Universidade de Brasília

Órbitas por automorfismos de grupos residualmente finitos e de $\mathbb{Q}-$completamentos de Mal'cev de grupos nilpotentes livres

Jucélia Ferreira de Sousa

Orientador: Prof.Dr. Alex Carrazedo Dantas

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutora em Matemática

Brasília, 2025

Aos meus pais, Maria dos Anjos e Cândido Neto, e ao meu irmão Juliano, cuja presença e apoio incondicional têm sido meu porto seguro em todas as marés.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pois sem sua permissão este sonho não estaria se concretizando. Aos meus queridos e amados pais, Maria dos Anjos e Cândido Neto, cuja força, orações, palavras e gestos de incentivo foram essenciais para que eu continuasse nesta caminhada. Ao meu orientador, professor Dr. Alex Carrazedo Dantas, expresso minha sincera gratidão pela orientação sempre presente, pela paciência e pela dedicação com que acompanhou cada etapa deste trabalho. Agradeço especialmente pela disponibilidade constante, esclarecendo dúvidas em qualquer dia e horário. Levarei para sempre os valiosos ensinamentos que recebi. Aos professores do MAT, sou profundamente grata pelos ensinamentos recebidos. Aos membros da banca, Prof. Dr. Carmine Monetta, Prof. Dr. Mohsen Amiri e Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco pelas valiosas observações e contribuições que enriqueceram e aprimoraram este trabalho. Aos meus irmãos pelas palavras de conforto. Ao professor Dr. Eudes Antonio da Costa pelo incentivo. Aos colegas, cujos nomes não menciono para não correr o risco de ser injusta, e aos amigos da sala 403, cuja presença tornou mais leves os momentos desafiadores desta caminhada.

Resumo

Seja G um grupo. As órbitas da ação de $\mathrm{Aut}(G)$ em G são chamadas de órbitas por automorfismos de G. Neste trabalho, estudamos dois tipos de grupos com quantidades finitas de órbitas por automorfismos: os grupos residualmente finitos e os grupos nilpotentes radicáveis. Iniciamos com uma construção de um subgrupo do produto cartesiano $\prod_X G$, chamado potência booleana de G, e verificamos que um grupo residualmente finito não solúvel pode ter uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Em seguida, provamos que *se G é grupo residualmente finito com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos, então G é localmente finito com expoente*. Nos grupos nilpotentes radicáveis, estudamos o $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ do grupo nilpotente livre $N_{r,c}$, r-gerado de classe c. Provamos que *o grupo $G = N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ tem uma quantidade finita de órbitas por automorfismos se, e somente se, $G = N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ ou $G = N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$*.

Abstract

Let G be a group, the orbits of the action of $\mathrm{Aut}(G)$ on G are called automorphism orbits of G. In this work, we study two types of groups with finitely many automorphism orbits: residually finite groups and radicable nilpotent groups. We begin by constructing a subgroup of the Cartesian product $\prod_X G$, called the Boolean power of G, and verify that a non-solvable residually finite group can have finitely many automorphism orbits. We then prove that *if G is a residually finite group with finitely many automorphism orbits, then G is locally finite with exponent*. In radical nilpotent groups, we study the $\mathbb{Q}$-Mal'cev completion $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ of the free nilpotent group $N_{r,c}$, r-generated of class c. We prove that *the group $G = N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ has finitely many orbits by automorphisms if and only if $G = N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ or $G = N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$*.

Conteúdo

Lista de Símbolos

$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{D}_0$	Aneis booleanos enumeráveis caracteristicamente simples
$C_G(H)$	O centralizador do subgrupo H em G
$G' = [G,G]$	O subgrupo derivado de um grupo G
$G^{\mathcal{R}}$	Potência booleana do grupo G pelo anel booleano $\mathcal{R}$
$Z(G)$	O centro do grupo G
$[g,h]$	O comutador de g e h : $g^{-1}h^{-1}gh$
$\lambda(G)$	A largura do grupo G
$\lambda(g)$	A largura de um elemento g do subgrupo comutador G' do grupo G
$\langle X \rangle$	Grupo gerado por X
$\mid S \mid$	A cardinalidade do conjunto S
$\omega(G)$	O número de órbitas por automorfismos de um grupo G
$\mathrm{Aut}(G)$	O grupo de automorfismos do grupo G
g^{α}	A imagem do elemento g sob α
$g^{\mathrm{Aut}(G)}$	Órbita por automorfismos do elemento $g \in G$
$\mid x \mid$	Ordem do elemento x do grupo
$\mathrm{spec}(G)$	O conjunto de ordens dos elementos de um grupo G
g^h	O conjugado de g por h : $h^{-1}gh$

Introdução

Sejam G um grupo e $\mathrm{Aut}(G)$ seu grupo de automorfismos. Para $g \in G$ sua órbita por automorfismos é definida como

$$g^{\mathrm{Aut}(G)} = \{g^{\varphi} \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\}.$$

Dois elementos $g, h \in G$ pertencem à mesma órbita por automorfismos sempre que existir $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $g^{\varphi} = h$. Tais elementos também são chamados de $\mathrm{Aut}(G)$-conjugados. O estudo do número de órbitas por automorfismos de um grupo, denotado por $\omega(G)$, teve início nos trabalhos de Laffey e MacHale [15] em 1986 ([14]). Desde então, o tema tem atraído interesse de diversos matemáticos, consolidando-se como uma linha de pesquisa na teoria de grupos.

O fato de $\omega(G)$ ser finito impõe algumas restrições à estrutura do grupo. Por exemplo, é imediato que $\omega(G) = 1$ se, e somente se, G é o grupo trivial; tal grupo é chamado excessivamente homogêneo. Se G é finito e $\omega(G) = 2$, então G é um grupo abeliano elementar de ordem p^n, para algum primo p; grupos com duas órbitas são chamados homogêneos. No entanto, esse resultado não pode ser estendido para grupos infinitos: Higman, Neumann e Neumann construíram um grupo simples e livre de torção U que possui duas órbitas por automorfismos [21, 6.4.6]. Grupos para os quais $\omega(G) = 3$ são chamados quase homogêneos. No caso de grupos finitos, alguns autores se dedicaram à classificação de grupos com pequeno número de órbitas por automorfismos. Por exemplo, em [4] foram classificados os grupos finitos não solúveis com até cinco órbitas, e em [9] essa classificação foi estendida para grupos não solúveis com $\omega(G) \leq 6$. Recentemente, foram classificados todos os grupos finitos com até três órbitas por automorfismos, veja [11] e [16].

Essa linha de pesquisa não se limita ao estudo de grupos finitos. No contexto de grupos infinitos, quando se restringe uma certa classe de grupos é possível dizer algo sobre os grupos daquelas classes com um número finito de órbitas por automorfismos. Por exemplo, em [7] foi demonstrado que se um FC-grupo infinito possui número finito de órbitas por automorfismos, então seu subgrupo derivado G' é finito e G admite uma decomposição do

tipo $G = \mathrm{Tor}(G) \times D$, onde $\mathrm{Tor}(G)$ é o subgrupo de elementos de ordem finita de G e D é um subgrupo característico divisível do $Z(G)$. Nesse mesmo trabalho, foram obtidos os seguintes resultados com a hipótese de G ser FC-grupo:

- se $\omega(G) \leq 4$, então G é nilpotente;
- se $\omega(G) \leq 7$, então G é solúvel;
- se $\omega(G) = 8$ e G não é solúvel, então $G \simeq A_5 \times H$, com H abeliano infinito tal que $\omega(H) = 2$;
- se G é um grupo infinito não solúvel com $\omega(G) \leq 11$, então G é central por finito.

O artigo [5] trata do caso em que G é solúvel de posto finito. Os autores mostraram que, se $\omega(G) < \infty$, então existe um subgrupo característico K, nilpotente, radicável e livre de torção, tal que $G = K \rtimes H$, com H finito. Além disso, classificaram os grupos solúveis de ordem mista e posto finito, tal que $\omega(G) = 3$. Se G é um grupo e r um inteiro positivo, dizemos que G tem *posto finito r* se todo subgrupo finitamente gerado de G pode ser gerado por r ou menos elementos, e se r é o menor inteiro com essa propriedade. Uma classe de particular interesse é a classe dos grupos localmente graduados: *Um grupo G é chamado localmente graduado se todo subgrupo não trivial finitamente gerado em G possui um subgrupo próprio de índice finito*.

Nesse contexto, o trabalho [6], apresenta resultados relacionados a grupos virtualmente nilpotentes. Dentre os quais destacam:

1. sejam A um grupo abeliano e B um subgrupo finito de $\mathrm{Aut}(A)$. *Se* $G = A \rtimes B$ *com A característico em G, então* $\omega(G) < \infty$ *se, e somente se, A possui número finito de órbitas sob a ação de* $C_{\mathrm{Aut}(A)}(B)$.

2. se G é um grupo virtualmente nilpotente com $\omega(G) < \infty$, *então existem um subgrupo nilpotente, radicável e livre de torção K, e um subgrupo de torção H, tais que*

$$G = K \rtimes H.$$

Além disso, o subgrupo derivado admite a decomposição $G' = D \times \mathrm{Tor}(G')$, *com D característico, nilpotente, radicável e livre de torção*.

Um grupo possui uma certa propriedade virtualmente se tiver um subgrupo de índice finito com essa propriedade. Grupos localmente finitos com finitas órbitas por automorfismos foram estudados em [3]. Órbitas por automorfismos em grupos localmente compactos foram estudas em [24, 25], onde propriedades de grupos topológicos com finitas órbitas por automorfismos são apresentadas.

Neste trabalho, dedicamos ao estudo de órbitas por automorfismos de grupos infinitos, com ênfase em algumas famílias de grupos localmente graduados: grupos residualmente finitos e $\mathbb{Q}-$completamento de Mal'cev de grupos nilpotentes livres finitamente gerados. No estudo de grupos residualmente finitos com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos, as potências boolenas de grupos simples finitos são exemplos de grupos caracteristicamente simples com finitas órbitas por automorfismos. Um anel booleano $\mathcal{R}$ é um anel comutativo em que todo elemento é idempotente. Sejam G um grupo, X um conjunto não vazio, $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X e $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ um anel booleano. A potência booleana de G por $\mathcal{R}$ denotada por $G^{\mathcal{R}}$ é definida como o subgrupo do produto cartesiano $\prod_X G$ gerado por todos os elementos da forma g_A, com $g \in G$ e $A \in \mathcal{R}$, onde g_A é definido

$$g_A \in \prod_X G, \text{ dado por } g_A = (h_x)_{x\in X} \text{ com}$$

$$h_x = \begin{cases} g, & \text{se } x \in A, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Provamos o seguinte resultado que fornece uma estimativa superior para o número de órbitas por automorfismos de certas potências booleanas

Proposição A. *Seja G um grupo com $r+1$ órbitas por automorfismos e $\mathcal{R}$ um anel booleano com $m+1$ órbitas por automorfismos. Então a potência booleana $G^{\mathcal{R}}$ tem no máximo*

$$1 + mC_1^r + m^3C_2^r + \cdots + m^{r+1}C_r^r$$

órbitas por automorfismos, onde $C_k^r = \binom{r}{k}$.

Os exemplos encontrados de potências boolenas residualmente finitas com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos são periódicos. O próximo resultado confirma esse fato para grupos residualmente finitos.

Teorema B. *Seja G um grupo residualmente finito com finitas órbitas por automorfismos. Então G possui expoente finito. Além disso, G é localmente finito.*

É importante observar que um grupo finitamente gerado e localmente graduado não é, em geral, residualmente finito. Por exemplo, o grupo $S_3 \wr \mathbb{Z}$ é localmente graduado, mas não é residualmente finito. Em [20], Denis Osin construiu um grupo 2-gerado livre de torção com apenas duas órbitas por automorfismos e, como mencionado, esse exemplo fornece uma resposta afirmativa à conhecida questão sobre a existência de um grupo finitamente

gerado G, distinto do C_2, no qual todos os elementos não triviais são conjugados. Para grupos localmente graduados, porém, tal comportamento não se verifica: um grupo infinito localmente graduado finitamente gerado não pode ter um número finito de órbitas por automorfismos.

Teorema C. *Se G é um grupo localmente graduado, finitamente gerado e com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos, então G é finito.*

Nos grupos nilpotentes radicáveis, estudamos o $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ do grupo nilpotente livre $N_{r,c}$, r-gerado de classe c. Inicialmente provamos a seguinte proposição.

Proposição D. *Seja $G = N_{r,c}^{\mathbb{Q}} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle^{\mathbb{Q}}$, onde $N_{r,c} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle$. Se os elementos $X_1 = x_1^{\alpha_{11}} \cdots x_r^{\alpha_{1r}} g_1$, ..., $X_r = x_1^{\alpha_{r1}} \cdots x_r^{\alpha_{rr}} g_r$, com $g_1, \ldots, g_r \in G'$ são tais que*

$$\{(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1r}), \cdots, (\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rr})\}$$

é uma base do espaço vetorial $\mathbb{Q}^r$ sobre $\mathbb{Q}$, então a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi : x_1 & \longmapsto & X_1 \\ x_2 & \longmapsto & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & \longmapsto & X_r \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G. Por outro lado, para todo automorfismo φ de G, existem elementos $X_1 = x_1^{\alpha_{11}} \cdots x_r^{\alpha_{1r}} g_1$, ..., $X_r = x_1^{\alpha_{r1}} \cdots x_r^{\alpha_{rr}} g_r$, com $g_1, \ldots, g_r \in G'$ e $\{(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1r}), \cdots, (\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rr})\}$ uma base de $\mathbb{Q}^r$ tais que $x_i^{\varphi} = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Usando o resultado anterior provamos

Teorema E. *Seja G o $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de um grupo nilpotente livre não abeliano r-gerado de classe c. Então G possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos se, e somente se, o grupo G é isomorfo a $N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ com $r \geq 2$ ou isomorfo a $N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$.*

Nas próximas linhas, descreveremos a estrutura deste trabalho, para além dessa introdução. Iniciaremos o Capítulo 1 com o estudo de órbitas por automorfismos. Em seguida, apresentaremos a construção do $\mathbb{Q}$-completamento de um grupo nilpotente livre de torção finitamente gerado, bem como os conceitos de grupos residualmente finitos, grupos localmente finitos e a largura do grupo $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$.

No Capítulo 2, apresentaremos o conceito de potência boolena. Demonstraremos a Proposição A e iremos calcular o número exato de órbitas por automorfismos de alguns exemplos não triviais de potência booleanas. Demonstraremos também os Teoremas B e C. Além disso, provaremos um resultado que estabelece que, se G for um grupo infinito caracteristicamente simples e residualmente finito, com $\omega(G) \leqslant 7$, então G será um p-grupo abeliano elementar. Por fim, no Capítulo 3, com referência a Proposição D, determinaremos todos os $\mathbb{Q}$-completamentos de Mal'cev de grupos nilpotentes livres de posto finito que possuem número finito de órbitas por automorfismos, provando assim o resultado principal do capítulo, o Teorema E.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos necessários para o desenvolvimento desse estudo. Assumiremos conceitos básicos da teoria de grupos como conhecidos, podendo serem encontrados, por exemplo em [21].

1.1 Órbitas por automorfismos

Sejam G um grupo e $\mathrm{Aut}(G)$ seu grupo de automorfismos. Para um elemento g em G, a órbita $g^{\mathrm{Aut}(G)}$ sob a ação dos automorfismos de G é definida por

$$g^{\mathrm{Aut}(G)} = \{g^{\varphi} \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\}.$$

Dizemos também que g e h são $\mathrm{Aut}(G)$-conjugados, quando g e h pertencem à mesma órbita, isto é, quando existe φ em $\mathrm{Aut}(G)$ tal que $g^{\varphi} = h$. Como se trata de uma ação, o grupo G é particionado em órbitas disjuntas sob a ação de $\mathrm{Aut}(G)$. Isso significa que existe um conjunto de índices I e elementos g_i em G, para i em I, tais que

$$G = \dot{\bigcup}_{i \in I} g_i^{\mathrm{Aut}(G)}.$$

Se o conjunto de índices I é finito, então existem um inteiro positivo n e elementos $g_1, \ldots, g_n$ em G tais que

$$G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} g_i^{\mathrm{Aut}(G)}.$$

Nesse caso, diremos que $\mathrm{Aut}(G)$ age sobre G com uma quantidade finita de órbitas, e denotaremos esse número por $\omega(G)$. Caso contrário, diremos que a ação de $\mathrm{Aut}(G)$ em G não possui uma quantidade finita de órbitas.

Observação 1.1.1. *O espectro de um grupo é o conjunto de ordens de seus elementos. Denotaremos por* $\mathrm{spec}(G)$ *o espectro do grupo G. Note que* $\mathrm{spec}(G) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. *Por exemplo,* $\mathrm{spec}(A_5) = \{1,2,3,5\}$ *e* $\mathrm{spec}(A_6) = \{1,2,3,4,5\}$. *Dado um grupo G, como automorfismos preservam ordens, temos que*

$$\omega(G) \geqslant |\mathrm{spec}(G)|.$$

Um subgrupo H é chamado característico em G se $H^{\varphi} \leq H$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Um grupo G é chamado caracteristicamente simples se os únicos subgrupos característicos de G são o grupo trivial e o próprio G. Se H for um subgrupo característico de G, então, dado

$$C_{\mathrm{Aut}(G)}(H) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid h^{\varphi} = h, \forall\, h \in H\},$$

$\mathrm{Aut}(G)$ induz em H o grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(G)|_H = \mathrm{Aut}(G)/C_{\mathrm{Aut}(G)}(H)$. Similarmente, o grupo $\mathrm{Aut}(G)$ induz em $\overline{G} = G/H$ o grupo de automorfismos

$$\overline{\mathrm{Aut}(G)} = \mathrm{Aut}(G)/C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/H).$$

Subgrupos característicos de G são uniões de órbitas da ação de $\mathrm{Aut}(G)$ sobre G, conforme estabelece o resultado a seguir.

Proposição 1.1.2 ([13], pág. 2802)**.** *Sejam G um grupo,* $\mathrm{Aut}(G)$ *o grupo de automorfismos de G e H um subgrupo característico de G. Suponha que G seja a união de um número finito n de órbitas por automorfismos. Nesse caso, temos*

(a) O subgrupo H é uma união de um número finito n_0 *de órbitas por automorfismos, e se* $H < G$, *temos* $n_0 < n$.

(b) O quociente $\overline{G} = G/H$ *é uma união de um número finito* $\bar{n}$ *de órbitas por automorfismos, e se* $\{1\} < H$ *temos* $\bar{n} < n$ *;*

Exemplo 1.1.3. *Se G é isomorfo ao grupo aditivo de um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial V, então* $\omega(G) = 2$.

Demonstração. Sejam v e u dois vetores não nulos em V. Considere duas bases B_1 e B_2 de V tais que $v \in B_1$ e $u \in B_2$. Então existe um isomorfismo $T : V \to V$ tal que $(B_1)T = B_2$ e $(v)T = u$. Como $T \in Aut(G)$, segue que $\omega(G) = 2$. □

Esse exemplo mostra, em particular, que um grupo abeliano divisível livre de torção possui exatamente duas órbitas por automorfismos.

Definição 1.1.4. *Um grupo G é dito radicável se para todos* $g \in G$ *e* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *existe* $h \in G$ *tal que* $g = h^n$. *Se G for abeliano e radicável, então G é chamado divisível.*

Para cada primo p, o grupo abeliano infinito

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \langle x_1, x_2, \cdots \mid px_1 = 0, px_{n+1} = px_n, \text{ para } n = 1, 2, \cdots \rangle$$

é chamado de p-grupo de Prüfer (ou p-grupo quase-cíclico).

Proposição 1.1.5. *Um grupo abeliano divisível G tem uma quantidade finita de órbitas por automorfismos se, e somente se, é livre de torção.*

Demonstração. Se G é divisível, então G é uma soma direta de cópias isomórficas de $\mathbb{Q}$ e grupos quase-cíclicos ([21], pág. 97). Se G possuir um fator quase-cíclico, então o conjunto $\text{spec}(G)$ é infinito. Logo, $\omega(G)$ é também infinito. Por outro lado, se G é livre de torção, então G é isomorfo a um grupo aditivo de um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial. Pelo exemplo 1.1.3, G possui duas órbitas por automorfismos. □

Apresentamos a seguir um exemplo de um grupo radicável G com $\omega(G)$ finito.

