Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: limitações e potencialidades

Lucas Felipe Farias de Luna

Brasília

2025

Lucas Felipe Farias de Luna

Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: limitações e potencialidades

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr.Vinicius de Carvalho Rispoli

Brasília

2025

Posição vertical

Lucas Felipe Farias de Luna

Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: limitações e potencialidades/ Lucas Felipe Farias de Luna. – Brasília, 2025-

101 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr.Vinicius de Carvalho Rispoli

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM, 2025.

1. Palavra Chave 1. 2. Palavra Chave 2. I. Nome do Orientador. II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Título XYZ

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: limitações e potencialidades

por

Lucas Felipe Farias de Luna *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 22 de maio de 2025

Comissão Examinadora:

Prof. Dr.Vinicius de Carvalho Rispoli - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo - MAT/UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Mateus Gianni Fonseca - IFB (Membro Externo)

* O autor não foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho a todos que um dia se sentiram incapazes de compreender a Matemática...

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, a Educação Pública de Qualidade, que me forjou, desde a Educação Básica, e que me trouxe a Universidade de Brasília. Educação a qual temos que discutir, debater, com seriedade, buscando melhorias, em todos os sentidos. Agradeço a todos os professores com os quais tive contato ao longo dessa caminhada, e que, mesmo com as piores condições de trabalho, com tamanha desvalorização da carreira, fizeram de tudo para que eu chegasse até aqui. Obrigado!

Agradeço a minha família, que mesmo com toda dificuldade, não hesitou em mostrar-me o caminho dos estudos, formando meu caráter. Agradeço a minha esposa Bárbara Roberta, pela parceria e paciência de sempre, me apoiando nos momentos mais complexos deste trabalho e ao longo dessa nossa jornada, que não foi fácil (sabemos). Agradeço ao meu tio Vinicius, meus avós, meus pais, por simplesmente me inspirarem. Obrigado!

Agradeço ao meu Orientador e a banca pela oportunidade. Agradeço ao meu grupo de amigos: Cícero, Hanna e Malu. Fizemos todas as disciplinas do programa juntos, estudamos para as provas juntos, e nossa parceria foi especial. Agradeço ao CEMI Taguatinga, a Mônica, a equipe gestora, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, e principalmente a todos os estudantes. Obrigado!

Por fim, agradeço a comunidade científica, por toda a contribuição, produção, conhecimento acumulado e disseminado, e dedicação. Espero, daqui para frente, agregar cada vez mais. Viva a ciência. Obrigado!

"A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza. "

Stephen Hawking

Resumo

O presente trabalho visa analisar os efeitos de cinco oficinas centradas em demonstrações matemáticas em salas de aula do Ensino Médio, a partir de uma abordagem qualitativa. Foram escolhidos conteúdos da área de Matemática e suas Tecnologias, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), das três séries do Ensino Médio no Distrito Federal. A partir da seleção dos conteúdos, as cinco oficinas, que envolviam aspectos de demonstrações, foram realizadas em sala de aula com os estudantes. Posteriormente, foram coletadas e analisadas informações sobre os limites e potencialidades desta proposta, além da produção escrita dos alunos. Como resultado inicial, nota-se, no campo das possibilidades, que as demonstrações em sala de aula têm um efeito positivo no aprendizado dos estudantes. Além disso, um produto desenvolvido a partir desta proposta foi a criação de um *website* que apresenta uma série de atividades lúdicas, programáveis e gamificadas. O objetivo é oferecer a professores e estudantes acesso prático e criativo às informações, incluindo ideias de como trabalhar determinados conteúdos em sala de aula.

Palavras-chaves: Oficinas. BNCC. Demonstrações Matemáticas. Ensino Médio.

Abstract

This study aims to analyze the effects of five workshops focused on mathematical demonstrations in high school classrooms, using a qualitative approach. The chosen content was from the area of Mathematics and its Technologies, as outlined in the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), for all three years of high school in the Federal District. Following the selection of the content, the five workshops, which involved aspects of demonstrations, were conducted in the classroom with the students. Subsequently, information on the limits and potential of this proposal was collected, in addition to the students' written work. As an initial result, it is noted that classroom demonstrations have a positive effect on student learning. Furthermore, a product developed from this proposal was the creation of a website featuring a series of playful, programmable, and gamified activities. The goal is to provide teachers and students with practical and creative access to information, including ideas on how to address specific content in the classroom.

Key-words: Workshops. BNCC. Mathematical Proofs. High School.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

A Matemática enquanto ciência exata apresenta uma estrutura lógica de argumentação, prova e dedução de fatos muito distinta das demais ciências, também exatas, tais como a Física e a Química. Enquanto na Química, tem-se vários modelos que visam descrever a organização e a estrutura de um átomo, seu núcleo e elétrons, que, ao longo dos anos, foram mudando e sendo avaliados, validados e experimentados, analogamente, na Física, há dois modelos que são capazes de descrever a gravidade e como os corpos interagem com a mesma, um proposto por Newton e outro por Einstein. Na Matemática, existem modelos validados e datados em um período antes de Cristo que são aceitos até o presente momento, como as axiomas, definições, teoremas, postulados, entre outros, conhecidos no livro os elementos, de Euclides (Euclides, 2009).

O fato citado acima não diminui a importância das demais ciências exatas e não invalida a relevância delas para o avanço como um todo da humanidade, mas ressalta uma notável estabilidade nas demonstrações feitas nos modelos Matemáticos e como essas ferramentas podem e devem ser úteis no contexto das aprendizagens, principalmente dentro de sala de aula, facilitando o entendimento e a compreensão de teoremas, fórmulas, definições, entre outros, e evitando um ensino matemático voltado e pautado em processos de memorização.

De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Governo do Paraná (Governo do Paraná, 2008), tal metodologia baseada em processos de memorização, com aulas completamente expositivas, foi estimulada em décadas passadas, o que pode justificar o ensino seguir a mesma direção nos dias atuais. Tal caráter mecanicista do ensino da Matemática foi muito utilizado no decorrer da década de 1970, onde a base do ensino aprendizagem era a memorização de definições, fórmulas, habilidades de manipulação de algoritmos e expressões algébricas e até mesmo como desenvolver e resolver as questões e itens.

Segundo as orientações curriculares para o Ensino Médio (Ministério da Educação, 2006), um dos propósitos da formação matemática na educação básica é compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações. Além disso, o documento afirma que

> a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com funda-

> mentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica. (Ministério da Educação, 2006, p. 69-70)

Notam-se prejuízos, além dos citados anteriormente, e que estão interligados de certa maneira, nos livros didáticos adotados pela SEEDF para escolha, dos professores, nas escolas, a cada triênio. Vale citar a coleção Prisma (Bonjorno, J.R., Giovanni Jr, J., Câmara, P, 2021), onde, em vários livros e áreas da Matemática, como Geometria e Álgebra, encontram-se diversas páginas que fazem conexões entre a Matemática e a Engenharia Civil, entre a matemática e até mesmo a Arte, além de contar, brevemente, a história dos Matemáticos responsáveis pelas respectivas descobertas, o que é válido, interessante e dialoga diretamente com as perspectivas e ideais do Novo Ensino Médio (NEM), porém, não é destinado espaço algum nos mesmos que justifique questões mais simples, como por exemplo a área de um paralelogramo e o porquê da mesma ser calculada como um produto entre as medidas da base e da altura do quadrilátero. A coleção citada acima foi escolhida, em 2022, na escola em que este trabalho foi desenvolvido, de maneira democrática, pela equipe de professores da Área de Matemática e suas tecnologias e, entre as opções de escolha de coleções, a mesma atendia a necessidade imediata de todos e era a mais completa.

Durante a experiência ao longo de 6 anos de Secretaria de Educação, sempre interagindo, comunicando, trocando conhecimentos com os demais professores da área, e 4 anos somente no Ensino Médio, não identificou-se professores que, durante suas atividades, aulas, provas e testes, solicitaram aos estudantes que sequer justificassem suas respostas, pensamentos e conclusões, menos ainda quando trata-se de uma aula ou oficina onde o objetivo é provar um teorema, por exemplo.

Os fatos acima citados, somados a um interesse motivador, um sentimento de fazer científico, de curiosidade, de criatividade, de questionamento dos estudantes de primeira, segunda e terceira série do Ensino Médio, do CEMI de Taguatinga Norte, no ano de 2024, aliados a um professor que desde a educação básica apresentava dificuldades em memorizar ideias, definições e fórmulas e sempre se questionava dos porquês de tudo que era ensinado, resolve-se propor este trabalho que busca investigar os efeitos de cinco oficinas envolvendo demonstrações matemáticas, no Ensino Médio. Além disso, propõem-se um produto educacional diverso, em formato de site, capaz de armazenar as oficinas testadas, além de jogos, animações e vídeos envolvendo demonstrações.

Sendo assim, seguem os objetivos gerais e específicos do trabalho realizado, que são indissociáveis entre si e que se complementam, de modo geral.

Objetivo Geral:

Analisar os efeitos de cinco oficinas centradas em demonstrações matemáticas junto a um grupo de estudantes, da primeira à terceira série do Ensino Médio, de uma escola pública do Distrito Federal.

Objetivos específicos:

- Elaborar planos de aula centrados em demonstrações matemáticas;

- Realizar intervenções pedagógicas, a partir dos planos de aula;

- Analisar a compreensão dos estudantes, a partir de suas produções escritas;

- Gerar discussões com os estudantes sobre a efetividade desse processo realizado e se de fato contribuiu com a aprendizagem dos mesmos;

- Publicar um site repositório para compartilhar os planos de aula gerados durante a pesquisa.

Ressalta-se a importância de conhecer as potencialidades e as dificuldades dos estudantes antes de realizar uma dedução matemática em sala de aula, evitando assim possíveis frustrações, e que os objetivos elencados acima contemplam o grupo de alunos que participaram do trabalho. É fundamental que o professor tenha domínio da metodologia que será aplicada a fim de proporcionar, de maneira mais efetiva, a aprendizagem para seus estudantes.

Por fim, considerando tudo que foi abordado até aqui, nesta introdução, o presente trabalho de dissertação será dividido da seguinte maneira: o capítulo 1 traz o referencial teórico que aborda temas envolvendo demonstrações Matemáticas e o contexto de sala de aula de acordo com a BNCC e alguns teóricos. O capítulo 2 traz a abordagem matemática do trabalho, como as deduções e as atividades foram realizadas e a metodologia adotada. O capítulo 03 traz a produção por parte dos estudantes, a opinião deles a respeito das atividades as quais participaram, o produto educacional, além de trazer os resultados, quais objetivos foram atingidos, etc. Por fim, o capítulo 04 traz as considerações finais.

1 Referencial teórico

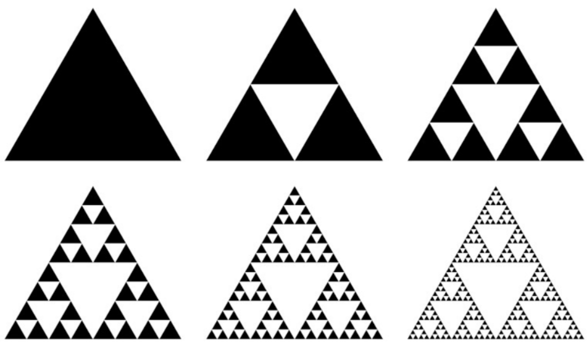
Este capítulo traz o referencial teórico ao qual esta pesquisa se apoiou. Além de uma abordagem e discussão a respeito das competências específicas e habilidades da BNCC que abordam o tema das demonstrações e deduções em sala de aula e quais as vantagens e as potencialidades dessa ação, há também um diálogo com outros teóricos que já exploraram o tema e trazem contribuições essenciais para este trabalho.

1.1 Aspectos Cognitivos das deduções

A psicologia cognitiva vai definir a dedução ou prova de afirmações nos seguintes níveis: prova em ação, prova por exemplo genérica ou prova por generalização, prova pragmática, prova intelectual e provas matemáticas.

De acordo com (Semadeni, Zbigniew, 1984), a **prova em ação** de uma afirmação é a mais elementar das provas e consiste basicamente em identificar um padrão que funcione para algum exemplo (aqui é interessante que não seja um exemplo trivial) e tentar reconstruir as razões formuladas pelo problema, até que as ações físicas deixem de ser realizadas e que as ações mentais se tornem o novo processo. Portanto, pode-se concluir que a prova em ação consiste no resultado da internalização das ações ao invés de uma inferência lógica propriamente dita. A figura abaixo segue como exemplo. Julgue a afirmação: a quantidade de triângulos brancos na imagem da figura 5 da sequência abaixo é igual a 40.

Figura 1 – Triângulo de Sierpinski



(fonte:https://escolakids.uol.com.br/matematica/fractais.htm)

A afirmação feita acima é verdadeira, pois o padrão que define a maneira como os triângulos brancos são construídos é dado por $3n + 1$, onde n é a quantidade de triângulos brancos da figura anterior, por exemplo. E para se construir tal padrão, é necessário tentar, testar e internalizar as ações, como afirma a prova em ação.

Segundo (Balacheff, Nicolas, 1988), a partir do momento em que o exemplo não é mais tomado como caso particular, mas como uma generalização de um todo, essa é a **prova por generalização**. O mesmo define **prova pragmática** como aquelas que dependem de ação, como por exemplo ter que desenhar as figuras 4 e 5 na figura 1 acima para checar a afirmação. E por fim, define **prova intelectual** como aquelas que necessitam de propriedades dos objetos envolvidos e suas relações.

De acordo com (Rezende, J., Nasser, L, 1994), existem ainda mais níveis ou tipos de prova, e vale citar: a **justificativa pragmática**, quando o estudante confirma um fato de acordo com a validação de apenas alguns casos particulares. A **recorrência a uma autoridade**, quando a justificativa se dá a partir de um argumento que os alunos adquiriram porque o professor citou em sala, ou porque constam nos livros didáticos. E para finalizar, **a justificativa por meio de gráfico**, quando gráficos, desenhos ou figuras são construídos visando validar os argumentos.

Por fim, em um nível mais complexo, tem-se as **provas ou demonstrações matemáticas**, que podem ser feitas de diversas maneiras e usando diferentes tipos de argumentações. Pode-se provar afirmações usando o princípio da indução finita ou por contradição, por exemplo. Há como provar afirmações por construção e até por força bruta. De acordo com (Garnica, Antonio Vicente Marafioti, 2002):

> a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica da Matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da "ideologia da certeza" para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais. (Garnica, 2002, p.3-4).

Vale ressaltar ainda que, de acordo com a **teoria construtivista de Piaget**, que traz contribuições para este trabalho, existem diversos estágios de desenvolvimento da criança, que vai desde o estágio sensório-motor, de 0 a 2 anos de idade, onde o indivíduo começa a realizar repetidas ações até a generalização da mesma, desenvolvendo reflexos corporais, até o estágio operatório-formal, que é justamente o estágio onde os estudantes do Ensino Médio encontram-se, em idade acima dos 12 anos, que é quando começam a pensar de maneira abstrata, deixando de lado a dependência, o vínculo com o mundo real. É neste momento que os estudantes começam a formular hipóteses, passando a compreender e observar melhor construções e teorias, ou seja, é exatamente nessa fase que os alunos são capazes de desenvolver o pensamento hipotético-dedutivo.

De acordo com Piaget (Piaget, J. ,Hernández, J., 1986), o papel inicial das experiências lógico-matemáticas são a preparação necessária e essencial para se chegar as demonstrações matemáticas. Além disso, quando estas ações são simplesmente interiorizadas e suficientes, o processo se torna inútil, pois não ocorre a transição da fase operatório-concreta para operatório-formal. Ou seja, entende-se, que em determinadas fases do desenvolvimento da criança (até os 12 anos de idade), é necessária uma abordagem visando a utilização de material concreto nos processos de demonstrações.

A compreensão dos estágios citados acima, definidos por Piaget, são fundamentais para compreender o estudante e seus aspectos do desenvolvimento cognitivo, pois evidenciam a transição dos pensamentos vinculados ao concreto para a fase das elaborações formais dedutivas. Entende-se também que estes avanços iniciam-se pelas ações de sujeitos ativos, que entendem o mundo por meio de suas relações com os objetos. O teórico ainda reforça o ensino reflexivo, formador do pensamento matemático, que traz o estudante a interpretar e compreender problemas reais, que se opõe aos processos de memorização das fórmulas e regras.

1.2 A BNCC e as demonstrações Matemáticas no contexto da sala de aula.

A Base Nacional Comum Curricular (Ministério da Educação, 2018) coloca as demonstrações e deduções matemáticas como um elemento fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático dos estudantes. Ela propõe que, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos sejam estimulados a:

a) Justificar seus raciocínios: ao invés de apenas apresentar resultados, os estudantes devem ser capazes de explicar como chegaram a determinada conclusão, utilizando argumentos claros e coerentes.

b) Construir argumentos: a BNCC incentiva a produção de argumentos matemáticos, nos quais os alunos utilizam conceitos e propriedades para defender suas ideias.

c) Verificar conjecturas: os estudantes devem ser capazes de formular hipóteses e testá-las, utilizando diferentes estratégias para verificar se são verdadeiras ou falsas.

d) Desenvolver o raciocínio dedutivo: a BNCC enfatiza a importância de desenvolver a capacidade de deduzir novas informações a partir de conhecimentos prévios.

Além disso, ao longo dos diferentes anos de escolaridade, a BNCC apresenta habilidades específicas que, quando trabalhadas em conjunto, contribuem com o desenvolvimento da capacidade de realizar deduções matemáticas. Algumas habilidades incluem: a identificação de padrões para formulação de conjecturas e a generalização de resultados, permitindo que os estudantes construam teorias mais abrangentes. A utilização de diferentes representações (tabelas, gráficos, diagramas) para facilitar a visualização de relações e compreensão de conceitos. E, por fim, a aplicação de conhecimentos e a utilização de diferentes estratégias, incluindo as demonstrações, para resolver problemas.

Nos quadros abaixo, tabelas 01, 02 e 03, logo no início do código da habilidade, EF se refere a etapa da Educação Básica, que no caso é o Ensino Fundamental e EM é o Ensino Médio e os dois valores numéricos, logo na sequência, se referem ao ano. No caso das habilidades do Ensino Médio, o valor numérico após EM é sempre o mesmo (13). Isso porque as habilidades no Ensino Médio podem ser trabalhadas da primeira à terceira série. Tais habilidades foram retiradas da própria BNNC e abordam, de maneira direta e indireta, o tema aqui trabalhado e discutido.

Tabela 1 – Habilidades - Ensino Fundamental I

Habilidades - Ensino Fundamental I
(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
(EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo. **(EF04MA10) Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.** **(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.**
(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. **(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.**

(Fonte: Elaborada pelo autor, a partir da BNCC (Brasil, 2025).)

Para os anos iniciais do Ensino Fundamental I, a BNNC estabelece a necessidade da retomada da vivência cotidiana das crianças com os números, formas e espaços, mas permitindo que as mesmas desenvolvam habilidades que possam ir além das aplicações dos algoritmos usuais, como as quatro operações, por exemplo, visando alcançar um processo de reflexão, sistematização e formalização. Além disso, aponta que

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes,

> meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. (Ministério da Educação, 2018, p. 277)

Tabela 2 – Habilidades - Ensino Fundamental II

Habilidades - Ensino Fundamental II
(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica. **(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.** **(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.** **(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.**
(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes. **(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.** **(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.**
(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. **(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.** **(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.**

(Fonte: Elaborada pelo autor, a partir da BNCC (Brasil, 2025).)

Já no que diz respeito ao Ensino Fundamental II, os aspectos do uso da comunicação matemática, com sua linguagem simbólica, da representação e da argumentação matemática devem ser explorados e aprofundados. O documento ainda afirma que:

> Além disso, nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da

> argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada. (Ministério da Educação, 2018, p. 299).

Tabela 3 – Habilidades - Ensino Médio

Habilidades - Ensino Médio
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(Fonte: Elaborada pelo autor, a partir da BNCC (Brasil, 2025).)

Por fim, no que diz respeito ao Ensino Médio, a competência específica de número cinco da BNCC (Ministério da Educação, 2018) vai tratar sobre o assunto das demonstrações de maneira mais explícita. De acordo com a competência, tem-se que:

> o desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições. (Ministério da Educação, 2018, p. 540)

Em resumo, de acordo com o estudo dos textos e as competências específicas contidas na BNCC, o documento norteador destaca a importância das demonstrações em sala de aula, pois além de proporcionarem uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, já que durante o processo precisam relacionar diferentes ideias e propriedades, ajudam os estudantes com as resoluções de problemas e possibilita o desenvolvimento do pensamento crítico, aprendendo a avaliar a validade de diferentes afirmações.

O documento ressalta também a importância de iniciar os estudantes nesses processos de deduções já nos anos iniciais, utilizando exemplos concretos e linguagem acessíveis, além da proposta de problemas desafiadores, a criação de um ambiente colaborativo e a utilização de diferentes recursos, tais como jogos, materiais manipuláveis e *softwares* educativos. De maneira complementar, (Amado, Nélia and Sanchez, Juan and Pinto, Jorge, 2015) justifica que introdução tardia das demonstrações no contexto de sala de aula pode originar dificuldades na forma de pensar dedutivamente, tanto em tarefas que pressupõem raciocínio dedutivo como nas demais.

1.3 Problematizando o tema das demonstrações

De acordo com (Balacheff, Nicolas, 1988), o ensino da demonstração, da prova Matemática, em vários países tem se tornado um fracasso. Como consequência, as deduções Matemáticas ou deixaram de existir nos currículos da Educação Básica, como ocorrera na França, ou simplesmente passaram a ser ofertadas em cursos avançados de Álgebra, Geometria, etc, nos Estados Unidos. Em contrapartida, no currículo de Portugal (Lisboa, Ministério da Educação, 2007), nota-se uma relevância maior quando o assunto são as demonstrações.

A partir dos fatos citados no parágrafo anterior, os problemas gerados são tamanhos, por diversos fatores. Primeiro porque o conhecimento Matemático que é disseminado e ensinado nas escolas se baseia fundamentalmente na prova, na validação de seus próprios conceitos, teoremas, dentre outros. Segundo porque a prova matemática se torna, de fato, um meio de comunicação, não somente entre os próprios matemáticos, por desempenhar um papel de validar afirmações e trazer clareza a fatos, ou seja, acaba virando um problema de contexto social.

Ainda segundo (Balacheff, Nicolas, 1988), para a maioria dos estudantes, as demonstrações matemáticas parecem ser apenas mais uma atividade comum de uma aula de Matemática. Eles produzem apenas porque lhes é proposto e não enxergam como algo necessário em sua prática acadêmica, como uma ferramenta útil. Isso se deve a maneira como os estudantes são inseridos neste cenário, que é completamente novo. Por isso, é fundamental permitir que os estudantes, primeiramente, criem os próprios critérios para validação e revalidação das afirmações matemáticas que são feitas em sala de aula, para então serem inseridos de fato nos processos de deduções propriamente ditos.

Outro fator de relevância, que prejudica as demonstrações em sala de aula, é a formação acadêmica dos professores, além da falta de formação continuada ou do incentivo dela, como observado no Distrito Federal, e os vários problemas, lacunas e deficiências adquiridos ao longo do percurso de formação, o que pode justificar o fato da não utilização das ferramentas de provas matemáticas em sala de aula, por parte dos docentes, como evidenciado por (Nasser, L and Tinoco, L, 1999).

Ainda de acordo com (Vianna, CCS, 1988), muitos são os argumentos dos docentes em relação a não realização das demonstrações em sala de aula, que vão desde falas que ressaltam que a matemática deve ser ensinada sempre visando uma praticidade, para o dia a dia, por exemplo, até argumentos que ressaltam uma incapacidade de aprendizagem dos próprios estudantes, por falta de conhecimentos prévios, etc. A mesma ainda sugere uma falta de conhecimento dos próprios professores no que diz respeito às provas e deduções matemáticas.

A partir deste ponto, pode-se citar possíveis implicações e dificuldades, que podem ter origem nos aspectos discutidos acima, principalmente no que diz respeito formação deficiente dos docentes, a falta de incentivo a formação continuada, entre outros. São elas

-**Superficialidade na aprendizagem**: com a falta da necessidade de justificativas, os alunos podem acabar se contentando com respostas prontas e simplesmente se apoiarem no processo de memorização, não desenvolvendo assim um conhecimento mais aprofundado dos conceitos matemáticos;

-**Dificuldades em problemas mais complexos**: a falta de prática em criar justificativas plausíveis para os raciocínios pode dificultar a resolução de problemas mais complexos, que exigem maior construção de argumentos lógicos.

-**Dificuldade em comunicar ideias matemáticas**: a capacidade de justificar o raciocínio é fundamental para comunicar ideias matemáticas de forma clara e precisa, tanto para outros alunos e professores, quanto para a sociedade como um todo;

-**Falta de desenvolvimento do pensamento crítico e criativo**: a exigência de justificativas estimula o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, a capacidade de analisar informações, avaliar argumentos e tomar decisões fundamentadas.

2 A metodologia do trabalho

Neste capítulo serão abordados a metodologia do trabalho, com a sua organização, datas de aplicações das oficinas, turmas e números de participantes, além da abordagem matemática das demonstrações realizadas em sala de aula, os pré-requisitos observados, entre outros aspectos, que são indispensáveis para a compreensão do trabalho e da pesquisa.

Ressalta-se, inicialmente, que os estudantes passaram por uma avaliação diagnóstica inicial, que sempre é realizada no começo do ano letivo, que buscou fazer um levantamento dos assuntos que seriam trabalhados, abordando o tema das demonstrações, além de trazer também as fragilidades dos estudantes, já mostrando os pré-requisitos que deveriam ser explorados, anteriores as oficinas. Além disso, demais professores da área foram consultados, com o objetivo de entender quais os principais temas a serem trabalhados.

