



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Dissertação de Mestrado

**Agregação de riscos de mercado e de crédito:
abordagens estocástica e de séries temporais, com
cópulas**

por

Lígia Louzada Freitas

Brasília, 30 de setembro de 2025

Agregação de riscos de mercado e de crédito: abordagens estocástica e de séries temporais, com cópulas

por

Lígia Louzada Freitas

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientadora: Profa. Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Brasília, 30 de setembro de 2025

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Texto aprovado por:

Profa. Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Orientadora, EST/UnB

Prof. Dr. Guilherme Pumi

IME/UFRGS

Prof. Dr. Herbert Kimura

FACE/UnB

Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Suplente, EST/UnB

Il est impossible que l'improbable n'arrive jamais.

(Emil Julius Gumbel)

Para o meu pai.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, expresso minha profunda gratidão à Professora Cira, pelos ensinamentos valiosos, pela constante disponibilidade e pela confiança depositada em mim ao longo desta jornada. Sua orientação competente e generosa foi essencial para a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, por me ensinarem, com exemplo e dedicação, o valor do estudo e da perseverança. Sem a base sólida que me proporcionaram, este percurso não teria sido possível.

Registro também meu sincero agradecimento ao meu companheiro, Claudio, pelo apoio e incentivo constantes durante essa etapa. Sua presença foi fundamental para que eu pudesse seguir adiante com determinação e serenidade.

Estendo meus agradecimentos aos colegas e amigos que compartilharam comigo momentos de aprendizado, troca de experiências e apoio mútuo ao longo da jornada. A convivência acadêmica e pessoal foi decisiva para tornar esta caminhada mais leve e enriquecedora.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O cálculo do risco agregado, tradicionalmente mensurado por meio do *Value at Risk* (VaR) e do *Expected Shortfall* (ES), constitui um desafio devido à complexidade das interdependências entre diferentes categorias de risco. Este trabalho apresenta uma metodologia para a agregação de riscos de mercado e de crédito, inovando ao adotar uma perspectiva centrada no risco de cada contraparte, uma abordagem ainda pouco explorada na literatura.

Para o risco de mercado, o modelo GARCH(1,1) foi empregado com resíduos ajustados à distribuição alfa-estável, que captura efetivamente as caudas pesadas e a assimetria dos retornos financeiros. Paralelamente, o risco de crédito foi modelado com a probabilidade de *default* (PD) derivada de uma extensão do Modelo de Merton que incorpora saltos do Processo de Lévy no preço dos ativos, com a série de PD subsequente ajustada pelo GARCH(1,1) com inovações skew-t. Uma função cópula foi utilizada para modelar a estrutura de dependência entre as duas marginais, e a cópula t-Student revelou ser a de melhor ajuste para a maioria das empresas analisadas.

A aplicação prática da metodologia foi ilustrada por meio de estudo de caso com dados da Localiza e e outras empresas que compõem o índice Ibovespa. Os resultados confirmaram um efeito positivo de diversificação em todos os cenários, indicando que o VaR e o ES agregados da carteira foram consistentemente inferiores à soma ingênua das medidas de risco individuais.

Palavras-chave: Risco de mercado; Risco de crédito; Agregação de riscos; Cópulas; Gestão quantitativa de riscos.

Abstract

Aggregation of market and credit risks: stochastic and time series approaches, with copulas

The calculation of aggregate risk, usually measured by Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES), poses a challenge due to the complexity of interdependencies among different risk categories. This study presents a methodology for aggregating market and credit risks, innovating by adopting a counterparty-centered perspective — an approach still scarcely explored in the literature.

For market risk, the GARCH(1,1) model was employed with residuals fitted to the alpha-stable distribution, effectively capturing the heavy tails and asymmetry of financial returns. In parallel, credit risk was modeled through the probability of default (PD), derived from an extension of Merton's Model that incorporates Lévy Process jumps in asset prices, with the subsequent PD series fitted by a GARCH(1,1) with skew-t innovations. Copula function was applied to model the dependence structure between both marginals distributions, and the Student-t copula proved to be the best fit for most of the firms analyzed.

The practical application of the methodology was illustrated through a case study using data from Localiza and other companies from Ibovespa Index. The results confirmed a positive diversification effect across all scenarios, indicating that the aggregated portfolio VaR and ES were consistently lower than the naïve sum of the individual risk measures.

Keywords: Market risk; Credit risk; Risk aggregation; Copulas; Quantitative risk management.

Sumário

1	Introdução	1
2	Medidas de Risco	7
2.1	Medidas Coerentes de Risco	8
2.2	<i>Value at Risk - VaR</i>	9
2.3	<i>Expected Shortfall - ES</i>	9
2.4	Medidas de Risco Agregado	10
3	Distribuições Alfa-Estáveis	11
4	Cópulas	14
4.1	Função de Distribuição	14
4.2	Definição	16
4.3	Cópulas Elípticas	18
4.4	Cópulas Arquimedianas	20
4.5	Cópulas de Valores Extremos	22
5	Risco de Mercado	28
5.1	Definição	28
5.2	GARCH	28

6 Risco de Crédito	30
6.1 Definição	30
6.2 PD - Modelo de Merton - Movimento Browniano Geométrico	31
6.3 PD - Modelo de Merton - Processo de Lévy	39
7 Método	45
7.1 Processo de análise	45
7.2 Medidas de Risco Agregado	46
8 Estudo de Caso	49
8.1 Base de dados	49
8.2 Distribuição Marginal - Risco de Mercado	50
8.2.1 Ajuste GARCH	51
8.3 Distribuição Marginal - Risco de Crédito	53
8.3.1 Cálculo PD - Modelo de Merton	53
8.3.2 Cálculo PD - Modelo de Merton com saltos	53
8.3.3 Ajuste GARCH	58
8.4 Cópulas	60
8.5 Cálculo do VaR	62
8.6 Outras empresas	67
9 Conclusão	71
Referências Bibliográficas	72
A Movimento Browniano Geométrico	77
B V_T (Modelo de Merton)	79
B.1 Fórmula de Itô geral	79

B.2	Fórmula de Itô simplificada	80
B.3	Valor do ativo no tempo T	80
C	Processo de Poisson	82
D	Medidas Aleatórias	85
E	Processo de Lévy	90
F	V_T (Modelo de Merton com saltos)	93
F.1	Fórmula de Itô para difusões com saltos	93
F.2	Valor do ativo no tempo T	95

Capítulo 1

Introdução

A diversificação é um princípio central na gestão de risco e na teoria do portfólio, cujo objetivo é de reduzir a exposição ao risco por meio da alocação estratégica de ativos. Seja X_1, \dots, X_n uma sequência de riscos e ϱ uma medida de risco. Então, de acordo com ([EMBRECHTS; FURER; KAUFMANN, 2009](#)), o efeito da diversificação é expresso pela seguinte função:

$$\mathcal{D}_\varrho = \sum_{k=1}^n \varrho(X_k) - \varrho\left(\sum_{k=1}^n X_k\right), \quad (1.1)$$

em que se compara a soma das medidas de risco individuais com a medida de risco da soma. Quando $\mathcal{D}_\varrho > 0$, há um efeito positivo de diversificação, indicando que o risco total do portfólio é inferior à soma dos riscos individuais. O cálculo de $\varrho\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$ para riscos dependentes requer estimação da distribuição conjunta de X_1, \dots, X_n . Uma metodologia que permite a estimativa dessa distribuição é a teoria de cópulas.

Como exemplo de função ϱ , tem-se o *Value at Risk* (VaR), que representa a perda máxima esperada em um horizonte de tempo dado certo nível de confiança. Seja c o nível de confiança e L a perda de um ativo ou carteira, uma definição geral dada por ([JORION, 2006](#)) é

$$P(L > VaR) \leq 1 - c$$

Conforme discutido por ([HILLEBRAND; BÖCKER, 2008](#)), a diversificação pode ocorrer de duas formas principais:

1. **Diversificação intra-risco:** refere-se à distribuição do risco dentro de um mesmo conjunto de ativos ou instrumentos financeiros, reduzindo a vulnerabilidade a eventos adversos associados a um único tipo de risco; e
2. **Diversificação inter-risco:** envolve a alocação entre diferentes categorias de risco, como risco de mercado, crédito e operacional, permitindo uma mitigação mais ampla da exposição global.

Essa distinção é necessária para entender como estratégias de diversificação podem ser aplicadas tanto dentro de um tipo específico de risco quanto entre diferentes fontes de risco, influenciando diretamente a robustez e a resiliência das carteiras financeiras.

A mensuração do risco total de um portfólio composto por ativos expostos a diferentes tipos de risco deve considerar suas dependências. De acordo com ([EMBRECHTS; FURRER; KAUFMANN, 2009](#)), a modelagem da dependência é elemento central na gestão quantitativa do risco. Na maioria dos casos, assumir independência entre os instrumentos que compõem o portfólio é simplista e não realista.

O desenvolvimento de metodologias mais sofisticadas para agregação de riscos tem sido impulsionado por crises financeiras, avanços em modelagem estatística e aperfeiçoamento dos requerimentos regulatórios impostos por órgãos como o Comitê de Basileia. A busca por abordagens mais precisas e coerentes reflete a necessidade de capturar as interdependências entre diferentes fatores de risco, evitando subestimações que possam comprometer a solvência das instituições ou superestimações que ensejam na alocação ineficiente do capital.

Em uma carteira diversificada, é comum que as instituições possuam exposições em uma mesma contraparte por meio de diferentes ativos como, por exemplo, ações de determinada empresa e debêntures emitidas pela mesma empresa.

Cada título possui suas características intrínsecas e é monitorado conforme os riscos aos quais estão sujeitos. As ações estão sujeitas ao risco de mercado, uma vez que são sensíveis a variações de preços, taxas de juros e índices. As debêntures, por sua vez, estão sujeitas ao risco de crédito, uma vez que o risco vinculado ao ativo é o de inadimplemento da contraparte. Por esse motivo, este trabalho explora as característica das distribuições marginais (de risco de mercado e de crédito), de forma que as modelagens refletem os fatos estilizados de cada série.

Uma mesma contraparte, portanto, pode agregar riscos diferentes à carteira, e a mensuração e acompanhamento desse risco agregado é importante para a visão consolidada do impacto de cada contraparte na carteira sob a ótica do risco. A falta dessa visão pode levar a interpretações equivocadas quanto ao risco de cada contraparte, se considerar apenas a exposição em termos de valores financeiros. Assim, a mensuração do risco agregado traduz de forma mais precisa a vulnerabilidade produzida por cada contraparte, além de mitigar, de forma mais eficiente, concentrações excessivas que possam comprometer a solvência da instituição.

Alguns estudos de agregação inter-risco que abordam mercado e crédito se devem a (ROSENBERG; SCHUERMANN, 2006), que agregam, além de risco de crédito e mercado, o risco operacional por meio das cópulas normal e t. Para os riscos de crédito e de mercado, estimam-se os retornos em função de fatores de risco por meio de dados em painel e GARCH. Os retornos utilizados como variáveis resposta para risco de mercado são as receitas relativas dos ativos com negociação em relação ao saldo. Para risco de crédito, utilizou-se como *proxy* do retorno a receita líquida dos títulos de crédito menos eventuais provisões (como *proxy* de perdas incorridas). (HILLEBRAND; BÖCKER, 2008) combinam risco de crédito (Modelo de Merton Fatorial) com risco de mercado (Modelo Fatorial Linear) e investigam a dependência por meio de cópula gaussiana. Os autores utilizaram a distribuição de perdas como distribuição marginal para o risco de crédito e o histórico do indicador Preço/Lucro em função de variáveis macroeconômicas para o risco de mercado. (ALBUQUERQUE, 2010) utiliza dados de risco de mercado, crédito e operacional para obter o VaR agregado de uma instituição financeira. O risco de mercado é representado por perdas e ganhos diários em transações de títulos, ações, etc.

O risco de crédito é representado por perdas relacionadas às operações que houveram *default*. O autor utiliza a distribuição t para o risco de mercado e a lognormal para os demais, desconsiderando a autocorrelação dos dados. Posteriormente, o autor utiliza cópula hierárquica para agregar os três tipos de risco. (LIANG et al., 2013) ajustam um modelo de cópula condicional aos fatores comuns para a integração do risco de crédito e de mercado. Ambas as distribuições marginais utilizadas foram de demonstrações financeiras de instituições financeiras. (LI et al., 2015) agregam os riscos de crédito, mercado e operacional para cálculo do VaR do portfólio. Ao desconsiderar a autocorrelação dos dados em cada marginal, os autores utilizam as distribuições de perda como sendo a beta, normal e log-normal para cada tipo de risco, respectivamente. Algumas cópulas são ajustadas para cálculo do VaR e para a mensuração do efeito da diversificação. (MARRI; MOUTANABBIR, 2022) propuseram, para o cálculo do VaR e ES agregado de n riscos quaisquer, a cópula Clayton com marginais Pareto e a cópula de Bernstein n-variada com marginais Gamma.

Ante o exposto, para uma carteira exposta a risco de mercado e risco de crédito, é possível resumir o cálculo do risco agregado da seguinte forma: a primeira etapa é definir as variáveis que representarão cada risco; a segunda etapa é modelar cada variável para obter sua distribuição marginal; a terceira etapa é ajustar a cópula apropriada às distribuições; e a quarta etapa é calcular a medida de risco.

(LI et al., 2015) relata a dificuldade na obtenção de dados para a modelagem dos riscos. Assim, comumente os autores utilizam *proxies* com variáveis disponíveis para representar o risco de mercado e de crédito da melhor forma possível.

Após a definição das variáveis, para ambas as distribuições marginais, os autores geralmente utilizam modelos fatoriais, modelos GARCH e distribuições que desconsideram a autocorrelação da série. Para o risco de crédito, os artigos consideram, entre outros modelos, o Modelo de Merton para o cálculo da PD.

Estudos posteriores desenvolveram teorias que visam superar algumas desvantagens no uso do Modelo de Merton. O Modelo de Black-Cox de Primeira Passagem (BLACK; COX, 1976)

é pioneiro nessa categoria, ao considerar que o *default* ocorre no primeiro evento de ultrapassagem do limite, e não apenas no vencimento. (FAN; SUNDARESAN, 2000) desenvolveram um modelo que incorpora o papel dos credores e da renegociação de dívidas na dinâmica do *default*. Os autores utilizam teoria dos jogos para modelar as interações estratégicas entre acionistas e credores, permitindo a barganha sobre a reestruturação da dívida e introduzindo um ponto de gatilho endógeno para renegociação. Além disso, o modelo diferencia *default* estratégico e *default* por liquidez, mostrando como cláusulas contratuais, como restrições ao pagamento de dividendos, influenciam a capacidade da empresa de evitar a falência. (ZHOU, 2001) incorporou processos de salto à dinâmica do preço dos ativos. O estudo de (BHARATH; SHUMWAY, 2008) conclui, por meio de análise empírica, que a adição de variáveis independentes adicionais melhora a performance de previsão do *default*. Para isso, os autores utilizam modelos de riscos proporcionais de Cox em que a variável dependente é o tempo até o *default*.

No contexto de agregação de riscos, a metodologia de cópulas é amplamente utilizada, e os autores comumente testam alguns ajustes. Por fim, as medidas VaR e ES são utilizadas para o cálculo de risco agregado.

Este trabalho tem como objetivo revisar detalhadamente e aplicar uma metodologia para a agregação dos riscos de mercado e de crédito. A abordagem adotada considera a perspectiva do risco associado a cada contraparte que contribui com ambos os riscos em um portfólio — visão ainda pouco explorada na literatura. Ao estender essa metodologia para uma carteira diversificada, será possível quantificar a contribuição específica de cada contraparte para o risco total.

De maneira marginal, no caso do risco de mercado, quando os dados são considerados independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), os retornos apresentam caudas pesadas e são bem ajustados pela família de distribuições alfa-estáveis. No entanto, na ausência da hipótese de i.i.d., uma das formas de se ajustar os retornos é por meio de modelos de séries temporais, como o GARCH com inovações alfa-estáveis. Para a outra componente marginal, correspondente ao risco de crédito, a probabilidade de *default* será determinada com base no modelo estrutural de

Merton e modelada pelo GARCH com inovações t-Student assimétrica (skew-t). Além disso, será verificada a melhor cópula que se ajusta aos dados e, posteriormente, serão calculados o VaR e o ES.

O trabalho está organizado da seguinte forma: os capítulos 2 a 6 apresentam revisão da teoria base. O Capítulo 2 conceitua medidas de risco, define medidas coerentes de risco (Seção 2.1) e exemplifica com o VaR (Seção 2.2) e o ES (Seção 2.3), além de destacar a importância do cálculo de medida para risco agregado (Seção 2.4).

O Capítulo 3 apresenta, de forma sucinta, a teoria das distribuições alfa-estáveis. O Capítulo 4 conceitua a teoria de cópulas, partindo da definição de funções de distribuição (Seção 4.1) para a definição de cópula (Seção 4.2), e as seções 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam as categorias de cópulas elípticas, arquimedianas e de valores extremos, respectivamente.

Os capítulos 5 e 6 conceituam aspectos sobre a gestão quantitativa de riscos. No Capítulo 5, a Seção 5.1 trata da definição de risco de mercado e a Seção 5.2 introduz a teoria sobre GARCH. No Capítulo 6, a Seção 6.1 trata da definição de risco de crédito, a Seção 6.2 abrange a probabilidade de *default* calculada pelo Modelo de Merton, associado ao Modelo de Black & Scholes e, por sua vez, ao Movimento Browniano Geométrico; a Seção 6.3 aborda a probabilidade de *default* do Modelo de Merton com a adição de saltos no processo de preço do ativo, definidos pelo Processo de Lévy.

O Capítulo 7 apresenta o processo de análise na Seção 7.1 e o método de cálculo da medida de risco agregado, proposta por (LU; LAI; LIANG, 2014), que se refere a algoritmo baseado em projeção das marginais GARCH (Seção 7.2).

O Capítulo 8 demonstra aplicação da teoria exposta por meio de um estudo de caso com a contraparte Localiza S.A., entre outras.

Capítulo 2

Medidas de Risco

De forma intuitiva, medidas de risco são ferramentas usadas para quantificar o risco, sendo necessárias para qualquer estratégia de proteção. (ARTZNER et al., 1999) propõem axiomas que caracterizam medida coerente de risco, importantes para que a medida seja matematicamente bem comportada, evitando contradições ou resultados inconsistentes.

De acordo com (ROSENBERG; SCHUERMANN, 2006), risco é o potencial desvio de resultados esperados, particularmente desvios adversos. Por trás de qualquer projeção de fluxo de caixa, lucros esperados ou expectativa de variação no valor de ativos, há uma distribuição de probabilidade associada aos potenciais resultados.

De acordo com os autores, a magnitude relativa do risco pode ser definida pela medida do *spread* ou dispersão, como o desvio padrão ou variância. Contudo, a variância não é, necessariamente, suficiente para captar o risco, uma vez que duas distribuições com formatos diferentes podem ter a mesma variância. Assim, as medidas como assimetria e curtose podem ser analisadas em paralelo. Outra abordagem citada pelos autores é a avaliação dos percentis das distribuições, o que inclui a análise de medidas como o VaR e o ES.

2.1 Medidas Coerentes de Risco

(ARTZNER et al., 1999) propõem quatro axiomas das medidas coerentes de risco para garantir que uma medida seja matematicamente consistente e adequada para a gestão de riscos.

Axioma 2.1.1. Subaditividade. Para duas carteiras X e Y , a medida de risco ρ deve satisfazer:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Este axioma reflete a ideia de que a combinação de duas posições não deve criar um risco maior que a soma dos riscos individuais. Este conceito é coerente com a medida do efeito da diversificação, proposto na Equação (1.1).

Axioma 2.1.2. Homogeneidade Positiva. Para uma posição X e um escalar $\lambda > 0$, a medida de risco ρ deve satisfazer:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

Este axioma implica que o risco de uma posição escalada por um fator positivo λ é proporcional ao risco da posição original, o que garante que a medida de risco seja consistente em relação ao tamanho da posição.

Axioma 2.1.3. Monotonicidade. Para duas posições X e Y , se X tem sempre um valor futuro maior ou igual a Y em todos os cenários possíveis, então:

$$\rho(Y) \geq \rho(X)$$

Este axioma estabelece que, se uma posição X é sempre melhor (ou igual) a uma posição Y em termos de valor futuro, então o risco de X deve ser menor ou igual ao risco de Y . Ou seja, uma posição com resultados sempre melhores não devem ser considerada mais arriscada.

Axioma 2.1.4. Invariância à Translação. Para uma posição X e uma quantia certa α investida

em um ativo livre de risco, a medida de risco ρ deve satisfazer:

$$\rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha$$

em que r é o retorno do ativo livre de risco. Este axioma reflete a ideia de que adicionar uma quantia certa α a uma posição reduz o risco pela mesma quantia. É importante para garantir que a medida de risco considere o efeito de adicionar ativos seguros a uma carteira.

2.2 *Value at Risk - VaR*

(JORION, 2006) define VaR como a pior perda em um horizonte de tempo dado um nível de confiança. A medida descreve o quantil α da distribuição de perdas projetadas para o horizonte de tempo. Formalmente, (ARTZNER et al., 1999) definem:

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x | P(X \leq x) \geq \alpha\} \quad (2.1)$$

Apesar de amplamente utilizada, a medida possui duas principais desvantagens. A primeira é a falta de mensuração do valor da perda após o limiar dado pelo quantil. O VaR informa apenas a perda máxima no nível de confiança escolhido, mas não possui informação sobre o tamanho das perdas além desse ponto. Isso pode levar a uma subestimação do risco em cenários extremos.

A segunda desvantagem é que o VaR não obedece ao axioma 2.1.1 de subaditividade e, portanto, não é uma medida coerente de risco. Isso significa que o VaR de uma carteira combinada pode ser maior que a soma dos VaRs individuais.