Exemplo 1.1.6. *([10], 2025). Seja*

$$G = UT_3(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q} \right\} \leqslant GL_3(\mathbb{Q}).$$

O grupo G é nilpotente de classe dois. Mostraremos que $\omega(G)$ é finito.

Demonstração. Note que $UT_3(\mathbb{Q})$ é subgrupo normal de $T_3(\mathbb{Q})$. Observamos que

$$Z(G) = G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{Q} \right\} \simeq (\mathbb{Q}, +).$$

Sejam $x, y \in G' \setminus \{1\}$, com

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere a matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Então, $x^A = y$, o que mostra que todos os elementos não triviais de G' pertencem à mesma órbita por automorfismos. Assim, $G' \setminus \{1\}$ constitui uma única órbita.

Agora, consideramos um elemento $x \in G \setminus G'$. Então,

$$x = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com a, b não ambos nulos. Analisaremos os possíveis casos.

Caso 1: $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$.
Tomando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & -ca^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Caso 2: $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$.
Com

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^{A_1} = B.$$

Caso 3: $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.
Com

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & cb^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} \end{pmatrix}, \quad x^{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B'.$$

Caso 4: $a = 0$, $b \neq 0$, $c = 0$.
Com

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^{A_3} = B'.$$

Caso 5: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.
Com

$$A_4 = \begin{pmatrix} ab & a+c & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^{A_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B''.$$

Caso 6: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$.
Conjugando x pela matriz

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^{A_5} = \begin{pmatrix} 1 & ab & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1.$$

Em seguida, conjugamos B_1 pela matriz

$$A_6 = \begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1^{A_6} = B''.$$

Assim, qualquer elemento $x \in G \setminus G'$ é conjugado a uma das três matrizes:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim $\omega(G)$ é no máximo 5. Mais a frente, forneceremos uma demonstração alternativa que confirma que $\omega(G) = 3$. □

Finalizaremos esta seção com um exemplo que ilustra um FC-grupo com expoente finito que não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Um elemento g de um grupo G é chamado de FC-elemento se ele possui um número finito de conjugados em G, isto é, se o índice $[G : C_G(g)]$ é finito, onde $C_G(g) = \{h \in G \mid g^h = g\}$. O conjunto de todos os $FC-$ elementos de G é denotado por $\hat{Z}(G)$. Se cada elemento de G for um FC-elemento, então G é chamado de $FC-$grupo, em particular, $G = \hat{Z}(G)$. Se existir um inteiro positivo d tal que $[G : C_G(g)] \leq d$ para todo $g \in G$, então o grupo G é chamado de BFC-grupo, e existe uma cota comum para o tamanho das classes de conjugação em G. Além disso, por ([21](B.H. Neumann) 14.5.11, pág. 444) um grupo G é um BFC-grupo se, e somente se, o subgrupo comutador G' é finito .

Exemplo 1.1.7. *Seja $G = \bigoplus_I H$, com H grupo finito e não abeliano e I um conjunto infinito. Então G não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos.*

Demonstração. Note que G é um $FC-$grupo. Suponha, por absurdo, que G possua uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. De acordo com ([7], pág. 2), tal hipótese

implica que G é um BFC-grupo. Em particular, G' é finito. Mas,

$$G' = \bigoplus_I H'.$$

Assim, G' não é finito. Portanto G não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. □

Em particular, $G = \bigoplus_{\mathbb{N}} S_3$ não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Para uma discussão mais detalhada sobre órbitas por automorfismos em $FC-$grupos, veja [7].

1.2 Grupos localmente graduados

Grupos Localmente Graduados foram introduzidos por Chernikov em 1970, [17]. Esta seção tem por objetivo estudar os grupos localmente graduados.

Definição 1.2.1. *Um grupo G é chamado localmente graduado se todo subgrupo não trivial finitamente gerado em G possui um subgrupo próprio de índice finito.*

Apresentamos a seguir algumas propriedades e exemplos de grupos localmente graduados.

Proposição 1.2.2 ([17], Corolário 1, pág. 1949)**.** *A classe dos grupos localmente graduados é fechada sob a formação de subgrupos, extensões e produtos cartesianos.*

Exemplo 1.2.3. *Grupos localmente finitos, grupos residualmente finitos são localmente graduados. Se G é uma extensão de um grupo nilpotente por um grupo localmente finito, então, pela Proposição 1.2.2, G é um grupo localmente graduado.*

O Exemplo 1.2.3 destaca classes específicas de grupos localmente graduados que desempenham um papel relevante para os objetivos deste trabalho:

- O $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de um grupo nilpotente livre de torção finitamente gerado;
- Os grupos residualmente finitos;
- Os grupos localmente finitos.

1.2.1 $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de um grupo nilpotente livre de torção finitamente gerado

Esta subseção é dedicada à construção do $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de um grupo nilpotente livre de torção finitamente gerado. Salvo indicação em contrário, todo o conteúdo desta subseção é baseado em [8] e todo $\mathbb{Q}-$completamento de Mal'cev é uma adaptação da mesma referência.

Inicialmente apresentamos alguns resultados fundamentais de comutadores.

Definição 1.2.4. *Sejam G um grupo e $x_1, x_2, \ldots$ elementos de G. O comutador de x_1 e x_2 é o elemento*

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1^{-1} x_1^{x_2} \in G.$$

Mais geralmente, um comutador de comprimento $n \geqslant 2$ é definido recursivamente por

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n],$$

e por convenção $[x_1] = x_1$.

Lema 1.2.5 ([8]. Lema 1.4, pág. 07)**.** *Sejam x, y e z elementos de um grupo G. Então, valem:*

(i) $xy = yx[x,y]$.

(ii) $x^y = x[x,y]$.

(iii) $[x,y] = [y,x]^{-1}$.

(iv) $[x,y]^z = [x^z, y^z]$.

(v) $[xy,z] = [x,z]^y [y,z] = [x,z][x,z,y][y,z]$.

(vi) $[x,yz] = [x,z][x,y]^z = [x,z][x,y][x,y,z]$.

(vii) $[x,y^{-1}] = ([x,y]^{y^{-1}})^{-1}$.

(viii) $[x^{-1},y] = ([x,y]^{x^{-1}})^{-1}$.

Lema 1.2.6 ([8]. A identidade de Hall-Witt. Lema 1.5, , pág. 08)**.** *Se x, y e z são elementos de um grupo, então*

$$[x,y^{-1},z]^y [y,z^{-1},x]^z [z,x^{-1},y]^x = 1$$

e

$$[x,y,z^x][z,x,y^z][y,z,x^y] = 1$$

Lema 1.2.7 ([8]. P. Hall. Lema 1.12, pág. 19)**.** *Seja G um grupo com subgrupos H e K, e suponha que $[H,K] \leq Z(G)$. Para quaisquer $a \in H$ e $b \in K$, as funções*

$$\varphi_a : K \to Z(G) \text{ definida por } k^{\varphi_a} = [a,k]$$

e

$$\varphi_b : H \to Z(G) \text{ definida por } h^{\varphi_b} = [h,b]$$

são homomorfismos.

Demonstração. Suponhamos $k_1, k_2 \in K$. Pelo lema 1.2.5 (*vi*),

$$[a,k_1k_2] = [a,k_2][a,k_1]^{k_2} = [a,k_2][a,k_1].$$

Portanto, φ_a é um homomorfismo. De maneira análoga, φ_b é um homomorfismo. □

Lema 1.2.8 ([8]. Lema 1.13, pág. 19)**.** *Seja G um grupo. Se $[g,h] \in Z(G)$ para $g,h \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$, então*

$$[g^n,h] = [g,h]^n = [g,h^n].$$

Demonstração. O resultado é óbvio para $n = 0$ e $n = 1$. Pelo Lema 1.2.7, o resultado é válido para $n \geq 2$. Suponha que $n < 0$. Como $[g,h]$ é central, então $[g,h]^{-n}$ também é. Isso junto com o lema 1.2.5 (*viii*), implica

$$\begin{aligned}[g^n,h] = [(g^{-n})^{-1},h] &= \left([g^{-n},h]^{g^n}\right)^{-1} \\ &= \left(([g,h]^{-n})^{g^n}\right)^{-1} = \left([g,h]^{-n}\right)^{-1} \\ &= [g,h]^n.\end{aligned}$$

De forma semelhante, temos que $[g,h^n] = [g,h]^n$. □

Passaremos agora ao estudo de comutadores básicos que serão úteis para a construção da base de Mal'cev.

Definição 1.2.9. *Seja G um grupo gerado por um conjunto $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. O peso de um comutador c_j, denotado por $w(c_j)$ é definido da seguinte maneira:*

- *Os comutadores de peso um são os elementos de X, ou seja, $c_1 = x_1, c_2 = x_2, \cdots, c_n = x_n$.*

- *Se $i \neq j$ e c_i e c_j são comutadores de pesos $w(c_i)$ e $w(c_j)$ respectivamente, então $[c_i, c_j]$ é um comutador de peso $w(c_i) + w(c_j)$.*

Todo comutador com peso atribuído é construído a partir dos elementos do conjunto gerador, sem envolver seus inversos. Por exemplo, se $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ então $[x_1, x_2, x_3]$ é um comutador de peso 3, enquanto $[x_1^{-1}, x_2]$ não possui peso atribuído.

É bem conhecido que os comutadores podem ser ordenados de acordo com seu peso. Assim,

- Os comutadores $c_1, c_2, \cdots, c_k$ são ordenados conforme seus subscritos: $c_1 = x_1, c_2 = x_2, \cdots, c_n = x_n$.
- Após c_n, os comutadores $c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots$ são listados em ordem crescente de peso, e, entre os comutadores de mesmo peso, adotamos uma ordenação arbitrária.

Dado que X é finito, existe uma quantidade finita de comutadores para um dado peso, o que garante que essa ordenação seja bem definida. Os comutadores com peso que aparecem na forma organizada de uma palavra positiva são chamados comutadores básicos. Formalmente apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.2.10. *Seja G um grupo gerado por $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Um comutador básico b_j de peso $w(b_j)$ é definido da seguinte maneira:*

1 *Os elementos de X são os comutadores básicos de peso um. Impomos uma ordem arbitrária sobre eles e os renomeamos como $b_1, b_2, \cdots, b_k$, onde $b_i < b_j$ se $i < j$.*

2 *Suponha que já tenhamos definido e ordenado os comutadores básicos de peso menor que $l > 1$. Os comutadores básicos de peso l são $[b_i, b_j]$, onde:*

   i) b_i e b_j são comutadores básicos e $w(b_i) + w(b_j) = l$,

   ii) $b_i > b_j$, e

   iii) se $b_i = [b_s, b_t]$, então $b_j \geq b_t$.

3 *Comutadores de peso l vêm depois de todos os comutadores de peso menor que l e são ordenados arbitrariamente em relação uns aos outros.*

A sequência $b_1, b_2, \cdots$ é chamada de sequência básica de comutadores básicos em X.

Exemplo 1.2.11 ([8]. Exemplo 3.1, pág. 78-79)**.** *Seja $G = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$. Suponhamos que os geradores estejam ordenados como*

$$x_1 < x_2 < x_3$$

esses são justamente os comutadores básicos de peso 1. *Os comutadores de peso* 2 *são*

$$[x_2,x_1],[x_3,x_1] \ \ e \ \ [x_3,x_2].$$

Esses comutadores são ordenados como

$$[x_2,x_1] < [x_3,x_1] < [x_3,x_2].$$

Agora, os comutadores de peso 3 *são*

$$[x_2,x_1,x_1],[x_2,x_1,x_2],[x_2,x_1,x_3],[x_3,x_1,x_1],[x_3,x_1,x_2],[x_3,x_1,x_3],[x_3,x_2,x_2] \ e \ [x_3,x_2,x_3].$$

Observamos que $[x_3,x_2,x_1]$ *não ocorre como um comutador básico, pois pela Definição 1.2.10 em iii),* $b_t = x_2$ *e* $b_j = x_1$*, mas* $x_1 \not\geq x_2$*. Os comutadores básicos de peso* 3 *são ordenados como*

$$[x_2,x_1,x_1] < [x_2,x_1,x_2] < [x_2,x_1,x_3] < [x_3,x_1,x_1] < [x_3,x_1,x_2] < [x_3,x_1,x_3] < [x_3,x_2,x_2] < [x_3,x_2,x_3].$$

Os comutadores de peso 4 *são:*

$$\begin{aligned}&[x_2,x_1,x_1,x_1],[x_2,x_1,x_1,x_2],[x_2,x_1,x_1,x_3],[x_2,x_1,x_2,x_2],[x_2,x_1,x_2,x_3],\\&[x_2,x_1,x_3,x_3],[x_3,x_1,x_1,x_1],[x_3,x_1,x_1,x_2],[x_3,x_1,x_1,x_3],[x_3,x_1,x_2,x_2],\\&[x_3,x_1,x_2,x_3],[x_3,x_1,x_3,x_3],[x_3,x_2,x_2,x_2],[x_3,x_2,x_2,x_3],[x_3,x_2,x_3,x_3],\\&[[x_3,x_1],[x_2,x_1]],[[x_3,x_2],[x_2,x_1]] \ e \ [[x_3,x_2],[x_3,x_1]].\end{aligned}$$

É importante observar que, mesmo quando a palavra não é necessariamente positiva, podemos, ainda organizar os comutadores, como será detalhado a seguir.
Seja $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ um conjunto gerador de um grupo G e suponha que w seja uma palavra qualquer em $X \cup X^{-1}$, onde $X^{-1} = \{x_1^{-1},x_2^{-1},\cdots,x_k^{-1}\}$. Suponha adicionalmente que a e b sejam comutadores básicos, e que w contenha uma das seguintes expressões

$$b^{-1}a, \quad ba^{-1} \quad \text{ou} \quad b^{-1}a^{-1}.$$

Essas expressões podem ser organizados de tal forma que apenas comutadores básicos ou seus inversos apareçam no produto resultante.

- Consideramos primeiramente a expressão $b^{-1}a$.

$$b^{-1}a = a(a^{-1}b^{-1}ab)b^{-1} = a[a,b]b^{-1} = a[b,a]^{-1}b^{-1}.$$

Onde $a, b, [b,a]$ são comutadores básicos.

- Agora, consideramos ba^{-1}.

Usando a propriedade $ab = ba[b,a]$ temos que $ba^{-1} = a^{-1}b[b,a^{-1}]$. Note que a e b são comutadores básicos, enquanto $[b,a^{-1}]$ não, pois contém a^{-1}. Observe que:

$$1 = [b,1] = [b,aa^{-1}] = [b,a^{-1}][b,a][b,a,a^{-1}].$$

Assim,

$$[b,a^{-1}] = [b,a,a^{-1}]^{-1}[b,a]^{-1}. \tag{1.1}$$

$[b,a]$ é um comutador básico, enquanto $[b,a,a^{-1}]$ não. Podemos repetir o processo

$$1 = [b,a,1] = [b,a,aa^{-1}] = [b,a,a^{-1}][b,a,a][b,a,a,a^{-1}]$$

Então,

$$[b,a,a^{-1}] = [b,a,a,a^{-1}]^{-1}[b,a,a]^{-1}.$$

Novamente, $[b,a,a]$ é um comutador básico, enquanto $[b,a,a,a^{-1}]$ não. Note que, esse procedimento pode ser repetido infinitas vezes, pois a cada passo surge um comutador envolvendo a^{-1} . No entanto, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe um $s \in \mathbb{N}$ tal que o comutador $[b_s, a^{-1}]$ possui peso $n+1$ ou mais. Em outras palavras, $[b_s, a^{-1}] \in \gamma_{n+1}G$, o que significa que, módulo $\gamma_{n+1}G$ o procedimento chega ao fim. De forma generalizada, definindo $b_0 = b$ e recursivamente $b_{i+1} = [b_i, a]$, como a e b são comutadores básicos, então b_i também é para cada $i \geq 0$. Conforme cálculos anteriores,

$$[b_i, a^{-1}] = [b_{i+1}, a^{-1}]^{-1}[b_i, a]^{-1} = [b_{i+1}, a^{-1}]^{-1}b_{i+1}^{-1} \tag{1.2}$$

E então,

$$[b_i, a^{-1}]^{-1} = b_{i+1}[b_{i+1}, a^{-1}]^{-1}b_{i+1}^{-1}. \tag{1.3}$$

Usando (1.2) e (1.3) repetidas vezes, chegamos a

$$[b, a^{-1}] = b_2b_4b_6\cdots[b_s, a^{-1}]\cdots b_5^{-1}b_3^{-1}b_1^{-1} \mod \gamma_{n+1}G.$$

Onde apenas um número finito de comutadores básicos b_i aparecem. Assim,

$$ba^{-1} = a^{-1}b[b,a^{-1}] = a^{-1}bb_2b_4b_6\cdots b_5^{-1}b_3^{-1}b_1^{-1} \mod \gamma_{n+1}G.$$

- Por fim, consideramos a expressão $b^{-1}a^{-1}$. Note que,

$$b^{-1}a^{-1} = a^{-1}(ab^{-1}a^{-1}) = a^{-1}(aba^{-1})^{-1}.$$

do passo anterior obtemos

$$aba^{-1} = bb_2b_4\cdots b_5^{-1}b_3^{-1}b_1^{-1} \mod \gamma_{n+1}G.$$

Portanto, $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b_1b_3b_5\cdots b_4^{-1}b_2^{-1}b^{-1} \mod \gamma_{n+1}G$.

Como consequência da discussão acima, o seguinte resultado é conhecido.

Teorema 1.2.12 ([8]. P.Hall. Teorema 3.1, pág. 82)**.** *Seja G um grupo finitamente gerado com conjunto gerador $X = \{x_1,\cdots,x_k\}$, e escolha $n \in \mathbb{N}$. O grupo abeliano $\gamma_nG/\gamma_{n+1}G$ é gerado, módulo $\gamma_{n+1}G$ pelos comutadores básicos de peso n. Além disso, cada elemento de G pode ser expresso (não necessariamente única) na forma*

$$b_1^{e_1}b_2^{e_2}\cdots b_l^{e_l} \ mod\ \gamma_{n+1}G,$$

onde $e_1,\cdots,e_l$ são inteiros e $b_1,\cdots b_l$ são comutadores básicos de pesos $1,2,\cdots,n$.

Corolário 1.2.13 ([8]. Corolário 3.1, pág. 82)**.** *Se G é um grupo finitamente gerado por X, então G é nilpotente se e somente se todos, exceto um número finito de comutadores básicos em X, forem iguais à identidade.*

O último corolário estabelece que, se G é um grupo nilpotente de classe c, gerado por um conjunto finito X, então cada elemento de G pode ser escrito (embora não necessariamente única) na forma $b_1^{n_1}\cdots b_t^{n_t}$ onde $n_1,\cdots,n_t$ são inteiros, e $b_1,\cdots,b_t$ são comutadores básicos em X de pesos $1,2,\cdots,c$. Além disso, o resultado a seguir, relacionado a grupos livres, complementa essa perspectiva.

Teorema 1.2.14 ([8]. Teorema 3.5, pág. 99)**.** *Seja F um grupo livre, livremente gerado por $X = \{x_1,\cdots,x_k\}$. Suponha que $c_1,c_2,\cdots$ seja uma sequência de comutadores básicos em X e escolha $n \in \mathbb{N}$. Os comutadores básicos de peso n, módulo $\gamma_{n+1}(F)$, formam uma base para o grupo abeliano livre $\gamma_n(F)/\gamma_{n+1}(F)$. Além disso, cada elemento de F pode ser expresso unicamente na forma*

$$c_1^{e_1}c_2^{e_2}\cdots c_t^{e_t} \mod \gamma_{n+1}(F),$$

onde $e_1,\cdots,e_t$ são inteiros e $c_1,\cdots,c_t$ são comutadores básicos de pesos $1,2,\cdots,n$.