Partindo daí, 5 assuntos foram escolhidos, dado que estes atendiam também a necessidade imediata do público de estudantes que a escola atendeu, no ano de 2024. Foram eles: progressões aritméticas e geométricas; fórmula resolutiva da equação de segundo grau; relação entre o volume de prismas e pirâmides; logaritmos; soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

À partir daqui, começou-se um trabalho baseado nos temas escolhidos que basicamente levou em consideração três momentos: o primeiro momento seria a produção dos materiais necessários para que o segundo e terceiro momentos pudessem de fato ocorrer, que incluem não somente os materiais onde os estudantes realizaram as deduções ou justificariam algo, que foram impressos, os planos de aula que já serviriam de apoio para o produto educacional, mas também os formulários do *Google Forms*, onde os estudantes expressaram suas opiniões pessoais a respeito das atividades propostas. Em um segundo momento, algumas demonstrações matemáticas, de maneira mais formal, seriam realizadas no quadro, exatamente como explorado posteriormente, buscando inspirar e apresentar aos estudantes o tema. Por fim, em um terceiro momento, os alunos foram divididos em duplas ou grupos para que pudessem realizar a parte prática da atividade e, no fim, de maneira individual, responderem às perguntas do formulário. Esta foi, basicamente, a estrutura geral de todas as atividades realizadas ao longo da pesquisa. É importante ressaltar que ao término de cada aula e ação, os alunos tiveram a devolutiva sobre a atividade prática e foi apresentado aos mesmos um possível caminho para resolução dos desafios. O *Feedback* constitui importante ferramenta no que diz respeito ao ensino aprendizagem dos estudantes e deve ser sempre realizado.

Considerando os apontamentos feitos em (Garnica, Antonio Vicente Marafioti, 2001), define-se que esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, pois: os resultados não são definitivos e universais, ou seja, são transitórios e podem variar considerando diferentes contextos e momentos; não é possível estabelecer uma hipótese no início e comprová-la, posteriormente, como é feito na pesquisa quantitativa, e o objetivo aqui é aprofundar a compreensão de um fenômeno, onde as conclusões emergem do processo de investigação, ou seja, não se estabelecem verdades definitivas; não é possível, neste trabalho, propor um modelo algorítmico, ou seja, não há como estabelecer um conjunto rígido de passos ou procedimentos a serem seguidos. Aqui a abordagem é mais flexível e se moldam aos dados que são coletados e analisados ao longo do processo; há a valorização da voz do participante e do relato. Logo, não existe uma verdade única estabelecida, mas uma multiplicidade de visões, comportamentos e ideias.

Em resumo, segundo Garnica, a pesquisa qualitativa se caracteriza a partir de um processo dinâmico e flexível, que busca aprofundar a compreensão de fenômenos complexos, considerando a subjetividade e o contexto dos participantes, sem a rigidez de um modelo pré-estabelecido e reconhecendo a transitoriedade e a contextualidade dos conhecimentos produzidos, valorizando o diálogo, a negociação e a emergência dos resultados a partir dos dados coletados.

Contexto dos participantes da pesquisa e da escola

A escola em que o trabalho foi desenvolvido é o Centro de Ensino Médio Integrado à Educação Profissional de Taguatinga, única escola com este perfil da região, localizada na periferia, no setor M-norte. A mesma é uma representação do que é o NEM. Encontra-se, na mesma instituição de ensino, a Educação em Tempo Integral, com a oferta da Formação Geral Básica (FGB) comum a todas as outras instituições, Itinerários Formativos Integradores (IFI's), eletivas, projeto de vida, Formação de Hábitos Individuais e Sociais (FHIS), além da oferta do curso técnico em computação gráfica. Vale ressaltar que a escola proporciona aos estudantes uma aprendizagem voltada à participação e realização de projetos, como os projetos que, anualmente, estão presentes nas Feiras de Ciências organizadas pela SEEDF.

Sobre o público, a escola atendeu cerca de 350 estudantes no ano de 2024, com 6 turmas de primeira série, 4 turmas de segunda série e 3 turmas de terceira série, que inclusive são os primeiros estudantes a se formarem no curso técnico. Pela oferta diversa, a mesma atende estudantes não só da comunidade da M-norte, mas também do entorno, principalmente de Águas Lindas do Goiás.

De acordo com (INEP, 2023) e o boletim divulgado, da prova aplicada em 2023, os estudantes, no que diz respeito a proficiência em Matemática, obtiveram média de 264,51, subindo quase 4 pontos em relação a 2019 e ficando menos de 1,5 pontos abaixo da média de outras escolas com o mesmo perfil, o que reitera ainda mais a importância deste trabalho realizado.

Além disso, os mesmos resultados apontam que os estudantes da terceira série não atingiram percentual algum na Distribuição Percentual dos Alunos do 3º/4º série do Ensino Médio por Nível de Proficiência nos níveis de 7 a 10, que são níveis que exigem um maior aprofundamento, abstração e domínio da Matemática.

Como o produto educacional proposto é amplo, todas as turmas da escola, totalizando 14 turmas, participaram ao menos de uma das 5 ações propostas ao longo do ano de 2024, neste trabalho.

Ressalta-se que, adiante, será apresentada a estrutura das oficinas realizadas em sala de aula, com os estudantes, contendo os pré-requisitos que foram observados com este público específico. Naturalmente, cada escola apresenta uma realidade e uma necessidade que deve ser observada e levada em consideração. Além disso, os planos de aulas estão disponíveis, bem como os formulários padrões que os estudantes responderam.

2.1 Sobre Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Em relação ao conteúdo voltado as progressões aritméticas e progressões geométricas, participaram da oficina as turmas de A a F, da primeira série do Ensino Médio, totalizando 200 estudantes, aproximadamente. A ideia da aula a qual as deduções ocorreram, que, de fato, é mais teórica, foi deduzir primeiramente a fórmula para o termo geral da progressão aritmética, utilizando recorrência matemática. Em seguida, deduziu-se a fórmula para a soma dos n termos da progressão aritmética. Por fim, os estudantes foram desafiados a deduzir a fórmula para o termo geral da PG, em duplas. A oficina ocorreu entre os dias 02 e 13 de Setembro de 2024.

Naturalmente, o conteúdo envolvendo as progressões acima citadas não foi explorado de maneira imediata. Inicialmente, as aulas introdutórias ao assunto abordavam algumas sequências numéricas, como na figura 3 abaixo, por exemplo, e os estudantes foram desafiados a encontrar os termos que faltavam. Em seguida, antes das definições propriamente ditas, os alunos trabalharam com questões envolvendo progressões aritméticas e geométricas, ainda sendo desafiados a encontrar termos que faltavam, para então buscarem diferenças entre esses dois grupos de sequências. Com a atividade em questão, os alunos já conseguiam definir com as próprias palavras o que é uma PA e o que é uma PG. Posteriormente, os estudantes foram apresentados às definições formais das progressões citadas. Foram definidas da seguinte maneira, de acordo com (Hefez, Abramo and Aritmética, Coleçao PROFMAT, 2009):

a)**Progressões aritméticas**: sequências numéricas onde a diferença entre termos consecutivos é constante;

b)**Progressões geométricas**: sequências numéricas onde o quociente entre termos consecutivos é constante.

Figura 2 – Aquecimento Pa e Pg

(1, 1, 2, 3, 5, 8, ? , 21, ...) - sequência de Fibonacci
(D, S, T, Q, ?, S, S) - dias da semana
(2, 4, 6, ?, 10, ...) - sequência dos pares
(1, 3, 5, 7, ?, 11, ...) - sequência dos ímpares
(1, 2, 4, 8, ?, 32, 64, ...) - sequência das potências de 2

(fonte: elaborada pelo autor)

Nas aulas seguintes, as fórmulas abaixo foram introduzidas e uma lista de exercícios foi trabalhada com os estudantes e posteriormente corrigida, para só então a atividade com as demonstrações ser aplicada de fato. Tal lista de exercícios está presente no plano de aula da referida atividade. Nas fórmulas que seguem, n é a posição do termo na progressão, r é a razão da PA e q a razão da PG, e Sn representa a soma dos n termos da PA.

- Fórmula para o termo geral da PA = $a_n = a_1 + (n-1)r$

- Soma dos n termos da PA = $s_n = \frac{(a_n+a_1)n}{2}$

- Fórmula para o termo geral da PG = $a_n = a_1.q^{n-1}$

Os pré requisitos observados, para que a atividade aplicada pudesse ser aproveitada ao máximo, são, não necessariamente nesta ordem:

- manipulações algébricas que envolvem uma igualdade;

- conhecer as definições das progressões;

- conhecer a relação entre o n-ésimo termo, a razão e o termo de posição $n-1$, que no caso da PA é $a_n = a_{n-1} + r$, e em relação a PG é $a_n = a_{n-1}.q$;

- manipular sistema de equações com duas equações e duas incógnitas, utilizando a soma ou a subtração entre as linhas.

Termo geral da progressão aritmética

Atendidos os pré-requisitos, as demonstrações puderam ser realizadas. Inicialmente, tomou-se a sequência $1, 2, 3, 4, \ldots$ como exemplo. Em seguida, os alunos deveriam perceber que é uma progressão aritmética de razão 1 e $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots, a_n = n$, e assim por diante. Por fim, construiu-se o termo de posição $n+1$ como uma soma entre o termo de posição n mais a razão, como segue abaixo.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 1 = 2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = 2 + 1 = 3 = a_2 + 1$$

$$\dots$$

$$a_{100} = a_{99} + 1$$

$$\dots$$

$$a_{n+1} = a_n + 1$$

Para a demonstração da fórmula, é fundamental que os estudantes compreendam a relação acima citada. Além disso, a mesma ideia poderá ser usada para demonstrar a fórmula para o termo geral da progressão geométrica.

Por fim, toma-se uma progressão aritmética genérica de termos $a_1, a_2, a_3, \dots,$ e razão r. Seguindo as ideias acima, pode-se escrever:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\dots$$

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Agora, basta substituir as informações da linha 1 na linha 2, com o objetivo de escrever todos os termos em função apenas do primeiro termo (a1) e da razão r, e assim sucessivamente. Dessa maneira, obtém-se:

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r$$

$$\dots$$

A partir daqui, os estudantes já serão capazes de afirmar como deve ser o termo a_{100}, por exemplo, e o termo a_{200}, mais a frente, notando que todos os termos tem o lado direito da igualdade como a_1 mais um número de vezes a razão, e que esse número de vezes a razão é uma unidade menor que a posição do termo do lado esquerdo da igualdade. E assim,

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r$$

$$\dots$$

$$a_{100} = a_1 + 99r$$

$$\dots$$

$$a_{200} = a_1 + 199r$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

como se desejava mostrar.

Soma dos n termos da progressão aritmética

Após a dedução feita acima, toma-se a soma $S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$. Os alunos devem identificar que se trata de uma progressão aritmética de razão 1, $a_1 = 1$ e $a_{100} = 100$. Daqui, basta escrever a soma acima de outra maneira, tal qual, $S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 1$. Assim, tem-se:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$$

$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 1.$$

O objetivo agora é notar que a soma dos extremos da primeira e segunda linhas são sempre iguais. Por exemplo: 100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101, 97 + 4 = 101, 96 + 5 = 101, 100 + 1 = 101. Agora, o próximo passo é notar que existem 100 somas que resultam em 101. Em outras palavras, somando-se as linhas, obtém-se:

$$2s_{100} = 101.100 \to s100 = \frac{101.100}{2}$$

Agora, é necessário generalizar a situação acima, notando que pode-se escrever $101 = 100 + 1 = a_{100} + a_1$. Dessa maneira, $s_{100} = \frac{101.100}{2} = \frac{(100+1).100}{2} = \frac{(a_{100}+a_1).100}{2}$. Por fim, substituindo 100 por n, conclui-se que $S_n = \frac{(an+a1).n}{2}$, como esperado.

Por fim, os estudantes ainda em dupla, foram desafiados a deduzir a fórmula para o termo geral da progressão geométrica, na parte prática da atividade, e alguns resultados serão mostrados nos próximos capítulos.

Fórmula para o termo geral da Progressão Geométrica, xadrez e os grãos de arroz

Inicialmente, conta-se uma história sobre o jogo de xadrez: a história retrata um período, não muito distante, onde um determinado Rei ficou encantado com o jogo de xadrez, ao jogá-lo pela primeira vez. O Rei, maravilhado, resolve oferecer um prêmio ao inventor do jogo. Daí então, começa-se uma busca pelo tal criador. Quando encontrado, o Rei o pergunta qual o prêmio o mesmo desejava, e que poderia solicitar qualquer coisa. O criador do jogo então pede um grão de arroz pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, quatro grãos pela terceira, oito grãos pela quarta casa e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade de grãos da casa anterior. O Rei, então assustado, devido ao pedido inusitado, pede imediatamente a seus contadores que contabilizem a quantidade de grãos de arroz e que entreguem imediatamente ao inventor do jogo.

A partir dessa breve história, que pode ser encenada pelos próprios estudantes ou pelo próprio professor, de maneira artística, os estudantes são divididos em duplas, um tabuleiro de xadrez impresso e um copo cheio com grãos de arroz é entregue aos alunos. A ideia é que eles estimem a quantidade de grãos de arroz que o inventor do jogo receberia. Além disso, após a conclusão que o número de grãos de arroz é enorme, pois, na última casa tem-se 2^{63} grãos, começa-se uma estimativa de onde essa quantidade poderia ser estocada, por exemplo, ou quantas viagens de avião são necessários para transportar o volume total de grãos, ou ainda, considerando o preço atual de um pacote com 5kg de arroz, quantos reais o criador do jogo ganharia.

A tabela abaixo foi construída durante a aula, com a participação dos estudantes, para que a estimativa citada no parágrafo anterior fique ainda mais clara. Nota-se, por exemplo, que na casa de número 33, já se alcançou mais de 8 bilhões de grãos de arroz. Somando a quantidade total de grãos de arroz, tem-se $1,8 \times 10^{19}$ grãos.

Tabela 4 – Quantidade de grãos de arroz

Casa do tabuleiro (Considerando a primeira casa como 0)	**Grãos de arroz**
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
...	...
33	8589934592
34	17179869184
35	34359738368
...	...
62	4,61169E+18
63	9,22337E+18
64	1,84467E+19

(elaborada pelo autor)

De acordo com (Arnaldo Gunzi, 2016), considerando que 100 grãos de um tipo específico de arroz pesam 2,7 gramas, o então maior avião já construído, Antonov AN-225 Mriya, deveria fazer mais de 20 milhões de viagens para transportar todo o arroz solicitado pelo inventor do jogo. Outro fato interessante é que esse número de grãos é equivalente a 633 anos de uma produção em escala mundial de arroz. Isso demonstra o crescimento dessa progressão geométrica.

2.2 Sobre a Fórmula Resolutiva da equação de segundo grau

A oficina em questão foi aplicada para as turmas A, D e F, da primeira série do Ensino Médio, entre os dias de 16 a 20 de Setembro de 2024. Participaram da atividade 70 estudantes e o objetivo da aula foi deduzir, junto aos alunos, no quadro, a fórmula resolutiva da equação de segundo grau, onde, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a diferente de zero, as soluções podem ser geradas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ressalta-se, novamente, que antes de qualquer dedução, os pré-requisitos são observados, levantados e então revisados com os estudantes.

A ideia para dedução foi usar a forma canônica da parábola, uma abordagem mais algébrica, e os pré-requisitos observados foram:

- manipulações algébricas que envolvam uma igualdade;

- produtos notáveis, em especial o quadrado de uma soma;

- operações com frações;

- menor múltiplo comum;

- monômios e polinômios;

Fórmula resolutiva da equação de segundo grau

Atendidos os pré-requisitos, desejava-se chegar a conclusão que as soluções para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, podem ser geradas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Tem-se que:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Vale notar agora que $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, ou ainda que $(x^2 + \frac{bx}{a}) = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$. Portanto, pode-se reescrever a equação tal da seguinte maneira:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0. \tag{2.2}$$

De $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$, temos que $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-b^2+4ac}{4a^2}$. Logo,

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a} = 0. \tag{2.3}$$

Para finalizar, deve-se somar $-(\frac{-b^2+4ac}{4a})$ em ambos os lados da igualdade e em seguida, tomando $a \neq 0$, dividir ambos os lados por a. Assim, conclui-se que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, como esperado.

Esta aula pode ser inserida em diversos momentos, seja quando os alunos começam a buscar soluções para equações de segundo grau, ainda no Ensino Fundamental II, seja quando estão buscando as raízes da função de grau dois para construção do gráfico da mesma, por exemplo, que é o caso.

2.3 Relação entre o volume de Prismas e Pirâmides

A ideia para esta atividade surge da necessidade e da motivação de responder a pergunta de um estudante da terceira série do Ensino médio que, ao calcular o volume de uma pirâmide, utilizando uma fórmula que o mesmo possuía em suas anotações no caderno, pergunta: “professor, por que eu devo dividir por três? Por que não dividir por dois ou por cinco?”.

Ao longo do terceiro bimestre, do ano letivo de 2024, durante as aulas envolvendo volume de prismas e pirâmides, percebe-se a dificuldade dos estudantes das turmas de A a C, da terceira série do Ensino Médio, em compreender e aplicar as fórmulas para calcular volume de sólidos, apesar da abordagem meticulosa durante as aulas e de diversos exercícios e exemplos resolvidos.

De acordo com (Ministério da Educação, 2018),

> a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (Ministério da Educação, 2018, p. 271)

Para evitar a memorização das fórmulas, os alunos tiveram aulas, no primeiro semestre, que revisaram os métodos para se calcular a área de polígonos regulares, principalmente triângulos, quadriláteros de maneira geral, hexágonos, círculos e circunferências. Já no segundo semestre, além das fórmulas usuais para o cálculo de volume de cubos, paralelepípedos, prismas de base hexagonal, cilindros, pirâmides de bases triangulares, quadradas, retangulares, pentagonais, hexagonais, e cones, as aulas reforçaram a seguinte ideia, de acordo com (Muniz Neto, Antonio Caminha, 2013):

a) Para os prismas - O volume dos prismas retos é dado a partir de uma relação entre o produto da área da base pela altura do mesmo. O cilindro foi apresentado da mesma maneira.

$$Volume_{Prisma} = (Áreadabase) \times altura$$

b) Para as pirâmides - O volume de qualquer pirâmide é calculado a partir de uma relação entre o produto de um terço da área da base pela altura. O cone foi apresentado da mesma maneira.

$$Volume_{Pirâmide} = \frac{(Áreadabase) \times altura)}{3}$$

Os pré-requisitos para que a atividade pudesse ser aplicada com maior aproveitamento, foram:

- compreender como calcular a área de figuras planas, de maneira geral, principalmente triângulos, quadriláteros de maneira geral e o hexágono;

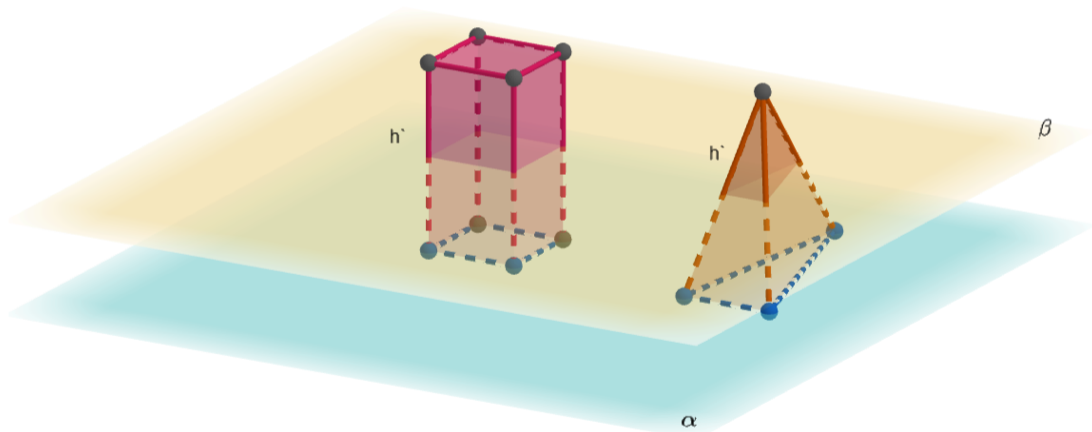
- compreender o teorema de Pitágoras e como aplicá-lo;

- manipulações com números decimais;

- compreender a diferença entre prismas e pirâmides.

Antes de iniciar a oficina que visa mostrar que o volume da pirâmide é proporcional a um terço do volume do respectivo prisma, é necessário citar aos estudantes o **princípio de Cavalieri**, que, de acordo com (Tose, Marina de Toledo, 2017), dois sólidos possuem mesmo volume quando, além de possuírem mesma altura, possuem mesma área de secção transversal ao longo de qualquer ponto dessa referida altura. Ter mesma área de secção transversal implica basicamente em: se um plano qualquer, seja β, paralelo ao plano que contém as bases de ambos os sólidos, seja α, interceptar os mesmos em uma altura arbitrária, seja h', e as áreas dos respectivos polígonos gerados pela intersecção forem iguais, então o volume dos sólidos é igual.

Figura 3 – Princípio de Cavalieri



(fonte: elaborada pelo autor)

As pirâmides utilizadas na parte prática da atividade contida no plano da referida ação, foram inicialmente construídas no *software Geogebra Calculator* e posteriormente planificadas, para que os alunos pudessem recortar as mesmas, em uma impressão realizada em folha A4, para então formar três figuras tridimenssionais.

Após o conteúdo ser trabalhado com os alunos, os pré-requisitos tratados e as dúvidas sanadas, estes foram divididos em grupos de até 4 pessoas, para que pudessem colorir as pirâmides e organizar melhor as tarefas e os processos. A atividade foi proposta a todos os estudantes da terceira série do Ensino Médio, das turmas de A a C, totalizando 60 estudantes.

A partir daqui, já com as pirâmides montadas, os estudantes deveriam buscar as posições corretas para encaixar as mesmas, formando assim um prisma, o que já mostra, visualmente, o porquê do volume da pirâmide ser proporcional a um terço do volume do respectivo prisma (conclusão essa que os alunos conseguiram chegar por conta própria).

Por fim, na última parte da atividade realizada, os alunos, com o auxílio de réguas e calculadoras, tiraram as medidas necessárias das pirâmides para que pudessem calcular o volume das mesmas e em sequência, realizaram o mesmo processo com o prisma montado, para daí então concluírem que, de fato, os volumes são iguais ou então aproximados (aproximados devido a montagem que cada grupo realizou, uns com maior precisão do que outros).

2.4 Logaritmo

O logaritmo costuma ser um conteúdo que assusta os estudantes, por diversos fatores, como a dificuldade de enxergar aplicações relacionadas ao mesmo, de manipular o próprio logaritmo, com suas propriedades específicas, por exemplo, ou uma defasagem quando o assunto relacionado a potências foi introduzido, em anos anteriores, que é um dos pré-requisitos para entender a dinâmica e funcionamento do assunto.

Entendendo as questões acima, resolve-se propor uma oficina interdisciplinar, envolvendo a Biologia, a Matemática, a Química e a Física, em uma aula que explora como concluir a idade do planeta terra e outras questões ligadas a datação do carbono 14, por exemplo, além de algumas questões envolvendo terremotos.

Participaram da oficina 75 estudantes da segunda série do Ensino Médio, entre os dias 19 e 29 de Setembro de 2024, e os pré -requisitos observados foram:

- compreender potenciação e suas propriedades;

- compreender a definição de logaritmo, que pode ser escrito como uma igualdade de potências;

- manipular e compreender as propriedades do logaritmo.

Iniciou-se às atividades revisando a definição de logaritmo com os estudantes e resolvendo algumas questões menos contextualizadas, como uma maneira de aquecimento, e com o objetivo de revisar as propriedades do logaritmo. Em seguida, abordou-se os temas interdisciplinares citados.

No que diz respeito à maneira de estimar a idade do planeta terra, ou uma delas, que é de, aproximadamente, 4.5 bilhões de anos de acordo com (Carneiro, Celso Dal Ré and Mizusaki, Ana Maria Pimentel and de Almeida, Fernando Flávio Marques, 2005), a ideia para a aula foi utilizar a fórmula para o decaimento radioativo, que é uma função exponencial, e a relação do tempo de meia vida dos elementos radioativos, em específico do Urânio. De acordo com (Cardoso, Eliezer de Moura and others, 2000), quando uma determinada quantidade de Urânio leva 4.5 bilhões de anos para decair metade desta amostra. Então, por exemplo, se hoje verificou-se 1kg de urânio, daqui a 4.5 bilhões de anos, essa mesma amostra somente apresentará 0.5kg de urânio. Os outros 0.5kg de urânio decaíram formando um elemento radioativo ligeiramente menos denso.

É dessa maneira que os especialistas concluíram, aproximadamente, a idade do planeta. O maior desafio até então era encontrar uma rocha antiga, ou de maneira mais precisa, a rocha mais antiga (ou muito próxima disso). Em seguida, sabendo que na amostra havia urânio e já conhecendo o tempo de meia vida do mesmo, bastava aplicar o log em ambos os lados da igualdade, com o objetivo de isolar a variável que diz respeito ao tempo. E assim foi trabalhado em sala de aula, junto aos estudantes.

Em sequência, abordou-se o assunto dos terremotos em sala de aula e como a ciência faz para medir a intensidade dos tremores, a energia dissipada por eles, e o qual a conexão do logaritmo com o assunto. Além disso, os alunos tiveram acesso às fórmulas e puderam perceber que Richester e sua equipe utilizaram sabiamente o logaritmo para que os dados reais das medições pudessem ser transformados em números mais agradáveis, por assim dizer. Por fim, considerando a localização da escola, os alunos tiveram acesso a uma tabela que mostrou o que poderia ocorrer com a localidade nos tremores de escalas de 0 a 10.

