Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

A relação entre a raiz enésima de um número primo e os números irracionais

Renato Gonçalves da Fonseca

Brasília

2025

Renato Gonçalves da Fonseca

A relação entre a raiz enésima de um número primo e os números irracionais

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos da disciplina de Geometria do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientadora: Profª Dra. Tatiane da Silva Evangelista

Brasília

2025

Posição vertical

Renato Gonçalves da Fonseca
A relação entre a raiz enésima de um número primo e os números irracionais/ Renato Gonçalves da Fonseca. – Brasília, 2025 -
106 p.

Orientadora: Profª Dra. Tatiane da Silva Evangelista

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM, 2025.

1. Raízes enésimas de números primos e números irracionais. 2. Ensino de Matemática. I. Evangelista, Tatiane da Silva. II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Título XYZ

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A relação entre a raiz enésima de um número primo e os números irracionais

por

Renato Gonçalves da Fonseca

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 21 de fevereiro de 2025.

Comissão Examinadora:

____
Profª Dra. Tatiane da Silva Evangelista - FCTE/UnB (Orientadora)

____
Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata - MAT/UnB (Membro interno)

____
Prof. Dra. Rafaela Fernandes do Prado - IFB (Membro externo)

____
Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli - FCTE/UnB (Membro suplente)

Dedico este trabalho à minha divertida mãe.

Agradecimentos

Este trabalho de mestrado é dedicado com todo o meu coração àquelas pessoas que foram a rocha e a luz ao longo desta jornada. Em primeiro lugar, à minha mãe, cuja crença em mim foi uma força vital. Ela sempre viu em mim o que eu mesmo não conseguia enxergar e, mesmo na ausência, sua confiança continua a me guiar. Em segundo lugar, ao meu pai, que tinha um orgulho imenso de falar sobre seu filho professor. Embora não tenha vivido para me ver alcançar o título de mestre, ele presenciou o início desta luta e seu amor e orgulho permanecem como uma fonte constante de força e motivação.

Dedico também à minha esposa, que esteve ao meu lado como uma verdadeira parceira, oferecendo apoio incondicional em cada passo deste caminho desafiador. Em momentos de dúvida e desânimo, seu amor e encorajamento foram meu refúgio e minha inspiração para seguir em frente. Por último, aos meus irmãos, que nunca duvidaram de minha capacidade e sempre acreditaram em meu potencial. Sua fé em mim foi uma âncora constante e um lembrete de que eu nunca estava sozinho.

A cada um de vocês, e em especial ao amigo Leonardo Gonçalves da Silva, minha gratidão eterna. Este trabalho é um reflexo do apoio, da fé e do amor que vocês me proporcionaram. Sem vocês, esta conquista não teria sido possível.

"Não é paradoxo dizer que nossos momentos de inspiração mais teórica, podemos estar o mais próximo possível de nossas aplicações mais práticas."

A. N. Whitehead

Resumo

Esta dissertação investigou a relação entre as raízes enésimas de números primos e os números irracionais, com demonstrações autorais e adaptações da literatura para análise de suas propriedades e implicações educacionais, resultando na criação de um produto educacional baseado em múltiplas estratégias pedagógicas juntas: apostilas, vídeos e gamificação. A metodologia incluiu revisão bibliográfica sobre aprendizagem multimodal e aplicações de questionários antes e depois para validar o produto educacional. Os resultados confirmaram que estratégias pedagógicas diversificadas facilitam a compreensão da relação entre os números primos e os números irracionais. Conclui-se que o uso da aprendizagem multimodal foi eficaz para o entendimento dos conceitos teóricos abordados com destaque na gamificação.

Palavras-chaves: Números Primos; Raiz de Números Primos; Raiz Enésima de Números Primos; Números Irracionais.

Abstract

This dissertation investigated the relationship between the nth roots of prime numbers and irrational numbers, with authorial projections and adaptations of literature to analyze their properties and educational implications, resulting in the creation of an educational product based on multiple pedagogical strategies together: handouts, videos and gamification. The methodology included a literature review on multimodal learning and application of before and after questionnaires to validate the educational product. The results confirmed that diverse pedagogical strategies facilitated understanding between prime numbers and irrational numbers. It is concluded that the use of multimodal learning was effective for understanding the theoretical concepts highlighted in gamification.

Key-words: Prime Numbers. Root of Prime Numbers. n-th Root of Prime Numbers. Irrational Numbers.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

A Matemática é composta por padrões fascinantes que, apesar de serem simples à primeira vista, revelam uma complexidade profunda. A busca por padrões é um trabalho inerente dos matemáticos.

> O que motiva a existência de um matemático é a descoberta de padrões, para encontrar e explicar as regras subjacentes. A jornada do matemático em busca de primos é ilustrada perfeitamente por uma das tarefas que todos tivemos que realizar na escola (Sautoy, 2007, p.32).

Os números primos têm fascinado matemáticos desde os tempos antigos, enquanto os números irracionais, com suas representações decimais infinitas e não periódicas, desafiam nossa intuição sobre o padrão desses números. Os matemáticos nunca se convenceram da aleatoriedade dos primos e nem do números irracionais, assim chamados, pois refletia o desconforto dos matemáticos em descrever precisamente esses números (Sautoy, 2007).

Os números não foram descobertos na sequência, conforme indicam os conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}$ e $\mathbb{C}$). Os membros da escola pitagórica viram que $\sqrt{2}$ era irracional (Roque; Carvalho, 2019). Para Stewart (2016), o $\sqrt{2}$ foi o primeiro irracional conhecido. Ou seja, esse estudo de raízes e de números primos não é algo contemporâneo. Assim surgiu a motivação de estudarmos aqui as raízes enésimas de um número primo e sua relação com os números irracionais.

Estudos recentes destacam a relevância dos números primos não apenas na teoria dos números, mas também em aplicações práticas, como criptografia e segurança de dados (Sautoy, 2007). A irracionalidade das raízes enésimas de números primos, por sua vez, é um conceito fundamental que transcende a Matemática pura e encontra ressonância em diversos campos científicos, como a computação e a física teórica.

Assim, compreender a estrutura dos números é essencial para explorar novas aplicações, como na cibernética e na resolução de problemas de otimização. Dessa forma, motivados pela relevância crescente dessas interações entre números primos e irracionais, este estudo busca compreender e aprofundar a análise da irracionalidade das raízes enésimas de números primos, utilizando teoremas clássicos como o de Gelfond-Schneider.[1] [2]

[1] Aleksandr Osipovich Gelfond (1906 - 1968) foi um matemático russo que criou técnicas básicas no estudo de números transcendentais (números que não podem ser expressos como raiz ou solução de uma equação algébrica com coeficientes racionais). Ele avançou profundamente na teoria dos números transcendentais e na teoria da interpolação e aproximação de funções de variáveis complexas (O'Connor; Robertson, 2005).

[2] Theodor Schneider (1911 - 1988) foi um matemático alemão, conhecido por ter formulado e provado o Teorema de Gelfond-Schneider (O'Connor; Robertson, 2011).

> Além de sua relevância teórica, os números primos possuem aplicações práticas de extrema importância. Eles formam a base de algoritmos utilizados na criptografia moderna, fundamentais para garantir a segurança digital e proteger informações confidenciais. Como explica Roque (2012), os números primos desempenham um papel estruturante na aritmética, servindo como os componentes fundamentais a partir dos quais todos os números inteiros podem ser decompostos. Isso é evidenciado pelo Teorema Fundamental da Aritmética, que estabelece que qualquer número inteiro positivo maior que 1 pode ser representado de forma única como um produto de números primos (Roque, 2012 apud Lima, 2024, p.2).

A irracionalidade, ao ser explorada dentro desse contexto, oferece uma visão mais rica sobre a distribuição dos números primos e suas propriedades, fornecendo um melhor entendimento sobre como essas raízes podem ser usadas não apenas em Matemática teórica, mas também em contextos educacionais e computacionais. Ressaltando que a criptografia é um ramo da informática que surge da limitação em manipularmos com exatidão o conjunto do números primos (Sautoy, 2007).

Em suma, a irracionalidade associada às raízes enésimas de números primos não só ilumina a beleza da Matemática teórica, mas também abre caminhos para inovações em educação e computação, mostrando que a Matemática é uma disciplina interconectada e em constante evolução.

Assim, o principal objetivo desta dissertação é investigar a relação entre as raízes enésimas de números primos, visto que os números irracionais são implicações significativas em áreas como a teoria dos números, onde esses irracionais podem ser usados para investigar a distribuição de primos em relação às funções analíticas, como a função zeta de Riemann (Sautoy, 2007). Por isso, as raízes enésimas, ou seja, as raízes de ordem n de um número primo p, são objetos de interesse significativo. A irracionalidade dessas raízes é um aspecto central neste estudo, e o objetivo é explorar por que essas raízes se comportam como números irracionais.

Desta forma, esta dissertação está organizada da seguinte forma. O Capítulo 1 aborda a revisão teórica que fornece a base para o presente estudo, abordando os conceitos fundamentais de números primos e raízes enésimas. O Capítulo 2 aborda a fundamentação Matemática relacionada aos números irracionais. Ele inicia com a definição de números irracionais, que não podem ser expressos como frações de dois inteiros e possui uma representação decimal infinita e não periódica, com exemplos notáveis como π, $\sqrt{2}$ e e. Explicando conceitos básicos e suas principais aplicações. Já no Capítulo 3, está o nosso produto educacional, onde coloca-se em prática os conhecimentos abordados nesse trabalho. Finalmente, o Capítulo 4, traz-se as discussões dos resultados que puderam ser vistos ao longo da execução do produto educacional aplicado. E por fim temos as Considerações Finais que encerra essa explanação.

1 Referencial teórico

O ensino de Matemática, em suas diversas abordagens, pode se beneficiar de estratégias pedagógicas múltiplas que consideram a diversidade de estilos e ritmos de aprendizagem dos estudantes. O uso de apostilas, vídeos, gamificação e práticas avaliativas diversificadas são exemplos de ferramentas pedagógicas que, quando combinadas de forma eficaz, podem proporcionar uma experiência de aprendizagem mais dinâmica, acessível e significativa. Essas estratégias têm o potencial de não apenas facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também de engajar os alunos de forma ativa e criativa no processo de aprendizagem (Klein; Laburú, 2012).

As apostilas desempenham um papel importante como recurso didático no ensino de Matemática, pois oferecem um material estruturado e sistematizado que facilita a revisão e o aprofundamento dos conteúdos. De acordo com Moreno (2005), o uso de apostilas permite ao aluno revisar os conceitos trabalhados em aula de forma autônoma, promovendo uma aprendizagem mais personalizada. Apostilas bem elaboradas são recursos essenciais, principalmente em disciplinas que exigem resolução de problemas, como a Matemática. Elas podem conter explicações detalhadas, exemplos práticos e exercícios de fixação, o que torna o aprendizado mais organizado e acessível, auxiliando o aluno a desenvolver habilidades importantes como a organização do pensamento lógico e a resolução de equações.

A utilização de vídeos e outras formas de multimídia se mostrou extremamente eficaz, especialmente no ensino de Matemática, pois possibilita aos alunos visualizarem conceitos que muitas vezes são abstratos e difíceis de compreender apenas por meio da linguagem textual. Mayer (2001) argumenta que a aprendizagem multimodal, que combina palavras e imagens, facilita a construção do conhecimento, pois ativa diferentes áreas do cérebro e contribui para a retenção das informações. Quando se trata de conceitos matemáticos, como geometria ou cálculo, os vídeos ajudam a tornar os conceitos mais tangíveis. Por exemplo, animações que ilustram transformações geométricas ou vídeos que demonstram a aplicação de fórmulas matemáticas em contextos práticos proporcionam uma compreensão mais concreta e visual, o que facilita o entendimento e a memorização dos conteúdos.

Além disso, a gamificação tem se mostrado uma poderosa ferramenta no ensino de Matemática. Elementos de jogos, como pontuação, desafios e recompensas, são incorporados ao processo de aprendizagem para torná-lo mais envolvente e motivador. Gee (2008) destaca que a gamificação não só atrai os alunos pela sua natureza lúdica, mas também proporciona um ambiente de aprendizagem interativo, onde o erro é visto como uma oportunidade de aprendizagem e não como uma falha. Através de jogos educativos, os alunos podem praticar habilidades matemáticas, como a resolução de equações, de maneira divertida e desafiadora. A gamificação promove um aprendizado ativo, no qual os alunos têm a oportunidade de aplicar seus conhecimentos em situações simuladas, o que estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade.

As práticas avaliativas, por sua vez, são essenciais para acompanhar o progresso dos alunos no aprendizado de Matemática. Contudo, para que sejam realmente eficazes, as avaliações devem ser diversificadas e considerar diferentes aspectos do desempenho dos alunos. Perrenoud (2000) defende que uma avaliação eficiente deve ser contínua, diversificada e incluir diferentes instrumentos, como provas, trabalhos, apresentações e autoavaliações. No contexto da Matemática, isso significa que, além das tradicionais provas de cálculo e álgebra, o professor pode usar avaliações mais dinâmicas, como atividades de resolução de problemas em grupo, projetos, ou até mesmo portfólios, que permitem ao aluno demonstrar sua compreensão de maneira mais abrangente. A avaliação deve, assim, não apenas medir o conhecimento factual, mas também avaliar a capacidade do aluno de aplicar os conceitos matemáticos de forma crítica e criativa.

A integração dessas estratégias pedagógicas múltiplas — apostilas, vídeos, gamificação e práticas avaliativas diversificadas — cria um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e eficaz, que atende à diversidade de necessidades dos estudantes. Anderson (2002) afirma que a diversidade de métodos pedagógicos é fundamental para que todos os alunos, independentemente de seu estilo de aprendizagem, tenham a oportunidade de se engajar no processo de aprendizagem de forma significativa. Ao combinar diferentes recursos didáticos, como materiais impressos, multimídia e ferramentas lúdicas, o professor consegue criar um ambiente de ensino mais dinâmico e flexível, permitindo que os alunos se envolvam com a Matemática de formas variadas e mais eficazes.

Portanto, ao adotar estratégias pedagógicas múltiplas no ensino de Matemática, é possível promover uma aprendizagem mais interativa, envolvente e adaptada às necessidades dos alunos, tornando a Matemática mais acessível e compreensível. Apostilas estruturadas, vídeos explicativos, jogos educativos e avaliações diversificadas são recursos que, quando usados de maneira integrada, não apenas enriquecem o ensino, mas também ajudam os alunos a se tornarem mais protagonistas no seu processo de aprendizagem, desenvolvendo habilidades importantes para sua formação acadêmica e profissional.

Neste contexto, este trabalho abordará uma aprendizagem multimodal para o ensino de números primos e números irracionais para alunos da rede rural.

2 Números primos, raízes enésimas e números irracionais

Começarmos estudando os números primos, as raízes enésimas e os números irracionais mostrando as suas definições, propriedades, notações e importância. Por fim, ainda nesse capítulo falaremos da irracionalidade da raiz enésima de números primos e sua relação com os números transcendentes. Apresentaremos a definição de irracionalidade e transcendentalidade e teoremas chaves nesse estudo.

2.1 Números primos

Os números primos são fundamentais na Matemática, servindo como blocos de construção para os números inteiros. Sua definição e suas propriedades são importantes para várias áreas da teoria dos números e têm implicações significativas em diversas disciplinas. É justamente isso que menciona Sautoy (2007, p.14) "... a hipótese de Riemann tenta compreender os objetos mais fundamentais da Matemática - os números primos. Esses números são os próprios átomos da aritmética."

De acordo com Santos (1998), pode-se definir um número primo como:

Definição 2.1. *Um número primo é um número natural maior que 1 que possui exatamente dois divisores positivos, 1 e ele mesmo. Um número que não é primo é composto. O 1 nem é primo e nem é composto.*

Os números primos têm várias propriedades que os tornam únicos, detre elas citamos, por exemplo:

P.1. Infinitude: A primeira prova da infinitude dos números primos foi apresentada por Euclides[1]. Na obra de Euclides (2009) volume IX, o Teorema 20, diz: "Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos." Isso continua sendo um pilar fundamental da teoria dos números. Outros matemáticos posteriores apresentaram outras provas, dentre os quais citamos: Euler[2], Thue[3], Furstem-

[1] Euclides (300 a.C) foi um importante matemático grego. Ele reuniu e produziu uma obra composta por 13 volumes com todo o conhecimento da época, chamada **OS ELEMENTOS**. Essa obra foi um divisor de águas na história da Matemática, sendo usada até os dias de hoje. Apesar de representar números por segmentos, como era o hábito dos gregos e das limitações da época, nesse livro esteve presente o *método dedutivo*, ou seja, processo lógico, pelo qual um teorema (raciocínio) pode ser demonstrado, segundo Pombo (2002).

[2] Leonhard Euler (1707 - 1783) foi um importante matemático e físico russo que contribuiu em várias áreas da Matemática, tais como: geometria, cálculo infinitesimal, trigonometria, álgebra e teoria dos números, assim diz Virtuous (2025d).

[3] Alex Thue (1863 - 1922) foi um matemático norueguês conhecido por seus trabalhos sobre a aproxi-

berg[4], Paul Erdös [5] e Washington[6]. E há tanbém três demonstrações de matemáticos desconhecidos Perott, Auric e Métrod, sobre os quais não se encontra muitas informações. Essas e outras demonstrações sobre a existência de infinitos números primos pode ser vista no Capítulo 1 da obra de Ribenboim (2012).

Faremos aqui uma prova análoga a de Euclides, inspirada em Pereira (2020).

Teorema 2.1. *Os números primos são infinitos.*

Demonstração: Suponha por contradição que os números primos são finitos.

Então, seja P o conjunto dos números primos até p. Assim, $P = \{2, 3, 5, 7, \ldots, p\}$, onde p é o maior primo dessa lista.

E seja também $m = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p) + 1$. Desse modo, $m > p$. Note que nenhum elemento de m é divisível por P, pois essa divisão sempre deixa resto 1. Assim, m ou é outro número primo ou é um número composto, cujos fatores são números primos que não estão nessa lista.

Logo, a suposição inicial está equivocada. Portanto, o conjunto dos números primos não é finito. ■

P.2. TFA: O teorema fundamental da aritmética é essencial na Matemática, é pois com base nele que fazemos a conhecida, famosa e importante **fatoração**. Ele é citado no livro do Euclides (2009) no volume VII, teoremas 30, 31, 32 , mas a demonstração completa foi feita por Gauss em 1801, isso é o que fala Paro (2016).

A luz disso cita Santos (1998):

Teorema 2.2. *Todo número inteiro maior que 1 pode ser escrito de maneira única como um produto de números primos, a não ser pela ordem dos fatores.*

Ou seja, qualquer inteiro R maior que 1 pode ser representado da seguinte forma:

$$R = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i};$$

em que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_i$ são números primos e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i$ são inteiros não negativos.

Demostração: É feita em duas partes. Primeiramente, provaremos a existência e na sequência a unicidade.

mação diofantina e análise combinatória, de acordo com O'Connor e Robertson (2014).

4 Hillel Furstenberg (1935 - até o presente) é um matemático americano nascido na Alemanha que trabalha com combinatória, teoria da probabilidade, teoria ergódica e dinâmica topológica. Ele recebeu grandes prêmios matemáticos, incluindo o Prêmio Wolf e o Prêmio Abel, como diz O'Connor e Robertson (2023a).

5 Paul Erdős (1913 - 1996) propôs e resolveu problemas na teoria dos números e outras áreas e fundou o campo da Matemática discreta, é o que fala O'Connor e Robertson (2023b).

6 Lawrence Clinton Washington (1951 - até o presente) é um matemático americano especialista em Teoria dos Números Washington (2024).

1ª Parte: Existência

Aqui usaremos o princípio da indução finita.

Seja $P(n)$: Todo número natural n, com $n \geq 2$ pode ser escrito de maneira única como um produto de números primos, a não ser pela ordem dos fatores.

Base de indução: O primeiro número é $n = 2$, que é um número primo e é escrito como produto de números primos (ele mesmo).

Hipótese de Indução: Considerando $P(k)$ é verdadeira, ou seja, que qualquer inteiro k, onde $2 \leq k \leq n$ pode ser escrita como produto de primos.

Tese: Agora precisamos provar que $n + 1$ também pode ser escrito como produto de números primos.

Assim, temos dois casos para considerar:

- **Caso 1:** Se $n + 1$ é primo, então ele já está na forma que queremos, pois ele é um produto de apenas um número primo (ele mesmo).
- **Caso 2:** Se $n+1$ não é primo, então ele é composto e pode ser escrito como produto de dois inteiros menores, digamos $n + 1 = a \cdot b$. Assim, por hipótese a e b podem ser decompostos em produtos de números primos menores, pois $2 \leq a \leq n$ e $2 \leq b \leq n$. Portanto, $n + 1 = a \cdot b$ pode ser escrito como produto de números primos.