Exemplo 1.2.15 ([8]. Exemplo 3.8, pág. 100)**.** *Seja $F = F(a,b,c)$ um grupo livre, livremente gerado por a,b e c, e seja $aba^2ca^{-1}b \in F$. Considere $n = 1$ no Teorema* (1.2.12)*. Qualquer*

comutador básico de peso maior ou igual a 2 *pertence a* $\gamma_2(F)$. *Note que* $F/\gamma_2(F)$ *é abeliano, assim*

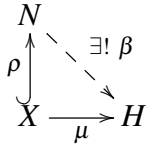
$$aba^2ca^{-1}b = a^2b^2c \mod \gamma_2(F).$$

Agora, considere $n = 2$. *Neste caso, os comutadores básicos de peso maior que* 2 *estão contidos em* $\gamma_3(F)$ *e os comutadores de peso* 2 *pertencem ao centro de* F. *Isso, em conjunto com (1.1):*

$$\begin{aligned}
aba^2ca^{-1}b &= a\,\underline{ba}\,aca^{-1}b \mod \gamma_3(F)\\
&= a^2b\,\underline{[b,a]a}\,ca^{-1}b \mod \gamma_3(F)\\
&= a^2\,\underline{ba}\,[b,a]ca^{-1}b \mod \gamma_3(F)\\
&= a^3b[b,a][b,a]\,\underline{ca^{-1}}\,b \mod \gamma_3(F)\\
&= a^3b[b,a]\,\underline{[b,a]a^{-1}}\,c[c,a^{-1}]b \mod \gamma_3(F)\\
&= a^3b\,\underline{[b,a]a^{-1}}\,[b,a]c[c,a]^{-1}b \mod \gamma_3(F)\\
&= a^3\,\underline{ba^{-1}}\,[b,a][b,a]c[c,a]^{-1}b \mod \gamma_3(F)\\
&= a^2b[b,a]c\,\underline{[c,a]^{-1}b} \mod \gamma_3(F)\\
&= a^2b[b,a]\,\underline{cb}\,[c,a]^{-1} \mod \gamma_3(F)\\
&= a^2b\,\underline{[b,a]b}\,c[c,b][c,a]^{-1} \mod \gamma_3(F)\\
&= a^2b^2\,\underline{[b,a]c}\,[c,b][c,a]^{-1} \mod \gamma_3(F)\\
&= a^2b^2c[b,a][c,b][c,a]^{-1} \mod \gamma_3(F).
\end{aligned}$$

Se G é um grupo nilpotente de classe no máximo c, então, $[g_1, g_2 \ldots, g_{c+1}] = 1$ para quaisquer $g_1, g_2, \ldots, g_{c+1} \in G$. Além disso, se G satisfaz apenas as identidades decorrentes dos axiomas de grupos e a identidade $[g_1, g_2 \ldots, g_{c+1}] = 1$, então G é denominado grupo nilpotente livre de classe no máximo c. Formalmente:

Definição 1.2.16. *Seja* N *um grupo nilpotente de classe* c. *Suponha que* X *seja um conjunto não vazio e* $\rho : X \longrightarrow N$ *seja uma função injetiva. O grupo* $N = (N, \rho)$ *é chamado nilpotente livre sobre* X *se para cada função* $\mu : X \longrightarrow H$, *onde* H *é um grupo nilpotente de classe* c, *então existe um único homomorfismo* $\beta : N \longrightarrow H$ *tal que* $\mu = \rho \circ \beta$.



Isto é, o diagrama comuta. Se um grupo nilpotente de classe c é nilpotente livre sobre algum conjunto não vazio, então chamamos de grupo nilpotente livre. Se $X \subset N$ e ρ é a identidade, então N é livremente gerado por X.

Uma maneira equivalente de obter um grupo nilpotente livre é usando a seguinte definição.

Definição 1.2.17. *Seja F um grupo livre, gerado por um conjunto não vazio X. E considere $N_c = F/\gamma_{c+1}(F)$, onde $\gamma_{c+1}(F)$ é o $(c+1)-$ésimo termo da série central inferior de F, e c é um inteiro positivo. Então N_c é um grupo nilpotente livre de classe c e posto a cardinalidade de X. Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ então denotaremos N_c por $N_{r,c}$.*

Observação 1.2.18 ([8]. Corolário 3.4, pág. 101)**.** *Em $N_{r,c}$ os fatores $\gamma_i(N_{r,c})/\gamma_{i+1}(N_{r,c})$ são grupos abelianos livres, livremente gerado por comutadores básicos em X de peso i, módulo $\gamma_{i+1}(N_{r,c})$, para $i = 1, \cdots, c$. Além disso, se $c_1, \cdots, c_t$ é uma sequência de comutadores básicos de peso no máximo c então cada elemento de $N_{r,c}$ pode ser escrito unicamente como $c_1^{e_1} \cdots c_t^{e_t}$, onde $e_1, \cdots, e_t$ são inteiros e o grupo $\langle c_i \rangle$ é cíclico infinito para cada $i = 1, \cdots, t$.*

Todo grupo nilpotente finitamente gerado pode ser construído por meio de uma sequência finita de extensões cíclicas. Essa descrição serve de motivação para a definição que apresentamos a seguir.

Definição 1.2.19. *Um grupo G é chamado policíclico se tem uma série subnormal*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G \tag{1.4}$$

tal que G_{i+1}/G_i é cíclico para $0 \leq i \leq n-1$. A Série (1.4) é chamada de Série policíclica para G. Além disso, se cada G_{i+1}/G_i é infinito, então G é chamado cíclico poli-infinito e a Série (1.4) é chamada de Série cíclica poli-infinita.

Teorema 1.2.20 ([8]. Teorema 4.2)**.** *Todo subgrupo e todo grupo quociente de um grupo policíclico é policíclico.*

Teorema 1.2.21 ([8]. Teorema 4.5)**.** *Todo grupo nilpotente finitamente gerado e livre de torção possui uma série central poli-infinita.*

Observação 1.2.22 ([8], pág. 115)**.** *Todo grupo policíclico é finitamente gerado. No entanto, nem todo grupo policíclico é um grupo nilpotente. Por exemplo S_3 é um grupo policíclico, admitindo a série policíclica $1 \lhd A_3 \lhd S_3$ e S_3 mas não é nilpotente.*

Teorema 1.2.23 ([8]. K.A.Hirsch. Teorema 4.6, pág. 115)**.** *Se G é um grupo policíclico, então o número de fatores cíclicos infinitos em qualquer série policíclica de G é um invariante de G.*

Definição 1.2.24. *O número de fatores cíclicos infinitos em qualquer série policíclica de um grupo policíclico G é chamado de comprimento de Hirsch ou rank livre de torção de G e é denotado por* $h(G)$.

Apresentaremos a seguir, uma construção da base de Mal'cev para grupos nilpotentes finitamente gerados e livre de torção. Seja G um grupo nilpotente, livre de torção, finitamente gerado. Considere uma série central e poli-infinita de G com comprimento de Hirsch n,

$$G = G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_{n+1} = 1.$$

Como cada fator dessa série é cíclico infinito, podemos escolher $u_i \in G_i$ de modo que $G_i = \langle G_{i+1}, u_i \rangle$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. Assim, cada elemento de G pode ser expresso unicamente em forma normal $u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Chamamos o conjunto $u = \{u_1, \cdots, u_n\}$ associado à série poli-infinita de G de base de Mal'cev para G. Diremos que o elemento $u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}$ tem coordenadas de Mal'cev $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ com respeito a u. Para simplificar notação, escreveremos algumas vezes $\bar{u}^{\bar{\alpha}}$ em vez de $u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}$.

Observação 1.2.25 ([8]. Observação 4.4, pág. 116)**.** *Por construção, para cada* $j = 0, 1, \cdots, n-1$*, cada elemento de* G_{j+1}*, na Definição 1.2.24, pode ser expresso na forma normal*

$$u_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots u_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, como $[G_i, G_j] \leq G_k$ *para algum* $k \geq 1 + max\{i, j\}$*, onde* $1 \leq i, j \leq n$*, temos*

$$[u_i^{\alpha_i}, u_j^{\alpha_j}] = \prod_{m=k}^{n} u_m^{\alpha_m}.$$

Um caso particularmente interessante ocorre quando $N_{r,c}$ é um grupo nilpotente livre. Nesse contexto, o seguinte resultado é conhecido.

Teorema 1.2.26 ([8]. Teorema 4.8, pág. 117)**.** *Em* $N_{r,c}$ *qualquer sequência básica de comutadores básicos em X de peso no máximo c forma uma base de Mal'cev para* $N_{r,c}$.

Demonstração. Denote $G = N_{r,c}$. Pelo Colorário 1.2.18, cada $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ é abeliano livre livremente gerado por comutadores básicos de peso i, módulo $\gamma_{i+1}(G)$. Um refinamento da série central de G leva a uma série poli-infinita e central

$$G = G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_{t+1} = 1$$

tal que G_j/G_{j+1} é gerado pelo $j-$ésimo comutador básico, módulo G_{j+1}, para cada $j = 1, 2, \cdots, t$. □

Exemplo 1.2.27 ([8]. Exemplo 4.2, pág. 117)**.** *Seja $N_{2,2}$ um grupo nilpotente livre de classe 2, livremente gerado pelo conjunto $X = \{x_1, x_2\}$. Uma sequência de comutadores básicos em X é*

$$x_1,\ x_2,\ [x_2, x_1].$$

Pelo Teorema 1.2.26, esses comutadores formam uma base de Mal'cev para $N_{2,2}$. Então, cada elemento de $N_{2,2}$ pode ser escrito na forma normal única

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} [x_2, x_1]^{n_3}$$

para alguns inteiros n_1, n_2, n_3.

Exemplo 1.2.28 ([8]. Exemplo 4.3, pág. 117)**.** *Seja $N_{2,3}$ um grupo nilpotente livre de classe 3, livremente gerado pelo conjunto $X = \{x_1, x_2\}$. Uma sequência de comutadores básicos em X é*

$$x_1, x_2, [x_2, x_1], [x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2].$$

Pelo Teorema 1.2.26, esses comutadores formam uma base de Mal'cev para $N_{2,3}$. Cada elemento de $N_{2,3}$ pode ser escrito unicamente como

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} [x_2, x_1]^{n_3} [x_2, x_1, x_1]^{n_4} [x_2, x_1, x_2]^{n_5}$$

para alguns inteiros $n_1, \ldots, n_5$.

O resultado a seguir introduzirá os polinômios de multiplicação e exponenciação $\bar{f}$ e $\bar{g}$, de um grupo nilpotente finitamente gerado livre de torção G em termos das coordenadas de Mal'cev.

Teorema 1.2.29 ([8]. P. Hall, A. I. Mal'cev. Teorema 4.9, pág. 118)**.** *Seja G um grupo nilpotente de classe c livre de torção finitamente gerado, e seja $\{u_1, \cdots, u_n\}$ uma base de Mal'cev de G com respeito a série cíclica poli-infinita e central*

$$G = G_1 \rhd G_2 \rhd \ \cdots \ \rhd G_{n+1} = 1.$$

Se $x = u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}$ e $y = u_1^{\beta_1} \cdots u_n^{\beta_n}$ para alguns $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$, e se $\lambda \in \mathbb{Z}$, então

$$xy \ = \ u_1^{f_1(\bar{\alpha},\bar{\beta})} \cdots u_n^{f_n(\bar{\alpha},\bar{\beta})} \ \ e \ \ x^{\lambda} \ = \ u_1^{g_1(\bar{\alpha},\lambda)} \cdots u_n^{g_n(\bar{\alpha},\lambda)},$$

onde cada f_i é um polinômio com coeficientes racionais em $2n$ variáveis, e cada g_i é um polinômio com coeficientes racionais em $n+1$ variáveis.

Definição 1.2.30. *Os polinômios $f_i(\bar{\alpha},\ \bar{\beta})$ e $g_i(\bar{\alpha},\ \lambda)$ do teorema anterior são chamados, respectivamente, de polinômios de multiplicação e exponenciação para G com respeito a base de Mal'cev. Na forma vetorial escrevemos*

$$\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = (f_1(\bar{\alpha},\bar{\beta}),\cdots,f_n(\bar{\alpha},\bar{\beta}))$$

e

$$\bar{g}(\bar{\alpha},\lambda) = (g_1(\bar{\alpha},\lambda),\cdots,g_n(\bar{\alpha},\lambda)).$$

Exemplo 1.2.31 ([8]. Exemplo 4.4, pág. 120)**.** *Para um grupo abeliano finitamente gerado livre de torção com base de Mal'cev $\{u_1,\ldots,u_n\}$, temos*

$$(u_1^{\alpha_1}\cdots u_n^{\alpha_n})(u_1^{\beta_1}\cdots u_n^{\beta_n}) = u_1^{\alpha_1+\beta_1}\cdots u_n^{\alpha_n+\beta_n} \quad e$$
$$(u_1^{\alpha_1}\cdots u_n^{\alpha_n})^{\lambda} = u_1^{\alpha_1\lambda}\cdots u_n^{\alpha_n\lambda}$$

para qualquer $\alpha_i,\beta_i,\lambda\in\mathbb{Z}$. Portanto,

$$\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = (\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n)\ \ e$$

$$\bar{g}(\bar{\alpha},\lambda) = (\alpha_1\lambda,\alpha_2\lambda,\ \cdots,\ \alpha_n\lambda).$$

Exemplo 1.2.32 ([8]. Exemplo 4.5, pág. 120-122)**.** *Seja $N_{2,2}$ gerado por $\{x_1,x_2\}$. Defina $x_3=[x_2,x_1]$, e note que $x_3\in Z(G)$. Pelo Teorema 1.2.26, o conjunto $\{x_1,x_2,x_3\}$ é uma base de Mal'cev para $N_{2,2}$. Sejam $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ e $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3}$ elementos de $N_{2,2}$ em sua forma normal com respeito a essa base. Usamos o Lema 1.2.8, o fato de $x_3\in Z(G)$, e a identidade de comutador $xy=yx[x,y]$ para obter o polinômio de multiplicação a seguir*

$$\begin{aligned}
(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})(x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3}) &= x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\alpha_3+\beta_3}\\
&= x_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2}[x_2^{\alpha_2},x_1^{\beta_1}]x_2^{\beta_2}x_3^{\alpha_3+\beta_3}\\
&= x_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2}[x_2,x_1]^{\alpha_2\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\alpha_3+\beta_3}\\
&= x_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2}(x_3)^{\alpha_2\beta_1}x_2^{\beta_2}x_3^{\alpha_3+\beta_3}\\
&= x_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}x_3^{\alpha_3+\beta_3+\alpha_2\beta_1}.
\end{aligned}$$

Então

$$\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = (\alpha_1+\beta_1,\ \ \alpha_2+\beta_2,\ \ \alpha_3+\beta_3+\alpha_2\beta_1).$$

Agora, mostraremos por indução em λ que

$$(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})^{\lambda} = x_1^{\alpha_1\lambda}x_2^{\alpha_2\lambda}x_3^{\alpha_3\lambda+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\alpha_1\alpha_2}$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{Z}$. Claramente é verdadeiro para $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. Suponha que a afirmação seja válida para $\lambda - 1$. Queremos mostrar que ela também é válida para $\lambda > 1$.

$$\begin{aligned}
(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})^{\lambda} &= (x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})^{\lambda-1}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}) \\
&= x_1^{\alpha_1(\lambda-1)}x_2^{\alpha_2(\lambda-1)}x_3^{\alpha_3(\lambda-1)+\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\alpha_1\alpha_2}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}) \\
&= x_1^{\alpha_1(\lambda-1)}x_2^{\alpha_2(\lambda-1)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3(\lambda-1)+\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\alpha_1\alpha_2+\alpha_3} \\
&= x_1^{\alpha_1(\lambda-1)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2(\lambda-1)}[x_2^{\alpha_2(\lambda-1)},x_1^{\alpha_1}]x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3\lambda+\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\alpha_1\alpha_2} \\
&= x_1^{\alpha_1\lambda}x_2^{\alpha_2(\lambda-1)}[x_2,x_1]^{\alpha_1\alpha_2(\lambda-1)}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3\lambda+\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\alpha_1\alpha_2} \\
&= x_1^{\alpha_1\lambda}x_2^{\alpha_2(\lambda-1)}x_3^{\alpha_1\alpha_2(\lambda-1)}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3\lambda+\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\alpha_1\alpha_2} \\
&= x_1^{\alpha_1\lambda}x_2^{\alpha_2(\lambda-1)}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_1\alpha_2(\lambda-1)+\alpha_3\lambda+\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\alpha_1\alpha_2} \\
&= x_1^{\alpha_1\lambda}x_2^{\alpha_2\lambda}x_3^{\alpha_3\lambda+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\alpha_1\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Novamente, usamos a identidade $xy = yx[x,y]$.
Ainda, $(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})^{-1} = x_1^{-\alpha_1}x_2^{-\alpha_2}x_3^{\alpha_1\alpha_2-\alpha_3}$ e finalmente, para $\lambda < 0$ temos: $(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3})^{\lambda} = x_1^{\alpha_1\lambda}x_2^{\alpha_2\lambda}x_3^{\alpha_3\lambda+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\alpha_1\alpha_2}$. Portanto,

$$\bar{g}(\bar{\alpha},\lambda) = \left(\alpha_1\lambda,\ \alpha_2\lambda,\ \alpha_3\lambda + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\alpha_1\alpha_2\right).$$

Passaremos agora à construção do $\mathbb{Q}-$completamento de Mal'cev de um grupo nilpotente finitamente gerado e livre de torção. Sejam G um grupo nilpotente livre de torção finitamente gerado com uma base de Mal'cev $\{u_1,\cdots,u_n\}$. Defina $G^{\mathbb{Q}}$ como o conjunto

$$G^{\mathbb{Q}} = \{\bar{u}^{\bar{\alpha}} = u_1^{\alpha_1}\dots u_n^{\alpha_n} |\ \alpha_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Consideramos a multiplicação e a exponenciação em $G^{\mathbb{Q}}$ por meio de polinômios dados no Teorema 1.2.29, isto é, $f_i(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ e $g_i(\bar{\alpha},\lambda)$, ou seja,

$$\bar{u}^{\bar{\alpha}}\bar{u}^{\bar{\beta}} = \bar{u}^{\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta})} \text{ e } (\bar{u}^{\bar{\alpha}})^{\lambda} = \bar{u}^{\bar{g}(\bar{\alpha},\lambda)} \tag{1.5}$$

onde $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Q}^n$ e $\lambda \ \in \mathbb{Q}$.

Teorema 1.2.33 ([8]. P. Hall. Teorema 4.11 adaptado, pág. 125)**.** *O conjunto $G^{\mathbb{Q}}$ junto com a multiplicação definida em 1.5, é um grupo.*

Demonstração. A prova depende do seguinte:

Lema 1.2.34 ([8]. Lema 4.5, pág. 125)**.** *Seja $f(x_1, \cdots, x_k)$ um polinômio de grau n sobre um corpo F de característica zero. Se $f(a_1, \cdots, a_k) = 0$ para todas as possíveis escolhas de elementos $a_i \in \mathbb{Z}$, então $f(x_1, \cdots, x_k)$ é o polinômio zero.*

Demonstração. A prova segue por indução em k. Se $k = 1$, então $f(x_1)$ deve ser o polinômio zero. Caso contrário, teria no máximo n raízes, contradizendo a hipótese de que todo inteiro é uma raiz.

Suponha que o lema seja verdadeiro para todos os polinômios com $(k-1)$ variáveis. Escreva $f(x_1, \cdots, x_k)$ como um polinômio na variável x_k com coeficientes em $F[x_1, \cdots, x_{k-1}]$ como tal:

$$f(x_1, \cdots, x_k) = f_n(x_1, \cdots, x_{k-1})x_k^n + f_{n-1}(x_1, \cdots, x_{k-1})x_k^{n-1} + \cdots + f_0(x_1, \cdots, x_{k-1})$$

está contido em $F[x_k]$ e tem grau menor ou igual a n. Como cada inteiro é uma raiz, deve ser $f(a_1, \cdots, a_{k-1}, x_k)$ o polinômio zero. E então, $f_i(a_1, \cdots, a_{k-1}) = 0$ para todo $(a_1, \cdots, a_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1}$ e $i = 0, 1, \cdots, n$. Por indução, $f_i(x_1, \cdots, x_{k-1})$ é o polinômio zero para $i = 0, 1, \cdots, n$. Segue que $f(x_1, \cdots, x_k)$ é o polinômio nulo. □

Provaremos agora o teorema, verificando os axiomas de grupo.

