Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

APLICAÇÕES MATEMÁTICAS EM TRIGONOMETRIA: À CONSTRUÇÃO E USO DO TEODOLITO CASEIRO PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO PARA ALUNOS DO 8º ANO

Gabriel dos Santos Teixeira

Brasília, DF
2025

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

APLICAÇÕES MATEMÁTICAS EM TRIGONOMETRIA: À CONSTRUÇÃO E USO DO TEODOLITO CASEIRO PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO PARA ALUNOS DO 8º ANO

Gabriel dos Santos Teixeira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do grau em mestre em Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Raquel Carneiro Dörr

Brasília, DF
2025

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

APLICAÇÕES MATEMÁTICAS EM TRIGONOMETRIA: A CONSTRUÇÃO E USO DO TEODOLITO CASEIRO PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO EM ALUNOS DO 8º ANO

por

Gabriel dos Santos Teixeira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Brasília, DF: julho/2025

Comissão Examinadora:

AGRADECIMENTO

Primeiramente, à minha mãe, Rosângela Teixeira, que, mesmo nos dias em que pensei em desistir, me apoiou e incentivou até o fim para que chegasse até aqui.

Ao meu pai, Ladário Teixeira Neto, que sempre se preocupou com minha saúde física e mental, e durante minhas madrugadas de insônia ia até meu quarto falar para ir dormir. E ao meu irmão, Daniel Teixeira, que sempre foi e será meu primeiro amigo.

À minha noiva, Júlia Gouveia, pelo suporte emocional dado durante todo o mestrado, comemorando a cada vitória, ofertando seu ombro para me consolar quando mais necessitava e por ter adaptado inúmeras vezes sua rotina só para conseguir estudar comigo e me fazer companhia.

À professora Raquel Carneiro Dörr, por aceitar meu convite e contribuir em cada detalhe dessa pesquisa, orientando e sugerindo novas perspectivas que foram fundamentais para a construção desta dissertação.

Ao Capitão Candeia, professor/coordenador e grande amigo do Colégio Militar Tiradentes, por trazer essa proposta e dinâmica para dentro do colégio, e, principalmente, por incentivar a busca pelo título de Mestre.

Obrigado às vozes da minha cabeça, que nunca me deixaram só.

RESUMO

Esta pesquisa, de natureza quanti-qualitativa, teve como objetivo principal analisar o desenvolvimento dos alunos do Ensino Fundamental ao longo da aplicação de tarefas matemáticas interativas voltadas ao ensino de Trigonometria, integradas a aulas conteudistas e fundamentadas em metodologias ativas. Foram propostos seis objetivos específicos, incluindo a construção do conceito de semelhança de triângulos, a identificação das razões trigonométricas no triângulo retângulo, a aplicação das relações métricas com instrumentos práticos como o teodolito caseiro, a construção da tabela trigonométrica a partir de triângulos notáveis, a avaliação da metodologia ativa e a análise da relevância do produto educacional tanto pelo desempenho quanto pela percepção dos alunos. Do ponto de vista quantitativo, foram aplicadas análises estatísticas como ANOVA, Correlação de Pearson, testes T de comparação entre frentes e Regressão Linear Múltipla. Os resultados evidenciaram que a frente de Trigonometria teve maior impacto na média geral dos estudantes, com valores elevados de F e p-valor significativamente baixo, indicando contribuição estatisticamente relevante. A correlação positiva e significativa entre as frentes e a média geral reforçou a consistência dos dados, e a regressão linear mostrou que os desempenhos em Trigonometria são bons preditores da média geral. A avaliação diagnóstica sobre semelhança de triângulos também revelou padrões interessantes de desempenho, permitindo identificar lacunas e avanços em turmas específicas. Na dimensão qualitativa, utilizou-se o modelo SERVQUAL adaptado ao contexto educacional para avaliar a percepção de 15 alunos sobre a experiência com metodologias ativas. Os resultados mostraram altos níveis de satisfação em dimensões como confiabilidade, segurança e empatia, sugerindo que as abordagens adotadas favoreceram o engajamento e a aprendizagem. Conclui-se que a integração entre teoria, prática e tecnologia, aliada à metodologia ativa, resultou em melhorias significativas no desempenho dos alunos e em uma percepção positiva sobre o processo de ensino-aprendizagem. A pesquisa reforça o papel da Trigonometria como campo fértil para o uso de estratégias pedagógicas inovadoras e a importância de avaliações formativas e diagnósticas no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Trigonometria; Ensino de Matemática; Metodologia Ativa; Estatística Educacional.