2.3 *Expected Shortfall - ES*

O *Expected Shortfall* (ES), é proposto pelos autores como alternativa ao VaR. O ES mede a perda média esperada nos piores cenários, além do nível de confiança do VaR.

$$ES_\alpha(X) = -E[X|X \leq -VaR_\alpha(X)] \quad (2.2)$$

O ES satisfaz todos os quatro axiomas das medidas de risco coerentes, o que o torna uma medida mais conservadora e adequada para capturar riscos extremos.

2.4 Medidas de Risco Agregado

Em carteiras diversificadas, os diferentes tipos de risco não agem de forma isolada, mas interagem de maneiras complexas. Nesse sentido, as medidas de risco podem ser calculadas considerando a diversificação inter-risco. Sem essa medida, há o risco de sub ou superestimar o risco total.

Assim como em ([MARRI; MOUTANABBIR, 2022](#)), seja X_1, \dots, X_n componentes que denotam as perdas oriundas de diferentes tipos de risco, então $X_1 + \dots + X_n$ representa a perda agregada. A medida de risco agregado é calculada conforme abordado na Equação (1.1): $\varrho(\sum_{k=1}^n X_k)$.

O Capítulo 8 apresentará a modelagem dos riscos de crédito e de mercado para a empresa Localiza, entre outras, e o cálculo das medidas de risco VaR e ES considerando a estrutura de dependência entre os riscos, que será modelada por meio de cópulas.

Os estudos em risco de mercado usualmente lidam com o comportamento de retorno dos ativos. ([MANDELBROT, 1963](#)) demonstra que as flutuações especulativas de preços não seguem distribuições gaussianas, mas apresentam caudas longas compatíveis com distribuições alfa-estáveis. O autor argumenta que a suposição de normalidade nos modelos financeiros clássicos falha ao descrever eventos extremos. Sua abordagem baseada em distribuições estáveis levou à introdução de modelos mais realistas para o comportamento de ativos financeiros.

Capítulo 3

Distribuições Alfa-Estáveis

Enquanto a distribuição normal se impõe na modelagem de erros e flutuações sob certas condições, (LÉVY, 1924) mostrou que existem outras distribuições que também são estáveis sob aditivação, mas que possuem caudas mais pesadas. Em sua abordagem, a estabilidade de uma distribuição significa que a distribuição da soma de um grande número de variáveis i.i.d. será da mesma forma funcional, exceto por uma escala e um deslocamento.

Distribuições estáveis univariadas são caracterizadas por quatro parâmetros: α : índice de estabilidade ou expoente característico; σ : parâmetro de escala; β : parâmetro de simetria; e μ : parâmetro de locação.

A Figura 3.1 exemplifica o impacto dos parâmetros nas curvas de densidade.

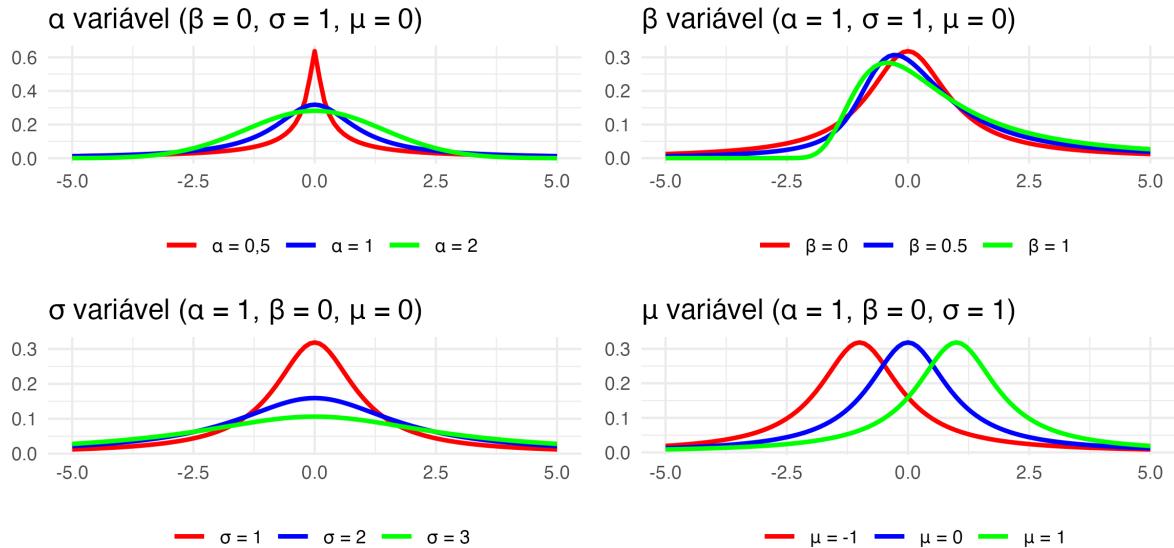


Figura 3.1: Densidade alfa-estável

Se $\alpha < 2$, a cauda da distribuição decai em uma função potência, o que implica em uma distribuição de cauda pesada. Quando $\alpha = 2$, a distribuição estável é a normal. σ é proporcional ao desvio padrão, β pode ser considerado zero no caso de distribuições simétricas e μ é a média. (SAMORODNITSKY; TAQQU, 1994) definem distribuições estáveis de formas diferentes. A primeira se refere ao contexto do Teorema Central do Limite, no sentido de que distribuições estáveis se aproximam da distribuição das somas de variáveis aleatórias i.i.d. normalizadas. A segunda especifica a função característica de uma variável aleatória estável.

Definição 3.0.1. Uma variável aleatória X possui distribuição estável se esta possui domínio de atração, isto é, se existe uma sequência de variáveis aleatórias Y_1, Y_2, \dots i.i.d. e sequências de números positivos $\{b_n\}$ e números reais $\{a_n\}$ tais que

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} X.$$

As variáveis Y_i pertencem ao domínio de atração da normal X ($X \in DA(\alpha)$) quando $b_n = n^{1/\alpha}$. Em geral, $b_n = n^{1/\alpha}h(n)$ em que $h(x), x > 0$ é uma função lentamente variante no

infinito, ou seja, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(ux)/h(x) = 1$ para todo $u > 0$ (FELLER, 1971), XVII.5.

Teorema 3.0.1. Teorema Central do Limite Generalizado, (EMBRECHTS; KLÜPPPELBERG; MIKOSCH, 1997). Suponha que $F \in DA(\alpha)$ para algum $\alpha \in (0, 2]$.

Se $E(Y^2) < \infty$, então $\alpha = 2$.

$$\frac{S_n - nE(Y_1)}{\sqrt{n.var(Y_1)}} \xrightarrow{d} X \sim N(0, 1).$$

Se $E(X^2) = \infty$ ou se $\alpha < 2$, então

$$\frac{S_n - a_n}{n^{1/\alpha} h(n)} \xrightarrow{d} X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

em que $h(n)$ é uma função lentamente variante no infinito.

Definição 3.0.2. Uma variável aleatória X possui distribuição estável se houver $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ e μ real tal que sua função característica é dada por:

$$E(e^{i\theta X}) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta(\text{sign}\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\right\}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}\theta)\ln|\theta| + i\mu\theta\right\}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Em que pese a função característica definida na Equação (3.1), a densidade de probabilidade de uma distribuição alfa-estável não possui, em geral, expressão analítica fechada. Isso torna a sua manipulação e análise mais complexas do que as distribuições usuais. Assim, (NOLAN, 1997) propõe método numérico para determinar a densidade de probabilidade.

Para o cálculo das medida de risco de mercado e de crédito agregados, é necessário o conhecimento da distribuição conjunta das séries. Nesse sentido, a distribuição será calculada baseada no método de cópulas, considerando o melhor ajuste em termos de concentração dos dados e de dependência caudal.

Capítulo 4

Cópulas

4.1 Função de Distribuição

No contexto unidimensional, (JAMES, 2023) define função de distribuição da seguinte forma:

Definição 4.1.1. A função de distribuição da variável aleatória X , representada por F_X ou simplesmente por F , é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ainda, se X é uma variável aleatória, sua função de distribuição F possui as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1.1.

1. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$, i.e., F é não decrescente;
2. Se $x_n \downarrow y$, então $F(x) \downarrow F(y)$, i.e., F é contínua à direita;
3. Se $x_n \downarrow -\infty$, então $F(x_n) \downarrow 0$. Se $x_n \uparrow +\infty$, então $F(x_n) \uparrow 1$. (Logo, pode-se escrever $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.)

No contexto n-dimensional, o autor define função de distribuição da seguinte forma:

Definição 4.1.2. A função de distribuição de $F = F_{\mathbf{X}} = F_{X_1, \dots, X_n}$ de um vetor aleatório $X = (X_1, \dots, X_n)$ é assim definida:

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Da mesma forma, a função de distribuição do vetor aleatório, também chamada de função de distribuição conjunta das variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n , obedecem às seguintes propriedades:

Propriedade 4.1.2.

1. $F(x_1, \dots, x_n)$ é não decrescente em cada uma das variáveis;
2. $F(x_1, \dots, x_n)$ é contínua à direita em cada uma das variáveis;
3. Para todo i ,

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Também,

$$\lim_{\forall i, x_i \rightarrow +\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1;$$

4. $\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} F(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall I_k = (a_k, b_k], a_k < b_k, k = 1, \dots, n.$

A propriedade 4, necessária quando $n \geq 2$, é a formulação da propriedade $P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) \geq 0$ e representa o volume da função em termos do operador de diferença Δ . Para $n = 2$, por exemplo, a propriedade pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_F([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) &= \Delta_{1,I_1} \Delta_{2,I_2} F(x, y) \\ &= \Delta_{1,I_1} (\Delta_{2,I_2} F(x, y)) \\ &= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - [F(a_1, b_2) - F(a_1, a_2)] \geq 0 \end{aligned}$$

Diz-se, portanto, que uma função que satisfaz as quatro propriedades listadas é uma função de distribuição de um vetor aleatório, isto é, as quatro propriedades são suficientes para caracterizar funções de distribuição.

De acordo com (EMBRECHTS; MCNEIL; STRAUMANN, 2002), a dependência entre as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n é completamente descrita por sua função de distribuição conjunta $F(x_1, \dots, x_n)$.

A ideia da separação de F em partes que descrevem a estrutura de dependência e em partes que descrevem o comportamento das distribuições marginais originou o conceito de cópulas, introduzido por (SKLAR, 1959).

4.2 Definição

Conforme (JOE, 1997), cópula é uma função de distribuição multivariada cujas marginais univariadas pertencem à distribuição uniforme $U(0, 1)$. Assim, como a cópula C é uma função de distribuição de um vetor aleatório, obedecem às propriedades 4.1.2.

Para uma distribuição n-variada $F \in \mathcal{F}(F_1, \dots, F_n)$, com distribuições marginais F_j , a cópula associada a F é a função de distribuição $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

(MCNEIL; FREY; EMBRECHTS, 2015) definem cópulas como:

Definição 4.2.1. Uma cópula n-dimensional é uma função de distribuição em $[0, 1]^n$ com distribuições marginais uniformes.

De acordo com os autores, a cópula obedece as seguintes propriedades:

1. $C(u_1, \dots, u_n) = 0$ se $u_i = 0$ para qualquer i ;
2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in [0, 1]$;

3. Para todo $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ com $a_i \leq b_i$, tem-se:

$$\sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

em que $u_{j1} = a_j$ e $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

A segunda propriedade corresponde à condição de distribuição uniforme das marginais. As três propriedades caracterizam a cópula, ou seja, se a função C às obedece, então C é cópula.

Como cópulas são funções de distribuição (em $[0, 1]^n$), a cópula C induz uma medida de probabilidade em $[0, 1]^n$ dada por

$$V_C([0, u_1] \times \cdots \times [0, u_n]) = C(u_1, \dots, u_n).$$

De acordo com (EMBRECHTS; HÖING; JURI, 2003), a Equação (4.1) diz que a cópula C separa os comportamentos das marginais dadas por F_1, \dots, F_n da dependência contida na função de distribuição F . A motivação para denominar a cópula como estrutura de dependência é resultante do Teorema de Sklar, principal resultado no estudo das cópulas.

Teorema 4.2.1. Teorema de Sklar. Seja F uma função de distribuição n-dimensional com marginais F_1, \dots, F_n . Então existe uma n-cópula C tal que para todo x em $\bar{\mathbb{R}}^n$,

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (4.2)$$

Se F_1, \dots, F_n são todas contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada em $RanF_1 \times \dots \times RanF_n$. Por outro lado, se C é uma n-cópula e F_1, \dots, F_n são funções de distribuição, então a função F é uma função de distribuição n-dimensional com marginais F_1, \dots, F_n .

Pelo Teorema de Sklar, portanto, verifica-se que, para funções de distribuição multivariadas contínuas, as marginais univariadas e a estrutura de dependência podem ser separadas, esta

representada pela cópula.

Corolário 4.2.1. Seja F uma função de distribuição contínua n-dimensional com distribuições marginais contínuas F_1, \dots, F_n e cópula C (em que C satisfaz a Equação (4.2)). Então para qualquer \mathbf{u} em $[0, 1]^n$,

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

Há diversas famílias de cópulas que podem ser utilizadas para modelar a dependência entre variáveis aleatórias, cada uma com características distintas que as tornam mais adequadas a diferentes contextos.

As cópulas elípticas, como a cópula gaussiana e a cópula t de Student, derivam de distribuições elípticas e são utilizadas por sua simplicidade. No entanto, apresentam limitações, como a falta de forma fechada e a impossibilidade de modelagem para fortes dependências entre grandes perdas ou grandes ganhos (valores extremos).

Há outra família de cópulas - as cópulas arquimedianas, como as cópulas de Clayton, Gumbel e Frank, que são construídas a partir de funções geradoras e se destacam por sua flexibilidade e por permitirem modelar diferentes tipos de dependência assimétrica.

As cópulas de valores extremos, por sua vez, são capazes de modelar adequadamente a dependência em situações extremas, especialmente em contextos de eventos raros.

4.3 Cópulas Elípticas

Distribuições elípticas são extensões da distribuição normal multivariada $\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$, ou seja, com média μ e matriz de covariância Σ . (EMBRECHTS; LINDSKOG; MCNEIL, 2003) definem a classe de cópulas elípticas da seguinte forma:

Definição 4.3.1. Se \mathbf{X} é um vetor aleatório n-dimensional e se, para algum $\mu \in \mathbb{R}^n$ e para alguma matriz $\Sigma, n \times n$, simétrica, definida e não negativa, a função característica $\varphi_{\mathbf{X}-\mu}(\mathbf{t})$ de

$\mathbf{X} - \mu$ é uma função quadrática da forma $\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}$, $\varphi_{\mathbf{X} - \mu}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$, então diz-se que \mathbf{X} possui distribuição elíptica com parâmetros μ , Σ e ϕ : $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.

Distribuições elípticas são unicamente determinadas por μ , Σ e ϕ . Por outro lado, as cópulas oriunda de vetor aleatório com distribuição elíptica não-degenerada é unicamente determinada por R e ϕ .

A cópula referente à distribuição normal n-variada com matriz de correlação R ($R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$) é

$$C_R^{Ga}(\mathbf{u}) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

em que Φ_R^n denota a função de distribuição conjunta da distribuição normal padrão n-variada com matriz de correlação linear R , e Φ^{-1} denota a inversa da função de distribuição normal padrão univariada.

No caso bivariado, a expressão da cópula pode ser escrita como

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - R_{12}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1 - R_{12}^2)}\right) ds dt,$$

em que R_{12} é o coeficiente de correlação linear correspondente à distribuição bivariada.

Outra cópula da classe elíptica frequentemente utilizada é a cópula t. Se \mathbf{X} possui representação estocástica dada por

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} \mathbf{Z}, \quad (4.3)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}^n$, $S \sim \chi_\nu^2$ e $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_n(0, \Sigma)$ são independentes, então \mathbf{X} possui distribuição t _{ν} n-variada com média μ (para $\nu > 1$) e matriz de covariância $\frac{\nu}{\nu-2} \Sigma$ (para $\nu > 2$). Se $\nu \leq 2$, então $Cov(\mathbf{X})$ não é definida. Nesse caso, Σ é interpretado como o parâmetro de forma da distribuição de \mathbf{X} .

A cópula de \mathbf{X} , dada na Equação (4.3), é representada por

$$C_{\nu,R}^t(\mathbf{u}) = t_{\nu,R}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)),$$

em que $R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, e $t_{\nu,R}^n$ denota a função de distribuição de $\sqrt{\nu}\mathbf{Y}/\sqrt{S}$, em que $S \sim \chi_{\nu}^2$ e $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, R)$ são independentes. t_{ν} denota as marginais de $t_{\nu,R}^n$, ou seja, a função de distribuição de $\sqrt{\nu}Y_1/\sqrt{S}$.

No caso bivariado, a expressão da cópula pode ser escrita como

$$C_R^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1-R_{12}^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} ds dt,$$

em que R_{12} é o coeficiente de correlação linear correspondente à distribuição bivariada t_{ν} se $\nu > 2$.

4.4 Cópulas Arquimedianas

A classe das cópulas arquimedianas, além de possuir forma fechada, possui uma variedade de estrutura de dependência, o que permite maior flexibilidade em adequá-la aos dados. Diferentemente das cópulas elípticas, as arquimedianas não são derivadas de distribuições multivariadas.

(NELSEN, 2006) define a classe de cópulas arquimedianas inicialmente pelo conceito de função pseudo-inversa de φ .

Definição 4.4.1. Seja φ uma função contínua e estritamente decrescente de \mathbf{I} para $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$. A *pseudo-inversa* de φ é a função $\varphi^{[-1]}$, com $\text{Dom } \varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ e $\text{Ran } \varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$, dada por

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

$\varphi^{[-1]}$ é contínua e não crescente em $[0, \infty]$, e estritamente decrescente em $[0, \varphi(0)]$. Além disso, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ em I e

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)).\end{aligned}$$

Ainda, se $\varphi(0) = \infty$, então $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Teorema 4.4.1. Seja φ uma função contínua e estritamente decrescente de \mathbf{I} para $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$, e seja $\varphi^{[-1]}$ a pseudo-inversa de φ definido em 4.4.1. Seja C a função de \mathbf{I}^2 para \mathbf{I} dada por

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Então C é cópula se e somente se φ é convexa. A prova pode ser encontrada em (NELSEN, 2006).

Cópulas da forma descrita no teorema 4.4.1 são chamadas de cópulas arquimedianas, com a função φ sendo a geradora da cópula. Se $\varphi(0) = \infty$, diz-se que φ é um gerador estrito. Nesse caso, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ e $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ é dito ser uma cópula arquimédiana estrita.

A tabela 4.1 apresenta as principais cópulas arquimedianas.

Tabela 4.1: Principais cópulas arquimedianas.

Cópula	$\varphi_\theta(t)$	$C(u, v)$	Domínio de θ
Clayton	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$[-1, +\infty) \setminus \{0\}$
Frank	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$-\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$
Gumbel	$(-\ln t)^\theta$	$\exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$	$[1, +\infty)$
Joe	$-\ln[(1 - (1 - t)^\theta)]$	$1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta]^{1/\theta}$	$[1, +\infty)$

4.5 Cópulas de Valores Extremos

No contexto univariado do estudo de valores extremos, a Teoria dos Valores Extremos define a distribuição dos máximos parciais de uma sequência $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ de variáveis aleatórias, ou seja, valores máximos das n primeiras observações.

Enquanto o Teorema Central do Limite foca na convergência da soma de variáveis aleatórias, (FISHER; TIPPETT, 1928) desenvolveram versão para os máximos.

Teorema 4.5.1. Fisher-Tippet. Seja X_1, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. Se existem as constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, e alguma distribuição não degenerada G , tal que

$$\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \right) \xrightarrow{d} G,$$

então G pertence a uma das três distribuições de valores extremos:

$$\begin{aligned} \text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right), & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0 \\ \text{Weibull Negativa: } \Psi_\alpha(x) &= \begin{cases} \exp\left(-\left(-\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha\right), & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0 \\ \text{Gumbel: } \Lambda(x) &= \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A Figura 4.1 ilustra as densidades das distribuições.

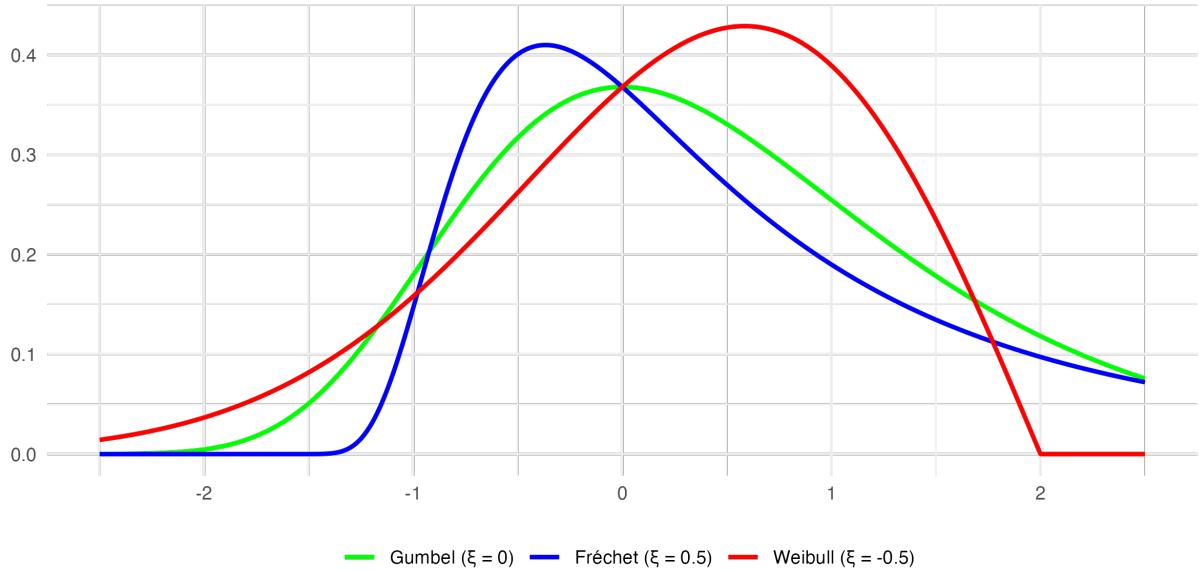


Figura 4.1: Densidades das distribuições de valores extremos

(JENKINSON, 1955) consolidou as três distribuições extremais em uma, denominada *Generalized Extreme Value Distribution* (GEV) a depender do parâmetro $\xi = 1/\alpha$. Portanto, trata-se de uma família de distribuições.