- *Associatividade: Queremos mostrar que*

$$(\bar{u}^{\bar{\alpha}}\bar{u}^{\beta})\bar{u}^{\bar{\gamma}} = \bar{u}^{\bar{\alpha}}(\bar{u}^{\bar{\beta}}\bar{u}^{\gamma})$$

para qualquer $\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ \bar{\gamma} \in \mathbb{Q}^n$. Note que

$$(\bar{u}^{\bar{\alpha}}\bar{u}^{\bar{\beta}})\bar{u}^{\bar{\gamma}} = \bar{u}^{\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta})}\bar{u}^{\bar{\gamma}} = \bar{u}^{\bar{f}(\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta}),\bar{\gamma})}$$

e

$$\bar{u}^{\bar{\alpha}}(\bar{u}^{\bar{\beta}}\bar{u}^{\bar{\gamma}}) = \bar{u}^{\bar{\alpha}}\bar{u}^{\bar{f}(\bar{\beta},\bar{\gamma})} = \bar{u}^{\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{f}(\bar{\beta},\bar{\gamma}))}$$

Afirmação:

$$\bar{f}(\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta}),\bar{\gamma}) = \bar{f}(\bar{\alpha},\bar{f}(\bar{\beta},\bar{\gamma})),$$

ou equivalentemente,

$$\bar{f}_i(\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{\beta}),\bar{\gamma}) = \bar{f}_i(\bar{\alpha},\bar{f}(\bar{\beta},\bar{\gamma}))$$

para todo $\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ \bar{\gamma} \in \mathbb{Q}^n$ *e* $1 \leq i \leq n$. *Considere a função*

$$h_i(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}) = f_i(\bar{f}(\bar{x},\ \bar{y}),\bar{z}) - f_i(\bar{x},\bar{f}(\bar{y},\bar{z})),$$

onde $\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}\ \in \mathbb{Q}^n$. *Como os elementos em G são multiplicados usando a base de Mal'cev e os polinômios correspondentes,* $h_i(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}) = 0$ *sempre que* $\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}$ *são elementos de* $\mathbb{Z}^n$. *Pelo lema anterior,* $h_i \equiv 0$ *e a afirmação está provada.*

- *Identidade: Afirmação:* $\bar{u}^{\bar{0}} = u_1^0 \cdots u_n^0$ *é o elemento identidade em* $G^{\mathbb{Q}}$. *Claramente,* $\bar{u}^{\bar{0}}$ *é o elemento identidade em* $G^{\mathbb{Q}}$ *se, e somente se,* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}\bar{u}^{\bar{0}} = \bar{u}^{\bar{\alpha}}$ *para qualquer* $\bar{u}^{\bar{\alpha}} \in G^{\mathbb{Q}}$. *Como* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}\bar{u}^{\bar{0}} = \bar{u}^{\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{0})}$, *precisamos mostrar que* $\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{0}) = \bar{\alpha}\ \forall\ \bar{\alpha}\ \in \mathbb{Q}^n$. *Considere a função*

$$h(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x},\bar{0}) - \bar{x}$$

para $\bar{x},\ \bar{0}\ \in \mathbb{Q}^n$. *Por um raciocínio semelhante ao anterior, fica claro que* $h(\bar{x}) = \bar{0}$ *para todo* $\bar{x}\ \in\ \mathbb{Z}$. *Segue do último lema que* $h \equiv 0$ *, e então* $\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{0}) = \bar{\alpha}$ *para todo* $\bar{\alpha}\ \in \mathbb{Q}^n$.

- *Inverso: Seja* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}\ \in G^{\mathbb{Q}}$. *Afirmamos que* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}$ *possui um inverso. Assumindo que este seja o caso, então existe* $(\bar{u}^{\bar{\alpha}})^{-1} \in G^{\mathbb{Q}}$ *tal que* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}(\bar{u}^{\bar{\alpha}})^{-1} = \bar{u}^{\bar{0}}$. *Note que* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}(\bar{u}^{\bar{\alpha}})^{-1} = \bar{u}^{\bar{0}}$ *implica que* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}\bar{u}^{\bar{g}(\bar{\alpha},-1)} = \bar{u}^{\bar{0}}$. *Então* $\bar{u}^{\bar{f}(\bar{\alpha}.\bar{g}(\bar{\alpha},-1))} = \bar{u}^{\bar{0}}$. *Novamente, pelo último lema temos*

$$\bar{f}(\bar{\alpha},\bar{g}(\bar{\alpha},-1)) = \bar{0}$$

para todo $\bar{\alpha} \in \mathbb{Q}^n$. *O elemento* $\bar{u}^{\bar{g}(\bar{\alpha},-1)}$ *é de fato o inverso de* $\bar{u}^{\bar{\alpha}}$.

□

Definição 1.2.35. *O grupo* $G^{\mathbb{Q}}$ *descrito acima, é chamado* $\mathbb{Q}$*-completamento de G com respeito a base de Mal'cev* $\bar{u}$.

A aplicação $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \longmapsto (1\cdot\alpha_1,\ldots,1\cdot\alpha_n)$ define um mergulho canônico do anel $\mathbb{Z}^n$ em $\mathbb{Q}^n$, assim, o grupo G mergulha naturalmente como um subgrupo de $G^{\mathbb{Q}}$. Note também que $G^{\mathbb{Q}}$ é radicável, pois, dados $x \in G^{\mathbb{Q}}$ e n um inteiro positivo, temos $x = x^1 = x^{\frac{n}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = y^n$, com $y = x^{\frac{1}{n}} \in G^{\mathbb{Q}}$.

Exemplo 1.2.36. *O grupo* $UT_3(\mathbb{Q})$ *é isomorfo ao grupo* $N_{2,2}^{\mathbb{Q}}$. *De fato, definimos*

$$\varphi : UT_3(\mathbb{Q}) \longrightarrow N_{2,2}^{\mathbb{Q}}$$

dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto x_1^{\alpha_2} x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_3}, \quad \textit{onde } x_3 = [x_2, x_1].$$

Note que φ é claramente uma bijeção. Basta então provar que φ é homomorfismo. Temos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1+\beta_1 & \alpha_1\beta_2+\beta_3+\alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_2+\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

Por outro lado, $(x_1^{\alpha_2} x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_3})(x_1^{\beta_2} x_2^{\beta_1} x_3^{\beta_3}) = x_1^{\alpha_2+\beta_2} x_2^{\alpha_1+\beta_1} x_3^{\alpha_1\beta_2+\alpha_3+\beta_3}$. Daí, $(AB)^{\varphi} = A^{\varphi} B^{\varphi}$.

Para concluir esta subseção, e por uma questão de completude, enunciamos os seguintes resultados.

Teorema 1.2.37 ([8]. Teorema 4.13, pag. 129)**.** *Se G é um grupo nilpotente finitamente gerado livre de torção, então $G^{\mathbb{Q}}$ é um completamento de Mal'cev de G de mesma classe de nilpotência de G.*

Teorema 1.2.38 ([8]. Teorema 4.14, pag. 130)**.** *Dados quaisquer dois completamentos de Mal'cev de um grupo nilpotente finitamente gerado livre de torção G, existe um isomorfismo único entre eles que estende o automorfismo identidade de G.*

Teorema 1.2.39 ([8]. Teorema 4.15, pag. 131)**.** *Se G é um grupo nilpotente de classe c, finitamente gerado livre de torção, então G pode ser mergulhado em um completamento de Mal'cev G^* de classe c. Além disso, G^* é único a menos de isomorfismo.*

1.2.2 Largura do Grupo $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$

Apresentaremos aqui a definição da largura de um grupo e veremos que a largura é um limitante inferior para a quantidade de órbitas por automorfismos.

Definição 1.2.40. *Seja G um grupo. Dizemos que um elemento $a \in G'$ é um elemento não comutador (em G) se não existem elementos $x, y \in G$ tais que $a = [x, y]$.*

Definição 1.2.41. *Seja G um grupo. A largura de um elemento g do comutador G', denotada por $\lambda(g)$, é o menor número m tal que podemos expressar g como o produto de m comutadores dos elementos de G. Já a largura $\lambda(G)$ de um grupo G é definida como $max_{g \in G'}(\lambda(g))$*

sempre que esse valor existir. Caso contrário, dizemos que a largura de G é infinita. Um elemento $g \in G$ para o qual $\lambda(g) = \lambda(G)$ é chamado de elemento de largura máxima.

Lema 1.2.42 ([22]. Lema 10, pág. 682-683)**.** *Se G é um grupo nilpotente ou um $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de um grupo nilpotente com geradores $x_1, \cdots, x_r$, então cada elemento do comutador G' pode ser expresso como*

$$g = \prod_{i=1}^{r} [f_i, x_i], \;\; f_i \; \in G.$$

Em particular, $\lambda(G) \leq r$.

Lema 1.2.43 ([1]. Lema 2, pág. 119)**.** *Seja $G = \langle x_1, x_2 \rangle$ nilpotente de classe* 3*. Para inteiros α, β, valem:*

$$[x_1^{\alpha}, x_2] = [x_1, x_2]^{\alpha} [x_1, x_2, x_1]^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}},$$

$$[x_1^{\alpha}, x_2^{\beta}] = [x_1, x_2]^{\alpha\beta} [x_1, x_2.x_1]^{\frac{\alpha\beta(\alpha-1)}{2}} [x_1, x_2, x_2]^{\frac{\alpha\beta(\beta-1)}{2}}.$$

Exemplo 1.2.44 ([1]. Teorema 1, pág. 118)**.** *O grupo $N_{2,3}$ tem largura* 2*.*

Demonstração. De fato, se $N_{2,3} = \langle x_1, x_2 \rangle$ e se $h = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_2, x_1]^{\alpha_3} z$, $g = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} [x_2, x_1]^{\beta_3} w \in N_{2,3}$ com $z, w \in Z(N_{2,3})$, então

$$[g,h] = [x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_2,x_1]^{\alpha_3} z \, , \, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} [x_2,x_1]^{\beta_3} w]$$

$$= [x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, , \, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}][x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, , \, [x_2,x_1]^{\beta_3}][[x_2,x_1]^{\alpha_3} \, , \, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}]$$

$$= [x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, , \, x_2^{\beta_2}][x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, , \, x_1^{\beta_1}][x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}][x_1^{\alpha_1}, [x_2,x_1]^{\beta_3}][x_2^{\alpha_2}, \, [x_2,x_1]^{\beta_3}][[x_2,x_1]^{\alpha_3} \, , \, x_2^{\beta_2}]$$

$$[[x_2,x_1]^{\alpha_3} \, , \, x_1^{\beta_1}]$$

$$= [x_1^{\alpha_1}, x_2^{\beta_2}][x_1^{\alpha_1}, x_2^{\beta_2}, x_2^{\alpha_2}][x_2^{\alpha_2}, x_1^{\beta_1}][x_2^{\alpha_2}, x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}][x_1, x_2, x_1]^{\alpha_1\beta_3} [x_2, [x_2, x_1]]^{\alpha_2\beta_3} [x_2, x_1, x_2]^{\alpha_3\beta_2}$$

$$[x_2, x_1, x_1]^{\alpha_3\beta_1}$$

$$= [x_1, x_2]^{\alpha_1\beta_2} [x_1, x_2, x_1]^{\frac{\beta_2\alpha_1(\alpha_1-1)}{2}} [x_1, x_2, x_2]^{\frac{\alpha_1\beta_2(\beta_2-1)}{2}} [x_1, x_2, x_2]^{\alpha_1\beta_2\alpha_2} [x_2, x_1]^{\alpha_2\beta_1} [x_2, x_1, x_2]^{\frac{\beta_1\alpha_2(\alpha_2-1)}{2}}$$

$$[x_2, x_1, x_1]^{\frac{\alpha_2\beta_1(\beta_1-1)}{2}} [x_2, x_1, x_2]^{\alpha_2\beta_1\beta_2} [x_2, x_1, x_1]^{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3} [x_2, x_1, x_2]^{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3}$$

$$= [x_2, x_1]^{\mu} [x_2, x_1, x_2]^{\varsigma} [x_2, x_1, x_1]^{\eta}, \text{ com}$$

$$\mu = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$$

$$\varsigma = \frac{\beta_1\alpha_2(\alpha_2-1)}{2} - \frac{\alpha_1\beta_2(\beta_2-1)}{2} + \alpha_2\beta_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_2 + \alpha_3\beta_2$$

$$\eta = \frac{\alpha_2\beta_1(\beta_1-1)}{2} - \frac{\beta_2\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} + \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1.$$

Suponha, por absurdo, que $[x_2,x_1][x_2,x_1] = [x_2,x_1]^2 = [g,h] = [x_2,x_1]^{\mu_1}[x_2,x_1,x_1]^{\eta_1}[x_2,x_1,x_2]^{\varsigma_1}$. Pela escrita única de cada elemento de G', devemos ter

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 2 \\ \varsigma_1 = \dfrac{\beta_1\alpha_2(\alpha_2-1)}{2} - \dfrac{\alpha_1\beta_2(\beta_2-1)}{2} + \alpha_2\beta_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_2 + \alpha_3\beta_2 = 0 \\ \eta_1 = \dfrac{\alpha_2\beta_1(\beta_1-1)}{2} - \dfrac{\beta_2\alpha_1(\alpha_1-1)}{2} + \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Sejam $c_1 = \beta_3\alpha_2 - \alpha_3\beta_2,\ c_2 = \beta_3\alpha_1 - \alpha_3\beta_1$. Então,

$$\beta_3 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & -\beta_2 \\ c_2 & -\beta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{vmatrix}} = \frac{\beta_1 c_1 - \beta_2 c_2}{2},$$

e

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_2 & c_1 \\ \alpha_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{\alpha_1 c_1 - \alpha_2 c_2}{2}.$$

Portanto, precisamos que $\beta_1 c_1 - \beta_2 c_2$ e $\alpha_1 c_1 - \alpha_2 c_2$ sejam inteiros pares, temos

$$c_1 = \frac{\beta_1\alpha_2(\alpha_2-1)}{2} - \frac{\alpha_1\beta_2(\beta_2-1)}{2} + \alpha_2\beta_2(\beta_1-\alpha_1),$$

$$c_2 = \frac{\alpha_2\beta_1(\beta_1-1)}{2} - \frac{\alpha_1\beta_2(\alpha_1-1)}{2}.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} 2c_1 &= \beta_1\alpha_2^2 - \beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2^2 + \alpha_1\beta_2 + 2\beta_1\alpha_2\beta_2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_2, \\ &= \alpha_2(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) - (\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) - \beta_2(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) - \alpha_1\alpha_2\beta_2 + \beta_1\alpha_2\beta_2, \\ &= -2 + 2(\alpha_2+\beta_2) - \alpha_2\beta_2(\alpha_1-\beta_1). \end{aligned}$$

De forma semelhante, para c_2

$$2c_2 = \beta_1^2\alpha_2 - \beta_1\alpha_2 - \alpha_1^2\beta_2 + \alpha_1\beta_2 = -2 + \beta_1^2\alpha_2 - \alpha_1^2\beta_2.$$

Portanto, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{cases} \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 2 & (2.1) \\ 2c_1 = -2 + 2(\alpha_2+\beta_2) - \alpha_2\beta_2(\alpha_1-\beta_1) & (2.4) \\ 2c_2 = -2 + \beta_1^2\alpha_2 - \alpha_1^2\beta_2 & (2.5) \\ \beta_1c_1 + \beta_2c_2 \equiv \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 \equiv 0 \pmod 2 & (2.6) \end{cases}$$

Caso (1) Existe inteiro k tal que $\alpha_1\beta_2 = 2k$. Então

$$c_1 = -1 + (\alpha_2+\beta_2) - k\alpha_2 + (1+k)\beta_2$$
$$c_2 = -1 + (1+k)\beta_1 - k\alpha_1.$$

Segue que

$$\begin{cases} 0 \equiv \beta_1c_1 + \beta_2c_2 \equiv \beta_1 + \beta_1\beta_2 + \beta_2 \pmod 2 & (2.7) \\ 0 \equiv \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 \equiv \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2 \pmod 2 & (2.8) \end{cases}$$

De (2.7) e (2.8), concluímos que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 são todos pares. No entanto, isso implica que $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ é divisível por 4, contradizendo (2.1).

Caso (2) O número $\alpha_1\beta_2$ é impar . Segue de (2.1) que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são impares.

$$\beta_1c_1 + \beta_2c_2 = \frac{1}{2}\beta_1^2\alpha_2(\alpha_2-1) - \frac{1}{2}\beta_1\alpha_1\beta_2(\beta_2-1) + \beta_1\beta_2\alpha_2(\beta_1-\alpha_1)$$
$$+\frac{1}{2}\beta_2\alpha_2\beta_1(\beta_1-1) - \frac{1}{2}\beta_2^2\alpha_1(\alpha_1-1)$$

$$= \frac{1}{2}(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1) - \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) - \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$
$$-\frac{1}{2}\beta_2(\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1) + \beta_1\beta_2\alpha_2(\beta_1-\alpha_1)$$

$$= (\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1) - \beta_1 + \beta_1\beta_2 - \beta_2 + \beta_1\beta_2\alpha_2(\beta_1-\alpha_1),$$

que é ímpar e contradiz (2.7). Logo, o sistema não possui soluções inteiras. O que é um absurdo. Logo $\lambda(N_{2,3}) \geq \lambda([x_2,x_1]^2) \geq 2$. Mas, pelo Lema (1.2.42), $\lambda(G) \leq 2$, assim, $\lambda(N_{2,3}) = 2$. □

Proposição 1.2.45 ([22]. Proposição 12, pág. 683, demonstração pág. 693)**.** *A largura do grupo* $N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$ *é igual a* 1.

Demonstração. Considere o conjunto $X_2 = \{x_1, x_2\}$ de geradores livres do grupo $N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$. Cada elemento g do subgrupo comutador $(N_{2,3}^{\mathbb{Q}})'$ admite a expressão única da forma:

$$[x_2, x_1]^{\alpha}[x_2, x_1, x_1]^{\beta}[x_2, x_1, x_2]^{\gamma}$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$. Se $\alpha = 0$, então $g = [[x_2, x_1], x_1^{\beta} x_2^{\gamma}]$. Caso contrário, temos:

$$g = [x_2^{\alpha}[x_2, x_1]^{\rho}, x_1[x_2, x_1]^{\alpha^{-1}\mu}],$$

onde ρ e μ aparecem como termos aditivos em β e γ respectivamente. Para valores apropriados destes termos, podemos expressar g como um comutador. □

Proposição 1.2.46 ([22]. pág. 682-693)**.** *Os seguintes valem:*

(a) A largura do grupo $N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ é igual a $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$, para $r \geq 2$;

(b) A largura $\lambda(N_{r,c})$ é igual a r, onde $r \geq 2$ e $c \geq 3$;

(c) A largura $\lambda(N_{r,c}^{\mathbb{Q}})$ é igual a r, para $r \geqslant 2, c \geqslant 4$, assim como $r \geqslant 3, c \geqslant 3$. No caso excepcional, $\lambda(N_{2,3}^{\mathbb{Q}}) = 1$.

Onde a função piso, denotada por $[x]$ é o maior inteiro positivo menor ou igual a x.

Finalizaremos essa subseção com um resultado que estabelece uma relação entre a largura de um grupo nilpotente e a sua quantidade de órbitas por automorfismos.

Proposição 1.2.47. *Seja G um grupo nilpotente, então $\lambda(G) + 2 \leq \omega(G)$.*

A demonstração segue do fato que a largura do grupo é preservada por automorfismos.

1.2.3 Grupos residualmente finitos

Nesta subseção estudaremos os grupos residualmente finitos, conceito que será útil no Capítulo 2.

Definição 1.2.48. *Dizemos que um grupo G é residualmente finito se, para todo elemento não trivial g em G, existe um subgrupo normal N_g de G tal que g não pertence a N_g e o quociente G/N_g é finito.*

Nessas condições, vale que

$$\bigcap_{1 \neq g \in G} N_g = 1.$$

Equivalentemente à definição 1.2.48, temos:

Lema 1.2.49 ([8], Lema 5.31, pág 190)**.** *Um grupo G é residualmente finito se, e somente se, para cada elemento não trivial g em G, existe um grupo H finito e um epimorfismo $\varphi : G \to H$ tal que g^{φ} é não trivial.*

Demonstração. Suponha que G seja residualmente finito e $1 \neq g \in G$. Então existe um subgrupo normal N_g de G com $g \notin N_g$ tal que G/N_g é finito. Considere o epimorfismo $\varphi : G \longrightarrow G/N_g$. Claramente, $g^{\varphi} \neq 1$ em G/N_g. Por outro lado, seja $1 \neq g \in G$, suponha que H seja finito. Além disso, suponha que $\varphi : G \longrightarrow H$ seja um epimorfismo tal que $g^{\varphi} \neq 1$. Dado que $g \notin \ker\varphi$ e

$$G/\ker\varphi \simeq G^{\varphi} = H,$$

o subgrupo $N_g = \ker\varphi$ satisfaz as condições da Definição 1.2.48. □

Definição 1.2.50. *Seja $\{G_i \mid i \in I\}$ uma família de grupos indexada por um conjunto I não vazio. Denotando o produto cartesiano por $\prod_{i\in I} G_i$, e seja π_j o homomorfismo projeção em G_j dado por*

$$\pi_j((g_i)_{i\in I}) = g_j.$$

Se $H \leq \prod_{i\in I} G_i$, o homomorfismo $\pi_j|_H : H \to G_j$ é chamado de projeção de H em G_i. Dizemos que H é um produto subcartesiano dos G_i se $H^{\pi_i} = G_i$ para todo $i \in I$.

