a, g, \dots, g]$ pertencem a $\mathcal{E}(g)$, isto é, para todo $a \in G$ existe um inteiro positivo $n(a, g)$ tal que

$$[a, \underbrace{g, g, \dots, g}_n] \in \mathcal{E}(g) \text{ para todo } n \geq n(a, g).$$

Se um elemento g de um grupo G tem um *sink* Engel finito, então ele possui o menor *sink* de Engel, de fato se $\mathcal{E}_1(g)$ for um subconjunto contendo todos os comutadores $[x, \underbrace{g, \dots, g}_{n_1}]$ para qualquer inteiro positivo $k \geq n_1$, e $\mathcal{E}_2(g)$ satisfizer a mesma propriedade para um número n_2 , então $\mathcal{E}_1(g) \cap \mathcal{E}_2(g)$ também satisfaz a mesma condição com o número $n(x, g) = \max\{n_1, n_2\}$.

Assim, quando G é grupo finito, para cada elemento $g \in G$ existe um conjunto mínimo que atende à definição de *sink*, que denotaremos por $\mathcal{E}(g)$. Daqui em diante, utilizaremos a notação $\mathcal{E}(g)$ para nos referirmos aos *g-sinks* (mínimos). Quando necessário, usaremos a notação do conjunto $\mathcal{E}_k(g) = \{[a, \underbrace{g, g, \dots, g}_k] : a \in G\}$ para k inteiro positivo.

Khukhro e Shumyatsky [14] destacam algumas propriedades relacionadas aos *sinks* de subgrupos de um grupo G . Dentre elas, merecem destaque:

- Considerando H um subgrupo de G , o *h-sink* construído em H para um elemento $h \in H$ é precisamente o subconjunto $\mathcal{E}(h) \cap H$ do *h-sink* $\mathcal{E}(h)$ em G . Denotaremos esse *sink* por $\mathcal{E}_H(h)$.
- Se N é um subgrupo normal de G , para $\bar{g} = gN$, o $\bar{g}$ -*sink* em G/N é a imagem de $\mathcal{E}(g)$ neste grupo quociente.

De acordo com [14, Lema 2.1], para qualquer $g \in G$, o *g-sink* $\mathcal{E}(g)$ consiste precisamente de todos os elementos a tais que $a = [a, g, g, \dots, g]$, onde g ocorre pelo menos uma vez. Denotando $E = \langle \mathcal{E}(g) \rangle$ e observando que cada elemento do *sink* pertence a $[E, g]$, concluímos que $E \subseteq [E, g]$. A outra inclusão é imediata. Registramos este fato no seguinte lema.

Lema 2.2.1. Seja G um grupo finito e considere $E = \langle \mathcal{E}(g) \rangle$, para algum $g \in G$. Então, temos que $E = [E, g]$.

Apresentamos agora um resultado referente aos subgrupos normais de G .

Lema 2.2.2. Seja G um grupo finito e $g \in G$. Suponha que N seja um subgrupo normal de G . Então, $N \cap \mathcal{E}(g) = 1$ se, e somente se, existe um inteiro positivo i tal que $[N, \underbrace{g, g, \dots, g}_i] = 1$.

Demonstração. Assumindo que $N \cap \mathcal{E}(g) = 1$, temos que nenhum elemento não trivial $a \in N$ pode ser escrito como $a = [a, g, g, \dots, g]$. Logo existe um inteiro positivo i , tal que $[N, \underbrace{g, g, \dots, g}_i] = 1$.

Agora, se existe um inteiro positivo i tal que $[N, \underbrace{g, g, \dots, g}_i] = 1$, então é evidente que nenhum elemento não trivial a satisfaz $a = [a, g, g, \dots, g]$. Portanto, concluímos que $N \cap \mathcal{E}(g) = 1$.

□

Lema 2.2.3. Seja G um grupo finito e $g \in G$. Suponha que N_1 e N_2 sejam subgrupos normais de G . Se $N_1 \cap \mathcal{E}(g) = 1 = N_2 \cap \mathcal{E}(g)$, então $N_1 N_2 \cap \mathcal{E}(g) = 1$.

Demonstração. Como $N_1 \cap \mathcal{E}(g) = 1 = N_2 \cap \mathcal{E}(g)$, pelo Lema 2.2.2 temos que existem $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ tais que $[N_1, \underbrace{g, g, \dots, g}_{i_1}] = [N_2, \underbrace{g, g, \dots, g}_{i_2}] = 1$.

Note que

$$[N_1 N_2, \underbrace{g, g, \dots, g}_{i_1 + i_2}] \leq [[N_1 N_2, \underbrace{g, g, \dots, g}_{i_2}], \underbrace{g, g, \dots, g}_{i_1}] = 1.$$

Isso ocorre porque, ao considerar a ação de g sobre $N_1 N_2 / N_1$, temos que $[N_1 N_2 / N_1, \underbrace{g, \dots, g}_{i_2}] = 1$, implicando que $[N_1 N_2, \underbrace{g, g, \dots, g}_{i_2}] \leq N_1$.

Portanto, $N_1 N_2 \cap \mathcal{E}(g) = 1$.

□

Como consequência do Lema 2.2.3, temos que existe um único subgrupo normal maximal N de G tal que $N \cap \mathcal{E}(g) = 1$.

Tendo esses resultados em mente, conseguimos estabelecer o seguinte lema, que será fundamental para o desenvolvimento subsequente:

Lema 2.2.4. Seja G um grupo finito e $g \in G$. Suponha que N seja um subgrupo normal de G tal que $N \cap \mathcal{E}(g) = 1$. Então, $[N, g] \leq F(G)$.

Demonstração. Pela hipótese $N \cap \mathcal{E}(g) = 1$, e aplicando o Lema 2.2.2, segue que existe um inteiro positivo n tal que, para todo $x \in N$,

$$[x, \underbrace{g, g, \dots, g}_n] = 1.$$

Isso significa que g é um elemento Engel à esquerda no subgrupo $N\langle g \rangle$.

Pelo Teorema 2.1.2, temos que $g \in F(N\langle g \rangle)$. Como $N \leq N\langle g \rangle$, obtemos:

$$[N, g] \subseteq [N\langle g \rangle, F(N\langle g \rangle)] \leq F(N\langle g \rangle)$$

e, portanto, $[N, g]$ é nilpotente.

Além disso, como N é g -invariante, temos $[N, g] \trianglelefteq N$. Assim, $[N, g] \leq F(N)$, e como $N \trianglelefteq G$, segue que $F(N) \leq F(G)$. Logo,

$$[N, g] \leq F(G),$$

como desejado. □

Com isso, podemos demonstrar o seguinte resultado, que estabelece uma conexão entre a cardinalidade dos g -sinks e a altura de Fitting do subgrupo gerado pelos sinks:

Teorema 2.2.5. *Sejam G um grupo solúvel finito, $g \in G$ e considere $E = \langle \mathcal{E}(g) \rangle$. Assuma que $|\mathcal{E}(g)| \leq m$. Então $h(E)$ é m -limitada.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $G = E \langle g \rangle$.

Passando ao quociente $\bar{E} = E/F(E)$, pelo Lema 2.2.4, podemos assumir $[\bar{N}, \bar{g}] = 1$, onde N é o subgrupo normal maximal g -invariante de E tal que $N \cap \mathcal{E}(g) = 1$. Como $E = [E, g]$ e $N \trianglelefteq E$ é g -invariante, pelo Lema 1.3.10, temos $\bar{N} \leq Z(\bar{E})$.

Considerando E/N , temos que qualquer subgrupo normal g -invariante de E/N tem interseção não-trivial com $\mathcal{E}(g)$. Seja M/N um subgrupo normal minimal g -invariante de E/N . Então $|\mathcal{E}_{E/M}(g)| \leq m - 1$.

Por indução, temos que $h(E/M)$ é m -limitada.

Como E é solúvel, temos M/N abeliano elementar. Isso implica que $\bar{M}/\bar{N}$ também é abeliano elementar. Além disso, como $\bar{N} \leq Z(\bar{E})$, segue que $\bar{M} \leq F(\bar{E})$.

Portanto, $M \leq F_2(E)$, mas $h(E) \leq h(M) + h(E/M)$. Logo, $h(E)$ é m -limitada. □

2.3 Limitação na ordem do subgrupo $[N, P]$

Passamos agora a analisar como a cardinalidade do $sink$ de um elemento pode também controlar a ordem de certos subgrupos derivados. Nesse contexto, destaca-se o resultado de Khukhro e Shumyatsky [14], que mostra que considerando Q um q -subgrupo de um grupo finito G e $g \in G$ é um q' -elemento que normaliza Q , então a ordem de $[Q, g]$ é limitada em termos da cardinalidade do g -sink $\mathcal{E}(g)$. Mais precisamente, provam o seguinte:

Lema 2.3.1. [14, Lema 3.2] *Seja P um p -subgrupo finito de um grupo G , e $g \in G$ um p' -elemento normalizando P . Então a ordem de $[P, g]$ é limitada em termos da cardinalidade do g -sink $\mathcal{E}(g)$.*

A partir dessa ideia, podemos generalizar o resultado para o caso em que g atua sobre um subgrupo normal nilpotente N sob a hipótese de coprimidade entre $|N|$ e $|g|$. A seguir, apresentamos essa extensão:

Lema 2.3.2. Sejam G um grupo finito, N um subgrupo normal nilpotente de G e $g \in G$ um p -elemento tais que $(|N|, |g|) = 1$. Então, a ordem de $[N, g]$ é limitada em termos da cardinalidade do g -sink $\mathcal{C}(g)$.

Demonstração. Como N é nilpotente, ele pode ser escrito como o produto direto de seus subgrupos de Sylow, isto é,

$$N = \prod_{i=1}^j K_i, \text{ onde } K_i \in \text{Syl}(N).$$

Note que $(|K_i|, |g|) = 1$, e como g normaliza todos subgrupos K_i , conclui-se, de acordo com Lema 2.3.1, que $|[K_i, g]| \leq l$, onde l representa a limitação em termos da cardinalidade do g -sink $\mathcal{C}(g)$.

Agora, se $[K_i, g] \neq 1$, então $|[K_i, g]| \geq q_i$, onde q_i é o primo divisor da ordem de K_i . Em outras palavras, $q_i \leq |[K_i, g]| \leq l$. Logo, $[K_i, g] \neq 1$ é válido apenas para $q_i \leq l$.