ABSTRACT

This quantitative-qualitative research aimed to analyze the development of middle school students throughout the implementation of interactive mathematical tasks focused on teaching Trigonometry, integrated into content-based lessons and grounded in active methodologies. Six specific objectives were proposed, including the construction of the concept of triangle similarity, the identification of trigonometric ratios in right triangles, the application of metric relations using practical instruments such as a homemade theodolite, the construction of a trigonometric table based on notable triangles, the evaluation of the active methodology, and the analysis of the educational product's relevance both through student performance and their perceptions. From a quantitative perspective, statistical analyses such as ANOVA, Pearson Correlation, paired T-tests, and Multiple Linear Regression were applied. The results showed that the Trigonometry module had the greatest impact on students' overall average, with high F values and significantly low p-values, indicating statistically relevant contributions. The positive and significant correlation between the modules and the overall average reinforced data consistency, and the linear regression demonstrated that performance in Trigonometry was a strong predictor of overall academic performance. The diagnostic assessment on triangle similarity also revealed interesting performance patterns, allowing for the identification of gaps and progress in specific classes. On the qualitative side, the SERVQUAL model adapted to the educational context was used to assess the perceptions of 15 students regarding their experience with active methodologies. The results showed high levels of satisfaction in dimensions such as reliability, safety, and empathy, suggesting that the approaches adopted fostered engagement and learning. It is concluded that the integration of theory, practice, and technology, combined with active methodology, led to significant improvements in student performance and a positive perception of the teaching-learning process. The research reinforces the role of Trigonometry as a fertile ground for the use of innovative pedagogical strategies and highlights the importance of formative and diagnostic assessments in the learning process.

Keywords: Trigonometry; Mathematics Education; Active Learning; Educational Statistic.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Difícil saber em que momento o prazer pela Matemática surgiu em minha vida, talvez no 6º ou 7º ano, período em que tive uma professora de descendência japonesa, professora Helena, e que a cada feriado ou férias passava listas de, em média, 30 a 40 expressões numéricas e verificava os acertos e erros de cada um no primeiro dia de aula de nosso retorno à escola. Ao mesmo tempo que me sentia desafiado a realizar todas aquelas atividades sozinho, considerava exaustivo passar muitas horas das minhas férias debruçado aos estudos, tendo, por muitas vezes, questionado da necessidade de tantos exercícios. No entanto, quando entrei na faculdade, percebi o quão necessário e importante foram aqueles exercícios, não somente pelo aspecto de aprofundar o conhecimento e treinar o uso de operações mentais, mas por ter criado o hábito de estudar, tendo assim o costume resolver questões e provas de diferentes vestibulares, treinando minha interpretação de texto e métodos de resolução.

Ou talvez no 9º ano, quando tirei minha primeira nota baixa em uma prova de matemática, chorei em sala acreditando que não era capaz e o professor da época, professor Henrique, encostou em meu ombro e me consolou dizendo que "uma prova não define a capacidade, mas sim a sua força de vontade em superar". Na época, essa frase mexeu comigo a ponto de querer mostrar para ele e para mim mesmo que eu era capaz, tendo assim o feito de ter gabaritado a prova seguinte.

Infelizmente, onde estudava na época não havia turmas de ensino médio, logo tive que passar pela primeira mudança de escola, indo para um colégio particular considerado de alta performance, no entanto, todos os meus amigos de infância acabaram indo para outro. Essa mudança serviu para mostrar dois fatos importantes para mim: o primeiro era que as minhas habilidades haviam melhorado, pois no mesmo ano, realizei a prova Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a qual no nível médio contemplava todos os conteúdos de Matemática do ensino médio, passando da primeira fase. O segundo fato foi determinante para minha saída da escola: o preconceito que os alunos tinham com quem não estava no mesmo patamar social que eles.

Apesar do bullying que sofri naquela escola por ser um dos únicos que voltava de ônibus para casa, o ensino que tive ali, principalmente de matemática, era excepcional e por causa disso, mesmo sendo uma pessoa mais introvertida, por muitas vezes, no final da aula, ia até a mesa do professor tirar dúvidas ou mostrar minha resolução, a qual por muitas vezes era diferente das que mostravam, criando um vínculo e apreço pela profissão. Todavia a escola em si não me cativava a querer permanecer ali, mesmo tendo este vínculo com os professores.