Por último, os estudantes acompanharam as demonstrações de quase todas as propriedades do logaritmo, no quadro, de maneira mais algébrica, e em sequência se dividiram em duplas para a realização da parte prática da atividade, que no final, assim como todas as oficinas propostas e de maneira individual, deveriam responder ao formulário e registrar suas opiniões à respeito da atividade a qual participaram. Neste caso, a atividade prática envolvia duas tarefas: a primeira delas diz respeito a uma cruzadinha com as propriedades do logaritmo que os alunos deveriam completar. A segunda atividade apresenta a demonstração formal de uma das propriedades do logaritmo, que não foi realizada no quadro, em que algumas partes da prova foram extraídas, sendo exatamente o objetivo dos estudantes completar as lacunas propositalmente criadas. É importante dizer que as atividades devem ser realizadas pelos estudantes nesta ordem.

Propriedades do Logaritmo

Com os pré-requisitos atendidos, deduziu-se, junto aos estudantes, as seguintes propriedades referentes ao logaritmo:

$$log_a(xy) = log_a x + log_a y; \tag{2.4}$$

$$log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y; \tag{2.5}$$

$$log_a(x^b) = b(log_a x); \tag{2.6}$$

$$log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}; \tag{2.7}$$

com a, c, x e y positivos e a, c e y não nulos.

Tem-se que, para a linha (1.2), considere $log_a(xy) = M$, $log_a x = N$ e $log_a y = O$, ou ainda, $log_a(xy) = M \longleftrightarrow a^M = xy$, $log_a x = N \longleftrightarrow a^N = x$ e $log_a y = O \longleftrightarrow a^O = y$. De $a^M = xy$, podemos reescrever o lado esquerdo como: $a^M = xy = a^N \times a^O$. Com a relação $a^M = a^N \times a^O$, temos que $a^M = a^N \times a^O = a^{N+O}$, ou seja, $M = N + O$. Já que $log_a(xy) = M$, $log_a x = N$ e $log_a y = O$, pode-se concluir que $log_a(xy) = log_a x + log_a y$.

Considerando a linha (1.3), tem-se que, tomando $log_a(\frac{x}{y}) = M$, $log_a x = N$ e $log_a y = O$, ou ainda, $log_a(\frac{x}{y}) = M \longleftrightarrow a^M = \frac{x}{y}$, $log_a x = N \longleftrightarrow a^N = x$ e $log_a y = O \longleftrightarrow a^O = y$. De $a^M = \frac{x}{y}$, podemos reescrever o lado esquerdo como: $a^M = \frac{x}{y} = \frac{a^N}{a^O}$. Com a relação $a^M = \frac{a^N}{a^O}$, temos que $a^M = \frac{a^N}{a^O} = a^{N-O}$, ou seja, $M = N - O$. Já que $log_a(\frac{x}{y}) = M$, $log_a x = N$ e $log_a y = O$, pode-se concluir que $log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y$.

Já para a linha (1.4), pode-se tomar $log_a(x^b) = M$ e $(log_a x) = N$, ou ainda $log_a(x^b) = M \longleftrightarrow a^M = x^b$ e $(log_a x) = N \longleftrightarrow a^N = x$. Como $x = a^N$, podemos reescrever $a^M = x^b$ como $a^M = (a^N)^b$, que resultará em $a^M = a^{Nb}$, o que implica em $M = Nb$. Ora, como $M = Nb$, e, sabendo que $log_a(x^b) = M$ e $(log_a x) = N$, pode-se concluir que $log_a(x^b) = b(log_a x)$, como esperado.

Por fim, para a linha (1.5), tome $log_a x = M \longleftrightarrow a^M = x$, $log_c x = N \longleftrightarrow c^N = x$ e $log_c a = O \longleftrightarrow c^O = a$. Podemos reescrever $a^M = x$ como $a^M = c^N$ (já que $c^N = x$). Porém, como $c^O = a$, temos que $(c^O)^M = c^N$. Logo, $OM = N$, e como O é diferente de zero, temos que $M = \frac{N}{O}$, ou seja, $log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}$, como esperado.

2.5 Soma dos ângulos internos de um polígono regular

O objetivo da aula em questão foi, além de demonstrar a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados, propor uma atividade prática, em duplas, onde uma demonstração, diferente da feita no quadro, foi apresentada, porém com um erro. Os alunos deveriam inicialmente identificar o erro na demonstração feita e em sequência propor uma correção para que a conclusão correta pudesse ser tomada. Participaram da oficina 60 estudantes de primeira série e a mesma ocorreu entre os dias 01 e 04 de outubro de 2024.

Inicialmente, a aula iniciou-se provando que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta em 180°, e aqui usou-se conceitos mais simples e visuais envolvendo retas paralelas cortadas por transversais, como feito no plano de aula da ação em questão. Em sequência o mesmo processo ocorreu para um quadrilátero convexo qualquer. A ideia aqui é, como os estudantes já entendem o comportamento de uma progressão aritmética, que pudessem generalizar que, ao adicionar-se mais um lado ao polígono convexo anterior, a soma dos ângulos internos aumentaria em exatamente 180°. Utilizando o processo de recorrência Matemática, demonstrou-se que $S_n = 180° \times (n-2)$ é a fórmula que representa a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados. Vale notar que

$$
\begin{gathered}
S_3 = 180°, \\
S_4 = 360° = 2 \times 180°, \\
S_5 = 540° = 3 \times 180° \\
\dots \\
S_{100} = (100-2) \times 180° = 98 \times 180° \\
\dots \\
S_n = 180° \times (n-2).
\end{gathered}
$$

como esperado.

Utilizando retas paralelas cortadas por transversais, é interessante, inicialmente, convencer os estudantes de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta em 180°, que para um quadrilátero convexo qualquer a soma é igual a 360° e assim sucessivamente, para que os primeiros termos da recorrência acima façam sentido de fato.

Em seguida, com os estudantes já separados em duplas, receberam a atividade prática impressa para que pudessem analisar o erro e argumentar sobre. É importante ressaltar que as duplas não tiverem contato umas com as outras, apenas com os integrantes da própria dupla.

Participaram da atividade todos os estudantes das primeiras séries, turmas de A a F, e os pré-requisitos observados para que a atividade pudesse ser aproveitada ao máximo foram:

- manipulações algébricas que envolvam uma igualdade;

- resolução de equações de grau um;

- compreender as características de uma Progressão Aritmética;

- relação entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversais.

2.6 Sobre os planos de aula

Neste trabalho, anexam-se os planos de aula das 5 oficinas realizadas, pois as mesmas são, essencialmente, a metodologia do trabalho de pesquisa aqui realizado. É importante complementar que os detalhes aqui colocados se devem a intenção de que mais professores possam aproveitar as atividades realizadas, adaptar, readaptar e complementar os planos de aula de acordo com cada realidade.

Alguns apontamentos importantes: vale notar que o Cemi, por ter um currículo integrado, apresentará uma organização curricular necessariamente atrelada a realidade e ao perfil da escola. Ou seja, apesar de, por exemplo, a matriz de referência do PAS citar que função exponencial deve ser trabalhada na primeira serie do Ensino Médio, caso alguma disciplina do Ensino Técnico necessite do assunto no segundo ano do Ensino Médio, o planejamento será reavaliado como tal, segundo a necessidade do próprio curso. A BNCC (Ministério da Educação, 2018) considera essa organização flexível dos conteúdos. Além disso, deve-se levar em consideração a recomposição das aprendizagens, ainda mais considerado um cenário pós-pandêmico, como observado no estudo de caso, recentemente, em (da Silva, Alvaro Carvalho Dias and Correia, Jorge Luiz Pereira and Pereira, Simone Neves, 2023).

3 Resultados, produções dos estudantes, discussões das experiências e o produto educacional

Neste capítulo serão apresentados: os resultados da pesquisa realizada, a produção por parte dos estudantes no que diz respeito a cada atividade e aula elaborada, a opinião deles a respeito das respectivas participações nas oficinas e também sobre os aspectos das demonstrações matemáticas no contexto da sala de aula, discussões do ponto de vista do professor, em sala de aula, que acompanhou os estudantes durante os processos, além do produto educacional e suas ferramentas.

De maneira geral, em todas as oficinas propostas, os estudantes responderam a um Google Forms no fim de cada atividade, que foi mudando ao longo das execuções, dado que a primeira série, por exemplo, teve acesso a um número maior de atividades aplicadas (três atividades no total), e não havia a necessidade de repetir perguntas às quais os alunos já haviam respondido anteriormente.

Os Formulários apresentaram, em geral, a mesma estrutura. As principais perguntas feitas e respondidas pelos estudantes foram:

1- Você observa que possui dificuldades em compreender os conteúdos relacionados a Matemática?

2- Você já conhecia o que é uma demonstração Matemática ou já participou de uma?

3- Você já conhecia a demonstração apresentada na atividade em que participou?

4- Você compreendeu a demonstração feita em sala de aula?

5- A demonstração a qual participou contribuiu com sua aprendizagem?

6- A partir de agora, dada a sua participação na atividade, você acredita que conseguirá aplicar a fórmula (ou conceito) com maior facilidade?

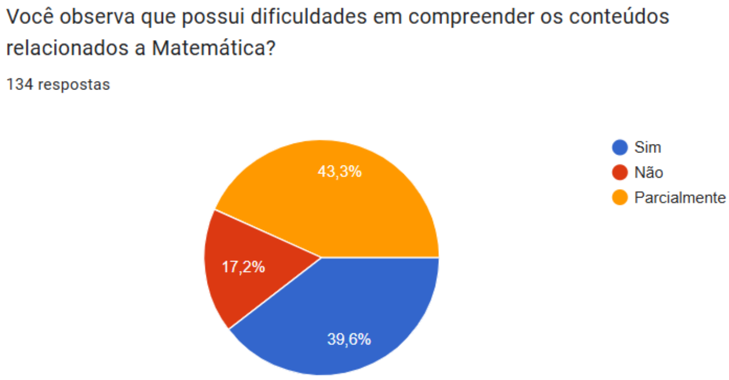
7- Você acha importante que o processo ao qual participou ocorra com mais conteúdos e com maior frequência?

3.1 Atividade envolvendo Progressões aritméticas e geométricas

No que diz respeito à aplicação da atividade envolvendo Progressões aritméticas e geométricas, a mesma ocorreu durante as semanas do dia 02 a 13 de setembro de 2024, devido a quantidade de alunos que participaram da ação. Esta foi a primeira ação realizada e quase todos os estudantes da primeira série participaram (os alunos que faltaram no dia, eventualmente, não participaram). Ao todo, 134 estudantes responderam ao formulário.

Logo na primeira pergunta do formulário, somente $17,2\%$ dos estudantes marcaram que não apresentam dificuldades em compreender conteúdos relacionados à matemática. Isso corresponde a menos de 24 alunos, o que ressalta ainda mais a importância de um trabalho como este. Quase 40% dos participantes afirmaram possuir dificuldades quando o assunto é matemática.

Figura 4 – Formulário envolvendo Pa e Pg - 1



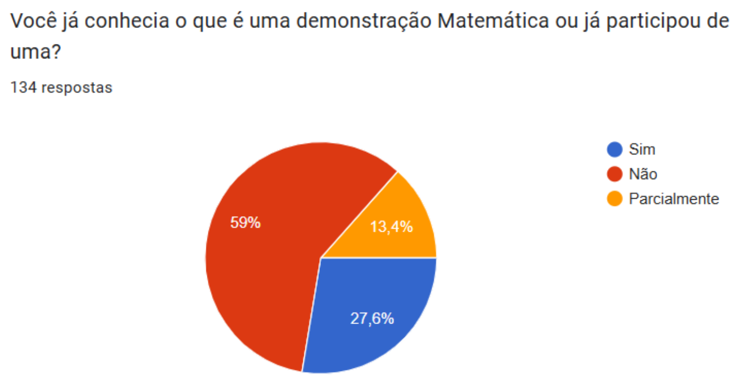
(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

Dos estudantes que responderam sim ou parcialmente, a justificativa para a não compreensão de conteúdos matemáticos, de maneira geral, são diversas, e vão desde dificuldades de concentração e falta de atenção até uma base matemática defasada. Seguem algumas respostas, considerando a pergunta sobre a compreensão dos conteúdos relacionados à Matemática.

> "Eu nunca consigo compreender nada que envolva a matemática, e isso vem se arrastando ao longo dos anos (Aluno 1)"
>
> "Dificuldade para prestar atenção (Aluno 2)"
>
> "Não sei Matemática básica desde a 6ª série (Aluno 3)"
>
> "Costumo ter dificuldade em memorizar os casos em que cada fórmula é aplicada. Em alguns conteúdos, como Radiciação ou medida de km/h na física, por exemplo, existem muitos detalhes que mudam o método ou a fórmula, logo, como tenho maior afinidade com as ciências humanas, tenho dificuldade de memorizar apenas por memorizar, sem entender a lógica por trás (Aluno 4)"

Já no que diz respeito à participação dos estudantes em processos de demonstrações anteriores, quase 60% dos estudantes de primeira série, que participaram da atividade, respondera não conhecer uma demonstração matemática, e somente 27,6% afirmaram uma participação em anos escolares anteriores.

Figura 5 – Formulário envolvendo Pa e Pg - 4



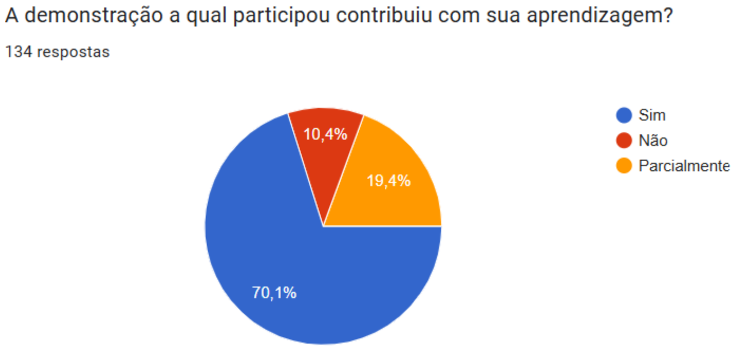
(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

Quando questionados se a atividade, de alguma forma, foi produtiva para eles, se os mesmos gostaram de participar de uma atividade não convencional, como foi feito e sobre a importância de que tais atividades ocorram com maior frequência, as respostas foram, basicamente, positivas. Seguem algumas das respostas coletadas.

> "Sim. Gostei, primeira vez que eu entendi um conteúdo e não apenas decorei simplesmente porque sim (Aluno 1)"
>
> "Gostei pois permite pensarmos em como resolver problemas tanto do dia à dia quanto matemáticos (Aluno 2)"
>
> "Eu gostei da forma em que aprendemos. Achei diferente e revolucionário. Acredito que dessa forma que nós aprendemos mais fácil de frisar um conteúdo que você não tenha facilidade de compreender (Aluno 3)"
>
> "Parcialmente (Aluno 4)"
>
> "Não gostei muito (Aluno 5)"
>
> "Gostei, mas tenho uma certa dificuldade pra efetuar o problema (Aluno 6)"
>
> "Sem dúvida alguma é de extrema importância que processos como este ocorram com frequência. Não só na matéria na qual foi aplicada, mas também nas outras, para que o entendimento do aluno interessado se torne um caminho menos complexo (Aluno 7)"
>
> "Sim, pois me ajuda a compreender a fórmula, já que tenho uma extrema dificuldade em decorar fórmulas de qualquer gênero (Aluno 8)"
>
> "Não necessariamente (Aluno 9)"

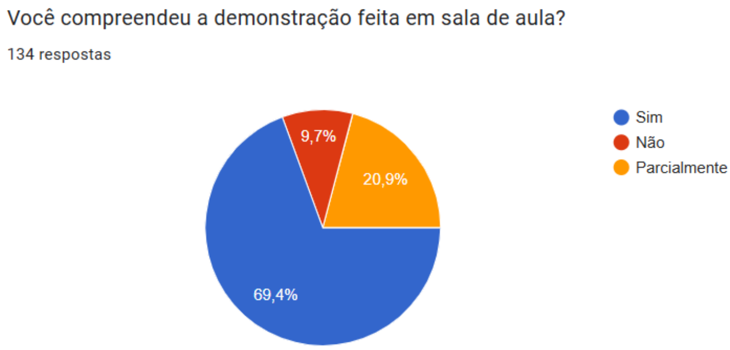
De acordo com os participantes, mais de 70% responderam que a demonstração a qual participaram contribuiu com a aprendizagem, assim como quase 70% deles compreendeu de maneira integral o processo de prova realizado, e apenas 9,7% não compreendeu o que foi feito.

Figura 6 – Formulário envolvendo Pa e Pg - 7



(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

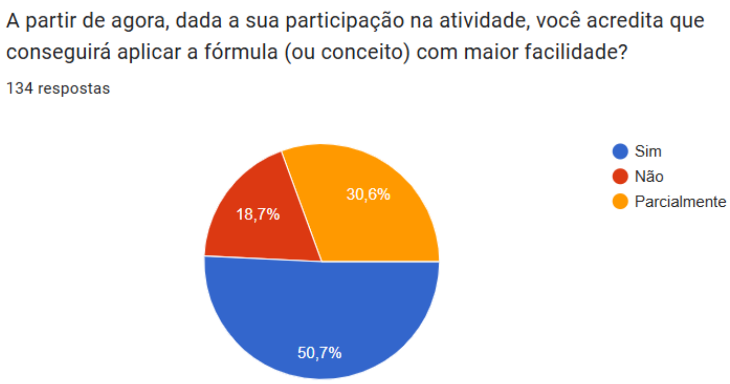
Figura 7 – Formulário envolvendo Pa e Pg - 8



(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

Por fim, 50,7% dos alunos responderam ser capazes de, a partir da participação na atividade, aplicar a fórmula ou conceito com maior facilidade, e apenas 18,7% responderam não ser capazes.

Figura 8 – Formulário envolvendo Pa e Pg - 9

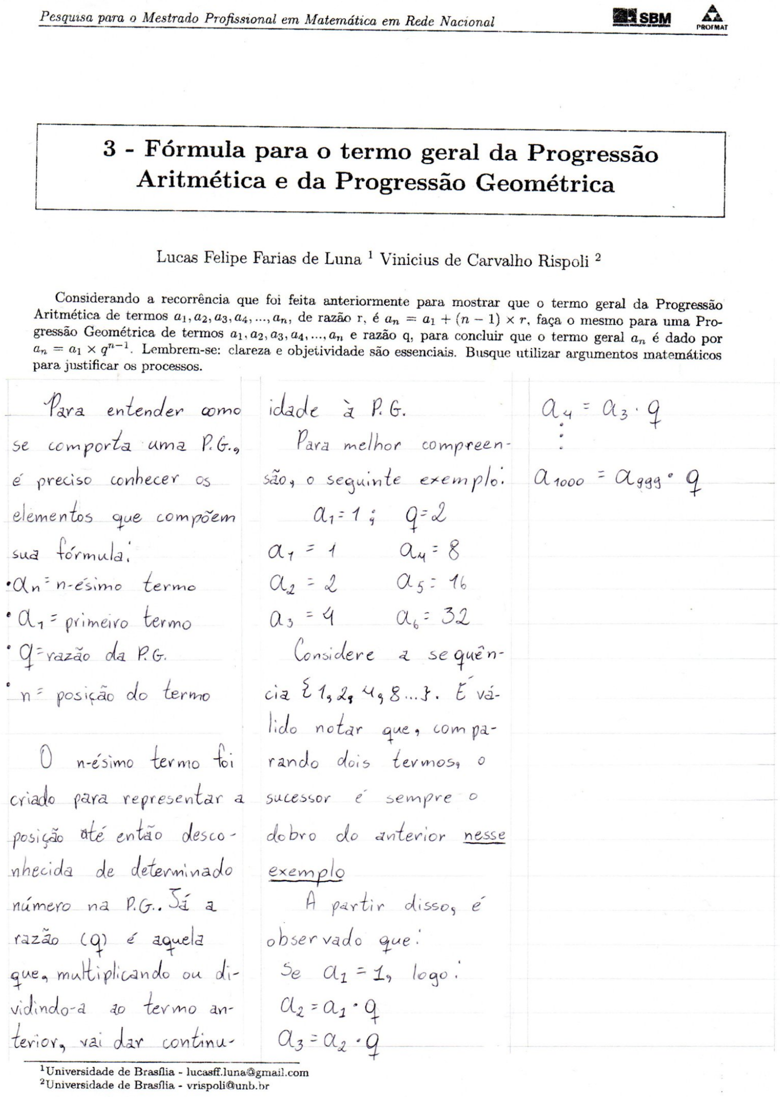


(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

No que diz respeito à produção escrita dos estudantes, nesta atividade em questão, a proposta estabelecia que eles, em duplas, a partir de um material impresso, que está disponibilizado no plano de aula da atividade aplicada, nos anexos, pudessem chegar a fórmula para o termo geral da Progressão Geométrica, utilizando recorrência matemática. Ressalta-se que os estudantes tiveram cerca de 45 minutos para entregar o material e que as duplas não interagiram entre si. Além disso, não houve interferência externa, seja de outros professores ou do aplicador.

Inicialmente, o que pode-se perceber, pela análise geral do material coletado, é que um relativo número de estudantes deixou a atividade em branco ou respondeu algo como "não compreendi o que é para ser feito", ou então iniciou um raciocínio e não o concluiu (realizou a atividade de maneira incompleta), cerca de 5 duplas por turma. Seguem abaixo dois exemplos. Na primeira figura (figura 09), os estudantes não conseguiram concluir, já na segunda (figura 10), os alunos não entenderam o que deveria ser feito.

Figura 9 – Produção dos estudantes - 1


Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

3 - Fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando a recorrência que foi feita anteriormente para mostrar que o termo geral da Progressão Aritmética de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, de razão r, é $a_n = a_1 + (n-1) \times r$, faça o mesmo para uma Progressão Geométrica de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ e razão q, para concluir que o termo geral a_n é dado por $a_n = a_1 \times q^{n-1}$. Lembrem-se: clareza e objetividade são essenciais. Busque utilizar argumentos matemáticos para justificar os processos.

Para entender como se comporta uma P.G., é preciso conhecer os elementos que compõem sua fórmula:

- a_n = n-ésimo termo
- a_1 = primeiro termo
- q = razão da P.G.
- n = posição do termo

O n-ésimo termo foi criado para representar a posição até então desconhecida de determinado número na P.G.. Já a razão (q) é aquela que, multiplicando ou dividindo-a ao termo anterior, vai dar continuidade à P.G.

Para melhor compreensão, o seguinte exemplo:

$a_1 = 1$; $q = 2$

$a_1 = 1$ $\quad a_4 = 8$

$a_2 = 2$ $\quad a_5 = 16$

$a_3 = 4$ $\quad a_6 = 32$

Considere a sequência {1, 2, 4, 8 ...}. É válido notar que, comparando dois termos, o sucessor é sempre o dobro do anterior nesse exemplo

A partir disso, é observado que:

Se $a_1 = 1$, logo:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$

$a_4 = a_3 \cdot q$

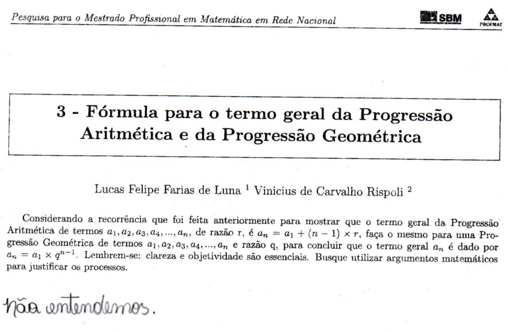
$\vdots$

$a_{1000} = a_{999} \cdot q$

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 10 – Produção dos estudantes - 2



Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

3 - Fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando a recorrência que foi feita anteriormente para mostrar que o termo geral da Progressão Aritmética de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, de razão r, é $a_n = a_1 + (n-1) \times r$, faça o mesmo para uma Progressão Geométrica de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ e razão q, para concluir que o termo geral a_n é dado por $a_n = a_1 \times q^{n-1}$. Lembrem-se: clareza e objetividade são essenciais. Busque utilizar argumentos matemáticos para justificar os processos.

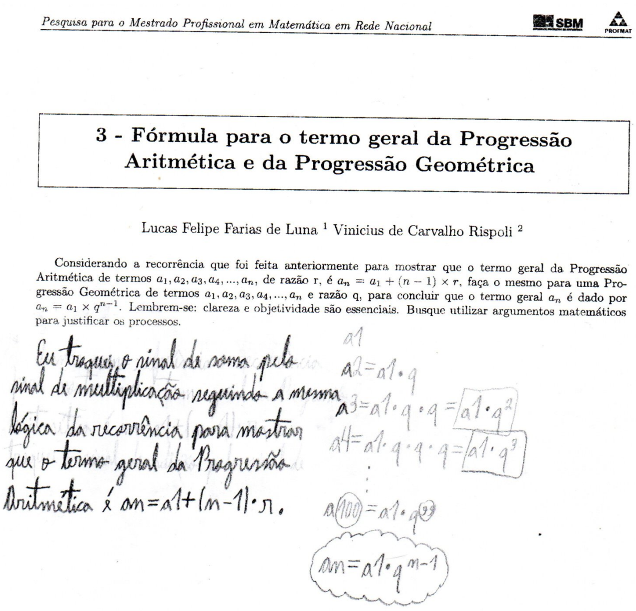
não entendemos.