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-\frac{1}{\xi}}], & \xi \neq 0 \\ \exp(\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})), & \xi = 0, \end{cases}$$

em que $1 + \xi x > 0$. Então:

$$\xi = \alpha^{-1} > 0 \leftrightarrow \Phi_\alpha \quad (\text{Frechet});$$

$$\xi = -\alpha^{-1} < 0 \leftrightarrow \Psi_\alpha \quad (\text{Weibull Negativa});$$

$$\xi = 0 \leftrightarrow \Lambda \quad (\text{Gumbel}).$$

Enquanto a GEV consolida as distribuições extremais univariadas, as cópulas de valores

extremos apresentam o tratamento conjunto bivariado por meio de uma função de dependência.

(NELSEN, 2006) apresenta técnica que possibilita a transformação de uma cópula para outra. Seja $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ pares de variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição conjunta comum H , cópula C e marginais F (para X_i) e G (para Y_i). Para avaliar a distribuição dos máximos $X_{(n)} = \max\{X_i\}$ e $Y_{(n)} = \max\{Y_i\}$, é necessário determinar a função de distribuição $H_{(n)}$ e a cópula $C_{(n)}$ de $X_{(n)}$ e $Y_{(n)}$.

Como $P(X_{(n)} \leq x) = P(\text{todo } X_i \leq x) = (P(X_1 \leq x))^n$, então $F_{(n)} = [F(x)]^n$. De forma similar, para $Y_{(n)}$, $G_{(n)}(y) = [G(y)]^n$. Portanto:

$$\begin{aligned} H_{(n)} &= P(X_{(n)} \leq x, Y_{(n)} \leq y) \\ &= P(\text{todo } X_i \leq x, \text{todo } Y_i \leq y) \\ &= [H(x, y)]^n \\ &= [C(F(x), G(y))]^n \\ &= [C([F_{(n)}(x)]^{1/n}, G_{(n)}(y)]^{1/n})]^n. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$C_{(n)}(u, v) = C^n(u^{1/n}, v^{1/n})$$

para todo u, v em $[0, 1]$.

O limite da sequência $\{C_{(n)}\}$ implica na noção de cópula de valores extremos, o que resulta na seguinte definição:

Definição 4.5.1. A cópula C_* é uma cópula de valor extremo se existe a cópula C tal que

$$C_*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n(u^{1/n}, v^{1/n})$$

para u e v em $[0, 1]$. Ademais, C é dito pertencer ao domínio de atração de C_* .

Nesse sentido, (NELSEN, 2006) demonstra procedimento proposto por (PICKANDS, 1981) para a construção de cópulas de valores extremos. Se X e Y são variáveis aleatórias exponenciais padrão com cópula de sobrevivência C extremal, então as funções de sobrevivência de X e Y são $\bar{F}(x) = e^{-x}, x > 0$, e $\bar{G}(y) = e^{-y}, y > 0$, respectivamente, e a função de sobrevivência conjunta é dada por

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= P(X > x, Y > y) \\ &= C(e^{-x}, e^{-y}).\end{aligned}$$

Como C é de valor extremo,

$$\begin{aligned}\bar{H}(rx, ry) &= C^r(e^{-x}, e^{-y}) \\ &= [\bar{H}(x, y)]^r,\end{aligned}$$

para qualquer $r > 0$ real. Seja a função $A : [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$ definida como:

$$A(t) = -\ln(C(e^{-(1-t)}, e^{-t})),$$

ou, de forma equivalente, $C(e^{-(1-t)}, e^{-t}) = \exp\{-A(t)\}$. Ao empregar a mudança de variáveis $(x, y) = (r(1-t), rt)$, para $r > 0$ e $t \in (0, 1)$, ou, de forma equivalente, $(r, t) = (x+y, y/(x+y))$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\bar{H}(x, y) &= \bar{H}(r(1-t), rt) \\
&= [\bar{H}(1-t, t)]^r \\
&= C^r(e^{-(1-t)}, e^{-y}) \\
&= \exp\{-rA(t)\} \\
&= \exp\left\{-(x+y)A\left(\frac{y}{x+y}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Como $C(u, v) = \bar{H}(-\ln u, -\ln v)$, então

$$C(u, v) = \exp\left\{\ln(uv)A\left(\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right)\right\} \quad (4.4)$$

para uma escolha apropriada da função A , denominada função de dependência da cópula de valor extremo C , respeitada as seguintes condições:

1. $A(0) = A(1) = 1$;
2. $\max\{t, 1-t\} \leq A(t) \leq 1$; e
3. A é convexa.

Verifica-se que as distribuições marginais de (X, Y) podem ser de diversas famílias. Em geral, $X \sim F$ e $Y \sim G$, então $H(x, y) = C(F(x), G(y))$, em que C satisfaz a (4.4), é uma distribuição bivariada baseada em uma cópula extremal cujas componentes não necessariamente são distribuições GEV.

(ESCHENBURG, 2013) realizou pesquisa das propriedades das cópulas extremais e apresentou exemplos de cópulas, resumidos na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Exemplos de cópulas extremais.

Cópula	$A(t)$	Parâmetro
Marshall-Olkin	$\max\{1 - \alpha_1(1 - t), 1 - \alpha_2 t\}$	$0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$
t-EV	$(1 - t) \cdot T_{\nu+1}(z_{1-t}) + t \cdot T_{\nu+1}(z_t),$ $z_t = (1 + \nu)^{1/2} \left(\left[\frac{t}{1-t} \right]^{1/\nu} - \rho \right) (1 - \rho^2)^{-1/2}$	$\nu > 0, -1 < \rho < 1$
Tawn	$\theta t^2 = \theta t + 1$	$\theta \geq 1, \alpha \in [0, 1]$

Capítulo 5

Risco de Mercado

5.1 Definição

De acordo com (JORION, 2006), risco de mercado é o risco de perdas devido a movimentos no nível ou volatilidade de preços de mercado. Ele envolve exposições em variáveis financeiras e suas movimentações, como preço de ações, taxa de juros, taxa de câmbio, preço de *commodities*, exposições cobertas (*hedge*) ou a volatilidade.

(ROSENBERG; SCHUERMANN, 2006) apontam que risco de mercado é conhecido por ser dependente do tempo, o que reflete em sua volatilidade estocástica. De acordo com (SHIM; LEE, 2017), o modelo GARCH(1,1) é o mais comumente usado para modelar heteroscedasticidade em séries de dados financeiros e *clusters* de volatilidade. Ainda, os autores citam aumento na literatura que indica que retornos financeiros são usualmente assimétricos e de caudas pesadas e, por isso, aplicam a distribuição t-Student assimétrica (skew-t) nos resíduos do GARCH. A Seção 5.2 apresenta, de forma sucinta, a teoria envolvida.

5.2 GARCH

No contexto de modelagem de séries que apresentam heteroscedasticidade, (ENGLE, 1982) propõe o modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), que permite que a

variância condicional dependa das informações passadas da série.

Posteriormente, (BOLLERSLEV, 1986) generalizou o conceito ao propor o *Generalized ARCH - GARCH* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), no qual a variância condicional também depende de seus próprios valores passados.

Os modelos GARCH permitem capturar a dependência temporal na volatilidade, aspecto importante na modelagem de risco. O modelo GARCH(1,1) é definido da seguinte forma:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \quad \eta_t \sim i.i.d.(0, 1)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

em que:

- r_t é o retorno no tempo t ;
- μ é a média condicional dos retornos;
- ε_t é o resíduo no tempo t ;
- η_t é o resíduo padronizado, com média zero e variância unitária;
- h_t é a variância condicional no tempo t ; e
- ω, α , e β são parâmetros do modelo GARCH:
 - ω representa a variância incondicional de longo prazo;
 - α captura o impacto dos choques recentes (resíduos ao quadrado) na volatilidade atual; e
 - β captura a persistência da volatilidade, ou seja, o impacto da volatilidade passada na volatilidade atual.

Capítulo 6

Risco de Crédito

6.1 Definição

(JORION, 2006) define risco de crédito como risco de perda financeira devido à falha da contraparte em cumprir suas obrigações contratuais. Há três fatores incluídos no risco de crédito:

1. Risco de *default*: risco de inadimplência da contraparte, medido pela probabilidade de *default* (*Probability of Default* - PD);
2. Risco de exposição ao crédito: risco de flutuações no valor de mercado da cobrança sobre a contraparte. Em caso de inadimplência, também é conhecido como exposição ao *default* (*Exposure at Default* - EAD); e
3. Risco de recuperação: incerteza na fração da cobrança recuperada após a inadimplência, medida pelo complementar da perda dado o *default* (*Loss Given Default* - LGD).

A curva de perda esperada (*Expected Loss* - EL) de risco de crédito é, então, dada pela combinação desses fatores:

$$EL = PD \times EAD \times LGD. \quad (6.1)$$

Para este trabalho, o foco da modelagem será no risco de *default*. Uma das formas de se determinar a PD é por meio de modelos estruturais, cujo valor do ativo é representado por um processo estocástico $\{V_T\}_{t \geq 0}$ e o *default* ocorre quando esse valor ultrapassa determinado limiar ($PD = P(V_t > B)$), como o valor do passivo da contraparte. A abordagem de Merton para a precificação de opções do tipo Europeia contempla o termo PD.

Este capítulo apresenta expressões para a PD oriunda de dois modelos: o Modelo de Merton, cuja base é o Movimento Browniano Geométrico (apresentado no Apêndice A); e o Modelo de Merton baseado no Processo de Lévy (apresentado no Apêndice E).

6.2 PD - Modelo de Merton - Movimento Browniano Geométrico

A Equação de Black & Scholes é um modelo dinâmico de precificação de ativos em tempo contínuo. O modelo foi desenvolvido por Black e Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973) e expandido por (MERTON, 1973).

A intuição quanto à precificação de um ativo de risco é que, inicialmente, sua evolução no tempo seria sua média, proporcional ao intervalo de tempo avaliado (μdt). Contudo, sabe-se que ativos financeiros não possuem comportamento linear. Portanto, à essa intuição determinística, adiciona-se um componente aleatório que representa o comportamento real dos ativos no tempo.

Uma das premissas do Modelo de Black & Scholes é que a dinâmica dos valores dos ativos segue o Movimento Browniano Geométrico (Apêndice A). Ou seja,

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma_V dW_t \quad (6.2)$$

representa a variação do valor do ativo em termos do retorno médio μ e do choque aleatório dado pelo processo estocástico $\{W_t\}$, escalonado pela volatilidade σ_V .

A solução da Equação (6.2), demonstrada no Apêndice B, é dada por:

$$V_T = V_t \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t) \right]. \quad (6.3)$$

De (6.3), tem-se que:

$$\ln \left(\frac{V_T}{V_t} \right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t).$$

Isto é, no Modelo de Black & Scholes, o retorno logarítmico do ativo segue o processo Gaussiano, conforme:

$$\begin{aligned} R_T &= \ln \left(\frac{V_T}{V_t} \right) \\ &= N \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) (T - t), \quad \sigma_V^2 (T - t) \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

De forma equivalente,

$$V_T = V_t e^{R_T}.$$

A Equação (6.3), além de especificar o ativo subjacente, permite, também, especificar derivativos, que são contratos cujo pagamento é realizado em data futura e cujo valor depende de um determinado ativo-objeto. No mercado financeiro, há derivativos com base em preço de ação, de *commodities*, câmbio, índices financeiros, entre outros. O valor do título derivativo, portanto, pode ser representado por uma função do valor do ativo-objeto $f(V_T)$, calculado com base no valor esperado do *payoff* (valor líquido recebido ou pago no vencimento) descontado a certa taxa de desconto. Ou seja,

$$E(\text{payoff}) = E(f(V_T)). \quad (6.5)$$

O Modelo de Black & Scholes foi formulado no contexto de neutralidade do risco e, portanto, o *payoff* do título derivativo é descontado à taxa livre de risco (r) sob capitalização em tempo contínuo. Assim,

$$P_T = e^{-r(T-t)} E(f(V_T)). \quad (6.6)$$

Um tipo específico de derivativo são as opções, modalidade em que o titular do título detém um direito e o lançador uma obrigação. No caso de uma opção de compra (*call*), o titular detém o direito de comprar o ativo-objeto pelo preço acordado e o titular detém a obrigação de vendê-lo.

Merton desenvolveu a teoria para cálculo da probabilidade de *default* de uma contraparte com base no Modelo de Black & Scholes para precificação de opções (MERTON, 1974). De acordo com (MCNEIL; FREY; EMBRECHTS, 2015), o Modelo de Merton é o protótipo da classe dos modelos estruturais, em que o *default* ocorre quando o ativo ultrapassa determinado valor limite.

A empresa pode financiar seus ativos de duas formas: por meio de dívida (passivo), cujos detentores dos direitos são os credores; e por meio de emissão de ações (patrimônio líquido), cujos direitos pertencem aos acionistas. Os acionistas, nesse cenário, possuem responsabilidade limitada ao capital investido. Ainda, assume-se que a companhia não paga dividendos nem emite novas dívidas.

No Modelo de Merton, o passivo é representado por um título zero-cupom com vencimento em T cujo valor de face é a constante B e cujo patrimônio líquido é representado por S_t . O valor do ativo (passivo + patrimônio líquido) é representado pelo processo estocástico $\{V_t\}_{t \geq 0}$.

O objetivo dos modelos estruturais é avaliar a variação do ativo da companhia no tempo. Caso o valor do ativo supere o valor do passivo no vencimento, companhia possui recursos suficientes para honrar com suas dívidas. Por outro lado, se, no tempo T , o ativo for menor que o valor do passivo, tem-se o evento de *default*. Ou seja, nesse caso, a companhia não é capaz de honrar o pagamento das dívidas. (MCNEIL; FREY; EMBRECHTS, 2015) demonstram esses dois cenários no tempo T :

1. $V_T > B$: o valor dos ativos da empresa supera o valor nominal do passivo. Nesse caso, os

credores são plenamente pagos em relação ao valor da dívida B e os acionistas recebem o valor residual $S_T = V_T - B$;

2. $V_T \leq B$: o valor dos ativos não é suficiente para o pagamento integral da dívida. Dada a responsabilidade limitada dos acionistas, estes não possuem interesse em prover capital adicional à empresa, uma vez que os recursos seriam direcionados aos credores. Assim, o controle da companhia é transferido aos credores, que liquidam a empresa e distribuem o valor entre si. Dessa forma, os credores recebem o valor dos ativos no tempo T ($B_T = V_T$) e os acionistas, por zerarem suas posições, não recebem recursos ($S_T = 0$).

As duas classificações de opções mais comuns baseadas nas regras de exercício é a americana e a europeia. A primeira permite que o titular a exerça a qualquer momento até a data do vencimento, enquanto a segunda permite o exercício apenas no vencimento.

A representação do Modelo de Merton implica que o valor do patrimônio líquido da empresa no tempo T (S_T) equivale ao *payoff* de uma opção de compra do tipo europeia, com preço de exercício igual a B .

Assim, caso o preço do ativo-objeto (V_T) seja maior que o preço de exercício (B) no vencimento T , o *payoff* do titular do título é de $V_T - B$, ou seja, o titular compra o ativo por B e o vende no mercado por V_T . Contudo, caso o preço do ativo-objeto seja menor que o preço de exercício no vencimento, a opção não é exercida e o *payoff* da operação é zero.

Portanto, segundo definição do *payoff* em (6.5),

$$\begin{aligned} f(V_T) &= (V_T - B)I_{(V_T > B)} \\ &= V_T I_{(V_T > B)} - BI_{(V_T > B)}. \end{aligned}$$

Logo, conforme (6.6),

$$P_{\text{call}} = e^{-r(T-t)} E((V_T - K) I_{(V_T > K)}),$$

em que

$$E((V_T - B) I_{(V_T > B)}) = E(V_T I_{(V_T > B)}) - B E(I_{(V_T > B)}). \quad (6.7)$$

O segundo termo de (6.7) fornece o complementar da probabilidade de *default* (PD), ou seja, a probabilidade de que o valor do ativo V da companhia seja inferior ao valor de suas dívidas B no tempo T . Ou seja,

$$\begin{aligned} E(I_{(V_T > B)}) &= P(V_T > B) \\ &= 1 - P(V_T \leq B) \\ &= 1 - P\left(\frac{V_T}{V_t} \leq \frac{B}{V_t}\right) \end{aligned}$$

Da Equação (6.4), segue que:

$$\begin{aligned} E(I_{(V_T > B)}) &= 1 - P\left(\ln\left(\frac{V_T}{V_t}\right) \leq -\ln\left(\frac{B}{V_t}\right)\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(\frac{V_t}{B}) - (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(\frac{V_t}{B}) + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right), \end{aligned}$$

sendo $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, $Z \sim N(0, 1)$.

Assim, de forma complementar,

$$P(V_T \leq B) = \Phi(-d_2), \quad (6.8)$$

em que

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{V_t}{B}) + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T - t)}{\sigma_V \sqrt{T - t}}.$$

No cenário brasileiro, empresas com capital aberto e que possuem negociação em bolsa dispõem de algumas informações públicas que permitem o cálculo de sua probabilidade de *default* pelo Modelo de Merton. O valor do passivo B , por exemplo, pode ser obtido por meio das demonstrações financeiras divulgadas trimestralmente.

De acordo com (BHARATH; SHUMWAY, 2008), apesar de algumas aplicações do modelo considerarem o valor do ativo V_t como observável, ele não é diretamente obtido pelas informações públicas e, portanto, deve ser inferido. Ainda, a volatilidade observada nas negociações das ações no mercado equivale à volatilidade do patrimônio líquido σ_S e não do ativo σ_V e, então, esse valor também deve ser inferido. Conforme exposto pelos autores, é possível relacionar a volatilidade do ativo σ_V com a volatilidade do patrimônio líquido σ_S por meio da seguinte relação:

$$\sigma_S = \left(\frac{V}{S} \right) \Phi(d_1) \sigma_V. \quad (6.9)$$

Algumas abordagens foram propostas para a otimização do sistema de equações formado por (6.9) e (6.10) para se obter os valores de V_t e σ_V , como citado pelos autores.

$$S_T = V_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} B \Phi(d_2), \quad (6.10)$$

em que d_1 é calculado a partir da esperança do primeiro termo de (6.7).

$$\begin{aligned}
 E(V_T I_{(V_T > B)}) &= e^{-r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} f(V_T) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} y^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} V_t \exp \left[-\frac{1}{2} (y - \sigma_V \sqrt{T-t})^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V_t \int_{-d_2 - \sigma_V \sqrt{T-t}}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} y^2 \right] dy \\
 &= V_t P(Y \leq d_2 + \sigma_V \sqrt{T-t}) \\
 &= V_t \Phi(d_2 + \sigma_V \sqrt{T-t}) \\
 &= V_t \Phi(d_1),
 \end{aligned}$$

ou seja, $d_1 = d_2 + \sigma_V \sqrt{T-t}$

Contudo, em seu estudo, os autores concluem que modelos complexos de otimização não agregam valor à capacidade preditiva do *default* e, assim, concluem que a importância do modelo reside em sua forma funcional e não nesta resolução específica. Nesse sentido, foram propostas aproximações ingênuas (*naïves*) para as volatilidades σ_B e σ_V .

Primeiramente, assume-se que o valor de mercado da dívida da empresa equivale a seu valor de face B . Como as empresas próximas da inadimplência possuem dívidas de alto risco, e o risco dessas dívidas está correlacionado com o risco de seu patrimônio, os autores aproximaram a volatilidade da dívida de cada empresa por:

$$\sigma_{B(\text{naïve})} = 0,05 + 0,25\sigma_S.$$

Assim, a volatilidade do valor do ativo, σ_V é aproximada por:

$$\sigma_{V(\text{naïve})} = \frac{S}{S+B}\sigma_S + \frac{B}{S+F}\sigma_{B(\text{naïve})}.$$

Portanto, a probabilidade de *default* dada pela Equação (6.8) pode ser aproximada por:

$$P(V_T \leq B)_{(\text{naïve})} = \Phi(-d_{2(\text{naïve})}), \quad (6.11)$$

em que

$$d_{2(\text{naïve})} = \frac{\ln(\frac{S+B}{B}) + (r - \frac{1}{2}\sigma_{V(\text{naïve})}^2)(T-t)}{\sigma_{V(\text{naïve})}\sqrt{T-t}}. \quad (6.12)$$

Apesar de o Modelo de Merton apresentar resultados significativos por meio de cálculos simples, algumas premissas assumidas não são observáveis no mundo real, como:

1. *Default* apenas no vencimento T : sabe-se que o evento de *default* pode ocorrer em qualquer tempo, e não apenas em um momento específico T ;
2. *Default* = liquidação: sabe-se que há mecanismos legais e financeiros que suportam a existência da empresa na tentativa de reerguê-la. Assim, o evento de *default* considerado pelo Modelo de Merton não necessariamente implica em imediata liquidação da companhia; e
3. Normalidade: o Modelo de Black & Scholes, base para o Modelo de Merton, assume que o valor dos ativos segue distribuição lognormal e seu logaritmo segue distribuição normal. Nesse sentido, o Modelo de Merton não captura a ocorrência de eventos extremos. A Figura 6.1 ilustra esse contraste: o painel da esquerda mostra os log-retornos diários do Ibovespa, enquanto o painel da direita apresenta série simulada com a mesma média e variância, assumindo normalidade i.i.d., conforme modelo de Movimento Browniano com *drift*. Nota-se que, embora ambas tenham a mesma variabilidade global, a série real apresenta episódios concentrados de alta volatilidade e picos extremos — características ausentes na simulação. Esses padrões reforçam a inadequação da hipótese de retornos gaussianos na modelagem de ativos financeiros.