Aquele ambiente não me propôs o que esperava de um ensino médio de uma escola de grande nome, sendo assim, pedi para me matricularem na escola onde estavam meus amigos e mais próximo de minha residência podendo até mesmo ir a pé para escola.

Em 2009, já no segundo ano do ensino médio, em um novo ambiente escolar, comecei a dar os primeiros passos para o que seria o meu futuro, um professor de matemática, ajudando os colegas da minha série e dos anos mais novos, começando a tomar gosto em lecionar e, por muitas vezes, pela empolgação me desafiava a ensinar física ou química só pelo prazer de ver as pessoas conseguindo superar suas dificuldades.

Em 2011, quando iniciei minha trajetória na Universidade de Brasília (UnB), cursando Matemática, também comecei meu percurso profissional como monitor de Ensino Médio no colégio onde havia acabado de me formar. Logo no primeiro semestre, mergulhei em um dos períodos mais intensos e enriquecedores da minha formação, com uma jornada de trabalho de 30 horas semanais auxiliando alunos na resolução de questões. Essa experiência foi fundamental para o aprimoramento da minha didática e para o desenvolvimento de uma postura mais reflexiva sobre o ensino.

Durante os três anos em que atuei nessa função, tive o privilégio de conviver com meu primeiro chefe, Carlos Sérgio, que se tornou uma figura marcante na minha formação como educador. Mais do que supervisionar meu trabalho, ele compartilhou conselhos valiosos sobre educação e sobre a prática docente. Uma de suas falas que carrego comigo até hoje foi: “Aquilo que tu tens de vida, eu possuo de sala de aula, mas isso não quer dizer que eu sei mais que você, e sim que tu tens mais capacidade de aprender do que eu.” Essas palavras, ditas com humildade e sabedoria, marcaram profundamente minha visão sobre o papel do professor e sobre o potencial de crescimento contínuo que a profissão exige.

Ainda enquanto cursava o oitavo semestre da licenciatura, recebi a proposta de ser professor titular de uma turma de primeiro ano do ensino médio. Tal convite fez-me acreditar que tinha chegado no ápice de minha profissão, ser professor aos 21 anos, no entanto, existe um abismo de diferença entre lecionar e mentorear exercícios, a relação de dinâmica de classe, os desafios que os alunos podem trazer, as especificidades que devem ser dadas para cada estudante, todos esses pontos vivenciei antes da disciplina Regência, caráter obrigatório para conclusão do curso de matemática.

Após esse primeiro contato com a sala de aula, procurei por trabalhar em cursinhos preparatórios focados em vestibulares para ingresso no curso de medicina e no curso para carreira militar, pois as questões destas bancas tinham maior complexidade. No entanto, sentia que algo me faltava, que mesmo tendo uma primeira experiência ruim, foi que o conselho de meu antigo chefe, Carlos Sérgio, começou a fazer sentido. Foi então que, em 2019, decidi voltar a lecionar matemática, mas, agora, na Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal (SEEDF) como professor de contrato temporário.

Esta mudança para escola pública fez com que eu reavaliasse meus critérios de avaliação, metodologia e planejamento de aulas, pois por muitas vezes tinha que retomar conteúdos vistos em anos anteriores que não tiveram a atenção devida.

A convivência com as duas realidades da educação me incentivou a procurar algo a mais, a querer estudar mais sobre pedagogia, metodologias ativas, principalmente por causa da pandemia de COVID-19 que houve no período de 2020 a 2022.

Nesta época, procurei de todas as formas alcançar meus alunos digitalmente, compartilhando rede social para que pudessem me comunicar de modo mais rápido e dinâmico, fazendo "aulões" online de modo que fosse acessível a qualquer um que desejasse, até criando um canal no youtube[1], postando vídeos-aulas e fazendo minhas próprias animações sobre conteúdos como *história dos números* e *história das unidades de medida*. Toda essa perspectiva de ensino tinha como referência os aspectos da pesquisa da Alessandra Otaviano (2012, p.67), "*Estímulo à criatividade por professores de Matemática e motivação do aluno"* que concluiu

> [...]é importante que o professor de Matemática tenha visão do que vem a ser a Matemática, do que constitui a atividade Matemática o que caracteriza um ambiente propício à aprendizagem da Matemática. Isso, paralelamente ao uso de estratégias de ensino promotoras da criatividade, possivelmente contribuiria para assegurar níveis mais altos de motivação para aprender Matemática pelos alunos.