Temos ainda o seguinte lema equivalente a definição 1.2.48.

Lema 1.2.51 ([8], Lema 5.32, pág. 191)**.** *Um grupo G é residualmente finito se, e somente se, G é um produto subcartesiano de grupos finitos.*

Demonstração. Se G é residualmente finito, para cada $g \in G \setminus 1$ existe $N_g \trianglelefteq G$ tal que $g \neq Ng$ e G/N_g é finito. Tome a família $\{N_g \mid g \in G \setminus 1\}$. Assim, G é um subcartesiano dos G/N_g, ou seja, o homomorfismo

$$\pi_g : G \longrightarrow \prod_{g\in G\setminus 1} G/N_g \quad \text{dado por} \quad x \longmapsto (xN_g)_{g\in G\setminus 1},$$

é tal que

$$\pi_g : G \longrightarrow G/N_g \quad \text{dado por} \quad x \longmapsto xN_g$$

é sobrejetora. Para a injetividade, suponha para efeito de contradição que $1 \neq x \in \ker(\pi_g)$. Como G é residualmente finito, temos $xN_g \neq N_g$. Portanto $\pi_g(x) \neq 1$, o que contradiz o fato $x \in \ker(\pi_g)$. Reciprocamente, suponha que G seja um subcartesiano de uma família $\{G_i \mid i \in I\}$ de grupos finitos. Então para cada $i \in I$, a projeção $\pi_i : G \longrightarrow G_i$ é sobrejetora. Para cada $g \in G$, existe $i \in I$ tal que $g^{\pi_i} \neq 1$. Tome $N_g = ker\pi_i$ que temos $g \neq N_g$, $N_g \trianglelefteq G$ e $G/N_g \simeq G_i$ que é finito. □

Podemos enunciar as seguintes propriedades de grupos residualmente finitos.

- Subgrupos de grupos residualmente finitos são residualmente finitos;
- Produto cartesiano de grupos residualmente finitos é residualmente finito, em particular, o produto cartesiano de grupos finitos é residualmente finito;
- Um grupo abeliano com expoente finito é um produto direto de grupos finitos, em particular, um grupo abeliano com expoente finito é residualmente finito;
- Todo grupo policíclio é residualmente finito, em particular todo grupo nilpotente finitamente gerado é residualmente finito;
- Todo grupo livre é residualmente finito.

Os seguintes grupos não são residualmente finitos.

- Um grupo radicável não trivial;
- Um produto entrelaçado de um grupo não abeliano por um grupo infinito, por exemplo $S_3 \wr \mathbb{Z}$;
- Um grupo simples infinito.

Um grupo abeliano com expoente finito, possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos, veja [23]. No Capítulo 2, estaremos interessados em grupos residualmente finitos com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos, e provaremos que tais grupos possuem expoente finito. Em particular, um grupo residualmente com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos é localmente finito, que é o tema da próxima subseção.

1.2.4 Grupos localmente finitos

Nesta subseção, apresentaremos grupos localmente finitos.

Definição 1.2.52. *Um grupo é localmente finito se todo subgrupo finitamente gerado for finito. Assim, um grupo localmente finito é necessariamente um grupo de torção.*

A classe dos grupos localmente finitos é fechada para imagens homomórficas e também é fechada para extensões ([21], pág. 429). Além disso, no capítulo 14 pág 428, do mesmo livro é mencionado que Zel'manov demonstrou que o Problema Restrito de Burnside admite solução positiva para todos os expoentes.

Teorema 1.2.53 ([26], 1997)**.** *Um grupo residualmente finito com expoente é localmente finito.*

Enunciamos a seguir algumas propriedades de grupos localmente finitos.

- Subgrupos e grupos quocientes de grupos localmente finitos são localmente finitos;
- Todo grupo infinito localmente finito possui um subgrupo abeliano infinito;
- Um grupo infinito localmente finito cujos subgrupos próprios são finitos é quase-cíclico;
- Todo grupo localmente finito G tem um elemento não trivial cujo centralizador em G é infinito.

São exemplos de grupos localmente finitos.

- Produtos diretos de grupos finitos;
- FC-grupos de torção;
- Grupos solúveis de torção.

Todo grupo de Burnside é um grupo de torção não localmente finito, um exemplo é o grupo de Gupta-Sidki que é um p-grupo 2-gerado infinito.

Capítulo 2

Grupos residualmente finitos com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos

Neste capítulo, trabalharemos com órbitas por automorfismos de potências booleanas, de grupos residualmente finitos e de grupos localmente graduados finitamente gerados.

2.1 Potências booleanas

No estudo de grupos com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos, as potências boolenas de grupos simples finitos aparecem como grupos residualmente finitos caracteristicamente simples com finitas órbitas por automorfismos, veja [3]. Aqui apresentaremos definições e propriedades dessa estrutura [2].

Definição 2.1.1. *Um anel booleano R é um anel comutativo em que todo elemento satisfaz a identidade $x^2 = x.x = x$, para qualquer $x \in R$.*

Note que em um anel booleano R tem-se que $x + x = 0$, para todo $x \in R$. De fato, $2x = (2x)^2 = (2x)(2x) = 4x^2 = 4x$, ou seja, $x + x = 2x = 0$.

Exemplo 2.1.2. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Se $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é fechado para interseção e união simétrica, então $\mathcal{R}$ é um anel booleano. De fato, temos que $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ é um anel comutativo, onde a adição de $\mathcal{R}$ é dada por*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ com } A, B \in \mathcal{R}$$

e a multiplicação

$$A \cap B \text{ com } A, B \in \mathcal{R}.$$

(a) Temos que $(\{\emptyset\}, \triangle, \cap), (\mathcal{P}(X), \triangle, \cap), (\mathcal{D}, \triangle, \cap)$ *são aneis booleanos, onde*

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ é finito}\}.$$

(b) Seja $X = [0,1) \subset \mathbb{R}$ *munido da topologia* $\mathcal{T}$ *gerada pela base*

$$\boldsymbol{b} = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}, 0 \leq a < b < 1\}.$$

Note que $(\mathcal{T}, \triangle, \cap)$ *é um anel booleano. Considere* $\mathcal{R}_1$ *o subanel de* $\mathcal{T}$ *gerado por* $\boldsymbol{b}$*. E considere* $\mathcal{R}_2$ *o subanel de* $\mathcal{T}$ *gerado por*

$$\boldsymbol{b}_1 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}, 0 \leq a < b \leq 1\}.$$

Note que $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ *e* $\mathcal{D}_0 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \mid A \text{ é finito}\}$ *são aneis booleanos enumeráveis.*

Exemplo 2.1.3. *Considere* $[0,1)$ *munido da topologia* $\mathcal{T}$ *gerada pela base* $\boldsymbol{b}$*. Note que essa topologia é a mesma gerada pela base* $\boldsymbol{b}_1$*.*

(a) Qualquer homeomorfismo $f : [0,1) \to [0,1)$ *tal que* $A^f, A^{f^{-1}} \in \mathcal{R}_1$*, para todo* $A \in \mathcal{R}_1$*, define um automorfismo* α_f *do anel* $\mathcal{R}_1$*. De fato, defina* $\alpha_f : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_1$ *por* $A^{\alpha_f} = A^f$ *que temos*

$$(A \triangle B)^{\alpha_f} = (A \triangle B)^f = A^f \triangle B^f = A^{\alpha_f} \triangle B^{\alpha_f},$$

e

$$(A \cap B)^{\alpha_f} = (A \cap B)^f = A^f \cap B^f = A^{\alpha_f} \cap B^{\alpha_f},$$

ou seja, α_f *é um homomofismo de anéis. Como* $\emptyset^f = \emptyset$ *e* $A^{f^{-1}} \in \mathcal{R}_1$*, segue que* α_f *é injetor e é sobrejetor, logo um automorfismo de anel.*

Agora, dados $A, B \in \mathcal{R}_1 \setminus \{\emptyset\}$*, existe um homeomorfismo* f *de* $[0,1)$ *tal que* $A^f = B$*. Portanto, o grupo de automorfismos* $Aut(\mathcal{R}_1)$ *age com apenas duas órbitas em* $\mathcal{R}_1$*, ou seja*

$$\mathcal{R}_1 = \{\emptyset\} \dot{\cup} [0,1/2)^{Aut(\mathcal{R}_1)};$$

(b) Analogamente, é possível provar que

$$\mathcal{R}_2 = \{\emptyset\} \dot{\cup} [0,1/2)^{Aut(\mathcal{R}_2)} \dot{\cup} [0,1)^{Aut(\mathcal{R}_2)};$$

(e) Já o anel $\mathcal{D}_0$ possui uma quantidade infinita de órbitas por automorfismos.

Um anel é dito caracteristicamente simples se os únicos ideais característicos são o ideal nulo e ele todo.

Proposição 2.1.4 ([2], Hall)**.** *A menos de isomorfismo, existem apenas três aneis booleanos enumeráveis caracteristicamente simples, a saber, os aneis $\mathcal{D}_0, \mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.*

Sejam G um grupo, X um conjunto não vazio, $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X e $\mathcal{R}$ como no Exemplo 2.1.2. Seja o grupo $\prod_X G$. Considere g em G e defina

$$g_A \in \prod_X G, \text{ dado por } g_A = (h_x)_{x\in X} \text{ onde}$$

$$h_x = \begin{cases} g, & \text{se } x \in A, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.1.5. *Com as condições acima, a potência booleana $G^{\mathcal{R}}$ é definida como o subgrupo de $\prod_X G$ gerado por todos os elementos da forma g_A, com $g \in G$ e $A \in \mathcal{R}$,*

$$G^{\mathcal{R}} = \langle g_A \mid g \in G, A \in \mathcal{R} \rangle.$$

Seguem da Definição 2.1.5 os seguintes:

- $g_A \cdot h_B = g_{A\setminus B} \cdot (gh)_{A\cap B} \cdot h_{B\setminus A}$;
- $(g_A)^{-1} = (g^{-1})_A$;
- $g_A \cdot h_B = h_B \cdot g_A$, se $A \cap B = \emptyset$;
- $g_A \cdot g_B = g_{A\triangle B}$, se $A \cap B = \emptyset$;
- $g_A^{h_B} = h_B^{-1} \cdot g_A \cdot h_B = g_{A\setminus B} \cdot (g^h)_{A\cap B}$.

Na igualdade $g_A \cdot h_B = g_{A\setminus B} \cdot (gh)_{A\cap B} \cdot h_{B\setminus A}$, os elementos $g_{A\setminus B}$, $(gh)_{A\cap B}$, $h_{B\setminus A}$ pertencem a $G^{\mathcal{R}}$ pois, $A \cap B$, $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, $B \setminus A = B \triangle (B \cap A) \in \mathcal{R}$. Assim, cada $\gamma \in G^{\mathcal{R}}$ pode ser escrito de maneira única (a menos da ordem dos fatores) como

$$(g_1)_{A_1} \cdots (g_n)_{A_n},$$

onde os elementos g_i são distintos e não triviais de G, e os conjuntos A_i são disjuntos e não vazios em $\mathcal{R}$.

Exemplo 2.1.6. *Seja G um grupo. Seguindo as notações do Exemplo 2.1.2 (a), temos que*

$$G^{\{\emptyset\}} \simeq G, \;\; G^{\mathcal{P}(X)} \simeq \prod_X G \;\; e \;\; G^{\mathcal{D}} \simeq \bigoplus_X G.$$

Apresentamos a seguir alguns automorfismos de uma potência booleana. Para uma descrição de outros tipos de automorfismos, recomendamos [2]. Considere $\Gamma = G^{\mathcal{R}}$ uma potência booleana como na Definição 2.1.5.

- Seja α um automorfismo do anel $\mathcal{R}$, ou seja, $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$. Assim, α se estende a um automorfismo α^Γ de Γ definindo α^Γ nos geradores de Γ por

  $$(g_A)^{\alpha^\Gamma} = g_{A^\alpha} \quad \text{para todo } g \in G, A \in \mathcal{R}.$$

  Escrevemos $(\mathrm{Aut}(\mathcal{R}))^\Gamma = \{\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})\}$ como o subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ isomorfo a $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$;

- Seja f um automorfismo de G, ou seja, $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Assim, f se estende a um automorfismo f_X de Γ definindo f_X nos geradores de Γ por

  $$(g_A)^{f_X} = (g^f)_A \quad \text{para todo } g \in G \text{ e para todo } A \in \mathcal{R};$$

- Dados $A \in \mathcal{R}$ e $f \in \mathrm{Aut}(G)$ defina f_A como o automorfismo de Γ dado nos geradores de Γ por

  $$(g_B)^{f_A} = (g^f)_{A\cap B}(g)_{B\setminus A}, \quad \text{para todo } g \in G \text{ e para todo } B \in \mathcal{R}.$$

  Escrevemos $\mathcal{F}_\mathcal{R} = \langle f_X, f_A \mid A \in \mathcal{R}\rangle \leqslant \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Proposição 2.1.7. *O grupo $(\mathrm{Aut}(\mathcal{R}))^\Gamma$ normaliza $\mathcal{F}_\mathcal{R}$. Em particular, o produto $\mathcal{F}_\mathcal{R}(\mathrm{Aut}(\mathcal{R}))^\Gamma$ é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ isomorfo a $\mathcal{F}_\mathcal{R} \rtimes (\mathrm{Aut}(\mathcal{R}))^\Gamma$.*

Demonstração. De fato, sejam α^Γ em $(\mathrm{Aut}(\mathcal{R}))^\Gamma$ e f_A, f_X geradores de $\mathcal{F}_\mathcal{R}$. Temos que

$$(\alpha^\Gamma)^{-1} f_A(\alpha^\Gamma) = f_{A^\alpha} \;\text{ e }\; (\alpha^\Gamma)^{-1} f_X(\alpha^\Gamma) = f_X \in \mathcal{F}_\mathcal{R}$$

pois para todo gerador g_B de Γ vale

$$g_B \overset{(\alpha^\Gamma)^{-1}}{\longmapsto} g_{B^{\alpha^{-1}}} \overset{f_A}{\longmapsto} (g^f)_{B^{\alpha^{-1}}\cap A} g_{B^{\alpha^{-1}}\setminus A} \overset{\alpha^\Gamma}{\longmapsto} g^f_{B\cap A^\alpha} g_{B\setminus A^\alpha} = (g_B)^{f_A\alpha}$$

e

$$g_B \overset{(\alpha^\Gamma)^{-1}}{\longmapsto} g_{B^{\alpha^{-1}}} \overset{f_X}{\longmapsto} (g^f)_{B^{\alpha^{-1}}} \overset{\alpha^\Gamma}{\longmapsto} g^f_B.$$

Assim, $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\mathcal{R}(\mathrm{Aut}(\mathcal{R}))^\Gamma \simeq \mathcal{F}_\mathcal{R} \rtimes (\mathrm{Aut}(\mathcal{R}))^\Gamma$. □

Definição 2.1.8. *Um grupo G é indecomponível se $G \neq 1$ e, se $G = H \times K$, então ou $H = 1$ ou $K = 1$.*

Proposição 2.1.9. *[[2].Corolário C1, pág. 386]. Seja $\Gamma = G^\mathcal{R}$ uma potência booleana de G, onde G é um grupo finito não abeliano indecomponível, tal que* $\mathrm{Hom}(G, Z(G)) = 1$. *Então* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *é isomorfo a* $\mathcal{F}_\mathcal{R} \rtimes (\mathrm{Aut}(R))^\Gamma$.

Como na Definição 2.1.5, considere $\Gamma = G^\mathcal{R}$ uma potência booleana de um grupo G. Suponha que G tenha $r+1$ órbitas por automorfismos, ou seja, existem $g_1 = e, g_2, \ldots, g_r, g_{r+1}$ em G tais que $G = \dot\cup_{i=1}^{r+1} g_i^{Aut(G)}$. Suponha também que $\mathcal{R}$ tenha $m+1$ órbitas por automorfismos, ou seja, existem $A_1 = \emptyset, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ em $\mathcal{R}$ tais que $\mathcal{R} = \dot\cup_{j=1}^{m+1} A_j^{Aut(\mathcal{R})}$.

Proposição 2.1.10. *Assuma as hipótese acima. Então Γ tem no máximo*

$$1 + mC_1^r + m^3C_2^r + \cdots + m^{r+1}C_r^r$$

órbitas por automorfismos, onde $C_k^r = \binom{r}{k}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{g} \in \Gamma$ um elemento não trivial. Pela observação logo após a Definição 2.1.5, o elemento $\mathbf{g}$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{g} = (h_1)_{B_1}(h_2)_{B_2} \cdots (h_n)_{B_n},$$

onde $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são dois a dois disjuntos. Reordenando se necessário, existem $i_1 < \cdots < i_{l-1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, com $l \leq r$, $j_1, \ldots, j_l \in \{1, 2, \ldots, r\}$, e $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Aut(G)$ tais que

$$h_1 = g_{j_1}^{f_1},\ h_2 = g_{j_1}^{f_2}, \cdots,\ h_{i_1} = g_{j_1}^{f_{i_1}},$$

$$h_{i_1+1} = g_{j_2}^{f_{i_1}+1},\ h_{i_1+2} = g_{j_2}^{f_{i_1}+2},\ \cdots,\ h_{i_2} = g_{j_2}^{f_{i_2}},$$

$$\cdots$$

$$h_{i_{l-1}+1} = g_{j_l}^{f_{i_j}+1},\ h_{i_{l-1}+2} = g_{j_l}^{f_{i_j}+2}, \cdots, h_n = g_{j_l}^{f_n}.$$

Considere os automorfismos $(f_1^{-1})_{B_1}$, $(f_2^{-1})_{B_2}$, ..., $(f_n^{-1})_{B_n}$ de Γ. Então

$$f = (f_1^{-1})_{B_1}(f_2^{-1})_{B_2} \cdots (f_n^{-1})_{B_n} \in Aut(\Gamma)$$

é tal que

$$\mathbf{g}^f = (h_1^{f_1^{-1}})_{B_1}(h_2^{f_2^{-1}})_{B_2} \cdots (h_n^{f_n^{-1}})_{B_n} =$$

$$= (g_{j_1})_{B_1}(g_{j_1})_{B_2}\cdots(g_{j_1})_{B_{i_1}}(g_{j_2})_{B_{i_1+1}}(g_{j_2})_{B_{i_1+2}}\cdots(g_{j_2})_{B_{i_2}}\cdots(g_{j_l})_{B_{i_{l-1}+1}}(g_{j_l})_{B_{i_{l-1}+2}}\cdots(g_{j_l})_{B_n}.$$

Agora tome $\alpha \in Aut(\mathcal{R})$ tal que

$$(B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \cdots \dot\cup B_n)^\alpha = B_1^\alpha \dot\cup B_2^\alpha \dot\cup \cdots \dot\cup B_n^\alpha = A,$$

com $A \in \{A_2, A_3, \cdots, A_m, A_{m+1}\}$. Logo

$$\mathbf{g}^{f\alpha^\Gamma} = (g_{j_1})_{B_1^\alpha}(g_{j_1})_{B_2^\alpha}\cdots(g_{j_1})_{B_{i_1}^\alpha}\cdots(g_{j_1})_{B_{i_{l-1}+1}^\alpha}(g_{j_l})_{B_{i_{l-1}+2}^\alpha}\cdots(g_{j_l})_{B_n^\alpha}.$$