Na seção a seguir, discute-se a extensão do Modelo de Merton com a inclusão de saltos de descontinuidade ao Movimento Browniano, modelados por processos de Lévy, conforme

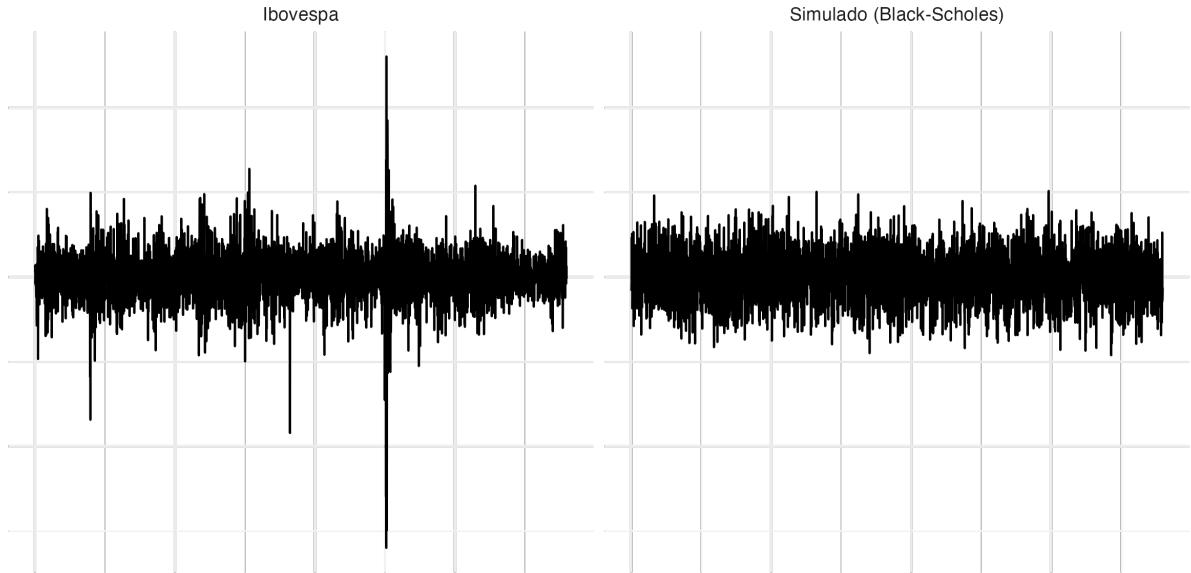


Figura 6.1: Série de log-retorno do Ibovespa (esquerda) e série simulada com $W_t \sim N(\bar{x}, s^2)$

previsto inicialmente em (MERTON, 1976). Tal modificação visa aprimorar a capacidade do modelo em capturar comportamentos extremos e proporcionar melhor ajuste aos dados empíricos.

6.3 PD - Modelo de Merton - Processo de Lévy

A análise dos retornos de ativos financeiros revela padrões que desafiam a suposição clássica de normalidade adotada por modelos baseados unicamente no Movimento Browniano. Embora modelos como o de Black & Scholes consigam reproduzir a média e a variância observadas em séries empíricas, eles o fazem assumindo variações suaves e contínuas nos preços, com retornos de magnitude relativamente constante. No entanto, quando comparamos tais modelos com dados reais, torna-se evidente a presença de comportamentos abruptos e dispersões acen-tuadas. Grandes oscilações de preços, que ocorrem com frequência muito superior à prevista por uma distribuição normal, podem indicar que os retornos possuem caudas pesadas — isto é, que eventos extremos têm probabilidade significativamente maior do que o esperado sob o

modelo gaussiano. Esse desajuste entre a modelagem clássica e os dados empíricos motiva o estudo de alternativas mais flexíveis, como os processos de Lévy, que incorporam saltos de descontinuidades e capturam melhor a estrutura estatística observada nos mercados financeiros.

Dentre os processos estocásticos com trajetórias descontínuas, destaca-se o processo de Poisson, que desempenha um papel central na modelagem de fenômenos com saltos. Ele será utilizado como estrutura para a construção de processos de salto mais elaborados.

Esta seção será desenvolvida com base na abordagem apresentada por ([CONT; TANKOV, 2003](#)) e ([MATSUDA, 2004](#)), cujas obras apresentam modelagem consistente com os saltos e as caudas pesadas observados nos dados financeiros por meio do uso de processos de Lévy. De acordo com o modelo, os saltos ocorrem conforme um Processo de Poisson composto N_t com intensidade λ (mais detalhes sobre Processo de Poisson no Apêndice [C](#)).

O Modelo de Merton com saltos é caracterizado por incorporar o tamanho dos saltos do preço na dinâmica do preço do ativo, sendo que a variável aleatória y_t representa o tamanho absoluto no salto do preço. O salto relativo, portanto, é representado por

$$\begin{aligned} \frac{dV_t}{V_t} &= \frac{y_t V_t - V_t}{V_t} \\ &= y_t - 1, \end{aligned} \tag{6.13}$$

em que $\ln(y_t) \sim \text{i.i.d } N(a, b^2)$, o que implica que $E(y_t) = \exp(a + \frac{1}{2}b^2)$ e $Var(y_t) = \exp(2a + b^2)(\exp(b^2) - 1)$.

Assim, o salto relativo, dado pela Equação (6.13), possui distribuição lognormal com média:

$$E(y_t - 1) = \exp(a + \frac{b^2}{2}) - 1 \equiv k \tag{6.14}$$

A variação do valor do ativo pode ser representada pela equação diferencial

$$dV_t = V_t[(\alpha - \lambda k)dt + \sigma_V dW_t + (y_t - 1)dN_t].$$

Ou, de forma equivalente,

$$\frac{dV_t}{V_t} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma_V dW_t + (y_t - 1)dN_t, \quad (6.15)$$

em que α é o retorno esperado instantâneo ($E(\frac{dV_t}{V_t}) = \alpha dt$), σ_V é a volatilidade instantânea do retorno da ação condicionada a não ocorrência de saltos, W_t é o Movimento Browniano Padrão, N_t é um Processo de Poisson com intensidade λ .

O terceiro termo da Equação (6.15) contém duas fontes de aleatoriedade. A do processo dN_t , que reflete a aleatoriedade dos saltos dos preços, e a do seu tamanho y_i , uma vez que o salto ocorre. Assume-se que ambas as fontes de aleatoriedade são independentes. Se não há salto no preço do ativo em um intervalo pequeno de tempo dt ($dN_t = 0$), então o processo de difusão (6.15) é simplesmente o Movimento Browniano com *drift*, com processo equivalente a (6.2), em que:

$$\mu = \alpha - \lambda k. \quad (6.16)$$

Da Fórmula de Itô para difusões com saltos (Equação (F.2) do Apêndice F), é obtida a solução da Equação (6.15), em que $f(V_t) = \ln(V_t)$

$$V_T = V_t \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right], \quad (6.17)$$

em que $Y_t \equiv \ln(y_t) \sim N(a, b^2)$ e $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ é um Processo de Poisson composto. Isso significa que o preço dos ativos $\{V_t\}_{t \leq T}$ é modelado por um Processo de Lévy exponencial da forma:

$$V_T = V_t e^{L_t},$$

em que L_t é um Processo de Lévy definido como um Movimento Browniano com *drift* (parte contínua) e um Processo de Poisson (parte descontínua), tal que:

$$\begin{aligned} L_t &= \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \\ &= \ln \left(\frac{V_T}{V_t} \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Destaca-se que, caso $N_t = 0$ ou caso os saltos negativos se cancelarem com os positivos, então $\sum_{i=1}^{N_t} \ln(y_i) = 0$.

Na especificação de opções do tipo europeia, o preço do derivativo é

$$P_{\text{call}} = e^{-r(T-t)} E(V_T I_{(V_T > B)}) - e^{-r(T-t)} B E(I_{(V_T > B)}).$$

O cálculo das esperanças de P_{call} não é direto, visto que a distribuição de V_T , dada em (6.17), depende do Processo de Poisson composto. Esta seção será limitada ao cálculo da PD, dada por:

$$\begin{aligned} E(I_{(V_T \leq B)}) &= P(V_T < B) \\ &= P \left(\frac{V_T}{V_t} \leq \frac{B}{V_t} \right) \\ &= P \left(L_t \leq -\ln \left(\frac{V_t}{B} \right) \right). \end{aligned}$$

Ao utilizar o Processo de Lévy (6.18), obtém-se que:

$$\begin{aligned}
 E(I_{(V_T \leq B)}) &= E \left[I_{(L_t \leq -\ln(\frac{V_t}{B}))} \right] \\
 &= E \left\{ E \left[I_{(L_t \leq -\ln(\frac{V_t}{B}))} \middle| N_t = n \right] \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T-t) + \sigma_V \sqrt{T-t} Z + \sum_{i=1}^n Y_i \leq -\ln \left(\frac{V_t}{B} \right) \right) P(N = n).
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Sendo $Y_i \sim N(a, b^2)$, $\sum_{i=1}^n Y_i \sim N(na, nb^2)$ e $\sigma_V \sqrt{T-t} Z + \sum_{i=1}^n Y_i \sim N(na, \sigma_V^2(T-t) + nb^2)$, então

$$\begin{aligned}
 X_t &= \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T-t) + \sigma_V \sqrt{T-t} Z + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \\
 &\sim N \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T-t) + na, \sigma_V^2(T-t) + nb^2 \right).
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

De (6.20),

$$\begin{aligned}
 P \left(X_t \leq -\ln \left(\frac{V_t}{B} \right) \right) &= \Phi \left(\frac{-\ln \left(\frac{V_t}{B} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T-t) - na}{\sqrt{\sigma_V^2(T-t) + nb^2}} \right) \\
 &= \Phi(-d_2(n)),
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

em que

$$d_2(n) = \frac{\ln \left(\frac{V_t}{B} \right) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T-t) + na}{\sqrt{\sigma_V^2(T-t) + nb^2}}. \tag{6.22}$$

Portanto, de (6.19) a (6.22), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 PD &= P(V_T \leq B) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \Phi(-d_2(n)). \tag{6.23}
 \end{aligned}$$

Assim, a PD do Modelo de difusão de Merton com saltos é uma mistura infinita de distribuições gaussianas $\Phi(-d_2(n))$, em que os pesos são dados pela distribuição de Poisson com intensidade λ . Isto é, mistura da PD oriunda do Modelo de Black & Scholes condicionada ao fato de que o preço do ativo salta n vezes até o vencimento. Destaca-se que, se $n = 0$, a PD equivale ao modelo da Seção 6.2.

Capítulo 7

Método

7.1 Processo de análise

O Capítulo 1 apresentou exemplos de estudos de agregação de riscos por meio da abordagem por cópulas. A Figura 7.1 apresenta, de forma resumida, o processo geral de análise desses estudos para o cálculo da medida de risco agregado.

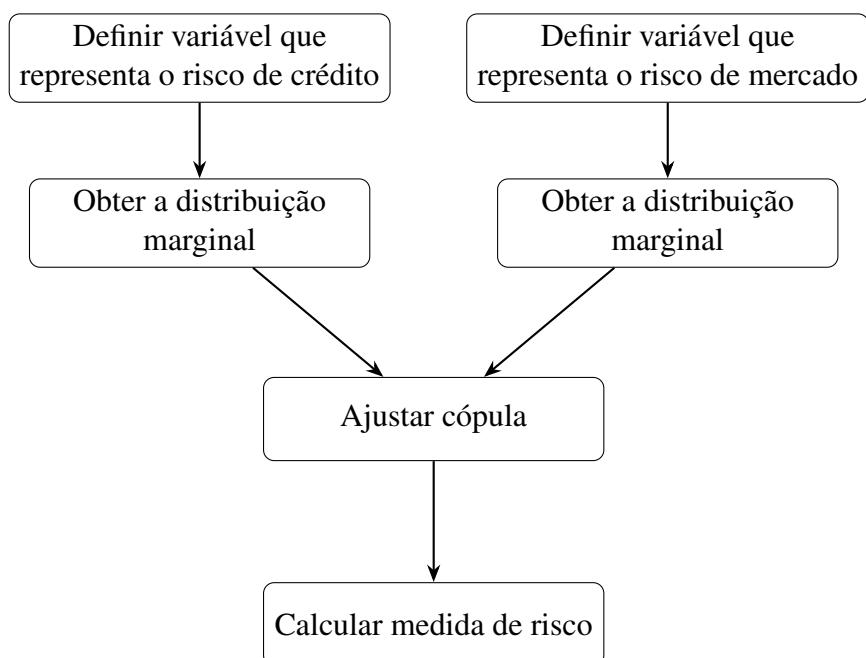


Figura 7.1: Processo geral de agregação de riscos verificado na literatura

Para este trabalho, a mensuração do risco agregado considera os fatos estilizados individuais de cada série, além de *proxies* aderentes aos dados disponíveis. A Figura 7.2 apresenta com maior detalhe o processo a ser aplicado no estudo de caso, conforme teoria exposta nos capítulos anteriores.

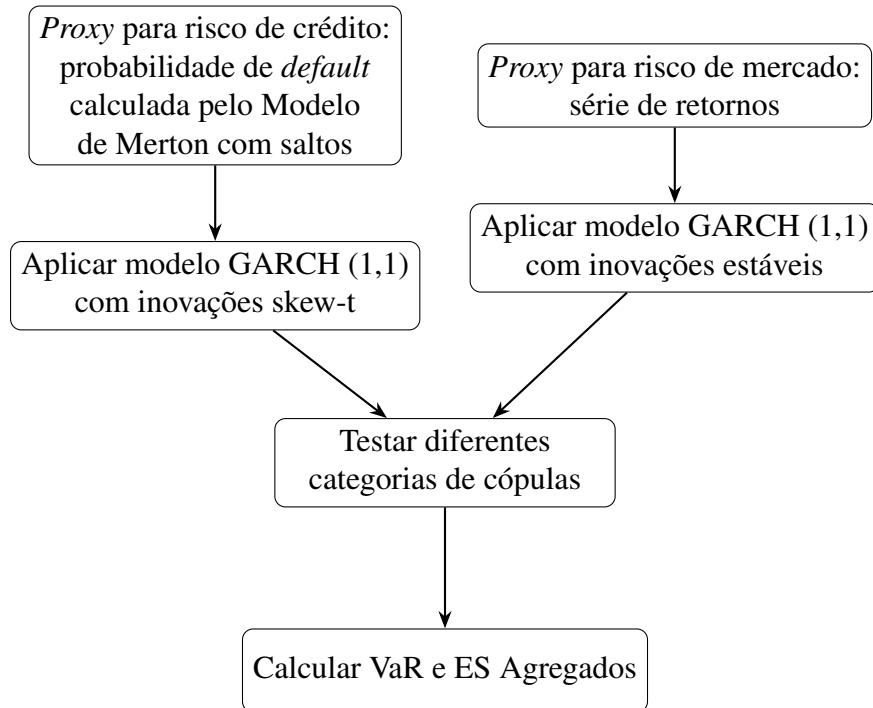


Figura 7.2: Processo específico de agregação de riscos

A etapa final de cálculo do VaR Agregado seguirá o algoritmo detalhado na Seção 7.2. Todas as análises foram feitas em R, versão 4.2.3 ([R Core Team, 2023](#)).

7.2 Medidas de Risco Agregado

Os passos a seguir para estimação do VaR para um passo à frente $T+1$ de uma carteira composta por dois ativos por meio de cópulas estão de acordo com o proposto em ([LU; LAI; LIANG, 2014](#)). Os autores propõem algoritmo baseado em modelo Cópula-GARCH para cálculo do VaR agregado previsto para um dia à frente.

1. **Ajuste dos Modelos GARCH:** ajuste dos modelos GARCH para cada série e estimação

das distribuições marginais usando inovações com distribuição normal, t-Student ou t-Student assimétrica;

2. **Previsão de Médias e Variâncias:** previsão das médias (\hat{r}_{T+1}^i) e variâncias (\hat{h}_{T+1}^i) para o período $T + 1$ usando os modelos ajustados;
3. **Simulação de Cenários:** simulação de $N = 10.000$ cenários para o período $[T, T + 1]$ usando a distribuição conjunta modelada pelas cópulas; e
 - (a) **Estimação dos Parâmetros da Cúpula:** transformação dos resíduos padronizados (η_t^X e η_t^Y) em variáveis uniformes (u_t e v_t) usando as distribuições marginais estimadas. Estimação dos parâmetros da copula (κ) usando (u_t e v_t);
 - (b) **Simulação de Variáveis Aleatórias:** simulação de N pares de variáveis aleatórias (u_{T+1}^j, v_{T+1}^j) a partir da cópula estimada;
 - (c) **Transformação dos PITs (Probability Integral Transforms) em Resíduos Padronizados:** transformação dos pares (u_{T+1}^j, v_{T+1}^j) em resíduos padronizados ($\eta_{T+1}^{X,j}, \eta_{T+1}^{Y,j}$) usando as funções inversas das distribuições marginais;
 - (d) **Geração dos Retornos Simulados:** geração dos retornos simulados ($r_{T+1}^{X,j}, r_{T+1}^{Y,j}$) usando os resíduos padronizados e as previsões de média e variância; e

$$r_{T+1}^{X,j} = \hat{r}_{T+1}^X + \eta_{T+1}^{X,j} \cdot \sqrt{\hat{h}_{T+1}^X}$$

$$r_{T+1}^{Y,j} = \hat{r}_{T+1}^Y + \eta_{T+1}^{Y,j} \cdot \sqrt{\hat{h}_{T+1}^Y}$$

- (e) **Cálculo do P&L (Profit and Loss) Simulado:** cálculo do P&L simulado para cada cenário j :

$$L_{T+1}^j = \frac{1}{2} P_T^X (\exp(r_{T+1}^{X,j}) - 1) + \frac{1}{2} P_T^Y (\exp(r_{T+1}^{Y,j}) - 1)$$

4. **Cálculo do VaR:** ordenação dos N valores de L_{T+1}^j em ordem crescente; e cálculo do VaR como o percentil correspondente ao nível de confiança desejado, conforme Equação (2.1):

$$\text{VaR}_{95\%} = \text{Absoluto do } 500^{\text{o}} \text{ valor ordenado de } L_{T+1}$$

$$\text{VaR}_{99\%} = \text{Absoluto do } 100^{\text{o}} \text{ valor ordenado de } L_{T+1}$$

Para o cálculo do ES, soma-se, entre os 10.000 valores simulados de L_{T+1} , aqueles que superam o VaR em determinado nível de confiança, conforme Equação (2.2).

Capítulo 8

Estudo de Caso

8.1 Base de dados

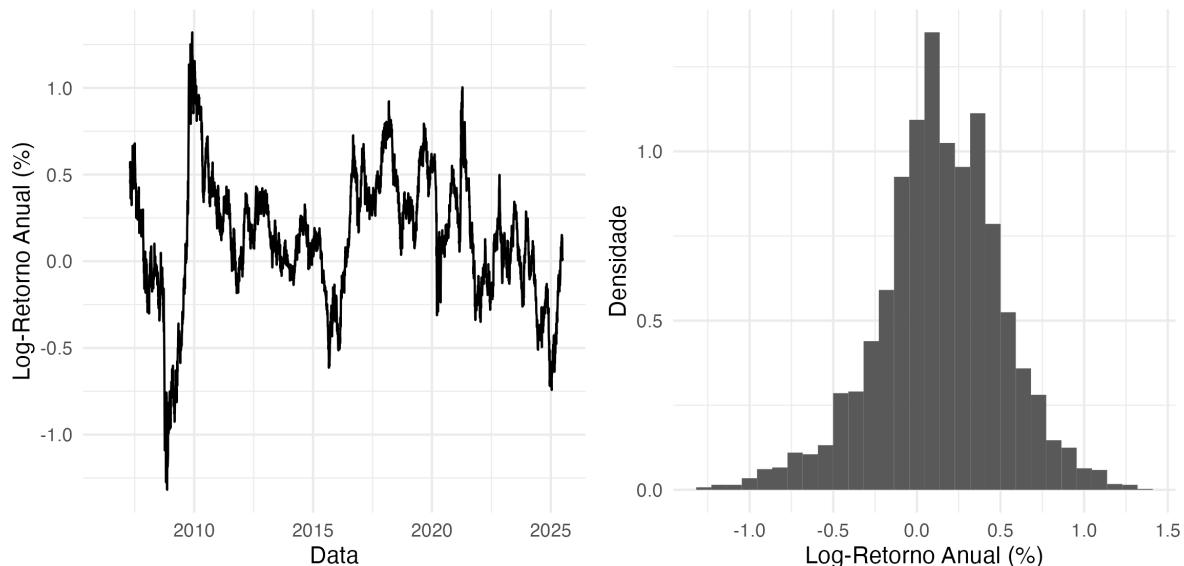
Para ilustrar a teoria apresentada, considerou-se dados da empresa Localiza, representada pelo ativo RENT3 negociado na B3. As variáveis utilizadas foram: data da posição, *market cap*, passivo, patrimônio líquido, volatilidade anual EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) e valor de fechamento da ação. Ainda, foi utilizada a série de preço do título Letra Financeira do Tesouro para representar a taxa de juros livre de riscos em base anual. Os dados foram retirados da plataforma Economatica.