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

O aluno da figura 09 inseriu informações relevantes para o leitor, definiu os termos de maneira precisa e compreendeu a relação entre o n-ésimo termo e o expoente da potência que tem como base a própria razão da progressão geométrica (n-ésimo menos um), porém, não concluiu a fórmula para o termo de posição n, como deveria.

De modo geral, em relação aos estudantes que compreenderam e conseguiram cumprir com os objetivos da atividade, tem-se basicamente dois grupos: um grupo que, de fato é maior, cerca de 47 duplas, usou como base um exemplo de uma progressão geométrica fixada, para entender o comportamento da mesma e a relação entre os próximos termos, o termo anterior e a razão, e a partir daí utilizou uma generalização para chegar no resultado esperado, e outro grupo, cerca de 15 duplas, que simplesmente se apoiou na dedução feita anteriormente, no quadro, envolvendo progressões aritméticas e, basicamente, efetuou o mesmo processo, apenas substituindo a operação realizada. Seguem abaixo dois exemplos:

Figura 11 – Produção dos estudantes - 3



Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

3 - Fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando a recorrência que foi feita anteriormente para mostrar que o termo geral da Progressão Aritmética de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, de razão r, é $a_n = a_1 + (n-1) \times r$, faça o mesmo para uma Progressão Geométrica de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ e razão q, para concluir que o termo geral a_n é dado por $a_n = a_1 \times q^{n-1}$. Lembrem-se: clareza e objetividade são essenciais. Busque utilizar argumentos matemáticos para justificar os processos.

Eu troquei o sinal de soma pelo sinal de multiplicação seguindo a mesma lógica da recorrência para mostrar que o termo geral da Progressão Aritmética é $an = a1 + (n-1) \cdot r$.

$a1$

$a2 = a1 \cdot q$

$a3 = a1 \cdot q \cdot q = \boxed{a1 \cdot q^2}$

$a4 = a1 \cdot q \cdot q \cdot q = \boxed{a1 \cdot q^3}$

$\vdots$

$a100 = a1 \cdot q^{99}$

$an = a1 \cdot q^{n-1}$

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 12 – Produção dos estudantes - 4

3 - Fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando a recorrência que foi feita anteriormente para mostrar que o termo geral da Progressão Aritmética de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, de razão r, é $a_n = a_1 + (n-1) \times r$, faça o mesmo para uma Progressão Geométrica de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ e razão q, para concluir que o termo geral a_n é dado por $a_n = a_1 \times q^{n-1}$. Lembrem-se: clareza e objetividade são essenciais. Busque utilizar argumentos matemáticos para justificar os processos.

Formula: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ PG: $\{2, 4, 8, 16 \ldots\}$

$a_1 = 2$ $q = 2$

$a_2 = 2 \cdot 2 = 4$

$a_3 = 4 \cdot 2 = 8$ o termo anterior se repete e multiplica pela razão.

$a_4 = 8 \cdot 2 = 16$

$a_{30} = a_{29} \cdot q = ?$

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$\vdots$

$a_{30} = a_1 \cdot q^{29}$

$\vdots$

$a_{50} = a_1 \cdot q^{49}$

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Os estudantes acima, apesar de mais objetivos que o primeiro citado anteriormente, além de toda a compreensão entre as relações dos termos antecessores e sucessores de uma progressão Geométrica, e como a razão se comporta entre eles, conseguiram generalizar a situação para um termo de posição n qualquer, que era exatamente o objetivo da tarefa.

Durante a aplicação da oficina, notou-se que os estudantes realmente se envolveram. Participaram, aproveitaram para tirar dúvidas e perguntar sobre as aplicações desses conteúdos no dia a dia. Naturalmente, quando a atividade entrou em um momento mais prático, como, por exemplo, no momento em que eles estavam com os grãos de arroz e cada dupla pensava a respeito do desafio e, posteriormente, quando estimava-se sobre essa quantidade de grãos, onde estocar, etc, a participação dos estudantes foi quase que total. A própria BNCC incentiva essa construção de conhecimentos voltada a aulas mais exploratórias e dinâmicas, com foco voltado totalmente na produção dos próprios alunos. Além disso, como notado acima, nas opiniões coletadas, mais de 70% dos estudantes gostaram da atividade e compreenderam não só o objetivo da mesma, mas também de onde as fórmulas são geradas, construídas, e como as demonstrações ajudam nesse sentido.

Entende-se, considerando a opinião dos estudantes e o que desenvolveram de produção escrita, que essa atividade atingiu seus objetivos e foi produtiva. Muitos estudantes, apesar de um primeiro contato com demonstrações matemáticas, conseguiram chegar na fórmula para o termo geral da progressão geométrica e entenderam a importância deste processo. Do ponto de vista pedagógico, acredita-se que, com os pré-requisitos bem trabalhados e o assunto sendo tratado e apresentado no momento certo, os alunos podem realmente criar mecanismos, a partir de estratégias de dedução e provas matemáticas, que possam possibilitar a não memorização das fórmulas e também a facilitação na compreensão de itens mais complexos, onde a resolução envolva mais etapas.

3.2 Atividade envolvendo a Fórmula resolutiva da equação de segundo grau

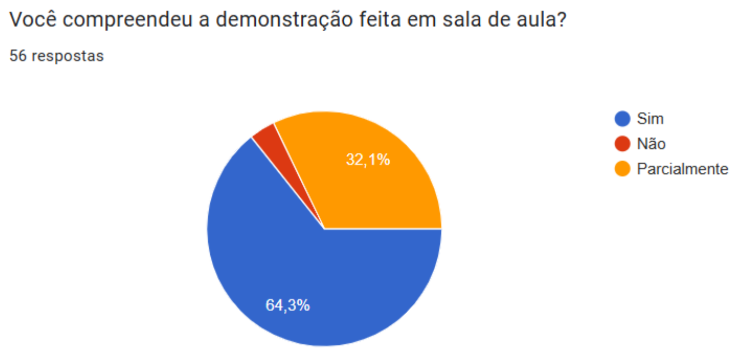
Em relação a atividade envolvendo a fórmula resolutiva da equação de segundo grau, participaram da atividade apenas três turmas de primeira série, devido ao calendário e organização da própria escola durante essa semana. A atividade ocorreu entre os dias 16 a 20 de setembro de 2024 e, ao todo, 70 estudantes estavam presentes e puderam acompanhar o processo de demonstração da fórmula, porém, apenas 56 responderam ao formulário. Ressalta-se que essa atividade, entre todas as aplicadas, foi a que os estudantes apresentaram mais dúvidas, e, por isso, houve a necessidade de voltar em conteúdos prévios, durante a dedução, por mais que já abordados de maneira prévia, como, por exemplo, produtos notáveis, operações com frações e operações com monômios envolvendo frações.

Considera-se que parte desta dificuldade de compreensão, desta dedução em específico, está relacionada à falta de afinidade dos estudantes com processos deste tipo, mais algébricos, dado que nesta prova, em específico, a abordagem escolhida foi, realmente, mais voltada a uma linguagem matemática mais pura e densa. Outro fator de relevância, dificultador, foi o fato da atividade não apresentar em sua estrutura um momento mais prático, apesar da participação dos alunos, de maneira quase total, durante todo o processo de dedução.

Durante o processo de prova, os estudantes foram questionados a todo instante sobre a validade do que estava sendo realizado: “se o a é diferente de zero, pode-se realmente dividir os dois lados da igualdade por a? É correto realizar esse processo? O MMC entre a e 4a foi realizado de maneira correta? Há algum erro no quadro? Por que aquele mais ou menos deve aparecer ali depois de extrair-se a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade?”. Além disso, ocorreu em uma turma de um estudante aceitar ir ao quadro realizar pequenos processos durante a prova, como operar as frações, por exemplo.

Já no que diz respeito à coleta de opiniões, via formulário, apenas dois estudantes $(3,6\%)$ marcaram não quando perguntados sobre a compreensão da demonstração realizada, e $32,1\%$ marcaram que compreenderam parcialmente. As justificativas dos que marcaram não ou parcialmente estão centradas em "o processo foi longo demais e acabei me perdendo", "alguns trechos ficaram confusos" e "não conseguiria reproduzir o processo sozinho". Seguem abaixo alguns comentários dos estudantes.

Figura 13 – Formulário envolvendo fórmula resolutiva da equação de segundo grau - 1



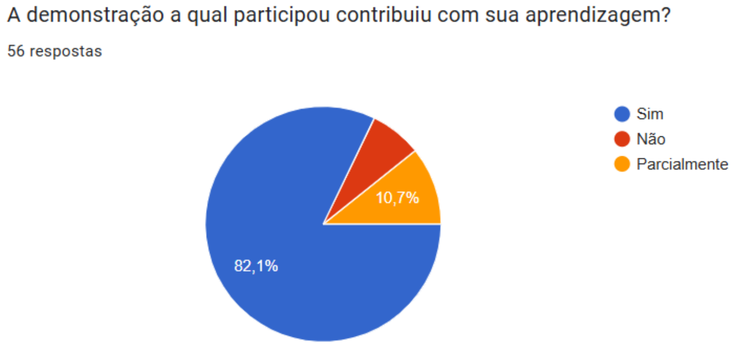
(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

> "Algumas das partes da explicação foi um pouco difícil pra compreender pois eu tenho um pouco de dificuldade em matemática (Aluno 1)"
>
> "Entendi com a ajuda do professor, mas fazendo por conta própria eu não seria capaz de reproduzir da mesma forma (Aluno 2)"
>
> "Me perdi (Aluno 3)"
>
> "Entendi Parcialmente porque precisa entender muita coisa (Aluno 4)"
>
> "Muita informação (Aluno 5)"
>
> "Muita coisa para aprender em uma aula (Aluno 6)"

No que diz respeito a visão de quem aplicou a atividade, alguns estudantes se mostraram muito surpresos com o resultado, afirmando até que pensavam que o processo daria errado, pois a fórmula parecia muito distante do que estava sendo apresentado no quadro. Em contrapartida, esta foi a atividade de menor envolvimento dos alunos.

Quando perguntados sobre a contribuição da demonstração para a aprendizagem dos mesmos, 46 estudantes afirmam que a atividade contribuiu, contra apenas 4 que marcaram que não. Segue abaixo algumas respostas dos estudantes sobre essa contribuição (ou não).

Figura 14 – Formulário envolvendo fórmula resolutiva da equação de segundo grau - 3



(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

> "Me ajudou, pois quando me apresentam apenas a fórmula eu não consigo aprender a mesma, e com a resolução eu entendo como a fórmula funciona, assim decorando-a com mais facilidade (Aluno 1)"
>
> "E sempre bom mais uma explicação (Aluno 2)"
>
> "Na compreensão detalhada da matéria (Aluno 3)"
>
> "Mostrar como tudo aquilo surgiu é muito importante para compreensão (Aluno 4)"
>
> "Deu uma ajuda a mais, certo hora fiquei perdido mas depois ficou melhor explicado (Aluno 5)"
>
> "Não entendi muito esse conteúdo (Aluno 6)"
>
> "Quando precisar usar a fórmula não vou mais esquecer a ordem em que deve ser escrita pois a demonstração foi impressionante e me ajudou entender tudo o que eu entendia parcialmente (Aluno 7)"
>
> "Foi legal ver os conceitos na prática porque assim ficou mais fácil de entender (Aluno 8)"

Apesar das dificuldades observadas durante o processo de dedução, que levou um horário duplo para ser realizado (cerca de 1 hora e 30 minutos), acredita-se que os objetivos pensados para a mesma foram alcançados e que os estudantes, em maioria, entenderam processo dedutivo, ou pelo menos as partes mais fundamentais dele.

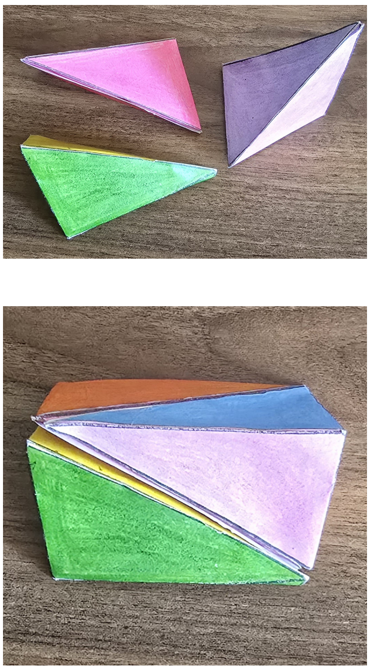
Notou-se, nesta atividade, por ser mais algébrica, que os estudantes apresentaram uma dificuldade acentuada, o que pode indicar que este tipo de demonstração possui uma limitação, talvez pela falta de uma parte prática, ou de um momento mais lúdico e menos abstrato, ou até mesmo pela falta de prática dos estudantes com a linguagem matemática em sua essência mais pura.

3.3 Atividade envolvendo a Relação entre o volume de Prismas e Pirâmides

Sobre a atividade envolvendo a Relação entre o volume de prismas e pirâmides, que foi aplicada entre os dias 4 a 13 de setembro de 2024, com os estudantes da terceira série do Ensino Médio, participaram da atividade e responderam ao formulário um total de 46 estudantes. Ressalta-se aqui que, o CEMI Taguatinga, no ano de 2024, tinha apenas três turmas de terceira série. Considerando o número de estudantes frequentes, as terceiras séries totalizavam um número inferior a 75 alunos.

Em resumo a essa atividade, os estudantes, inicialmente deveriam montar três pirâmides que lhes foram entregues impressas e planificadas, e, posteriormente, buscar uma maneira de encaixar as mesmas em posições específicas e únicas a fim de gerar um prisma, o que sugere que o volume de uma dessas pirâmides deveria ser proporcional a um terço do volume do referido prisma. Inicialmente, a demanda dos próprios estudantes foi que pudessem colorir as pirâmides para em sequência conseguir concluir a primeira parte da tarefa, e assim foi feito. Por estas razões, a atividade durou cerca de 2 horários duplos (aproximadamente 3 horas), separados ao longo da mesma semana. As duas imagens abaixo mostram como as pirâmides devem ser posicionadas e foram produzidas pelos próprios alunos.

Figura 15 – Relação entre o volume de prismas e pirâmides



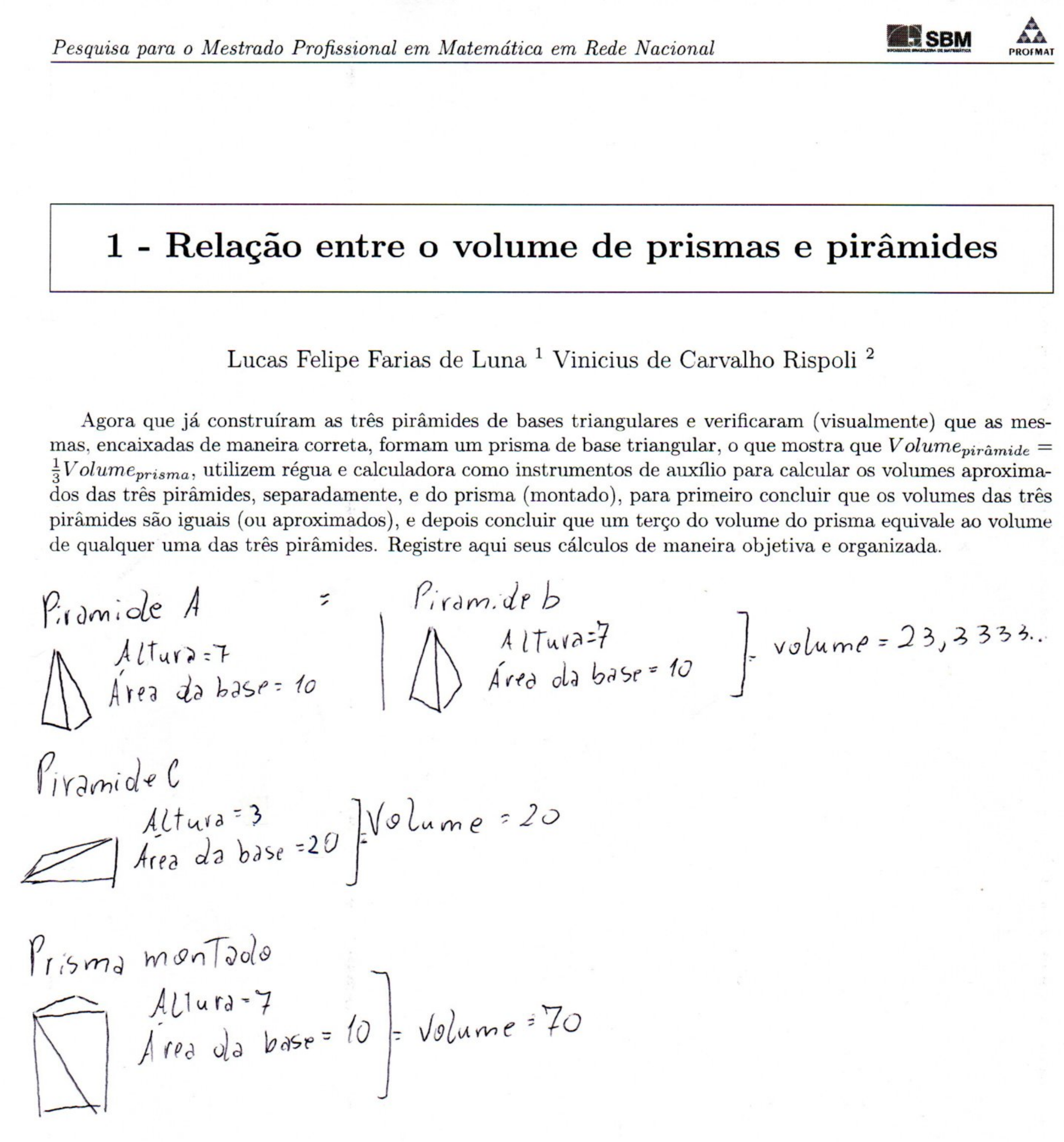
(fonte: produção dos estudantes)

Outra maneira de abordar essa fase inicial desta aplicação é utilizar uma construção similar, só que feita no software Geogebra, como disponibilizado no site produto desta dissertação.

Na sequência, os estudantes deveriam utilizar régua e calculadora para verificar, de maneira aproximada, que os volumes das três pirâmides eram iguais (ou aproximados), na sequência deveriam calcular o volume do prisma montado, e, por fim, concluírem que a soma dos volumes das três pirâmides é o volume do próprio prisma, ou aproximadamente isso.

De maneira geral, observou-se que os estudantes, que foram divididos em trios, a fim de otimizar as tarefas de pintura das pirâmides e as medições e cálculos citados acima, compreenderam bem o objetivo da atividade. Apenas dois trios não conseguiram concluir todos os cálculos e verificar que a relação é de fato válida. Abaixo, seguem três exemplos: no primeiro, os estudantes, apesar de tirarem as medidas, não concluíram os cálculos. No segundo, os alunos, apesar de erros, no momento da escrita, e de conceitos ou definições, como onde cita que vai dividir por dois e na verdade é por três, ou quando cita que " o valor de uma pirâmide é base x altura", provavelmente se referindo ao volume da pirâmide, foram os que mais se aproximaram dos resultados esperados (a diferença entre os volumes comparados foi um pouco maior do que 0,5), e mesmo com os erros, durante o processo dos cálculos, é possível notar que foram realizados de maneira correta. Para que os cálculos realizados pelos estudantes fiquem mais claros, durante a observação da aplicação da atividade, os alunos estavam calculando o volume das pirâmides, quase que em maioria, de uma mesma maneira: primeiro escolhiam um triângulo retângulo para ser a base da pirâmide, por razões naturais; em um segundo momento mediam os lados desse triângulo com a régua (base e altura); em seguida multiplicavam os valores encontrados para, daí então, dividir o resultado deste produto por dois, razão pela qual aparece a divisão por dois na segunda imagem e em várias outras coletadas. Por fim, na última imagem, percebe-se que os estudantes foram bem mais objetivos que os da segunda imagem, realizaram os cálculos com uma boa precisão, porém, no fim, no momento de comparar a soma dos volumes das pirâmides com o volume do prisma, deixaram apenas a soma $25,058 + 25,058 + 26,32$, que resulta em $76,436$ (uma diferença maior do que 1 na comparação esperada entre os volumes).

Figura 16 – Produção dos estudantes - 5



Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SBM PROFMAT

1 - Relação entre o volume de prismas e pirâmides

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Agora que já construíram as três pirâmides de bases triangulares e verificaram (visualmente) que as mesmas, encaixadas de maneira correta, formam um prisma de base triangular, o que mostra que $Volume_{pirâmide} = \frac{1}{3}Volume_{prisma}$, utilizem régua e calculadora como instrumentos de auxílio para calcular os volumes aproximados das três pirâmides, separadamente, e do prisma (montado), para primeiro concluir que os volumes das três pirâmides são iguais (ou aproximados), e depois concluir que um terço do volume do prisma equivale ao volume de qualquer uma das três pirâmides. Registre aqui seus cálculos de maneira objetiva e organizada.

Piramide A = Piramide b

Altura = 7 | Altura = 7

Área da base = 10 | Área da base = 10] = volume = 23,3333..

Piramide C

Altura = 3

Área da base = 20] = Volume = 20

Prisma montado

Altura = 7

Área da base = 10] = Volume = 70

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 17 – Produção dos estudantes - 6

Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

1 - Relação entre o volume de prismas e pirâmides

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Agora que já construíram as três pirâmides de bases triangulares e verificaram (visualmente) que as mesmas, encaixadas de maneira correta, formam um prisma de base triangular, o que mostra que $Volume_{pirâmide} = \frac{1}{3} Volume_{prisma}$, utilizem régua e calculadora como instrumentos de auxílio para calcular os volumes aproximados das três pirâmides, separadamente, e do prisma (montado), para primeiro concluir que os volumes das três pirâmides são iguais (ou aproximados), e depois concluir que um terço do volume do prisma equivale ao volume de qualquer uma das três pirâmides. Registre aqui seus cálculos de maneira objetiva e organizada.

Dada as piramides: A, B e C vamos calcular dados volumes. Tendo em vista que o valor de uma piramede é base x altura sendo a piramede A e C iguais basta calcula uma só: areia da base vezes altura dividida por dois. Logo em seguida pegue o resultado e multiplique pela atura da base depois basta dividir por três. Tendo em vista isso faça o mesmo com a pirâmede B. Tendo assim os resultados monte um prisma com as pirâmides e calcule a base do prisma que você já tem o valor assim como a altura pegue isso e no final multiplique: Dado esses dados podemos deduzir que um terço do volume do prisma equivale ao volume de ambas as pirâmides.

Calculos usados
pirâmide:

A: $5 \times 4{,}4 = 22$ $\quad 22 \div 2 = 11$ $\quad 6{,}5 \times 11 = 71{,}5$ $\quad 71{,}5 \div 3 = 23{,}83$

B: $6{,}5 \times 5 = 32{,}5$ $\quad 32{,}5 \div 2 = 16{,}25$ $\quad 4{,}5 \times 16{,}25 = 73{,}125$ $\quad 73{,}125 \div 3 = 24{,}375$

prisma:

$6{,}5 \times 11 = 71{,}5$ muito proximo

somados

$23{,}33 + 24{,}375 + 23{,}83 = 72{,}035$

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 18 – Produção dos estudantes -7

Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

1 - Relação entre o volume de prismas e pirâmides

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Agora que já construíram as três pirâmides de bases triangulares e verificaram (visualmente) que as mesmas, encaixadas de maneira correta, formam um prisma de base triangular, o que mostra que $Volume_{pirâmide} = \frac{1}{3}Volume_{prisma}$, utilizem régua e calculadora como instrumentos de auxílio para calcular os volumes aproximados das três pirâmides, separadamente, e do prisma (montado), para primeiro concluir que os volumes das três pirâmides são iguais (ou aproximados), e depois concluir que um terço do volume do prisma equivale ao volume de qualquer uma das três pirâmides. Registre aqui seus cálculos de maneira objetiva e organizada.

$V = \frac{Ab \cdot H}{3}$

Volume das pirâmides iguais – pirâmides A e B

$h = 6,7cm$

$Ab = 11,22$

$V = \frac{11,22 \cdot 6,7}{3}$

$V = 25,058$

A = B

$hb = 4,4$

$b = 5,1$

$\frac{4,4 \cdot 5,1}{2} =$

Volume da pirâmide diferente - pirâmide C

$V = \frac{Ab \cdot H}{3}$

$h = 4cm$

$h = 4,7$

$b = 8,4$

$Ab = \frac{8,4 \cdot 4,7}{2}$

$Ab = 19,74$

$V = \frac{19,74 \cdot 4}{3}$

$V = 26,32$

Volume do prisma

$Ab \times h$

$11,22 \cdot 6,7$

$V = 75,174$

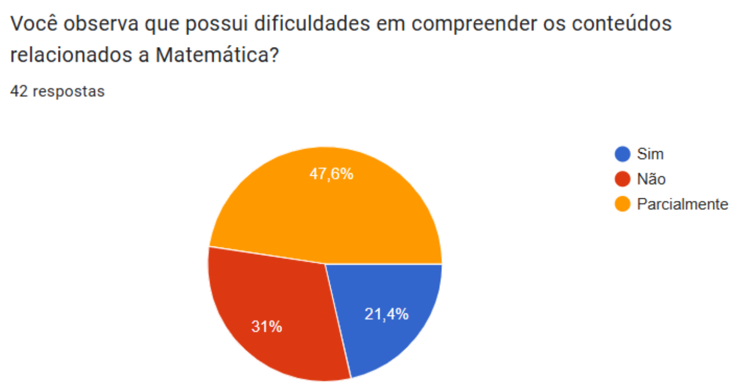
Temos que o volume das 3 pirâmides A, B e C somadas 25,058 + 25,058 + 26,32 é igual ou aproximado ao volume do prisma.