Portanto, $\prod_{i=1}^j |[K_i, g]| = |[N, g]|$ também é limitado em termos da cardinalidade do g -sink $\mathcal{C}(g)$. □

Dando continuidade à análise da influência da cardinalidade dos *sinks* na limitação de certos subgrupos derivados, destacamos o seguinte resultado obtido por Khukhro e Shumyatsky [14]. Nele, considera-se a ação coprima de um grupo de automorfismos sobre um grupo abeliano elementar, e mostra-se que a limitação dos comutadores individuais implica em uma limitação global da ordem do subgrupo gerado por esses comutadores, bem como do grupo atuante, mais precisamente, provam o seguinte resultado:

Lema 2.3.3. [14, Lema 3.3] Sejam V um q -grupo abeliano elementar e U um q' -grupo de automorfismos de V . Se $|[V, u]| \leq m$ para todo $u \in U$, então $|[V, U]|$ é m -limitada e, portanto, $|U|$ também é m -limitada.

Utilizando a mesma abordagem empregada na demonstração do Lema 2.3.2, podemos estender essa ideia ao caso em que V é um p' -grupo abeliano, ainda sob ação coprima. Essa generalização é apresentada a seguir:

Lema 2.3.4. Sejam V um p' -grupo abeliano finito e U um p -grupo de automorfismos de V . Se $|[V, u]| \leq m$ para todo $u \in U$, então $|[V, U]|$ é m -limitada e, portanto, $|U|$ é também m -limitada.

Demonstração. Como V é abeliano, podemos expressá-lo como o produto direto de seus subgrupos de Sylow, ou seja,

$$V = \prod_{i=1}^j K_i, \text{ onde } K_i \in \text{Syl}(V).$$

Como V é abeliano, segue que cada K_i também é abeliano, e cada um desses subgrupos terá ordem potência de um primo, correspondente à decomposição da ordem de V .

Agora, para cada i , considere $\overline{K}_i = K_i / \Phi(K_i)$ e $\overline{U}_i = U / C_U(K_i)$. Afirmamos que $\overline{U}_i$ age fielmente sobre $\overline{K}_i$.

De fato, sejam $c \in C_U(K_i)$, $u \in U$ e $k\Phi(K_i) \in \overline{K}_i$. Como c centraliza K_i , temos:

$$(k\Phi(K_i))^{uc} = k^{uc}\Phi(K_i) = k^u\Phi(K_i)$$

isto é, a ação de uc sobre $\overline{K}_i$ coincide com a de u . Assim, a ação de $\overline{U}_i$ em $\overline{K}_i$ é bem definida, e podemos considerar a aplicação $\varphi_{\overline{u}} : \overline{K}_i \rightarrow \overline{K}_i$, dada por $\varphi_{\overline{u}}(k\Phi(K_i)) = k^u\Phi(K_i)$. Essa ação é por automorfismos, e como $(|U|, |K_i|) = 1$, segue que essa ação é coprima.

Considere $\Phi(\overline{K}_i) \leq \overline{K}_i$. Pelo Lema 1.3.4, toda classe de $\Phi(\overline{K}_i)$ em $\overline{K}_i$ é um conjunto $\overline{U}_i$ -invariante. Logo, para cada $\overline{u} \in \overline{U}_i$, temos:

$$\varphi_{\overline{u}}(\overline{k})\Phi(\overline{K}_i) = \overline{k}^{\overline{u}}\Phi(\overline{K}_i) = (\overline{k}\Phi(\overline{K}_i))^{\overline{u}} = \overline{k}\Phi(\overline{K}_i),$$

o que mostra que $\varphi_{\overline{u}}$ age trivialmente no quociente $\overline{K}_i / \Phi(\overline{K}_i)$.

Como $\overline{K}_i$ é um q -grupo, em que q é algum primo associado à decomposição de p' , pelo Lema 1.3.9, a ordem de $\varphi_{\overline{u}}$ é uma potência de q . Em outras palavras, a ação de $\overline{U}_i$ sobre $\overline{K}_i$ é fiel. Portanto, de acordo com Lema 2.3.3, tanto $|\overline{K}_i, \overline{U}_i|$ quanto $|\overline{U}_i|$ são m -limitadas.

Para todos $k \in K_i$, $u \in U$ e $c \in C_U(K_i)$ temos que:

$$[k, u] = k^{-1}u^{-1}ku = k^{-1}c^{-1}\underbrace{u^{-1}ku}_{\in K_i}c = k^{-1}(uc)^{-1}k(uc) = [k, uc].$$

Portanto, concluímos que $|[K_i, U]| = |[K_i, \overline{U}_i]|$.

Resta mostrar que as ordens presentes na igualdade anterior são m -limitadas.

Como $[K_i, \overline{U}_i]$ é gerado pelos subgrupos $[K_i, \overline{u}]$, com $u \in U$, e cada $|[K_i, \overline{u}]| \leq |[V, u]| \leq m$, e como $|\overline{U}_i|$ é m -limitada, segue que $|[K_i, \overline{U}_i]|$ também é m -limitada. Finalmente, como:

$$\prod_{i=1}^j |[K_i, U]| = |[V, U]|,$$

concluimos que $|[V, U]|$ é m -limitada.

□

Com isso temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.5. *Sejam p um número primo e $G = NP$ um grupo finito solúvel, onde $P \in \text{Syl}_p(G)$ e $N = O_{p'}(G)$. Suponha que $|\mathcal{E}(g)| \leq m$ para todo $g \in P$. Então, $[N, P]$ é m -limitada.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $O_p(G) = 1$. De fato, se $O_p(G) \neq 1$, então $O_p(G) \leq P$ e, no quociente $G/O_p(G)$, a imagem de P permanece sendo um p -subgrupo, enquanto N segue sendo um subgrupo normal de ordem coprima a p . Além disso, como a cardinalidade dos *sinks* de Engel se preserva por homomorfismos, temos que a condição $|\mathcal{E}(g)| \leq m$ para todo $g \in P$ também vale para a imagem de P em $G/O_p(G)$. Assim, todas as hipóteses do teorema se mantêm no quociente, e como $O_p(G/O_p(G)) = 1$, podemos trabalhar neste novo grupo sem perda de generalidade.

Podemos também assumir, sem perda de generalidade, que $N = [N, P]$. De fato, se $[N, P] \leq N$, então o fator $\overline{N} = N/[N, P]$ é centralizado por P , ou seja, $[\overline{N}, P] = 1$, o que implica que P age trivialmente sobre $\overline{N}$. Como essa parte de N não é influenciada pela ação de P , ela não contribui para o subgrupo $[N, P]$. Assim, ao focar apenas na parte de N efetivamente gerada por comutadores com P , isto é, assumindo $N = [N, P]$, não se perde generalidade na análise, pois os demais componentes são centralizados e, portanto, não interferem na estimativa desejada para $[N, P]$.

Mostremos inicialmente que $h(N)$ é m -limitada.

Para cada elemento a de P , seja $h(\langle \mathcal{E}(a) \rangle) = h_a$. Pelo Teorema 2.2.5, temos que h_a é m -limitada. Seja $h_0 = \max\{h_a, a \in P\}$.

De acordo com Teorema 2.1.3, $[N, a] \subseteq F_{h_0+1}(G)$, para todo $a \in P$. Como essa inclusão vale para todos os elementos de P , segue que

$$[N, P] \subseteq F_{h_0+1}(G).$$

Em particular, como $N = [N, P]$, concluímos que $h(N) \leq h_0 + 1$, o que garante que $h(N)$ é m -limitada, como queríamos.

Provaremos o resultado usando indução sobre a altura de Fitting de N .

Supondo $h(N) = 1$, ou seja, N nilpotente. Sendo $g \in P$, pelo Lema 2.3.2, temos que $[[N, g]]$ é m -limitada. Agora, considere $V = N/\Phi(N)$ e $K = P/C_P(N)$. Note que, de acordo com o Lema 1.3.6, K age fielmente sobre V , uma vez que K age via automorfismos sobre V e $(|K|, |V|) = 1$.

Para todo $b \in K$, note que, pelo Lema 2.3.2, $[V, b]$ é m -limitada, já que $[V, b] = [N, b]\Phi(N)/\Phi(N)$. E, pelo Lema 2.3.4, concluímos que $|K|$ também é m -limitada.

Observe que para todos $x \in N, y \in P$ e $c \in C_P(N)$, tem-se que $[x, y] = [x, yc]$. Como consequência, $|[N, P]| = |[N, K]|$. Resta mostrar que $|[N, K]|$ é m -limitada.

Note que $[N, K]$ é o produto de subgrupos da forma $[N, \bar{d}]$, para $d \in P$. Assim, pelo Corolário 2.3.2, $|[N, \bar{d}]|$ é m -limitada, e como $|K|$ é m -limitada, segue que $|[N, K]|$ também é. Portanto, $|[N, P]|$ é m -limitada, finalizando o caso em que $h(N) = 1$.

Seja $h(N) = h$ e $M = F(N)$. Pelo caso anterior, sabemos que $|[M, P]|$ é m -limitada. Além disso, por indução, temos que $|N/M| = |[N/M, P]|$ é m -limitada, considerando que $N/M = [N/M, P]$, conforme a suposição de que $N = [N, P]$. Como M normaliza $[M, P]$ e tem índice m -limitado, segue que $N_G([M, P])$ tem índice m -limitado e, tomando $X = \prod_{x \in G} [M, P]^x$, segue que $|X|$ é m -limitada, já que $|X| \leq |[M, P]|^{[G:N_G([M, P])]}$.

Como $X \trianglelefteq N$, considere o quociente N/X e assumindo que X é trivial, temos que P centraliza M . Como $M \trianglelefteq N$, segue que P^N centraliza M . Logo $[N, P]$ centraliza M , e, pelo Lema 1.3.10, temos $M \leq Z(N)$ e $h(N/X) \leq h - 1$. Por indução, $|N/X|$ é m -limitada. Como já vimos que $|X|$ é m -limitada, concluímos que $|N| = |[N, P]|$ é (m, h) -limitada. Logo, a limitação foi estabelecida.

Finalmente, concluímos que $|[N, P]|$ é m -limitada.

□

2.4 Limitação do comprimento não-solúvel

Todo grupo finito G possui uma série normal cujos fatores são solúveis ou um produto direto de grupos simples não-abelianos. Khukhro e Shumyatsky, em [12], definem o **comprimento**

não-solúvel, denotado por $\lambda(G)$, como o número mínimo de fatores não-solúveis em uma série desse tipo.

Esta seção tem como objetivo limitar tal parâmetro utilizando o *sink* de um automorfismo do grupo, mas para isso, será necessário recorrer a alguns resultados prévios que apresentaremos a seguir.

Ainda em [12], os autores observam que o comprimento não solúvel demonstra um comportamento consistente em relação a subgrupos normais, imagens homomórficas, produtos diretos e extensões, o que é expresso no seguinte lema.

Lema 2.4.1. Dado um grupo finito G , tal que $\lambda(G) = k$, então:

- (i) Se N é um subgrupo normal de G , temos que $\lambda(N) \leq k$ e $\lambda(G/N) \leq k$.
- (ii) Se N é um subgrupo normal de G , tal que $\lambda(N) = l$ e $\lambda(G/N) = m$, temos que $\lambda(G) \leq l + m$.
- (iii) Seja H um grupo finito, tal que $\lambda(H) = n$. Então, $\lambda(G \times H) = \max\{k, n\}$.