2ª Parte: Unicidade

Como é de praxe nas provas de unicidade vamos supor que n pode escrito de duas maneiras diferentes como produto de números primos:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m.$$

Provaremos que as duas fatorações são essencialmente as mesmas. Primeiro, note que p_1 deve dividir $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Como p_1 é primo ele deve dividir algum $q_j, 1 \leq j \leq m$. Sem perda de generalidade podemos assumir que p_1 divide q_1. Como p_1 e q_1 são primos, então $p_1 = q_1$, daí podemos cancelar p_1e q_1. Repetindo esse processo para os termos restantes vemos que primo pk da primeira fatoração é igual ao primo q_m da segunda fatoração, provando que a decomposição é única, exceto pela ordem dos fatores. ■

P.3. Distribuição: A distribuição dos números primos é irregular, mas segue padrões que foram estudados extensivamente. Um proeminente matemático em sua época, Gauss[7] conjecturou que a função $\pi(x)$ que descreve a quantidade dos números primos menores ou iguais a x era assintoticamente igual a função da integral logarítmica, definida como:

[7] Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão, considerado o príncipe da Matemática, já que o rei de Hanover cunhou uma moeda em homenagem ao nome.

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{logt},$$
$$\text{sendo } Li(x) \approx \frac{x}{logx}.$$

Com o passar do tempo, essa conjectura revelou-se verdade e esse fato é hoje conhecido como o Teorema dos Números Primos (Ribenboim, 2012). Essa obra destina todo o Capítulo 4, somente para comentar como se distribuem os números primos.

2.2 Raiz enésima

A raiz enésima é um conceito fundamental na Matemática, representando um valor que quando elevado a uma determinada potência, resulta em um número específico. Este conceito é amplamente utilizado em diversas áreas da Matemática, incluindo álgebra e análise. Esta seção tomou como referência alguns conceitos Neto (2013).

Definição 2.2. *Sejam a um número real a e n um número real positivo. Chama-se raiz enésima do número real a, se existir um número real x, tal que* $x^n = a$.

A existência da raiz enésima do número real a é dada pela Tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Raízes enésimas

	n ímpar	**n par**
$a > 0$	existe uma raiz única positiva, indicada por $\sqrt[n]{a}$.	existem duas raízes opostas, a raiz positiva indicada por $\sqrt[n]{a}$ e a raiz negativa indicada por $-\sqrt[n]{a}$.
$a = 0$	existe uma raiz única que é zero	existe uma raiz única, que é zero
$a < 0$	existe uma raiz unica negativa, indicada por $\sqrt[n]{a}$	não existe raiz

Fonte: Elaborada pelo autor (2025), baseado em Neto (2013).

Conforme, a discussão da Definição 2.2 feito por Krikorian e Grespan (2016), temos que determinar todas as raízes enésimas de a é o mesmo que determinar as soluções da equação $x^n = a$.

i) Se $a = 0$ e $n \in \mathbb{R}^*$, então a raiz enésima de zero é zero.

ii) Se $a > 0$ e n é um natural par não nulo, então o número a possui **duas** raízes enésimas.

Estas duas raízes são simétricas. A **raiz enésima positiva** de a, também chamada de **raiz aritmética** de a é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$. A **raiz negativa** de a por ser simétrica da primeira, é representada pelo símbolo $-\sqrt[n]{a}$.

iii) Se $a \neq 0$ e n é um natural ímpar, então o número a possui uma **única raiz enésima**. Esta raiz tem o mesmo sinal de a e é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$.

iv) Se $a < 0$ e e n é um natural par não nulo, então **não existe raiz real de $\boldsymbol{a}$.**

Exemplo 1: i) $\sqrt[n]{0} = 0, \forall\ n \in \mathbb{R}^*$.

Exemplo 2: ii) O número 16 tem duas raízes quartas. A **raiz quarta positiva de 16** e é representada pelo símbolo $\sqrt[4]{16}$ e vale 2. E a **raiz quarta negativa de 16**, representada pelo símbolo $-\sqrt[4]{16}$ que vale -2.

Exemplo 3: iii) O número 8 tem uma única raiz cúbica, representada pela $\sqrt[3]{8}$ e vale 2. Logo $\sqrt[3]{8} = 2$. O número -8 tem uma única raiz cúbica, representada pela $\sqrt[3]{-8}$ e vale -2. Logo $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Exemplo 4: iv) Não existe raiz quadrada de -4, pois não existe nenhum número real x, tal que $x^2 = -4$.

Observações:

1) No símbolo $\sqrt[n]{a} = x$ dizemos que

- $\sqrt{\ }$ é o radical.
- a e o radicando.
- n é índice.
- x é a raiz.

2) Note que de acordo com a definição de raiz enésima, já que a é real e n é um real positivo, pode-se ter por exemplo, os seguintes caso para calcular:

a) $\sqrt[2,1]{2} = \mathbf{1,391065619}$.

b) $\sqrt[\pi]{3} = \mathbf{1,41864069}$.

Uma calculadora científica ela faz essa conta, qual o conhecimento matemático utilizado para efetuar isso? Nesse caso, é necessário voltar para o cálculo numérico e utilizar um método de interação. Desse modo, sugere-se que o leitor veja o método de Newton-Raphson[8,9] para calcular a raiz de uma função, (Ruggiero; Lopes, 2000). Isso não é propriamente o objeto de investigação aqui, mas deixa-se uma ideia de como o leitor poderá resolver essas questões sem auxílio de uma calculadora.

No item (a) pode-se transformar essa raiz em função, do seguinte modo:

[8] Issac Newton (1643 - 1727) foi um exímio matemático e físico inglês coator do cálculo diferencial e integral, assim revela (Virtuous, 2025c).

[9] Joseph Raphson (1668- 1712) foi um matemático inglês responsável pela descoberta independente do método de Newton para resolver equações numericamente (O'Connor; Robertson, 2017).

Passo 1: Iguala-se a raiz dada a x:

$$\sqrt[2,1]{2} = x.$$

Passo 2: Eleva-se toda a expressão ao índice da raiz:

$$\left(\sqrt[\cancel{2,1}]{2}\right)^{\cancel{2,1}} = x^{2,1}.$$

Passo 3: Elimina-se a raiz, conforme desejado:

$$2 = x^{2,1}.$$

Passo 4: Coloca-se todos os termos no 1° membro:

$$x^{2,1} - 2 = 0. \tag{1}$$

Passo 5: Agora, conforme indica Ruggiero e Lopes (2000) é resolver essa equação usando o método de Newton-Raphson.

Na equação 1, x é a raiz da função que acabamos gerar quando chamamos a operação de radiciação dada de x. A ideia para resolver o item b) é análogo ao item a). Portanto, o leitor poderá seguir as mesmas referências.

Ainda nessa aplicação do método de Newton-Raphson para calcular a raiz enésima de um número primo aproximada sugerimos o leitor ver o artigo Neves (2020).

3) O livro do Iezzi, Dolce e Murakami (2013), só cita a raiz aritmética (positiva), não explicitando os outros casos.

O conceito de raiz por vezes é mal interpretado, entendido e explicado nos livros didáticos. Isso causa confusão deixando muitas lacunas para o entendimento do leitor. Neste quesito pensamos que as referências mais elucidantes sobre esse assunto são Neto (2013) e Krikorian e Grespan (2016).

4) A operação de radiciação é oriunda da geometria, então provavelmente por isso a maioria dos livros define apenas a raiz positiva (aritmética).

Assim, analise o seguinte problema: qual é o lado de um quadrado de área 4? Para responder essa questão precisamos resolver a seguinte equação $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$. Talvez, seja esse é o motivo de tanta confusão: a definição de raiz se mistura com a de uma equação (quadrática, cúbica, ..., enésima).

Mas lembre-se que o conceito de raiz é geométrico, onde não tem medida negativa, por isso o símbolo de raiz ($\sqrt{\ }$) é considerado positivo. Assim, a $\sqrt{4}$ é igual 2, somente, e não ± 2. É hábito ao resolvermos essa equação colocar o mais ou menos ($\pm$), o que não está errado na solução de uma equação do 2° grau, só não pode ser para as raízes de índices pares. Lembre-se que o símbolo de raiz foi definido para ser positivo (em convenção), cuja a notação é $\sqrt[n]{a}$ e nos casos em que aparece a raiz negativa, usa-se a notação $-\sqrt[n]{a}$. Há também outras razões para isso, como por exemplo, nas funções trigonométricas, para satisfazer o conceito de função e a imagem ser única $\operatorname{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Caso contrário, haveriam dois valores, um positivo e outro negativo para o $\operatorname{sen}(60°)$, por exemplo.

Com isso, é muito comum a seguinte pergunta em sites na internet: A $\sqrt{4}$ é?

a) 2.

b) -2.

c) ± 2.

Respondendo essa pergunta o resultado é 2, pois reiterando o símbolo de raiz é definido para ser positivo. Agora se a pergunta fosse qual ou melhor quais são as raízes quadradas de 4 (em forma de texto)? Ou, quais os números que elevado ao quadrado dão 4, aí a resposta é ± 2.

5) Por fim, observe que o conceito de raiz é muito delicado. Ele merece toda a nossa atenção. Por isso, causa tanta confusão, pela facilidade de se confundir com a solução de equações e também porque o símbolo de raiz foi convencionado (definido) para ser positivo, por vários fatores já supra citados.

As raízes enésimas possuem várias propriedades matemáticas importantes. Se $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ pertencentes ao conjunto dos números reais, valem:

P.1. Multiplicação: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

P.2. Divisão: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

P.3. Potência: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

P.4. Transforma raiz enésima em expoente fracionário: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Existem outras propriedades que não são tão relevantes neste estudo aqui, mas são discutidas por Iezzi, Dolce e Murakami (2013) e Neto (2013), onde enfatizam a utilidade dessas relações na resolução de equações e na simplificação de expressões matemáticas. Outro autor que vai de encontro com o que diz Neto (2013) sobre a definição de raízes é Krikorian e Grespan (2016).

Observação:

As raízes enésimas também podem ser classificadas em inteiras e não inteiras. Raízes inteiras ocorrem quando n é um divisor exato do expoente da base, resultando em um número inteiro, por exemplo, $\sqrt{4} = 2$. Em contraste, raízes não inteiras surgem quando não há divisores exatos, frequentemente resultando em números irracionais, por exemplo, $\sqrt[3]{2}$ é irracional. Essa distinção é crucial para entender a natureza das raízes enésimas de números primos e sua irracionalidade.

2.3 Números irracionais

Os números irracionais são uma categoria fundamental de números na Matemática, caracterizados pela incapacidade de serem expressos como frações de dois inteiros. Eles desempenham um papel crucial em diversas áreas, incluindo a álgebra, a análise e a geometria.

Definição de Números Irracionais

Assim, define Iezzi e Murakami (2013) os números irracionais:

Definição 2.3. *Um número irracional é definido como um número real que não pode ser representado na forma de* $\frac{p}{q}$*, com* p *e* q *são inteiros e* $q \neq 0$*. Isso significa que sua representação decimal é infinita e não periódica.*

Alguns exemplos comuns de números irracionais incluem:

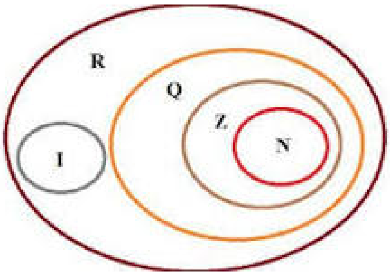
- Raiz quadrada de um número não quadrado perfeito: Por exemplo, $\sqrt{2} \approx 1,4142\ldots$ é um número irracional, pois não pode ser expresso como uma fração.

- Número π: A constante $\pi \approx 3,14159\ldots$ é irracional e representa a razão entre o comprimento de uma circunferência e o o seu diâmetro.

- Número e: A base do logaritmo natural, $e \approx 2,71828\ldots$, também é irracional e é fundamental em cálculos envolvendo crescimento exponencial.

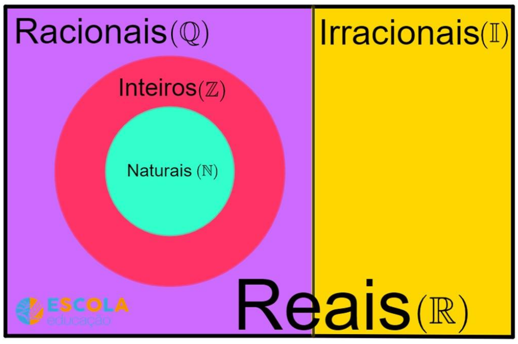
Assim como na radiciação, acontecem alguns equívocos nos livros didáticos. O diagrama dos conjuntos numéricos é por vezes apresentado erroneamente. Um número real ou é racional ou é irracional, não havendo outra possibilidade. Desse modo, o que acontece muito é os diagramas deixarem uma lacuna e darem a entender que existe um número real que não é racional e nem irracional, como pode ser observado nas Figuras 1 e 2.

Figura 1 – Diagrama dos conjuntos numéricos com erro



Fonte: Asth (2021).

Figura 2 – Diagrama de conjuntos numéricos certo



Fonte: Marciano (2020).

Note que na Figura 1 há um espaço em branco no conjunto dos números reais, dando a entender que existem números reais que não são nem racionais e nem irracionais. Já na Figura 2 fica claro que os reais só podem ser racionais ou irracionais, aí está correto. Esses são modelos de diagramas e a maioria dos materiais (livros e internet) mostram algo parecido com isso, seja para o diagrama certo ou para o errado.

Por isso vale a recomendação: Nem tudo o que está nos materiais didáticos está totalmente correto. Apresentamos estes dois erros clássicos, mas existem outros. Assim é bom o leitor ter um senso crítico, pesquisar e estudar para ver se aquela informação está correta, em sua maioria os livros acertam, esses são pontos específicos.

Apesar da incompreensão dos matemáticos à cerca dos números irracionais, muito devido também a incapacidade de se entender os números primos, eles são essenciais para o desenvolvimento da Matemática, especialmente na análise real e na teoria dos limites. Eles permitem um entendimento mais completo do conjunto dos números reais, que inclui tanto os racionais quanto os irracionais. Assim, a provável solução da Hipótese de Riemann[10] que é um dos 23 problemas de Hilbert[11], poderá abrir uma janela para o entendimento pleno dos números irracionais.

Para que o leitor entenda a problemática nos números primos. Sabe-se dizer se um determinado número é primo e também encontrar números primos, mesmo que eles sejam grandes, através de computadores até um certo limite. O maior primo encontrado foi o 51° primo de Mersenne, (Gusmão, 2002). Ou seja, os primos são infinitos, mas sós os conhecemos até certo número finito. Portanto, não sabemos nos descolocar na reta

[10] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) matemático alemão estudioso da Análise e da função zeta que constitui a Hipótese de Riemann. Caso seja resolvida saberemos como se comporta a sequência dos números primos, conforme Virtuous (2025a).

[11] David Hilbert (1862 - 1943) foi um matemático alemão que enunciou 23 problemas para os matemáticos resolverem no século XX. Muitos foram resolvidos, porem A hipótese de Riemann que fala da função zeta e da forma como os números primos se comportam ainda não, assim diz Virtuous (2025b).

dos números primos, em especial, dos grandes e nem como eles ocorrem ou se distribuem exatamente.

2.4 Irracionalidade da raiz enésima de números primos e os números transcendentes

A irracionalidade da raiz enésima de primos é um tema central na teoria dos números, envolvendo conceitos de álgebra e análise. Esse conceito aborda a impossibilidade de representar a raiz enésima de um número primo como uma fração de dois inteiros, o que é um aspecto importante para entender a estrutura dos números.

Apesar dos números transcendentes não serem objetos deste trabalho propriamente dito, eles dão suporte para a compreensão de como as raízes enésimas de números primos (que são números algébricos) não podem ser racionais, ajudando o discernimento da irracionalidade das raízes em muitos casos. Desse modo, definimos a irracionalidade de um número primo, como:

Definição 2.4. *Um número p é primo se tem exatamente dois divisores positivo: 1 e ele mesmo. A raiz enésima de um número primo, denotada por $\sqrt[n]{p}$, é considerada irracional se não puder ser expressa na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$.*

A Definição 2.5 abaixo é essencial para diferenciar número algébrico e número transcendente. Nesse sentido, Marques (2013) define os números transcendentais como:

Definição 2.5. *Um número complexo é chamado de algébrico se é raiz de um polinômio não nulo, com coeficientes inteiros. Caso contrário, é chamado de transcendente.*

O teorema de Hermite-Lindemann[12,13], apresentado em 1882, estabelece as condições sob as quais certas raízes são irracionais. O seu enunciado pode ser visto baixo e é crucial na prova da irracionalidade de $\sqrt[n]{p}$ com p primo.

Conforme, cita Marques (2013) o teorema de Hermite-Lindemann é um dos mais importantes resultados da Teoria Transcendente, pois dele pode-se deduzir a transcendência de vários números relacionados com as necessárias funções exponenciais, logaritmos e trigonométricas.

[12] Charle Hermite (1822 - 1901) foi um matemático francês. Ele nasceu com uma deficiência na perna estudou em boas escolas francês porque a família dele tinha poses, pois atuava numa empresa de tecidos, isso foi o que diz O'Connor e Estatística (2001).

[13] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) foi um matemático alemão nascido em Hanover. No trabalho Über die Zahl π, Lindemann mostra que π é transcendental. Essa abordagem é considerada a maneira mais simples e elegante de demonstrar isso, pois evita abordagens mais complexas ou construções diretas envolvendo polinômios específicos, segundo O'Connor e Robertson (2001).

Teorema de Hermite-Lindemann

Teorema 2.3. *Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $m \in \mathbb{N}$ são números algébricos distintos, então e^{α_1}, $e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.*

O Corolário 2.1 é conhecido como Teorema de Lindemann é um caso particular do Teorema 2.3, para $m = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Corolário 2.1. *Se α é algébrico não nulo, então e^{α} é transcendente.*

> Existe uma formulação equivalente ao Teorema de Hermite-Lindemann que é comumente chamado de Teorema de Lindemann-Weierstrass: "O Teorema de Lindemann-Weierstrass é fundamental para a prova da irracionalidade de números como $\sqrt{p}$ para um número primo p. Este teorema diz que: Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ são números algébricos lineares independentes sobre $\mathbb{Q}$, então e^{α_1}, $e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_m}$ são algebricamente independentes. (Marques, 2013, p.116).

A fim só de esclarecer o conceito de independência linear dito na citação logo acima, nesse sentido afirma Steinbruch e Winterle (2012). Também nessa referência o leitor poderá ter mais informações sobre vetores LI e LD.

Definição 2.6. *Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI) se a única solução para a equação $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$ ocorre quando $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são iguais a zero.*

Se existirem soluções a_i diferente de zero o conjunto de vetores é linearmente dependente (LD).

De maneira simples podemos dizer que um conjunto de números (vetores) são linearmente independentes, quando temos uma combinação linear entre esses números e seus coeficientes que dará zero.

A demonstração do Teorema de Hermite-Lindeman não será demonstrada aqui, pois foge um pouco aos propósitos desse trabalho, conforme já mencionado. Mas, ela pode ser vista na integra no apêndice da obra de Marques (2013).

Outro teorema fundamental para a irracionalidade de certas expressões é o que segue abaixo. Ele é citado por Marques (2013).

Teorema de Gelfond-Schneider

Este é um teorema valioso na teoria dos números transcendentes, pois permite a classificação de números que estão em forma de potência, sendo a base um número algébrico e o expoente um número transcendente.

Teorema 2.4. *Se α é um número algébricos diferentes de 0 e 1, e β é um número transcendente, então α^{β} é transcendente e, portanto, irracional.*

A prova do Teorema de Gelfond-Schneider também não será feita feita, pelos motivos supracitados. Ademais, ela pode vista no livro de (Marques, 2013).

Entretanto, os números irracionais podem ser divididos em algumas categorias com base em suas propriedades e representações. Aqui estão algumas das divisões mais comuns:

1. **Números algébricos:** Figueiredo (2011), define que:

Definição 2.7. *Qualquer solução de uma equação polinomial da forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$, onde os coeficientes $a_i^{\prime}s$ são inteiros, é chamado de número algébrico.*

A aritmética dos números algébricos obedecem as seguintes propriedades:

(i) A soma de dois números algébricos é um número algébrico.

(ii) O produto de dois números algébricos é algébrico.

(iii) O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico é algébrico.

(iv) o inverso $\alpha^{-}1$ de um número algébrico, com $\alpha \neq 0$

Por motivos de conveniência, já citados nesse trabalho, omite-se aqui as demonstrações dessas propriedades.

2. **Números Transcendentes:**[14] Um número que não é algébrico é chamado de *transcendente.*

Isto é, os números transcendentes são aquela que não são soluções de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Marques (2013) ainda cita que:

Teorema 2.5. *Quase todos os números são transcendentes.*

A prova desse teorema também será omitida aqui.

Exemplo 5: São números algébricos:

[14] A existência dos números transcendentes foi provada pelo matemático alemão Georg Cantor (1845 - 1945) (Figueiredo, 2011).

1. **Números inteiros:** Todos os inteiros são algébricos, pois podem ser expressos como soluções da equação $x - a = 0$, onde a é um inteiro.