[1] Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2] Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Como a atividade foi a primeira e única realizada com a terceira série, o formulário para coleta de opiniões dos estudantes é semelhante ao utilizado na atividade 5.1., deste capítulo. Quando questionados sobre as dificuldades em compreender conteúdos matemáticos, apenas 13 estudantes (31%) afirmaram não possuir dificuldades. De acordo com os que possuem dificuldade, parcial ou não, as causas são diversas, desde falta de atenção e concentração, a falta de prática e dificuldades com interpretação de itens. Seguem alguns comentários dos alunos.

Figura 19 – Formulário envolvendo a relação entre o volume de prismas e pirâmides - 1



(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

> "Ajudou a aula não ser a mesma coisa de sempre, mas algo diferente (Aluno 1)"
>
> "Essa atividade me ajudou bastante, foi mais fácil de entender o conteúdo apresentado (Aluno 2)"
>
> "Ter uma demonstração prática da relação entre as formas geométricas me deu uma melhor noção do porquê a fórmula que aprendemos é do que jeito que é (Aluno 3)"
>
> "Eu não conseguia imaginar nem compreender como 3 pirâmides formavam um prisma (Aluno 4)"
>
> "Ver na prática os pedaços se conectando e podendo medir diretamente com a régua facilita a compreensão do cálculo (Aluno 5)"
>
> "Com o objeto em mãos consegui ver todas as partes do prisma e calculá-las sem precisas imaginar (Aluno 6)"
>
> "Consegui visualizar o motivo do porque sempre dividir por 3 a pirâmide (Aluno 7)"
>
> "A visibilidade fez com que o conteúdo fixasse mais na mente (Aluno 8)"

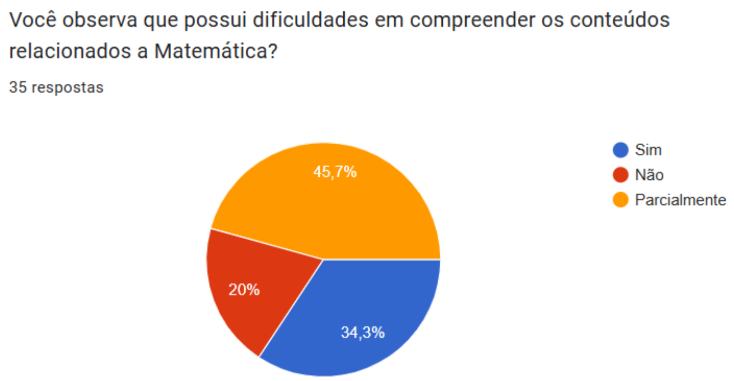
De modo geral, observa-se que os estudantes se envolveram com a atividade devido a sua natureza lúdica e prática. Acredita-se que os objetivos para a mesma foram de fato atingidos e a atividade foi muito produtiva, para todos. Durante a aplicação da atividade, os estudantes apresentaram dúvidas na utilização do instrumento de medidas (se deveriam começar a medir no 0 ou no 1 presentes na régua), e alguns trios apontaram dificuldades em medir uma altura. Apesar de tais problemas, houve uma intervenção no sentido de ajudá-los com essas questões e a atividade seguiu normalmente.

3.4 Atividade envolvendo Logaritmos

A atividade envolvendo logaritmos foi aplicada para as segundas séries durante o período de 19 a 29 de setembro de 2024. Ao todo, participaram da atividade 4 turmas, com 28 alunos em média. Apesar de uma grande participação no que diz respeito à produção escrita, por parte dos estudantes, e uma participação destes, quase que total, durante as aulas, com a dedução das propriedades e com as aplicações do logaritmo, poucos estudantes responderam ao formulário (apenas 35 estudantes). Como já citado anteriormente, a escola, pela proposta de proporcionar um ambiente de estudos, em tempo integral, integrado ao ensino técnico profissionalizante, possibilita muitas saídas de campo aos estudantes e, por este motivo, alguns acabaram não respondendo ao formulário. Ressalta-se também que essa atividade foi a que mais levou tempo, pela dificuldade que os estudantes encontraram, durando um pouco mais do que 4 horas de encontro e que a mesma não ocorreu no mesmo dia, mas ao longo do período citado acima.

No que diz respeito a segunda série, apenas 7 alunos (20%) afirmaram não possuir dificuldades em compreender conteúdos matemáticos. Dos que afirmaram possuir dificuldades, parcialmente ou não, as causas, de acordo com os mesmos, estão centradas em falta de atenção e problemas de concentração e dificuldades de aprendizado.

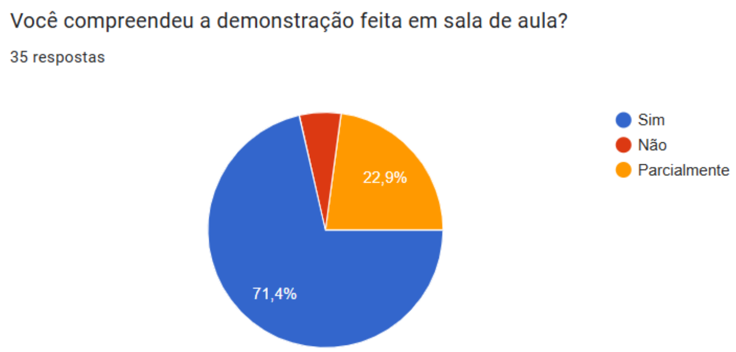
Figura 20 – Formulário envolvendo logaritmos - 1



(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

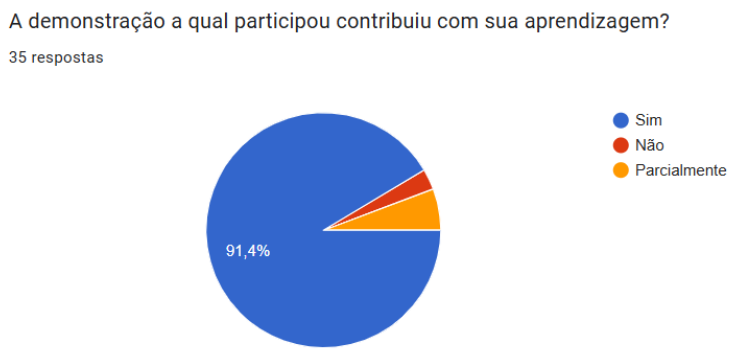
Além disso, apenas dois estudantes $(5,7\%)$ afirmaram não terem compreendido as demonstrações feitas em sala de aula e mais de 90% dos participantes marcaram que a demonstração, de alguma maneira, contribuiu com o processo de aprendizagem dos mesmos, e apenas um alunos marcou não ter contribuído.

Figura 21 – Formulário envolvendo logaritmos - 2



(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

Figura 22 – Formulário envolvendo logaritmos - 3



(fonte: formulário respondido pelos estudantes)

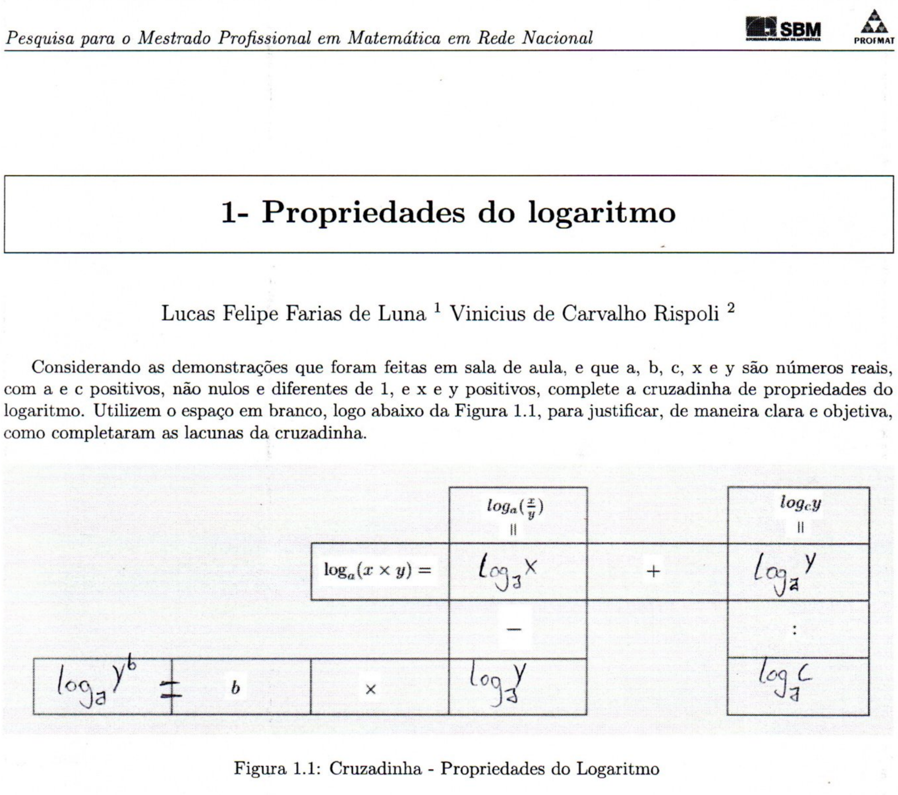
Quando questionados sobre como essas demonstrações contribuíram (ou não) com a atividade, os alunos evidenciam a importância de se trabalhar temas muito abstratos, como o caso do logaritmo, de maneira a aproximá-los mais de aplicações relacionadas ao dia a dia, por mais que terremotos e datação do carbono 14 ainda seja um exemplo muito distante.

Durante a aplicação da atividade, percebeu-se um interesse muito incomum dos estudantes a respeito do tema, tanto quando abordou-se a idade do planeta terra e os métodos utilizados para chegar a tais conclusões, quanto quando o assunto dos terremotos foi explorado. Os alunos apresentaram muitas dúvidas interessantes e a percepção que obteve-se naquele momento foi a de que estavam realmente inseridos naquele processo, interessados em entender os aspectos das aplicações do logaritmo entre aqueles contextos. Mesmo quando a aula terminou, e os alunos puderam sair para o intervalo, alguns estudantes permaneceram em sala tirando dúvidas e fazendo perguntas sobre o tema. Como citado acima, poucos estudantes de fato não compreenderam as demonstrações realizadas no quadro, o que é um bom indicativo. Seguem as opiniões de alguns estudantes abaixo.

> "Eu aprendi mais como se usa logaritmo e como ele é importante na aprendizagem (Aluno 1)"
>
> "Acredito que a demonstração faz com que o conteúdo fique mais fixado na mente (Aluno 2)"
>
> "Além de trazer sentido para as fórmulas, a demonstração desbloqueou formas de raciocinar que poderei aplicar em outras situações (Aluno 3)"
>
> "Entender como chegar no resultado me ajudou a compreender como faz (Aluno 4)"

No que diz respeito à produção escrita dos estudantes, após uma análise minuciosa, pode-se separar esta produção, basicamente, em três grupos, sendo o primeiro maior, em quantidade de estudantes e o último menor: um grupo onde os estudantes conseguiram cumprir as duas atividades de maneira significativa, todos os conceitos corretos, e a demonstração com as lacunas corrigidas; outro grupo que iniciou a tarefa, mas não concluiu, talvez por uma questão de tempo, porém, até onde produziram, fizeram de maneira assertiva; e o último é o grupo dos estudantes que cometeram algum erro. Lembrando que, na produção escrita, todos os estudantes presentes no dia da aplicação puderam participar, ou seja, é uma produção de quase 120 estudantes, de maneira individual. Abaixo seguem dois exemplos do primeiro grupo, que conseguiu concluir com êxito a atividade.

Figura 23 – Produção dos estudantes -8



Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

1- Propriedades do logaritmo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando as demonstrações que foram feitas em sala de aula, e que a, b, c, x e y são números reais, com a e c positivos, não nulos e diferentes de 1, e x e y positivos, complete a cruzadinha de propriedades do logaritmo. Utilizem o espaço em branco, logo abaixo da Figura 1.1, para justificar, de maneira clara e objetiva, como completaram as lacunas da cruzadinha.

			$log_a(\frac{x}{y})$ ‖			$log_c y$ ‖
			$\log_a(x \times y) =$	$log_a x$	+	$log_a y$
				−		:
$log_a y^b$	=	b	×	$log_a y$		$log_a c$

Figura 1.1: Cruzadinha - Propriedades do Logaritmo

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 24 – Produção dos estudantes -9

Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

1- Propriedades do logaritmo - parte 02

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Analise a demonstração abaixo e tente completar corretamente as lacunas apresentadas.

Desejamos mostrar que $log_a(x \times y) = \boxed{\log_a x} + log_a y$. Para tal, tome que $log_a(x \times y) = M$ (1), $log_a x = N$ (2) e $log_a y = O$ (3). Pela definição de log, sabemos que $\boxed{\log_a b = x}$, se, e somente se, $a^c = b$. Portanto, podemos reescrever (1), (2) e (3) das seguintes maneiras:

$$(1) \Longrightarrow a^M = \boxed{x \cdot y} \qquad (1.1)$$

$$(2) \Longrightarrow a^N = x \qquad (1.2)$$

$$(3) \Longrightarrow \boxed{a^o} = y \qquad (1.3)$$

Agora, substituindo as informações das linhas (1.2) e (1.3) na linha (1.1), teremos:

$$(1) \Longrightarrow a^M = x \times y = \boxed{a^m + a^o} = a^{N+O} \qquad (1.4)$$

De acordo com a última igualdade, temos duas potências que são iguais ($a^M = a^{N+O}$), e, para isso ocorrer de fato, precisamos garantir que as bases e os expoentes sejam idênticos. Vale notar que a base coincide. Portanto, resta que $\boxed{M} = N + O$ (4). Para finalizar, basta observar que $M = log_a(x \times y)$, $N = log_a x$ e $O = log_a y$.

Ou seja, podemos reescrever (4) da seguite maneira:

$$M = \boxed{x \cdot y} = N + O = \boxed{\log x + \log y} \qquad (1.5)$$

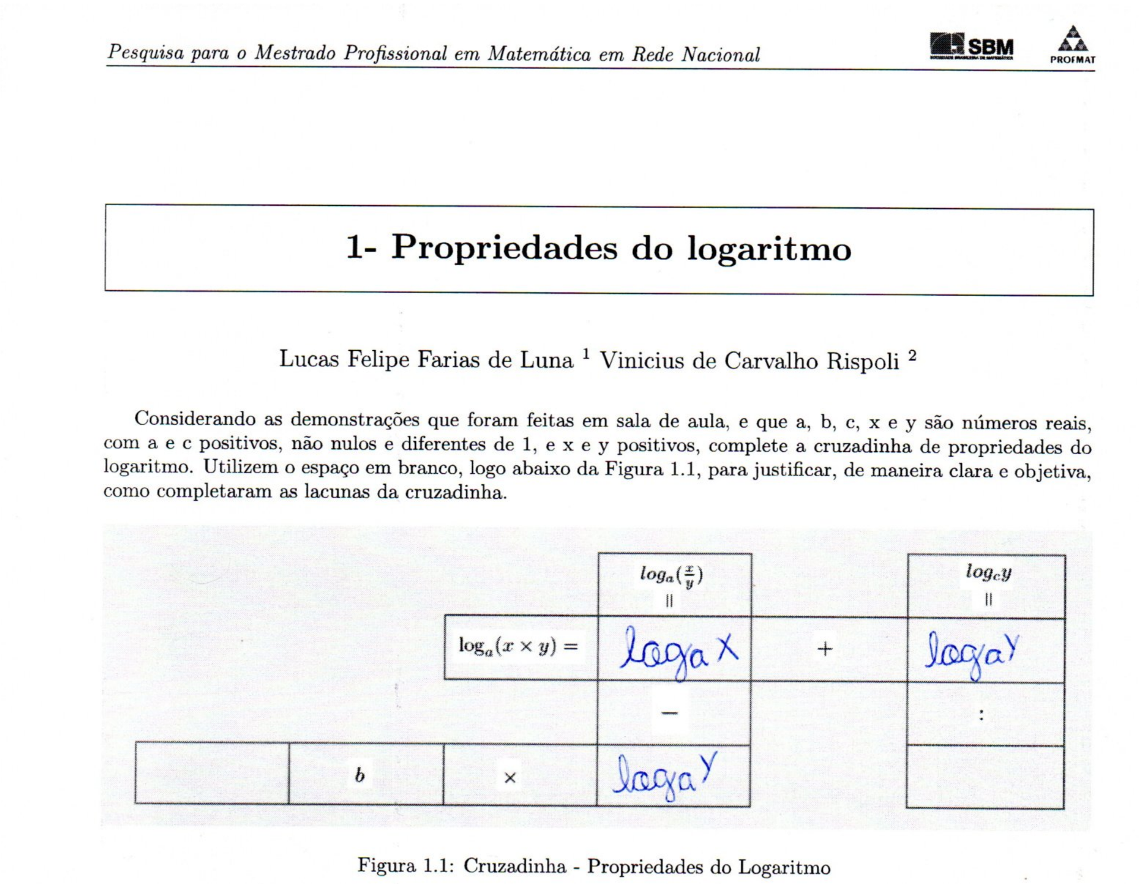
Ou ainda, $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$, como gostaríamos de demonstrar.

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

As duas próximas imagens se referem ao grupo que eventualmente não completou a tarefa e o grupo dos estudantes que completaram, porém, com algum erro, respectivamente. Na primeira imagem, nota-se que o estudante deixou apenas duas lacunas da cruzadinha a serem completadas, enquanto que na segunda imagem, na equação da linha (1.5) o estudante acabou escrevendo, do lado direito da igualdade, a operação de multiplicação ao invés da soma, que seria o correto.

Figura 25 – Produção dos estudantes - 10



Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

1- Propriedades do logaritmo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando as demonstrações que foram feitas em sala de aula, e que a, b, c, x e y são números reais, com a e c positivos, não nulos e diferentes de 1, e x e y positivos, complete a cruzadinha de propriedades do logaritmo. Utilizem o espaço em branco, logo abaixo da Figura 1.1, para justificar, de maneira clara e objetiva, como completaram as lacunas da cruzadinha.

			$log_a(\frac{x}{y})$ $\parallel$		$log_c y$ $\parallel$
		$\log_a(x \times y) =$	loga X	+	logaY
			−		:
	b	$\times$	loga Y		

Figura 1.1: Cruzadinha - Propriedades do Logaritmo

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 26 – Produção dos estudantes - 11

1- Propriedades do logaritmo - parte 02

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Analise a demonstração abaixo e tente completar corretamente as lacunas apresentadas.

Desejamos mostrar que $log_a(x \times y) = \boxed{log_a x} + log_a y$. Para tal, tome que $log_a(x \times y) = M$ (1), $log_a x = N$ (2) e $log_a y = O$ (3). Pela definição de log, sabemos que $\boxed{log_a c^b}$, se, e somente se, $a^c = b$. Portanto, podemos reescrever (1), (2) e (3) das seguintes maneiras:

$$(1) \Longrightarrow a^M = \boxed{x . y} \tag{1.1}$$

$$(2) \Longrightarrow a^N = x \tag{1.2}$$

$$(3) \Longrightarrow \boxed{A^O} = y \tag{1.3}$$

Agora, substituindo as informações das linhas (1.2) e (1.3) na linha (1.1), teremos:

$$(1) \Longrightarrow a^M = x \times y = \boxed{a^N . a^O} = a^{N+O} \tag{1.4}$$

De acordo com a última igualdade, temos duas potências que são iguais ($a^M = a^{N+O}$), e, para isso ocorrer de fato, precisamos garantir que as bases e os expoentes sejam idênticos. Vale notar que a base coincide. Portanto, resta que $\boxed{M} = N + O$ (4). Para finalizar, basta observar que $M = log_a(x \times y)$, $N = log_a x$ e $O = log_a y$.

Ou seja, podemos reescrever (4) da seguite maneira:

$$M = \boxed{log(x, y)} = N + O = \boxed{log_a x . log_a y} \tag{1.5}$$

Ou ainda, $\boxed{log(x . y) = log_a x . log_a y}$, como gostaríamos de demonstrar.

[1] Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2] Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

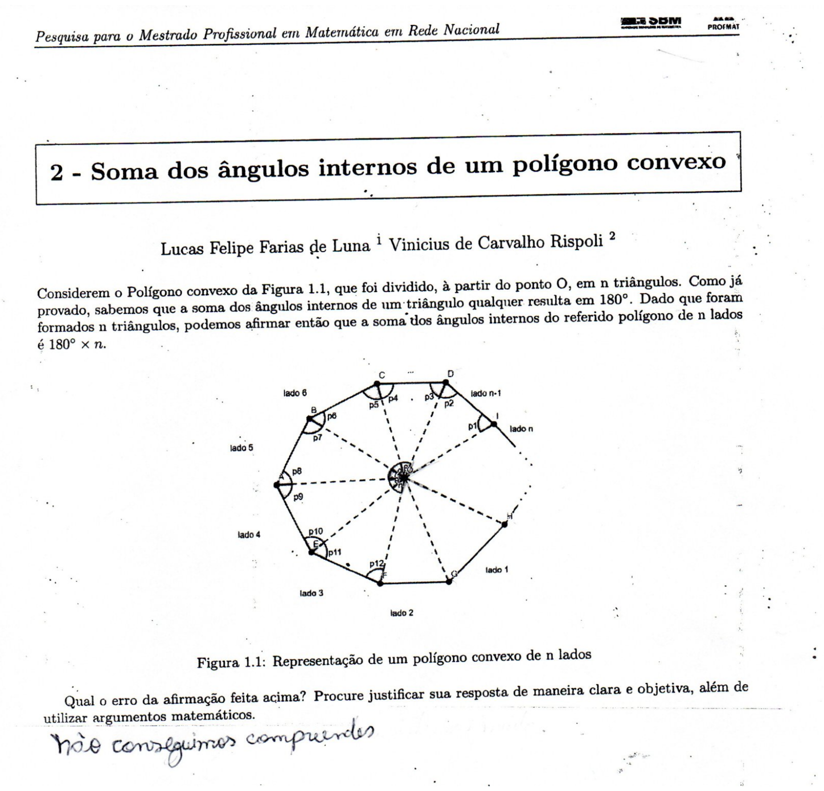
3.5 Atividade envolvendo soma dos ângulos internos de um polígono convexo

De início, vale citar que, devido a atividade envolvendo progressões aritméticas e geométricas, os estudantes demonstraram uma maior facilidade com a proposta apresentada nas seções envolvendo soma dos ângulos internos de um polígono convexo, no que diz respeito não somente a compreensão da dedução envolvendo recorrência matemática, mas também na produção, na parte prática da atividade.

A atividade em questão ocorreu entre os dias 01 e 04 de outubro de 2024. Participaram da atividade um total de 60 estudantes (três turmas distintas), e os mesmos, diferente das demais oficinas, foram entrevistados oralmente pelo professor aplicador, após a conclusão da atividade prática. Tal entrevista tinha o objetivo de coletar a opinião dos alunos no que diz respeito à participação na atividade.

Em relação a produção escrita dos estudantes, quanto a parte prática da ação, que, assim como as demais, foi realizada em duplas, apenas 3 duplas não atingiram o resultado esperado. Estes, não conseguiram entender o problema gerado pela afirmação errada que foi feita no enunciado do problema, e apenas escreveram que não conseguiram entender. Segue um exemplo abaixo.

Figura 27 – Produção dos estudantes - 12



Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

2 - Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerem o Polígono convexo da Figura 1.1, que foi dividido, à partir do ponto O, em n triângulos. Como já provado, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta em 180°. Dado que foram formados n triângulos, podemos afirmar então que a soma dos ângulos internos do referido polígono de n lados é $180° \times n$.

Figura 1.1: Representação de um polígono convexo de n lados

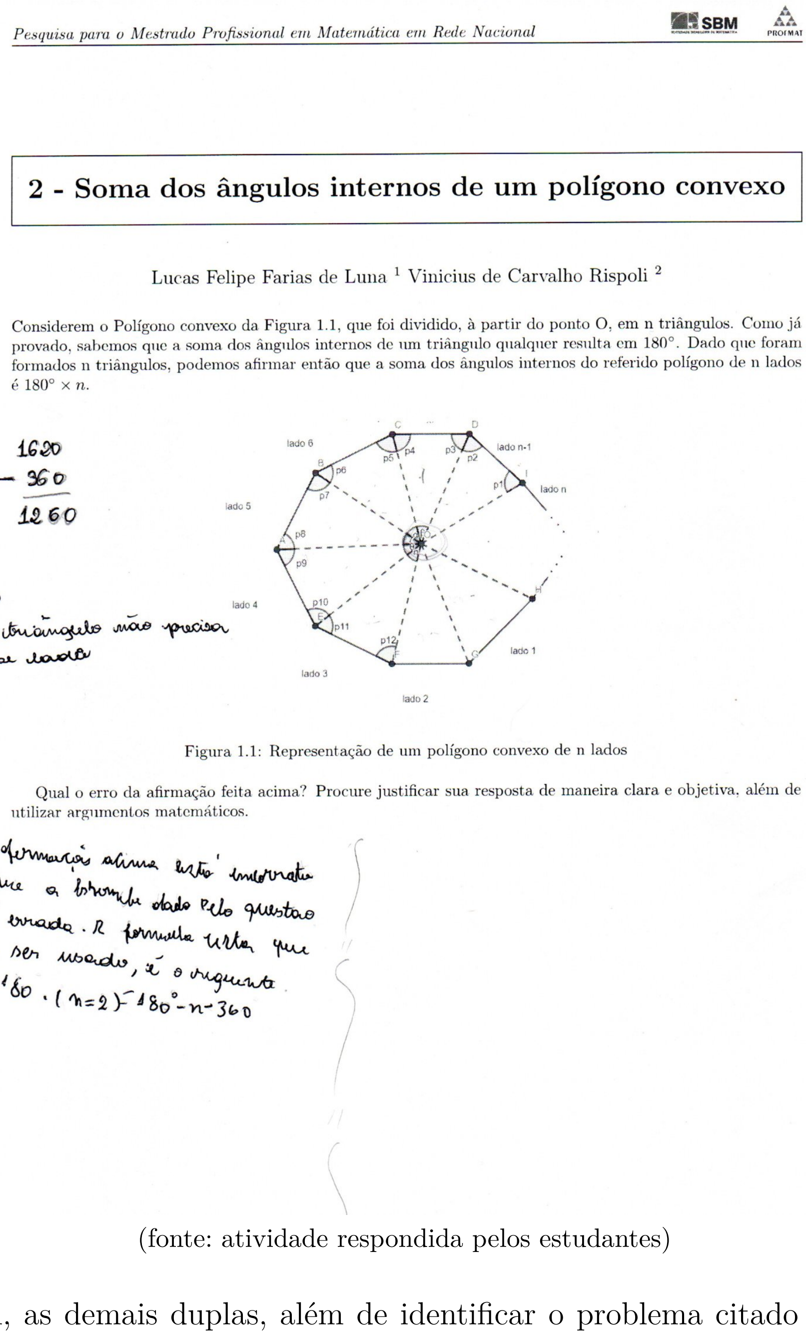
Qual o erro da afirmação feita acima? Procure justificar sua resposta de maneira clara e objetiva, além de utilizar argumentos matemáticos.

não conseguimos compreender

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Em resumo, considerando os demais alunos que conseguiram alcançar, de maneira geral, o objetivo da atividade, percebe-se que as demais duplas conseguiram, todas, identificar que o problema estava no ângulo gerado no centro do polígono de n lados apresentado (que resulta exatamente em 360 graus). Quatro duplas não souberam explicar, de maneira explícita, ou com argumentos matemáticos, qual seria a consequência desse ângulo, e apenas confirmaram o que foi explanado no capítulo 02 (recorrência a uma autoridade), citando apenas a fórmula correta que foi apresentada em sala. Na imagem abaixo, percebe-se, no canto superior esquerdo, que a dupla até realizou um desenho do ângulo de cada triângulo que deveria ser desconsiderado.