Trata-se de dados diários do período de 30 de junho de 2005, data de início da negociação do papel na bolsa de valores, a 30 de junho de 2025. A partir dos valores de fechamento da ação, calculou-se o log-retorno diário do papel e, posteriormente, o log-retorno anual. Como, para a base anual, utiliza-se a janela móvel de 252 dias, a base de dados final tem início em 04 de julho de 2006, com 4.701 observações diárias. A Tabela 8.1 apresenta as estatísticas descritivas dos log-retornos anuais.

Tabela 8.1: Estatísticas descritivas do log-retorno anual de RENT3 (em %)

Mínimo	1º Quantil	Mediana	Média	3º Quantil	Máximo
-131.82	-8.06	13.53	13.71	37.51	132.07

A Figura 8.1 representa o log-retorno anual histórico da companhia.

**Figura 8.1:** Gráficos do log-retorno anual de RENT3

Para representar o risco de mercado, será utilizada a série diária de log-retornos anuais, sendo que sua marginal será calculada na Seção 8.2. Para o risco de crédito, as demais variáveis do banco de dados serão insumo para o cálculo da probabilidade de *default*, que será a base de sua marginal, calculada na Seção 8.3.

8.2 Distribuição Marginal - Risco de Mercado

O teste KPSS ([KWIATKOWSKI et al., 1992](#)) rejeita a hipótese de estacionariedade da série de log-retornos anuais. Dessa forma, é necessária a aplicação da primeira diferença na série

de dados. A Figura 8.2 representa a série diferenciada, que será utilizada na modelagem da marginal.

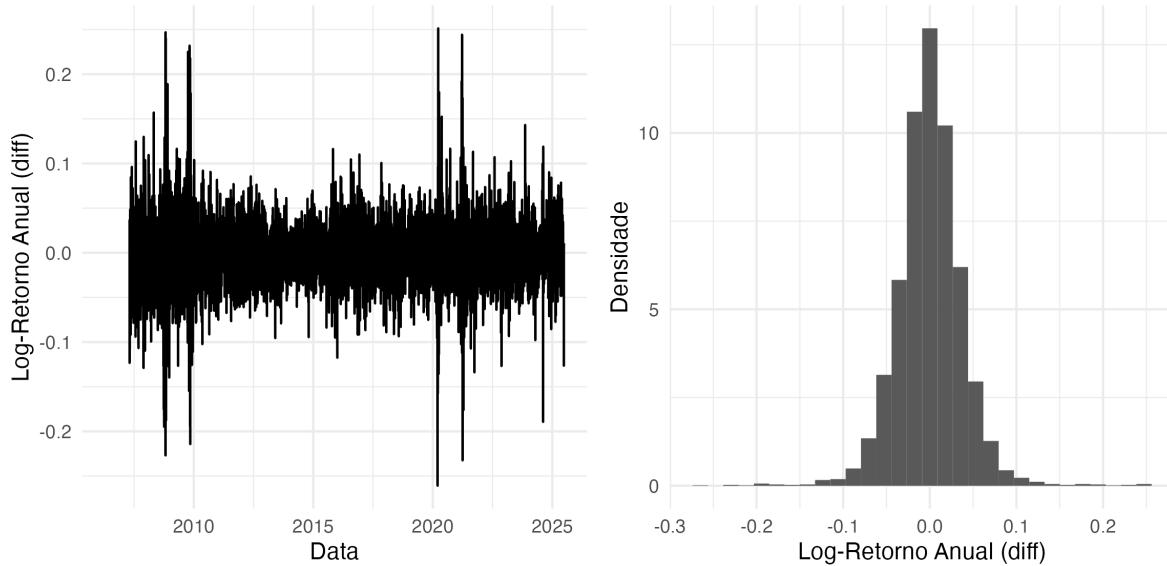


Figura 8.2: Gráficos do log-retorno anual diferenciado de RENT3

A curtose, de 5,23, demonstra o aspecto leptocúrtico dos dados, que tende a gerar mais *outliers*, e o coeficiente de assimetria, de 0,11, indica leve assimetria à direita.

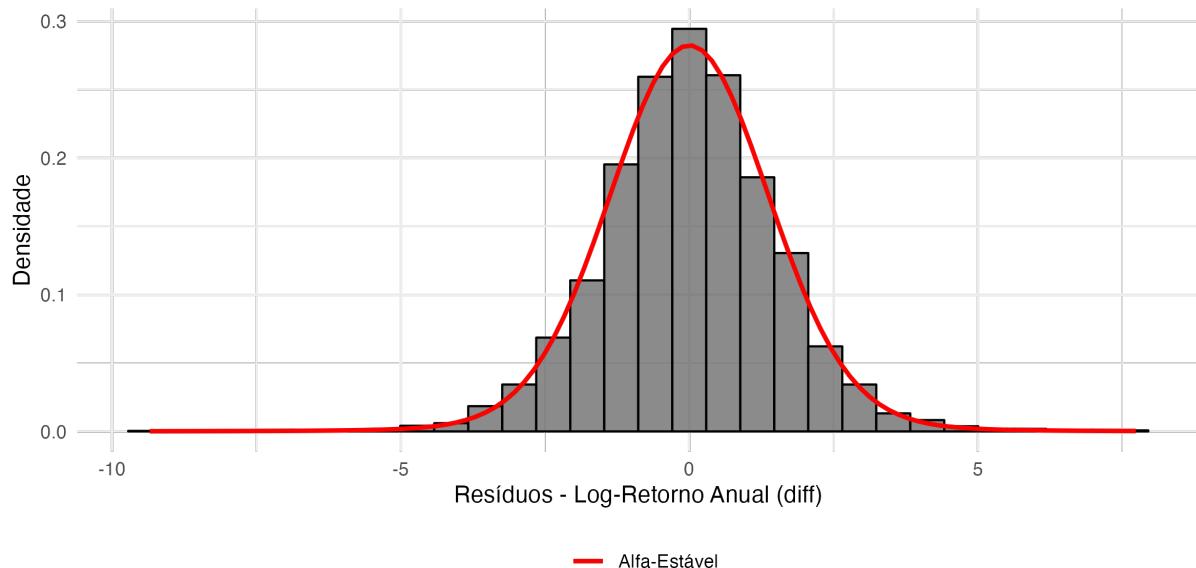
8.2.1 Ajuste GARCH

Ante às características dos dados, ajustou-se o modelo GARCH(1,1), que é capaz de ajustar a os *clusters* de volatilidade apresentados pelos dados e comprovados pelos gráficos e testes anteriores. As inovações foram consideradas como distribuições alfa-estáveis, de forma a captar a incidência de valores extremos e a assimetria dos dados. Para esse ajuste, utilizou-se o pacote GEVStableGarch ([SOUSA, 2015](#)).

Tabela 8.2: Parâmetros estimados - GARCH(1,1) com inovações alfa-estáveis

Parameters	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.00	0.00	-0.57	0.57
omega	0.00	0.00	4.79	0.00
alpha1	0.05	0.01	10.00	0.00
beta1	0.92	0.01	105.16	0.00
skew	0.03	0.14	0.20	0.84
shape1	1.90	0.02	99.28	0.00

O valor do coeficiente shape1, que representa o índice de estabilidade α da distribuição alfa-estável, confirma a cauda pesada dos resíduos, uma vez que seu valor é inferior a 2. A Figura 8.3 representa o ajuste dos resíduos.

**Figura 8.3:** Resíduos do modelo GARCH(1,1) com ajuste pela alfa-estável

A série dos resíduos, ajustada pela distribuição alfa-estável, representa a marginal referente ao risco de mercado. Na sequência, a outra distribuição marginal, que representa o risco de

crédito, também será ajustada pelo GARCH(1,1), porém com inovações skew-t.

8.3 Distribuição Marginal - Risco de Crédito

8.3.1 Cálculo PD - Modelo de Merton

Inicialmente, a probabilidade de *default* é calculada pelo Modelo de Merton considerando a abordagem *naïve* de (BHARATH; SHUMWAY, 2008) representada pela Equação (6.11), em termos de $d_2(\text{naïve})$ dado pela Equação (6.12). A Figura 8.4 apresenta o resultado.

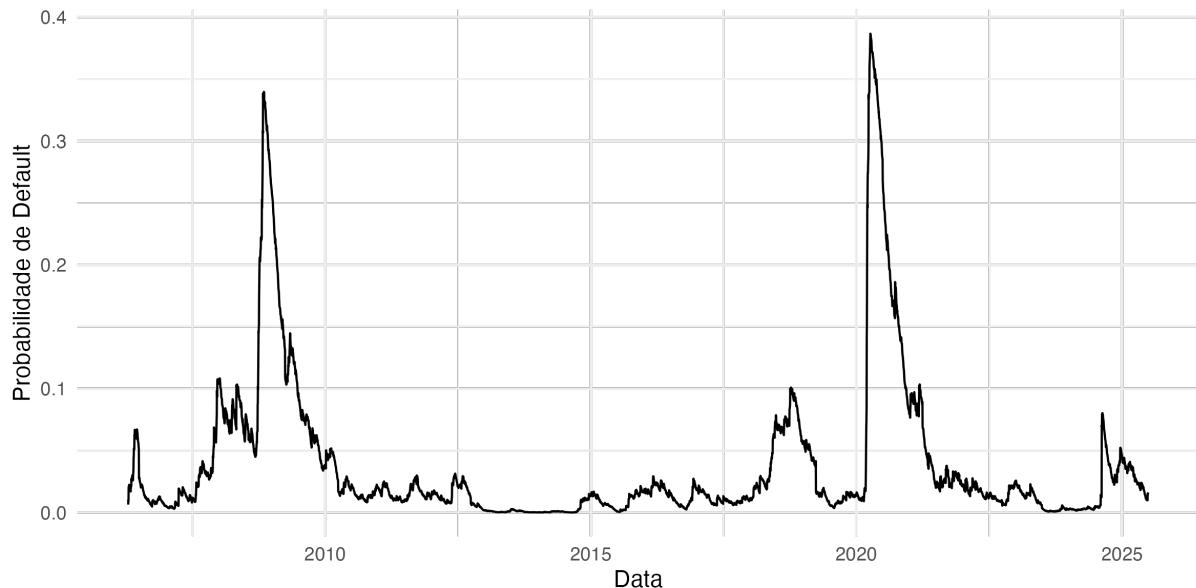


Figura 8.4: Probabilidade de *Default* da empresa Localiza - Modelo de Merton

8.3.2 Cálculo PD - Modelo de Merton com saltos

A Equação (6.21) representa a probabilidade de *default* calculada com a incorporação dos saltos oriundos do Processo de Lévy. Em comparação com a Equação (6.12), a (6.22) possui os parâmetros α , λ , k , a , e b , referentes aos saltos, que devem ser estimados. A estimação foi realizada de forma empírica, ou seja, a partir do histórico dos retornos da empresa Localiza.

Define-se como ocorrência de saltos aqueles retornos capazes de impactar significativamente o resultado da companhia. Como a série de log-retorno anual não é estacionária, a modelagem dos saltos foi realizada com base na série de log-retorno diário e convertida para a base anual. A Figura 8.5 apresenta o histograma do log-retorno diário histórico com o ajuste pela distribuição alfa-estável, feito com o pacote fBasics ([WUERTZ; SETZ; CHALABI, 2023](#)).

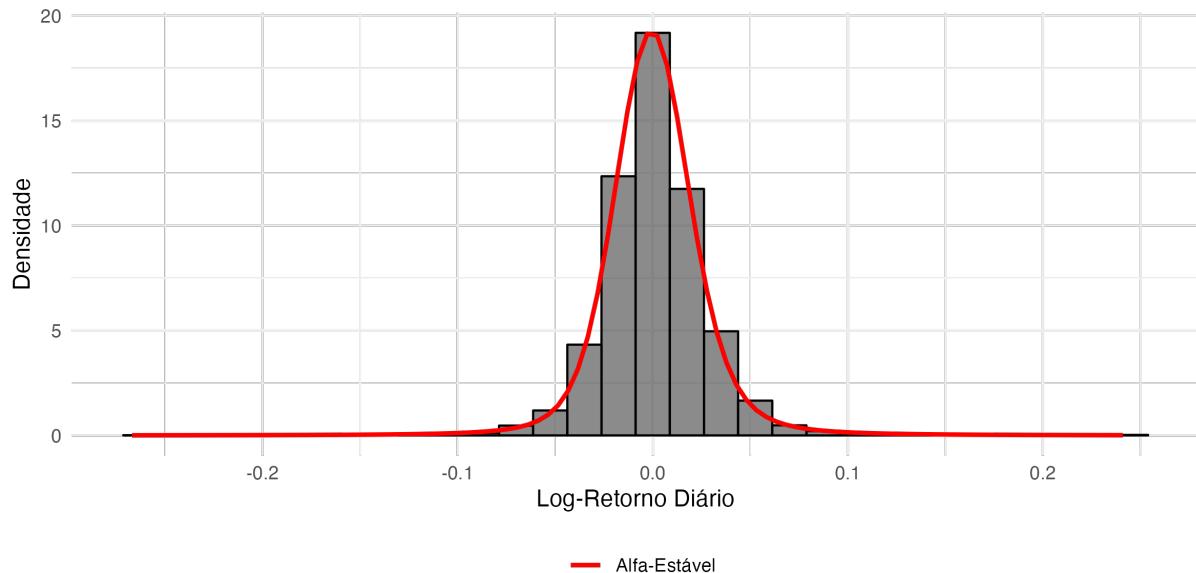


Figura 8.5: Log-retornos diários com ajuste pela alfa-estável

Foram considerados como saltos aqueles retornos inferiores ao quantil 1% e os superiores ao 99%. A distribuição alfa-estável e seus quantis foram utilizadas por representarem adequadamente os eventos extremos. A Figura 8.6 apresenta a delimitação dos quantis.

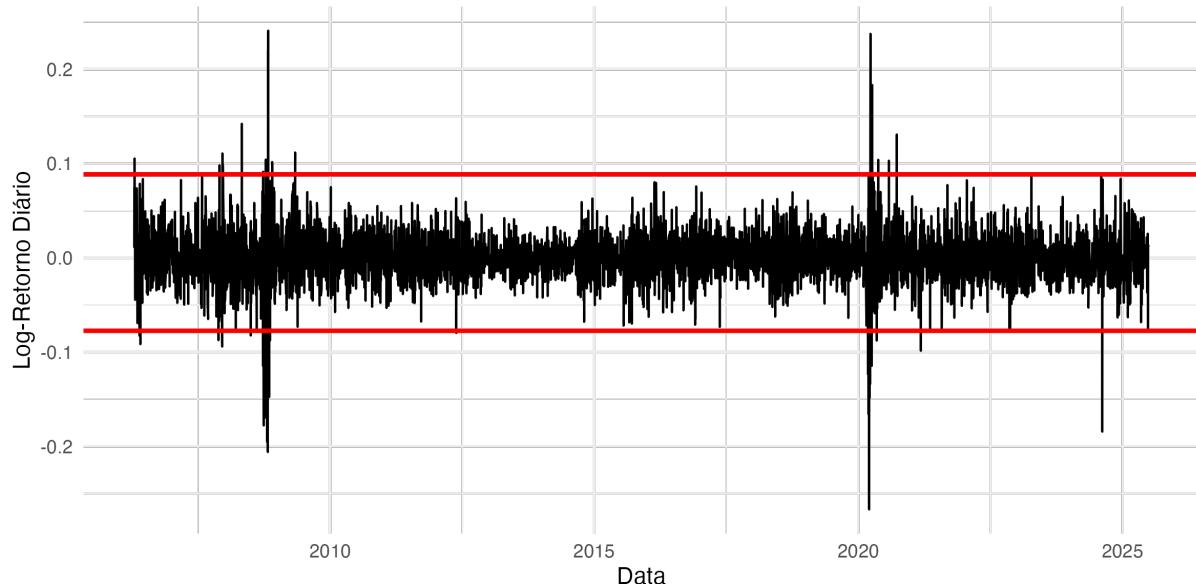


Figura 8.6: Log-retornos diários com quantis 1% e 99% da alfa-estável

Considerando o histórico da empresa Localiza e os quantis da alfa-estável, tem-se um total de 48 saltos no período observado, de 18,86 anos, o que resulta em 2,54 saltos por ano ($\hat{\lambda} = 2,54$).

A variável aleatória $y_t - 1$, Equação (6.13), representa o salto relativo do preço, ou seja, a variação do preço de ativo oriunda do processo de salto. Pelos saltos destacados na Figura 8.6, e dado que $\ln(y_t) \sim \text{i.i.d } N(a, b^2)$, tem-se que $\hat{a} = -0,0147$ e $\hat{b} = 0,0666$. A partir dessas estimativas, é possível obter k , conforme Equação (6.14) ($k = -0,0124$). O parâmetro α , Equação (6.16), depende do retorno médio μ , que será considerado como a taxa livre de risco (r), em linha com o entendimento do Modelo de Black & Scholes (Equação (6.6)).

Para ilustrar o processo com os parâmetros estimados, a Figura 8.7 apresenta uma simulação dos log-retornos diários no horizonte de 252 dias (um ano em dias úteis). Inicialmente, simulou-se um processo sem saltos oriundo do Movimento Browniano. Depois, adicionou-se o processo de saltos em que sua quantidade é dada por um processo de Poisson com intensidade $\hat{\lambda}$ (Equação (C.1)).

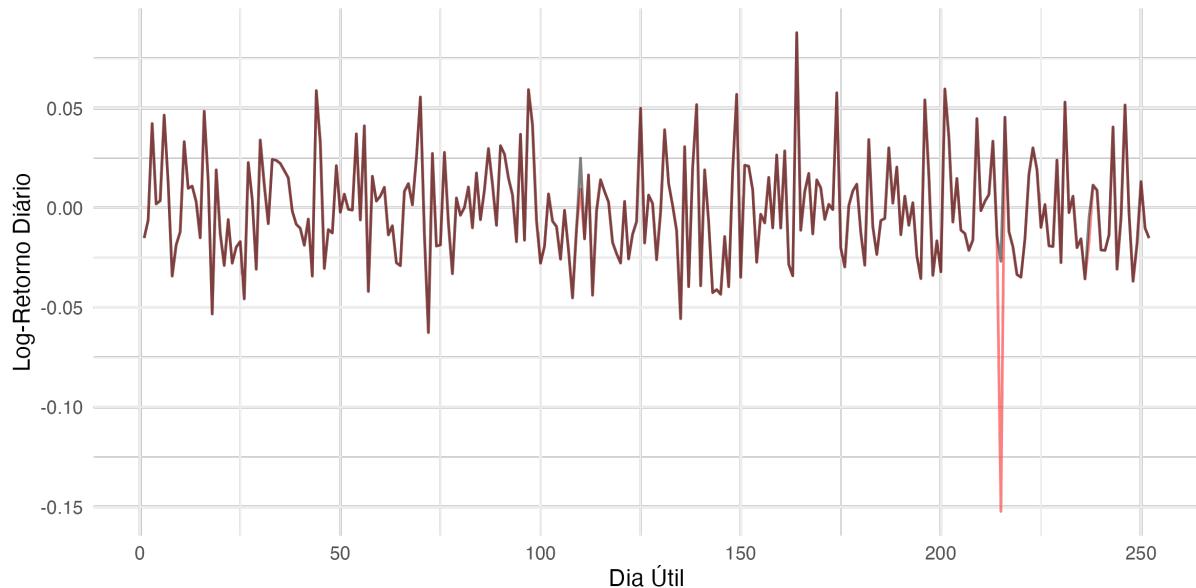


Figura 8.7: Log-retornos simulados com e sem saltos (Modelo de Merton)

Verifica-se que a adição do processo de saltos é importante para que a modelagem seja capaz de incorporar os eventos descontínuos que ocorrem em séries de retornos financeiros que fogem do padrão de um Movimento Browniano. Nesse sentido, os cálculos posteriores à essa premissa indicam uma representação mais aderente aos fatos estilizados das séries financeiras.

Com os parâmetros estimados, é possível calcular a probabilidade de *default* pelo Modelo de Merton com saltos, conforme Equação (6.23). A Figura 8.8 apresenta o resultado, em comparação à Figura 8.4.

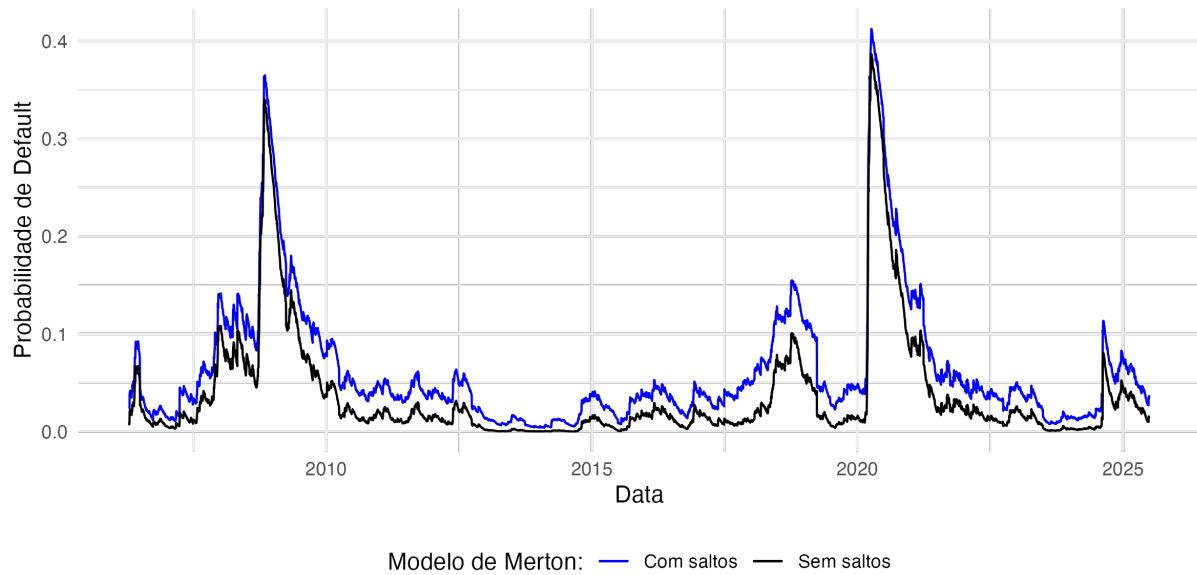


Figura 8.8: Probabilidade de *Default* da empresa Localiza - Modelo de Merton

Verifica-se que o processo de saltos aumentou a estimativa da probabilidade de *default* da empresa Localiza, situação aderente à incorporação da possibilidade de ocorrência de eventos extremos às simulações. A PD oriunda do Modelo de Merton com saltos foi a utilizada na sequência da análise.