2. **Números racionais:** Qualquer número racional $\dfrac{p}{q}$ (com p e q inteiros e $q \neq 0$) é algébrico, pois é solução da equação $qx - p = 0$.

3. **Raízes de números primos:** Números como $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{5}$ são algébricos, pois são soluções das equações $x^2 - 2 = 0$ e $x^3 - 5 = 0$, respectivamente.

Exemplo 6: São números transcendentes:

1. O π e e. Esses números não podem ser expressos como soluções de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.

2. Imediatamente do Teorema 2.4, os números $2^{\sqrt{2}}$, i^i e $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ são transcendentes.

3. E também como corolário do Teorema 2.4, e^{π} é transcendente.

Como sugestão de leitura e aprofundamento nos estudos sobre os números transcendentes o leitor pode consultar Figueiredo (2011) e Marques (2013). Neles o leitor encontrará a prova dos teoremas não demonstrados nessa seção.

3 Estudo da Irracionalidade

Nessa seção começaremos o estudo da irracionalidade provando que $\sqrt{2}$ é irracional como Hipaso[1] e depois uma prova extramente curta, conforme Lima (2022). Na sequência faremos uma prova geométrica da irracionalidade da $\sqrt{2}$ e analisando essas provas generalizamos para a raiz $\sqrt[n]{p}$, para qualquer p primo e $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Provas das irracionalidades da $\sqrt{2}$ e a generalização para a $\sqrt[n]{p}$

A prova seguinte é atribuída a Hipaso. Ela gerou a crise dos incomensuráveis na escola de Pitágoras [2] que acreditavam que tudo era número (racional). Eles não acreditavam que existiam números irracionais, isso é o que revela Roque e Carvalho (2019).

Prova algébrica que $\sqrt{2}$ é irracional

Teorema 3.1. $\sqrt{2}$ *é irracional.*

Demonstração: Para mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional, usaremos o método da prova por contradição. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, podemos escrever que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, uma fração irredutível, ou seja, $mdc(a,b) = 1$, onde a e b são inteiros positivos.

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos:

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\cdot$$

Multiplicando ambos os lados por lados por b^2, temos:

$$2 \cdot b^2 = a^2. \tag{1}$$

---

[1] Hipaso de Metaponto (VI - V a.C) ele foi um matemático, filósofo e teórico musical da escola pitagórica. Pressupõe-se que devido a sua descoberta do $\sqrt{2}$ que era incomensurável (irracional) e isso feria o lema dessa seita fundada por Pitágoras ele teria sido morto e seu corpo lançado no mar, conforme menciona Viegas (2020).

[2] Pitágoras de Samos (570 - 495 a.C) foi um importante matemático grego, atribui-se a ele a descoberta do Teorema de Pitágoras, essencial na Matemática. Descobertas recentes revelam que ele não teria sido ele a “descobrir” isso. Indianos, egípcios e babilônios já o utilizava, segundo aborda Vaindiner (2019).

Isso implica que a^2 é par, o que significa que a também é par.[3] Então, podemos escrever $a = 2k$ para algum inteiro k.

Substituindo $a = 2k$ na equação 1 obtemos:

$$(2k)^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow$$
$$4k^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow$$
$$2k^2 = b^2.$$

Portanto, b^2 também é par, o que implica que b também é par. Agora, se tanto a, quanto b são pares, então $mdc(a, b) \geq 2$ o que contradiz a suposição inicial de que $\frac{a}{b}$ está na forma simplificada com $mdc(a, b) = 1$.

Assim, chegamos a uma contradição. Portanto, nossa suposição de que $\sqrt{2}$ é racional está errada. Consequentemente, concluímos que $\sqrt{2}$ é irracional. ■

Contudo, note que $\sqrt{2}$ é um exemplo clássico de um número irracional, pois não pode ser expresso como uma fração, onde ambos numerador e denominador são inteiros e estão na forma simplificada.

Agora, faremos uma outra prova da irracionalidade do $\sqrt{2}$ adaptada da publicação do Lima (2022).

Teorema 3.5. *Não existe um número racional, cujo quadrado seja igual a 2.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros, coprimos e $q \neq 0$. Assim, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, ou seja, $p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2^0 \cdot p^2 = 2^1 \cdot q^2$. Agora, note que o fator 2 aparece um número par de vezes na decomposição de p^2 e um número ímpar de vezes em $2q^2$. Isso contradiz a nossa suposição, pois não é possível ter $p^2 = 2q^2$. Portanto, $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$
■

Prova geométrica da irracionalidade do $\sqrt{2}$

A prova seguinte segue bem de perto a da publicação de Possani (2000). Ela é bem interessante, pois é fundamentada em argumentos geométricos de que $\sqrt{2}$ é irracional.

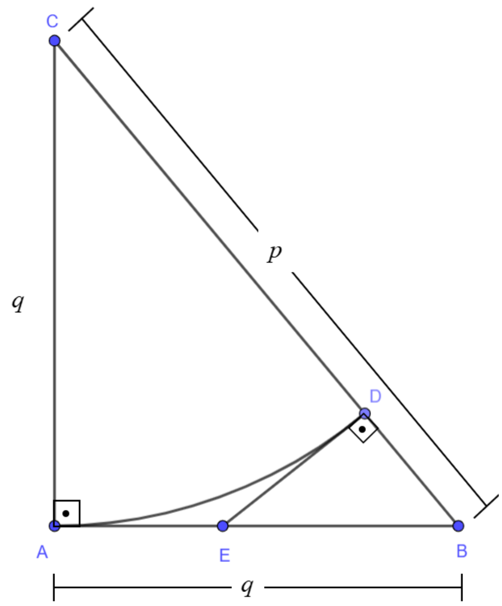
Teorema 3.5. $\sqrt{2}$ *é irracional.*

[3] Para provar que se a^2 é par, então a é par, usa-se a contrapositiva. Suponha por contradição que a é ímpar, assim $a = 2k + 1$, para algum k inteiro. Desse modo, $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$. Isso é um múltiplo de 2 mais 1, logo é um número ímpar, absurdo. Portanto, a^2 é par. A demonstração que de se b^2 é par, então b é par é análoga.

Demonstração: Começaremos observando que da igualdade $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow p^2 = q^2 + q^2$ e essa é uma relação que obedece ao Teorema de Pitágoras.

Então, assuma, por absurdo, que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, com p e q números inteiros positivos e primos entre si. Assim, existirá um triângulo retângulo isósceles de lados inteiros p (hipotenusa) e q (catetos). Observe que quaisquer dois triângulos retângulos isósceles são semelhantes e, como p e q não possuem fator comum, esse triângulo de lados p, q e q é o menor triângulo retângulo isósceles de lados inteiros, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Demonstração geométrica que raiz 2 é irracional



Fonte: Elaborada pelo autor, com uso do Geogebra (2025).

Na Figura 3, o $\widehat{AD}$ é um arco de circunferência de raio q e centro C, com $D \in \overline{CB}$. Toma-se E em $\overline{AB}$ de modo que $\widehat{D} = 90°$. Daí segue que $\overline{DE}$ é tangente ao arco de circunferência mencionada e, também, que $\overline{EA} \equiv \overline{ED}$, já que são segmentos tangentes à circunferência traçados a partir de um ponto externo.

Como o $\triangle\ ABC$ é retângulo e isósceles de base p e $\hat{A}$ reto, então $\hat{C} = \hat{B}$ e $\hat{C} + \hat{B} = 90°$, logo $\hat{C} = \hat{B} = 45°$. Assim, no $\triangle\ DEB$, temos que $\hat{E} = 45°$, logo ele também é isósceles e retângulo. Desse modo, $ED = DB = p - q$ é inteiro e também $\overline{EB}$ é inteiro, pois $AE + EB = q \Rightarrow EB = q - AE = q - ED = q - (p - q) = 2q - p$.

Então, por semelhança podemos escrever que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{2q-p}{p-q} =$, onde p e q são não tem fatores em comum. Mas, isso é um absurdo, porque existem p e q coprimos, na qual a fração $\dfrac{2q-p}{p-q}$ é redutível. A conclusão é que $\sqrt{2}$ é irracional. ■

Exemplo 7: Se o leitor tomar, como exemplo, $p = 3$ e $q = 2$, temos que o $mdc(2,3) = 1$ e $\dfrac{2q-p}{p-q} = \dfrac{2 \cdot 2 - 3}{3 - 2} = 1$ que é redutível. Para generalizar basta tomar $p = k$ e $q = k + 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, temos que k e $k + 1$ são coprimos e a $2q - p$ é divisível por $p - q$.

Generalização de que a raiz enésima de qualquer número primo é número irracional

Esta prova é uma contribuição desse trabalho, fundamentada na demonstração da irracionalidade do $\sqrt{2}$ de Hipaso.

Teorema 3.6. *Se $n \in N$ e p primo, então a $\sqrt[n]{p}$ é irracional.*

Demonstração: Para mostrar que a raiz enésima de um número primo p é irracional para $n > 1$, argumenta-se por contradição.

Suponha que $\sqrt[n]{p}$ é racional, ou seja, pode ser expresso na forma $\sqrt[n]{p} = \dfrac{a}{b}$ onde a e b são inteiros positivos e o $mdc(a, b) = 1$.

Elevando ambos os lados à potência n, obtemos:

$$p = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{2}$$

Multiplicando ambos os lados da equação 2 por b^n, temos:

$$p \cdot b^n = a^n. \tag{3}$$

Isso implica que a^n é um múltiplo de p. Portanto, p divide a^n. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, como p é primo, p deve dividir a.

Suponha $a = k \cdot p$ onde k é um inteiro. Substituindo na equação 3 obtemos:

$$p \cdot b^n = (k \cdot p)^n = k^n \cdot p^n. \tag{4}$$

Dividindo ambos os lados da equação 4 por p, obtemos:

$$b^n = k^n \cdot p^{(n-1)}. \tag{5}$$

Da Equação 5 concluímos que b^n é um múltiplo de p. Novamente, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, p deve dividir b. No entanto, isso contradiz a suposição inicial de que $mdc(a, b) = 1$. Portanto, $\sqrt[n]{p} = \dfrac{a}{b}$ não pode ser verdade, o que implica que $\sqrt[n]{p}$ não pode ser racional. Assim, concluímos que a raiz enésima de um número primo p, com $(n > 1)$ é irracional. ■

Exemplo 8: São irracionais. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \ldots$.

3.2 Irracionalidade da raiz enésima

Nesta seção, traz-se outra contribuição desse trabalho a partir do que foi até apresentado até aqui. Partiremos da irracionalidade um primo para discutir a irracionalidade da raiz enésima de **números compostos que não sejam enésimos perfeitos.**

Faremos agora a discussão da natureza dos números na forma:

$$\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i}}, \text{ onde } mdc(p_1, p_2, \ldots, p_i) = 1$$

Com base nos fundamentos discutidos até agora neste trabalho. Acompanhe os casos:

Análise da irracionalidade da raiz enésima de um único primo

Caso 1: Seja $\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_1^{\alpha_1}}$, com $\alpha_1 < n$ e p_1 primo.

Como já foi amplamente discutido aqui, a $\sqrt[n]{p}$, para qualquer primo p e n natural é sempre irracional. Usaremos essa premissa para entender o comportamento da $\sqrt[n]{p_1^{\alpha_1}}$, onde $\alpha_1 < n$ e p_1 primo.

Ao fazer $p_1^{\alpha_1}$, temos uma multiplicação de irracionais. A multiplicação de números irracionais não pode resultar em um número racional, a menos que se trate de uma combinação específica de termos que permita simplificação, o que não ocorre aqui, já que $\alpha_1 < n$.

Portanto, concluímos que $\sqrt[n]{p_1^{\alpha_1}}$ com $\alpha_1 < n$, é **irracional**.

Caso 2: Seja $\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_2^{\alpha_2}}$ com $\alpha_2 = n$ e p_2 primo.

Neste caso, temos que $\alpha_2 = n$ ou seja, o expoente do primo p_2 é igual ao índice da raiz. Utilizando a propriedade das potências, sabemos que:

$$\sqrt[n]{{p_2}^n} = p_2.$$

.

Ou seja, a raiz enésima de um número primo elevado ao seu próprio expoente resulta em um número racional. Portanto, conclui-se que, quando $\alpha_2 = n$, a raiz enésima de $\sqrt[n]{p_2^{\alpha_2}}$ é racional.

Caso 3: Seja $\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_3^{\alpha_3}}$ com $\alpha_3 > n$ e p_3 primo.

Quando o expoente $\alpha_3 > n$ é maior que n, o número composto de primos que aparece sob a raiz se decompõe em duas partes. Para entender melhor, consideramos a expressão:

$$\sqrt[n]{{p_3}^{\alpha_3}} = p_3^{\beta} \cdot \sqrt[n]{{p_3}^{\gamma}}.$$

onde β é um inteiro tal que $\beta = \left\lfloor \frac{a_3}{n} \right\rfloor$ e $\gamma = \alpha_3 - n \cdot \beta$, então a parte p_3^{γ} permanece dentro da raiz, tornando o resultado irracional.

Agora, consideraremos as combinações possíveis desses três casos e analisaremos a irracionalidade resultante em cada situação.

Caso 4: Seja $\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}}$, com $\alpha_1 < n$, $\alpha_2 = n$ e $p_1 \neq p_2$.

Aqui, se $\alpha_2 = n$, então p_2 sairá da raiz, sendo um número racional. Já $p_1^{\alpha_1}$ permanece dentro da raiz, resultando em um número irracional. Como o produto de um número racional por um número irracional é sempre irracional, o resultado será irracional

Caso 5: Seja $\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_1^{\alpha_1} \cdot p_3^{\alpha_3}}$, com $\alpha_1 < n$, $\alpha_3 > n$ e $p_1 \neq p_3$. Aqui, se $\alpha_3 > n$, então parte de $p_3^{\alpha_3}$ sairá da raiz, mas a outra parte permanecerá. Isso cria duas multiplicações de números irracionais, resultando em um número irracional.

Caso 6: Seja $\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}}$, com $\alpha_2 = n$, $\alpha_3 > n$ e $p_2 \neq p_3$. Neste caso, se $\alpha_2 = n$, então p_2 sairá da raiz, sendo racional. No entanto, como $\alpha_3 > n$, parte de ${p_3}^{\alpha_3}$ sairá da raiz e outra parte permanecerá, formando uma multiplicação de números racionais e irracionais. O resultado será irracional.

Caso 7: Seja $\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{{p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot {p_3}^{\alpha_3}}$, com $\alpha_1 < n$, $\alpha_2 = n$, $\alpha_3 > n$ e $p_1 \neq p_2 \neq p_3$. Aqui, temos uma combinação das três situações anteriores: ${p_1}^{\alpha_1}$ permanece dentro da raiz, enquanto p_2 sai da raiz e ${p_3}^{\alpha_3}$ se divide em duas partes. Como temos multiplicações de irracionais com racionais, o resultado será irracional.

Exemplo 9 (Caso 1)**:** Considere $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$ (irracional)·(irracional). Como o expoente 2 é menor que o índice 3, o resultado é irracional. Portanto, concluímos que $\sqrt[n]{p_1^{\alpha_1}}$, com $\alpha_1 < n$ é **irracional**.

Exemplo 10 (Caso 2)**:** Considere $\sqrt[5]{7^5} = 7$, que é um número **racional**.

Exemplo 11 (Caso 3)**:** Quando α_3 não é múltiplo de n: Considere $\sqrt[3]{2^8} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} =$ (racional) · (racional) · (irracional), resultando em **irracional**.

Quando α_3 é múltiplo de n: Considere $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3} = 2 \cdot 2 = 4$, que é um numero racional. No entanto, isso é um caso particular, pois 2^6 pode ser reescrito como $\left(2^2\right)^3$, um cubo perfeito.

Exemplo 12 (Caso 4)**:** Considere $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$, (racional) · (irracional). O resultado é **irracional**.

Exemplo 13 (Caso 5)**:** Considere $\sqrt[2]{250} = \sqrt[2]{2} \cdot 5\sqrt[2]{5} = 5\sqrt[2]{10}$ (racional) · (irracional). O resultado é **irracional**.

Exemplo 14 (Caso 6)**:** Considere $\sqrt[2]{392} = \sqrt[2]{49} \cdot \sqrt[2]{8} = 14\sqrt[2]{2}$ (racional) · (irracional). O resultado é **irracional**.

Exemplo 15 (Caso 7)**:** Considere $\sqrt[2]{363} = \sqrt[2]{121} \cdot \sqrt[2]{3} = 11\sqrt[2]{2}$ (racional) · (irracional). O resultado é **irracional**.

Como o problema que estamos analisando envolve uma irracionalidade de raízes enésimas de números compostos. Em particular, queremos examinar como os expoentes das potências e a participação do número em fatores primos afetam a irracionalidade da raiz. A ideia principal é que a raiz enésima de um número composto, se não for um número perfeito (ou seja, não for um enésimo perfeito), será irracional, a menos que certos expoentes sejam múltiplos do índice da raiz. Para simplificar a análise, podemos considerar dois casos principais, utilizando a propriedade das potências, segundo a qual todo radical pode ser expresso como uma potência com expoente fracionário:

Decompondo o radicando em fatores primos, obtemos, por exemplo:

$$\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i}}, \text{ onde } mdc(p_1, p_2, \ldots, p_i) = 1.$$

Caso 8: Raiz enésima irracional

Sendo $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e podemos afirmar que a $\sqrt[n]{\mathbb{Q}^m}$ é irracional, se e somente se $\dfrac{m}{n} \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$, com $m \in \mathbb{Q}$ e $n \in (\mathbb{N} > 1)$.

Caso 9: Raiz enésima racional

A $\sqrt[n]{\mathbb{Q}^m}$ é racional, se e somente se $\dfrac{m}{n} \in (\mathbb{Z})$, com $m \in \mathbb{Q}$ e $n \in (\mathbb{N} > 1)$.

Observação:

A raiz enésima de um número racional, com índice n e radicando racional de expoente m, possui algumas restrições importantes:

- Para n par e diferente de zero, por exemplo se $n = 2, 4, 6, \ldots$, então o número racional dentro da raiz de expoente m deve ser um número racional positivo. Pois, caso contrário, a operação resultaria em um número complexo, o que não se aplica aos números racionais.

- Para n ímpar, por exemplo se $n = 3, 5, 7, \ldots$, então o número racional dentro da raiz de expoente m pode ser positivo ou negativo. Uma vez que, ao contrário do caso anterior, a raiz de um número negativo ainda pode ser representada por um número racional, evitando que a operação leve a resultados em números complexos.

Exemplo 16 (Caso 8)**:** $\sqrt[3]{\dfrac{14000}{729}}$.

Primeiro, decompondo os números em fatores primos:

$$1400 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^1 \text{ e } 729 = 3^6.$$

Agora, calcula-se a raiz cúbica de $\dfrac{14000}{729}$:

$$\sqrt[3]{\frac{14000}{729}} = \sqrt[3]{\frac{2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^1}{3^6}} = \sqrt[3]{\frac{2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^1}{3^6}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{6}{3}}}.$$

Analisando cada termo, temos:

- $2^{\frac{4}{3}}$ é irracional, porque $\dfrac{4}{3}$ não é inteiro.
- $5^{\frac{3}{3}}$ é racional, pois $3/3$ é inteiro.
- $7^{\frac{1}{3}}$ é irracional, porque $\dfrac{1}{3}$ não é inteiro.
- $3^{\frac{6}{3}}$ é racional, pois $\dfrac{6}{3} = 2$ é inteiro.

O produto de termos racionais e irracionais resulta em um número irracional, já que qualquer operação envolvendo um número irracional (exceto, uma multiplicação ou divisão por 0) com um número racional resultará em um número irracional. Portanto, o produto e a divisão de termos racionais e irracionais resultam em $\sqrt[3]{\dfrac{14000}{729}}$ é irracional.

Exemplo 17 (Caso 9)**:** $\sqrt[5]{\dfrac{7776}{3125}}$.

Decompondo os números em fatores primos:

$$7776 = 2^5 \cdot 3^5 \text{ e } 3125 = 5^5.$$

Assim, temos que a $\sqrt[5]{\dfrac{7776}{3125}} = \sqrt[5]{\dfrac{2^5 \cdot 3^5}{5^5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{6}{5}\right)^5} = \dfrac{6}{5}$.
E como $\dfrac{5}{5}$ é um inteiro então $\sqrt[5]{\dfrac{7776}{3125}}$ é racional.

Os valores calculados para as raízes enésimas de números primos, embora apresentados com cerca de 13 dígitos após a vírgula na Tabela 4 abaixo, mostram-se infinitos e não periódicos. Essa característica reafirma a irracionalidade dessas raízes, uma vez que não envolve frações exatas. Essa análise não apenas destaca a natureza irracional das raízes enésimas, mas também enriquece nossa compreensão sobre a relação entre números primos e a irracionalidade.