Figura 28 – Produção dos estudantes - 13



Pesquisa para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional SBM PROFMAT

2 - Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerem o Polígono convexo da Figura 1.1, que foi dividido, à partir do ponto O, em n triângulos. Como já provado, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta em 180°. Dado que foram formados n triângulos, podemos afirmar então que a soma dos ângulos internos do referido polígono de n lados é $180° \times n$.

1620
− 360
1260

o triângulo não precisa desse lado

Figura 1.1: Representação de um polígono convexo de n lados

Qual o erro da afirmação feita acima? Procure justificar sua resposta de maneira clara e objetiva, além de utilizar argumentos matemáticos.

A afirmação acima está incorreta porque a fórmula dada pela questão está errada. A fórmula certa que deve ser usada, é a seguinte

Sn= 180 · (n=2)= 180°-n-360

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Por fim, as demais duplas, além de identificar o problema citado anteriormente, conseguiram concluir, de maneira satisfatória, o objetivo da atividade. Seguem alguns exemplos abaixo.

Figura 29 – Produção dos estudantes - 14

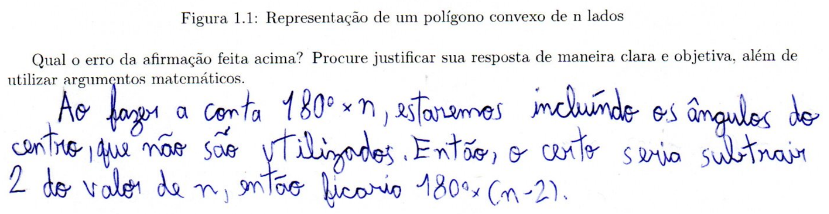


Figura 1.1: Representação de um polígono convexo de n lados

Qual o erro da afirmação feita acima? Procure justificar sua resposta de maneira clara e objetiva, além de utilizar argumentos matemáticos.

Ao fazer a conta 180° × n, estaremos incluindo os ângulos do centro, que não são utilizados. Então, o certo seria subtrair 2 do valor de n, então ficaria 180° × (n-2).

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 30 – Produção dos estudantes - 15

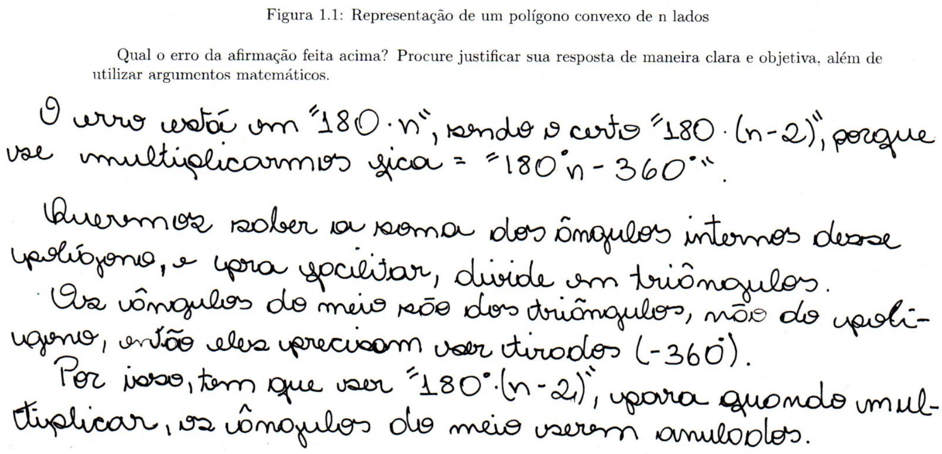


Figura 1.1: Representação de um polígono convexo de n lados

Qual o erro da afirmação feita acima? Procure justificar sua resposta de maneira clara e objetiva, além de utilizar argumentos matemáticos.

O erro está em "180 · n", sendo o certo "180 · (n-2)", porque se multiplicarmos fica = "180°n - 360°".

Queremos saber a soma dos ângulos internos desse polígono, e pra facilitar, divide em triângulos. Os ângulos do meio são dos triângulos, não do polígono, então eles precisam ser tirados (-360°).

Por isso, tem que ser "180°·(n-2)", para quando multiplicar, os ângulos do meio serem anulados.

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Figura 31 – Produção dos estudantes - 16

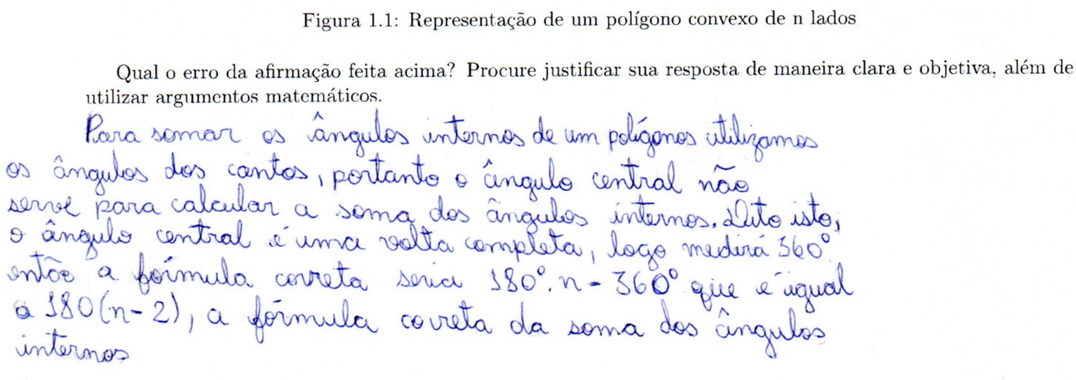


Figura 1.1: Representação de um polígono convexo de n lados

Qual o erro da afirmação feita acima? Procure justificar sua resposta de maneira clara e objetiva, além de utilizar argumentos matemáticos.

Para somar os ângulos internos de um polígonos utilizamos os ângulos dos cantos, portanto o ângulo central não serve para calcular a soma dos ângulos internos. Dito isto, o ângulo central é uma volta completa, logo medirá 360° então a fórmula correta seria 180°. n - 360° que é igual a 180(n- 2), a fórmula correta da soma dos ângulos internos

(fonte: atividade respondida pelos estudantes)

Entende-se, a partir do que foi visto acima e considerando todo o material coletado e analisado, que os objetivos pensados para a atividade em questão foram atingidos e que esta ação foi a que os estudantes mais tiveram facilidade e melhor desempenho, sendo também a última ação realizada nesta pesquisa.

No que diz respeito à entrevista realizada com as duplas, a maioria achou a atividade interessante e ressaltaram que é importante conhecer o porquê da fórmula funcionar de determinada maneira. Algumas duplas responderam que não conseguiram entender a dedução e que acharam os processos complexos.

3.6 Sobre o produto educacional

A ideia do produto educacional, inicialmente, surge à partir da intenção de disseminar e registrar as cinco oficinas realizadas ao longo desta pesquisa, entendendo que as mesmas, além de produtivas e de despertarem o interesse dos estudantes, de certo modo, proporcionam o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos e trazem maneiras diferentes de se trabalhar os conteúdos aqui explanados. Em um segundo momento, decidiu-se criar um site que pudesse armazenar os planos de aula utilizados nas oficinas, buscando também mais ferramentas para alimentá-lo, como jogos, animações e vídeos envolvendo o tema das demonstrações matemáticas. Portanto, o produto educacional é uma composição, uma união, entre os planos de aula e o site criado.

O produto educacional foi fundamental durante a aplicação das atividades de dedução, em sala de aula, pois todos os estudantes passaram pelo jogo de análise diagnóstica presente no site. O mesmo foi fundamental para fazer um levantamento inicial a respeito das dificuldades dos estudantes. Foi a partir daí que levantou-se a necessidade de se trabalhar menor múltiplo comum, maior divisor comum, múltiplos, divisores, frações, operações com frações, operações com números inteiros, equações de primeiro grau, equações de segundo grau, etc, para que então as deduções pudessem ser tratadas de maneira mais formal.

Figura 32 – Produto educacional - 1

(fonte: imagem do site)

O site criado pode ser acessado pelo link <https://sites.google.com/view/mathverseprofmatunb/p%C3%A1gina-inicial>. O mesmo foi gerado de maneira gratuita, via *Google Sites*, e apresenta uma série de funcionalidades que, vão desde os planos de aulas aqui explorados e aplicados, que são essenciais, compõe e são parte do produto educacional, até jogos de autoria própria visando, um deles, trabalhar com uma atividade diagnóstica para estudantes da primeira série do Ensino Médio e o outro jogo com objetivo de trabalhar uma revisão sobre a teoria de conjuntos numéricos. A ideia é que o site seja acessado tanto por professores quanto por estudantes.

Desta maneira, seguem os objetivos do produto educacional, que são indissociáveis entre si:

- servir de repositório para armazenamento e download, e de canal para divulgação, para os planos de aula desenvolvidos no trabalho de dissertação;

- servir de repositório para armazenamento e download da dissertação a qual o produto educacional atrela-se;

- considerar e trazer maneiras diferentes e criativas de se trabalhar conteúdos voltados às demonstrações matemáticas, como jogos, animações, material lúdico, etc;

- divulgar maneiras de se trabalhar assuntos complexos, de maneira interdisciplinar, conectando a matemáticas as demais ciências;

- trazer uma avaliação diagnóstica inicial, ou uma ideia de como se trabalhar uma, para os professores que desejam aproveitar, aplicar e melhorar as cinco oficinas já testadas;

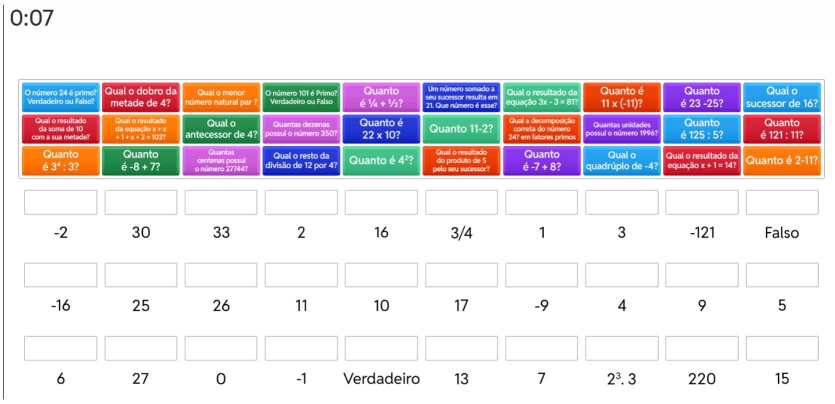
- permitir o acesso a estudantes e professores a página;

- permitir que estudantes possam acessar aos jogos propostos, com a supervisão ou não do professor, para realizar uma revisão ou aprofundamento de conteúdos e conceitos;

- trazer maneiras de como se trabalhar determinadas demonstrações matemáticas em sala de aula;

Sobre os jogos do produto educacional: o primeiro envolve a avaliação diagnóstica e foi produzido utilizando a página <https://wordwall.net/pt>. As perguntas elaboradas foram criadas de acordo com a experiência pessoal do professor regente. Os estudantes que chegam ao CEMI, eventualmente, e quase que sempre, vem de escolas de Ensino Fundamental específicas, e, geralmente, apresentam lacunas de aprendizagem muito parecidas. No jogo em questão, as perguntas foram elaboradas considerando os conteúdos citados no primeiro parágrafo desta seção. A dinâmica do jogo é relativamente simples e o funcionamento é feito associando os *cards* de perguntas aos *cards* de resposta, como mostrado na figura abaixo.

Figura 33 – Produto educacional - 2



(fonte: imagem do site)

O segundo jogo trata do tema envolvendo Teoria de Conjuntos, e foi divido em duas partes. A parte 1 do jogo funciona como um aquecimento, com questões envolvendo operações básicas com conjuntos numéricos. A parte 2 aborda um aspecto mais teórico do assunto e visa demonstrar as fórmulas para o número de elementos da união entre dois e três conjuntos.

Sobre a aplicação dos jogos em sala de aula, os estudantes participaram massivamente do primeiro jogo. Como já citado, ele foi indispensável para aplicação das oficinas envolvendo as demonstrações. Já o segundo jogo, poucos estudantes puderam participar, dado que o tema foi trabalhado em sala apenas com os estudantes da primeira série.

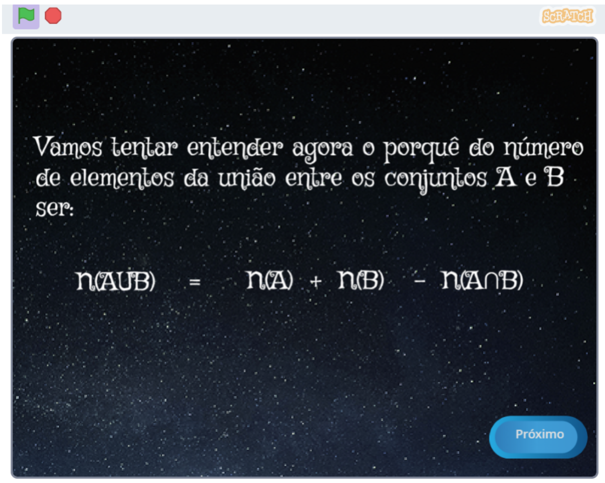
Inicialmente, do ponto de vista do professor aplicador do primeiro jogo, o mesmo é capaz de realizar um levantamento preciso a respeito das defasagens dos estudantes, porém, é um jogo que tende mais para os aspectos algébricos e aritméticos da matemática. Entende-se que, para uma parte 2, seja interessante adicionar aspectos voltados somente para a Geometria, ou então criar as perguntas do segundo jogo e depois realizar uma combinação com as perguntas do primeiro jogo. Observou-se, durante a aplicação, com os estudantes, que os mesmos levaram, em média, 30 minutos para responder todas as perguntas. Logo, é possível concluir que a quantidade de questões (30 perguntas, no total) adicionadas foi ideal.

A respeito da opinião dos alunos em relação ao jogo diagnóstico, notou-se um retorno muito positivo deles. Foi possível perceber um envolvimento pleno com o jogo e que de fato entenderam a importância da atividade. Vale ressaltar que, após a realização da ação, o professor aplicador pode direcionar os estudos dos estudantes, seja indicando vídeoaulas, seja sugerindo livros, a fim de que as lacunas possam ser corrigidas.

Sobre o segundo jogo, poucos estudantes participaram, e essa é a primeira implicação do que poderia ser melhorado em uma segunda ação. De início, notou-se que o primeiro jogo é mais dinâmico e os estudantes conseguiram revisar conceitos básicos e fundamentais, e, talvez por isso, se sentiram mais seguros e confortáveis em realizá-lo.

Em relação a parte 2 do jogo, por ser mais teórico e possuir uma interação menor (devido a ser mais animado), notou-se uma segurança menor, comparado a parte 1. A ideia do jogo é deduzir a fórmula para o número de elementos da união entre dois conjuntos, e, no fim, permitir que os estudantes tentassem chegar a fórmula para o número de elementos da união entre três conjuntos, que, apesar de mais complexa, envolve, basicamente, os mesmos passos da primeira dedução. Por trazer este aspecto mais formal, acredita-se que uma segunda implicação para o jogo seria melhorar o aspecto da interação dos alunos com o mesmo, deixando-o menos animado e mais interativo, como o primeiro.

Figura 34 – Produto educacional - 3



(fonte: imagem do site)

No site, foram criadas abas separando a primeira, segunda e terceira série do Ensino Médio, além de uma aba voltada ao nível superior. Ao clicar nas abas, o site redireciona a uma nova janela de navegação, e, dentro desta, é possível jogar e realizar o download dos planos de aula, ainda dentro das próprias páginas do site. Todo este processo foi realizado utilizando uma incorporação do código *html*. Além do que foi citado, o site também disponibiliza alguns vídeos envolvendo curiosidades e animações matemáticas, e possibilita o download desta dissertação. A maneira como os planos de aula foram organizados só diz respeito a como as atividades foram aplicadas no CEMI, de acordo com a necessidade da escola e do perfil da mesma, como já citado anteriormente. Naturalmente, o conteúdo envolvendo círculos e circunferência (área e perímetro), por exemplo, de acordo com os documentos norteadores, deveriam ser trabalhados em anos anteriores. Porém, esta era uma necessidade dos estudantes da primeira série, assim como o conteúdo envolvendo critérios de divisibilidade.

É importante citar que todas as imagens, por conta de direitos autorais, foram geradas por Inteligência Artificial (IA), utilizando o *Gemini*, da própria empresa *Google*, ou são imagens dos próprios personagens dos jogos criados. Os comandos (ou *prompts* de comandos) utilizados para gerar as imagens, basicamente, seguiram a mesma estrutura:"crie uma imagem que remete a tal assunto?". Por fim, as aulas pensadas que não puderam ser executadas como oficinas, pela questão do tempo, serão adicionadas e o site alimentado, com mais informações, futuramente. Importante apontar que colaboradores são bem-vindos para agregar ideias e adicionar conteúdos ao site.

Figura 35 – Produto educacional - 4

(fonte: imagem do site)

Estima-se que, para a criação do site, mais de 45 horas de trabalho foram dedicadas. Dessas, cerca de 16 horas somente para a criação dos jogos. O processo de criação do site, em si, foi relativamente rápido, pois o próprio *Google* disponibiliza, de maneira facilitada e intuitiva, as ferramentas de construção. O problema encontra-se em adicionar os conteúdos na página de maneira que a navegação ainda ocorra no mesmo ambiente, além de criar a ferramenta de *download*, possibilitando que o mesmo seja realizado dentro da página, sem redirecionamento para o *Google drive*, por exemplo.

Outro fator que contribuiu para o tempo de produção da página foram os planos de aula. Acredita-se que mais de 15 horas foram dedicadas à estruturação e escrita dos planos, pois entende-se que essas oficinas devem ser reproduzidas, aplicadas e melhoradas em outras escolas e por outros professores, e que atividades como estas possam ser realizadas por professores de outras áreas também. Portanto, os planos foram escritos com a maior riqueza de detalhes possível e, claro, considerando o grupo de estudantes atendidos no ano de 2024.

Figura 36 – Produto educacional - 5

(fonte: imagem do site)

4 Considerações finais

Entende-se, por tudo que foi apresentado até aqui, que as 5 demonstrações matemáticas no Ensino Médio, realizadas ao longo das oficinas, produzem um efeito positivo no que diz respeito ao processo de Ensino Aprendizagem. São uma importante ferramenta capaz de potencializar o domínio das definições, fórmulas e conceitos matemáticos, podendo contribuir para evitar, deste modo, a aprendizagem pautada em processos meramente mecanizados, expandindo assim o raciocínio lógico matemático e dedutivo.

Nota-se também que o processo envolvendo demonstrações matemáticas pode apresentar limites no que diz respeito a sua realização e compreensão por parte dos estudantes, em sala de aula, principalmente em atividades mais algébricas e menos visuais, como na oficina envolvendo a fórmula resolutiva da equação de segundo grau, apesar do entendimento de que a oficina não deixou de ser produtiva para os estudantes.

Naturalmente, o processo exige um amplo entendimento, não só no que diz respeito ao conhecimento técnico dos assuntos abordados, mas, principalmente, no que diz respeito ao conhecimento em relação as defasagens que os estudantes apresentam. Se as mesmas não forem identificadas e trabalhadas antes do processo de demonstração, acredita-se que o mesmo perderá suas potencialidades e efeitos. Sendo assim, é fundamental que o professor entenda o público alvo e tenha bem definido a intencionalidade de cada ação.

Além disso, notou-se um grande interesse e curiosidade dos estudantes em entender as causas e conclusões a respeito das fórmulas matemáticas que foram trabalhadas nas ações, o que sugere uma aceitação no que diz respeito ao tema das demonstrações matemáticas. No fim das deduções, por mais que as vezes complexas, umas mais que as outras, era nítido a surpresa e empolgação dos estudantes em verificar que todo o processo desenvolvido levou a fórmula esperada.

Diante de tudo que foi exposto, deve-se citar alguns fatores que podem ter afetado a pesquisa: o primeiro deles diz respeito a falta de hábito com as demonstrações matemáticas ou com outras técnicas parecidas. Como notado no capítulo dos resultados, boa parte dos estudantes, principalmente de primeira série, tiveram contato com o tema pela primeira vez, de maneira tardia, por conta deste trabalho. O segundo se refere ao perfil da escola. O CEMI taguatinga é uma escola que funciona em tempo integral e de maneira integrada, o que, eventualmente, causa um certo desgaste aos estudantes, não só no aspecto físico, mas emocional também. Em determinadas atividades aplicadas, o cansaço dos estudantes ocasionou um baixo rendimento nas atividades aqui propostas. Outro fator a citar foram as atividades extra curriculares que, apesar de comuns na escola, eventualmente, ocorrem de acordo com a agenda e demanda de outros, externos a escola, como palestrantes, empresas que se disponibilizam a receber os estudantes, etc, o que implicou em algumas atividades com menor número de estudantes.

Por fim, atrelado ao trabalho de pesquisa, acredita-se que o produto educacional possui potencial, não somente em armazenar ideias de maneira criativa, com jogos, animações, e planos de aula, mas também em disseminar as atividades já testadas e de eficacia verificada, para que mais professores possam utilizar, adaptar, melhorar, etc. O site também pode servir como canal de comunicação entre os professores e alunos, para que mais demonstrações possam ser pensadas, analisadas e levadas a estudantes, não só do Ensino Médio, mas de toda a Educação Básica e suas Etapas e modalidades.

Referências

Amado, Nélia and Sanchez, Juan and Pinto, Jorge. A utilização do geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de euler. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 29, n. 52, p. 637–657, 2015.

Arnaldo Gunzi. *ForgottenMath*. 2016. Acessado dia 07/04/2025. Disponível em: <https://ideiasesquecidas.com/2016/06/24/todos-os-graos-de-arroz-num-tabuleiro-de-xadrez/>.

Balacheff, Nicolas. A study of students' proving processes at the junior high school level. In: NCTM. *Second UCSMP international conference on mathematics education*. [S.l.], 1988.

Bonjorno, J.R., Giovanni Jr, J., Câmara, P. *Matemática e suas tecnologias - Coleção Prisma, PNLD*. [S.l.: s.n.], 2021.

Cardoso, Eliezer de Moura and others. Radioatividade. *Comissão Nacional de Energia Nuclear-CNEN*, 2000.

Carneiro, Celso Dal Ré and Mizusaki, Ana Maria Pimentel and de Almeida, Fernando Flávio Marques. A determinação da idade das rochas. *Terrae didatica*, v. 1, n. 1, p. 6–35, 2005.

da Silva, Alvaro Carvalho Dias and Correia, Jorge Luiz Pereira and Pereira, Simone Neves. Os desafios da recomposição das aprendizagens no pós-pandemia: um estudo na eemti tabelião josé pinto quezado. *RECIMA21-Revista Científica Multidisciplinar-ISSN 2675-6218*, v. 4, n. 6, p. e463297–e463297, 2023.

Euclides. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009.

Garnica, Antonio Vicente Marafioti. Pesquisa qualitativa e educação (matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. *Mimesis, Bauru*, v. 22, n. 1, p. 35–48, 2001.

Garnica, Antonio Vicente Marafioti. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 91–99, 2002.

Governo do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática*. [S.l.: s.n.], 2008.

Hefez, Abramo and Aritmética, Coleçao PROFMAT. Sociedade brasileira de matemática. 2009.

INEP. *BoletimSAEB*. 2023. Acessado dia 07/04/2025. Disponível em: <http://saeb.inep.gov.br/saeb/resultado-final-externo/boletim?anoProjeto=2023&coEscola=53003624>.