Dado um grupo finito G admitindo um automorfismo α , visando limitar o parâmetro $\lambda(G)$ em relação ao *sink* de α , recorreremos a alguns resultados preliminares que serão fundamentais para a análise.

Teorema 2.4.2. [7, Teorema 1.4] *Sejam G um grupo finito e α um elemento de $\text{Aut}(G)$ com a propriedade de que $G = [G, \alpha]$. Então $G = \langle \mathcal{E}_k(\alpha) \rangle$, para todo inteiro positivo k .*

Esse resultado mostra que, sob a hipótese de G ser gerado pelos seus comutadores com α , o grupo pode ser reconstruído a partir dos elementos presentes nos α -sinks. Isso nos permite explorar a estrutura de G com base na cardinalidade de tais conjuntos.

Teorema 2.4.3. [8, Teorema A] *Existe uma função $f(n)$, tal que se G é um grupo finito contendo um elemento x , tal que $|C_G(x)| \leq k$, então G tem um subgrupo normal solúvel de índice no máximo $f(k)$.*

Observamos que, no caso em que o grupo é semi-simples, ou seja, isomorfo a um produto direto de grupos simples não-abelianos, a limitação na cardinalidade do *sink* de α já garante um limite tanto sobre a ordem do grupo quanto sobre a ordem do automorfismo. Esse resultado representa um avanço significativo na compreensão da relação entre condições de Engel e parâmetros estruturais do grupo, conforme formalizado a seguir:

Lema 2.4.4. Seja G um grupo semi-simples admitindo um automorfismo α tal que $|\mathcal{E}_G(\alpha)| \leq m$ e $G = [G, \alpha]$. Então $|G|$ é m -limitada e $|\alpha|$ também é m -limitada.

Demonstração. Seja $C = C_G(\alpha)$. Temos que $\mathcal{E}(\alpha)^C = \mathcal{E}(\alpha)$, implicando que C normaliza $\mathcal{E}(\alpha)$. Logo C naturalmente age sobre $\mathcal{E}(\alpha)$, portanto $|C/C_C(\mathcal{E}(\alpha))| \leq m!$.

Pelo Teorema 2.4.2, temos que $G = \langle \mathcal{E}(\alpha) \rangle$. Sendo G um grupo semi-simples, segue que $C_C(\mathcal{E}(\alpha)) = 1$, já que $C_C(\mathcal{E}(\alpha)) = Z(G)$. Portanto, $|C| \leq m!$.

Note que a ordem de α é no máximo $m!$, já que a hipótese $|\mathcal{E}(\alpha)| \leq m$ nos dá que $|C| \leq m!$. Consequentemente, temos que $\alpha^{m!}$ centraliza $\mathcal{E}(\alpha)$. Logo, centraliza G . Portanto, $\alpha^{m!} = 1$.

Daí, pelo Teorema 2.4.3, existe $N \trianglelefteq G$ solúvel, tal que $|G/N|$ é m -limitada. Contudo, sendo G semi-simples, segue que $N = 1$ e o resultado segue. $\square$

Ao lidarmos com produtos diretos de grupos simples não abelianos, é essencial compreender como se comportam seus subgrupos normais. O resultado a seguir, extraído de [23], descreve com precisão essa estrutura, mostrando que qualquer subgrupo normal de um produto direto de grupos simples não abelianos é, necessariamente, o produto de alguns dos fatores. Essa propriedade será fundamental na análise de grupos semi-simples.

Lema 2.4.5. [23, Proposição 3.3.16] Seja $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$, onde cada G_i é simples não-abeliano. Então, todo subgrupo normal de G é o produto direto de certos G_i 's.

Agora, seja $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$, onde cada G_i é simples não-abeliano. Seja $\alpha \in \text{Aut}(G)$. Então $[G, \alpha] \triangleleft G$.

Pelo Lema 2.4.5, temos que $[G, \alpha]$ é o produto de alguns fatores de G , isto é,

$$[G, \alpha] = G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_s},$$

para algum subconjunto $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, k\}$. Consequentemente, podemos decompor G como:

$$G = [G, \alpha] \times C_0(\alpha),$$

onde $C_0(\alpha) = G_{j_1} \times G_{j_2} \times \cdots \times G_{j_t}$, de modo que $k = s + t$, isto é, $C_0(\alpha)$ é formado pelos termos que não aparecem em $[G, \alpha]$ e são centralizados por α .

Assumindo que exista outro automorfismo $\beta \in \text{Aut}(G)$ tal que $[\alpha, \beta] = 1$ e $[G, \alpha, \beta] = 1$, temos pela construção anterior que $[G, \alpha] \subseteq C_0(\beta)$ e $[G, \beta] \subseteq C_0(\alpha)$. Daí, concluímos que $[G, \alpha] \cap [G, \beta] = 1$ e $[G, \beta, \alpha] = 1$.

Agora, note que considerando a ação de $\alpha\beta$ em $G = [G, \alpha] \times C_0(\alpha)$ temos,

$$G_i^{\alpha\beta} = \begin{cases} G_i^\alpha & , \text{ se } G_i \subseteq C_0(\beta) \\ G_i^\beta & , \text{ se } G_i \subseteq C_0(\alpha) \end{cases}$$

Logo, $[G, \beta][G, \alpha] \leq [G, \alpha\beta]$.

O resultado a seguir será utilizado para controlar a ordem de grupos finitos com base na limitação da ordem de seus subgrupos abelianos:

Teorema 2.4.6. [3, Teorema 2.1] *Para cada inteiro positivo n , defina $g(n)$ como o produto de todas potências de primos no máximo n . Seja G grupo finito e suponha que $|A| \leq m$ para todo subgrupo abeliano A de G . Então, $|G|$ divide $g(m)$.*

Com base nas ideias anteriores e utilizando as limitações sobre os *sinks* de elementos, obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.4.7. *Seja G um grupo semi-simples admitindo um grupo de automorfismos A tal que $|\mathcal{E}(a)| \leq m$ para todo $a \in A$. Então $|[G, A]|$ é m -limitada.*

Demonstração. Sabemos que

$$[G, A] = \prod_{a \in A} [G, a],$$

e pelo Lema 2.4.4, para cada $a \in A$, temos que $|[G, a]|$ é m -limitada. Assim, para concluir que $|[G, A]|$ é m -limitada, basta mostrar que $|A|$ é m -limitada.

Pelo Teorema 2.4.6, temos que $|A|$ é limitada em termos da ordem de seus subgrupos abelianos, logo podemos assumir que A é abeliano.

Tome $a \in A$ tal que $|[G, a]|$ é maximal. Se A age fielmente em $[G, a]$, nesse caso, como $|[G, a]| \leq m$, a ação fiel implica que A está imerso em $\text{Aut}([G, a])$, e, portanto, $|A|$ é m -limitada.

Caso contrário, tome $b \in A$ tal que $[G, a, b] = 1$. Então, pelo que foi comentado, $[G, b] \cap [G, a] = 1$ e $[G, b, a] = 1$. Temos que $[G, b][G, a] \leq [G, ab]$, contrariando a escolha de a . $\square$

Encerrando esta sequência de resultados, apresentamos uma importante aplicação da limitação na cardinalidade dos *sinks* de um automorfismo à estrutura derivada do grupo. Em particular, mostraremos que, se um grupo G é gerado pelos elementos pertencentes ao *sink* de um automorfismo a , e esse conjunto tem ordem limitada, então o comprimento não solúvel de G também é limitado. Esse fato é formalizado no seguinte lema:

Lema 2.4.8. Seja G um grupo admitindo um automorfismo a tal que $|\mathcal{E}(a)| \leq m$ e $G = \langle \mathcal{E}_G(a) \rangle$. Então $\lambda(G) \leq m$.

Demonstração. Demonstraremos por indução em m . Suponha $R = R(G)$ o radical solúvel. Ao passarmos para o quociente $\overline{G} = G/R(G)$, observamos que o Fitting generalizado $F^*(\overline{G})$ é dado por um produto direto

$$F^*(\overline{G}) = S_1 \times \cdots \times S_k$$

onde cada S_i é um grupos finito simples não-abelianos.

Observe que $\mathcal{E}(a) \cap F^*(\overline{G}) \neq 1$, pois $F^*(\overline{G})$ não é nilpotente. Assim,

$$|\mathcal{E}_{\overline{G}/F^*(\overline{G})}(a)| \leq m - 1.$$

Por indução, concluímos que

$$\lambda(\overline{G}/F^*(\overline{G})) \leq m - 1.$$

Além disso, como $\lambda(F^*(\overline{G})) = 1$, de acordo com o Lema 2.4.1, deduzimos que $\lambda(G) \leq m$. □

Capítulo 3

Limitação na ordem do p' -residual

3.1 Demonstração do Teorema 4

Relembramos que o objetivo desta seção é demonstrar o teorema principal a seguir, que estabelece uma ligação entre a cardinalidade dos *sinks* de Engel dos p -elementos e a estrutura do grupo:

Teorema 4. *Seja p um número primo e G um grupo finito tal que $|\mathcal{E}(g)| \leq m$ para todo p -elemento $g \in G$. Então, G possui um subgrupo normal N tal que G/N é um p' -grupo e o índice $[N : O_p(G)]$ é limitado em função apenas de m .*

Para alcançar essa conclusão, precisamos de alguns resultados auxiliares e definições técnicas que serão apresentados a seguir.

Lema 3.1.1. *Seja G um grupo finito, tal que $O_p(G) = 1$, e N um subgrupo normal de G . Então $|O_p(G/N)|$ é $|N|$ -limitada.*

Demonstração. Note que, mesmo com $O_p(G) = 1$, o quociente G/N pode ter $O_p(G/N) \neq 1$. Seja $L/N = O_p(G/N)$. Então L é um subgrupo de G contendo N tal que L/N é um p -subgrupo normal de G/N , ou seja, $L \trianglelefteq G$ e $L = NP_0$ para algum p -subgrupo $P_0 \leq G$.

Considere $P_1 = C_{P_0}(N)$. Observe que $[P_0 : P_1] \leq |\text{Aut}(N)|$, pois P_0 age por conjugação sobre N , e P_1 consiste nos elementos de P_0 que atuam trivialmente sobre N , isto é, P_1 é o núcleo da ação. Assim, o quociente P_0/P_1 é isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}(N)$. Como N é finito, temos $|\text{Aut}(N)| \leq |N|!$, e portanto $[P_0 : P_1]$ é limitado em função apenas de $|N|$.