Escreva $A = D_1 \dot\cup D_2 \dot\cup \ldots \dot\cup D_l$, onde $D_k \in (B_{i_{k-1}}^\alpha \dot\cup B_{i_{k-1}+1}^\alpha \dot\cup \ldots \dot\cup B_{i_k}^\alpha)^{Aut(\mathcal{R})}$ com $1 \leq k \leq l$. Note que se $D_1', D_2', \cdots, D_l'$ são elementos de $\mathcal{R}$ tais que

$$A = D_1' \dot\cup D_2' \dot\cup \ldots \dot\cup D_l' \text{ e } D_k' \in D_k^{Aut(\mathcal{R})}$$

então a função

$$D_1' \mapsto D_1, D_2' \mapsto D_2, \cdots, D_l' \mapsto D_l$$

se estende a um automorfismo β de $\mathcal{R}$. De fato, basta escolher $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l \in Aut(\mathcal{R})$ tais que $(D_k')^{\beta_k} = D_k$ e definir para cada $B \in \mathcal{R}$ a função $\beta : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ por

$$B^\beta = (B \setminus A) \dot\cup (B \cap D_1')^{\beta_1} \dot\cup (B \cap D_2')^{\beta_2} \dot\cup \ldots \dot\cup (B \cap D_l')^{\beta_l}.$$

Logo a partição $D_1, D_2, \ldots, D_l$ de A pode ser fixada para cada l, cada $g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_l}$ e cada A. Daí existe $\beta \in Aut(\mathcal{R})$ tal que $B_k^{\alpha\beta} \dot\cup B_2^{\alpha\beta} \dot\cup \ldots \dot\cup B_{i_1}^{\alpha\beta} = (B_k^\alpha \dot\cup B_2^\alpha \dot\cup \ldots \dot\cup B_{i_1}^\alpha)^\beta = D_k$, para cada k, e

$$\mathbf{g}^{f\alpha^\Gamma\beta^\Gamma} = (g_{j_1})_{B_1^{\alpha\beta}}(g_{j_1})_{B_2^{\alpha\beta}}\cdots(g_{j_1})_{B_{i_1}^{\alpha\beta}}\cdots(g_{j_l})_{B_{i_{l-1}+1}^{\alpha\beta}}(g_{j_l})_{B_{i_{l-1}+2}^\alpha}\cdots(g_{j_l})_{B_n^{\alpha\beta}} =$$

$$= (g_{j_1})_{B_1^{\alpha\beta} \dot\cup B_2^{\alpha\beta} \dot\cup \ldots \dot\cup B_{i_1}^{\alpha\beta}}\cdots(g_{j_l})_{B_{i_{l-1}+1}^{\alpha\beta} \dot\cup B_{i_{l-1}+2}^{\alpha\beta} \dot\cup \ldots \dot\cup B_{i_l}^{\alpha\beta}} =$$

$$= (g_{j_1})_{D_1}(g_{j_2})_{D_2}\cdots(g_{j_l})_{D_l}.$$

Seguindo esse processo temos as seguintes órbitas

1. a órbita trivial;
2. as órbitas de elementos $\mathbf{g}$ tais que $h_1, \ldots, h_n \in g_i^{Aut(G)}$, resultando em não mais que mC_1^r órbitas;
3. as órbitas de elementos $\mathbf{g}$ tais que $h_1, \ldots, h_{i_1} \in g_{j_1}^{Aut(G)}$, ..., $h_{i_{l-1}}, h_{i_{l-1}+1}, \ldots, h_{i_l} \in g_{j_l}^{Aut(G)}$ resultando em não mais que $m.m^l C_l^r$ órbitas.

Portanto, o subgrupo $\mathcal{F}_\mathcal{R} \rtimes (Aut(\mathcal{R}))^\Gamma$ de $Aut(\Gamma)$ age por no máximo

$$1 + mC_1^r + m^3 C_2^r + \cdots + m^{r+1} C_r^r$$

órbitas sobre Γ. □

Na Proposição 2.1.10, se G é residualmente finito, então $\mathcal{G} = \prod_X G$ também o é. Em particular, uma potência booleana $\Gamma = G^{\mathcal{R}}$ é residualmente finito se G assim o for. A seguir, daremos alguns exemplos de grupos infinitos residualmente finitos não abelianos que possuem uma quantidade finita de órbitas por automorfismos.
Um grupo possui uma certa propriedade virtualmente se tiver um subgrupo de índice finito com essa propriedade.

Exemplo 2.1.11. *(***Grupo infinito enumerável solúvel não virtualmente abeliano residualmente finito com** 4 **órbitas por automorfismos***). Considere o grupo simétrico $S_3 = Sym(\{1,2,3\})$ de grau 3 e $\mathcal{R}_1$ o anel booleano definido no Exemplo 2.1.2-(b). Seja $\Gamma_1 = S_3^{\mathcal{R}_1}$ a potência booleana de S_3 por $\mathcal{R}_1$. Como o centro $Z(S_3)$ de S_3 é trivial, pelas Proposições 2.1.9 e 2.1.10, temos*

$$\omega(\Gamma_1) \leq 1 + 1.C_1^2 + 1^3.C_2^2 = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Uma vez que $spec(\Gamma_1) = \{1,2,3,6\}$, segue que $\omega(\Gamma_1) = 4$.

Exemplo 2.1.12. *(***Grupo infinito enumerável não virtualmente solúvel residualmente finito com** 8 **órbitas por automorfismos***). Considere A_5 o grupo alternado de grau 5 e $\mathcal{R}_1$ o anel booleano definido no Exemplo 2.1.2-(b). Seja $\Gamma_2 = A_5^{\mathcal{R}_1}$ a potência booleana de A_5 por $\mathcal{R}_1$. Como o centro $Z(A_5)$ de A_5 é trivial, pelas Proposições 2.1.9 e 2.1.10, temos*

$$\omega(\Gamma_2) \leq 1 + 1.C_1^3 + 1^3.C_2^3 + 1^4.C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Uma vez que $spec(\Gamma_2) = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, segue que $\omega(\Gamma_1) = 8$.

Exemplo 2.1.13. *(***Grupo infinito não enumerável não virtualmente solúvel residualmente finito com** 8 **órbitas por automorfismos***). Seja $\mathcal{R}$ o anel booleano gerado por*

$$\boldsymbol{b}_2 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, \text{ com } 0 \leq a < b < 1\}.$$

Analogamente ao Exemplo 2.1.3-(a), segue que $\mathcal{R}$ tem 2 órbitas por automorfismos de anéis. De modo semelhante ao Exemplo 2.1.12, a potência booleana $A_5^{\mathcal{R}}$ possui 8 órbitas por automorfismos.

2.2 Grupos residualmente finitos com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos

Vimos na subseção anterior que existem grupos infinitos residualmente finitos com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Note que os exemplos dados são periódicos. O próximo teorema prova que isso é um fato.

Teorema A. *Seja G um grupo residualmente finito com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Então G tem expoente finito. Além disso, G é localmente finito.*

Demonstração. Primeiramente provaremos que G é um grupo de torção. Suponha que exista g em G de ordem infinita. Como G é residualmente finito existe um subgrupo normal N_1 de G tal que g não pertence a N_1 e o índice $[G:N_1] = n_1$ é finito. Então

$$1 < \langle g^{n_1} \rangle \leq G^{n_1} \leq N_1 < G.$$

Como N_1 é residualmente finito, existe um subgrupo normal N_2 de N_1 tal que g^{n_1} não pertence a N_2 e o índice $[N_1 : N_2] = n_2$ é finito. Então

$$1 < \langle g^{n_1 n_2} \rangle \leq (G^{n_1})^{n_2} \leq N_2 < N_1 < G.$$

Note que $(G^{n_1})^{n_2}$ é um subgrupo próprio de G^{n_1}. Continuando com esse processo, obtemos uma cadeia infinita

$$\cdots < (\cdots((G^{n_1})^{n_2})\cdots)^{n_s} < \cdots < (G^{n_1})^{n_2} < G^{n_1} < G$$

de subgrupos característicos próprios não triviais de G, uma contradição. Portanto G é um grupo de torção.

Agora, sejam $g_1, \ldots, g_n$ elementos de G tais que $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i^{Aut(G)}$. Então a ordem $|g|$ de g divide $mmc\{|g_1|, \ldots, |g_n|\}$ para todo g em G, logo G tem expoente. Por fim, pelo Teorema 1.2.53, o grupo G é localmente finito, o que completa a prova. □

Definição 2.2.1. *Um grupo G é chamado um $S-$espaço, para algum grupo finito não abeliano simples S, se todo subconjunto finito de G está contido em um subgrupo de G isomorfo a S^n, para algum $n \geq 0$.*

Teorema 2.2.2 ([3],Wilson, não publicado)**.** *Suponha que G seja um grupo localmente finito caracteristicamente simples de expoente limitado. Então, ou G é um p-grupo para algum primo p ou G é um S-espaço para algum grupo não abeliano simples finito S.*

Lema 2.2.3 ([3]-Lema 3.1)**.** *Suponha que G seja um grupo caracteristicamente simples não abeliano contendo um subgrupo próprio de índice finito. Então G é um S−espaço para algum grupo finito simples não abeliano S.*

O produto direto de grupos simples isomórficos é caracteristicamente simples, ([21], 3.3.15, pág. 87). Em particular, os Exemplos 2.1.12 e 2.1.13 são grupos infinitos caracteristicamente simples residualmente finitos que não são p-grupos abelianos elementares com finitas órbitas por automorfismos. Por outro lado, o grupo $G = \bigoplus_{\mathbb{N}} A_5$, embora também seja um grupo caracteristicamente simples, residualmente finito e não seja p-grupo abeliano elementar, não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos pelo Exemplo 1.1.7.

Proposição 2.2.4. *Seja G um grupo infinito caracteristicamente simples residualmente finito com $\omega(G) \leq 7$. Então G é um p−grupo abeliano elementar.*

Demonstração. Suponha que G não seja um $p-$grupo abeliano elementar. Pelo Lema 2.2.3, o grupo G é um S-espaço infinito. Assim existe um subgrupo finito H de G isomorfo a $S \times S \times S$. Como S é simples e não abeliano, existem três primos distintos p, q e r tais que $\{1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr\} \subset spec(G)$, então $|spec(G)| \geq 8$, e $\omega(G) \geq 8$, uma contradição. □

Fica assim a questão:
Existe um p-grupo localmente finito caracteristicamente simples infinito não abeliano com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos? Confira [3] e [19].

2.3 Grupos localmente graduados com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos

Uma classe que engloba as classes dos grupos residualmente finitos, dos grupos localmente finitos e dos grupos nilpotentes é a classe dos grupos localmente graduados. Um grupo é dito localmente graduado se todo subgrupo finitamente gerado possui um subgrupo próprio de índice finito. É importante observar que um grupo finitamente gerado e localmente graduado não é, em geral, residualmente finito. Por exemplo, o grupo $S_3 \wr \mathbb{Z}$ é localmente graduado (pois os grupos envolvidos possuem essa propriedade e, pela Proposição 1.2.2, a propriedade é preservada em extensões). Contudo, esse grupo não é residualmente finito, veja ([18], pág.308). Em [20], Denis Osin provou que um grupo enumerável livre de torção pode ser mergulhado em um grupo 2-gerado com uma quantidade finita de classes de conjugação. Assim, existe grupo finitamente gerado com uma quantidade finita de órbitas

por automorfismos. Nesta seção, provaremos que isso não ocorre em grupos localmente graduados infinitos.

Proposição 2.3.1 ([12], Corolário 7.2.1. pág. 97)**.** *Se G é um grupo finitamente gerado e $H \leq G$ tem índice finito em G, então H é finitamente gerado.*

Proposição 2.3.2. *([21], pág. 24). Um grupo finitamente gerado G contém uma quantidade finita de subgrupos de um dado índice n.*

Lembramos que a expressão "limitado por $\{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$" significa "limitado superiormente por alguma função que depende apenas dos parâmetros a_1, a_2, a_3 ...". Além disso, se d é um inteiro positivo, dizemos que um grupo é um grupo d-gerado se ele pode ser gerado por algum subconjunto de d elementos $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$. Um grupo é finitamente gerado se for d-gerado para algum d.

Teorema B. *Sejam d, n inteiros positivos e p um primo.*

(a) Seja G um grupo d-gerado localmente graduado com $\omega(G) = n$. Então G é finito;

(b) Seja π um conjunto de primos. Seja G um grupo d-gerado localmente graduado $\pi-$grupo com $\omega(G) = n$. Então G é finito com ordem $\{d, n, \pi\}$-limitada.

Demonstração. (a) Argumentaremos por contradição, assumindo que G seja infinito. Como G é um grupo finitamente gerado e localmente graduado, segue que existe um subgrupo característico próprio de índice finito K_1 em G (confira Proposição 2.3.2). Como G é infinito, temos que K_1 também é infinito. Note que o subgrupo K_1 tem no máximo $n-1$ órbitas de automorfismo sob a ação de $Aut(G)$. Além disso, K_1 é um grupo finitamente gerado e localmente graduado. Aplicamos o mesmo argumento, agora com G substituído por K_1, para obter um subgrupo característico próprio infinito K_2 de índice finito em G que está contido em K_1. Em particular, $\omega(K_2) \leqslant n-2$. Podemos obter uma cadeia infinita (própria) de subgrupos característicos de G, digamos $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$n = \omega(G) > \omega(K_1) > \omega(K_2) > \ldots > \omega(K_i) > \ldots \geqslant 1.$$

Isso contradiz nossa suposição. Portanto, G é finito.

(b) Pelo item (a), o grupo G é finito. Resta provar que a ordem $|G|$ é $\{d, n, \pi\}$-limitada. Primeiro provaremos que o expoente $\exp(G)$ é $\{n, \pi\}$-limitado. Defina $p_1, \ldots, p_k$ como primos tais que $\pi = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Primeiro observamos que $\exp(G)$ divide N, onde

$$N = p_1^n \cdot \ldots \cdot p_k^n.$$

Como $\omega(G) = n$, segue-se que o expoente $\exp(P_i)$ divide p_i^n, para todo $P_i \in Syl_{p_i}(G)$. Agora, mostraremos que $\exp(G)$ divide N. Escolha arbitrariamente $x \in G$. É claro que a parte p_i de $|x|$ divide p_i^n. Em particular, $|x|$ divide $|N|$. Como $\exp(G) = \text{mmc } \{|x| : x \in G\}$ temos que $\exp(G)$ divide N. Pela solução positiva do RBP, existe um inteiro positivo $B(d,N)$ tal que $|G| \leqslant B(d,N)$. Como N é $\{n,\pi\}$-limitado, deduzimos que G é finito com ordem $\{d,n,\pi\}$-limitada também. A prova está completa. □

Sobre grupos localmente graduados podemos perguntar:
Um grupo localmente graduado livre de torção com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos é radicável?

Capítulo 3

Órbitas por automorfismos de $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de grupos nilpotentes livres

Neste capítulo, determinaremos todos os $\mathbb{Q}$-completamentos de Mal'cev de grupos nilpotentes livres com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Considere $N_{r,c}$ o grupo nilpotente livre de posto r e classe de nilpotência c e $G = N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ o $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de $N_{r,c}$. Provaremos que G tem uma quantidade finita de órbitas por automorfismos se, e somente se, $G = N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ ou $G = N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$.

3.1 O grupo de automorfismos de $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$

A proposição seguinte estabelece condições necessárias e suficientes para que uma aplicação definida nos geradores de $N_{r,c}$ se estenda a um automorfismo de G.

Proposição 3.1.1. *Seja* $G = N_{r,c}^{\mathbb{Q}} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle^{\mathbb{Q}}$, *onde* $N_{r,c} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle$. *Se os elementos* $X_1 = x_1^{\alpha_{11}} \cdots x_r^{\alpha_{1r}} g_1$, $\ldots$, $X_r = x_1^{\alpha_{r1}} \cdots x_r^{\alpha_{rr}} g_r$, *com* $g_1, \ldots, g_r \in G'$ *são tais que* $\{(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1r}), \cdots, (\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rr})\}$ *é uma base do espaço vetorial* $\mathbb{Q}^r$ *sobre* $\mathbb{Q}$, *então a função*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : x_1 & \longmapsto & X_1 \\ x_2 & \longmapsto & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & \longmapsto & X_r \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G. Por outro lado, para todo automorfismo φ de G existem elementos $X_1 = x_1^{\alpha_{11}} \cdots x_r^{\alpha_{1r}} g_1$, ..., $X_r = x_1^{\alpha_{r1}} \cdots x_r^{\alpha_{rr}} g_r$, com $g_1, \ldots, g_r \in G'$ e $\{(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1r}), \cdots, (\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rr})\}$ é uma base de $\mathbb{Q}^r$ tais que $x_i^{\varphi} = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Demonstração. Note que o subgrupo r-gerado $\langle X_1, \ldots, X_r \rangle$ de G tem classe de nilpotência no máximo c. Como $N_{r,c}$ é nilpotente livre, existe um único homomorfismo

$$\bar{\varphi} : N_{r.c} \longrightarrow \langle X_1, \ldots, X_r \rangle$$

que completa o diagrama

$$\begin{array}{ccc} N_{r,c} & & \\ \uparrow \iota & \overset{\exists!\ \bar{\varphi}}{\searrow} & \\ \{x_1, \ldots, x_r\} & \xrightarrow[\varphi]{} & \langle X_1, \ldots, X_r \rangle \end{array}$$

Assim $\bar{\varphi}$ se estende a um homomorfismo de G em G. Provaremos que φ se estende a um automorfismo de G por indução em c. Se $c = 1$, então G é um $\mathbb{Q}-$espaço vetorial de dimensão r e φ se estende claramente a um automorfismo de G. Suponha $c > 1$. Por indução, a função φ induz um automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_1 : G/Z(G) &\longrightarrow G/Z(G) \\ gZ(G) &\longmapsto g^{\bar{\varphi}} Z(G) \end{aligned}$$

Daí, $\langle X_1 Z(G), \cdots, X_r Z(G) \rangle^{\mathbb{Q}} = G/Z(G)$ e para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ existem $q_{i1}, \ldots, q_{ir} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x_i Z(G) = X_1^{q_{i1}} \cdots X_r^{q_{ir}} y_i Z(G),\ y_i \in G' \setminus Z(G).$$

Agora, tome $w(x_1, \ldots, x_r)$ um comutador básico em $Z(G)$. Temos

$$w(x_1, \ldots, x_r) = w(X_1^{q_{11}} \ldots X_r^{q_{1r}} y_1, \ldots, X_1^{q_{r1}} \ldots X_r^{q_{rr}} y_r) = w(X_1^{q_{11}} \ldots X_r^{q_{1r}}, \ldots, X_1^{q_{r1}} \ldots X_r^{q_{rr}}).$$

que está em $\langle u \mid u \text{ é comutador básico em } X_i, i = 1, \ldots, r \rangle^{\mathbb{Q}}$. Considere o conjunto

$$\{u \mid u \text{ é comutador básico em } X_i\} = U.$$

Então U é conjunto gerador do $\mathbb{Q}-$espaço vetorial $Z(G)$. Mas $|U| = \dim(Z(G))$, logo, U é base de $Z(G)$. Daí

$$\bar{\varphi} : w(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto w(X_1, \ldots, X_r)$$

se estende a um isomorfismo de $Z(G)$ em $Z(G)$, ou seja, um automorfismo de $Z(G)$. Note que,

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : G &\longrightarrow G \\ x_i &\longmapsto X_i, \quad \text{para } i = 1,2,\ldots,r\end{aligned}$$

é um homomorfismo bem definido. Seja $g \in G$. Então $g = hz$, com $gZ(G) = hZ(G)$. Mas φ_1 é sobrejetora, logo existe $kZ(G)$ tal que

$$(kZ(G))^{\varphi_1} = hZ(G).$$

$$k^{\bar{\varphi}}Z(G) = hZ(G).$$

Em particular, existe z_1 tal que

$$k^{\bar{\varphi}}z_1 = hz = g.$$

Como $z_1 \in Z(G)$ e $\bar{\varphi}|_{Z(G)}$ é um automorfismo, existe $z_2 \in Z(G)$ tal que $z_1 = z_2^{\bar{\varphi}}$. Daí

$$g = k^{\bar{\varphi}}z_1 = k^{\bar{\varphi}}z_2^{\bar{\varphi}} = (kz_2)^{\bar{\varphi}}.$$

Suponha $g^{\bar{\varphi}} = 1$. Então, $\bar{g}^{\varphi_1} = Z(G)$. Daí, $\bar{g}^{\varphi_1} = g^{\bar{\varphi}}Z(G) = Z(G)$. Logo $g^{\bar{\varphi}} \in Z(G)$, assim, $g \in Z(G)$ e $g = 1$.