O teste KPSS ([KWIATKOWSKI et al., 1992](#)) rejeita a hipótese de estacionariedade da série de probabilidade de *default*. Assim, aplicou-se a primeira diferença na série. A Figura 8.9 apresenta a série diferenciada, que será utilizada na modelagem da marginal.

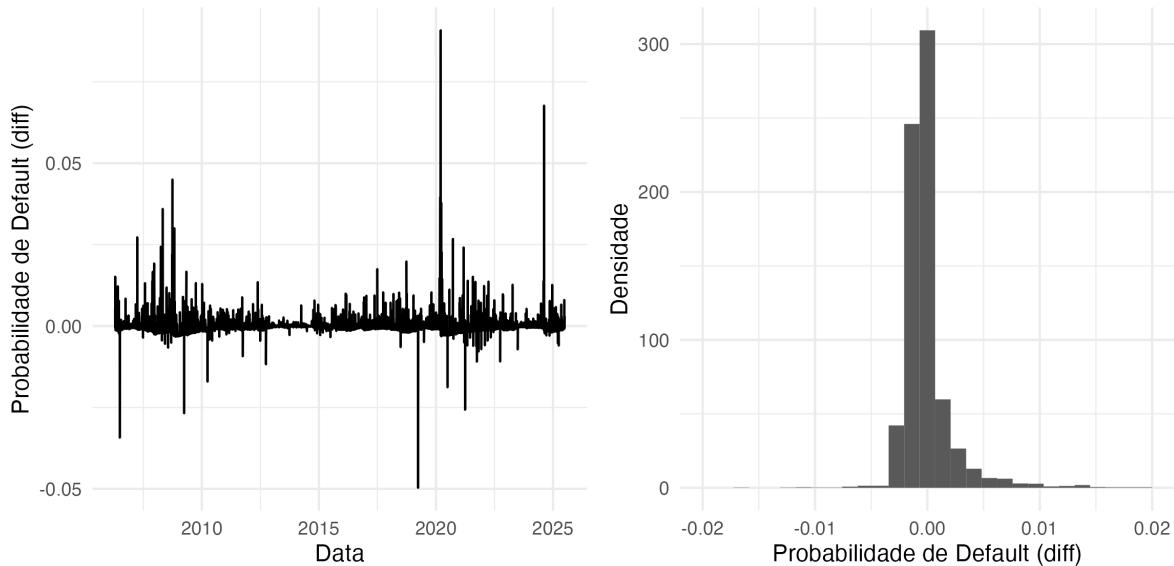


Figura 8.9: Gráficos da probabilidade de *default* diferenciada da empresa Localiza

A curtose, de 173,30, demonstra o aspecto leptocúrtico dos dados, que tende a gerar mais *outliers*, e o coeficiente de assimetria, de 8,01, indica assimetria à direita.

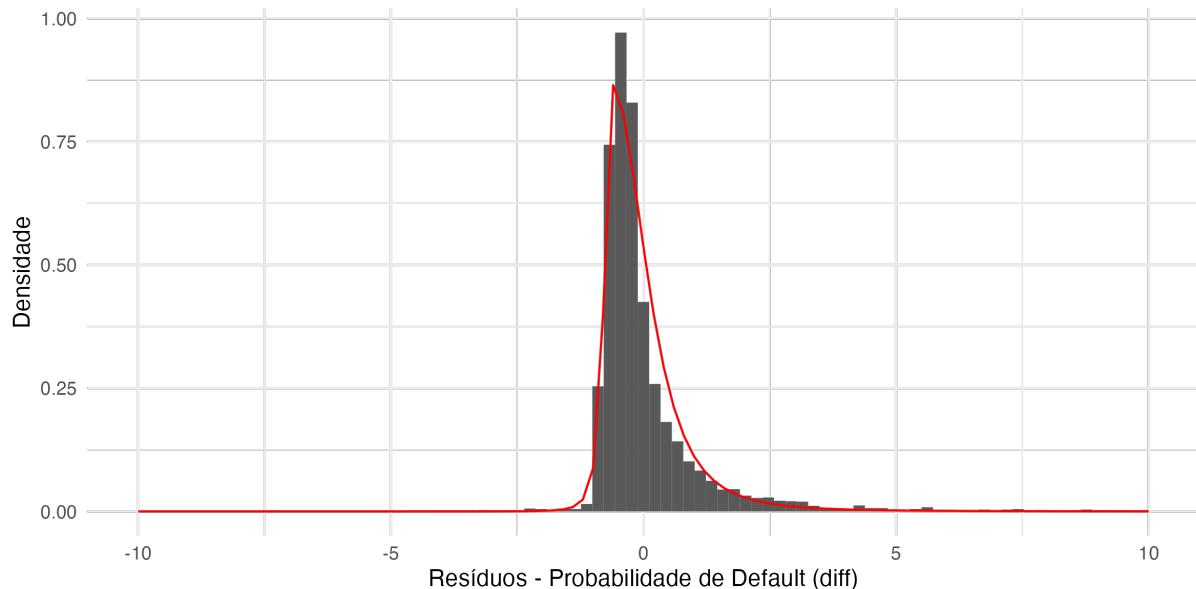
8.3.3 Ajuste GARCH

Assim como ajustado para a marginal de risco de mercado, o modelo GARCH(1,1) também foi aplicado na série de probabilidade de *default* diferenciada, para representar a marginal de risco de crédito. Contudo, as inovações, neste caso, foram consideradas como skew-t, distribuição que também capta a incidência de caudas pesadas e assimetria. O ajuste foi realizado pelo pacote rugarch ([GALANOS; KLEY, 2025](#)).

Tabela 8.3: Parâmetros estimados - GARCH(1,1) com inovações skew-t

Parameters	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.00	0.00	-5.75	0.00
omega	0.00	0.00	0.00	1.00
alpha1	0.03	0.00	19.02	0.00
beta1	0.96	0.00	735.76	0.00
skew	2.20	0.05	40.08	0.00
shape	2.83	0.05	52.10	0.00

O coeficiente shape indica os graus de liberdade da skew-t, que controla o peso das caudas da distribuição. Quanto maior seu valor, mais a distribuição se aproxima da normal. Nesse caso, o valor do coeficiente indica caudas mais pesadas que a normal, mas ainda com variância finita. A Figura 8.10 representa o ajuste dos resíduos.


Figura 8.10: Resíduos do modelo GARCH(1,1) com ajuste pela skew-t

A série dos resíduos, ajustada pela distribuição skew-t, representa a marginal referente ao

risco de crédito. Diante dos ajustes das duas marginais de interesse, uma referente ao risco de mercado e outra referente ao risco de crédito, aplica-se a metodologia da função cópula para modelar a estrutura de dependência entre ambos os tipos de risco.

8.4 Cópulas

Para a modelagem da dependência entre as medidas, é necessário que o ajuste da cópula seja realizada com séries i.i.d. Portanto, as distribuições marginais utilizadas foram dos resíduos obtidos pelo ajuste do modelo GARCH para ambas as séries, sendo a de mercado ajustada pela alfa-estável e a de crédito pela skew-t.

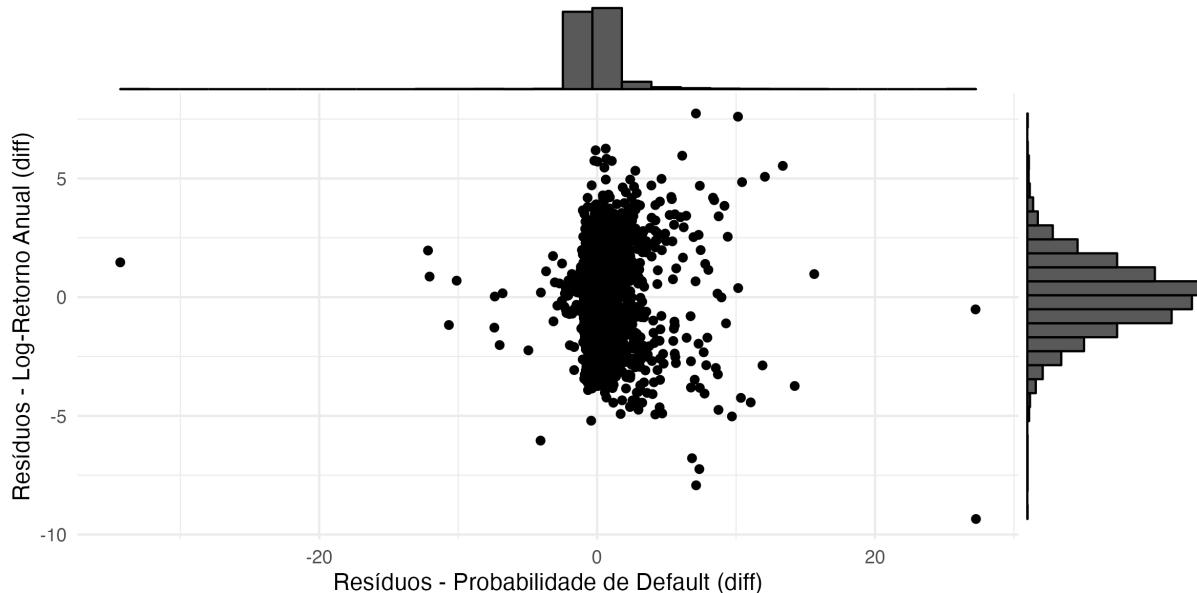


Figura 8.11: Gráfico de dispersão entre resíduos GARCH

Verifica-se que a série de log-retorno anual apresenta concentração em zero. Para valores extremos, o formato côncavo do gráfico de dispersão indica maiores níveis da série de probabilidade de *default*.

Para o ajuste da cópula, as séries dos resíduos foram transformadas em séries com distribuição uniforme $U[0, 1]$, representados na Figura 8.12.

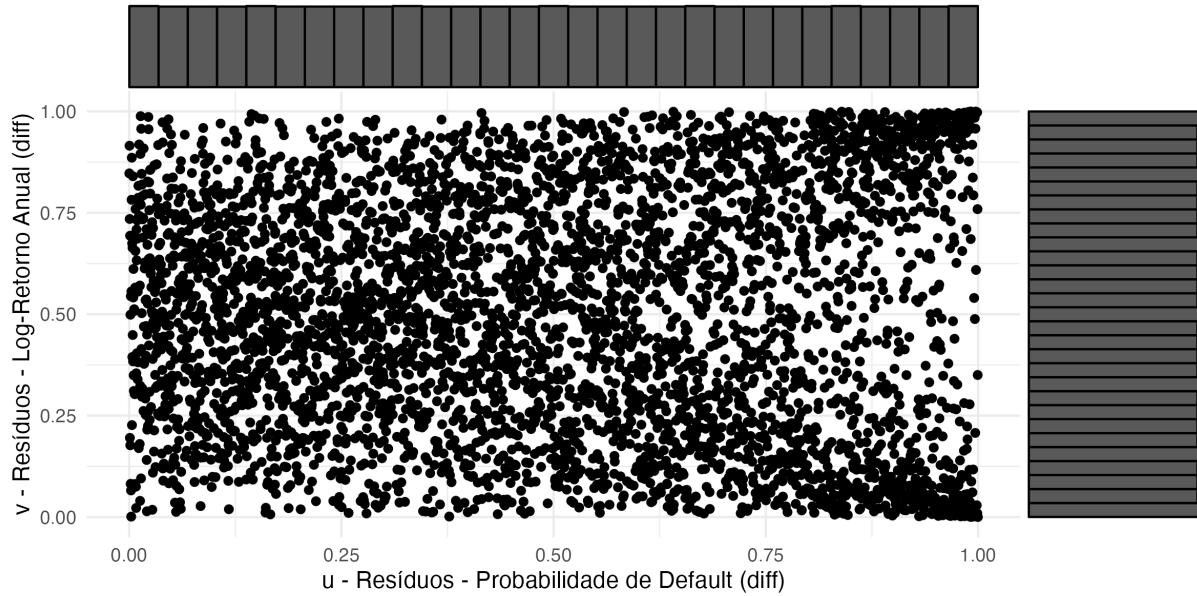


Figura 8.12: Gráfico de dispersão entre u e v

É possível verificar uma maior concentração de pontos na faixa em que u se aproxima de 1. Quando v também se aproxima de 1, essa concentração indica que quando a série de probabilidade de *default* está alta, o retorno também tende a estar nos quantis mais altos. Por outro lado, quando v se aproxima de 0, a concentração indica que quando a série de probabilidade de *default* está alta, também ocorrem retornos baixos. Ou seja, valores extremos de u parecem estar associados a extremos tanto altos quanto baixos de v .

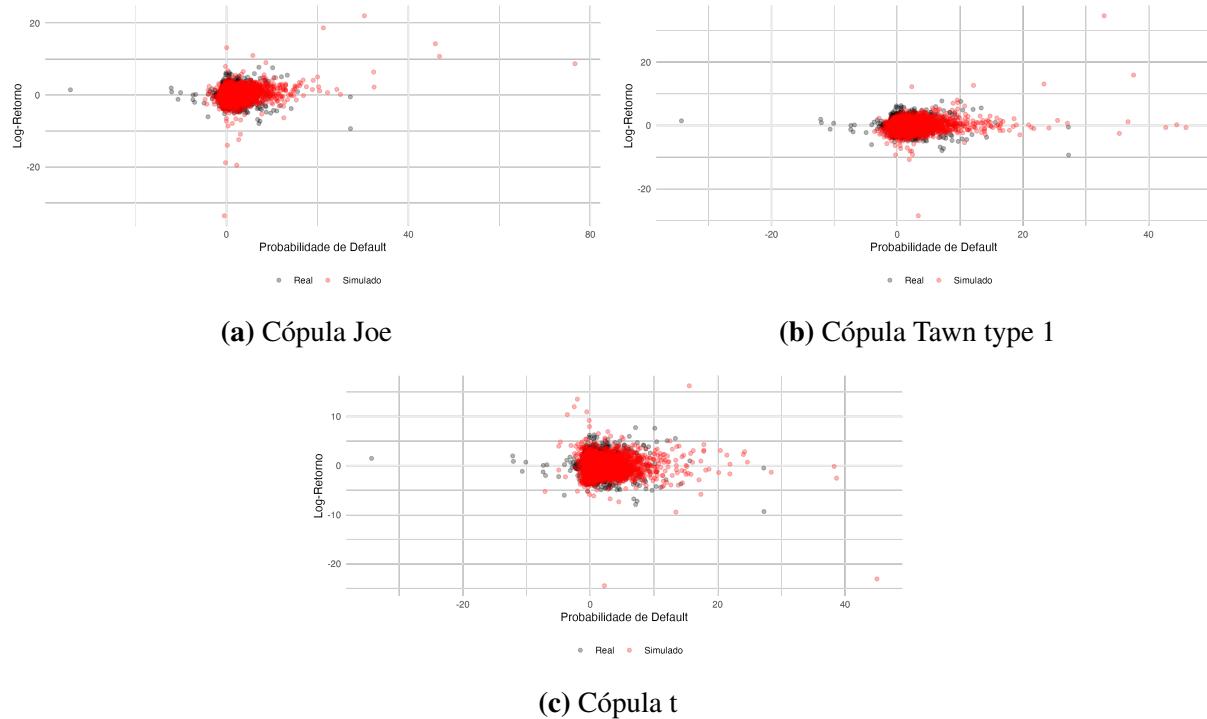
Em termos financeiros, essa relação pode refletir que situações extremas de risco de crédito (alta PD) podem ocorrer junto com movimentos extremos no retorno — positivos ou negativos — por choques macroeconômicos ou eventos específicos de mercado, por exemplo.

Por meio do pacote VineCopula (NAGLER et al., 2024), foram testadas diversas cópulas das três categorias citadas no Capítulo 4: elípticas, arquimedianas e de valores extremos. A Tabela 8.4 apresenta a cópula que resultou no menor AIC, por categoria. O objetivo é avaliar os diferentes ajustes de forma gráfica.

Tabela 8.4: Cópulas ajustadas - Localiza

Categoría	Cópula	AIC
Arquimediana	Joe	-196.93
Valores Extremos	Tawn type 1	-246.88
Elíptica	Student t	-251.75

Para verificar o ajuste da dependência nos dados originais, simulou-se a mesma quantidade de dados originais para os vetores da cópula. A Figura 8.13 compara o ajuste com os resíduos.

**Figura 8.13:** Gráficos de dispersão das cópulas ajustadas aos resíduos

8.5 Cálculo do VaR

O algoritmo para cálculo do VaR agregado um passo à frente ($T + 1$) foi detalhado na Seção 7.2. O primeiro passo, de ajuste dos modelos GARCH e das distribuições marginais dos resíduos, foi realizado nas subseções 8.2 e 8.3.

Para calcular a medida de risco em termos anuais, ou seja, a perda estimada no horizonte de um ano, o cálculo considerou as projeções 252 passos à frente ($T + 252$), o que equivale a um ano em dias úteis.

Com os modelos ajustados, estimam-se o vetor de médias $\hat{r}_{T+1}, \dots, \hat{r}_{T+252}$ e de variâncias $\hat{h}_{T+1}, \dots, \hat{h}_{T+252}$ para 1 a 252 passos à frente. Posteriormente, estimam-se as variáveis aleatórias u_{T+252} e v_{T+252} a partir dos parâmetros da cópula ajustada e, por meio da função inversa dos resíduos (com distribuições skew-t e alfa-estável), obtém-se os resíduos simulados ($\eta_{T+252}^X = t_X^{-1}(u_{T+252})$ e $\eta_{T+252}^Y = t_Y^{-1}(v_{T+252})$).

Para gerar as séries simuladas (log-retorno anual e probabilidade de *default*, ambos diferenciados), foram utilizados as médias, variâncias e resíduos estimados, em que j representa cada simulação.

$$\begin{aligned} r_{T+252}^{X,j} &= \hat{r}_{T+252}^X + \eta_{T+252}^{X,j} \sqrt{\hat{h}_{T+252}^X} \\ r_{T+252}^{Y,j} &= \hat{r}_{T+252}^Y + \eta_{T+252}^{Y,j} \sqrt{\hat{h}_{T+252}^Y} \end{aligned}$$

Em comparação ao algoritmo utilizado como referência, dois ajustes foram necessários:

1. Como a estimativa foi realizada para mais de um passo à frente, é necessário adicionar os valores das séries diferenciadas nesse período; e
2. Como a modelagem foi realizada com a série diferenciada, é necessário adicionar o termo anterior de log-retorno ou probabilidade de *default* para que a estimativa reflita o valor na unidade original. Porém, como a projeção foi realizada para um período longo (252 dias), o valor adicionado foi das médias do log-retorno e da probabilidade de *default*, para que a memória do valor realizado de 252 dias atrás não seja carregada na estimativa.

A lógica desses ajustes pode ser explicada pela sequência de equações:

$$a_{diff_{252}} = a_{252} - a_{251}$$

$$a_{252} = a_{diff_{252}} + a_{251}$$

$$a_{252} = a_{diff_{252}} + a_{diff_{251}} + a_{250}$$

$$a_{252} = a_{diff_{252}} + a_{diff_{251}} + \dots + a_{diff_1} + a_0$$

Nesse sentido, as perdas vinculadas ao risco de crédito e de mercado, representadas por l_{T+252}^X e l_{T+252}^Y , respectivamente, são:

$$l_{T+252}^{X,j} = r_{T+252}^{X,j} + \hat{r}_{T+1}^X + \dots + \hat{r}_{T+251}^X + \bar{l}_t^X$$

$$l_{T+252}^{Y,j} = r_{T+252}^{Y,j} + \hat{r}_{T+1}^Y + \dots + \hat{r}_{T+251}^Y + \bar{l}_t^Y$$

Para obter a perda agregada, considerou-se uma carteira com exposição de 50% em títulos de crédito privado e 50% em ações da mesma companhia (Localiza). Foram realizadas 10.000 simulações para o retorno e para a probabilidade de *default* em $T + 252$ e, a cada simulação, calculou-se a perda estimada, em termos percentuais:

$$L_{T+252}^j = 0,5l_{T+252}^{X,j} + 0,5l_{T+252}^{Y,j},$$

em que l^X representa o log-retorno anual projetado, o que indica a perda (ou valorização) de mercado de forma direta, ponderada pelo peso do ativo na carteira (assumido como 50%). Para a perda vinculada ao risco de crédito, utiliza-se o entendimento da Equação (6.1), em que a LGD é assumida como 100%. Nesse sentido, l^Y , ponderado pelo peso na carteira (que representa o termo EAD), passa a representar a perda esperada (EL) de risco de crédito.

O VaR estimado para a carteira em $T + 252$ é, portanto, o quantil das 10.000 observações

de L_{T+252} . As Tabelas 8.5 a 8.7 apresentam os resultados do VaR considerando cada cópula ajustada (Tabela 8.4).