Note que, $NP_1 \trianglelefteq G$, e portanto:

$$P_1 \leq O_p(NP_1) \leq O_p(G) = 1.$$

Assim, $P_1 = 1$, e como $[P_0 : P_1]$ é $|N|$ -limitado, conclui-se que $|P_0|$ também é $|N|$ -limitado. Como $L = NP_0$, segue que:

$$|O_p(G/N)| = |L/N| \leq |P_0|.$$

Portanto, a ordem de $O_p(G/N)$ é limitada em função apenas de $|N|$, como queríamos demonstrar. □

Fixado um primo p , consideraremos, sempre que necessário, a seguinte notação: dado um subgrupo normal de um grupo finito G tal que $O_p(G) = 1$, denotaremos por $\hat{N}$ a pré-imagem de $O_p(G/N)$ no grupo G . Pelo Lema 3.1.1, a ordem $\hat{N}$ é $|N|$ -limitada.

Lema 3.1.2. [4, Lema 1.3] Seja G um grupo finito e seja π um conjunto de primos. Suponha que G admite uma série normal tal que todo fator é um π -grupo ou π' -grupo. Então,

$$C_G(O_{\pi, \pi'}(G)/O_\pi(G)) \leq O_{\pi, \pi'}(G).$$

Em seguida, apresentamos um resultado técnico que nos permitirá estimar o índice de $O_{p'}(G)$ em G em termos da ordem de um p -subgrupo de Sylow. Essa estimativa será essencial para controlar a estrutura do grupo com base em informações sobre seus p -subgrupos.

Lema 3.1.3. Sejam p um primo, G um grupo solúvel e $P \in \text{Syl}_p(G)$. Se $|P| \leq m$, então $[G : O_{p'}(G)]$ é m -limitado.

Demonstração. Supondo que $O_{p'}(G) = 1$, demonstrar que $[G : O_{p'}(G)]$ é m -limitado equivale a mostrar que $|G|$ é m -limitado.

Seja $M = O_p(G)$, de acordo com o Lema 3.1.2, temos $C_G(M) \leq M$. Portanto, $G/C_G(M)$ é um subgrupo de $\text{Aut}(M)$. Dado que $|\text{Aut}(M)|$ é m -limitado, visto que $|\text{Aut}(M)| \leq (m-1)!$, concluímos que $[G : C_G(M)] \leq (m-1)!$. Além disso, como $C_G(M) \leq M$, deduzimos $|G| \leq m!$. □

O resultado a seguir mostra como a limitação da cardinalidade dos *sinks* de elementos de um subgrupo de Sylow impõe restrições sobre a estrutura global do grupo. Mais precisamente, estabelece que, em um grupo solúvel, essa limitação garante que o índice de $O_{p, p'}(G)$ também é limitado:

Lema 3.1.4. Sejam p um primo e G um grupo solúvel no qual $|\mathcal{E}(g)| \leq m$ para todo $g \in P$, onde $P \in \text{Syl}_p(G)$. Então, o índice de $O_{p, p'}(G)$ em G é m -limitado.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir $O_p(G) = 1$. Portanto, limitar o índice de $O_{p,p'}(G)$ em G equivale a limitar o índice de $O_{p'}(G)$ em G . Com o objetivo de simplificar a notação, seja $N = O_{p'}(G)$.

De acordo com o Lema 3.1.2, temos $C_G(N) \leq N$. Em particular, a ação de P em N é fiel. Com base no Teorema 2.2.5, concluímos que $h(\langle \mathcal{E}(a) \rangle)$ é m -limitada para qualquer $a \in P$. Dessa forma, de acordo com Teorema 2.1.3, podemos afirmar que $a \in F_{f(m)+1}(G)$. Assim, temos que $h([N, a]) \leq f(m) + 1$ para qualquer $a \in P$.

Dado que $[N, P] = \prod_{a \in P} [N, a]$, podemos concluir que $h([N, P])$ é m -limitado. Pelo Teorema 2.3.5, temos que $|[N, P, P]|$ também é m -limitado. Observando que $[N, P, P] = [N, P]$, segue que $|[N, P]|$ é m -limitada.

Portanto, como $C_P(N) = 1$, o que implica que N tem índice m -limitado em G , conforme o Lema 3.1.3.

□

Definição 3.1.5. Seja G um grupo finito, o *socle* de G , $Soc(G)$, é o produto de todos os subgrupos normais minimais de G .

Com o intuito de caracterizar tal subgrupo, utilizaremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [6].

Lema 3.1.6. [6, Teorema 1.5] Se H é um subgrupo normal minimal de um grupo G , então ou H é um p -grupo abeliano elementar para algum primo p ou H é o produto direto de grupos simples não-abelianos isomorfos.

Deste modo, o subgrupo $Soc(G)$ de um grupo finito G é o produto direto de grupos simples, podendo alguns desses fatores serem abelianos.

Seja $A = N_1 \times \cdots \times N_i$ o subgrupo do *socle* de G resultante do produto de todos os subgrupos N_i normais minimais de G , os quais são abelianos elementares. Temos que A é normal em G e, considerando sua construção, podemos concluir que A é abeliano. Portanto, A está contido no radical solúvel de G .

Considere agora o grupo quociente $\bar{G} = G/R(G)$. Dado que a parte abeliana de $Soc(\bar{G})$ está contida em $R(\bar{G})$, que é trivial, podemos concluir que $Soc(\bar{G})$ é o produto direto de grupos simples não-abelianos, e portanto, $Soc(\bar{G})$ não é solúvel.

Com isso, estamos prontos para demonstrar o Teorema 4.

Teorema 4. *Seja p um número primo e G um grupo finito tal que $|\mathcal{E}(g)| \leq m$ para todo p -elemento $g \in G$. Então, G possui um subgrupo normal N tal que G/N é um grupo p' e o índice $[N : O_p(G)]$ é limitado em função apenas de m .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $O_p(G) = 1$. Escolha um p -subgrupo de Sylow $P \leq G$ e defina $N = \langle P^G \rangle$. É suficiente mostrar que a ordem de N é limitada em função de m . Como $N = \langle P^N \rangle$, sem perda de generalidade podemos assumir que $G = N$. Resta mostrar que G tem ordem limitada em função de m .

Assumindo G solúvel, denotemos $M = O_{p'}(G)$. Pelo Lema 3.1.4 temos que M possui índice m -limitado em G , em particular, $|P|$ é m -limitada.

Seja $P = \{g_1, \dots, g_s\}$. Como $[M, P] = \prod_{i=1}^s [M, g_i]$ e, pelo Teorema 2.3.5, temos que $|[M, P]|$ é m -limitada. Logo, $|\langle [M, P]^G \rangle|$ é m -limitada.

Seja $\widehat{L}$ a pré-imagem de $O_p(G/\langle [M, P]^G \rangle)$. Pelo Lema 3.1.1, sabemos que $|\widehat{L}|$ é m -limitada. Considere o quociente $G/\widehat{L}$. Nesse quociente, temos que M centraliza $\langle P^G \rangle = G$.

Logo, $Z(G)$ tem índice m -limitado. Portanto, por Teorema de Schur [23, Teorema 10.1.4], concluímos que $|G'|$ é m -limitada. Assim, passando ao quociente G/G' , podemos assumir que G é abeliano, o que implica $G = P \times M$. Isso, por sua vez, implica que $P \triangleleft G$.

Portanto, $G = P$, e assim, $|G|$ é m -limitada.

Agora, considerando o caso geral, podemos inferir, a partir do Lema 2.4.2 e do Lema 2.4.8, que, sob as hipóteses do Teorema 4, $\lambda(G)$ é m -limitado. Usaremos indução em $\lambda(G)$.

Denotando $R = R(G)$, suponha que $R = 1$. Mostremos que $|G|$ é m -limitada. Seja $S = \text{Soc}(G)$. Pelo Lema 2.4.7 a ordem de $[S, P]$ é m -limitada. Por indução, temos que o índice de S em G é m -limitado. Segue que a ordem de $\langle [S, P]^G \rangle$ é m -limitada.

É fácil ver que $S = \langle [S, P]^G \rangle$. De fato, como $\langle [S, P]^G \rangle$ é o produto de uma quantidade m -limitada de conjugados de $[S, P]$, se $[S, P] = 1$, então $S \subseteq Z(G)$, contradição. Portanto, $S = \langle [S, P]^G \rangle$.

Daí o resultado segue, observando que ao considerar o quociente $G/\widehat{S}$, sendo $\widehat{S}$ a pré-imagem de $O_p(G/S)$, temos, pelo Lema 3.1.1, que $|\widehat{S}|$ é m -limitada. Usando novamente indução em $\lambda(G)$, segue que o índice de $\widehat{S}$ em G é m -limitado, e, portanto, $|G|$ é m -limitada.

Agora, se $R \neq 1$, então R tem índice m -limitado. Sabemos pelo caso solúvel que $|[R, P]|$ é m -limitada, daí $|\langle [R, P]^G \rangle|$ também o é.

Passando ao quociente $\overline{G} = G/\widehat{M}$, onde $\widehat{M}$ é a pré-imagem de $O_p(G/\langle[R, P]^G\rangle)$, temos pelo Lema 3.1.1, que $|\widehat{M}|$ é m -limitada. No quociente, temos que $R \subseteq Z(G)$. Então $[G : Z(G)]$ é m -limitado.

Portanto, por Teorema de Schur [23, Teorema 10.1.4], concluimos que $|G'|$ é m -limitada. Assim, passando ao quociente G/G' , podemos assumir que G é abeliano, e o resultado segue. $\square$

Vale destacar que, sob a hipótese de que todos os p -elementos de G satisfazem a condição $|\mathcal{E}(g)| \leq m$, o subgrupo N obtido na demonstração coincide com o p' -residual $O^{p'}(G)$, ou seja, o menor subgrupo normal de G tal que o quociente $G/O^{p'}(G)$ seja um p' -grupo. Nesse contexto, o teorema mostra que a existência de *sinks* de Engel com cardinalidade limitada para todos os p -elementos de G impõe uma restrição quantitativa sobre o índice $[O^{p'}(G) : O_p(G)]$, revelando uma limitação estrutural sobre o p -residual do grupo.

Capítulo 4

Grupos Profinitos

Este capítulo será dedicado à obtenção de resultados para o caso dos grupos profinitos, sendo os principais fundamentos teóricos baseados nas obras *Analytic Pro- p Groups* [5] e *Profinite Groups* [21]. Exploraremos definições e propriedades fundamentais da teoria dos grupos profinitos, estabelecendo uma base sólida para os teoremas que serão apresentados posteriormente.

4.1 Resultados Preliminares

Para estudar grupos profinitos, é essencial compreender algumas noções básicas de topologia e suas interações com estruturas algébricas. Nesta seção, revisamos conceitos fundamentais de espaços topológicos, continuidade e compacidade, que serão essenciais para o desenvolvimento da teoria dos grupos profinitos.