Para concluir, suponha φ um automorfismo de G. Então

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : G/G' &\longrightarrow G/G' \\ gG' &\longmapsto g^{\varphi}G'\end{aligned}$$

é um automorfismo. Daí

$$\begin{aligned}(x_iG')^{\bar{\varphi}} &= x_i^{\varphi}G' \\ &= x_1^{\alpha_{i1}}\ldots x_r^{\alpha_{ir}}G'\end{aligned}$$

Em particular, para cada $i = 1,2,\ldots,r$ existe $g_i \in G'$ tal que

$$x_i^{\varphi} = x_1^{\alpha_{i1}}\ldots x_r^{\alpha_{ir}}g_i = X_ig_i.$$

Que $\{(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{ir}),\ldots,(\alpha_{r1},\ldots,\alpha_{rr})\}$ é uma base de $\mathbb{Q}^r$ segue do fato de que $\bar{\varphi}$ é isomorfismo de $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais.

□

3.2 Os grupos $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ com uma quantidade finita de órbitas por automorfismos

Nesta subseção, iremos provar que os grupos $N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ e $N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$ possuem quantidades finitas de órbitas por automorfismos.

Proposição 3.2.1. *O grupo $G = N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ possui $\lambda(G)+2$ órbitas por automorfismos, onde $\lambda(G)$ é a largura de G.*

Demonstração. Considere $N_{r,2} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle$. Assim

$$G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r\rangle^{\mathbb{Q}}.$$

Escreva $r = 2k$ se r for par e $r = 2k+1$ se for impar. Provaremos que as órbitas por automorfismos de G são as seguintes

$$1^{Aut(G)}, [x_2,x_1]^{Aut(G)}, ([x_2,x_1][x_4,x_3])^{Aut(G)}, \ldots, ([x_2,x_1][x_4,x_3]\ldots[x_k,x_{k-1}])^{Aut(G)},$$

$$x_1^{Aut(G)} = G \setminus Z(G).$$

Note que $G = \{1\} \dot{\bigcup} (Z(G)\setminus\{1\}) \dot{\bigcup} (G\setminus Z(G))$ e $Z(G) = G'$. Seja

$$g = x_1^{\alpha_{11}} \ldots x_r^{\alpha_{1r}} z \in G \setminus Z(G),$$

onde $z \in Z(G)$ e $(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1r}) \in \mathbb{Q}^r \setminus \{(0,\ldots,0)\}$. Como o vetor $(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1r}) \in \mathbb{Q}^r$ é não nulo, segue que existe uma base

$$\{(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1r}),(\alpha_{21},\ldots,\alpha_{2r}),\ldots,(\alpha_{r1},\ldots,\alpha_{rr})\}$$

de $\mathbb{Q}^r$. Defina $g_2 = x_1^{\alpha_{21}} \ldots x_r^{\alpha_{2r}}, \ldots, g_r = x_1^{\alpha_{r1}} \ldots x_r^{\alpha_{r1}} \in G$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi : x_1 & \longmapsto & g \\ x_2 & \longmapsto & g_2 \\ x_3 & \longmapsto & g_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & \longmapsto & g_r \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\varphi} = g$. Assim $G \setminus Z(G) = x_1^{Aut(G)}$.

Agora, provaremos que

$$Z(G) \setminus \{1\} = [x_2,x_1]^{Aut(G)} \dot{\bigcup} ([x_2,x_1][x_4,x_3])^{Aut(G)} \dot{\bigcup} \ldots \dot{\bigcup} ([x_2,x_1][x_4,x_3]\ldots[x_k,x_{k-1}])^{Aut(G)}.$$

Seja $z \in Z(G)$, com $\lambda(z) = n$, com $1 \leq n \leq \lambda(G)$. Podemos escrever z da seguinte maneira

$$z = \underbrace{[z_1,z_2][z_3,z_4]\cdots[z_{2n-1},z_{2n}]}_{n}$$

com $z_i = x_1^{\beta_{i1}} \cdots x_r^{\beta_{ir}}$ e $v_i = (\beta_{i1}, \cdots, \beta_{ir}) \in \mathbb{Q}^r$. Afirmamos que o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_{2n-1}, v_{2n}\}$ é linearmente independente no $\mathbb{Q}$-espaço vetorial $\mathbb{Q}^r$. Suponha, para efeito de contradição, que

$$v_{2n} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{2n-1} v_{2n-1}$$

com $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. Então

$$z_{2n} = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_{2n-1}^{\lambda_{2n-1}}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1,2,\ldots,r$. Daí

$$\begin{aligned} z &= [z_1,z_2]\cdots[z_{2n-1}, z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_{2n-1}^{\lambda_{2n-1}}] \\ &= [z_1,z_2]\cdots[z_{2n-3},z_{2n-2}]([z_{2n-1},z_1]^{\lambda_1}[z_{2n-1},z_2]^{\lambda_2}\cdots[z_{2n-1},z_{2n-3}]^{\lambda_{2n-3}}[z_{2n-1},z_{2n-2}]^{\lambda_{2n-2}}) \\ &= [z_1,z_2]\cdots[z_{2n-3},z_{2n-2}]([z_1,z_{2n-1}^{-\lambda_1}][z_2,z_{2n-1}^{-\lambda_2}]\cdots[z_{2n-3},z_{2n-1}^{-\lambda_{2n-3}}][z_{2n-2},z_{2n-1}^{-\lambda_{2n-2}}]) \\ &= ([z_1,z_2][z_1,z_{2n-1}^{-\lambda_1}][z_2,z_{2n-1}^{-\lambda_2}])\ldots([z_{2n-3},z_{2n-2}][z_{2n-3},z_{2n-1}^{-\lambda_{2n-3}}][z_{2n-2},z_{2n-1}^{-\lambda_{2n-2}}]) \\ &= [z_1 z_2^{\lambda_2/\lambda_1}, z_2 z_{2n-1}^{-\lambda_1}]\ldots[z_{2n-3} z_{2n-2}^{\lambda_{2n-2}/\lambda_{2n-3}}, z_{2n-2} z_{2n-1}^{-\lambda_{2n-3}}] \end{aligned}$$

Assim,

$$z = \underbrace{[z_1 z_2^{\lambda_2/\lambda_1}, z_2 z_{2n-1}^{-\lambda_1}]\ldots[z_{2n-3} z_{2n-2}^{\lambda_{2n-2}/\lambda_{2n-3}}, z_{2n-2} z_{2n-1}^{-\lambda_{2n-3}}]}_{n-1}$$

uma contradição com a largura de z ser igual a n.

Como o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_{2n}\}$ é linearmente independente, podemos adicionar vetores $v_{2n+1}, \cdots, v_r$ para completá-lo a uma base de $\mathbb{Q}^r$. Seja $z_j = x_1^{\beta_{j1}} \cdots x_r^{\beta_{jr}}$, com $2n+1 \leq j \leq r$, $\beta_{jl} \in \mathbb{Q}$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi_r : x_1 & \longmapsto & z_1 \\ x_2 & \longmapsto & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n} & \longmapsto & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & \longmapsto & z_r \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que

$$(\underbrace{[x_2,x_1][x_4,x_3]\ldots[x_{2n},x_{2n-1}]}_{n})^{\varphi_n} = [z_2,z_1][z_4,z_3]\ldots[z_{2n},z_{2n-1}].$$

O resultado segue. □

Uma demonstração alternativa resulta de uma aplicação direta da proposição anterior e mostra que o grupo do Exemplo 1.1.6 possui exatamente 3 órbitas por automorfismos. De fato, pelo Exemplo 1.2.36, $UT_3(\mathbb{Q}) \simeq N_{2,2}^{\mathbb{Q}}$ e pela Proposição 1.2.46, $\lambda(G) = 1$. Portanto,

$$\omega(G) = \omega(UT_3(\mathbb{Q})) = 1+2 = 3.$$

Alternativamente, construiremos os automorfismos correspondentes. Pelo Teorema 1.2.26,

$$x_1, x_2, [x_2,x_1]$$

é uma sequência básica de comutadores básicos de G. Como $[x_2,x_1] \in Z(G)$, dado $z \in Z(G) \setminus \{1\}$, podemos escrever z como $z = [x_2,x_1]^{\beta_1}$, com $\beta_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 : x_1 & \longmapsto & x_1^{\beta_1}[x_2,x_1]^{\beta_2} \\ x_2 & \longmapsto & x_2 \end{array} \qquad \text{com } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}, \beta_1 \neq 0$$

se estende a um automorfismo de G, e é tal que

$$([x_2,x_1])^{\sigma_1} = [x_2,x_1]^{\beta_1}.$$

Logo, $G' = Z(G) \setminus \{1\}$ ocupa uma órbita por automorfismos.

Agora, consideramos $g \in G \setminus G'$. Neste caso, $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_2, x_1]^{\alpha_3}$ com α_1, α_2 não ambos nulos. Assim $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Analisaremos então os possíveis casos.

Caso 1: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 \neq 0$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2 : x_1 & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} [x_2, x_1]^{\alpha_3} \\ x_2 & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\sigma_2} = x_1^{\alpha_1} [x_2, x_1]^{\alpha_3}$.

Caso 2: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. A função

$$\begin{array}{rcl} \sigma_3 : x_1 & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} \\ x_2 & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

que, pela Proposição 3.1.1, se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\sigma_3} = x_1^{\alpha_1}$.

Caso 3: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 = 0$. A função

$$\begin{array}{rcl} \sigma_4 : x_1 & \longmapsto & x_2^{\alpha_2} \\ x_2 & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

que, pela Proposição 3.1.1, se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\sigma_4} = x_2^{\alpha_2}$.

Caso 4: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$. A função

$$\begin{array}{rcl} \sigma_5 : x_1 & \longmapsto & x_2^{\alpha_2} [x_2, x_1]^{\alpha_3} \\ x_2 & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

que, pela Proposição 3.1.1, se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\sigma_5} = x_2^{\alpha_2} [x_2, x_1]^{\alpha_3}$.

Caso 5: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 = 0$. A função

$$\begin{array}{rcl} \sigma_6 : x_1 & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \\ x_2 & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

que, pela Proposição 3.1.1, se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\sigma_6} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.

Caso 6: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$. A função

$$\begin{aligned} \sigma_7 : x_1 &\longmapsto x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_2, x_1]^{\alpha_3} \\ x_2 &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

que, pela Proposição 3.1.1, se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\sigma_7} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_2, x_1]^{\alpha_3}$.

Portanto, todo elemento em $G \setminus G' \in x_1^{\mathrm{Aut}(G)}$. Como $1^{\mathrm{Aut}(G)} = \{1\}$, segue que $\omega(G) = 3$.

Mostraremos agora que o grupo $N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$ possui exatamente 4 órbitas por automorfismos.

Proposição 3.2.2. *O grupo $G = N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$ possui* 4 *órbitas por automorfismos.*

Demonstração. Seja $N_{2,3} = \langle x_1, x_2 \rangle$, assim

$$G = \langle x_1, x_2 \rangle^{\mathbb{Q}}.$$

Os comutadores básicos de G de peso 1 são x_1, x_2 que ordenamos como $x_1 < x_2$. Logo, uma sequência de comutadores básicos de G é $x_1, x_2, [x_2, x_1], [x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2]$. Note que, $[x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2] \in Z(G)$. Provaremos que as órbitas por automorfismos de G são

$$1^{Aut(G)}, \;\; x_1^{Aut(G)} = G \setminus G', \;\; [x_2, x_1]^{Aut(G)} = G' \setminus Z(G), \quad [x_2, x_1, x_1]^{Aut(G)} = Z(G) \setminus \{1\}.$$

Claramente $1^{Aut(G)} = \{1\}$.

Seja $g_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} f \in G \setminus G'$, onde $f \in G'$ e $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como o vetor $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Q}^2$ é não nulo, segue que existe uma base

$$\{(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4)\}$$

de $\mathbb{Q}^2$. Defina $g_2 = x_1^{\alpha_3} x_2^{\alpha_4}$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{aligned} \varphi : x_1 &\longmapsto g_1 \\ x_2 &\longmapsto g_2 \end{aligned}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $x_1^{\varphi} = g_1$. Assim $G \setminus G' = x_1^{Aut(G)}$.

Seja $h \in G' \setminus Z(G)$. Então podemos escrever h da seguinte maneira

$$h = [x_2, x_1]^{\alpha_1} [x_2, x_1, x_1]^{\alpha_2} [x_2, x_1, x_2]^{\alpha_3},$$

com $\alpha_1 \neq 0$. Provaremos que $[x_2, x_1]^{Aut(G)}$ constitui uma única órbita. Analisaremos os quatro casos possíveis.

Caso 1: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 \neq 0$.

Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : x_1 & \longmapsto & x_1[x_2,x_1]^{\frac{-\alpha_3}{\alpha_1}+\frac{(\alpha_1-1)}{2}} \\ x_2 & \longmapsto & x_2^{\alpha_1} \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $[x_2,x_1]^{\varphi_1} = [x_2,x_1]^{\alpha_1}[x_2,x_1,x_2]^{\alpha_3}$.

Caso 2: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 = 0$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : x_1 & \longmapsto & x_2^{-1}[x_2,x_1]^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+\frac{(\alpha_1-1)}{2}} \\ x_2 & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $[x_2,x_1]^{\varphi_2} = [x_2,x_1]^{\alpha_1}[x_2,x_1,x_1]^{\alpha_2}$.

Caso 3: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : x_1 & \longmapsto & x_1^{\alpha_1}[x_2,x_1]^{-\alpha_3} \\ x_2 & \longmapsto & x_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}-\frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2\alpha_3}}x_2 \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $[x_2,x_1]^{\varphi_3} = [x_2,x_1]^{\alpha_1}[x_2,x_1,x_1]^{\alpha_2}[x_2,x_1,x_2]^{\alpha_3}$.

Caso 4: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi_4 : x_1 & \longmapsto & x_2[x_2,x_1]^{-\frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{2\alpha_1}} \\ x_2 & \longmapsto & x_1^{-\alpha_1} \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $[x_2,x_1]^{\varphi_4} = [x_2,x_1]^{\alpha_1}$.

Portanto, $G'\backslash Z(G) = [x_2,x_1]^{Aut(G)}$.

Seja $z \in Z(G)\backslash\{1\}$. Então $z = [x_2,x_1,x_1]^{\alpha_1}[x_2,x_1,x_2]^{\alpha_2}$, onde $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{Q}^2\backslash\{(0,0)\}$. Provaremos que $[x_2,x_1,x_1]^{Aut(G)}$ constitui uma única órbita. Consideraremos os casos possíveis.

Caso 1: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 : x_1 & \longmapsto & x_1 \\ x_2 & \longmapsto & x_2^{\alpha_1} \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $[x_2,x_1,x_1]^{\phi} = [x_2,x_1,x_1]^{\alpha_1}$.

Caso 2: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$. pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \phi_2 : x_1 & \longmapsto & x_1^{\alpha_2} \\ x_2 & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $[x_2,x_1,x_1]^{\phi_2} = [x_2,x_1,x_2]^{\alpha_2}$.

Caso 3: $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$. Pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{array}{rcl} \phi_3 : x_1 & \longmapsto & x_1 x_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \\ x_2 & \longmapsto & x_2^{\alpha_2} \end{array}$$

se estende a um automorfismo de G e é tal que $[x_2,x_1,x_1]^{\phi_3} = [x_2,x_1,x_1]^{\alpha_1}[x_2,x_1,x_2]^{\alpha_2}$.

Logo, $Z(G)\backslash\{1\} = [x_2,x_1,x_1]^{Aut(G)}$. Daí $\omega(G) = 4$ e

$$G = \{1\} \ \dot{\bigcup} \ x_1^{Aut(G)} \ \dot{\bigcup} \ [x_2,x_1]^{Aut(G)} \ \dot{\bigcup} \ [x_2,x_1,x_1]^{Aut(G)}.$$

□

3.3 Os grupos $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ com uma quantidade infinita de órbitas por automorfismos

Nessa seção, provaremos que, a não ser pelos casos $N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ e $N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$, o grupo $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ possui uma quantidade infinita de órbitas por automorfismos.

Proposição 3.3.1. *O grupo $G = N_{2,c}^{\mathbb{Q}}$ não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos se $c > 3$.*

Demonstração. Provaremos o caso $N_{2,4}^{\mathbb{Q}}$ e o caso geral segue por indução. Seja $N_{2,4} = \langle x_1,x_2\rangle$. Assim, $G = N_{2,4}^{\mathbb{Q}} = \langle x_1,x_2\rangle^{\mathbb{Q}}$. Ordenamos os comutadores básicos de peso 1 como $x_1 < x_2$. Então, os comutadores básicos centrais são $[x_2,x_1,x_1,x_1], [x_2,x_1,x_1,x_2]$ e $[x_2,x_1,x_2,x_2]$. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi : x_1 & \longmapsto & x_1^a \ x_2^b g_1 \\ x_2 & \longmapsto & x_1^c \ x_2^d g_2 \end{array}$$

com, $a,b,c,d \in \mathbb{Q},\ g_1,g_2 \in G'$. Pela Proposição 3.1.1, essa função se estende a um automorfismo de G. Seja

$$[x_2,x_1,x_1,x_1]^u\,[x_2,x_1,x_1,x_2]^v\,[x_2,x_1,x_2,x_2]^w \in Z(G)$$

com $(u,v,w) \in \mathbb{Q}^3\backslash\{(0,0,0)\}$. Observe que

$$([x_2,x_1,x_1,x_1]^u\,[x_2,x_1,x_1,x_2]^v\,[x_2,x_1,x_2,x_2]^w)^\varphi = [x_2,x_1,x_1,x_1]^\alpha [x_2,x_1,x_1,x_2]^\beta [x_2,x_1,x_2,x_2]^\gamma,$$

onde

$$\alpha = ua^2D + acvD + c^2wD, \qquad \beta = vD^2, \qquad \gamma = ub^2D + vdbD + d^2wD,$$

e $D = ad - bc$. Assim a ação de φ no $\mathbb{Q}$-espaço vetorial $Z(G)$ de dimensão 3 é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} a^2D & 0 & b^2D \\ acD & D^2 & bdD \\ c^2D & 0 & d^2D \end{pmatrix}$$

Em particular, o vetor $[x_2,x_1,x_1,x_2]^v$ é levado pela φ em

$$[x_2,x_1,x_1,x_1]^{acDv}[x_2,x_1,x_1,x_2]^{D^2v}[x_2,x_1,x_2,x_2]^{bdDv}.$$

Suponha, por absurdo, que G possua uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Como existem infinitos números primos e $\omega(G) < \infty$, existem primos distintos p,q e $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ tais que

$$([x_2,x_1,x_1,x_2]^p)^\varphi = [x_2,x_1,x_1,x_1]^{acDp}[x_2,x_1,x_1,x_2]^{D^2p}[x_2,x_1,x_2,x_2]^{bdDp} = [x_2,x_1,x_1,x_2]^q.$$

Como $D \neq 0$, podemos supor que ou $a = c = 0$ ou $b = d = 0$, o que resulta em

$$([x_2,x_1,x_1,x_2]^p)^\varphi = [x_2,x_1,x_1,x_2]^{D^2p} = [x_2,x_1,x_1,x_2]^q.$$

Então $D^2p = q$, ou seja, $D^2 = \dfrac{q}{p}$ o que não ocorre em $\mathbb{Q}$. Essa contradição demonstra que G não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos.