Tabela 8.5: VaR (em %) - Cópula Joe

Nível de Confiança	VaR Carteira	VaR Crédito	VaR Mercado
90.00	22.69	15.31	35.84
95.00	30.92	19.20	51.94
97.50	38.62	24.11	67.88
99.00	48.85	32.12	88.78

Tabela 8.6: VaR (em %) - Cópula Tawn type 1

Nível de Confiança	VaR Carteira	VaR Crédito	VaR Mercado
90.00	23.62	15.09	37.87
95.00	31.27	18.99	53.55
97.50	38.92	23.55	68.66
99.00	48.82	30.66	88.00

Tabela 8.7: VaR (em %) - Cópula t

Nível de Confiança	VaR Carteira	VaR Crédito	VaR Mercado
90.00	23.82	15.14	38.09
95.00	32.75	19.20	55.31
97.50	41.53	23.71	70.35
99.00	52.75	31.26	90.75

Considerando, como exemplo, a Cópula t, para o nível de confiança de 95%, espera-se uma perda máxima de 55,31% a título de risco de mercado e de 19,20% para risco de crédito. Caso a estimativa ingênuas fosse considerada para o risco agregado da carteira, ou seja, a soma dos

riscos sem considerar a estrutura de dependência, ao nível de confiança de 95%, o risco seria de 37,26%. Contudo, o efeito da diversificação pode ser verificado no VaR da carteira, de 32.75%. Assim, conforme Equação (1.1), o efeito da diversificação do risco foi de 4,51%.

Para o cálculo do ES, calculou-se a média dos valores referentes aos 10.000 cenários que superaram o VaR indicado nas Tabelas 8.8 a 8.10.

Tabela 8.8: ES (em %) - Cúpula Joe

Nível de Confiança	ES Carteira	ES Crédito	ES Mercado
90.00	35.23	22.52	61.27
95.00	44.13	28.11	78.85
97.50	53.71	34.85	98.33
99.00	70.12	45.99	131.60

Tabela 8.9: ES (em %) - Cúpula Tawn type 1

Nível de Confiança	ES Carteira	ES Crédito	ES Mercado
90.00	37.02	22.10	64.89
95.00	47.00	27.43	84.87
97.50	59.40	33.99	109.68
99.00	84.33	44.98	159.35

Tabela 8.10: ES (em %) - Cúpula t

Nível de Confiança	ES Carteira	ES Crédito	ES Mercado
90.00	37.73	22.93	63.41
95.00	47.52	29.00	80.72
97.50	58.58	36.87	99.64
99.00	77.25	52.09	130.30

No mesmo sentido do cálculo do VaR, Para a Cúpula t, a estimativa ingênua do ES agregado, ao nível de confiança de 95%, seria de 54,86%. Contudo, o ES da carteira resultou em 47,52%, indicando um efeito de diversificação de 7,34%.

8.6 Outras empresas

Para avaliar a aderência do método a um conjunto mais amplo de empresas, os modelos foram aplicados às companhias que compõem o Ibovespa (IBOV), excetuando-se aquelas pertencentes ao Subsetor Bovespa “Previdência e Seguros”. A exclusão justifica-se porque, por sua natureza, essas empresas não atuam como contrapartes em títulos privados ofertados ao mercado.

Os dados referentes à composição do índice foram extraídos do sistema Economatica, considerando a posição em 30 de junho de 2025. Naquela data, o índice era composto por 81 empresas, das quais 4 pertenciam ao subsetor excluído. Assim, o modelo foi aplicado a 77 empresas.

Tabela 8.11: Frequência das cópulas selecionadas pelo critério de menor AIC - Empresas IBOV

Categoria	Cópula	Quantidade	Quantidade (%)
Elíptica	Student t	49	63.64
Valores Extremos	Tawn type 1	14	18.18
Arquimédiana	Joe	8	10.39
Valores Extremos	Rotated Tawn type 2 (270°)	5	6.49
Arquimédiana	Rotated Joe (270°)	1	1.30
Total		77	100.00

Para os devidos ajustes, algumas empresas apresentaram algumas peculiaridades, que foram tratadas da seguinte forma:

- Vale, Rede d'Or e Raia Drogasil: O ajuste da marginal para o risco de mercado pelo modelo GARCH(1,1) com inovações alfa-estáveis não apresentaram estimativas de erro

padrão (Tabela 8.2). Assim, a marginal foi ajustada pelo modelo GARCH(1,1) com inovações normais.

- Sabesp: O algoritmo para a modelagem dos log-retornos diários pela distribuição alfa-estável (Figura 8.5) não convergiu. Assim, nesse caso, considerou-se como limiar para os saltos (Figura 8.6) os quantis da distribuição ajustada pela skew-t;
- Iguatemi, Vamos e Raizen: Dados os limiares ajustados pela distribuição alfa-estável, a empresa apresentou apenas um salto no período. Assim, não foi possível calcular os estimadores para cálculo da probabilidade de *default* pelo Modelo de Merton com saltos. Portanto, considerou-se para a marginal a PD oriunda do Modelo de Merton sem saltos; e
- Itausa, Totvs e Isa Energia: O ajuste da marginal para o risco de crédito pelo modelo GARCH(1,1) com inovações skewt não convergiu (Tabela 8.3). Assim, a marginal foi ajustada pelo modelo GARCH(1,1) com inovações normais assimétricas.

Ainda, há 3 empresas que possuem mais de um papel na composição do IBOV: Bradesco, Petrobras e Eletrobras. Para essas empresas, foram consideradas as ações do tipo ordinárias (ON).

Verifica-se pela Tabela 8.11 que 63,34% das empresas analisadas se ajustaram à cópula t. Nesse sentido, como a cópula t representou adequadamente a maior parte das empresas e como o cálculo das medidas de risco (comparadas pelas Tabelas 8.5 a 8.10) não variaram de forma significativa entre as cópulas, os resultados seguintes consideraram o ajuste pela cópula t.

As Tabelas 8.12 e 8.13 apresentam o VaR e o ES, respectivamente, para as 10 maiores empresas em termos de participação no IBOV.

Tabela 8.12: VaR 95 % e Efeito de diversificação considerando Cúpula t e 50% de exposição em títulos privados e 50% em ações - 10 maiores empresas do IBOV

Empresa	VaR (%)	VaR <i>naïve</i> (%)	Efeito de diversificação (p.p.)
Vale	9.45	9.57	0.12
ItauUnibanco	41.93	54.65	12.72
Petrobras	44.45	44.89	0.44
Sabesp	38.95	38.97	0.02
B3	48.53	48.65	0.12
Eletrobras	24.03	24.09	0.06
Itausa	28.06	28.11	0.05
Weg	46.88	47.06	0.18
Brasil	47.00	60.19	13.19
Ambev S/A	30.73	30.86	0.13

Tabela 8.13: ES 95 % e Efeito de diversificação considerando Cúpula t e 50% de exposição em títulos privados e 50% em ações - 10 maiores empresas do IBOV

Empresa	ES (%)	ES <i>naïve</i> (%)	Efeito de diversificação (p.p.)
Vale	12.02	12.25	0.23
ItauUnibanco	68.60	89.44	20.84
Petrobras	59.69	60.28	0.59
Sabesp	49.82	49.86	0.04
B3	60.95	61.10	0.16
Eletrobras	39.67	39.74	0.07
Itausa	38.85	38.93	0.08
Weg	62.19	62.36	0.17
Brasil	72.78	93.83	21.05
Ambev S/A	45.63	45.82	0.19

Em todos os casos, o cálculo do VaR e ES agregados refletiu o efeito positivo da diversificação entre os tipos de risco (Equação (1.1)), ou seja, caso o cálculo das medidas não considerasse a estrutura de dependência entre o risco de mercado e o de crédito, as medidas de cada contraparte estariam superestimadas e sua exposição ao risco não estaria sendo adequadamente refletida.

Essa análise é útil ao considerar uma carteira bem diversificada com diversas contrapartes em que há diversas estratégias de investimentos em curso. A diversificação mais comum em uma carteira de investimentos é a intra-riscos, particularmente risco de mercado, em que busca-se novas exposições no mesmo tipo de ativo porém oriundas de diferentes contrapartes. As medidas mais usuais para mensurar o risco desses ativos são o VaR e o ES e, a partir delas, é possível comparar o nível de risco dos papéis em uma carteira.

Contudo, ao alocar em diferentes categorias de risco (diversificação inter-risco), particularmente risco de mercado e de crédito, a abordagem de mensuração dos riscos difere entre si. Para o risco de crédito, uma opção de monitoramento, consolidada no mercado, é por meio da probabilidade de *default*. Porém, a combinação desta medida com o VaR de mercado, de forma direta, torna-se inadequada. Por isso, é importante o desenvolvimento de métodos que tornem a união das medidas possível e, consequentemente, a comparação entre diferentes contrapartes.

Assim, o VaR e o ES apresentados nas Tabelas 8.12 e 8.13, que não só consolida as medidas de risco em uma unidade única, mas que também considera a estrutura de dependência entre elas, reflete o risco que cada contraparte expõe à carteira.

Capítulo 9

Conclusão

O presente trabalho abordou o desafio enfrentado por instituições alocadoras de recursos financeiros no cálculo do risco agregado decorrente de múltiplas exposições. Para isso, realizou-se uma revisão de literatura sobre os métodos mais aplicados nesse contexto, especificamente para a agregação de riscos de mercado e de crédito. Focou-se em uma perspectiva associada ao risco de cada contraparte, abordagem ainda pouco explorada na literatura. Ao estender essa metodologia para uma carteira diversificada, buscou-se mensurar o risco específico de cada contraparte.

A metodologia integrou abordagens estocásticas e de séries temporais. Para o risco de mercado, utilizou-se o modelo de séries temporais GARCH, cujos resíduos foram ajustados à distribuição alfa-estável para capturar efetivamente as caudas pesadas e a assimetria observadas nos retornos financeiros. Quanto ao risco de crédito, a probabilidade de *default* (PD) foi determinada com base no Modelo de Merton, com a adição de saltos definidos pelo Processo de Lévy. A série de PD resultante foi então modelada pelo GARCH com inovações skew-t, que também é capaz de lidar com caudas pesadas e assimetria.

A estrutura de dependência entre os riscos de mercado e de crédito foi modelada por meio de função cópula, que permite a separação das distribuições marginais da estrutura de dependência conjunta. Para a obtenção do VaR agregado, o estudo testou diversas famílias de cópulas, e a cópula t-Student demonstrou o melhor ajuste para a maioria das empresas analisadas.

A aplicação prática do modelo foi ilustrada por meio de um estudo de caso com dados da empresa Localiza e estendida a outras empresas que compõem o índice Ibovespa. Os resultados obtidos demonstraram consistentemente um efeito significativo de diversificação. Isso significa que o VaR e o ES agregados para a carteira foram inferiores à soma das medidas de risco individuais, evidenciando que uma soma ingênua das perdas individuais levaria a uma superestimação do risco total da carteira.

Em suma, este trabalho oferece um *framework* robusto e relevante para a gestão quantitativa de riscos. Ao modelar explicitamente as características intrínsecas dos riscos de mercado e de crédito – incluindo sua volatilidade variável no tempo, caudas pesadas e fenômenos de salto – e suas interdependências por meio de cópulas, o trabalho contribui para um cálculo mais preciso e coerente das métricas de risco agregado (VaR e ES). A capacidade de consolidar diferentes tipos de risco em uma única medida unificada permite que as instituições obtenham uma compreensão mais precisa da vulnerabilidade gerada por cada contraparte e mitiguem eficientemente concentrações excessivas de risco.

Conclui-se que a metodologia apresentada e aplicada neste trabalho oferece uma ferramenta para que as instituições aprimorem suas práticas de gestão de riscos, ao proporcionar uma visão integrada dos riscos de mercado e de crédito no nível da contraparte, o que é essencial para tomadas de decisão informadas em ambientes financeiros complexos.

Como trabalhos futuros, recomenda-se investigar metodologias de estimação mais robustas para os parâmetros de salto para o cálculo da probabilidade de *default* (PD). Também se destaca a necessidade de aprimorar o tratamento da projeção de modelos GARCH com inovações alfa-estáveis, uma vez que a projeção da variância requer ajustes específicos para incorporar corretamente os efeitos de potência e assimetria do modelo. Além disso, sugere-se a extensão do cálculo do risco agregado para contemplar, conjuntamente, os riscos de mercado, crédito e operacional. Finalmente, uma contribuição prática importante seria o desenvolvimento de um pacote em R dedicado ao cálculo do risco agregado, o que facilitaria a aplicação da metodologia proposta tanto em pesquisas acadêmicas quanto em práticas de mercado.

Referências Bibliográficas

ALBUQUERQUE, M. P. da S. *Agregação de risco de mercado, risco de crédito e risco operacional em atividades de um banco*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Universidade de São Paulo, 2010.

ARTZNER, P. et al. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.

BHARATH, S. T.; SHUMWAY, T. Forecasting default with the merton distance to default model. *Rev. Financ. Stud.*, v. 21, n. 3, p. 1339—1369, 2008.

BJÖRK, T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 4th. ed. [S.l.]: OUP Oxford, 2019.

BLACK, F.; COX, J. C. Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions. *The Journal of Finance*, v. 31, n. 2, p. 351–367, 1976.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, n. 3, p. 307—327, 1986.

CONT, R.; TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. 1st. ed. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2003.

EMBRECHTS, P.; FURRER, H.; KAUFMANN, R. Different kinds of risk. In: MIKOSCH, T. et al. (Ed.). *Handbook of Financial Time Series*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 729–751.

EMBRECHTS, P.; HöING, A.; JURI, A. Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*, v. 7, n. 2, p. 145—167, 2003.

EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. 1st. ed. [S.l.]: Springer, 1997.

EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F.; MCNEIL, A. Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In: RACHEV, S. T. (Ed.). *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. [S.l.]: Elsevier/North Holland, 2003. cap. 8, p. 329–384.

EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A. J.; STRAUMANN, D. Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In: DEMPSTER, M. A. H. (Ed.). *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. New York: Cambridge University Press, 2002. cap. 7, p. 176–223.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987—1007, 1982.

ESCHENBURG, P. *Properties of extreme-value copulas*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Technische Universität München, 2013.

FAN, H.; SUNDARESAN, S. M. Debt valuation, renegotiation, and optimal dividend policy. *The Review of Financial Studies*, v. 13, n. 4, p. 1057–1099, 2000.

FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley, 1971.

FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 24, n. 2, p. 180—190, 1928.

GALANOS, A.; KLEY, T. *rugarch: Univariate GARCH Models*. [S.l.], 2025. R package version 1.5-4. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=rugarch>>.

HILLEBRAND, M.; BÖCKER, K. Interaction of market and credit risk: an analysis of inter-risk correlation and risk aggregation. *Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies*, v. 11, 2008.

JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 5th. ed. [S.l.]: IMPA, 2023.

JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal Royal Meteorological Society*, v. 81, n. 348, p. 158—171, 1955.

JOE, H. *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*. 1st. ed. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 1997.

JORION, P. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3rd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 2006.

KWIATKOWSKI, D. et al. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, v. 54, n. 1-3, p. 159–178, 1992.

LI, J. et al. On the aggregation of credit, market and operational risks. *Rev Quant Finan Acc*, v. 44, n. 1, p. 161–189, 2015.

LIANG, C. et al. Integrating credit and market risk: A factor copula based method. *Procedia Computer Science*, v. 17, p. 656–663, 2013.

LU, X.; LAI, K.; LIANG, L. Portfolio value-at-risk estimation in energy futures markets with time-varying copula-garch model. *Annals of Operations Research*, v. 219, n. 1, p. 333–357, 2014.

LÉVY, P. Théorie des erreurs. la loi de gauss et les lois exceptionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, v. 52, p. 49–85, 1924.

MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, v. 36, n. 4, p. 394–419, 1963.

MARRI, F.; MOUTANABBIR, K. Risk aggregation and capital allocation using a new generalized archimedean copula. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 102, p. 75–90, 2022.

MATSUDA, K. *Introduction to Merton Jump Diffusion Model*. [S.l.], 2004. Disponível em: <<https://www.maxmatsuda.com/Papers/Intro%20to%20MJD%20Matsuda.pdf>>.

MCNEIL, A. J.; FREY, R.; EMBRECHTS, P. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Revised edition. [S.l.]: Princeton University Press, 2015.

MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, v. 4, n. 1, p. 141–183, 1973.

MERTON, R. C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, v. 29, n. 2, p. 449–470, 1974.

MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, v. 3, n. 1–2, p. 125—144, 1976.

NAGLER, T. et al. *VineCopula: Statistical Inference of Vine Copulas*. [S.l.], 2024. R package version 2.6.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=VineCopula>>.

NELSEN, R. B. *An Introduction to Copulas*. 1st. ed. [S.l.]: Springer Series in Statistics, 2006.

NOLAN, J. P. Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, v. 13, n. 4, p. 759–774, 1997.

PICKANDS, J. Multivariate extreme value distributions. *Bull. Int. Stat. Inst.*, v. 49, p. 859—878, 1981.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2023. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

ROSENBERG, J. V.; SCHUERMANN, T. A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks. *Journal of Financial Economics*, v. 79, n. 3, p. 569–614, 2006.

SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. 1st. ed. [S.l.]: CRC Press, 1994.

SCHOUTENS, W.; CARIBONI, J. *Levy Processes in Credit Risk*. 1st. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

SHIM, J.; LEE, S. Dependency between risks and the insurer's economic capital: A copula-based garch model. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, v. 11, n. 1, p. 1–29, 2017.

SHREVE, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. 1st. ed. [S.l.]: Springer, 2008.

SKLAR, M. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, v. 8, p. 229—231, 1959.

SOUSA, T. do R. *GEVStableGarch: ARMA-GARCH/APARCH models with GEV and stable distributions*. [S.l.], 2015. R package version 1.1. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/src/contrib/Archive/GEVStableGarch/>>.

WUERTZ, D.; SETZ, T.; CHALABI, Y. *fBasics: Rmetrics - Markets and Basic Statistics*. [S.l.], 2023. R package version 4022.94. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=fBasics>>.

ZHOU, C. The term structure of credit spreads with jump risk. *Journal of Banking & Finance*, v. 25, n. 11, p. 2015–2040, 2001.

Apêndice A

Movimento Browniano Geométrico

O Movimento Browniano, também conhecido como Processo de Wiener, é um processo estocástico de tempo contínuo que descreve o movimento aleatório de uma partícula em um meio fluido. Ele é caracterizado por incrementos aleatórios e independentes, e desempenha importante papel para diversos modelos em matemática financeira e outras disciplinas.

Um processo estocástico $\{W_t\}, t \geq 0$ é um Processo de Wiener se satisfaz as seguintes condições (BJÖRK, 2019):

1. O processo começa em zero: $W_0 = 0$;
2. Incrementos independentes: se $r < s \leq t < u$, então $W_u - W_t$ e $W_s - W_r$ são variáveis aleatórias independentes;
3. Incrementos estacionários: para $s < t$, a variável aleatória $W_t - W_s$ possui distribuição normal $N(0, t - s)$; e
4. Trajetórias contínuas: as trajetórias de W_t são contínuas em t.

Ainda, (SHREVE, 2008) define $\{W_t\}$ em termos de como o processo lida com a informação no tempo. Assim, Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade no qual $\{W_t\}$ está definido. Uma

filtragem para o Movimento Browniano é uma coleção de σ -álgebras $\{\mathcal{F}(t)\}$, $t \geq 0$ que satisfaz os seguintes critérios:

1. Acúmulo de informações: para $0 \leq s < t$, todo conjunto em $\{\mathcal{F}(s)\}$ também pertence a $\{\mathcal{F}(t)\}$. Ou seja, existe pelo menos tanta informação disponível no tempo posterior $\{\mathcal{F}(t)\}$ quanto no tempo anterior $\{\mathcal{F}(s)\}$;
2. Adaptabilidade: para cada $t \geq 0$, o Movimento Browniano $\{W_t\}$ no tempo t é $\mathcal{F}(t)$ -mensurável. Ou seja, a informação disponível no tempo t é suficiente para avaliar o Movimento Browniano $\{W_t\}$ naquele tempo; e
3. Independência dos incrementos futuros: para $0 \leq t < u$, o incremento $W(u) - W(t)$ independe de $\{\mathcal{F}(t)\}$. Ou seja, qualquer incremento do Movimento Browniano após o tempo t é independente da informação disponível no tempo t .

O Movimento Browniano Geométrico (MBG) é um processo estocástico amplamente utilizado na modelagem de preços de ativos financeiros, taxas de juros e outras variáveis que apresentam comportamento aleatório ao longo do tempo.

O MBG é definido como um processo estocástico em tempo contínuo, no qual o logaritmo do valor do ativo segue um Movimento Browniano Padrão. De acordo com (BJÖRK, 2019), o MBG pode ser expresso como uma equação diferencial estocástica:

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

em que dW_t representa o diferencial do Movimento Browniano Padrão, α é o parâmetro de *drift* e $\sigma > 0$ o parâmetro de volatilidade.

Conforme (SCHOUTENS; CARIBONI, 2010), o MBG é um dos processos mais populares em finanças, base para no Modelo de Black & Scholes para precificação dinâmica de ativos em tempo contínuo.

Apêndice B

V_T (Modelo de Merton)

B.1 Fórmula de Itô geral

(BJÖRK, 2019): Seja V_t processo que possui diferenciação estocástica dada pela Equação (6.2), seja f de classe $C^{1,2}$ (isto é, continuamente diferenciável uma vez em relação ao tempo t e duas vezes em relação à variável de estado v) e Z um processo $Z(t) = f(t, V_t)$. então Z possui uma diferenciação estocástica dada por:

$$df(t, V_t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, V_t) + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, V_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, V_t) \right\} dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(t, V_t) dW_t$$

Ao assumir as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0 \\ dt \cdot dW_t = 0 \\ (dW_t)^2 = dt, \end{cases}$$

tem-se:

B.2 Fórmula de Itô simplificada

$df = df(t, V_t)$ é dado por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial V_t} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2} (dV_t)^2, \quad (\text{B.1})$$

em que $(dV_t)^2$ é a variação quadrática de (6.2).