Uma **topologia** em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados **conjuntos abertos**, que satisfaz as seguintes condições:

- (i) O conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto X são conjuntos abertos, isto é, $\emptyset, X \in \tau$.
- (ii) Se U e V são subconjuntos abertos de X , então a interseção $U \cap V$ é aberta. Em outras palavras, τ é fechada sob interseções finitas.
- (iii) Se $\{U_i : i \in I\}$ é uma família arbitrária de subconjuntos abertos de X , então a união $\bigcup_{i \in I} U_i$ é aberta. Ou seja, τ é fechada sob uniões arbitrárias.

Um **espaço topológico** é um par (X, τ) , onde X é um conjunto não vazio e τ é uma topologia em X . Normalmente, referimos a (X, τ) simplesmente como espaço topológico X , mencionando τ somente quando necessário.

Dado qualquer conjunto X , podemos considerá-lo como um espaço topológico ao definir uma topologia em que cada subconjunto de X é aberto. Essa topologia é chamada de **topologia discreta** em X , e dizemos que X é um **espaço discreto**.

A seguir, elencamos algumas definições e propriedades fundamentais relacionadas a espaços topológicos.

Seja Y um subconjunto de um espaço topológico X . A coleção de todos os subconjuntos da forma $Y \cap U$, com U sendo aberto em X , define uma topologia em Y . Esta topologia é denominada **topologia subespaço**, e, com respeito a ela, Y é chamado de um **subespaço** de X .

Dado um espaço topológico X , um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito **fechado** se o seu complementar $X \setminus Y$ é aberto. Para qualquer subconjunto $Y \subseteq X$, o **fecho** de Y , denotado por $\bar{Y}$, é a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm Y . O fecho $\bar{Y}$ é sempre um conjunto fechado. Além disso, dizemos que Y é **denso** em X se $\bar{Y} = X$.

Uma **vizinhança aberta** de um elemento $x \in X$ é qualquer conjunto aberto que contém x . Uma **base** para a topologia em X é uma coleção $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos abertos tal que todo conjunto aberto em X pode ser escrito como a união de alguns dos conjuntos de $\{U_\lambda\}$.

Um espaço topológico X é dito **compacto** se, dada qualquer família de subconjuntos abertos $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ tal que $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, existe uma subfamília finita $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ para a qual

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

De forma equivalente, X é compacto se, para toda família $\{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de subconjuntos fechados com a propriedade de que cada interseção de uma quantidade finita de conjuntos C_α é não vazia, segue que a interseção de todos os conjuntos C_α é não vazia. Ambas as definições são equivalentes.

Um espaço topológico X é dito **localmente compacto** se cada elemento $x \in X$ possui uma vizinhança compacta. Note que todo espaço compacto é localmente compacto, pois o próprio espaço serve como uma vizinhança compacta para qualquer de seus elementos.

Um espaço topológico X é chamado **Hausdorff** se, para quaisquer elementos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças abertas U e V de x e y , respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$. Observamos que, se X é Hausdorff, então o conjunto unitário $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$. De fato, para cada $y \in X$ com $x \neq y$, existe uma vizinhança aberta U de y que é disjunta de $\{x\}$. Assim, o complementar $X \setminus \{x\}$ é aberto, implicando que $\{x\}$ é fechado.

Dizemos que um espaço topológico X é **conexo** se não é possível escrevê-lo como uma união disjunta de dois conjuntos abertos não vazios. Por outro lado, X é dito **totalmente desconexo** se todo subespaço conexo de X possui no máximo um elemento.

Os conceitos de espaços compactos, Hausdorff e totalmente desconexo desempenham papéis importantes em nosso estudo. Em particular, veremos que os grupos profinitos são caracterizados com essas propriedades.

Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** se, para todo conjunto aberto $U \subseteq Y$, a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é aberta em X . É imediato verificar que a composição de funções contínuas também é contínua. Dizemos que uma aplicação f entre espaços topológicos é um **homeomorfismo** se f é contínua, bijetora, e sua inversa f^{-1} também é contínua.

A seguir, apresentamos uma proposição que reúne resultados fundamentais sobre aplicações contínuas, espaços compactos, totalmente desconexos e Hausdorff.

Proposição 4.1.1. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.
- (ii) Todo subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.
- (iii) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e X é compacto, então $f(X)$ é compacto.
- (iv) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção contínua de um espaço compacto X para um espaço de Hausdorff Y , então f é um homeomorfismo.
- (v) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ são aplicações contínuas e Y é Hausdorff, então o conjunto $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ é fechado em X .
- (vi) Se X é um espaço de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo, então todo subconjunto aberto de X pode ser escrito como uma união de subconjuntos simultaneamente abertos e fechados.

Demonstração. (i) Seja F um subconjunto fechado de um espaço compacto X . Como X é compacto, toda cobertura aberta de F pode ser estendida para uma cobertura aberta de X . Pela definição de compacidade, existe uma subfamília finita que cobre F , o que prova que F é compacto.

- (ii) Seja C um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff X e $x \in X \setminus C$. Como X é Hausdorff, para cada $y \in C$, existem vizinhanças abertas A_y de x e B_y de y tais que

$A_y \cap B_y = \emptyset$. Como C é compacto, existe uma subfamília finita $\{B_{y_1}, \dots, B_{y_n}\}$ cobrindo C . Defina $A_x = A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_n}$. O conjunto A_x é aberto, contém x , e está disjunto de C . Assim, $X \setminus C$ é aberto, o que implica que C é fechado.

- (iii) Seja $f(X) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, onde $\{A_\lambda\}$ é uma família de conjuntos abertos em Y . Como f é contínua, os conjuntos $f^{-1}(A_\lambda)$ são abertos em X . Como X é compacto, existe uma subfamília finita $\{f^{-1}(A_{\lambda_1}), \dots, f^{-1}(A_{\lambda_n})\}$ que cobre X . Assim, $f(X) = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$, mostrando que $f(X)$ é compacto.
- (iv) Para mostrar que f é um homeomorfismo, precisamos provar que f^{-1} é contínua. Seja $F \subseteq X$ um conjunto fechado. Pelo item (i), F é compacto. Pelo item (iii), $f(F)$ é compacto, e pelo item (ii), $f(F)$ é fechado em Y . Assim, $f^{-1}(Y \setminus f(F)) = X \setminus F$ é aberto, provando que f^{-1} é contínua.
- (v) Seja $N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Para cada $y \in N$, como Y é Hausdorff, existem vizinhanças abertas U e V em Y com $f(y) \in U$, $g(y) \in V$, e $U \cap V = \emptyset$. As imagens inversas $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(V)$ são abertas em X , e sua interseção é uma vizinhança aberta de y contida em N . Assim, N é a união de conjuntos abertos, logo, N é aberto. Portanto, o conjunto $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = X \setminus N$ é fechado.
- (vi) Sejam U um subconjunto aberto em X e $x \in U$. Para cada $y \in X \setminus \{x\}$, como X é totalmente desconexo, existem subconjuntos F_y que são abertos e fechados, com $x \in F_y$ e $y \notin F_y$. Como X é compacto, existe uma subfamília finita $\{F_{y_1}, \dots, F_{y_n}\}$ tal que $F_{y_1} \cap \dots \cap F_{y_n} \subseteq U$. Portanto, U pode ser escrito como uma união de subconjuntos simultaneamente abertos e fechados.

□

Agora, vamos recordar a noção de produto cartesiano para introduzir o conceito de produto de espaços topológicos e explorar algumas propriedades relacionadas.

Seja $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ uma família de conjuntos. O seu **produto cartesiano** (ou simplesmente **produto**), denotado por $C = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, é definido como o conjunto de todas as funções $x : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tais que $x(\lambda) \in X_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Para simplificar a notação, escrevemos $x(\lambda) = x_\lambda$ e denotamos x por (x_λ) . Assim, os elementos de C podem ser entendidos como vetores cujas entradas são indexadas pelos elementos de Λ .

Se algum conjunto X_λ for vazio, então por definição o produto cartesiano também será vazio, ou seja, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$. Portanto, assumimos que $X_\lambda \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in \Lambda$ (essa suposição recorre ao Axioma da Escolha).

No caso particular em que $X_\lambda = X$ para todo $\lambda \in \Lambda$, o produto cartesiano $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ consiste no conjunto de todas as funções $x : \Lambda \rightarrow X$. Nesse cenário, o produto cartesiano pode ser interpretado como o produto de Λ cópias do conjunto X .

Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe uma aplicação $\pi_\lambda : C \rightarrow X_\lambda$ definida por $(x_\lambda) \mapsto x_\lambda$, chamada de **projeção**.

Agora, suponhamos que cada X_λ seja um espaço topológico. Dado C , o produto cartesiano dos X_λ , podemos torná-lo um espaço topológico ao definir uma topologia cujos conjuntos abertos são todas as uniões de conjuntos da forma

$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_n),$$

onde n é finito, $\lambda_i \in \Lambda$, e U_i é aberto em X_{λ_i} para cada $i = 1, \dots, n$. Essa topologia é chamada de **topologia produto**. Como consequência dessa definição, cada projeção $\pi_\lambda : C \rightarrow X_\lambda$ é uma aplicação contínua.

Seja $f : Y \rightarrow C$ uma aplicação, onde Y é outro espaço topológico. A aplicação f é contínua se, e somente se, cada composição $\pi_\lambda f$ é contínua para todo $\lambda \in \Lambda$.

O próximo resultado estabelece como algumas propriedades topológicas de uma família de espaços se preservam em seu produto cartesiano.

Proposição 4.1.2 ([26, Teorema 0.2.1]). Sejam $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ uma família de espaços topológicos e C o produto cartesiano dessa família. Então:

- (i) Se cada X_λ é Hausdorff, então C também o é;
- (ii) Se cada X_λ é totalmente desconexo, então C também o é;
- (iii) Se cada X_λ é compacto, então C também o é (Teorema de Tychonoff).

Agora passaremos a estudar a definição e algumas propriedades de grupos topológicos e limites inversos, conceitos centrais para a construção de grupos profinitos. Veremos que um grupo profinito pode ser caracterizado como um limite inverso de uma classe específica de grupos topológicos, o que conecta suas propriedades algébricas e topológicas de maneira profunda.

Um **grupo topológico** é um conjunto G que é simultaneamente um grupo e um espaço topológico, em que a aplicação

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

é contínua. Aqui, $G \times G$ é considerado com a topologia produto.

Para mais informações sobre grupos topológicos, consulte [26, p. 6-8].

Dando continuidade ao estudo de conceitos fundamentais para a definição de grupos profinitos, introduzimos a noção de conjunto parcialmente ordenado e sua relação com sistemas inversos.

Um conjunto I é chamado de **parcialmente ordenado** com respeito à relação $\leq$ se essa relação satisfaz as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica. Além disso, diremos que I é **dirigido** se, além de ser parcialmente ordenado, para quaisquer $i, j \in I$, existir um elemento $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.