Lisboa, Ministério da Educação. *Matemática, Metas curriculares para o Ensino Secundário - lisboa: Editorial do Ministério da Educação, Portugal*. [S.l.: s.n.], 2007.

Ministério da Educação. *Orientações curriculares para o Ensino Médio - Secretaria de Educação Básica*. [S.l.: s.n.], 2006. 105 p.

Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.: s.n.], 2018. 600 p.

Muniz Neto, Antonio Caminha. Geometria, coleçao profmat. *Rio De Janeiro: SBM, 1o Ediçao*, v. 6, 2013.

Nasser, L and Tinoco, L. Helping to develop the ability of argumentation in mathematics'. In: ERIC. *Proceedings of the Conference of the International Group for*. [S.l.], 1999. v. 100, p. 329.

Piaget, J. ,Hernández, J. Observaciones sobre la educacion matematica. *(org). 3 ed. Madrid: Alianza Editorial*, p. 219–227, 1986.

Rezende, J., Nasser, L. Kinds of argumentation used in geometry. *PME XVIII, proceeding, 1994*, v. 1, p. 66, 1994.

Semadeni, Zbigniew. Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics*, JSTOR, v. 4, n. 1, p. 32–34, 1984.

Tose, Marina de Toledo. Volume: Princípio de cavalieri no ensino médio. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2017.

Vianna, CCS. *O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática. 1988. 127 f.* Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista . . . , 1988.

ANEXO A – Planos de aula elaborados pelo autor

A.1 Plano de aula envolvendo progressões aritméticas e geométricas

Fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Professor: Lucas Luna - Cemi Taguatinga
Série: Primeira série
Disciplina: Projeto Pedagógico de Matemática (Itinerário Formativo Integrador -IFI)
Duração: 4h
Unidade: Álgebra
Subunidade: Sequências Numéricas - Progressões Aritméticas e Geométricas

1 - **Objetivos**
Objetivos Gerais:
- Compreender como e quando utilizar as fórmulas para o termo geral tanto da Progressão Aritmética quanto da Progressão Geométrica;
- Compreender as diferenças entre os dois tipos de sequências numéricas;
-Compreender como utilizar a fórmula para a soma dos n termos da Progreesão Aritmética.

Objetivos específicos:
- Compreender a dedução para a fórmula do termo geral da Progressão Aritmética, utilizando recorrência matemática;
- Compreender a dedução para a fórmula da soma dos n termos da Progressão Aritmética;
- Utilizar a ferramenta da reccorência matemática afim de deduzir a fórmula para o termo geral da Progressão Geométrica.

2 - **Desenvolvimento**
A aula é iniciada com algumas sequências e o objetivo é que os alunos identifiquem o termo que não foi apresentado. São alguns exemplos:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, ? , 21, ...) - sequência de Fibonacci
(D, S, T, Q, ?, S, S) - dias da semana
(2, 4, 6, ?, 10, ...) - sequência dos pares
(1, 3, 5, 7, ?, 11, ...) - sequência dos ímpares
(1, 2, 4, 8, ?, 32, 64, ...) - sequência das potências de 2

Após a conclusão dessa tarefa, que funciona como uma espécie de "aquecimento de ideias", defini-se, de maneira objetiva, o que é uma progressão aritmética, razão, posição do termo na progressão e etc, o que é uma progressão geométrica, estabelecendo a conexão entre o termo anterior e o próximo e a razão da respectiva progressão. Em seguida, os alunos resolvem as questões deixadas como exercícios, na lista **Exercícios P.A. e P.G.**

Para as demonstrações, seja uma progressão aritmética de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$ e razão r, temos que o n-ésimo termo da progressão é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$ e a soma dos n primeiros termos é dada por $s_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Tome como exemplo a progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10, ...). Temos que: $(a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, ...)$ e a razão r é igual a 2. Vale notar que:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 + 2 = a_1 + r$$
$$a_3 = 4 + 2 = a_2 + r$$
$$a_4 = 6 + 2 = a_3 + r$$

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

$$...$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Estendendo agora as ideias acima para uma progressão aritmética qualquer, de termos genéricos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$ e razão r, tem-se que:

$$a_2 = a_1 + r \tag{1.1}$$
$$a_3 = a_2 + r \tag{1.2}$$
$$a_4 = a_3 + r \tag{1.3}$$
$$a_5 = a_4 + r \tag{1.4}$$
$$...$$
$$a_n = a_{n-1} + r \tag{1.5}$$

Agora, basta reescrever os termos da seguinte maneira: de acordo com a linha (1.1), temos que $a_2 = a_1 + r$. Substituindo tal informação na linha (1.2), tem-se que $a_3 = a_1 + r + r = a_1 + 2r$. O mesmo ocorre agora substituindo a informação onde $a_3 = a_1 + 2r$ na linha (1.3), obtendo-se assim $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$, ou ainda, $a_4 = a_1 + 3r$, e assim sucessivamente, podendo obter $a_{100} = a_1 + 99r$ e ainda $a_n = a_1 + (n-1)r$, como desejado.

Para a soma dos n termos da Progressão Aritmética, basta tomar uma P.a. de termos $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...)$ e observar que deseja-se obter uma expressão para

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-1} + a_n. \tag{1.6}$$

Vale notar que podemos reescrever (1.6) da seguinte maneira:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1. \tag{1.7}$$

Somando as linhas (1.6) e (1.7), deve-se obter:

$$2S_n = (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \tag{1.8}$$

Agora, o objetivo é encontrar uma expressão menor e mais fácil para reescrever o lado direito da igualdade da linha (1.8). Para tal, note que:

$$a_{n-1} + a_2 = (a_n - r) + (a_1 + r) = (a_n + a_1)$$
$$a_{n-2} + a_3 = (a_{n-1} - r) + (a_2 + r) = ((a_n - r) - r) + ((a_1 + r) + r) = (a_n + a_1)$$
$$...$$

Seguindo a ideia acima, todos pares que estão sendo somados na linha (1.8) resultarão em $(a_n + a_1)$, e assim, temos que $2S_n = (a_n + a_1)n$, ou ainda, $S_n = \frac{(a_n+a_1)n}{2}$, como esperado.

Um exemplo para facilitar a compreensão das ideias acima. Considere a sequência dada por (1, 2, 3, 4, 5, ...), que representa uma P.a. de razão 1. Deseja-se somar os 100 primeiros termos da mesma. Temos que

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100 \tag{1.9}$$

ou ainda,

$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + ... + 1. \tag{1.10}$$

Somando ambas as linhas (1.9) e (1.10), temos:

$$2S_{100} = (100 + 1) + (99 + 2) + (98 + 3) + (97 + 4) + (96 + 5) + ... + (100 + 1) \tag{1.11}$$

ou ainda,

$$S_{100} = \frac{(100 + 1) \times 100}{2} = \frac{101 \times 100}{2} = 101 \times 50 = 5050. \tag{1.12}$$

Pensando em iniciar a abordagem referente as Progressões Geométricas, conta-se uma hitória para os alunos sobre o tabuleiro de xadrez e as Progressões Geométricas. Diz a lenda que o jogo de xadrez foi inventado em 1500, na Índia, e um Rei ficou tão encantado com o jogo que resolveu recompensar o criador. O tal inventor então, ao ser perguntado sobre o prêmio desejado, respondeu que gostaria de um receber o seguinte: um grão de arroz na primeira casa do tabuleiro, dois grãos na segunda casa, quatro na terceira casa e assim sucessivamente. À partir daqui, os alunos podem ser separados em duplas. Deve-se entregar um tabuleiro de xadrez as duplas, que pode ser impresso, como no modelo **Tabuleiro de Xadrez** aqui deixado. Um copo plástico cheio de grãos de arroz também é entregue aos mesmos. O objetivo agora é deixar com que os alunos tentem estimar a quantidade de grãos de arroz do possível prêmio do iventor e daqui pensar a respeito dessa quantidade, onde poderia caber, ou como transportar os grãos, ou ainda, considerando o preço do pacote de arroz atualmente, de quanto seria o tal prêmio, e essa discussão se prolonga de acordo com a criatividade e/ou a necessidade de cada turma e de cada dupla.

Por fim, com os estudantes ainda em duplas, os mesmos devem desenvolver a atividade **3 - Fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica**, onde o objetivo é provar a fórmula para o termo geral de uma progressão geométrica de razão q e termos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$

3 - **Recursos Metodológicos**

Projetor, Cabo HDMI, quadro branco, *Tablet*, Mesa Digitalizadora, *Wi-Fi*, atividades impressas, copos descrtáveis que serão reutilizados em todas as turmas, bem como um pacote de arroz que também será reaproveitado.

4 - **Processo de Avaliação**

Os alunos serão avaliados a partir da entrega da atividade impressa resolvida e do formulário via *Google Forms*.

5 - **Referências Bibliográficas**

5.1 - Bonjorno, J. R., Giovanni Jr., J., Câmara, P.,Matemática e suas tecnologias - Coleção Prisma, PNLD, 2021.

5.2 - HEFEZ, A.; ARITMÉTICA, C.P. Sociedade brasileira de matemática. 2009.

5.3 - https://ideiasesquecidas.com/2016/06/24/todos-os-graos-de-arroz-num-tabuleiro-de-xadrez/

5.4 - https://pt.scribd.com/document/341343545/Lista-de-Exercicios-de-PA-e-PG

5.5 - Muniz Neto, Antonio Caminha, Geometria/ Antonio Caminha Muniz Neto. - 2. ed. - Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

Exercícios P.A. e P.G.

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

1. O valor de x, de modo que os números $3x-1, x+3, x+9$ estejam, nessa ordem, em PA é
A) 1
B) 0
C) -1
D) -2

2. O centésimo número natural par não negativo é
A) 200
B) 210
C) 198
D) 196

3. Quantos números ímpares há entre 18 e 272?
A) 100
B) 115
C) 127
D) 135

4. Um estacionamento cobra 6,00 reais pela primeira hora. A partir da segunda hora, os preços caem em progressão aritmética. O valor da segunda hora é 4,00 reais e o da sétima é 0,50 reais. Quanto gastará o proprietário de um automóvel estacionado a 5 horas nesse local, em reais?
A) 17,80
B) 20,00
C) 18,00
D) 18,70

5. Um doente toma duas pílulas de certo remédio no primeiro dia, quatro no segundo dia, seis no terceiro dia e assim sucessivamente até terminar o conteúdo do vidro. Em quantos dias terá tomado todo o conteúdo, que é de 72 pilulas?
A) 6
B) 8
C) 10
D) 12

6. Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da sétima geração que serão descendentes de uma única coelha?
A) 3000
B) 1840
C) 2187
D) 3216

7. Comprei um automóvel e vou pagá-lo em 7 prestações crescentes, de modo que a primeira prestação seja de 100 reais e cada uma das seguintes seja o dobro da anterior. Qual é o preço do automóvel, em reais?
A) 12 700,00
B) 13 000,00
C) 11 800,00

[1] Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2] Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

D) 13 200,00

8. Segundo a lei de Malthus, a população humana cresce em progressão geométrica, enquanto as fontes de alimento crescem em progressão aritmética.
A) Explique o significado matemático dos termos progressão geométrica e progressão aritmética
B) O que aconteceria à humanidade, segundo à lei de Malthus?

9. Isis abriu uma caderneta de poupança no dia 1/2/2000 com um depósito inicial de 1000,00 reais. Suponha que os rendimentos da poupança sejam fixos e iguais a 3% ao mês.
A) Qual o montante dessa conta em 1/8/2000?
B) Em quantos meses ela terá um montante aproximadamente 1512,60 reais?

10. Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora, 128 m na segunda hora, 64 m na terceira hora e assim sucessivamente. Determine o tempo, em horas, necessário para completar um percurso de:
A)480 m
B)600 m

11. (UFMG)Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada 4 meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem (%) da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é
A) 75
B) 80
C) 83,33
D) 87,5

12. Numa PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. O primeiro termo dessa PG é
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

13. A medida do lado, o perímetro e a área de um quadrado estão, nessa ordem, em progressão geométrica. Qual a área do quadrado?

14. O salário inicial de um funcionário é de 1200,00 reais. Supondo que esse funcionário receba um aumento de 5% a cada mês subsequente, de quanto será o salário dele após 6 meses?

15. São dados quatro números positivos: 12, x, y, 4. Sabendo que os três primeiros estão em PA e os três últimos estão em PG, qual o valor de x e y.

16. Um professor de educação física organizou seus 210 alunos para formar um triângulo. Colocou um aluno na primeira linha, dois na segunda, três na terceira, e assim por diante. O número de linhas é
A) 10
B) 15
C) 20
D) 25

17. A razão da P.G. $(a, a+3, 5a-3, 8a)$ é
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

18. Quantos termos tem a P.A. (5, 10,..., 785)?
A) 157
B) 205
C) 138
D) 208

19. Uma certa espécie de bactéria divide-se em duas a cada 20 minutos, e uma outra, a cada 30 minutos. Determine, após 3 horas, a razão entre o número de bactérias da primeira e o da segunda espécies, originadas por uma bactéria de cada espécie.

20. O valor de x, de modo que os números $3x - 1, x + 3, x + 9$ estejam, nessa ordem, em PA é:
A) 1
B) 0
C) -1
D) -2

Tabuleiro de Xadrez

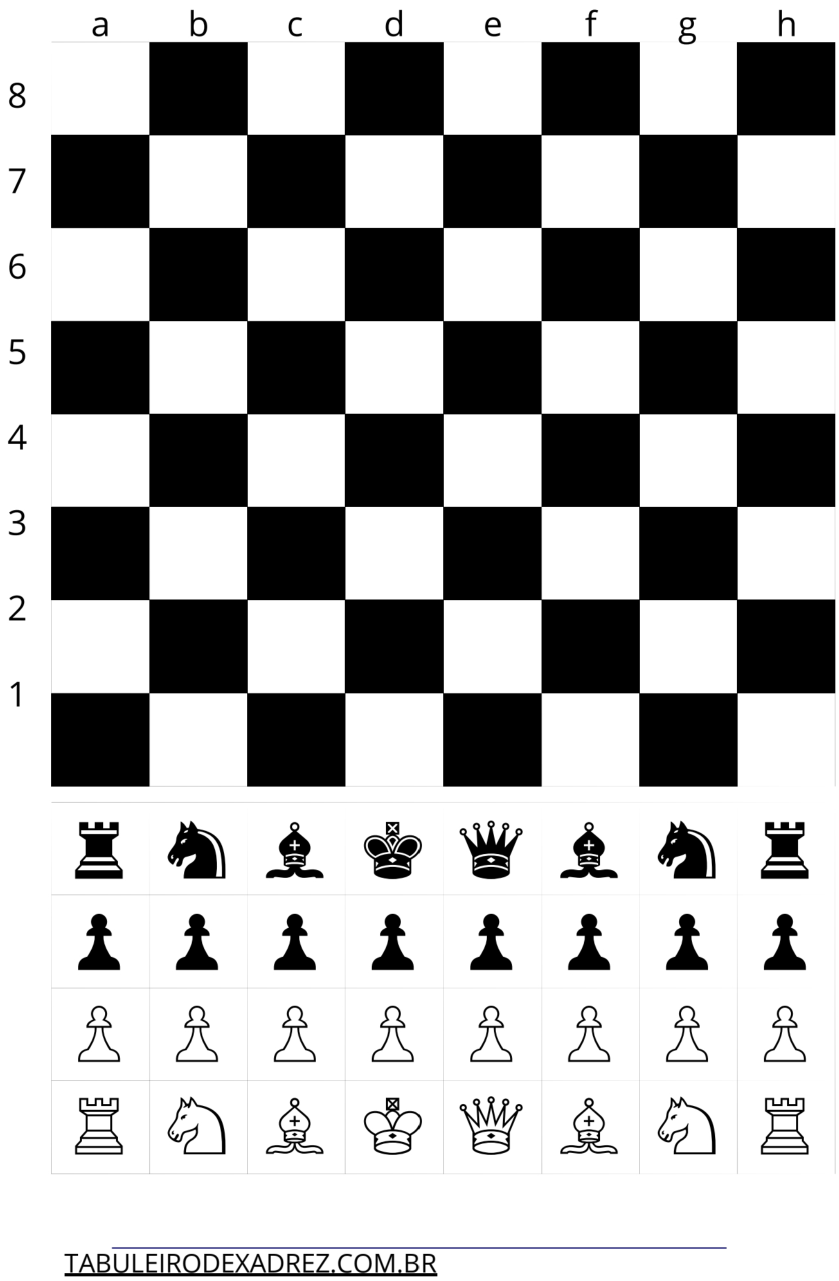


Figura 1.1: Tabuleiro de Xadrez

3 - Fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando a recorrência que foi feita anteriormente para mostrar que o termo geral da Progressão Aritmética de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, de razão r, é $a_n = a_1 + (n-1) \times r$, faça o mesmo para uma Progressão Geométrica de termos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ e razão q, para concluir que o termo geral a_n é dado por $a_n = a_1 \times q^{n-1}$. Lembrem-se: clareza e objetividade são essenciais. Busque utilizar argumentos matemáticos para justificar os processos.

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

A.2 Plano de aula envolvendo a fórmula resolutiva da equação de segundo grau

Fórmula resolutiva da equação de segundo grau

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Professor: Lucas Luna - Cemi Taguatinga
Série: Primeira série
Disciplina: Projeto Pedagógico de Matemática (Itinerário Formativo Integrador -IFI)
Duração: 1.5h
Unidade: Álgebra
Subunidade: Equações de segundo grau

1 - **Objetivos**
Objetivos Gerais:
- Compreender como e quando utilizar a fórmula resolutiva da equação de segundo grau;
- Revisar os conceitos voltados ao menor múltiplo comum, frações e produtos notáveis.

Objetivos específicos:
- Compreender a dedução para a fórmula resolutiva da equação do segundo grau, utilizando a forma canônica da parábola.

2 - **Desenvolvimento**

Na aula em questão, deseja-se mostrar que, dado a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, as soluções podem ser geradas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

O caminho escolhido, por ser mais acessível aos alunos, foi buscar a dedução a partir da forma canônica da Parábola. Naturalmente, de maneira prévia, deve-se revisar, junto aos estudantes, ao lado da demonstração, que será feita no quadro, para servir de base, a relação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Daí, segue-se:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Vale notar agora que $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, ou ainda que $(x^2 + \frac{bx}{a}) = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$. Portanto, pode-se reescrever a equação 1.1 da seguinte maneira:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0. \tag{1.2}$$

De $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$, tem-se que $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-b^2+4ac}{4a^2}$. Logo,

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a} = 0. \tag{1.3}$$

Para finalizar, deve-se somar $-(\frac{-b^2+4ac}{4a})$ em ambos os lados da igualdade e, em seguida, tomando $a \neq 0$, dividir ambos os lados por a. Assim, conclui-se que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, como desejado.

Vale ressaltar que, em sala de aula, os alunos deverão participar ativamente durante os cálculos realizados (por exemplo, durante a operação $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$, os próprios alunos podem concluir que o MMC entre $4a^2$ e a era o próprio $4a^2$) e, além disso, a sugestão é que a demonstração não siga em caso de dúvidas. Para o aproveitamento integral das ideias, as dúvidas devem ser sanadas.

3 - **Recursos Metodológicos**

Projetor, Cabo HDMI, quadro branco, *Tablet*, Mesa Digitalizadora, *Wi-Fi*.

[1] Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2] Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

4 - **Processo de Avaliação**

Os alunos serão avaliados a partir da participação individual e o envolvimento na atividade.

5 - **Referências Bibliográficas**

5.1 - Bonjorno, J. R., Giovanni Jr., J., Câmara, P.,Matemática e suas tecnologias - Coleção Prisma, PNLD, 2021.

5.2 - HEFEZ, A.; ARITMÉTICA, C.P. Sociedade brasileira de matemática. 2009.

5.3 - Muniz Neto, Antonio Caminha, Geometria/ Antonio Caminha Muniz Neto. - 2. ed. - Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

A.3 Plano de aula envolvendo a relação entre o volume de prismas e pirâmides

Relação entre o volume de prismas e pirâmides

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Professor: Lucas Luna - Cemi Taguatinga
Série: Terceira série
Disciplina: Matemática
Duração: 4h
Unidade: Geometria
Subunidade: Volume de sólidos

1 - **Objetivos**
Objetivos Gerais:
- Compreender o princípio de Cavalieri;
- Compreender como e quando utilizar a relação em que o volume da pirâmide é um terço do volume do respectivo prisma.

Objetivos específicos:
- Compreender a demonstração visual da relação entre o volume de prismas e pirâmides;
- Verificar aritmeticamente que, de fato, os volumes das pirâmides do exercícios são iguais, graças ao princípio de Cavalieri, e a soma dos volumes das pirâmides é igual (ou aproximado) ao volume do prisma, depois de montado.

2 - **Desenvolvimento**
A aula é iniciada com a apresentação do **Princípio de Cavalieri** aos estudantes, onde de acordo com o mesmo, dois sólidos possuem mesmo volume quando, além de possuírem mesma altura, possuem mesma área de secção transversal ao longo de qualquer ponto dessa referida altura. Ter mesma área de secção transversal implica basicamente em: se um plano qualquer, seja β, paralelo ao plano que contêm as bases de ambos os sólidos, seja α, interceptar os mesmos em uma altura arbitrária, seja h' tal altura, e as áreas dos respectivos polígonos gerados pela intersecção forem iguais, então o volume dos sólidos é igual.

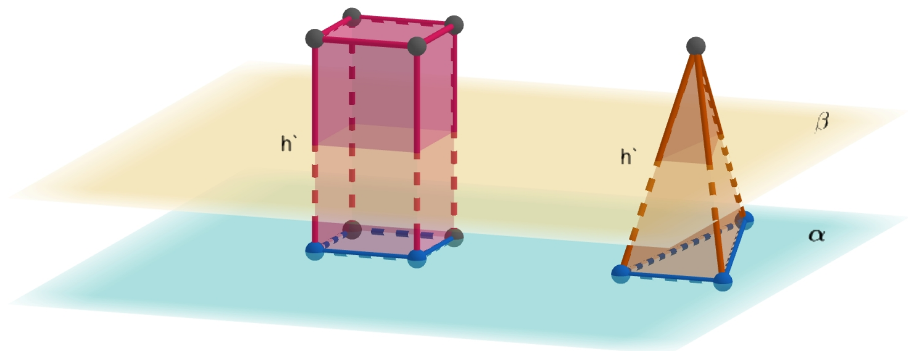


Figura 1.1: Princípio de Cavalieri

Na sequência, os alunos deverão, com a atividade impressa em mãos, e em duplas, opcionalmente colorir as planificações, recortar as figuras, montar os sólidos, para então tentar encaixar as pirâmides e formar um prisma a partir das mesmas.

Por fim, realizarão a atividade **1- Relação entre o volume de prismas e pirâmides**, ainda em duplas. O objetivo da atividade é verificar, por meio de instrumentos de medição convencionais, como a régua, que o

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

volume das três pirâmides é o mesmo (ou aproximadamente o mesmo), e além disso, que o volume das três somadas resulta no volume do prisma.

3 - **Recursos Metodológicos**

Projetor, Cabo HDMI, quadro branco, *Tablet*, Mesa Digitalizadora, *Wi-Fi*, atividades impressas, lápis de cor, tesouras, cola branca, réguas e calculadoras.

4 - **Processo de Avaliação**

Os alunos serão avaliados a partir da participação individual e o envolvimento na atividde.

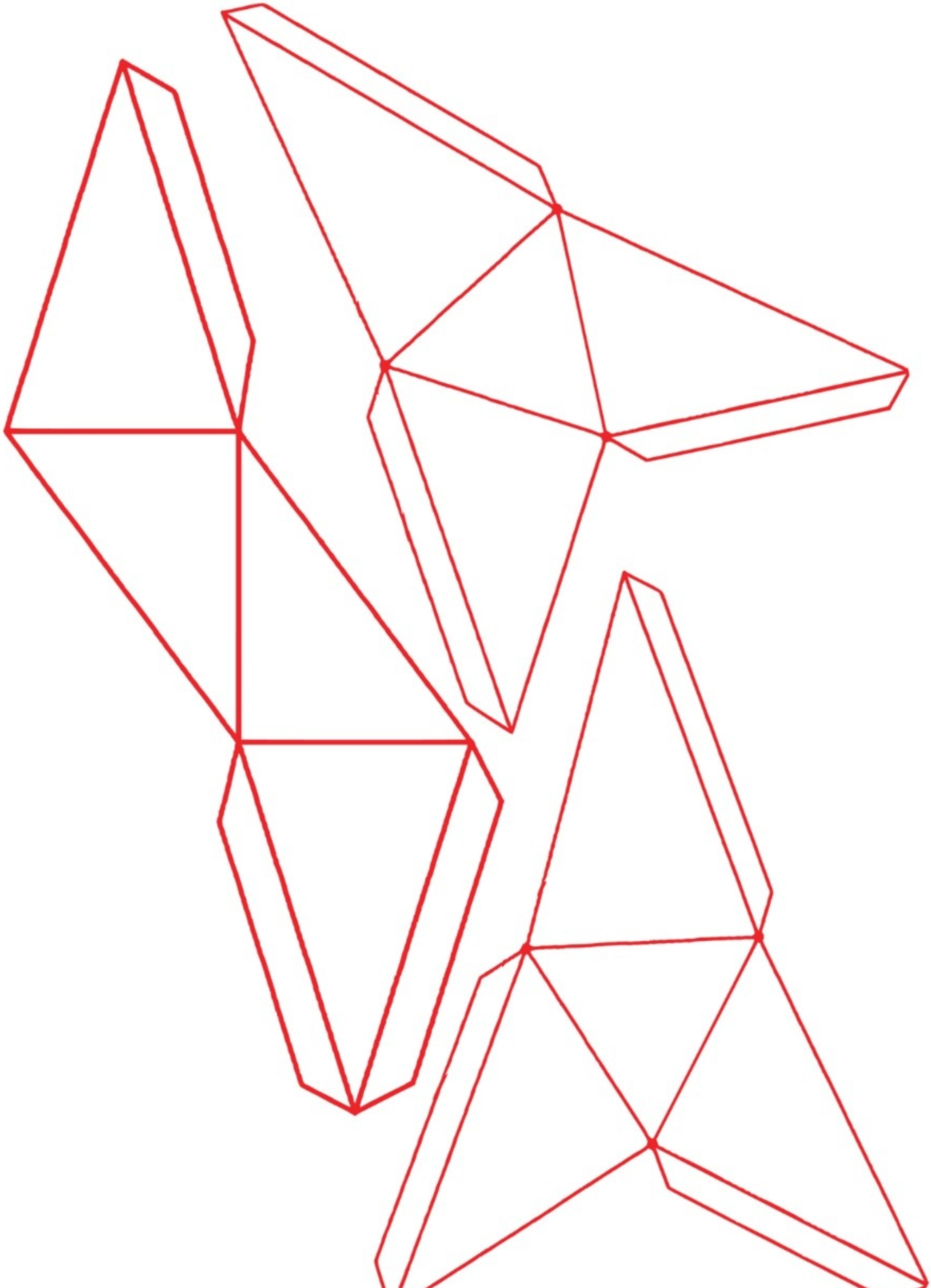
5 - **Referências Bibliográficas**

5.1 - Bonjorno, J. R., Giovanni Jr., J., Câmara, P.,Matemática e suas tecnologias - Coleção Prisma, PNLD, 2021.