Figura 4 – Raízes aproximadas

Número primo	Raiz quadrada	Número primo	Raiz cúbica	Número primo	Raiz quarta	Número primo	Raiz quinta
2	1,4142135623731	2	1,2599210498949	2	1,1892071150027	2	1,1892071150027
3	1,7320508075689	3	1,4422495703074	3	1,3160740129525	3	1,3160740129525
5	2,2360679774998	5	1,7099759466767	5	1,4953487812212	5	1,4953487812212
7	2,6457513110646	7	1,9129311827724	7	1,6265765616978	7	1,6265765616978
13	3,6055512754640	13	2,3513346877208	13	1,8988289221159	13	1,8988289221159
17	4,1231056256177	17	2,5712815906582	17	2,0305431848689	17	2,0305431848689
19	4,3588989435407	19	2,6684016487219	19	2,0877976299298	19	2,0877976299298
23	4,7958315233127	23	2,8438669798516	23	2,1899387030948	23	2,1899387030948
29	5,3851648071345	29	3,0723168256859	29	2,3205957871061	29	2,3205957871061
31	5,5677643628300	31	3,1413806523914	31	2,3596110617706	31	2,3596110617706
37	6,0827625302982	37	3,3322218516460	37	2,4663257145597	37	2,4663257145597
41	6,4031242374329	41	3,4482172403827	41	2,5304395344352	41	2,5304395344352
43	6,5574385243020	43	3,5033980603867	43	2,5607496020310	43	2,5607496020310
47	6,8556546004010	47	3,6088260801387	47	2,6183304986959	47	2,6183304986959
53	7,2801098892805	53	3,7562857542211	53	2,6981678764081	53	2,6981678764081
59	7,6811457478686	59	3,8929964158733	59	2,7714880024760	59	2,7714880024760
61	7,8102496759067	61	3,9364971831022	61	2,7946823926712	61	2,7946823926712

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Com base em todo o exposto até agora, demonstraremos que a multiplicação de um número racional diferente de zero por um número irracional resulta em um número irracional, veja a seguir:

Teorema 3.7. *O produto de um número racional diferente de zero por um irracional é um número irracional.*

Demonstração: Vamos considerar um número racional $r = \frac{a}{b}$ (onde, a e b são inteiros e $b \neq 0$) e um número irracional i.

Queremos mostrar que o produto $p = r \cdot i = \frac{a}{b} \cdot i$ é irracional. Suponha por absurdo que p é racional. Se p fosse racional, então existe um par de inteiros m e n (com $n \neq 0$) tal que $p = \frac{m}{n}$. Assim, temos:

$$\frac{a}{b} \cdot i = \frac{m}{n}. \tag{6}$$

Multiplicando ambos os lados da equação 6 por $b \cdot n$ (que é diferente de zero), temos:

$$a \cdot n \cdot i = m \cdot b. \tag{7}$$

Rearranjando a Equação 7, obtemos: $i = \frac{m \cdot b}{a \cdot n}$. Aqui, $m \cdot b$ e $a \cdot n$ são ambos inteiros (já que m, a, b e n são inteiros e o produto de inteiros é um inteiro). Assim, podemos expressa-se i como uma fração de dois inteiros, o que contradiz a suposição de que i é irracional.

Como a suposição de que p é racional leva a uma contradição, conclui-se que o produto $p = r \cdot i$ deve ser irracional. Portanto, a multiplicação de um número racional por um número irracional resulta em um número irracional. ■

Exemplo 18: Mostre que $\sqrt{12}$ é irracional.

Como a raiz do produto é igual ao produto das raízes, então pelo Propriedade da multiplicação de radiciais, vista no capítulo 1, temos que a: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Pelo Teorema 3.7, conclui-se que a multiplicação de um racional diferente de zero por um irracional também irracional, portanto $\sqrt{12}$ é irracional.

3.3 Números irracionais famosos e suas curiosidades

Nesta seção veremos alguns números irracionais conhecidos, suas definições e principais propriedades.

Os números irracionais tem **representação decimal infinita e não periódica**, ou seja, ela não termina em um número finito de dígitos e que não se repete nunca. Alguns números irracionais são **transcendentes**, isto é, eles não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes lineares, tais como π e o e. Eles são um **conjunto denso na reta dos reais**, assim entre dois reais diferentes sempre existe pelo menos outro número irracional. Os irracionais são também **incomensuráveis**, desse modo, não pode ser expressos como a razão entre dois inteiros, já que os gregos tratavam os números como segmentos (Roque; Carvalho, 2019). Segue a Tabela 3 que resume outras informações.

Tabela 2 – Números irracionais e suas propriedades

(continua)

nº irracional	**Definições e Propriedades**
$\sqrt{2}$	É o número que quando multiplicado por si mesmo resulta em 2. Foi descoberta por pelo grego Hipaso da escola pitagórica. Ele é usando em várias aplicações matemáticas, como na geometria, em especial em problemas que envolve o Teorema de Pitágoras, conforme Roque e Carvalho (2019).
$\sqrt{3}$	É o número que quando multiplicado por si mesmo resulta em 3. Assim como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ é conhecida desde os tempos antigos. Ele aparece em várias áreas da Matemática, incluindo geometria, trigonometria e teoria dos números, assim revela Niven (2012).

Tabela 3 – Números irracionais e suas propriedades

(conclusão)

$\boldsymbol{\pi}$	É a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Atribui-se a Arquimedes a descoberta do π. O pi é um número transcendental, isto é, ele não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Sua expansão decimal é infinita e periódica. Ele é usado extensivamente na geometria, trigonometria, física e engenharia, assim nos mostra Figueiredo (2011).
$\boldsymbol{e}$	O número de Euler é a base dos logaritmos naturais e vale aproximadamente $e = 2,71828$. Assim como o π, o e também é transcendental. Ele surge naturalmente em muitos contextos matemáticos, como no cálculo diferencial, equações diferenciais e é fundamental em áreas como análise, probabilidade e estatística, assim menciona Figueiredo (2011).
$\boldsymbol{\phi}$	A razão áurea e a razão entre duas partes de um segmento dividido de tal forma que a parte maior é para a parte menor como a soma das duas partes é para a parte maior. Ela tem propriedades geométricas interessantes e aparece em muitos contextos naturais artísticos e estéticos. Sua representação numérica é aproximadamente $\phi = 1,61803$ e é irracional, de acordo com Biembengut e Hein (2021).

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

4 Produto Educacional

O objetivo deste trabalho é proporcionar aos alunos do 9º ano e do Ensino Médio uma compreensão clara e acessível sobre a irracionalidade das raízes enésimas de números, com ênfase especial nas raízes de números primos. Para facilitar a compreensão deste conceito adotou-se o uso de:

a) Material didático próprio (apostila).

b) Vídeos do Youtube.

c) Gamificação.

As apostilas foram fundamentais para a construção da base de conhecimento necessária para o estudo do tema. Elas foram elaboradas, com uma sequência lógica e gradual, facilitando a compreensão dos conceitos de maneira clara e objetiva.

O uso de vídeos do YouTube contribuiu no processo de aprendizado, oferecendo uma abordagem mais prática e visual. Esses vídeos ajudaram a ilustrar os conceitos abordados nas apostilas, proporcionando uma compreensão mais dinâmica dos conteúdos, promovendo uma melhor fixação dos conceitos e atendendo a diferentes estilos de aprendizagem.

A gamificação, implementada após a conclusão das apostilas e vídeos sobre o tema, demonstrou um aumento notável no interesse dos alunos e na sua motivação para aprimorar o desempenho acadêmico. Essa abordagem não apenas estimulou o raciocínio lógico, mas também promoveu a troca de ideias e o desenvolvimento de estratégias, tornando o aprendizado mais envolvente, significativo e colaborativo.

Para medir o aprendizado, foram elaboradas duas provas diagnósticas: Diagnóstica 1 e Diagnóstica 2.

A Diagnóstica 1 foi aplicada na primeira aula, no início do produto educacional, com o objetivo de avaliar o conhecimento prévio dos alunos antes do início das atividades. Ela consistia em 12 questões, divididas em 4 blocos de 3 perguntas, cada um correspondente a uma das apostilas (1, 2, 3 e 4), que abordavam os conteúdos que seriam trabalhados ao longo do curso.

Já a Diagnóstica 2 foi aplicada na aula 20, após a conclusão de todas as atividades. Assim como a Diagnóstica 1, ela também era composta por 12 questões, distribuídas em blocos semelhantes. O objetivo dessa avaliação era comparar os resultados com os da Diagnóstica 1 e verificar se houve evolução no aprendizado dos alunos ao longo do curso.

A combinação desses materiais foram produtivas e dinâmicas, pois permitiu que os alunos tivessem acesso a diversas formas de aprendizado, ou seja, vídeos, apostilas e gamificação.

4.1 Metodologia

A pesquisa foi realizada em um colégio público da zona rural de Brazlândia, Brasília - DF com turmas pequenas, envolvendo uma turma do 9° ano e seis turmas do ensino médio, sendo duas turmas para cada ano do 1° ao 3° ano totalizando 62 discentes distribuídos em 7 salas. A turma do 9° ano era uma turma heterogênea, isto é, composta por alunos e alunas com idades aproximadas, num total de 11 alunos. Já as turmas de ensino médio também eram heterogêneas composta com 51 alunos, sendo 25 estudantes do 1° ano, 12 estudantes do 2° ano e 14 estudantes do 3° ano.

O objetivo principal foi aprimorar os conhecimentos dos alunos por meio do estudo de conteúdos abordados em momentos anteriores, com foco no aprofundamento de conceitos matemáticos. As atividades foram planejadas no terceiro bimestre do ano de 2024 para ocorrerem ao longo de 20 aulas com duração de 45 minutos cada, sendo as aulas ministrada pelo professor autor do trabalho incluindo duas aulas dedicada à prática de jogos educativos, que se mostrou particularmente eficaz para o 1º ano do Ensino Médio.

Além disso, as sessões de explicação de debate sobre as apostilas e vídeos, em sala de aula, proporcionaram um espaço interativo onde os alunos puderam esclarecer dúvidas, discutir conceitos e aprofundar seu entendimento. Esse ambiente de troca de ideias e colaboração foi fundamental para enriquecer o aprendizado, estimulando a participação ativa e a construção coletiva do conhecimento. O uso de métodos variados, como apostilas, vídeos, discussões em grupo e jogos, resultou em uma metodologia integrada e eficaz, que não só aumentou o interesse dos alunos, mas também facilitou a assimilação dos conceitos de maneira significativa e duradoura. Na Tabela 4 temos as divisões das aulas sobre os conteúdos das apostilas.

Tabela 4 – Cronograma de aulas ministradas

(continua)

Cronograma para 9°ano e 1°, 2° e 3° do ensino médio.	
aula 1	Questionário diagnóstico 1 com 12 questões sobre o tema.
aula 2	Propriedades dos radicais ou propriedades das raízes
aula 3	Vídeos 1,2 e 3.
aula 4	Debates sobre a apostila 1.
aula 5	Resoluções de questões.
aula 6	Simplificação de radicais.

Tabela 4 — Cronograma de aulas ministradas

(conclusão)

aula 7	Vídeos 4,5 e 6.
aula 8	Debates sobre a apostila 2.
aula 9	Resoluções de questões.
aula 10	Números irracionais
aula 11	Vídeos 7,8 e 9.
aula 12	Debates sobre a apostila 3.
aula 13	Resoluções de questões.
aula 14	Números primos.
aula 15	Vídeos 10, 11 e 12.
aula 16	Debates sobre a apostila 4.
aula 17	Resoluções de questões.
aula 18	Aplicação do jogo da velha 2D.
aula 19	Aplicação do jogo da velha 3D.
aula 20	Questionário diagnóstico 2 com 12 questões sobre o tema.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Essas 20 aulas extras foram realizadas em no mesmo período onde o conteúdo-programático das aulas era ministrado. Isso levou a uma suspensão temporária do conteúdo normal, que é ministrado conforme o plano de ensino de cada turma. Contudo, é possível observar que a implementação dessas aulas foi benéfica para corrigir defasagens no aprendizado dos alunos, assegurando que tivessem uma base mais sólida para as séries seguintes. Isso porque os conteúdos abordados eram temas que os alunos já deveriam ter dominado.

Entretanto, o impacto na continuidade do plano de ensino anual e a necessidade de explicações mais rápidas e superficiais são pontos que merecem atenção para futuras estratégias educacionais. Porém, a retomada desses assuntos, mesmo que em um momento onde há defasagem já é nitidamente notada e existem outras prioridades educacionais pode ser considerada positiva, pois os possíveis hiatos nos assuntos abordados nesse trabalho e que deveriam ter sido aprendidos pelos alunos impactam significamente a absorção de outras habilidades que são também úteis na aprendizagem de Matemática. Assim, elencamos a seguir as principais vantagens.

Vantagens:

1. Revisão de Conteúdos Essenciais: As 20 aulas extras focaram em conteúdos essenciais que funcionavam como pré-requisitos para as séries subsequentes. Esses tópicos frequentemente apareciam em avaliações e eram recorrentes nas atividades de aprendizagem. Ao revisá-los, os alunos consolidaram conhecimentos fundamentais, o que lhes proporcionou maior segurança e compreensão para seguir em frente.

2. Redução de Lacunas no Aprendizado: A falta de domínio desses conteúdos poderia prejudicar o desenvolvimento dos alunos nas séries seguintes. Ao abordar essas lacunas de forma sistemática, foi possível preencher as defasagens mais críticas, garantindo que os alunos estivessem melhor preparados para enfrentar os novos desafios educacionais.

Como desvantagens apontamos:

1. Suspensão do Conteúdo Programático Atual: Como as 20 aulas de revisão ocorreram durante o tempo previsto para o conteúdo do plano de ensino anual, houve atraso na cobertura dos tópicos programados. O conteúdo de cada série é extenso, e ao perder essas aulas, foi necessário reduzir o tempo destinado a outros temas. Isso comprometeu a profundidade das explicações e a compreensão de certos conteúdos.
2. Explicações Superficiais: Com a redução no tempo disponível para o ensino do conteúdo previsto no plano de ensino, algumas explicações precisaram ser mais rápidas e menos detalhadas. Isso pode resultar em um aprendizado superficial, dificultando a assimilação e a capacidade dos alunos de aplicar o conhecimento de maneira crítica e contextualizada.

É importante destacar que, apesar da perda de 20 aulas no período dedicado ao produto educacional, esse tempo não foi desperdiçado. Após a realização das aulas de revisão, as atividades foram retomadas com a abordagem do conteúdo programático de forma mais concisa, permitindo que o ensino seguisse seu curso de maneira eficiente. Além do que ele parte da premissa de que os conteúdos não aprendidos pelos alunos ao longo das séries anteriores devam ser retomados em momento oportuno quando assim o professor identificar que tais assuntos não formam devidamente compreendido pelos alunos.

4.2 Material didático

Cada aluno recebia apostilas na forma impressa. Como se tratava de se uma zona rural com acesso precário à Internet elas foram disponibilizadas para que fossem usadas em sala e também em casa. Essas apostilas são mostradas na íntegra no Apêndice B na página 85.

Apostila 1: Explora as principais propriedades dos radicais, enfatizando:

- Raiz enésima de uma potência.
- Multiplicação/divisão do índice e expoente.
- Produto de radicandos.

- Divisão de radicandos.
- Potência de uma raiz.
- Raiz de uma raiz.
- Radical como potência fracionária.
- Exercícios de fixação.

Essas propriedades facilitam a simplificação de cálculos envolvendo radicais e são essenciais para o entendimento da radiciação.

Apostila 2: Trata da simplificação de radicais com exemplos práticos, tais como:

- Quando um ou mais fatores do radicando têm o expoente igual ao índice do radical.
- Caso o expoente seja maior que o índice.
- A fatoração do radicando.
- Cálculo de raízes aproximadas.
- Exercícios para praticar.

Em resumo, a Apostila 2 oferece uma abordagem como simplificar radicais, fatorar radicandos e calcular raízes aproximadas.

Apostila 3: Trata dos números irracionais, destacando:

- Diferentes tipos de números irracionais, como raízes não exatas e dízimas não periódicas.
- Exemplos importantes, como os números π (número pi), ϕ (número de ouro) e e (constante de Euler).
- Compara números racionais e irracionais. Com diversos exemplos e exercícios de fixação ao final, ela ilustra a importância dos números irracionais na resolução de problemas que os números racionais não podem resolver.
- Exercícios de fixação.

Em resumo, a Apostila 3 evidencia a propriedades dos números irracionais.

Apostila 4: Trata dos números primos, explica:

- A importância dos números primos e sua relação com o Teorema Fundamental da Aritmética.

- Aplicação dos números primos na criptografia e computação.

- Identificar números primos, começando pela listagem de divisores e utilizando o Crivo de Eratóstenes.

- Demonstra a irracionalidade de qualquer raiz enésima de um número primo.

Em resumo, a Apostila 4 mostra como identificar um número primo e a irracionalidade da raiz de um número primo.

4.3 Vídeos

Os 12 vídeos utilizados são de acesso livre e estavam distribuídos em blocos de 3 vídeos por apostila, conforme a Tabela 5. Os vídeos 1, 2 e 3, referentes à Apostila 1, tinham juntos uma duração de 19 minutos e 54 segundos. Os vídeos 4, 5 e 6, referentes à Apostila 2, somaram 38 minutos e 54 segundos. Os vídeos 7, 8 e 9, correspondentes à Apostila 3, totalizaram 46 minutos e 9 segundos. Já os vídeos 10, 11 e 12, relacionados à Apostila 4, tiveram uma duração total de 41 minutos e 17 segundos.

Esses vídeos foram selecionados com base em seus temas, de modo a complementar o conteúdo abordado nas apostilas. Embora fossem provenientes de diversos canais do YouTube, a proposta não era limitar-se a vídeos exclusivos, mas sim mostrar que existem diferentes formas de aprender, além da explicação do professor. Por isso, os vídeos não eram autorais, permitindo que os alunos desenvolvessem o hábito de pesquisar sobre os temas em diversas fontes de vídeo no YouTube.

Essa abordagem oferece aos alunos a oportunidade de entender o conteúdo por meio de uma perspectiva diferente da apresentada em sala de aula, promovendo um aprendizado mais dinâmico e acessível. A estratégia visa superar possíveis dificuldades de entendimento com o professor habitual, ampliando as formas de aprendizagem e facilitando o acesso ao conhecimento.

Tabela 5 – Vídeos apresentados nas aulas

Propriedades dos radicais	Vídeo 1	Canal	Murakami-Matemática Rapidola
		Temas	Propriedades dos radicais
		Link	Link do vídeo 1
	Vídeo 2	Canal	Gis com Giz
		Temas	Propriedades dos radicais
		Link	Link do vídeo 2
	Vídeo 3	Canal	Dicasdemat Sandro Curió
		Temas	Propriedades dos radicais em 7 minutos
		Link	Link do vídeo 3
Simplificação de radicais	Vídeo 4	Canal	Murakami-Matemática Rapidola
		Temas	Simplificação de radicais
		Link	Link do vídeo 4
	Vídeo 5	Canal	Universo Narrado
		Temas	Como calcular a raiz quadrada
		Link	Link do vídeo 5
	Vídeo 6	Canal	Gis com Giz
		Temas	Extração de fatores no radicando
		Link	Link do vídeo 6
Números irracionais	Vídeo 7	Canal	Universo Narrado
		Temas	Números irracionais o que são?
		Link	Link do vídeo 7
	Vídeo 8	Canal	Professor Ferreto
		Temas	Números Irracionais e Reais
		Link	Link do vídeo 8
	Vídeo 9	Canal	Marcos Aba Matemática
		Temas	Conjunto numéricos
		Link	Link do vídeo 9
Números primos	Vídeo 10	Canal	Gis com Giz
		Temas	Números primos e compostos resumão
		Link	Link do vídeo 10
	Vídeo 11	Canal	Professor Ferretto
		Temas	Número primo ou composto
		Link	Link do vídeo 11
	Vídeo 12	Canal	Gis com Giz
		Temas	Crivo de Erastóstenes
		Link	Link do vídeo 12

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

4.4 Gamificação

A aplicação dos jogos ocorreu após a conclusão das quatro apostilas e vídeos relacionados ao tema. Nesse momento, foi possível observar um elevado interesse dos alunos em revisar os conteúdos discutidos em sala de aula, evidenciando um claro desejo de aprimorar seu desempenho. Esse engajamento reforçou a importância da aprendizagem ativa, onde os estudantes se sentem motivados a aplicar o conhecimento teórico em contextos práticos.

Durante a atividade dinâmica, foram formadas equipes de três alunos por meio de sorteio, que competiram contra outras equipes selecionadas da mesma forma. O objetivo foi incentivar a colaboração e o intercâmbio de ideias. Nas disputas, os alunos não apenas discutiram as respostas às perguntas das fichas, mas também elaboraram estratégias para determinar a melhor posição de suas peças, tanto no jogo da velha em 2D quanto, principalmente, no jogo da velha em 3D, que exigia um raciocínio mais complexo. Essa interação possibilitou a troca de diferentes abordagens e soluções, criando um ambiente de aprendizado colaborativo, dinâmico e interativo.

A experiência demonstrou que o uso de jogos pode ser uma ferramenta eficaz para consolidar o aprendizado, estimulando não apenas o raciocínio lógico, mas também habilidades sociais e de trabalho em equipe.