Com essa definição, podemos introduzir o conceito de sistemas inversos. Um **sistema inverso** de espaços topológicos $\{X_i, \varphi_{ji}, I\}$ sobre um conjunto dirigido I consiste em uma família de espaços topológicos e morfismos $\varphi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ satisfazendo:

- φ_{ii} é a identidade em X_i , para todo $i \in I$;
- Se $i \leq j \leq k$, então $\varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk}$.

Isso significa que o seguinte diagrama comuta sempre que $i \leq j \leq k$:

$$\begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{\varphi_{ik}} & X_i \\ & \searrow \varphi_{jk} \quad \nearrow \varphi_{ij} & \\ & X_j & \end{array}$$

Dado um sistema inverso $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ e um espaço topológico Y , um conjunto de aplicações contínuas $\{\psi_i : Y \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ é dito **compatível** se, sempre que $i \leq j$, temos $\varphi_{ij}\psi_j = \psi_i$.

O **limite inverso**, denotado por $\varprojlim X_i = (X, \varphi_i)$, é um espaço topológico X junto com um conjunto compatível de aplicações contínuas $\{\varphi_i : X \rightarrow X_i\}$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para qualquer espaço topológico Y e qualquer conjunto compatível de aplicações $\{\psi_i : Y \rightarrow X_i\}$, existe uma única aplicação contínua $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\varphi_i\psi = \psi_i$ para todo $i \in I$.

O seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X \\ & \searrow \psi_i \quad \swarrow \varphi_i & \\ & X_i & \end{array}$$

Se o limite inverso existir, ele é único (ver [21, Proposição 1.1.1]). Em nossos estudos, assumimos que conjuntos finitos têm a topologia discreta. Se os objetos em um sistema inverso forem finitos, o limite inverso herdará diversas propriedades topológicas, como ser de Hausdorff, totalmente desconexo e compacto. Essas características são preservadas, respectivamente, pela topologia discreta e pelo Teorema de Tychonoff.

Se X for o limite inverso de um sistema inverso formado por conjuntos finitos, chamamos X de um **espaço profinito**. Um espaço profinito é, portanto, de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo (ver [21, Capítulo 1]). Quando os espaços topológicos são grupos finitos munidos da topologia discreta e os mapas são homomorfismos de grupos, o limite inverso é denominado um **grupo profinito**.

O próximo lema reúne algumas propriedades básicas de subgrupos de grupos profinitos.

Lema 4.1.3. [5, Proposição 1.2] Seja G um grupo profinito.

- (i) Todo subgrupo aberto de G é fechado, tem índice finito em G , e contém um subgrupo normal aberto de G . Um subgrupo fechado de G é aberto se e somente se tem índice finito. A família de todos os subgrupos normais abertos de G se intersectam em $\{1\}$.
- (ii) Um subconjunto de G é aberto se e somente se é a união de subconjuntos abertos de subgrupos normais.
- (iii) Se X e Y são subconjuntos fechados de G então o subconjunto $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ também o é. Se X é fechado e n é um inteiro então o conjunto $\{x^n \mid x \in X\}$ é fechado.
- (iv) Seja H um subgrupo fechado de G . Então H (com a topologia induzida) é um grupo profinito. Todo subgrupo aberto de H é da forma $H \cap K$ com K subgrupo aberto de G .
- (v) Seja N um subgrupo fechado normal de G . Então G/N (com a topologia quociente) é um grupo profinito, e o homomorfismo natural $G \rightarrow G/N$ é uma aplicação contínua aberta e fechada.

Discutiremos agora o conceito de grupo residualmente finito e algumas propriedades básicas relevantes para nosso estudo.

Um grupo G é dito **residualmente finito** se, para cada elemento $g \neq 1$ em G , existe um subgrupo normal $N_g \triangleleft G$ tal que $g \notin N_g$ e o quociente G/N_g é finito.

A seguir, apresentamos uma caracterização fundamental dos grupos residualmente finitos.

Proposição 4.1.4. Um grupo G é residualmente finito se, e somente se, a interseção de todos os subgrupos normais de índice finito em G é trivial.

Demonstração. Seja I o conjunto de todos os subgrupos normais de índice finito em G e defina $H = \bigcap_{N \in I} N$.

Primeiramente, suponha que G seja residualmente finito e, por contradição, que $H \neq 1$. Isso significa que existe um elemento $g \in H$ com $g \neq 1$. Pela definição de grupo residualmente finito, deve existir um subgrupo normal $N_g \triangleleft G$ tal que $g \notin N_g$ e G/N_g seja finito. Como $N_g \in I$, segue que $g \in H \subseteq N_g$. Assim, temos $g \in N_g$, o que contradiz a escolha de N_g , pois assumimos que $g \notin N_g$. Portanto, concluímos que $H = 1$.

Reciprocamente, suponha que $H = 1$ e considere um elemento arbitrário $g \in G$ com $g \neq 1$. Como H é a interseção de todos os subgrupos normais de índice finito em G , segue que $g \notin H$. Isso significa que deve existir um subgrupo normal $N_g \triangleleft G$ com índice finito tal que $g \notin N_g$, pois, do contrário, teríamos $g \in H$, o que contraria nossa hipótese. Como essa escolha de g foi arbitrária, concluímos que G é residualmente finito, finalizando a demonstração. $\square$

O próximo resultado estabelece que todo grupo profinito é residualmente finito.

Proposição 4.1.5. Se G é um grupo profinito, então G é residualmente finito.

Demonstração. Seja I o conjunto de todos os subgrupos normais abertos de G . Pelo Lema 4.1.3, sabemos que a interseção de todos esses subgrupos é trivial, ou seja,

$$\bigcap_{N \in I} N = 1.$$

Além disso, como cada $N \in I$ é um subgrupo normal aberto em G , segue do Lema 4.1.3, que seu índice $[G : N]$ é finito. Assim, pela Proposição 4.1.4, concluímos que G é residualmente finito. $\square$

O próximo resultado, consequência da Proposição 4.1.5, estabelece uma propriedade fundamental sobre subconjuntos finitos em grupos profinitos.

Proposição 4.1.6. Seja G um grupo profinito. Se H é um subconjunto finito de G que contém o elemento identidade, então existe um subgrupo normal aberto N de G tal que $H \cap N = \{1\}$.

Demonstração. Como G é profinito, segue da Proposição 4.1.5 que G é residualmente finito.

Seja $|H| = n$. Se $H = \{1\}$, o resultado é imediato. Suponhamos então que $H \neq \{1\}$. Como G é residualmente finito, para cada elemento não trivial $h_i \in H$, existe um subgrupo normal $N_{h_i} \triangleleft G$ tal que $h_i \notin N_{h_i}$ e o quociente G/N_{h_i} é finito. Além disso, como G é profinito, podemos assumir, sem perda de generalidade, que cada N_{h_i} é um subgrupo normal aberto de G .

Definindo

$$N = \bigcap_{i=1}^n N_{h_i},$$

obtemos um subgrupo normal aberto de G . Ademais, por construção, temos $N \cap H = \{1\}$, pois, caso contrário, existiria algum $h_i \in N \cap H$ com $h_i \neq 1$. Isso implicaria que $h_i \in N_{h_i}$, o que contradiz a escolha de N_{h_i} .

Assim, concluímos que $N \cap H = \{1\}$, finalizando a demonstração. $\square$

Apresentamos agora, uma importante propriedade dos grupos profinitos, mostrando que grupos profinitos infinitos não são enumeráveis. Esse resultado deriva do Teorema da Categoria de Baire, aplicável a espaços localmente compactos.

Lema 4.1.7 ([21, Proposição 2.3.1]). Seja G um grupo profinito.

- (a) Se $C_1, C_2, \dots$ é uma sequência infinita enumerável de subconjuntos fechados e não vazios de G que não possuem interior, então:

$$G \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

- (b) A cardinalidade de G é sempre finita ou não enumerável.

Considerando G um grupo profinito, temos, por definição, que

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i,$$

onde cada G_i é um grupo finito e I é uma base filtrada de subgrupos normais fechados de G .

Se G é infinito, conhecer sua cardinalidade fornece pouca informação a respeito do grupo, pois, pelo Lema 4.1.7, sabemos que G é sempre não enumerável. Dessa forma, é necessário definir uma quantidade numérica que represente as propriedades aritméticas dos grupos finitos

G_i , seja independente da apresentação de G como um limite inverso de um sistema inverso de grupos finitos e que expresse características fundamentais de G .

Essa abordagem permitirá, no contexto dos grupos profinitos, a formulação precisa de conceitos como índices, ordens e subgrupos de Sylow. A ferramenta central para isso será o conceito de **número supernatural**, definido como um produto formal da forma:

$$n = \prod_p p^{n(p)},$$

onde p percorre o conjunto de todos os números primos e $n(p)$ é um inteiro não negativo ou ∞ .

Adotamos as seguintes convenções para operações envolvendo ∞ :

$$n < \infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty + n = n + \infty = \infty \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se m é outro número supernatural definido por $m = \prod_p p^{m(p)}$, e se $m(p) \leq n(p)$ para cada p , então dizemos que m **divide** n , denotado por $m \mid n$.

Considerando uma coleção de números supernaturais $\{n_i = \prod_p p^{n(p,i)} \mid i \in I\}$, definimos o produto, o máximo divisor comum (mdc) e o mínimo múltiplo comum (mmc) da seguinte forma:

- $\prod_I n_i = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \sum_i n(p,i)$;
- $\text{mdc}\{n_i\}_{i \in I} = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \min_i \{n(p,i)\}$;
- $\text{mmc}\{n_i\}_{i \in I} = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \max_i \{n(p,i)\}$.

Considere G um grupo profinito e H um subgrupo fechado de G . Seja $\mathcal{U}$ a coleção de todos os subgrupos normais abertos de G . Definimos o **índice** $[G : H]$ de H em G como o número supernatural determinado pelo mínimo múltiplo comum dos índices dos quocientes:

$$[G : H] = \text{mmc}\{[G/U : HU/U] \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

A **ordem** de G , denotada por $\#G$, é o número supernatural definido por:

$$\#G = [G : 1],$$

ou seja, $\#G = \text{mmc}\{|G/U| \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Lema 4.1.8. [21, Proposição 2.3.2] Seja G um grupo profinito.

(i) Se H é um subgrupo fechado de G , então $[G : H]$ é um número natural se e somente se H é um subgrupo aberto de G ;

(ii) Se H é um subgrupo fechado de G , então

$$[G : H] = \text{mmc}\{[G : U] \mid H \leq U \leq G, \text{ onde } U \text{ é um subgrupo aberto de } G\}.$$

(iii) Sejam K um subgrupo fechado de H , e H um subgrupo fechado de G . Então

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Assim como nos números naturais, definimos π -números, onde π é um conjunto de números primos, e π' o conjunto de números primos que não estão em π . Um número supernatural $n = \prod_p p^{n(p)}$ é chamado de π -número se, sempre que $n(p) \neq 0$, então $p \in \pi$.