5.2 - HEFEZ, A.; ARITMÉTICA, C.P. Sociedade brasileira de matemática. 2009.

5.3 - Muniz Neto, Antonio Caminha, Geometria/ Antonio Caminha Muniz Neto. - 2. ed. - Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

5.4 - TOSE, M. d. T. Volume: Princípio de cavalieri no ensino médio. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2017.



1 - Relação entre o volume de prismas e pirâmides

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Agora que já construíram as três pirâmides de bases triangulares e verificaram (visualmente) que as mesmas, encaixadas de maneira correta, formam um prisma de base triangular, o que mostra que $Volume_{pirâmide} = \frac{1}{3}Volume_{prisma}$, utilizem régua e calculadora como instrumentos de auxílio para calcular os volumes aproximados das três pirâmides, separadamente, e do prisma (montado), para primeiro concluir que os volumes das três pirâmides são iguais (ou aproximados), e depois concluir que um terço do volume do prisma equivale ao volume de qualquer uma das três pirâmides. Registre aqui seus cálculos de maneira objetiva e organizada.

[1] Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2] Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

A.4 Plano de aula envolvendo Logaritmos

Propriedades do Logaritmo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Professor: Lucas Luna - Cemi Taguatinga
Série: Segunda série
Disciplina: Matemática
Duração: 4h
Unidade: Álgebra
Subunidade: Logaritmos

1 - **Objetivos**
Objetivos Gerais:
- Compreender e revisar a definição de logaritmo;
- Compreender a relação entre o logaritmo e a exponencial;
- Compreender as propriedades do logaritmo.

Objetivos específicos:
- Aplicar as propriedades do logaritmo em problemas contextualizados;
- Compreender a dedução das propriedades do logaritmo;
- Compreender a conexão entre o logaritmo e o decaimento radioativo;
- Compreender a importância do logartimo para a escala *Richter*;
- Realizar as fichas de exercícios sugerida.

2 - **Desenvolvimento**
Inicia-se a aula revisando a definição de logaritmo, onde dados a, b e c números reais tais que a e b são positivos e a é não nulo, tem-se que:

$$log_a b = c \longleftrightarrow a^c = b \tag{1.1}$$

Em seguida, registra-se algumas propriedades do logaritmo, que deseja-se deduzir, junto aos estudantes, de acordo com o interesse e necessidade de cada turma, tais quais:

$$log_a(xy) = log_a x + log_a y; \tag{1.2}$$

$$log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y; \tag{1.3}$$

$$log_a(x^b) = b(log_a x); \tag{1.4}$$

$$log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}; \tag{1.5}$$

com a, c, x e y positivos e a, c e y não nulos.

Antes de iniciar as deduções das propriedades, é interessante apresentar aos estudantes duas aplicações fundamentais que utilizam o logaritmo como ferramenta. São elas: decaimento radioativo de elementos químicos, que ajuda a entender vários fatores relacionados ao planeta terra, como sua idade, idade de fósseis, de maneira geral dentre outros, e como mensurar a magnitude dos terremotos e entender os valores da escala Richter, além de compreender a energia dissipada durante os tremores.

Para compreender a relação do decaimento radioativo e como o logaritmo é utilizado, tome a expressão

$$N(t) = N_0 \times e^{-(\lambda t)}, \tag{1.6}$$

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

onde $N(t)$ representa a massa final do objeto analisado, depois de um período de tempo t, como uma rocha que contém urânio em sua composição, por exemplo, N_0 representa a massa inicial do mesmo, λ representa a constante de decaimento radioativo e, como já citado, t representa o tempo.

Aplicando agora, nos dois lados da expressão 1.6, o log_e tem-se que

$$log_e[N(t)] = log_e[N_0 e^{-(\lambda t)}] = N_0[log_e(e^{-(\lambda t)})] = N_0(-\lambda t)[log_e e] = -N_0\lambda t. \qquad (1.7)$$

Note que, sabendo N_0, λ e $N(t)$, é possível encontrar t. Foi utilizando uma ideia próxima que, a partir de um mineral conhecido como zircão, os especialistas descobriram um decaimento de metade da amostra de urânio no mesmo. Como o tempo de meia vida do urânio é de 4.5 bilhões de anos, ou seja, esse é o tempo que uma amostra de 100g de urânio leva para decair para 50g, ou ainda essa outra metade que decaiu se transformou em chumbo, por exemplo, concluiu-se que o planeta possui aproximadamente tal idade. Processos assim também são utilizados para datação do carbono 14, que ajuda a identificar a idade de um Fóssil de Dinossaro, por exemplo.

Agora, abordando os Terremotos, sabe-se que a magnitude M medida a partir de tremores é dada pela relação

$$M = log_{10}[\frac{A.\delta t^3}{1,62}], \qquad (1.8)$$

onde A é a amplitude das ondas medidas e δt é o intervalo de tempo medido entre a primeira e ondas secundárias.

O interessante, quando aborda-se os terremotos, é a relação entre a magnitude de um terremoto de escala M e um terremoto de escala $M+1$. Fazendo as contas, temos:

$$M+1 = log_{10}[\frac{A.\delta t^3}{1,62}] + 1 = log_{10}[\frac{A.\delta t^3}{1,62}] + log_{10}10 = log_{10}[10\frac{A.\delta t^3}{1,62}] = 10log_{10}[\frac{A.\delta t^3}{1,62}] = 10M. \qquad (1.9)$$

Isso nos mostra que um terremoto de magnitude $M+1$ é 10 vezes mais potente que um terremoto de magnitude M, e um terremoto de escala $M+2$ é 100 vezes maior que um terremoto de escala M, e assim sucessivamente.

A energia dissipada por um tremor pode ser calculada apartir de $E = A^{\frac{3}{2}}$, onde A é a mesma aplitude das ondas citada acima. Pela linha (1.8), podemos escrever que $10^M = \frac{A.\delta t^3}{1,62}$, ou ainda, $A = \frac{10^M \times 1,62}{\delta t^3}$. É notável que, considerando a linha (1.8), a amplitude A de um terremoto de magnitude $M+1$ é dez vezes maior do que a amplitude de um terremoto de magnitude M, ou seja, $A_{M+1} = 10A_m$. Com isso, olhando para E_{M+1}, ou seja, a energia liberada por um terremoto de magnitude $M+1$, tem-se que $E_{M+1} = (A_{M+1})^{\frac{3}{2}} = (10A_M)^{\frac{3}{2}}$. Vale notar agora que $10^{\frac{3}{2}}$ é aproximadamente igual a 31,62. Logo, $E_{M+1} = 31,62(A_M)^{\frac{3}{2}} = 31,62E_M$, ou seja, a energia liberada por um terremoto de escala $M+1$ é quase 32 vezes maior do que a energia liberada em um terremoto de escala M.

A tabela abaixo deixa um comparativo interessante em a relação ao aumento na escala Richter e as consequências disso.

Intervalo fechado da escala do terremoto	**Quais possíveis consequências?**
1-3	Nenhuma consequência. Tais terremotos ocorrem a todo instante, por todo o planeta.
3-4	Os terremotos são perceptíveis, porém, sem danos.
4-5	Os terremotos podem causar danos domésticos. Exemplo: a queda de um móvel, de um lustre, etc.
5-6	Os terremotos podem causar a queda de prédios simples, por exemplo, sem grandes estruturas.
6-7	Os terremotos podem causar a queda de prédios comuns, por exemplo.
7-8	Os terremotos podem causar danos regionais severos.
8-9	Os terremotos podem destruir uma cidade inteira.
9-10	Os terremotos podem alterar a topografia da região. Exemplo: mudar curso de rios.
superiores a 10	Não há registros.

Figura 1.1: Escalas do terremoto e suas consequências

É interessante utilizar exemplos próximos a realidade da comunidade e dos alunos, sobre o que poderia desabar, por exemplo, em um terremoto de escala entre 5 e 6. No caso deste planejamento, como a escola está localizada em Taguatinga Norte, mais precisamente na M.Norte, entrequadras 36 e 38, no caso de um terremoto de escala entre 5-6 poderia causar a destruição de um prédio logo na esquina da escola, onde encontra-se uma sorveteria, onde a estrutura do mesmo é mais simples. No caso de um terremoto de escala entre 6-7, o prédio do JK *Shopping* poderia desabar. Nas escalas entre 7-8, a entrequadra 36 e 38 poderia ser destruída. E por fim, nas escalas entre 8-9, a M.Norte inteira poderia ser afetada.

Dados relevantes que os alunos podem se interessar em saber: O maior tremor que se tem registro ocorreu em 1960, em Valdivia, no Chile, e marcou 9,5 na escala Richter, deixando dois mil mortos e mais de dois milhões de feridos.

Para as deduções das propriedades, tem-se que, para a linha (1.2), considere $log_a(xy) = M$, $log_ax = N$ e $log_ay = O$, ou ainda, $log_a(xy) = M \longleftrightarrow a^M = xy$, $log_ax = N \longleftrightarrow a^N = x$ e $log_ay = O \longleftrightarrow a^O = y$. De $a^M = xy$, podemos reescrever o lado esquerdo como: $a^M = xy = a^N \times a^O$. Com a relação $a^M = a^N \times a^O$, temos que $a^M = a^N \times a^O = a^{N+O}$, ou seja, $M = N + O$. Já que $log_a(xy) = M$, $log_ax = N$ e $log_ay = O$, pode-se concluir que $log_a(xy) = log_ax + log_ay$.

Considerando a linha (1.3), tem-se que, tomando $log_a(\frac{x}{y}) = M$, $log_ax = N$ e $log_ay = O$, ou ainda, $log_a(\frac{x}{y}) = M \longleftrightarrow a^M = \frac{x}{y}$, $log_ax = N \longleftrightarrow a^N = x$ e $log_ay = O \longleftrightarrow a^O = y$. De $a^M = \frac{x}{y}$, podemos reescrever o lado esquerdo como: $a^M = \frac{x}{y} = \frac{a^N}{a^O}$. Com a relação $a^M = \frac{a^N}{a^O}$, temos que $a^M = \frac{a^N}{a^O} = a^{N-O}$, ou seja, $M = N - O$. Já que $log_a(\frac{x}{y}) = M$, $log_ax = N$ e $log_ay = O$, pode-se concluir que $log_a(\frac{x}{y}) = log_ax - log_ay$.

Já para a linha (1.4), pode-se tomar $log_a(x^b) = M$ e $(log_ax) = N$, ou ainda $log_a(x^b) = M \longleftrightarrow a^M = x^b$ e $(log_ax) = N \longleftrightarrow a^N = x$. Como $x = a^N$, podemos reescrever $a^M = x^b$ como $a^M = (a^N)^b$, que resultará em $a^M = a^{Nb}$, o que implica em $M = Nb$. Ora, como $M = Nb$, e, sabendo que $log_a(x^b) = M$ e $(log_ax) = N$, pode-se concluir que $log_a(x^b) = b(log_ax)$, como esperado.

Por fim, para a linha (1.5), tome $log_ax = M \longleftrightarrow a^M = x$, $log_cx = N \longleftrightarrow c^N = x$ e $log_ca = O \longleftrightarrow c^O = a$. Podemos reescrever $a^M = x$ como $a^M = c^N$ (já que $c^N = x$). Porém, como $c^O = a$, temos que $(c^O)^M = c^N$. Logo, $OM = N$, e como O é diferente de zero, temos que $M = \frac{N}{O}$, ou seja, $log_ax = \frac{log_cx}{log_ca}$, como esperado.

Por fim, os alunos deverão realizar as atividades **1- Propriedades do logaritmo** e **1- Propriedades do logaritmo - Parte 2**, que devem ser feitas, afim de um melhor aproveitamento das ideias, nessa ordem. As atividades podem ser feitas em duplas.

3 - **Recursos Metodológicos**

Projetor, Cabo HDMI, quadro branco, *Tablet*, Mesa Digitalizadora, *Wi-Fi*, atividades impressas.

4 - **Processo de Avaliação**

Os alunos serão avaliados a partir da participação individual e o envolvimento na atividde.

5 - **Referências Bibliográficas**

5.1 - Bonjorno, J. R., Giovanni Jr., J., Câmara, P.,Matemática e suas tecnologias - Coleção Prisma, PNLD, 2021.

5.2 - CARDOSO, E. D. M. et al. Radioatividade. Comissão Nacional de Energia Nuclear- CNEN, 2000.

5.3 - CARNEIRO, C. D. R.; MIZUSAKI, A. M. P.; ALMEIDA, F. F. M. de. A determinação da idade das rochas. Terrae didatica, v.1. n.1, p.6-35,2005.

5.4 - https://youtu.be/sWODzPoLLb8?si=Mi0X7qBXP0tRU8fE

5.5 - Mortimer, Eduardo Fleury, Quimica: ensino médio/ Eduardo Fleury Mortimer, Andréa Horta Machado. 3 ed. São Paulo: Scipione, 2016. Obra em 3 v.

5.6 - https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Pesquisa/noticia/2014/02/rocha-mais-antiga-ja-datada-tem-44-bilhoes-de-anos.html

1- Propriedades do logaritmo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerando as demonstrações que foram feitas em sala de aula, e que a, b, c, x e y são números reais, com a e c positivos, não nulos e diferentes de 1, e x e y positivos, complete a cruzadinha de propriedades do logaritmo. Utilizem o espaço em branco, logo abaixo da Figura 1.1, para justificar, de maneira clara e objetiva, como completaram as lacunas da cruzadinha.

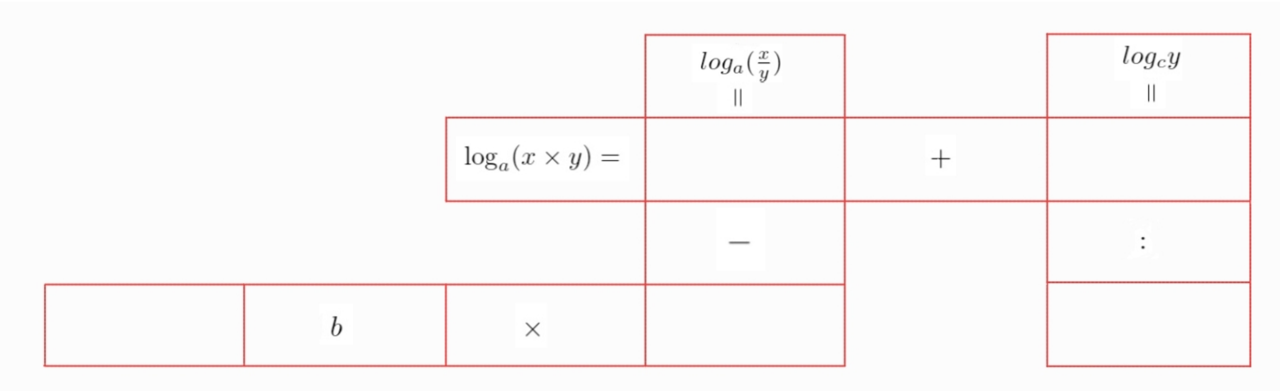


Figura 1.1: Cruzadinha - Propriedades do Logaritmo

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

1- Propriedades do logaritmo - parte 02

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Analise a demonstração abaixo e tente completar corretamente as lacunas apresentadas.

Desejamos mostrar que $log_a(x \times y) = \boxed{\quad} + log_a y$. Para tal, tome que $log_a(x \times y) = M$ (1), $log_a x = N$ (2) e $log_a y = O$ (3). Pela definição de log, sabemos que $\boxed{\quad}$, se, e somente se, $a^c = b$. Portanto, podemos reescrever (1), (2) e (3) das seguintes maneiras:

$$(1) \Longrightarrow a^M = \boxed{\quad} \tag{1.1}$$

$$(2) \Longrightarrow a^N = x \tag{1.2}$$

$$(3) \Longrightarrow \boxed{\quad} = y \tag{1.3}$$

Agora, substituindo as informações das linhas (1.2) e (1.3) na linha (1.1), teremos:

$$(1) \Longrightarrow a^M = x \times y = \boxed{\quad} = a^{N+O} \tag{1.4}$$

De acordo com a última igualdade, temos duas potências que são iguais ($a^M = a^{N+O}$), e, para isso ocorrer de fato, precisamos garantir que as bases e os expoentes sejam idênticos. Vale notar que a base coincide. Portanto, resta que $\boxed{\quad} = N + O$ (4). Para finalizar, basta observar que $M = log_a(x \times y)$, $N = log_a x$ e $O = log_a y$.

Ou seja, podemos reescrever (4) da seguite maneira:

$$M = \boxed{\quad} = N + O = \boxed{\quad} \tag{1.5}$$

Ou ainda, $\boxed{\quad}$, como gostaríamos de demonstrar.

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

A.5 Plano de aula envolvendo a soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Soma dos ângulos internos de um Polígono Convexo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Professor: Lucas Luna - Cemi Taguatinga
Série: Primeira série
Disciplina: Projeto Pedagógico de Matemática (Itinerário Formativo Integrador -IFI)
Duração: 2h
Unidade: Geometria
Subunidade: Polígonos Convexos

1 - **Objetivos**
Objetivos Gerais:
- Compreender e conhecer a definição de um polígono convexo e não convexo;
- Calcular a soma dos ângulos internos usando a fórmula para a soma dos ângulos internos para polígonos convexos $S_n = 180° \times (n-2)$.

Objetivos específicos:
- Compreender a dedução da soma dos ângulos internos de um triângulo, de um quadrilátero, convexos, utilizando retas paralelas cortadas por transversais;
-Compreender a dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um Polígono Convexo utilizando recorrência Matemática;
- Resolver a atividade proposta justificando os erros apontados nas afirmações da demonstração.

2 - **Desenvolvimento**
Inicia-se a aula fazendo uma breve revisão sobre a congruência de ângulos quando duas retas paralelas são cortadas por transversais. Na imagem abaixo, sabe-se que os ângulos na cor verde são todos congruentes entre si, e o mesmo ocorre com os ângulos na cor vermelha.

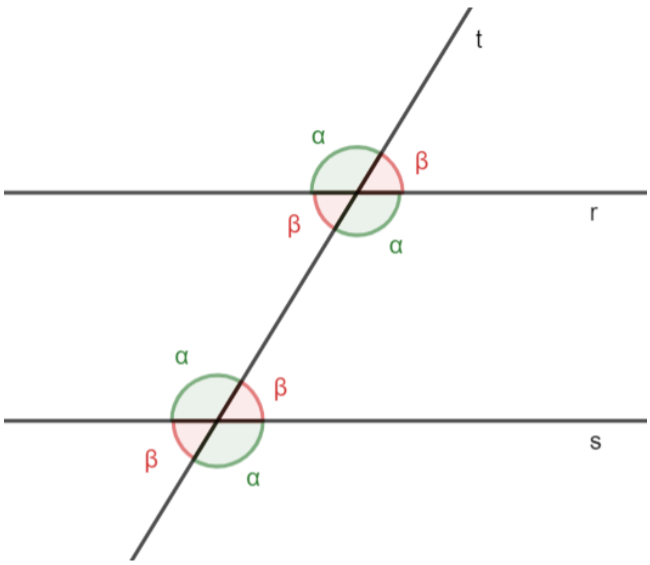


Figura 1.1: Retas paralelas cortadas por uma transversal

A partir daqui, constrói-se um triângulo qualquer (qualquer, pois todo triângulo, por construção, é sempre convexo), de vértices A, B e C e lados a, b e c, e de ângulos medindo α, β, γ. Naturalmente, os ângulos

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br

na cor verde da figura 1.2 são congruentes, assim como os ângulos na cor vermelha. Vale notar agora que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Logo, conclui-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em $180°$.

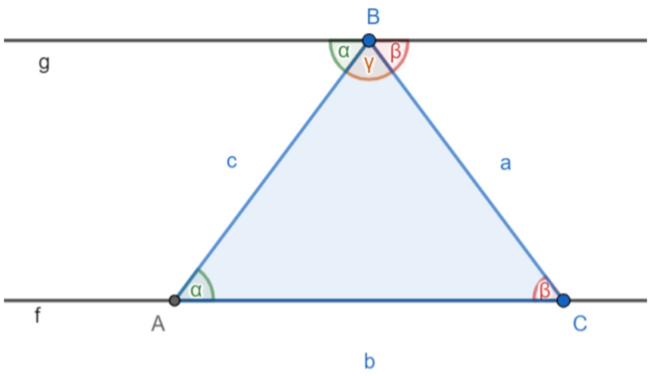


Figura 1.2: Triângulo

Utilizando o mesmo processo acima, faz-se a dedução para a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo. Uma escolha apropriada é tomar um paralelogramo e prolongar as retas de dois lados paralelos quaisquer para concluir que, se $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ são os ângulos internos do mesmo, então $\alpha + \beta + \gamma + \sigma = 360°$. Por fim, com o objetivo de deixar claro que, para cada lado acrescentado no polígono anterior, deve-se somar $180°$ no resultado da soma dos ângulos internos observado antes, deduz-se para um pentágono convexo qualquer, utilizando as mesmas construções e argumentos, que a soma de seus ângulos internos resulta em $540°$.

O próximo passo agora é usar o processo de recorrência Matemática a fim de provar que $S_n = 180° \times (n-2)$ é a fórmula que representa a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados. Vale notar que:

$$\begin{gathered} S_3 = 180°, \\ S_4 = 360° = 2 \times 180°, \\ S_5 = 540° = 3 \times 180° \\ \ldots \\ S_{100} = (100-2) \times 180° = 98 \times 180° \\ \ldots \\ S_n = 180° \times (n-2). \end{gathered}$$

Por fim, sugere-se a atividade da próxima página aos alunos, que devem se sentar em grupos de, no máximo, 4 estudantes, e em um primeiro momento precisam identificar o erro na afirmação feita e posteriormente propor uma solução ou uma correção para ajustar a demonstração proposta.

3 - **Recursos Metodológicos**

Projetor, Cabo HDMI, quadro branco, *Tablet*, Mesa Digitalizadora, *Wi-Fi*, *Software Geogebra 3D Calculator*, atividades impressas.

4 - **Processo de Avaliação**

Os alunos serão avaliados a partir da entrega da atividade impressa resolvida e do formulário via *Google Forms*.

5 - **Referências Bibliográficas**

5.1 - Bonjorno, J. R., Giovanni Jr., J., Câmara, P.,Matemática e suas tecnologias - Coleção Prisma, PNLD, 2021.

5.2 - HEFEZ, A.; ARITMÉTICA, C.P. Sociedade brasileira de matemática. 2009.

5.3 - Muniz Neto, Antonio Caminha, Geometria/ Antonio Caminha Muniz Neto. - 2. ed. - Rio de Janeiro, RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

2 - Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Lucas Felipe Farias de Luna [1] Vinicius de Carvalho Rispoli [2]

Considerem o Polígono convexo da Figura 1.1, que foi dividido, à partir do ponto O, em n triângulos. Como já provado, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta em 180°. Dado que foram formados n triângulos, podemos afirmar então que a soma dos ângulos internos do referido polígono de n lados é $180° \times n$.

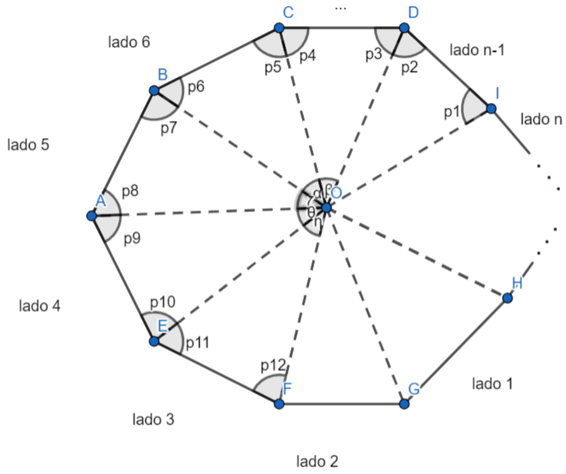


Figura 1.1: Representação de um polígono convexo de n lados

Qual o erro da afirmação feita acima? Procure justificar sua resposta de maneira clara e objetiva, além de utilizar argumentos matemáticos.

[1]Universidade de Brasília - lucasff.luna@gmail.com
[2]Universidade de Brasília - vrispoli@unb.br