Em resumo, a utilização dos jogos funcionou como um catalisador para a revisão dos conteúdos, criando um ambiente colaborativo, como ilustrado na Figura 5. Esse ambiente estimulou a discussão e a formulação de estratégias, elementos fundamentais para o sucesso tanto no jogo da velha em 2D quanto no 3D.

Figura 5 – Jogo da velha 2D e 3D

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Os dois jogos foram elaborados com perguntas sobre radiciação e suas propriedades, simplificação de radicais, números irracionais e números primos, apresentadas no formato de quiz com três opções de resposta. Essa metodologia interativa não só tornou o aprendizado mais dinâmico, mas também permitiu que os alunos se envolvessem ativamente com o conteúdo de uma maneira prazerosa e estimulante.

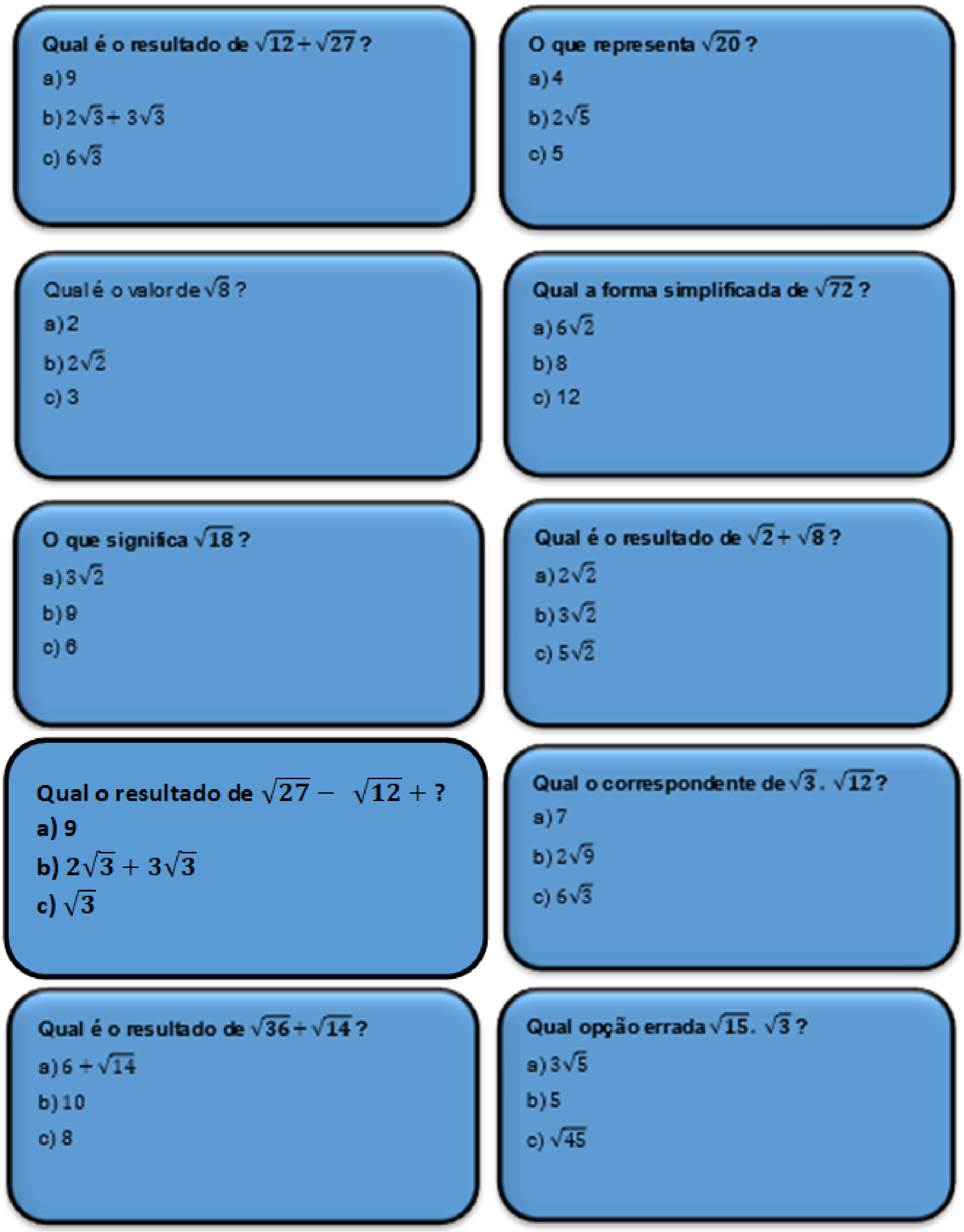
Durante as atividades, foi utilizado feedback contínuo para identificar áreas que precisavam de mais esclarecimento. Esse retorno foi essencial para ajustar as abordagens pedagógicas, assegurando que cada aluno recebesse o apoio necessário para avançar. A análise das respostas e do nível de participação permitiu perceber quais conceitos estavam dominados e quais apresentavam dificuldades, possibilitando a adaptação do conteúdo e das explicações em tempo real. A seguir, são apresentados alguns exemplos das questões utilizadas no quiz, conforme ilustrado nas Figuras 6 e 7.

Como evidenciado nas questões dessas figuras, as perguntas foram formuladas de maneira clara e objetiva, com o objetivo de avaliar os conhecimentos adquiridos durante as aulas. Elas não servem apenas como uma revisão do conteúdo, mas também oferecem uma oportunidade para que os alunos coloquem em prática o que aprenderam, estimulando o raciocínio crítico e a reflexão. Além disso, a estrutura das questões promove uma competição saudável, incentivando o engajamento dos alunos e a participação ativa no processo de aprendizagem.

O quiz foi integrado ao jogo da velha, com um total de 100 perguntas distintas, com a finalidade de testar o conhecimento sobre as apostilas de maneira lúdica e interativa. Cada ficha do jogo continha uma pergunta com três alternativas, sendo uma delas correta. Ao responder corretamente, o aluno tinha direito de realizar uma jogada no tabuleiro; se errasse, a vez passava para o adversário. Essa abordagem não apenas tornou o aprendizado mais envolvente e divertido, mas também reforçou a ideia de que o aprendizado é mais eficaz quando aliado a atividades que incentivam a competição amigável, o trabalho em equipe e o pensamento estratégico.

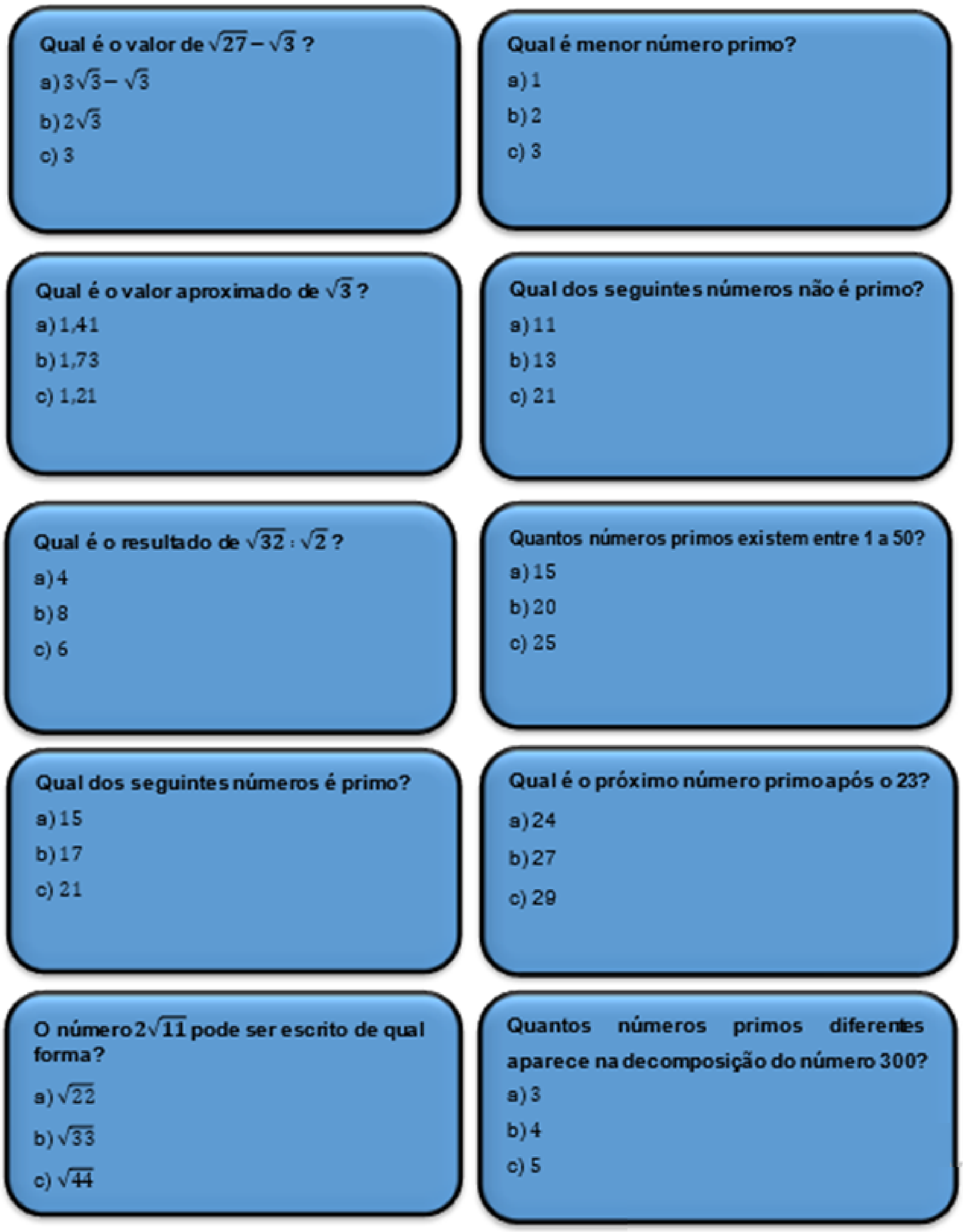
Dessa forma, a combinação de um jogo clássico com elementos educativos ajuda a criar uma atmosfera mais envolvente e motivadora, favorecendo a retenção do conteúdo e a aplicação prática do que foi estudado.

Figura 6 – Questões do quiz 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Figura 7 – Questões do quiz 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

O jogo da velha, tanto na versão 2D quanto na 3D, foi escolhido por ser uma atividade simples, divertida e intuitiva, que facilitou o engajamento dos participantes. No entanto, para potencializar o aprendizado, foi inserido um questionário no formato de quiz, conforme as Figuras 6 e 7 a cada jogada, com perguntas baseadas nas apostilas utilizadas nas aulas. Esse acréscimo tornou a experiência mais dinâmica e enriquecedora, pois os alunos precisavam responder a questões relacionadas aos temas abordados nas apostilas, o que não só incentivou o raciocínio lógico e a revisão do conteúdo, mas também trouxe um espírito de competição saudável. A exigência de responder corretamente a cada pergunta antes de fazer a jogada aumentou significativamente o interesse e a motivação dos participantes, que, mesmo diante de dúvidas, se empenharam em buscar as respostas certas para não comprometer sua performance no jogo. Essa abordagem contribuiu para consolidar o conhecimento de forma prática e divertida, proporcionando uma forma envolvente de revisar e fixar os conceitos abordados nas aulas, além de estimular a aprendizagem colaborativa e a busca ativa pelo conhecimento.

Regras do Jogo da Velha 2D

O jogo da velha usado (Figura 8) é um jogo simples e popular que envolve dois jogadores, geralmente simbolizados por um “X” e um “O”. O objetivo é marcar três símbolos consecutivos, seja na horizontal, vertical ou diagonal, em uma grade 3×3. Apesar de sua simplicidade, o jogo estimula o raciocínio lógico e estratégico, sendo uma ótima opção para exercitar a mente e se divertir de maneira rápida e dinâmica. O jogo da velha é amplamente conhecido em todo o mundo, sendo uma das formas mais antigas e acessíveis de entretenimento, ideal para todas as idades e fácil de ser jogado em qualquer lugar, apenas com papel e caneta.

Figura 8 – Jogo da velha 2D

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Material Necessário.

- Um tabuleiro de 3×3 dividido em três linhas e três colunas.
- Dois jogadores, que escolherão seus símbolos: um será “X” e o outro “O”.
- Fichas de perguntas de múltipla escolha, com um total de 100 perguntas com três opções de respostas separadas por fichas, que abordam propriedades das raízes, números irracionais e números primos.

Como Jogar.

1. Início do Jogo.
    - O jogo começa com o tabuleiro vazio.
    - Os jogadores decidem quem inicia (pode ser por sorteio ou escolha).
    - Selecionam 9 fichas das 100 opções de perguntas sem olhar e as posicionam no tabuleiro.
2. Turnos.
    - Os jogadores se alternam em turnos com tempo de 30 segundos para responder a fichas selecionada do quiz.
    - No seu turno, um jogador deve marcar seu símbolo (X ou O) em uma das 9 casas disponíveis, apenas se responder corretamente à pergunta da ficha correspondente à casa desejada.
    - É necessário que um professor de Matemática ou alguém com conhecimento em cálculos verifique a resposta dada está correta, para então ser permitida a colocação do símbolo dele no jogo, caso haja um erro na resposta essa chance e passada ao adversário.
3. Condições de Vitória.
    - O jogo termina quando um dos jogadores alinha três de seus símbolos:
    - Horizontalmente (em uma das três linhas).
    - Verticalmente (em uma das três colunas).
    - Diagonalmente (em uma das duas diagonais do tabuleiro).
    - O jogador que conseguir isso primeiro é declarado o vencedor.
4. Empate.
    - Se todas as 9 casas do tabuleiro forem preenchidas e nenhum jogador conseguiu alinhar três símbolos, o jogo termina em empate.

Jogo da velha 3D.

O Jogo da Velha em 3D (Figura 9) é uma versão moderna e inovadora do clássico jogo, que adiciona uma camada extra de complexidade e diversão. Enquanto no formato tradicional o tabuleiro é limitado a uma grade 3×3 bidimensional, com dois jogadores. No Jogo da Velha em 3D o tabuleiro é expandido para três camadas, criando um cubo 3×3×3, onde podem jogar 3 jogadores. O objetivo permanece o mesmo: formar uma linha com três símbolos consecutivos, mas agora essa linha pode ser feita não apenas nas direções horizontais, verticais ou diagonais tradicionais, mas também ao longo das diferentes camadas do cubo. Essa versão desafia ainda mais a lógica e a estratégia dos jogadores, tornando o jogo mais envolvente e estimulante. Ideal para quem busca uma experiência mais desafiadora do jogo 2D pois o jogador terá que observar 15 planos distintos onde podemos fazer um alinhamento em mais de um plano ao mesmo tempo, o Jogo da Velha em 3D traz uma nova dinâmica que pode ser jogada tanto de forma digital quanto física, oferecendo novas possibilidades e tornando o jogo ainda mais emocionante.

A principal diferença entre o Jogo da Velha em 2D e 3D está na forma como o tabuleiro é organizado e na complexidade das jogadas possíveis.

1. Jogo da velha 2D: É o modelo clássico que todos conhecemos. O tabuleiro é composto por uma grade 3×3, onde dois jogadores alternam marcando X e O nas casas. O objetivo é alinhar três símbolos (horizontalmente, verticalmente ou diagonalmente) para vencer. O jogo é simples e possui um número limitado de estratégias.

2. Jogo da velha 3D: Nesse caso, o tabuleiro não é mais uma simples grade plana, mas um espaço tridimensional. A versão mais comum utiliza várias camadas de tabuleiros 2D empilhados. Normalmente, são 3 tabuleiros de 3×3, formando uma estrutura 3×3×3. Os jogadores podem fazer movimentos em qualquer uma das camadas, e o objetivo continua sendo alinhar três símbolos, mas agora no espaço tridimensional, o que adiciona uma camada extra de estratégia e complexidade.

Enquanto o jogo da velha 2D é relativamente simples e rápido, o 3D exige mais raciocínio e planejamento, já que o número de combinações possíveis aumenta significativamente.

O jogo da velha em 2D foi utilizado principalmente para compreender as dinâmicas que seriam aplicadas no quiz, por ser um jogo intuitivo e de fácil compreensão. Dessa forma, conseguimos estabelecer uma base sólida antes de avançar para o jogo da velha 3D.

Figura 9 – Jogo da velha 3D

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Material Necessário.

- Um tabuleiro de 3×3×3 (pode ser feito de acrílico ou madeira).
- Para dois jogadores, cada um usa 14 bolinhas; para três jogadores, cada um usa 9 bolinhas.
- Fichas de perguntas de múltipla escolha, totalizando 100, sobre propriedades das raízes, números irracionais e números primos.
- Materiais: tabuleiros de acrílico fosco, 37 bolinhas de acrílico cristal colorido (duas cores com 14 bolinhas cada e uma cor com 9 bolinhas), hastes de metal.

Como Jogar.

1. Início do Jogo.
    - O jogo começa com o tabuleiro vazio.
    - Os jogadores decidem quem inicia (pode ser por sorteio ou escolha).
    - Cada jogador pega uma ficha de perguntas sem olhar e deve respondê-la; se a resposta estiver correta, ele pode colocar sua bolinha em qualquer espaço não ocupado no tempo máximo de 30 segundos. Caso ele erre e passado a vez para o outro jogador.

2. Turnos.

    - Os jogadores se alternam em turnos.
    - No seu turno, um jogador deve marcar sua bolinha (azul, verde ou branca) em uma das 27 casas disponíveis, respondendo corretamente à pergunta da ficha que pegou.
    - É necessário que um professor de Matemática ou alguém com conhecimento em cálculos verifique a resposta dada.

3. Condições de Vitória.

    - O jogo termina quando todas as 27 bolinhas forem colocadas. O vencedor é aquele que tiver feito o maior número de alinhamentos: três elementos da sua cor em qualquer posição (horizontal, vertical ou inclinada).

4. Empate.

    - Se houver empate na contagem de alinhamentos, considera-se que o jogo termina em empate.

5 Discussão dos resultados propostos

5.1 Análise dos resultados do material didático e das apostilas

Os resultados obtidos no trabalho educacional realizado com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e o 1º, 2º e 3º do Ensino Médio demonstram que, quando há um planejamento e uma organização adequados, é possível alcançar bons resultados, mesmo com estudantes que apresentam dificuldades de aprendizado. A utilização de discussões em grupo se mostrou uma ferramenta essencial, permitindo que os alunos trocassem ideias, esclarecessem dúvidas e compreendessem melhor os conceitos trabalhados. Além disso, as apostilas, estruturadas de forma gradual e com exercícios focados em temas específicos, desempenharam um papel crucial na retenção do conhecimento, permitindo que os alunos alcançassem os objetivos propostos com mais eficácia.

Figura 10 – Comparação das apostilas

	Vantagens	Desvantagens	Feedback discente	Feedback docente
Apostila 1	Focado direto ao tema	Só vantagens	Bem didática	Deveria ter mais aulas
Apostila 2	Focado direto ao tema	Só vantagens	Achavam difícil	Deveria ter mais aulas
Apostila 3	Focado direto ao tema	Só vantagens	Poucos conheciam	Deveria ter mais aulas
Apostila 4	Focado direto ao tema	Só vantagens	Demonstração difícil	Deveria ter mais aulas

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Conforme ilustrado na Figura 10, os resultados apontam que as apostilas ofereceram vantagens significativas, especialmente considerando que se tratava de um material impresso destinado a uma zona rural, onde o acesso à internet é limitado. A simplicidade e praticidade desse formato foram particularmente valorizadas pelos alunos, que puderam acessar o conteúdo sem depender de recursos digitais. No entanto, observou-se que, embora o material tenha sido eficaz, muitos alunos sentiram que o ritmo de transição entre os temas foi muito rápido, sugerindo a necessidade de mais tempo para absorver o conteúdo de maneira mais profunda e realizar mais exercícios de revisão.