Com base nessa noção, dizemos que um grupo profinito G é um **pro- π grupo** se sua ordem $\#G$ é um π -número. Se $\pi = \{p\}$ consiste apenas do primo p , então o grupo é chamado de **pro- p grupo**.

Por fim, abordaremos um pouco da teoria de Sylow em grupos profinitos, definiremos o conceito de p -subgrupo de Sylow de um grupo profinito G , mostraremos a existência destes subgrupos de Sylow e apresentaremos propriedades relevantes destes subgrupos que se assemelham ao que é conhecido para subgrupos de Sylow de grupos finitos.

Sejam G um grupo profinito e p um primo. Um **p -subgrupo de Sylow** de G é um subgrupo P tal que sua ordem $|P| = p^n$ é uma potência de p com $n \leq \infty$ e seu índice $[G : P]$ é coprimo com p . Em particular, observamos que os p -subgrupos de Sylow de G são pro- p subgrupos maximais de G .

A proposição a seguir, mostra que os Teoremas de Sylow, conhecidos em grupos finitos, podem ser estendidos para grupos profinitos.

Proposição 4.1.9. [26, Proposição 2.2.2] Sejam G um grupo profinito e p um primo. As seguintes afirmações valem:

(i) o grupo G possui p -subgrupos de Sylow;

- (ii) se P é um p -subgrupo de Sylow de G e T é um subgrupo pro- p de G , então $g^{-1}Tg \leq P$ para algum $g \in G$;
- (iii) cada subgrupo pro- p de G está contido em um p -subgrupo de Sylow;
- (iv) se P_1 e P_2 são p -subgrupos de Sylow de G , então $g^{-1}P_1g = P_2$ para algum $g \in G$.

4.2 Grupos Profinitos Quase Engel

Como já observado para grupos abstratos, todo grupo nilpotente é Engel. No entanto, a recíproca geralmente não é verdadeira. Existem, contudo, resultados importantes que validam a relação sob condições específicas, como demonstrado por Wilson e Zelmanov, que estabeleceram o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1. [27, Teorema 5] *Todo grupo profinito Engel é localmente nilpotente.*

Um grupo G é denominado **quase Engel** se, para cada elemento $g \in G$, existe um conjunto finito $\mathcal{E}(g) \subseteq G$ tal que, para todo $x \in G$, todos os comutadores suficientemente longos da forma $[\dots[[x, g], g], \dots, g]$ pertencem a $\mathcal{E}(g)$.

Khukhro e Shumyatsky [14] demonstraram que se um grupo compacto (Hausdorff) G é quase Engel, então G possui um subgrupo normal finito N de modo que G/N é localmente nilpotente. Além disso, se existe um inteiro positivo m de forma que para cada $g \in G$, $|\mathcal{E}(g)| \leq m$, então o subgrupo normal N pode ser de ordem limitada por m .

Introduzimos também o conceito de grupo **central-por-finito**, que é caracterizado pelo fato de que o índice $[G : Z(G)]$ é finito.

Um conceito relacionado é o de **FC-grupo**, definido como um grupo G em que cada classe de conjugação é finita. É conhecido que todo grupo central-por-finito é um FC-grupo, uma vez que em tais grupos o centralizador de qualquer elemento tem índice finito, devido ao fato de que contém o centro.

Neumann, em [19, Lema 2], demonstrou que, sob certas condições adicionais, a recíproca também é válida: um FC-grupo é central-por-finito. Essa relação é formalizada no seguinte resultado.

Lema 4.2.2. Se G é um FC-grupo e contém um subgrupo abeliano A com índice finito $[G : A]$, então G é central-por-finito.

Outra definição importante no estudo de grupos com restrições sobre classes de conjugação é a de **BFC-grupo**. Um grupo G é denominado BFC-grupo se existe um inteiro positivo d tal que toda classe de conjugação em G é finita e possui no máximo d elementos. Em outras palavras, trata-se de um FC-grupo com um limite uniforme para o tamanho das classes de conjugação.

Neumann também investigou a estrutura desses grupos e os caracterizou em termos de seu subgrupo derivado, conforme enunciado no resultado a seguir.

Teorema 4.2.3. [22, Teorema 4.35] *Um grupo G é um BFC-grupo se, e somente se, G' é finito.*

Shalev [25, Lema 2.6] ofereceu contribuições adicionais relevantes no contexto dos grupos profinitos. Em particular, ele investigou o comportamento do subgrupo derivado em FC-grupos profinitos, estabelecendo que, sob tais condições, esse subgrupo possui estrutura controlada. O resultado a seguir formaliza essa observação:

Teorema 4.2.4. *Se G é um FC-grupo profinito, então G' é finito.*

Um grupo G é dito possuir **centralizadores restritos** se, para cada elemento $g \in G$, o centralizador $C_G(g)$ é finito ou possui índice finito em G . Esse conceito foi introduzido por Shalev em [25], no contexto de grupos profinitos.

Shalev demonstrou que todo grupo profinito com centralizadores restritos é **virtualmente abeliano**, isto é, possui um subgrupo aberto abeliano. Lembramos que, no contexto profinito, uma propriedade é dita **virtualmente satisfeita** quando há um subgrupo aberto do grupo que a possui.

Por fim, apresentamos um teorema crucial que será essencial para fundamentar nosso resultado no contexto dos grupos profinitos.

Teorema 4.2.5. [1, Teorema 1.3] *Seja π um conjunto de números primos e G um grupo profinito no qual o centralizador de cada π -elemento é ou finito ou aberto. Então G tem um subgrupo aberto da forma $P \times Q$, onde P é um subgrupo pro- π abeliano e Q é um subgrupo pro- π' .*

Além disso, utilizaremos o seguinte resultado clássico, conhecido como Lema de Dicman, que garante que subconjuntos normais finitos, formados por elementos de ordem finita, geram subgrupos normais também finitos. Isso será importante no contexto profinito, onde queremos garantir que certas construções permaneçam dentro da classe dos subgrupos finitos.

Lema 4.2.6. [23, Teorema 14.5.7] *Em qualquer grupo G , um subconjunto normal finito formado por elementos de ordem finita gera um subgrupo normal finito.*

Encerrando o desenvolvimento principal deste trabalho, apresentamos a extensão do resultado central ao contexto dos grupos profinitos. Sob a hipótese de finitude dos *sinks* associados aos p -elementos, demonstramos que uma estrutura análoga à obtida no caso finito permanece válida:

Teorema 4.2.7. *Seja p um número primo e G um grupo profinito no qual todo p -elemento possui um sink de Engel finito. Então, G possui um subgrupo normal N tal que N é virtualmente pro- p e G/N é um grupo pro- p' .*

Demonstração. Seja $g \in G$ um p -elemento. Como, por hipótese, $\mathcal{E}(g)$ é finito, segue da Proposição 4.1.6 que existe um subgrupo normal aberto N_g de G tal que $\mathcal{E}(g) \cap N_g = \{1\}$.

Dessa forma, considerando $N_g \langle g \rangle$, temos que g é um elemento Engel em $N_g \langle g \rangle$. De fato, seja $x \in N_g \langle g \rangle$. Note que $[x, g] \in N_g$, pois $(N_g \langle g \rangle)' \leq N_g$, em virtude de N_g ser normal em G . Mais geralmente, todo comutador iterado da forma $[x, g, \dots, g]$ também pertence a N_g .

Por outro lado, pela definição de $\mathcal{E}(g)$, existe um inteiro $n(g, x)$ tal que, para todo $n \geq n(g, x)$, tem-se

$$[x, \underbrace{g, \dots, g}_n] \in \mathcal{E}(g),$$

e, simultaneamente, esse comutador pertence a N_g .

Pelo fato de $\mathcal{E}(g) \cap N_g = \{1\}$, concluímos que

$$[x, \underbrace{g, \dots, g}_n] = 1,$$

o que mostra que g é um elemento Engel em $N_g \langle g \rangle$.

Agora, seja $H \triangleleft_o N_g \langle g \rangle$ um subgrupo normal aberto arbitrário. Como g é um elemento Engel em $N_g \langle g \rangle$, sua imagem $\bar{g}$ em $N_g \langle g \rangle / H$ também é um elemento Engel nesse quociente.

Como $N_g \langle g \rangle / H$ é um grupo finito, segue que $\bar{g}$ pertence ao subgrupo de Fitting de $N_g \langle g \rangle / H$. Como a escolha de H foi arbitrária, essa afirmação vale para qualquer quociente finito de $N_g \langle g \rangle$. Assim, deduzimos que $g \in F(N_g \langle g \rangle)$, onde $F(N_g \langle g \rangle)$ denota o subgrupo de Fitting, ou seja, o maior subgrupo normal pronilpotente do grupo profinito considerado.

Adicionalmente, sendo g um p -elemento, segue que $g \in O_p(N_g \langle g \rangle)$. Assim, $[N_g, g] \leq O_p(N_g) \leq O_p(G)$, o que garante que $[N_g, g]$ é um subgrupo pro- p , e concluímos que o quociente $G/O_p(G)$ possui a propriedade de que todo p -elemento é um FC-elemento, ou seja, sua classe de conjugação é finita no quociente.

Para verificar isso, note que cada p -elemento de $G/O_p(G)$ é centralizado pela imagem de N_g no quociente $G/O_p(G)$. Seja $\bar{y} = yO_p(G)$ para algum $y \in N_gO_p(G)$ e considere um p -elemento arbitrário $\bar{a} \in G/O_p(G)$. O centralizador de $\bar{a}$ em $G/O_p(G)$ é dado por:

$$C_{G/O_p(G)}(\bar{a}) = \{\bar{x} \in G/O_p(G) \mid [\bar{x}, \bar{a}] = 1\} = \{\bar{x} \in G/O_p(G) \mid [x, a] \in O_p(G)\}.$$

Como $y \in N_gO_p(G)$, podemos escrever $y = zk$, onde $z \in N_g$ e $k \in O_p(G)$. Assim, temos que:

$$[y, a] = [z, a]^k [k, a] \in [N_g, a]^{O_p(G)} O_p(G).$$

Além disso, como $O_p(G)$ contém $[N_g, a]$, segue que

$$[N_g, a]^{O_p(G)} \leq O_p(G).$$

Portanto, concluímos que $[y, a] \in O_p(G)$, o que implica que $\bar{y} \in C_{G/O_p(G)}(\bar{a})$, como desejado.

Agora, como N_g é aberto em G , temos que o índice $[G : N_gO_p(G)]$ é finito, o que implica que

$$[G/O_p(G) : N_gO_p(G)/O_p(G)]$$

também é finito. Consequentemente, segue que

$$[G/O_p(G) : C_{G/O_p(G)}(\bar{a})]$$

é finito para cada p -elemento. Portanto, a classe de conjugação de p -elementos é finita.

Pelo Teorema 4.2.5, sabemos que $G/O_p(G)$ é virtualmente pro- p' , e, portanto, os p -subgrupos de Sylow de $G/O_p(G)$ são finitos.