B.3 Valor do ativo no tempo T

Seja V_t o valor de um ativo no tempo t , então sua variação logarítmica é dada por $d \log(V_t)$. Ao aplicar esta variação na Equação (B.1), tem-se:

$$\begin{aligned} d \log(V_t) &= \frac{\partial f(V_t)}{\partial V_t} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(V_t)}{\partial V_t^2} (dV_t)^2 \\ &= \frac{\partial \log(V_t)}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log(V_t)}{\partial V_t^2} (dV_t)^2 \\ &= \frac{1}{V_t} dV_t - \frac{1}{2} \frac{1}{(V_t)^2} (dV_t)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (6.2) em (B.2), segue que:

$$\begin{aligned} d \log(V_t) &= \frac{1}{V_t} [V_t(\mu dt + \sigma_V dW_t)] - \frac{1}{2} \frac{1}{(V_t)^2} [V_t(\mu dt + \sigma_V dW_t)]^2 \\ &= \mu dt + \sigma_V dW_t - \frac{1}{2} [\mu^2 (dt)^2 + 2\mu \mu dt dW_t + \sigma_V^2 (dW_t)^2] \\ &= \mu dt + \sigma_V dW_t - \frac{1}{2} \sigma_V^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) dt + \sigma_V dW_t, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ao considerar que $(dt)^2 = 0$, $\mu \mu dt dW_t = 0$ e $(dW_t)^2 = dt$.

Pela integração de (B.3) no intervalo (t, T) , se obtém:

$$\begin{aligned} \int_t^T d \log(V_s) &= \int_t^T \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) ds + \int_t^T \sigma_V dW_s \\ \log\left(\frac{V_T}{V_t}\right) &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, o valor do ativo no tempo T é obtido de (B.4) ao aplicar exponencial:

$$\begin{aligned} \frac{V_T}{V_t} &= \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t) \right] \\ V_T &= V_t \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t) \right]. \end{aligned}$$

A equação representa, portanto, o preço do ativo no tempo T em termos do preço do ativo no tempo inicial t , de seu retorno médio μ , sua volatilidade σ_V e do Movimento Browniano $\{W_t\}$.

Apêndice C

Processo de Poisson

(CONT; TANKOV, 2003) apresentam a seguinte definição:

Definição C.0.1. Processo de Poisson. Seja $(\tau_i)_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias exponenciais com parâmetro λ e $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. O processo estocástico com valores inteiros não negativos $(N_t, t \geq 0)$ definido por

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n} \quad (\text{C.1})$$

é chamado processo de Poisson com intensidade λ , $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda, t)$

N_t determina o número de chegadas $(0, 1, 2, \dots)$ no tempo $(0, t]$, τ_i o tempo entre a i -ésima e a $(i+1)$ -ésima chegada e T_n é o tempo total de n chegadas, logo, são equivalentes os eventos $(N_t \geq n)$ e $(T_n \leq t)$. Ou seja, o processo de Poisson refere-se à modelagem de fenômenos estocásticos que envolvem contagens de eventos que ocorrem de forma aleatória no tempo, sendo caracterizado por incrementos independentes e estacionários. A seguir, seguem as principais propriedades desse processo.

Proposição C.0.1. Seja $(N_t)_{t \geq 0}$ um processo de Poisson.

1. Para todo $t > 0$, N_t é quase certamente finito.

2. Para todo ω , a trajetória amostral $t \mapsto N_t(\omega)$ é constante por partes e aumenta por saltos de tamanho 1.
3. As trajetórias amostrais $t \mapsto N_t$ são contínuas à direita com limites à esquerda (cadlag).
4. Para todo $t > 0$, $N_{t-} = N_t$ com probabilidade 1.
5. (N_t) é contínuo em probabilidade:

$$\forall t > 0, \quad N_s \xrightarrow{\mathbb{P}} N_t \text{ quando } s \rightarrow t.$$

6. Para todo $t > 0$, N_t segue uma distribuição de Poisson com parâmetro λt :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}.$$

7. A função característica de N_t é dada por

$$E[e^{iuN_t}] = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

8. (N_t) possui incrementos independentes: para quaisquer $t_1 < \dots < t_n$, as variáveis $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1}$ são independentes.
9. Os incrementos de N são homogêneos: para quaisquer $t > s$, $N_t - N_s$ possui a mesma distribuição que N_{t-s} .
10. (N_t) possui a propriedade de Markov:

$$\forall t > s, \quad E[f(N_t)|N_u, u \leq s] = E[f(N_t)|N_s].$$

Definição C.0.2. Processo de Poisson composto. Um processo de Poisson composto com intensidade $\lambda > 0$ e cujo tamanho do salto possua distribuição f é um processo estocástico X_t

definido por

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

em que os tamanhos de salto Y_i são i.i.d. com distribuição f e $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda, t)$, independente de $(Y_i)_{i \geq 1}$.

O processo $(N_t)_{t \geq 0}$ é, portanto, um processo de contagem, em que T_1, T_2, \dots é a sequência dos tempos referentes aos saltos (chegadas) de N_t . Assim, N_t mensura a quantidade de saltos entre 0 e t : $N_t = \#\{i \geq 1, T_i \in [0, t]\}$.

Apêndice D

Medidas Aleatórias

Com base na construção do Processo de Poisson apresentado no Apêndice C, é possível definir uma medida aleatória que associa a cada conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^+$ o número de saltos do processo cujos tempos pertencem a esse conjunto. Para uma realização ω do processo, define-se:

$$M(\omega, A) = \#\{i \geq 1 : T_i(\omega) \in A\}. \quad (\text{D.1})$$

A função $M(\omega, \cdot)$ é uma medida sobre subconjuntos de \mathbb{R}^+ , denominada medida aleatória, pois depende da realização $\omega \in \Omega$ do processo aleatório.

No caso do processo de Poisson com intensidade constante $\lambda > 0$, a esperança da medida aleatória M associada ao conjunto A é dada por:

$$E[M(A)] = \lambda|A|,$$

em que $|A|$ representa a medida de Lebesgue do conjunto A . Isso significa que, em média, o número de saltos em um conjunto A é proporcional ao seu comprimento.

A contagem total de eventos até o tempo t pode ser expressa diretamente em termos da medida aleatória:

$$\begin{aligned} N_t(\omega) &= M(\omega, [0, t]) \\ &= \int_{[0, t]} M(\omega, ds). \end{aligned}$$

A construção da medida $M(\omega, A)$, definida em (D.1), pode ser estendida para uma configuração mais ampla, ao substituir \mathbb{R}^+ por $E \subset \mathbb{R}^d$ e a medida de Lebesgue pela medida de Radon μ em E .

Definição D.0.1. Medida aleatória de Poisson. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $E \subset \mathbb{R}^d$ e μ uma medida de Radon conhecida e positiva em (E, \mathcal{E}) . A medida aleatória de Poisson em E com medida de intensidade μ é uma medida aleatória de valor inteiro:

$$M : \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(\omega, A) \mapsto M(\omega, A)$$

tal que:

1. Para cada ω , $M(\omega, \cdot) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma medida (valor inteiro) sobre E ;
2. Para cada conjunto A , a variável aleatória $M(A) = M(\cdot, A) : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ segue distribuição de Poisson com parâmetro $\mu(A)$:

$$P(M(A) = k) = \frac{e^{-\mu(A)} \mu(A)^k}{k!};$$

3. Para conjuntos disjuntos A_1, \dots, A_n , as variáveis $M(A_1), \dots, M(A_n)$ são independentes.

A definição D.0.1 formaliza o conceito de medida de Poisson aleatória como uma função $M : \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada realização $\omega \in \Omega$ e a cada conjunto mensurável $A \in \mathcal{E}$ um número aleatório $M(\omega, A)$, correspondente à quantidade de pontos (saltos) em A . A equação

(D.2) complementa essa definição ao mostrar que toda medida de Poisson aleatória pode ser interpretada como uma medida discreta concentrada em uma sequência aleatória de pontos $(X_n)_{n \geq 1} \subset E$. Assim, existe um processo $\{X_n(\omega), n \geq 1\}$ tal que

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad M(\omega, A) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_A(X_n(\omega)), \quad (\text{D.2})$$

em que $\mathbf{1}_A$ é a função indicadora do conjunto A .

M é, portanto, uma soma de medidas de Dirac localizadas nos pontos aleatórios X_n , o que permite interpretar M como a superposição de partículas aleatórias caindo no espaço E :

$$M = \sum_{n \geq 1} \delta_{X_n}$$

A medida de Dirac δ_x associada a um ponto $x \in E$ é definida da seguinte forma: $\delta_x(A) = 1$ se $x \in A$ e $\delta_x(A) = 0$ se $x \notin A$. De maneira geral, pode-se considerar uma soma de tais medidas de Dirac. Dado um conjunto enumerável de pontos $X = \{x_i, i = 0, 1, 2, \dots\} \subset E$, a medida de contagem $\mu_X = \sum_i \delta_{x_i}$ é definida da seguinte maneira: para qualquer $A \subset E$, $\mu_X(A)$ conta o número de pontos x_i em A :

$$\mu(A) = \#\{i : x_i \in A\} = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{x_i \in A}.$$

No contexto da construção de processos de saltos a partir de medidas de Poisson aleatórias, considera-se uma medida de Poisson aleatória definida no espaço $E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, que representa uma coleção de saltos que ocorrem em tempos aleatórios T_n com tamanhos dos saltos $Y_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ v.a.'s i.i.d f .

A medida de salto associada a um processo com trajetórias cadlag (contínuo à direita e com limites à esquerda) é uma medida aleatória que registra os instantes em que ocorrem saltos e suas respectivas amplitudes. Formalmente, ela é construída como uma soma de medidas de Dirac localizadas nos pares $(T_n, \Delta X_n)$, em que T_n são os tempos do salto e $Y_n = \Delta X_n = X_{T_n} - X_{T_n^-}$

representa a amplitude do salto do processo X no instante T_n .

A medida aleatória associada, denotado por J_X , é chamada de medida de salto do processo X :

$$J_X(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))} = \sum_{t \in [0, T]} \delta_{(t, \Delta X_t)}.$$

Em termos intuitivos, para qualquer subconjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^d$:

$$J_X([0, t] \times A) := \text{número de saltos de } X \text{ que ocorrem entre } 0 \text{ e } t \text{ cujas amplitudes pertencem a } A.$$

A medida aleatória J_X contém toda a informação sobre as descontinuidades (saltos) do processo X : ela nos informa quando os saltos ocorrem e qual a sua magnitude. A medida J_X não nos fornece qualquer informação sobre a componente contínua de X . É fácil perceber que X possui trajetórias amostrais contínuas se, e somente se, $J_X = 0$ quase certamente (ou seja, não há saltos).

No caso particular de um processo de Poisson com saltos unitários, essa medida é dada por

$$J_N([0, t] \times A) = \begin{cases} \#\{i \geq 1 : T_i \in [0, t]\}, & \text{se } 1 \in A, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

o que evidencia que a medida de salto coincide com o processo de contagem N_t quando os saltos são todos iguais a 1 e o conjunto A inclui esse valor.

Por fim, quando o processo com saltos X_t (processo de Poisson composto) é construído a partir de uma medida de Poisson aleatória M , com a representação

$$M = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n, Y_n)}, \quad X_t = \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds dy),$$

a medida de salto J_X pode ser expressa diretamente em termos da medida M e da função f por meio de

$$J_X = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n, f(T_n, Y_n))}.$$

Essa representação permite interpretar a medida de salto como o resultado da transformação das amplitudes Y_n por uma função f , mantendo os mesmos tempos de ocorrência T_n .

Proposição D.0.1. Medida de salto para o processo de Poisson composto. Seja $(X_t)_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson composto, com intensidade λ e distribuição de tamanho dos saltos dada por uma medida de probabilidade f , a medida de salto J_X é uma medida de Poisson aleatória definida sobre $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, com medida de intensidade dada por

$$\mu(dx \times dt) = \nu(dx) dt = \lambda f(dx) dt.$$

Essa formulação fornece uma interpretação alternativa da medida de Lévy como a quantidade média de saltos por unidade de tempo. Tal interpretação se mostra mais geral e útil do que aquela baseada diretamente na distribuição de tamanho dos saltos, e pode ser estendida para definir a medida de Lévy de processos mais gerais, não apenas dos processos de Poisson compostos.

Apêndice E

Processo de Lévy

Definição E.0.1. Processo de Lévy. Um processo estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ cadlag definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com valores em \mathbb{R}^d , tal que $X_0 = 0$, é denominado processo de Lévy se satisfizer as seguintes propriedades:

1. **Incrementos independentes:** para toda sequência crescente de tempos $t_0 \dots t_n$, as variáveis aleatórias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes.
2. **Incrementos estacionários:** a distribuição de $X_{t+h} - X_t$ não depende de t .
3. **Continuidade estocástica:** $\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$.

Definição E.0.2. Medida de Lévy. Seja $(X_t)_{t \geq 0}$ um processo de Lévy em \mathbb{R}^d . A medida de Lévy ν em \mathbb{R}^d é definida por:

$$\nu(A) = E[\# \{t \in (0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

é chamada medida de Lévy de X : $\nu(A)$ é a quantidade esperada, por unidade de tempo, de saltos cujas amplitudes pertencem ao conjunto mensurável A .

Essa medida descreve a frequência esperada com que saltos de diferentes tamanhos ocorrem,

sendo um dos componentes fundamentais dos três parâmetros que caracterizam um processo de Lévy.

A proposição D.0.1 implica que todo processo de Poisson composto pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{s \in [0,t]} \Delta X_s \\ &= \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} x J_X(ds \times dx), \end{aligned}$$

em que J_X é uma medida aleatória de Poisson com medida de intensidade $\nu(dx)dt$.

O processo de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ pode ser decomposto em diferentes componentes que representam distintos tipos de comportamento estocástico. X_t^0 denota a parte descontínua do processo, construída a partir de uma medida aleatória de Poisson. Esse processo X_t^0 mantém-se constante entre os saltos e altera seu valor apenas nos instantes de descontinuidade.

Dado um Movimento Browniano com $drift \gamma t + W_t$, independente de X^0 , a soma $X_t = \gamma t + W_t + X_t^0$ define outro processo de Lévy, que pode ser decomposto como:

$$\begin{aligned} X_t &= \gamma t + W_t + \sum_{s \in [0,t]} \Delta X_s \\ &= \gamma t + W_t + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} x J_X(ds \times dx), \end{aligned}$$

Essa decomposição é formalizada pela chamada *trípla de Lévy* (γ, Σ, ν) , a qual caracteriza um processo de Lévy. Nessa trípla:

- $\gamma \in \mathbb{R}^d$ representa o vetor de tendência (*drift*), associado à variação determinística contínua;

- $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é uma matriz simétrica semidefinida positiva que define a covariância do movimento Browniano associado;
- ν é a medida de Lévy, uma medida sobre $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, que descreve a frequência e distribuição dos saltos.

Com essa estrutura, o processo de Lévy X_t pode ser representado como uma combinação de três termos: um movimento Browniano (com covariância Σ), um termo determinístico linear γt , e uma parte descontínua composta por uma soma (eventualmente infinita) de saltos cujas distribuições e intensidades são controladas pela medida ν .

Apêndice F

V_T (Modelo de Merton com saltos)

F.1 Fórmula de Itô para difusões com saltos

Considere um processo de difusão com saltos X_t , definido como:

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma W_t + \mu t + J_t \\ &= X^c(t) + J_t, \end{aligned}$$

em que W_t é um movimento Browniano padrão, σ é a volatilidade, μ é o coeficiente de *drift*, e J_t representa a parte descontínua do processo, modelada como um processo de Poisson composto:

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i,$$

com N_t indicando o número de saltos até o tempo t e ΔX_i denotando a magnitude do i -ésimo salto. A parte contínua do processo é expressa por

$$X_t^c = \mu t + \sigma W_t.$$

Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $Y_t = f(X_t)$. Considere que os saltos ocorrem nos instantes T_i , com $i = 1, \dots, N_t$. No intervalo entre dois saltos consecutivos, $[T_i, T_{i+1})$, o processo X_t evolui de forma contínua conforme a dinâmica

$$\begin{aligned} dX_t &= dX_t^c \\ &= \mu X_t^c + \sigma X_t^c dW_t. \end{aligned}$$

Neste intervalo, a aplicação direta da fórmula de Itô clássica para difusões fornece:

$$Y_{T_{i+1}^-} - Y_{T_i} = \int_{T_i}^{T_{i+1}^-} \frac{\sigma^2}{2} f''(X_t) dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}^-} f'(X_t) dX_t.$$

Como $dX_t = dX_t^c$ no intervalo contínuo, tem-se

$$Y_{T_{i+1}^-} - Y_{T_i} = \int_{T_i}^{T_{i+1}^-} \left(\frac{\sigma^2}{2} f''(X_t) dt + f'(X_t) dX_t^c \right).$$

Quando ocorre um salto no instante T_i de magnitude ΔX_{T_i} , o processo sofre uma mudança abrupta, de modo que a variação de Y_t é dada por

$$f(X_{T_i}) - f(X_{T_i^-}) = f(X_{T_i^-} + \Delta X_{T_i}) - f(X_{T_i^-}).$$

Portanto, o incremento total de $f(X_t)$ ao longo do intervalo $[0, t]$ é a soma das contribuições contínuas (devidas à parte X^c) e das descontínuas (devidas aos saltos):

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s^c + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s) ds + \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} [f(X_{s^-} + \Delta X_s) - f(X_{s^-})]. \quad (\text{F.1})$$

A Equação (F.1) é a forma integral da fórmula de Itô para processos de difusão com saltos. Para obter sua forma diferencial, considere o incremento infinitesimal dX_t composto pela parte

contínua e pela parte descontínua, ou seja,

$$dX_t = dX_t^c + \Delta X_t,$$

em que

$$dX_t^c = \mu X_t^c + \sigma X_t^c dW_t.$$

Assim, o diferencial de $f(X_t)$ pode ser decomposto em:

$$df(X_t) = \frac{\partial f(X_t)}{\partial x} dX_t^c + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(X_t^2)}{\partial x^2} (dX_t^c)^2 + [f(X_{t-} + \Delta X_t) - f(X_{t-})]. \quad (\text{F.2})$$

A Equação (F.2) expressa a contribuição da parte contínua e da parte descontínua para a evolução instantânea da função $f(X_t)$. A última parcela representa explicitamente a alteração causada por um eventual salto no instante t .

F.2 Valor do ativo no tempo T

Seja V_t o valor de um ativo no tempo t que satisfaz (6.2), então o valor do ativo no tempo T , $t < T$, é dado por:

$$V_T = V_t \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right].$$

Demonstração. (MATSUDA, 2004):

1. Base contínua (movimento Browniano com *drift*): a parte contínua do retorno relativo do ativo é modelada por um processo geométrico Browniano.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma W_t,$$

em que:

- α é o retorno esperado do ativo em termos contínuos;
- σ é a volatilidade; e
- W_t é um movimento Browniano padrão.

2. Inclusão de saltos (processo de Poisson composto): Para capturar saltos nos preços, adiciona-se um processo de Poisson N_t , que modela o número de saltos até o tempo t com intensidade λ . Cada salto multiplica o preço do ativo por um fator aleatório y_t , logo, a variação relativa por salto é $y_t - 1$. Assim, o termo que representa os saltos é:

$$(y_t - 1)dN_t$$

3. Correção do *drift* (ajuste λk): os saltos introduzem um valor esperado adicional ao retorno. Para garantir que o retorno contínuo esperado ainda seja α , é necessário subtrair a parte determinística do salto esperada no *drift*. Assim, define-se k como:

$$k = E[y_t - 1] = E[y_t] - 1.$$

Logo, a parte do *drift* é ajustada para $\alpha - \lambda k$, o que garante que os saltos sejam imprevisíveis e que o processo continue centrado.

Com esses três componentes, a equação diferencial estocástica do Modelo de Merton com saltos é:

$$dV_t = V_t[(\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW_t] + (y_t - 1)dN_t,$$

em que y_t é assumido com distribuição lognormal. Ou seja, $\ln(y_t) \sim N(\mu, \delta^2)$.

4. Equação Lévy-Itô. Ao aplicar a Equação (F.2) na variação logarítmica $d\ln V_t$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d\ln V_t &= \frac{\partial \ln V_t}{\partial t} dt + (\alpha - \lambda k) V_t \frac{\partial \ln V_t}{\partial V_t} dt + \frac{\sigma^2 V_t^2}{2} \frac{\partial^2 \ln V_t}{\partial V_t^2} dt + \sigma V_t \frac{\partial \ln V_t}{\partial V_t} dW_t \\
 &\quad + [\ln y_t V_t - \ln V_t] \\
 d\ln V_t &= (\alpha - \lambda k) V_t \frac{1}{V_t} dt + \frac{\sigma^2 V_t^2}{2} \left(-\frac{1}{V_t^2} \right) dt + \sigma V_t \frac{1}{V_t} dW_t + [\ln y_t + \ln V_t - \ln V_t] \\
 d\ln V_t &= (\alpha - \lambda k) dt - \frac{\sigma^2}{2} dt + \sigma dW_t + \ln y_t \\
 \ln V_T - \ln V_t &= \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_T - N_t} \ln y_i \\
 \ln V_T &= \ln V_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_T - N_t} \ln y_i
 \end{aligned}$$

Ao aplicar o exponencial, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \exp(\ln V_T) &= \exp \left\{ \ln V_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_T - N_t} \ln y_i \right\} \\
 V_T &= V_t \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right\} \exp \left(\sum_{i=1}^{N_T - N_t} \ln y_i \right) \\
 V_T &= V_t \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right] \prod_{i=1}^{N_T - N_t} y_i \\
 V_T &= V_t \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_T - N_t} \ln y_i \right]
 \end{aligned}$$

5. Considerando $\ln y_t \equiv Y_t$, tem-se:

$$V_T = V_t \exp \left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma_V^2 - \lambda k \right) (T - t) + \sigma_V (W_T - W_t) + \sum_{i=1}^{N_T - N_t} Y_i \right].$$

□