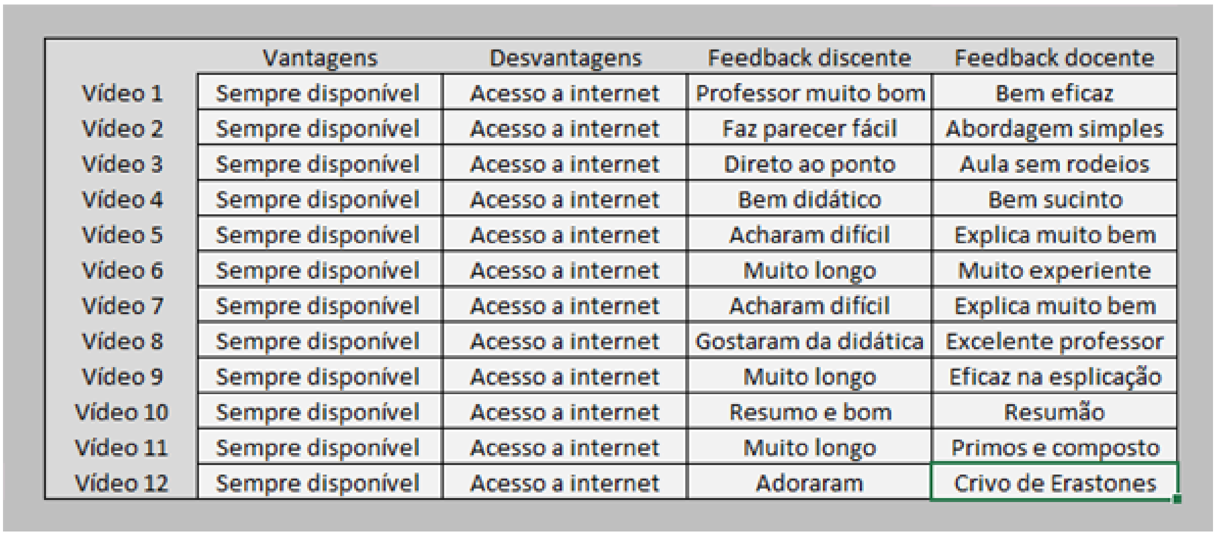
Os alunos demonstraram grande apreço pelo formato direto e objetivo das apostilas, que abordavam os tópicos de maneira clara, sem rodeios. Na primeira apostila, a maioria dos alunos se recordava bem do conteúdo, evidenciando um bom nível de familiaridade com os temas abordados. Porém, na segunda apostila, muitos consideraram o conteúdo mais desafiador, mencionando que não haviam sido adequadamente preparados em aulas anteriores. Na terceira apostila, o cenário foi ainda mais desafiador, pois muitos alunos sequer conheciam o conteúdo abordado. Já na quarta apostila, os alunos conseguiram compreender de maneira satisfatória a definição de números primos e a metodologia para identificá-los. Contudo, a seção que tratava da demonstração da irracionalidade de um número primo causou certa confusão entre os estudantes. Embora a maioria tenha entendido o conceito de irracionalidade de forma geral, a demonstração em si gerou um nível considerável de perplexidade, indicando que a complexidade da prova talvez exigisse uma abordagem mais gradual.

Portanto, os resultados sugerem que, embora o material tenha sido eficaz na maior parte do tempo, ajustes são necessários para garantir que os alunos tenham mais tempo para se aprofundar nas questões mais complexas, especialmente em conteúdos que envolvem conceitos mais abstratos e desafiadores.

5.2 Análise dos resultados dos vídeos

Em cada aula, foram inseridos três vídeos distintos que abordavam tópicos presentes nas apostilas. Essa abordagem proporcionou um aumento significativo na confiança dos alunos, que passaram a se sentir mais capazes de aprender e aplicar o conteúdo. Uma das grandes vantagens observadas foi que, com o uso dos vídeos, os estudantes puderam buscar outros vídeos complementares caso não tivessem compreendido algum tema específico. Além disso, a possibilidade de dar pausas, voltar a partes do vídeo ou até ajustar a velocidade de reprodução tornou o processo de aprendizagem mais dinâmico e flexível, o que não seria possível em uma aula presencial.

Figura 11 – Comparação dos vídeos



	Vantagens	Desvantagens	Feedback discente	Feedback docente
Vídeo 1	Sempre disponível	Acesso a internet	Professor muito bom	Bem eficaz
Vídeo 2	Sempre disponível	Acesso a internet	Faz parecer fácil	Abordagem simples
Vídeo 3	Sempre disponível	Acesso a internet	Direto ao ponto	Aula sem rodeios
Vídeo 4	Sempre disponível	Acesso a internet	Bem didático	Bem sucinto
Vídeo 5	Sempre disponível	Acesso a internet	Acharam difícil	Explica muito bem
Vídeo 6	Sempre disponível	Acesso a internet	Muito longo	Muito experiente
Vídeo 7	Sempre disponível	Acesso a internet	Acharam difícil	Explica muito bem
Vídeo 8	Sempre disponível	Acesso a internet	Gostaram da didática	Excelente professor
Vídeo 9	Sempre disponível	Acesso a internet	Muito longo	Eficaz na esplicação
Vídeo 10	Sempre disponível	Acesso a internet	Resumo e bom	Resumão
Vídeo 11	Sempre disponível	Acesso a internet	Muito longo	Primos e composto
Vídeo 12	Sempre disponível	Acesso a internet	Adoraram	Crivo de Erastones

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Entre as principais vantagens dos vídeos, destaca-se o fato de estarem disponíveis a qualquer momento, permitindo que os alunos assistissem ao conteúdo sempre que necessário, e tantas vezes quanto desejassem. Essa flexibilidade foi particularmente valiosa, pois ofereceu aos estudantes a autonomia para estudar no seu próprio ritmo, algo que é frequentemente restrito em ambientes de ensino tradicionais. No entanto, apesar das vantagens evidentes, um desafio significativo foi a dependência de uma internet de qualidade limitada, especialmente em áreas rurais. A baixa qualidade do sinal e a alta demanda dos alunos para ajudar nas tarefas domésticas e nos trabalhos das chácaras frequentemente deixavam os estudantes sem tempo suficiente para rever os vídeos ou dedicar-se ao estudo, limitando o impacto positivo dessa ferramenta.

A Figura 11 ilustra os *feedbacks* recebidos tanto dos alunos quanto do docente sobre a utilização dos vídeos. No entanto, é importante ressaltar que, embora os vídeos selecionados tenham sido relevantes para o aprendizado, o mais importante foi a habilidade dos alunos em se tornarem autodidatas, aprendendo a selecionar e buscar vídeos que se alinhassem ao seu próprio estilo de aprendizagem. Percebeu-se que o aprendizado é um processo individual, e o que funciona bem para um aluno pode não ser tão eficaz para outro. Portanto, incentivar os alunos a desenvolverem sua capacidade de escolher vídeos com base em suas necessidades e afinidades didáticas foi uma das lições mais valiosas do projeto.

Adicionalmente, ao permitir que os alunos tomassem controle sobre seu próprio processo de aprendizagem, os vídeos também fomentaram a autonomia e a responsabilização pelo próprio estudo. Essa habilidade de aprender de forma independente pode ser crucial para o futuro acadêmico dos estudantes, especialmente em um contexto de ensino cada vez mais digital e autônomo.

5.3 Análise dos resultados da Gamificação

Ao final de 16 aulas, que combinaram o uso das apostilas e o auxílio de vídeos, os alunos participaram de jogos interativos que abordavam temas como propriedades das raízes, números primos e irracionais. Esses jogos proporcionaram uma aprendizagem mais dinâmica e envolvente. A interação durante os jogos foi notável, e o formato lúdico teve um papel fundamental na consolidação do conhecimento adquirido, permitindo que os alunos aplicassem os conceitos de maneira prática e divertida.

A utilização de jogos e quizzes foi muito bem recebida tanto pelos alunos quanto pela instituição, gerando grande interesse e motivação entre os estudantes. Essa abordagem inovadora não só incentivou a participação ativa, mas também ajudou a aumentar o engajamento dos alunos nas atividades, tornando o aprendizado mais significativo e prazeroso.

Figura 12 – Comparação dos jogos

	Vantagens	Desvantagens	Feedback discente	Feedback docente
Jogo 2D	Fácil acesso	Não tem	Quiz virtual	Quiz virtual
Jogo 3D	Mais possibilidades	Difícil acesso	Poderia ser virtual	Poderia ser virtual

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Conforme ilustrado na Figura 12, podemos observar que o jogo da velha em 2D apresentou enormes vantagens pela sua simplicidade, bastando apenas papel e caneta para que os alunos pudessem jogar. Sua acessibilidade foi um ponto forte, permitindo que todos participassem sem depender de recursos tecnológicos. No entanto, o jogo da velha em 3D, apesar de ser mais emocionante e desafiador, apresentou algumas desvantagens. A principal delas foi a dificuldade de encontrá-lo, já que poucos conhecem esse formato e é raro encontrá-lo disponível para compra. Porém, uma vez acessado, o jogo em 3D proporcionou uma experiência mais estratégica, exigindo dos jogadores um nível maior de raciocínio e planejamento, o que o tornou mais envolvente.

Uma sugestão que surgiu a partir dos feedbacks dos alunos e do docente foi a criação de um quiz virtual para ser integrado aos jogos. A ideia de ter um sistema de respostas automáticas, em que o aplicativo informasse ao aluno se a resposta estava correta ou errada sem a necessidade de um professor intermediário, foi muito comentada. Isso não só facilitaria o processo, como também permitiria que os alunos praticassem de maneira mais autônoma e independente. Além disso, um quiz virtual poderia ser ajustado para incluir diferentes níveis de dificuldade, oferecendo um desafio mais personalizado para cada estudante.

Outro ponto que foi discutido foi a limitação relacionada à falta de tabuleiros físicos para o jogo da velha. Para superar esse obstáculo, sugeriu-se a criação de uma versão virtual do jogo, o que, além de resolver o problema de acesso ao material, proporcionaria uma experiência inovadora e desafiadora. Criar um jogo da velha virtual seria não apenas uma solução prática, mas também um grande desafio para os alunos, estimulando o uso de tecnologias e ampliando suas habilidades digitais.

Em suma, a gamificação se mostrou uma estratégia altamente eficaz para engajar os alunos, tornando o aprendizado mais interativo e estimulante. A implementação de jogos e quizzes, aliada a melhorias como a criação de versões virtuais, pode potencializar ainda mais o impacto dessa abordagem no processo de ensino-aprendizagem.

5.4 Análise dos resultados das diagnósticas

Antes de iniciar o processo educacional, foi aplicada a Diagnóstica 1 na primeira aula, com o objetivo principal de avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre os conteúdos que seriam abordados ao longo das aulas. Ao final do ciclo de ensino, foi realizada a Diagnóstica 2 para comparar o aprendizado adquirido durante o período de instrução. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 13.

Figura 13 – Resultados da diagnóstica 1 e da diagnóstica 2

Séries	Porcentagem de acertos da Diagnóstica 1			
	Apostila 1	Apostila 2	Apostila 3	Apostila 4
9° ano	45,43%	40,90%	43,18%	38,63%
1° ano	56,00%	42,00%	38,00%	47,00%
2° ano	77,08%	62,50%	47,91%	52,08%
3° ano	71,42%	60,71%	48,21%	51,78%

Séries	Porcentagem de acertos da Diagnóstica 2			
	Apostila 1	Apostila 2	Apostila 3	Apostila 4
9° ano	72,72%	65,90%	59,09%	65,90%
1° ano	88,00%	84,00%	79,00%	91,005
2° ano	83,33%	81,25%	75,00%	85,41%
3° ano	89,28%	80,35%	76,78%	94,64%

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Após a aplicação da Diagnóstica 1, os alunos relataram, de forma geral, que não se lembravam completamente dos conteúdos abordados ou que haviam esquecido grande parte das informações que haviam aprendido anteriormente. Isso resultou em um desempenho insatisfatório para a maioria, refletindo as lacunas de conhecimento antes do início do processo educacional.

Como mostrado na Figura 13, as avaliações foram organizadas de acordo com as apostilas, sendo que cada apostila foi dividida em quatro questões, totalizando 12 questões no total. Na Diagnóstica 1, os resultados mostraram que, para o 9º ano, a maior defasagem de aprendizado estava relacionada à Apostila 4, enquanto para os alunos do 1º, 2º e 3º anos, a Apostila 3 foi a que gerou mais dificuldades. Esse panorama reflete a necessidade de reforçar esses conteúdos desde o início do trabalho educacional.

Na Diagnóstica 2, a maior dificuldade identificada foi unânime: todos os alunos apresentaram maiores dificuldades relacionadas ao conteúdo da Apostila 3, especificamente sobre números irracionais. No entanto, observou-se uma evolução significativa nos resultados comparados à Diagnóstica 1, como pode ser visto na Figura 14.

Figura 14 – Evolução do aprendizado dos alunos

Séries	Evolução do aprendizado			
	Apostila 1	Apostila 2	Apostila 3	Apostila 4
9° ano	27,27%	25,00%	15,91%	27,27%
1° ano	32,00%	42,00%	41,00%	44,00%
2° ano	6,25%	18,75%	27,09%	33,33%
3° ano	17,86%	19,64%	28,57%	42,86%

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A turma que demonstrou o melhor desempenho foi a do 1º ano, que alcançou um aumento notável de 44% no conhecimento relacionado à Apostila 4. Esse ganho representa uma grande conquista, pois antes do início do processo educacional os alunos estavam abaixo da média no entendimento desse conteúdo. O aumento no desempenho da turma reflete o impacto positivo da metodologia aplicada, especialmente ao proporcionar uma abordagem mais interativa e personalizada para os alunos.

Em suma, as análises das diagnósticas revelaram que, embora houvesse uma defasagem significativa de conhecimento no início, o processo educacional ajudou os alunos a superar essas dificuldades de maneira consistente. A evolução dos resultados demonstrou que, com o apoio adequado e a utilização de diferentes estratégias de ensino, é possível promover um aprendizado substancial e eficaz, especialmente quando os alunos são incentivados a se envolver ativamente no processo.

Além disso, as dificuldades identificadas nas diagnósticas destacam a importância de estratégias de ensino que abordem as lacunas de aprendizado de forma mais personalizada, garantindo que os alunos possam avançar no conteúdo com confiança e segurança. A continuidade da aplicação de diagnósticas, aliada ao monitoramento contínuo do progresso, pode ser uma ferramenta poderosa para adaptar o ensino às necessidades de cada aluno e promover melhores resultados educacionais no futuro.

6 Considerações Finais

O objetivo central desta dissertação foi investigar a relação entre as raízes enésimas de números primos e os números irracionais, analisando suas propriedades e implicações educacionais por meio de demonstrações autorais da raiz enésima de números primos e irracionais. Essas demonstrações basearam-se em teoremas clássicos presentes na literatura matemática, como a irracionalidade da raiz quadrada de 2 e a partir disso foi feita uma demonstração autoral para a raiz enésima de um primo, conforme visto no Teorema 3.6. Adaptando os conceitos o autor elaborou um estudo sobre a raiz de números compostos que não sejam enésimos perfeitos, de acordo com a Seção 3.2.

Adicionalmente, foi explorada a relação entre a forma de potência com expoente fracionário irredutível e a irracionalidade do número resultante, o que pode ser generalizado para as raízes de quaisquer números racional. A raiz enésima de um número racional, com índice n e radicando racional de expoente m, apresentou algumas restrições importantes, dependendo de n ser par ou ímpar, especialmente quando não se trata de enésimos perfeitos. Essas abordagens teóricas e suas aplicações contribuem para uma compreensão mais profunda do comportamento das raízes enésimas e sua conexão com os números irracionais, oferecendo também importantes implicações pedagógicas para o ensino de conceitos avançados de Matemática.

O estudo buscou não apenas explorar a natureza Matemática dessas relações, mas também investigar como as múltiplas estratégias pedagógicas podem contribuir para o ensino desses conceitos de maneira mais acessível e engajante. Em particular, o trabalho procurou entender como recursos, nomeadamente, apostilas, vídeos e gamificação poderiam ser aplicados para facilitar a compreensão dos estudantes, especialmente em um contexto de ensino rural, onde os desafios pedagógicos e a disponibilidade de materiais podem ser limitados.

Os resultados obtidos confirmaram a irracionalidade das raízes enésimas de números primos, alinhando-se com as teorias matemáticas clássicas e corroborando o entendimento tradicional sobre o tema. No entanto, o foco principal da pesquisa esteve na análise do impacto das estratégias pedagógicas que aplicadas ao produto educacional se mostraram essenciais para o avanço no entendimento dos alunos. A utilização de múltiplos recursos, como apostilas detalhadas, vídeos explicativos e gamificação, demonstrou grande potencial para engajar os estudantes e tornar o aprendizado mais efetivo. A comparação dos questionários aplicados antes e depois das atividades revelou um avanço significativo no nível de compreensão dos alunos, com destaque para a maior segurança e agilidade nas respostas ao longo do tempo.

Esse avanço não só reforçou a eficácia das abordagens pedagógicas no ensino de Matemática, mas também indicou a importância de integrar métodos diversificados que atendam a diferentes estilos de aprendizagem. A combinação de estratégias como de uma aprendizagem multimodal e os conceitos de gamificação foram eficazes para promover um aprendizado mais dinâmico e significativo. Além disso, as atividades de resolução de problemas e a adaptação de teoremas clássicos dentro de uma abordagem prática contribuíram para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos estudantes.

Portanto, o trabalho não apenas validou a irracionalidade das raízes enésimas de números primos, mas também demonstrou como a aplicação de múltiplas estratégias pedagógicas pode ser uma ferramenta poderosa no ensino de conceitos matemáticos complexos. O estudo conclui que, ao integrar teoria Matemática com práticas educacionais diferentes, é possível não apenas aprimorar o entendimento de tópicos desafiadores, mas também promover uma educação mais inclusiva e engajante, capaz de atender a diferentes necessidades de aprendizagem, como observando no contexto rural.

Uma possível contribuição futura deste trabalho pode ser abordar as estratégias pedagógicas múltiplas com o uso de recursos tecnológicos, como plataformas de aprendizagem interativas aliadas a jogos digitais, que permitam uma exploração mais profunda e visual dos conceitos matemáticos, com um *feedback* mais dinâmico e personalizado.

Referências

ALENCAR, R. *Como encontrar Números Primos? O crivo de Eratóstenes.* 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=TepGr4eQGkY>. Acesso: 09 jan. 2025. Citado na página 99.

ANDERSON, C. A. *Learning and the learner*: The impact of cognitive theories on the development of instructional practices. Oxford: Oxford University Press, 2002. Citado na página 24.

ASTH, R. C. *Conjuntos Numéricos*. 2021. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/conjuntos-numericos/>. Acesso: 02 jan. 2025. Citado na página 33.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2021. Citado na página 49.

EUCLIDES. *Os elementos*: Coleção projeto euclides. São Paulo: Unesp, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

FIGUEIREDO, D. G. de. *Números Irracionais e Transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 49.

GEE, J. P. *What video games have to teach us about learning and literacy*. Rev. and updatet ed. New York: Palgrave Macmillan, 2008. Citado na página 23.

GIOVANNI, J. R.; BONJONRO, J. R. *Matemática*: Conjuntos, funções e trigonometria - 2° grau. São Paulo: FTD, 1992. v. 1. Citado na página 85.

GUSMÃO, G. *Por que a descoberta do maior número primo importa?*: Revista exame. 2002. Disponível em: <https://exame.com/ciencia/por-que-a-descoberta-do-maior-numero-primo-da-historia-importa/>. Acesso: 05 fev. 2025. Citado na página 33.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar*: Logaritmos. São Paulo: Atual, 2013. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar*: Conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 2013. v. 1. Citado na página 32.

JÚNIOR, F. F. *Números Primos*. Novo Hamburgo: 2024. Disponível em: <https://descompliqueamatematica.com.br/numeros-primos/#google_vignette.>. Acesso: 09 jan. 2025. Descomplique a Matemática. Citado na página 99.

KLEIN, T. A. da S.; LABURú, C. E. Multimodos de representação e teoria da aprendizagem significativa. *Revista Ensaio*, Belo Horizonte, v. 14, n. 02, p. 137–152, 2012. Citado na página 23.

KRIKORIAN, J.; GRESPAN, M. *Livros do Colégio Ojetivo*: Matemática - Álgebra, trigonometria e geometria plana. Objetivo, 2016. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 31.

LIMA, E. L. *Curso de Análise Real*: Coleção projeto euclides. 15. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

LIMA, F. Éder Andrade de. *Números primos e algumas curiosidades histórica da proposição infinita de euclides ao crivo de Eratóstenes*. 2024. 11 p. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/121>. Acesso: 01 jan. 2025. Citado na página 22.

MARCIANO, E. *Conjuntos numéricos*. 2020. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/conjuntos-numericos/>. Acesso: 05 jan. 2025. Citado na página 33.

MARQUES, D. *Teoria dos Números Transcedentes*: Coleção textos universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 34, 35, 36 e 37.

MAYER, R. E. *Multimedia learning*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. Citado na página 23.

MORENO, R. *Multimedia learning*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 23.

NETO, A. A. *Noções de Matemática*: Logaritmos. Fortaleza: Vestseller, 2013. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 31.

NEVES, G. *Como calcular qualquer raiz sem calculadora*: Estratégia concursos. 2020. Disponível em: <https://www.estrategiaconcursos.com.br/blog/como-calcular-qualquer-raiz-sem-calculadora/>. Acesso: 05 jan. 2025. Citado na página 30.

NIVEN, I. *Números*: racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 48.

O'CONNOR, J.; ESTATíSTICA, E. R. E. de Matemática e. *Charles Hermite*. Escócia: 2001. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hermite/>. Acesso: 06 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 34.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Carlos Luís Ferdinando von Lindemann*. Escócia: 2001. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hermite/>. Acesso: 06 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 34.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Aleksandr Osipovich Gelfond*. Escócia: 2005. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gelfond/>. Acesso: 05 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 21.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Theodor Schneider*. Escócia: 2011. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schneider/>. Acesso: 06 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 21.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Axel Thue*. Escócia: 2014. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thue/>. Acesso: 06 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 26.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Joseph Raphson*. Escócia: 2017. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Raphson/>. Acesso: 06 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 29.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Hillel Furstenberg*. Escócia: 2023. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Furstenberg/>. Acesso: 06 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 26.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Paul Erdős*. Escócia: 2023. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Erdos/>. Acesso: 06 fev. 2025. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews. Citado na página 26.