Como $N_{r,c-1} \simeq \dfrac{N_{r,c}}{\gamma_c(N_{r,c})}$, temos em particular $N_{2,4}^{\mathbb{Q}} \simeq \dfrac{N_{2,5}^{\mathbb{Q}}}{Z(N_{2,5}^{\mathbb{Q}})}$. Sabendo que o grupo $N_{2,4}^{\mathbb{Q}}$ não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos, concluímos que o mesmo vale para $N_{2,5}^{\mathbb{Q}}$. Por indução, obtemos que o grupo $N_{2,c}^{\mathbb{Q}}$ não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos para todo $c \geq 4$. □

Proposição 3.3.2. *O grupo $N_{3,3}^{\mathbb{Q}}$ não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos.*

Demonstração. Sejam $N_{3,3} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ e $G = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle^{\mathbb{Q}}$. Ordenamos os comutadores básicos de peso 1 da forma $x_1 < x_2 < x_3$. Os comutadores básicos de peso 3 são $[x_2,x_1,x_1]$, $[x_2,x_1,x_2]$, $[x_2,x_1,x_3]$, $[x_3,x_1,x_1]$, $[x_3,x_1,x_2]$, $[x_3,x_1,x_3]$, $[x_3,x_2,x_2]$ e $[x_3,x_2,x_3]$. Suponha, por absurdo, que G possua uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Considere o elemento $[x_2,x_1,x_1]^p[x_3,x_2,x_3] \in Z(G)$, onde p é um número primo. Como a quantidade de números primos é infinita, deve existir um automorfismo φ de G tal que $([x_2,x_1,x_1]^p[x_3,x_2,x_3])^\varphi = [x_2,x_1,x_1]^q[x_3,x_2,x_3]$, com p,q números primos distintos. Como φ é automorfismo de G, pela Proposição 3.1.1, φ induz uma função

$$\begin{aligned} \varphi : x_1 &\longmapsto x_1^{\alpha_{11}}\ x_2^{\alpha_{12}}\ x_3^{\alpha_{13}} f_1 \\ x_2 &\longmapsto x_1^{\alpha_{21}}\ x_2^{\alpha_{22}}\ x_3^{\alpha_{23}} f_2 \\ x_3 &\longmapsto x_1^{\alpha_{31}}\ x_2^{\alpha_{32}}\ x_3^{\alpha_{33}} f_3 \end{aligned}$$

tal que $\{(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13}),(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23}),(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})\}$ é uma base de $\mathbb{Q}^3$ e $f_1, f_2, f_3 \in G'$. Assim,

$$([x_2,x_1,x_1]^p\ [x_3,x_2,x_3])^\varphi = z_1.z_2.z_3.z_4.z_5.z_6.z_7.z_8 = [x_2,x_1,x_1]^q[x_3,x_2,x_3]$$

onde

$z_1 = [x_2,x_1,x_1]^{p\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{31}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})}$

$z_2 = [x_2,x_1,x_2]^{p\alpha_{12}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{32}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})}$

$z_3 = [x_2,x_1,x_3]^{p\alpha_{13}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{33}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})-p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})-\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32})}$

$z_4 = [x_3,x_1,x_1]^{p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})}$

$z_5 = [x_3,x_1,x_2]^{p\alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{32}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})+p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})+\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32})}$

$z_6 = [x_3,x_1,x_3]^{p\alpha_{13}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})}$

$z_7 = [x_3,x_2,x_2]^{p\alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})+\alpha_{32}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32})}$

$z_8 = [x_3,x_2,x_3]^{p\alpha_{13}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})+\alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32})}$.

Obtemos dessa forma o seguinte sistema não linear S com 8 equações e 9 incógnitas

$$S \begin{cases} p\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{31}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31}) = q & (1) \\ p\alpha_{12}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{32}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31}) = 0 & (2) \\ p\alpha_{13}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{33}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})-p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})-\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32}) = 0 & (3) \\ p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31}) = 0 & (4) \\ p\alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{32}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})+p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})+\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32}) = 0 & (5) \\ p\alpha_{13}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31}) = 0 & (6) \\ p\alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})+\alpha_{32}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32}) = 0 & (7) \\ p\alpha_{13}(\alpha_{23}\alpha_{12}-\alpha_{22}\alpha_{13})+\alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{22}-\alpha_{23}\alpha_{32}) = 1 & (8) \end{cases}$$

Considere o subsistema homogêneo formado pelas equações (4) e (6)

$$S_1 \begin{cases} p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})=0 & (4)\\ p\alpha_{13}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})=0. & (6)\end{cases}$$

Se o sistema S tem solução em $\mathbb{Q}^9$, então o sistema S_1 também tem solução e assim o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} p\alpha_{11}X+\alpha_{31}Y=0\\ p\alpha_{13}X+\alpha_{33}Y=0\end{cases}$$

compartilha dessa solução. Seja $M=\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{13}$. Temos dois casos: $M\neq 0$ ou $M=0$.

Primeiramente considere o subsistema formado pelas equações (1) e (2)

$$\begin{cases} p\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{31}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})=q & (1)\\ p\alpha_{12}(\alpha_{22}\alpha_{11}-\alpha_{12}\alpha_{21})+\alpha_{32}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})=0 & (2)\end{cases}$$

e defina $D=\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{31}$. Provaremos que $D\neq 0$. Suponha para efeito de contradição que $D=0$. Note que D é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{pmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{31}=0$$

Afirmamos que o vetor $(\alpha_{11},\alpha_{12})\in\mathbb{Q}\setminus\{(0,0)\}$. De fato, se $\alpha_{11}=\alpha_{12}=0$, das equações (1) e (2), obtemos $\alpha_{32}=0$. Assim, a equação (5) se torna $\alpha_{31}\alpha_{33}\alpha_{22}=0$. Concluímos que $\alpha_{33}=0$. Pois, da equação (1), temos $\alpha_{22}\neq 0$ e $\alpha_{31}\neq 0$. Note que de (1) temos $\alpha_{22}=-\dfrac{q}{\alpha_{31}^2}$, e de (8) temos $\alpha_{22}=-\dfrac{1}{p\alpha_{13}^2}$. Igualando, obtemos $qp=\dfrac{\alpha_{31}^2}{\alpha_{13}^2}$, um absurdo em $\mathbb{Q}$.

Daí, existe $r\in\mathbb{Q}\setminus 0$ tal que $(\alpha_{11},\alpha_{12})=r(\alpha_{31},\alpha_{32})$, isto é, $\alpha_{11}=r\alpha_{31}$ e $\alpha_{12}=r\alpha_{32}$. Substituindo essas igualdades em (1) e em (2) obtemos respectivamente

$$pr\alpha_{31}(\alpha_{22}r\alpha_{31}-r\alpha_{32}\alpha_{21})+\alpha_{31}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})=q$$

$$pr^2\alpha_{31}(\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{32}\alpha_{21})-\alpha_{31}(-\alpha_{32}\alpha_{21}+\alpha_{22}\alpha_{31})=q$$

$$\underbrace{(\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{32}\alpha_{21})}_{\neq 0}\underbrace{(pr^2\alpha_{31}-\alpha_{31})}_{\neq 0}=q.$$

e

$$pr\alpha_{32}(\alpha_{22}r\alpha_{31}-r\alpha_{32}\alpha_{21})+\alpha_{32}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})=0$$

$$pr^2\alpha_{32}(\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{32}\alpha_{21})+\alpha_{32}(\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{22}\alpha_{31})=0$$

$$pr^2\alpha_{32}(\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{32}\alpha_{21})-\alpha_{32}(-\alpha_{32}\alpha_{21}+\alpha_{22}\alpha_{31})=0$$

$$\underbrace{(\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{32}\alpha_{21})}_{\neq 0}(pr^2\alpha_{32}-\alpha_{32})=0.$$

Assim, se $\alpha_{32}\neq 0$, então $pr^2\alpha_{32}=\alpha_{32}$, portanto $pr^2=1$. Logo, $r^2=\dfrac{1}{p}$, um absurdo em $\mathbb{Q}$. Logo, $\alpha_{32}=0$, o que implica $\alpha_{12}=0$, pois $(\alpha_{11},\alpha_{12})=r(\alpha_{31},\alpha_{32})$ de onde concluímos $\alpha_{11}\neq 0$ e $\alpha_{31}\neq 0$. De maneira análoga, considerando as equações (7) e (8), segue que $\alpha_{13}\neq 0$ e $\alpha_{33}\neq 0$. Como $\alpha_{12}=\alpha_{32}=0$, é imediato pelas equações (1) e (8) que $\alpha_{22}\neq 0$. Portanto, as equações a seguir devem ser satisfeitas simultaneamente.

$$\begin{cases} p\alpha_{11}^2\alpha_{22}-\alpha_{31}^2\alpha_{22}=q & (1')\\ p\alpha_{11}\alpha_{13}-\alpha_{33}\alpha_{31}=0 & (3')\\ p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})=0 & (4')\\ p\alpha_{11}(-\alpha_{22}\alpha_{13})+\alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{22})=0 & (5')\\ p\alpha_{13}(\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{21}\alpha_{13})+\alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{21}-\alpha_{23}\alpha_{31})=0 & (6')\\ -p\alpha_{13}^2\alpha_{22}+\alpha_{33}^2\alpha_{22}=1 & (8') \end{cases}$$

Da equação $(1')$, temos

$$\alpha_{22}(p\alpha_{11}^2-\alpha_{31}^2)=q. \tag{3.1}$$

E da equação $(8')$

$$\alpha_{22}=\frac{1}{-p\alpha_{13}^2+\alpha_{33}^2}. \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) em (3.1), obtemos

$$(p\alpha_{11}^2-\alpha_{31}^2)=q(\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2). \tag{3.3}$$

Da equação $(3')$ obtemos $\alpha_{31}=\dfrac{p\alpha_{11}\alpha_{13}}{\alpha_{33}}$. Substituindo essa igualdade em (3.3), temos

$$p\alpha_{11}^2-\frac{p^2\alpha_{11}^2\alpha_{13}^2}{\alpha_{33}^2}=q(\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2).$$

$$p\alpha_{11}^2\alpha_{33}^2-p^2\alpha_{11}^2\alpha_{13}^2=q\alpha_{33}^2(\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2)$$

$$p\alpha_{11}^2(\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2)=q\alpha_{33}^2(\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2)\quad\text{com}\quad\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2\neq 0$$

$$\alpha_{11}^2=\frac{q\alpha_{33}^2(\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2)}{p(\alpha_{33}^2-p\alpha_{13}^2)}\Longrightarrow\frac{\alpha_{11}^2}{\alpha_{33}^2}=\frac{q}{p}.$$

Um absurdo em $\mathbb{Q}$. Logo, $D \neq 0$.

Caso 1. $M \neq 0$

Como $M \neq 0$, temos $\alpha_{11}\alpha_{33} \neq \alpha_{31}\alpha_{13}$. Consideramos o sistema formado pelas equações (4) e (6)

$$\begin{cases} p\alpha_{11}x + \alpha_{31}y = 0 \\ p\alpha_{13}x + \alpha_{33}y = 0 \end{cases}$$

Então $x := (\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{21}\alpha_{13}) = 0$ e $y := (\alpha_{33}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{31}) = 0$

Com isso, obtemos o seguinte sistema com as equações $(5), (7)$ e (8) :

$$\begin{cases} p\alpha_{11}(\alpha_{23}\alpha_{12} - \alpha_{22}\alpha_{13}) + \alpha_{31}(\alpha_{33}\alpha_{22} - \alpha_{23}\alpha_{32}) = 0 \\ p\alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{12} - \alpha_{22}\alpha_{13}) + \alpha_{32}(\alpha_{33}\alpha_{22} - \alpha_{23}\alpha_{32}) = 0 \\ p\alpha_{13}(\alpha_{23}\alpha_{12} - \alpha_{22}\alpha_{13}) + \alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{22} - \alpha_{23}\alpha_{32}) = 1 \end{cases}$$

Definindo $x_1 := \alpha_{23}\alpha_{12} - \alpha_{22}\alpha_{13}$ e $y_1 := \alpha_{33}\alpha_{22} - \alpha_{23}\alpha_{32}$ temos

$$x_1 = -\frac{\alpha_{31}y_1}{p\alpha_{11}} \text{ e } y_1(\underbrace{\alpha_{32}\alpha_{11} - \alpha_{12}\alpha_{31}}_{D\neq 0}) = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 = 0.$$

Assim, a última equação se reduz ao absurdo $0 = 1$. Logo, esse caso não ocorre.

Caso 2. $M = 0$

Como $M = 0$, temos $\alpha_{11}\alpha_{33} = \alpha_{31}\alpha_{13}$. Note que M é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{31} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Logo, existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $(\alpha_{11}, \alpha_{31}) = s(\alpha_{13}, \alpha_{33})$, ou seja, $\alpha_{11} = s\alpha_{13}$ e $\alpha_{31} = s\alpha_{33}$. Substituindo essas informações em (4) temos

$$ps\alpha_{13}(\alpha_{23}s\alpha_{13} - \alpha_{21}\alpha_{13}) + s\alpha_{33}(\alpha_{33}\alpha_{21} - \alpha_{23}s\alpha_{33}) = 0$$

$$ps\alpha_{13}^2(\alpha_{23}s - \alpha_{21}) + s\alpha_{33}^2(\alpha_{21} - s\alpha_{23}) = 0$$

$$ps\alpha_{13}^2(\alpha_{23}s - \alpha_{21}) - s\alpha_{33}^2(s\alpha_{23} - \alpha_{21}) = 0$$

$$(\alpha_{23}s - \alpha_{21})(ps\alpha_{13}^2 - s\alpha_{33}^2) = 0$$

Se $\alpha_{21} = s\alpha_{23}$, então a primeira e a terceira colunas da matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

são múltiplas e φ não é automorfismo, um absurdo. Logo $ps\alpha_{13}^2 - s\alpha_{33}^2 = 0$. Então, $p = \dfrac{\alpha_{33}^2}{\alpha_{13}^2}$, outro absurdo. Logo, não podemos ter $M = 0$. □

Agora estenderemos a proposição anterior para o grupo $N_{r,3}^{\mathbb{Q}}$.

Proposição 3.3.3. *O grupo $G = N_{r,3}^{\mathbb{Q}}$ não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos se $r \geq 4$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que o grupo $N_{r,3}^{\mathbb{Q}}$ possua uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Como o conjunto dos números primos é infinito, deve existir $\varphi \in Aut(N_{r,3}^{\mathbb{Q}})$ tal que

$$([x_2,x_1,x_1]^p[x_3,x_2,x_3])^\varphi = [x_2,x_1,x_1]^q[x_3,x_2,x_3]$$

com p,q primos distintos. Mas

$$([x_2,x_1,x_1]^p[x_3,x_2,x_3])^\varphi = [x_2^\varphi,x_1^\varphi,x_1^\varphi]^p[x_3^\varphi,x_2^\varphi,x_3^\varphi] =$$

$$= [w_2(x_1,\cdots,x_r),w_1(x_1,\cdots,x_r),w_1(x_1,\cdots,x_r)][w_3(x_1,\cdots,x_r),w_2(x_1,\cdots,x_r),w_3(x_1,\cdots,x_r)]$$

onde, $w_i(x_1,\cdots,x_r)$ são palavras em $x_1,\cdots,x_r$ para $i \in \{1,2,3\}$. Usando a propriedade de comutador $[xy,z] = [x,z]^y[y,z] = [x,z][x,z,y][y,z]$, podemos escrever

$$[w_2(x_1,\cdots,x_r),w_1(x_1,\cdots,x_r),w_1(x_1,\cdots,x_r)][w_3(x_1,\cdots,x_r),w_2(x_1,\cdots,x_r),w_3(x_1,\cdots,x_r)]$$

da seguinte maneira

$$[w_{21}(x_1,x_2,x_3),w_{11}(x_1,x_2,x_3),w_{11}(x_1,x_2,x_3)][w_{31}(x_1,x_2,x_3),w_{21}(x_1,x_2,x_3),w_{31}(x_1,x_2,x_3)]W,$$

onde W é uma palavra em $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\cdots,x_r$ e cada comutador de peso 3 fator de W envolve necessariamente uma das letras $x_4,x_5,\cdots,x_r$. Logo $W = 1$ e pela Proposição 3.1.1, a função

$$\begin{aligned} \varphi|_{N_{3,3}} : x_1 &\longmapsto w_{11}(x_1,x_2,x_3) \\ x_2 &\longmapsto w_{21}(x_1,x_2,x_3) \\ x_3 &\longmapsto w_{31}(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

se estende a um automorfismo do grupo $N_{3,3}^{\mathbb{Q}}$ e é tal que

$$([x_2,x_1,x_1]^p[x_3,x_2,x_3])^{\varphi|_{N_{3,3}}} = [x_2,x_1,x_1]^q[x_3,x_2,x_3]$$

o que, pela Proposição 3.3.2, é um absurdo. □

Utilizando a proposição anterior, segue por indução que $N_{r,c}^{\mathbb{Q}}$ com $r \geq 3$ e $c \geq 3$ não possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos. Temos assim o resultado principal.

Teorema C. *Seja G o $\mathbb{Q}$-completamento de Mal'cev de um grupo nilpotente livre não abeliano r-gerado de classe c. Então G possui uma quantidade finita de órbitas por automorfismos se, e somente se, o grupo G é isomorfo a $N_{r,2}^{\mathbb{Q}}$ com $r \geq 2$ ou isomorfo a $N_{2,3}^{\mathbb{Q}}$.*

Por fim, fica a questão: quais $\mathbb{Q}$-completamentos de Mal'cev de grupos nilpotentes livres de torção possuem finitas órbitas por automorfismos?

Bibliografia

[1] Akhavan-Malayeri, M. and Rhemtulla, A. (1998). Commutator length of abelian-by-nilpotent groups. *Glasgow Mathematical Journal*, 40(1):117–121.

[2] Apps, A. (1982). Boolean powers of groups. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 91, pages 375–396. Cambridge University Press.

[3] Apps, A. (1983). On the structure of $\aleph_0$-categorical groups. *Journal of Algebra*, 81(2):320–339.

[4] Bastos, R. and Dantas, A. C. (2016). On finite groups with few automorphism orbits. *Communications in Algebra*, 44(7):2953–2958.

[5] Bastos, R., Dantas, A. C., and de Melo, E. (2020). Soluble groups with few orbits under automorphisms. *Geometriae Dedicata*, 209(1):119–123.

[6] Bastos, R., Dantas, A. C., and de Melo, E. (2021). Virtually nilpotent groups with finitely many orbits under automorphisms. *Archiv der Mathematik*, 116:261–270.

[7] Bastos, R. A. and Dantas, A. C. (2018). FC-groups with finitely many automorphism orbits. *Journal of Algebra*, 516:401–413.

[8] Clement, A. E., Majewicz, S., and Zyman, M. (2017). *The theory of nilpotent groups*, volume 43. Springer.

[9] Dantas, A. C., Garonzi, M., and Bastos, R. (2017). Finite groups with six or seven automorphism orbits. *Journal of Group Theory*, 20(5):945–954.

[10] de Melo, E. and Kato, J. (2025). Automorphism orbits of the group of unitriangular matrices. *arXiv preprint arXiv:2510.09353*.

[11] Glasby, S. P. (2024). Classifying finite groups G with three Aut(G)-orbits. *arXiv preprint arXiv:2411.11273*.

[12] Hall, M. (1959). The theory of groups the macmillan company. *New York*, 959.

[13] Jabara, E. (2010). Abelian automorphisms groups with a finite number of orbits. *Journal of Algebra*, 323(10):2798–2817.

[14] Jafari, L., Kohl, S., and O'Brien, E. (2021). Automorphism group orbits on finite simple groups. *Communications in Algebra*, 49(8):3294–3300.

[15] Laffey, T. J. and MacHale, D. (1986). Automorphism orbits of finite groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 40(2):253–260.

[16] Li, C. H. and Zhu, Y. Z. (2025). The finite groups with three automorphism orbits. *Journal of Algebra*, (678):677–705.

[17] Macedońska, O. (2007). On difficult problems and locally graded groups. *Journal of mathematical sciences*, 142:1949–1953.

[18] Magnus, W. (1969). Residually finite groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75(2):305–316.

[19] McLain, D. H. (1954). A characteristically simple group. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 50(4):641–642.

[20] Osin, D. (2010). Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems. *Glasgow Mathematical Journal*, 172(1):1–39.

[21] Robinson, D. J. (2012). *A Course in the Theory of Groups*, volume 80. Springer Science & Business Media.

[22] Roman kov, V. A. (2016). The commutator width of some relatively free lie algebras and nilpotent groups. *Siberian Mathematical Journal*, 57(4):679–695.

[23] Schwachhöfer, M. and Stroppel, M. (1999). Finding representatives for the orbits under the automorphism group of a bounded abelian group. *Journal of Algebra*, 211(1):225–239.

[24] Stroppel, M. (2001). Locally compact groups with many automorphisms. *Journal of Group Theory*, (4):427–455.

[25] Stroppel, M. (2002). Locally compact groups with few orbits under automorphisms. In *Top. Proc*, volume 26, pages 819–842.

[26] Zelmanov, E. I. (1997). On the Restricted Burnside problem. In *Fields Medallists' Lectures*, pages 623–632. World Scientific.