Levando em consideração que os p -subgrupos de Sylow de $G/O_p(G)$ consistem de elementos FC, e utilizando o Lema 4.2.6, concluímos que, se P é um p -subgrupo de Sylow de G , então a imagem de $\langle P^G \rangle$ em $G/O_p(G)$ é finita. Portanto, o subgrupo $N = \langle P^G \rangle$ possui as propriedades desejadas, o que conclui a demonstração. □

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Limitações por *sinks* à direita de Engel

Os resultados discutidos neste trabalho consideram os *sinks* normados à esquerda. No entanto, Khukhro e Shumyatsky [15] também definem os *sinks* à direita, proporcionando uma abordagem alternativa para a teoria de Engel.

Dado um grupo G e um elemento $g \in G$, o *sink à direita de Engel para g* é um conjunto $\mathcal{R}(g)$ tal que, para todo $a \in G$, os comutadores de peso suficientemente grande da forma $[g, a, \dots, a]$ pertencem a $\mathcal{R}(g)$. Ou seja, para cada $a \in G$, existe um inteiro positivo $n(a, g)$ tal que:

$$[g, \underbrace{a, a, \dots, a}_n] \in \mathcal{R}(g), \text{ para todo } n \geq n(a, g).$$

Essa definição estabelece uma versão alternativa do conceito de *sink*, considerando a iteração dos comutadores em relação ao primeiro argumento, em contraste com a abordagem normada à esquerda adotada nos capítulos anteriores.

Lembramos que um elemento g de um grupo G é chamado de Engel à esquerda se, para todo $x \in G$, existe um inteiro positivo $n = n(g, x)$ tal que $[x, \underbrace{g, g, \dots, g}_n] = 1$. Analogamente, um elemento g é dito Engel à direita se, para todo $x \in G$, existe um inteiro positivo $m = m(g, x)$ tal que $[g, \underbrace{x, x, \dots, x}_m] = 1$. Isso equivale a dizer que o *sink* à direita de g é trivial, ou seja, $\mathcal{R}(g) = \{1\}$.

O próximo resultado, demonstrado por Heineken, estabelece uma relação entre essas duas noções.

Lema 5.1.1 ([23], Teorema 12.3.1). Se g é um elemento Engel à direita em um grupo G , então g^{-1} é um elemento Engel à esquerda.

Esse resultado permite, em diversas situações, converter propriedades relacionadas a elementos Engel à direita para sua versão correspondente à esquerda, e vice-versa, facilitando a análise estrutural de grupos nos quais essas condições são relevantes.

O seguinte lema caracteriza os *sinks* à direita de Engel finitos.

Lema 5.1.2 ([15], Lema 2.2). Se um elemento g de um grupo G possui um *sink* de Engel à direita finito, então

$$\mathcal{R}(g) = \{z \mid z = [g, n x] = [g, n+m x], x \in G, n \geq 1, m \geq 1\}.$$

Aqui, os elementos x e os números m, n do Lema anterior variam para diferentes z e não são únicos.

Conseguimos adaptar alguns dos resultados demonstrados neste trabalho para o caso de *sinks* à direita, desde que o grupo considerado seja finito e solúvel. Em particular, verifica-se que o Teorema 4 se mantém válido nesse novo contexto, com as devidas reformulações dos resultados auxiliares.

No entanto, a adaptação para grupos simples apresentou obstáculos significativos, tornando não triviais as extensões desses resultados.

5.2 Síntese dos Resultados e Perspectivas

Este trabalho teve como objetivo investigar as consequências estruturais da existência de *sinks* pequenos à esquerda de Engel em grupos finitos e profinitos.

Demonstramos que a limitação da cardinalidade desses *sinks* impõe restrições significativas à estrutura dos grupos, afetando parâmetros como a altura de Fitting, o comprimento não-solúvel, a ordem de subgrupos derivados e o índice de subgrupos naturalmente associados à ação de p -elementos.

No caso dos grupos finitos, assumindo que todos os p -elementos de um subgrupo de Sylow $P \in \text{Syl}_p(G)$ possuem *sinks* de Engel à esquerda com cardinalidade limitada por m , provamos

que subgrupos como $[N, P]$, $\langle P^G \rangle$ e certos subgrupos derivados possuem ordem e índice m -limitados. Essas demonstrações basearam-se em adaptações de técnicas clássicas, como ações coprimas, séries de Fitting e propriedades de centralizadores.

Estendemos esses resultados ao contexto dos grupos profinitos, mesmo diante dos desafios adicionais impostos pela topologia. Considerando a continuidade das operações, a estrutura dos subgrupos fechados e o comportamento das ações conjugacionais, demonstramos que, se todos os p -elementos de um grupo profinito possuem *sinks* de Engel finitos, então o grupo admite um subgrupo normal que é virtualmente pro- p , com quociente pro- p' .

Tal resultado evidencia que a finitude dos *sinks*, mesmo sem limitação uniforme, ainda impõe restrições estruturais substanciais em grupos infinitos e topologicamente mais complexos.

Outro resultado crucial para nossa abordagem foi o Teorema 2.4.2, que forneceu uma caracterização estrutural de grupos finitos a partir de seus comutadores com um automorfismo. Esse teorema afirma que, se um grupo G satisfaz $G = [G, \alpha]$ para algum $\alpha \in \text{Aut}(G)$, então G é gerado pelos *sinks* de Engel associados a α , independentemente do parâmetro k considerado.

Um aspecto notável desse teorema é que ele não requer que o grupo G seja solúvel, o que o torna particularmente adequado para tratar casos mais gerais, incluindo grupos não solúveis. Essa generalidade foi essencial para lidar com situações no contexto dos *sinks* à esquerda.

Contudo, a adaptação desses resultados para o contexto dos *sinks* à direita ainda permanece incompleta. Embora tenhamos observado que o teorema principal também se verifica no caso de grupos finitos solúveis, a generalização para grupos não solúveis ainda encontra obstáculos técnicos relevantes.

Um dos principais obstáculos atuais reside na ausência de um análogo ao Teorema de Guralnick e Tracey para *sinks* à direita. Até o momento, o melhor resultado disponível nesse contexto é o seguinte:

Teorema 5.2.1. [17, Proposição 3.1] *Seja α um automorfismo de um grupo finito solúvel G , tal que $G = [G, \alpha]$. Então $G = R_{G\langle\alpha\rangle, n}(\alpha)$ para todo $n \geq 1$.*

Essa lacuna inviabiliza, por ora, o pleno desenvolvimento das técnicas utilizadas neste trabalho para o caso não solúvel com *sinks* à direita. O avanço dessa linha de pesquisa exigirá ou a formulação de um teorema análogo válido para classes mais gerais de grupos, ou o desenvolvimento de abordagens alternativas que permitam contornar essa limitação.

Assim, os resultados aqui obtidos consolidam uma base teórica sólida para o estudo dos *sinks* de Engel à esquerda, e apontam para direções promissoras em investigações futuras envolvendo estruturas de grupos com *sinks* limitados — tanto à esquerda quanto à direita.

Bibliografia

- [1] C. ACCIARRI AND P. SHUMYATSKY, *Profinite groups with restricted centralizers of π -elements*, Mathematische Zeitschrift, 301 (2022), pp. 1039–1045.
- [2] C. ACCIARRI, P. SHUMYATSKY, AND D. SILVEIRA, *Engel sinks of fixed points in finite groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, 223 (2019), pp. 4592–4601.
- [3] S. AIVAZIDIS AND R. M. GURALNICK, *A note on abelian subgroups of maximal order*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 31 (2020), pp. 319–334.
- [4] N. BLACKBURN AND B. HUPPERT, *Finite groups ii.*, SPRINGER-VERLAG INC., 175 FIFTH AVE., NEW YORK, NY, 1981., 242 (1981).
- [5] J. D. DIXON, M. P. F. DU SAUTOY, A. MANN, AND D. SEGAL, *Analytic pro- p groups*, no. 61, Cambridge University Press, 2003.
- [6] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, vol. 301, American Mathematical Soc., 2007.
- [7] R. M. GURALNICK AND G. TRACEY, *On the generalized fitting height and insoluble length of finite groups*, Bulletin of the London Mathematical Society, 52 (2020), pp. 924–931.
- [8] B. HARTLEY, *A general brauer-fowler theorem and centralizers in locally finite groups*, Pacific journal of mathematics, 152 (1992), pp. 101–117.
- [9] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, vol. 134, Springer-Verlag, 1967.
- [10] I. M. ISAACS, *Finite group theory*, vol. 92, American Mathematical Soc., 2008.
- [11] M. I. KARGAPOLOV AND J. I. MERZLJAKOV, *Fundamentals of the Theory of Groups*, vol. 62, Springer, 1979.
- [12] E. I. KHUKHRO AND P. SHUMYATSKY, *Nonsoluble and non- p -soluble length of finite groups*, Israel Journal of Mathematics, 207 (2015), pp. 507–525.
- [13] —, *Engel-type subgroups and length parameters of finite groups*, Israel Journal of Mathematics, 222 (2017), pp. 599–629.
- [14] —, *Almost engel compact groups*, Journal of Algebra, 500 (2018), pp. 439–456.
- [15] —, *Compact groups in which all elements are almost right engel*, The Quarterly Journal of Mathematics, 70 (2019), pp. 879–893.

- [16] —, *On finite groups with an automorphism of prime order whose fixed points have bounded engel sinks*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, (2021), pp. 1–15.
- [17] E. I. KHUKHRO, P. SHUMYATSKY, AND G. TRAUSTASON, *Right engel-type subgroups and length parameters of finite groups*, Journal of the Australian Mathematical Society, 109 (2020), pp. 340–350.
- [18] H. KURZWEIL, *The theory of finite groups: An introduction*, 2004.
- [19] B. H. NEUMANN, *A problem of paul erdős on groups*, Journal of the Australian mathematical society, 21 (1976), pp. 467–472.
- [20] H. NEUMANN, *Varieties of groups*, Springer-Verlag, 1967.
- [21] L. RIBES AND P. ZALESKII, *Profinite groups*, Springer, 2000.
- [22] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, vol. 63, Springer Science & Business Media, 1972.
- [23] —, *A Course in the Theory of Groups*, vol. 80, Springer Science & Business Media, 2012.
- [24] H. E. ROSE, *A course on finite groups*, Springer Science & Business Media, 2009.
- [25] A. SHALEV, *Profinite groups with restricted centralizers*, Proceedings of the American Mathematical Society, 122 (1994), pp. 1279–1284.
- [26] J. S. WILSON, *Profinite groups*, vol. 19, Clarendon Press, 1998.
- [27] J. S. WILSON AND E. I. ZELMANOV, *Identities for lie algebras of pro-p groups*, Journal of pure and applied algebra, 81 (1992), pp. 103–109.