PARO, J. *Teorema Fundamental da Aritmética - TFA*. 2016. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica/#:~:text=O%20Teorema%20Fundamental%20da%20Aritm%C3%A9tica,1801%2C%20na%20obra%20Disquisitiones%20Arithmeticae.&text=Todo%20n%C3%BAmero%20natural%20maior%20do,como%20produto%20de%20fatores%20primos.>. Acesso: 04 jan. 2025. Citado na página 26.

PEREIRA, P. C. A. *Números Primos são infinitos*: Demonstração fácil. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=j7RWqTt9BKE>. Acesso: 04 jan. 2025. Citado na página 26.

PERRENOUD, P. *Avaliação*. Cambridge: Artmed, 2000. Citado na página 24.

POMBO, O. *Os elementos de Euclides*. Lisboa: [s.n.], 2002. Disponível em: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/euclides/elementoseuclides.htm>. Acesso: 09 jan. 2025. Citado na página 25.

POSSANI, C. *Uma demonstração Geométrica de que Raiz de 2 é Irracional*. 2000. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/57/3.htm>. Acesso: 07 jan. 2025. Citado na página 40.

POSSANI, C. *Por que a raiz quadrada de 4 não é ± 2*. 2022. Disponíveel em: <https://www.youtube.com/watch?v=hSPX5UV-uEQ>. Acesso: 02 jan. 2025. Nenhuma citação no texto.

RIBENBOIM, P. *Números Primos*: Velhos mistérios e novos recordes - coleção universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.

ROQUE, T. *História da Matemática*. São Paulo: Zahar, 2012. Citado na página 22.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de História da Matemática*: Coleção profmat. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 21, 39 e 48.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico*: Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Person, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

SANTOS, J. P. de O. *Introdução à Teoria dos Números*: Coleção matemática universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

SAUTOY, M. du. *A música dos números primos*: A história de um problema não resolvido na matemática. Rio de Janeiro: Zahar, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Algebra Linear*. São Paulo: Pearson, 2012. Citado na página 35.

STEWART, I. *O fantástico mundo dos Números*: A matemática do zero a infinito. Rio de Janeiro: Zahar, 2016. Citado na página 21.

VAINDINER, T. B. e R. *Como calcular qualquer raiz sem calculadora*. 2019. Disponível em: <https://aventurasnahistoria.com.br/noticias/almanaque/pitagoras-nao-criou-o-teorema-de-pitagoras.phtml>. Acesso: 05 jan. 2025. Citado na página 39.

VIEGAS, G. *Por que Pitágoras matou Hipaso?* Escócia: 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=vSh__PVXOpU>. Acesso: 06 fev. 2025. Citado na página 39.

VIRTUOUS. *Bernhard Riemann*. 2025. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/riemann.php>. Acesso: 05 fev. 2025. Só matemática. Citado na página 33.

VIRTUOUS. *David Hilbert*. 2025. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/hilbert.php>. Acesso: 05 fev. 2025. Só matemática. Citado na página 33.

VIRTUOUS. *Isaac Newton*. 2025. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/newton.php>. Acesso: 05 fev. 2025. Só matemática. Citado na página 29.

VIRTUOUS. *Leonhard Euler*. 2025. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schneider/>. Acesso: 05 fev. 2025. Só matemática. Citado na página 25.

WASHINGTON, L. C. *Curriculum Vitae*. 2024. Disponível em: <https://www.math.umd.edu/~lcw/vita.pdf?form=MG0AV3>. Acesso: 06 fev. 2025. Citado na página 26.

Apêndices

APÊNDICE A – Plano de Ensino

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
COORDENAÇÃO REGIONAL DE ENSINO DE BRAZLÂNDIA
CENTRO EDUCACIONNAL 04 DE BRAZLÂNDIA

PROFESSOR: *Renato Gonçalves da Fonseca*	DISCIPLINA: *Matemática*

Plano de Ensino

Cronograma para 9º ano e 1º, 2º e 3º do Ensino Médio.

Aula	Atividades
1	Aplicar questionário diagnóstico 1 com 12 questões sobre o tema.
2	Estudar as propriedades dos radicais ou propriedades das raízes.
3	Assistir aos vídeos 1, 2 e 3.
4	Realizar debates.
5	Resolver questões.
6	Simplificar radicais.
7	Assistir aos vídeos 4, 5 e 6.
8	Realizar debates.
9	Resolver questões.
10	Estudar números irracionais.
11	Assistir aos vídeos 7, 8 e 9.
12	Realizar debates.
13	Resolver questões.
14	Estudar números primos.
15	Assistir aos vídeos 10, 11 e 12.
16	Realizar debates.
17	Resolver questões.
18	Aplicar o jogo da velha 2D.
19	Aplicar o jogo da velha 3D.
20	Aplicar questionário diagnóstico 2 com 12 questões sobre o tema.

Descrição das Aulas:

1. **Aplicar questionário diagnóstico 1** com 12 questões sobre o tema para todas as turmas simultaneamente. A aplicação será feita com o auxílio de outros professores, garantindo a imparcialidade e evitando a troca de informações sobre as possíveis respostas. O objetivo é identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema e suas dificuldades iniciais.
2. **Estudar as propriedades dos radicais**, utilizando a apostila 1. Realizar leitura e explicação no quadro, exemplificando as propriedades de forma diferente da apostila para enriquecer a

compreensão. A explicação será intercalada com perguntas aos alunos para estimular a participação ativa e o pensamento crítico.

3. **Assistir aos vídeos 1, 2 e 3**, previamente selecionados do YouTube, com abordagem do conteúdo específico da apostila 1. Utilizar data show, notebook e a internet do colégio. Após cada vídeo, promover uma discussão sobre o conteúdo assistido, permitindo que os alunos compartilhem suas observações e dúvidas. A ideia é conectar o conhecimento teórico com exemplos práticos apresentados nos vídeos.
4. **Realizar debates** em sala, onde os alunos poderão expressar suas opiniões sobre o conteúdo aprendido até o momento. O professor mediará a discussão, incentivando o respeito pelas opiniões dos outros e o esclarecimento de dúvidas. Este momento visa promover o pensamento crítico, a comunicação e a troca de ideias entre os alunos.
5. **Resolver questões**, aplicando o conhecimento adquirido nas apostilas, vídeos e debates. A resolução de exercícios será feita de forma colaborativa, com os alunos trabalhando em pares ou pequenos grupos, promovendo a cooperação e a troca de ideias para solucionar problemas matemáticos.
6. **Estudar as propriedades das raízes**, utilizando a apostila 2, com leitura e explicação no quadro, intercalada com exemplos práticos e contextos do cotidiano para ilustrar a aplicação dos conceitos. Durante a explicação, serão feitas perguntas direcionadas para incentivar os alunos a refletirem sobre os conceitos de forma mais profunda.
7. **Assistir aos vídeos 4, 5 e 6**, previamente selecionados do YouTube, com enfoque no conteúdo específico da apostila 2. Após cada vídeo, realizar uma análise crítica do conteúdo apresentado, discutindo os pontos principais e relacionando-os com o que foi aprendido nas aulas anteriores. Será uma oportunidade para esclarecer dúvidas de forma mais visual e dinâmica.
8. **Realizar debates**, permitindo que os alunos discutam questões levantadas durante o estudo das propriedades das raízes e radicais. O professor estimulará os alunos a questionarem uns aos outros e a defenderem suas opiniões, desenvolvendo habilidades de argumentação e reflexão.
9. **Resolver questões**, novamente com o uso das apostilas, vídeos e debates anteriores. A resolução será realizada individualmente ou em pequenos grupos, com o acompanhamento do professor para garantir que os alunos consigam aplicar o conteúdo de maneira eficaz.
10. **Estudar números irracionais**, utilizando a apostila 3. A leitura será acompanhada de explicações detalhadas no quadro, complementadas por exemplos práticos para ilustrar como os números irracionais se aplicam no mundo real. Serão discutidos os conceitos fundamentais como a diferença entre números racionais e irracionais, e como identificá-los.
11. **Assistir aos vídeos 7, 8 e 9**, com foco em números irracionais. Após a exibição dos vídeos, o professor promoverá uma discussão crítica, conectando o conteúdo dos vídeos com os

conceitos abordados nas aulas anteriores. O objetivo é reforçar a aprendizagem por meio de uma abordagem multimodal.

12. **Realizar debates**, dando aos alunos a oportunidade de refletirem sobre o conceito de números irracionais e suas aplicações. Durante os debates, os alunos serão incentivados a questionar as definições e a explorar exemplos do cotidiano, aprofundando o entendimento do conteúdo.
13. **Resolver questões** sobre números irracionais, utilizando os conceitos adquiridos nas aulas anteriores. O foco será a prática da resolução de problemas envolvendo números irracionais, com a possibilidade de resolução colaborativa para estimular a troca de conhecimento entre os alunos.
14. **Estudar números primos**, utilizando a apostila 4. A explicação será realizada no quadro, com exemplos de como identificar números primos e como eles se relacionam com outros conceitos matemáticos. Será dada atenção especial à importância dos números primos em diversos contextos da matemática e da ciência.
15. **Assistir aos vídeos 10, 11 e 12**, que abordam o tema de números primos. Após cada vídeo, realizar uma análise crítica, discutindo como os números primos se aplicam a diferentes áreas da matemática. O professor incentivará os alunos a refletirem sobre as propriedades desses números e sua relevância.
16. **Realizar debates**, permitindo que os alunos discutam as propriedades dos números primos e suas aplicações em diferentes áreas. Este momento será importante para estimular o pensamento independente e a capacidade de argumentação dos alunos.
17. **Resolver questões sobre números primos**, utilizando o conteúdo estudado até o momento. As questões serão desafiadoras, estimulando os alunos a pensarem de forma crítica e criativa sobre o tema. A resolução poderá ser feita em grupos para promover a colaboração entre os alunos.
18. **Aplicar o jogo da velha 2D**, utilizando uma abordagem lúdica para revisar os conceitos aprendidos nas aulas anteriores. O jogo será realizado com todas as turmas juntas, promovendo a interação entre os alunos e incentivando o trabalho em equipe e a resolução de problemas de forma divertida.
19. **Aplicar o jogo da velha 3D**, mantendo a interação entre as turmas e promovendo uma revisão prática dos conceitos de uma maneira mais dinâmica e envolvente. A ideia é utilizar o jogo como uma ferramenta para reforçar o aprendizado de maneira criativa e cooperativa.
20. **Aplicar questionário diagnóstico 2**, com 12 questões sobre o tema. Assim como no questionário diagnóstico 1, a aplicação será feita simultaneamente para todas as turmas, com auxílio de outros professores, para garantir que as respostas não sejam compartilhadas. O objetivo é avaliar o progresso dos alunos e identificar os pontos que ainda precisam ser reforçados.

APÊNDICE B – Apostilas utilizadas durante as aulas

A ordem temática das apostilas não seguiu a mesma deste manuscrito em si, mas todo o conteúdo dele foi abordado, mesmo que de maneira mais superficial.

B.1 Apostila 1: Propriedades da Radiciação

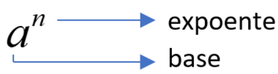
Antes de comentar sobre as propriedades da radiciação fez-se falar das propriedades da potenciação também, porque através delas e da propriedade que transforma expoente fracionário em raiz todas as propriedades da radiciação podem ser deduzidas. Deixa-se a cargo do leitor tentar fazer isso. Desse modo, foi necessário fazer uma revisão também sobre potenciação antes de entrar nesse assunto de radiciação.

Revisão sobre potenciação

a) Elementos da potenciação

Numa potenciação o a é chamado de base e n é o expoente, para todo a real e n inteiro, conforme a Figura 15.

Figura 15 – Base e expoente



Fonte: Elaborada pelo autor, com base em Giovanni e Bonjonro (1992, p.137)

b) Ponteciação com expoente inteiro positivo

Definição B.1. *Se a é um número real e n é inteiro positivo, a expressão a^n representa o produto de n fatores, todos iguais a a, ou seja:*

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ fatores}}}$$

c) Expoente inteiro negativo

Definição B.2. *Se a é um real não nulo $(a \neq 0)$ e n é um número inteiro e positivo, define-se:*

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}}$$

d) Expoente racional fracionário

Definição B.3. *Se a é um número rela positivo ($a > 0$) e m e n números inteiros e positivos, define-se:*

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Essa definição é importantíssima, pois transforma expoente fracionário em raiz e é usando ela que podemos deduzir as propriedades da radicação, tomando como base as propriedades da radiciação.

Propriedades da Potenciação

Se $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{a^n}{b^n}$, $(b \neq 0)$.

Propriedades dos Radicais

Se $a, b \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}^*$, então valem as propriedades:

6) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

7) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $(b \neq 0)$.

8) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$

9) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$.

10) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Atividades

1. Em quais dos casos abaixo a resposta está devidamente correta?

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \sqrt[4]{4 \cdot 6} = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{6}. \\ \text{II.} & \sqrt[9]{13 \cdot 7} = \sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[9]{13}. \\ \text{III.} & \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}. \\ \text{IV.} & \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{4 \cdot 11}. \end{array}$$

(A) Apenas as alternativas I, III e IV estão corretas.

(B) Apenas as alternativas I e II estão corretas.

(C) Todas as alternativas estão corretas.

(D) Nenhuma das alternativas está correta.

Solução: Alternativa C.

2. Nas simplificações a seguir podemos afirmar que:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \sqrt[3]{2^9} = \sqrt{2^6}. \\ \text{II.} & \sqrt[5]{6^{15}} = 6^3. \\ \text{III.} & \sqrt[7]{10^{14}} = 10^2 = 100. \\ \text{IV.} & \sqrt[7]{13^2} = 13^1. \end{array}$$

(A) Somente as alternativas II e III estão corretas.

(B) Apenas a alternativa I está errada.

(C) Todas as alternativas estão corretas.

(D) Nenhuma das opções.

Solução: Alternativa A.

3. Considerando as propriedades da radiciação, calcule e verifique qual a alternativa **<u>CORRETA</u>**:

(A) $\sqrt{41} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{41 \cdot 7}$.

(B) $\sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{10} = \dfrac{\sqrt[5]{12}}{\sqrt[5]{10}}$.

(C) $\sqrt[4]{16^8} : \sqrt[4]{8^4} = 4$.

(D) $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

Solução: Alternativa A.

4. Qual das alternativas abaixo está representada de forma **<u>INCORRETA</u>**:

(A) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

(B) $12^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{12^4}$.

(C) $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$.

(D) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$.

Solução: Alternativa B.

5. Considerando as propriedades dos radicais, assinale a alternativa **<u>INCORRETA</u>**.

(A) $\sqrt[5]{\dfrac{7}{8}} = \dfrac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{8}}$.

(B) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{10}} = \sqrt[4]{3} : \sqrt[4]{10}$.

(C) $\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2}{2,5}$.

(E) $\sqrt[9]{\dfrac{-1}{7}} = \dfrac{\sqrt[9]{-1}}{\sqrt[9]{7}}$.

Solução: Alternativa C.

6. A professora de João disponibilizou como tarefa uma lista de exercícios que deveria ser feita em casa. Ele chegou aos seguintes resultados:

   (A) $\sqrt[5]{4^5} = \sqrt[5]{1024}$

   (B) $\sqrt[7]{(2 \cdot 5)^7} = 10$

   (C) $\sqrt[16]{3^4} = \sqrt[3]{3}$

   (D) $\sqrt[10]{2^8} = \sqrt[5]{2^4}$

   Podemos concluir que João realmente aprendeu o conteúdo estudado? Justifique sua resposta.

   Uma possível solução: Infelizmente, não porque, o item C foi respondido incorretamente. A resposta correta para ele é: $\sqrt[4]{3}$.

7. Assinale com verdadeiro (V) ou falso (F) em cada uma das igualdades:

   (A) ( ) $\sqrt[14]{2^8} = \sqrt[x]{2^4}$, portanto $x = 7$.

   (B) ( ) $\sqrt[15]{10^5} = \sqrt[3]{10^x}$, portanto $x = 0$.

   (C) ( ) $\sqrt[10]{6^x} = \sqrt[5]{6}$, portanto $x = 5$.

   (D) ( ) $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt{5^x}$, portanto $x = 1$.

Solução: (A) V; (B) F; (C) F e (D) V

8. Qual das expressões tem sua decomposição **<u>INCORRETA</u>**?

   (A) $\sqrt{10} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$.

   (B) $\sqrt[6]{21} = \sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[6]{7}$.

   (C) $\sqrt[10]{15} = \sqrt[10]{3} \cdot \sqrt[10]{10}$.

   (D) $\sqrt[7]{30} = \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{3} \cdot \sqrt[7]{5}$.

Solução: Alternativa B.

9. Assinale a alternativa que corresponde ao valor x, dado na expressão:

$$\sqrt[6]{\sqrt[x]{10}} = \sqrt[24]{10}$$

(A) 4.

(B) 18.

(C) 30.

(D) 5.

Solução: Alternativa A.

10. Verifique se as afirmações a seguir estão corretas, em seguida assinale a alternativa **CORRETA**:

    (A) $\sqrt[6]{2^6 \cdot 7} = 2\sqrt[6]{7}$.

    (B) $\sqrt{3 \cdot 11^2} = 11\sqrt{3}$.

    (C) $\sqrt[5]{4^5 \cdot 2 \cdot 3^5} = 12\sqrt[5]{2}$.

    (D) $\sqrt[3]{6^3 \cdot 2^2} = 6\sqrt[3]{2^2}$.

(A) Somente as alternativas II e III estão corretas.

(B) Apenas a alternativa I está errada.

(C) Todas as alternativas estão corretas.

(D) Nenhuma das opções.

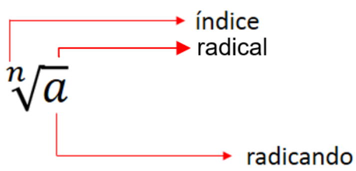
Solução: Alternativa C.

B.2 Apostila 2: Simplificação de Radicais

Toda expressão matemática que tenha forma $\sqrt[n]{a}$, com $a \in \mathbb{R}_+$ e $n > 1$, recebe o nome de radical aritmético.

Em todo radical, destaca-se:
No radical $\sqrt[3]{2}$, o índice é 3, e o radicando é 2.
No radical $\sqrt[5]{3}$, o índice é 5, e o radicando é 3.
No radical $\sqrt{7}$, o índice é 2 (pois, na raiz quadrada, o índice pode ser omitido), e o radicando é 7.

Figura 16 – Radical, radicando e índice



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Simplificando radicais.

Se um ou mais fatores do radicando têm o expoente igual ao índice do radical, de acordo com a propriedade $\sqrt[n]{a^n} = a$, esses fatores podem ser extraídos do radicando.

Em alguns casos, o expoente do radicando é maior que o índice do radical. Procura-se, então, fazer transformações convenientes no radicando, como você pode ver nas expressões abaixo.

Exemplo 1:

$$\sqrt{2^3} = \sqrt{(2^2 \cdot 2)} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Exemplo 2:

$$\sqrt[3]{10^7} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 10^3 \cdot 10} = \sqrt[3]{10^3} \cdot \sqrt[3]{10^3} \cdot \sqrt[3]{10} = 10 \cdot \sqrt[3]{10} = 100\sqrt[3]{10}.$$

Exemplo 3:

$$\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 6\sqrt[3]{18}.$$

Exemplo 4:

$$\sqrt{2^4 \cdot 5^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{5} = 20\sqrt{5}.$$

Há situações, porém, em que temos necessidade de fazer uma fatoração do radicando antes de realizar a extração dos fatores. Veja alguns exemplos.

1. Simplificar a expressão $\sqrt{45}$

Fatorando o radicando 45, encontramos $3^2 \cdot 5$. Daí, temos:

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}.$$

2. Qual é a forma mais simples possível de escrita da expressão $\sqrt[3]{1250}$?

Fatorando o radicando 1250, encontramos $2 \cdot 5^4$. Daí, temos:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 5^4} = \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 5^3} = 5\sqrt[3]{10}.$$

3. Sabendo que x e y são números reais positivos, simplifique a expressão:

$$\boldsymbol{\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{54x^4 \cdot y}}.$$

Fatorando o radicando 54, encontramos $54 = 2 \cdot 3^3$. Daí, temos:

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{54x^4 \cdot y} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^3 \cdot x^3 \cdot x \cdot y} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x\sqrt[3]{2xy} = 2x\sqrt[3]{2xy}.$$

4. Simplifique a expressão:

$$\sqrt{196} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7 = 14.$$

5. Simplifique a expressão:

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

6. Simplifique a expressão:

$$\sqrt{360} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5} = 6\sqrt{10}.$$

Tabela 6 – Raízes quadradas exatas

Quadrado	**Raiz Quadrada**	**Quadrado**	**Raiz Quadrada**
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$21^2 = 441$	$\sqrt{441} = 21$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$22^2 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$23^2 = 529$	$\sqrt{529} = 23$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$24^2 = 576$	$\sqrt{576} = 24$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$25^2 = 625$	$\sqrt{625} = 25$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$	$26^2 = 676$	$\sqrt{676} = 26$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$	$27^2 = 729$	$\sqrt{729} = 27$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$	$28^2 = 784$	$\sqrt{784} = 28$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$	$29^2 = 841$	$\sqrt{841} = 29$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$	$30^2 = 30$	$\sqrt{900} = 30$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela 7 – Raízes cúbicas exatas

Cubo	**Raiz Cúbica**
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$6^3 = 256$	$\sqrt[3]{256} = 6$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$11^3 = 1331$	$\sqrt[3]{1331} = 11$
$12^3 = 1728$	$\sqrt[3]{1728} = 12$
$13^3 = 2197$	$\sqrt[3]{2197} = 13$
$14^3 = 2744$	$\sqrt[3]{2744} = 14$
$15^3 = 3375$	$\sqrt[3]{3375} = 15$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Cálculo da raiz aproximada por tentativa.

Para agilizar a determinação de uma raiz quadrada aproximada, seguimos os seguintes passos:

1º passo: raiz exata mais próxima, anterior e posterior.

2º passo: tentativa com os decimais.

3º passo: subtração para saber qual é o mais próximo.

Exemplo 19: Usando o método citado, calcule a raiz quadrada de 17.

1º passo: raiz exata mais próxima, anterior e posterior.

A raiz quadrada exata anterior é a de 16 e, a posterior, é a de 25. Como a raiz quadrada de 16 é 4, e, a raiz quadrada de 25 é 5, a raiz quadrada de 17 deve ser um número entre 4 e 5:

$$\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}.$$

2º passo: tentativa com os decimais.

Como 17 está mais próximo de 16 do que de 25, vamos começar testando 4,1.

$$(4,1)^2 = 4,1 \cdot 4,1 = 16,81.$$

Continuamos com as tentativas, decimal por decimal, até obter os valores mais próximos a 17, antes e depois.

$$(4,2)^2 = 4,2 \cdot 4,2 = 17,64.$$

Assim, a raiz aproximada de 17 é um número entre 4,1 e 4,2.

3º passo: subtração para saber qual é o mais próximo.

$$17 - 16,81 = 0,19.$$

$$17,64 - 17 = 0,64.$$

Como 0,19 é menor que 0,64, concluímos que 4,1 é uma melhor aproximação para raiz quadrada de 17.

Para obter uma melhor aproximação, repetimos o processo, agora com os centésimos.

Cálculo da raiz aproximada com fórmula.

Uma maneira de obter um valor aproximado para a raiz é utilizando a seguinte fórmula:

$$\boxed{\sqrt{n} = \frac{n+Q}{2\sqrt{Q}}}.$$

Onde: n é o número que pretendemos obter a raiz;
Q é o quadrado perfeito mais próximo de n.

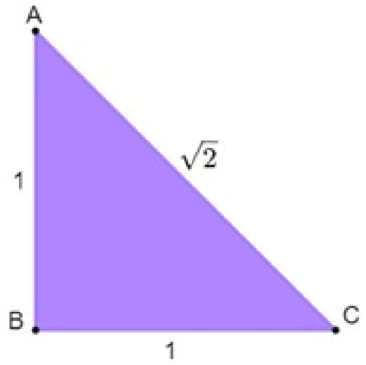
B.3 Apostila 3: Números Irracionais

O conjunto dos números irracionais é formado pelos números que não podem ser representados como frações. Em algumas situações, o conjunto dos números racionais não era suficiente para a resolução de problemas, foi quando se percebeu a existência dos números irracionais, como as raízes não exatas, as dízimas não periódicas, o π, entre outros.

Conjunto dos números irracionais.

No decorrer da história, na aplicação do teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo de lados medindo 1, percebeu-se que a resposta era igual à raiz de 2.

Figura 17 – Triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Acontece que essa resposta, aparentemente simples, tornou possível a descoberta de um novo conjunto numérico. Na tentativa de encontrar-se a resposta para essa raiz quadrada de 2, encontrou-se um número decimal conhecido como **dízima não periódica**, que é **impossível de ser representada como uma fração**. Isso fez necessária a criação de um novo conjunto, os irracionais, já que, até aquele momento, todos os números eram racionais (que podem escritos como fração).

O conjunto dos números irracionais é composto por todos os números que **não** podem ser escritos na forma de uma fração.

Quais são os números irracionais?

Para que um número seja considerado irracional, ele precisa respeitar a definição, ou seja, ele não pode ser representado como uma fração. Esses números são as **raízes não exatas**, as **dízimas não periódicas** e alguns casos especiais, como a constante π (lê-se: pi) ou o número ϕ (lê-se: fhi), entre outros.

- Raízes não exatas

  Quando o número não é um quadrado perfeito, é conhecido como raiz não exata. Veja alguns exemplos:

  Exemplo 20: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, ...

- **Dízimas não periódicas:** Ao resolver-se essas raízes, a resposta sempre vai ser uma aproximação, o que chamamos de dízimas não periódicas.

  $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

$\sqrt{3} = 1,7320508075\ldots$

Note que a parte decimal é infinita e que não existe um período, ou seja, uma sequência que faça com que a gente consiga prever o próximo número da parte decimal, e é por isso que chamamos esse número de dízima não periódica. Não só as dízimas geradas por raízes não exatas, mas qualquer dízima não periódica é um número irracional.

Outros números irracionais

- **Número π**: é bastante comum para cálculos envolvendo curvas, como área e comprimento de circunferência ou volume de cilindros e cones, e é um dos mais conhecidos números irracionais. Pelo fato de ser irracional, utilizamos um símbolo para representá-lo, ainda assim, π é uma dízima não periódica, e seu valor é igual a $3,14159265358979323846\ldots$. São conhecidas várias casas desse número, mas normalmente utilizamos uma aproximação, com o valor de 3,14, ou até 3 em alguns casos.

- **Número ϕ**: é conhecido também como número de ouro e é estudado desde a Antiguidade, descrevendo vários fenômenos da natureza, como a reprodução de populações de coelhos. Há também relato do uso dessa proporção em obras artísticas. Ele também é um número irracional, e por isso é representado pelo símbolo ϕ, sendo seu valor de: $1,61803398875\ldots$.

- **Constante de Euler (e)**: é utilizada para fenômenos que envolvem matemática financeira, e nas áreas de biologia, astronomia, entre outras. Ela também é um número irracional e, por isso, é representada pelo símbolo e, sendo seu valor de: $2,71828182845904523536\ldots$.

Número racional e irracional.

Acontece que um número qualquer pode ser classificado como racional ou irracional. De forma direta, o número racional é todo número que pode ser escrito como fração. São números racionais os decimais exatos, as dízimas periódicas, os números inteiros. Já os números irracionais são o oposto disso, ou seja, são os que não podem ser escritos como fração, como citamos, são eles as dízimas não periódicas e raízes não exatas.

Exemplo 21: A dízima $3,12121212\ldots$ é periódica, note que na sua parte decimal existe um período, que é o número 12, que sempre se repete, logo, esse número é racional. A dízima $6,1249375\ldots$ é não periódica, note que não há um período na sua parte decimal, o que faz com que esse número seja irracional.

O π é um número irracional útil para cálculos com círculo, circunferência, cilindros e cones.

Exercícios resolvidos

Questão 1 - Qual dos números a seguir pode ser classificado como irracional?

a) $\sqrt{25}$.

b) $\sqrt{81}$.

c) $\sqrt{10}$.

d) $5,1888$.

e) $1,2323\ldots$.

Solução: Alternativa C.

a) Sabemos que $\sqrt{25}$ é um quadrado perfeito, ou seja, sua raiz quadrada é exatamente igual a 5, logo, esse é um número racional.

b) Ao calcular a raiz de$\sqrt{81}$, sabemos que seu resultado é 9, o que faz com que aquele número seja racional.

c) A $\sqrt{10}$ não possui raiz quadrada exata, ou seja, ele é um número irracional, o que torna a alternativa C correta.

d) $5,1888$ é um número decimal exato, logo, ele é racional.

e) $1,2323\ldots$ é uma dízima com o período igual a 23, logo, trata-se de um número racional.

Questão 2 - Sobre os números irracionais, julgue as afirmativas seguintes como verdadeiras ou falsas:

I - Toda raiz quadrada é um número irracional.

II - Toda dízima não periódica é um número irracional.

III - O número ϕ e o número π são exemplos de números irracionais.

De acordo com o julgamento das sentenças, é correto afirmar que:

a) Somente a afirmativa I é verdadeira.

b) Somente a afirmativa II é verdadeira.

c) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Solução: Alternativa C.

I - Falsa, pois somente a raiz quadrada não exata é um número irracional.

II - Verdadeira. Dízimas não periódicas são números irracionais.

III - Verdadeira, pois os números ϕ e π são dízimas não periódicas, logo, são números irracionais.

B.4 Apostila 4: Números primos

Números primos são aqueles divisíveis apenas por 1 e por eles mesmos. Estão presentes na Matemática desde a Antiguidade, e vários métodos foram desenvolvidos a fim de verificar se um número é de fato primo, como o Crivo de Erastóstenes.

O estudo dos números primos acabou resultando no **Teorema Fundamental da Aritmética**, que afirma que todo número inteiro positivo e maior que 1 pode ser representado de maneira única como um produto de fatores primos. Atualmente os números primos têm um papel fundamental no campo da criptografia e computação.

Como saber se um número é primo ou não?

Uma das maneiras de descobrir se um número é primo é pela listagem dos seus divisores. Caso apareça mais números além do 1 e do número a ser verificado, o número não é primo e é chamado de **número composto**.

Exemplo 22: 1. Verifique quais dos números entre 2, 3, 10, 20, 35 e 100 são primos.

Para isso, escreveremos os divisores de cada um desses números:

$D(2) = \{1, 2\}$.

$D(3) = \{1, 3\}$.

$D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$.

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

$D(35) = \{1, 5, 7, 35\}$.

$D(100) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

Perceba que, de todos os números listados, somente os números 2 e 3 possuem como divisores o 1 e si próprio. Logo, da listagem acima, somente os números 2 e 3 são primos e 10, 20, 35 e 100 são compostos.

Mas você percebeu que, à medida que o valor dos números cresce, mais complicado fica de listar os seus divisores? Nos dias atuais, é um grande desafio para matemáticos e computadores determinar se um número é ou não primo.

Existe uma **ferramenta** que possibilita verificarmos se números maiores são primos ou não, mas mesmo essa ferramenta possui limitações para números relativamente maiores. Essa ferramenta foi desenvolvida por Erastóstenes, matemático grego, e foi denominada como **Crivo de Erastóstenes.**

Crivo de Eratóstenes

O Crivo de Erastóstenes consiste em criar uma tabela com números que vão de 2 até o número desejado, visto que o número 1 não é primo. Em seguida, realizamos os seguintes passos:

Passo 1: Tendo em vista as regras de divisibilidade, sabemos que o único número par primo é o número dois. Então, excluímos todos os demais pares da tabela, ou seja, os múltiplos de 2. A saber: $4, 6, 8, 10, 12, \ldots$.

Passo 2: De acordo com as regras de divisibilidade por 3, sabemos que um número é divisível por 3 caso a soma dos algarismos também seja. Assim, excluiremos todos os números que são múltiplos de 3. Ou seja, $6, 9, 12, 15, 18, \ldots, 321, 324, \ldots$.

Passo 3: Do critério de divisibilidade por 5, sabemos que um número é divisível por 5 caso ele termine em 0 ou em 5. Vamos eliminar todos os números que terminam em 0 e em 5. Assim, excluímos $10, 15, 20, 15, 30, \ldots, 5920, 5925, \ldots$.

Passo 4: De maneira análoga, verificando o critério de divisibilidade, vamos excluir todos os múltiplos de 7, 14,21,28,35,...,539,546, $\ldots$. Feito todo esse processo, os números que sobrarem são os primos de 2 até o número desejado.

Exemplo 23: Determine os números primos menores que 100.

Na Figura 18 construiremos uma tabela de 2 até 100.

Posteriormente, na Figura 19 aplicando o crivo de Eratóstenes, teremos a lista dos primos.

Figura 18 – Números naturais de 2 a 100

Fonte: (Alencar, 2023)

Figura 19 – Números primos em amarelo

Fonte: (Júnior, 2024)

Teorema Fundamental da Aritmética.

O Teorema Fundamental da Aritmética é muito importante quando se fala de decomposição em fatores primos. O teorema afirma que:

Teorema B.1. *Todo número inteiro maior que 1 pode ser representado como uma multiplicação de fatores primos.*

Decomposição em fatores primos.

Como dito, o Teorema Fundamental da Aritmética garante que todo número composto, com exceção do 1, pode ser escrito como forma de multiplicação de números primos. Para encontrar a forma fatorada de determinado número primo, basta realizar divisões sucessivas por números primos.

Exemplo 24: Determine a forma fatorada do número composto 630.

Passo 1: Dividir o número dado pelo primeiro possível, nesse caso o número 2, por se tratar de um número par. Assim:

$$630 = 315 \cdot 2.$$

Passo 2: Pegamos o resultado da divisão e realizamos o mesmo processo. Note que 315 não é divisível por 2, então buscamos outro número primo. Pode ser o número 3, já que a soma de seus algarismos é divisível por 3. Assim:

$$630 = 105 \cdot 3.$$

Passo 3: O mesmo processo deve ser aplicado ao 105, ou seja, vamos dividi-lo por 3 novamente. Logo,

$$105 = 35 \cdot 3.$$

Passo 4: Dividindo o número 35 por 5, temos:

$$35 = 7 \cdot 5.$$

Passo 5: Dividindo o 7 por ele mesmo, pois, por ser primo, só pode ser divisível por 1 e ele mesmo, temos:

$$7 = 1 \cdot 7.$$

Quando o quociente, que é o resultado da divisão, for igual a 1, o processo de decomposição chega ao fim. Assim, o número 630 na forma fatorada é:

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$
$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Existe uma notação que simplifica todo o processo de decomposição. Veja a seguir:

Figura 20 – Decomposição em fatores primos

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

APÊNDICE C – Avaliações diagnósticas

C.1 Avaliação diagnóstica 1

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
COORDENAÇÃO REGIONAL DE ENSINO DE BRAZLÂNDIA
CENTRO EDUCACIONNAL 04 DE BRAZLÂNDIA

ESTUDANTE:	**Nº:**	**TURMA:**
PROFESSOR: *Renato Gonçalves da Fonseca*	**COMP. CURRICULAR:** *Matemática*	**DATA:**

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

Questão 1: Nas simplificações a seguir podemos afirmar que:

$I. \sqrt[3]{2^9} = \sqrt{2^6}$

$II. \sqrt[5]{6^{15}} = 6^3$

$III. \sqrt[7]{10^{14}} = 10^2$

$IV. \sqrt[7]{13^2} = 13^1$

a)Apenas a alternativa I esta errada.
b)Somente as alternativas II e III estão corretas.
c)Todas as alternativas estão corretas.
d)Nenhuma das opções estão corretas.

Questão 2: Em quais dos casos abaixo a resposta está devidamente correta?

$I. \sqrt[4]{4 \cdot 6} = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{6}$

$II. \sqrt[9]{13 \cdot 7} = \sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[9]{13}$

$III. \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}$

$IV. \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{4 \cdot 11}$

a) Apenas as alternativas I, III e IV estão corretas.
b) Apenas as alternativas I e II estão corretas.
c) Todas as alternativas estão corretas.
d) Nenhuma das alternativas está correta

Questão 3: Qual é o valor de $\sqrt{16 \cdot 25}$?

a) 20
b) 40
c) 80
d) 60

Questão 4: Qual é a simplificação de $\sqrt{72}$?

a) $7\sqrt{2}$

b) $8\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{3}$

d) $6\sqrt{2}$

Questão 5: Simplifique a expressão $\sqrt{98}$.

a) $7\sqrt{3}$

b) $7\sqrt{7}$

c) $14\sqrt{2}$

d) $7\sqrt{2}$

Questão 6:

Qual é a simplificação de $\sqrt{200}$?

a) $10\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{5}$

c) $14\sqrt{2}$

d) $20\sqrt{5}$

Questão 7: Qual das alternativas é um número irracional?

a) $\frac{8}{3}$

b) $1{,}2525\ldots$

c) $\sqrt{2}$

d) $6{,}66$

Questão 8: Qual é a característica de um número irracional?

a) Ele tem uma expansão decimal finita e periódica.

b) Ele tem uma expansão decimal infinita e não periódica.

c) Ele pode ser expresso como uma fração de dois inteiros.

d) Ele é sempre um número inteiro.

Questão 9: Qual dos seguintes números é irracional?

a) $\frac{2}{5}$

b) $\sqrt{121}$

c) π

d) $\sqrt{\frac{16}{9}}$

Questão 10: Qual das alternativas descreve um número primo?

a) Um número que possui mais de dois divisores.

b) Um número natural maior que 1 que possui exatamente dois divisores distintos: 1 e ele mesmo.

c) Um número que pode ser dividido por qualquer número.

d) Um número natural que possui apenas um divisor.

Questão 11:

Qual dos números abaixo **não é primo**?

a) 2

b) 3

c) 5

d) 9

Questão 12: O número 1 é considerado primo?

a) Sim, pois ele tem exatamente dois divisores: 1 e ele mesmo.

b) Não, porque ele só possui um divisor: 1.

c) Sim, porque ele é um número ímpar.

d) Não, porque 1 não é um número natural.

Gabarito:

1. b)	4. d)	7. b)	10. b).
2. c)	5. d)	8. c)	11. d)
3. a)	6. a)	9. c)	12. b)

C.2 Avaliação diagnóstica 2

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
COORDENAÇÃO REGIONAL DE ENSINO DE BRAZLÂNDIA
CENTRO EDUCACIONNAL 04 DE BRAZLÂNDIA

ESTUDANTE:		Nº:	TURMA:
PROFESSOR: *Renato Gonçalves da Fonseca*	**COMP. CURRICULAR:** *Matemática*	DATA:	

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

Questão 1: Considere as expressões a seguir. Marque a alternativa em que todas as simplificações estão corretas.

$I. \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$II. \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$III. \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

$IV. \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$

a) Apenas as alternativas I, II e IV estão corretas.
b) Todas as alternativas estão corretas.
c) Apenas as alternativas I e III estão corretas.
d) Nenhuma das alternativas está correta.

Questão 2: Qual das expressões a seguir está incorreta em relação à propriedade dos radicais?

$I. \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$II. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$III. \sqrt{a^2} = a$

$IV. \left(\sqrt{a^2}\right)^3 = \sqrt{a^6}$

a) Apenas a alternativa III está incorreta.
b) Apenas a alternativa I está incorreta.
c) Apenas a alternativa IV está incorreta.
d) Nenhuma das alternativas está incorreta.

Questão 3: Qual é a soma de $\sqrt{50} + \sqrt{18}$?

a) $\sqrt{68}$
b) $15\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $\sqrt{34}$

Questão 4: Qual das alternativas a seguir é uma simplificação correta para $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$?

a) 2

b) $\sqrt{5}$

c) 4

d) 5

Questão 5: Se $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais, então a expressão $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é:

a) Irracional.

b) Racional, pois a soma de dois números irracionais sempre é racional.

c) Irracional, pois a soma de dois números irracionais sempre é irracional.

d) Racional, pois a soma de dois números irracionais sempre é racional.

Questão 6: Considere a expressão $\frac{3}{2}\sqrt{12}$. Qual das alternativas abaixo apresenta uma simplificação correta?

a) 18

b) 8

c) $3\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{2}$

Questão 7: Se $x = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$, qual é o valor de x^2?

a) 9

b) 21

c) 49

d) 441

Questão 8: Qual dos números abaixo é **irracional**?

a) $\sqrt{4}$

b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\sqrt{8}$

Questão 9:

Em um gráfico, a distância entre dois pontos é dada por $\sqrt{18}$. Qual é a forma simplificada dessa distância?

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{9}$

c) 6

d) $3\sqrt{2}$

Questão 10:

Qual das alternativas descreve corretamente um número **primo**?

a) Um número que pode ser dividido por qualquer número inteiro.

b) Um número natural maior que 1 que possui exatamente dois divisores distintos: 1 e ele mesmo.

c) Um número que tem exatamente um divisor distinto.

d) Um número inteiro maior que 1 que tem mais de dois divisores.

Questão 11:

Entre os seguintes números, qual NÃO é **primo**?

a) 51

b) 77

c) 131

d) 207

Questão 12: O número 11 é considerado **primo**?

a) Sim, porque ele tem exatamente dois divisores: 1 e ele mesmo.

b) Não, porque ele só possui um divisor: 1.

c) Sim, porque é ímpar.

d) Não, porque 1 não é um número natural.

Gabarito:

1. b)	4. a)	7. b)	10. b)
2. d)	5. a)	8. d)	11. c)
3. c)	6. c)	9. d)	12. a)