Em julho de 2021, surgiram duas oportunidades de emprego que me propuseram lapidar o que tanto estudei na pandemia, a metodologia ativa: lecionar em uma escola bilíngue, onde constantemente realizamos projetos de campo e interdisciplinares, e lecionar em uma escola pública, mas com aspectos físicos, econômicos e qualidades de escola particular, o Colégio Militar Tiradentes.

Na escola bilíngue, apesar do desafio de ter que aprender a ensinar, preparar planos de aula e pensar em uma língua estrangeira, as possibilidades que tive de criar projetos interdisciplinares, tais como os alunos construírem animais utilizando diferentes tipos de caixa montando uma cadeia alimentar, de modo que fosse alinhado com o conteúdo de ciências, ou

[1] Canal do youtube: *Matemática professor TX* - https://www.youtube.com/@matematicaprofessortx8908

quando solicitei que os alunos utilizassem escalas de proporção para associar as distâncias dos planetas com suas dimensões, ressignificaram para mim o que era ensinar.

Estas aplicações me permitiram alinhar diferentes tipos de bases metodológicas de ensino, como Carraher & Schilemann (1988, p. 179), afirmam, que "*não precisamos de objetos na sala de aula, mas de objetivos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados*".

Assim, pude correlacionar um dos principais estudiosos das últimas décadas, Piaget, que considerava que a ação de lecionar é reflexiva.

> que o interesse da criança não seja atraído pelo objeto material em si ou pelo ente matemático, senão pelas operações sobre o objeto e seus entes. Operações que, naturalmente, serão primeiro de caráter manipulativo para depois interiorizar-se e posteriormente passar do concreto ao abstrato. Recorrer a ação, diz Piaget, não conduz de todo a um simples empirismo, ao contrário, prepara a dedução formal ulterior, desde que tenha presente que a ação, bem conduzida, pode ser operatória, e que a formalização mais adiantada o é também.

Ao longo desses anos, pude lecionar em diferentes anos do ensino fundamental e médio em ambas escolas e periodicamente alunos e ex-alunos me procuram para questionar a necessidade de trigonometria, questionando sua complexidade e aplicações. Tais indagações são consideradas "comuns" por muitos professores e estudiosos, onde, por muitas vezes, o ensino das relações trigonométricas é dado apenas por memorização de fórmulas.

Considerar que a insciência do aluno sobre trigonometria é culpa unicamente do professor é transferir o peso da culpa sem antes revisar os aspectos que norteiam nossa educação, pois quando analisamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) podemos concatenar apenas dois tópicos do ensino de Matemática no ensino médio ao ensino de trigonometria:

- **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
- **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Todavia, quando comparamos com o tempo que dedicamos para lecionar trigonometria notamos uma divergência, pois é dedicado ao menos um ano do ensino médio para conseguir trabalhar todas as características, fórmulas, relações e propriedades que tange a esse assunto de modo concreto e coerente, pois, aos longos dos demais anos, estes serão relacionados à diferentes tópicos como: números complexos, áreas de polígonos, ondas (conteúdo de física), etc. Esta contradição de tempo dedicado e tópicos destinados contribuem para o engessamento do ensino como observamos em May & Courtney (2016, p. 25), os quais citam que a divisão curricular pode ser um grande empecilho para o aprendizado:

> Em vez de desenvolver um significado de medida de ângulo que suporte uma única trigonometria, que engloba tanto a semelhança do triângulo como o comportamento periódico, os currículos típicos os desenvolvem separadamente e de forma independente. Especificamente, os livros escolares de ensino fundamental e médio desenvolvem duas abordagens não relacionadas da trigonometria: trigonometria de triângulos e trigonometria de funções periódicas.

Considerando essa problemática, esta dissertação tem como finalidade analisar de que forma a adoção de metodologias ativas, aliada ao uso de recursos didáticos e à proposição de tarefas matemáticas, pode favorecer a aprendizagem de conceitos relacionados à Trigonometria entre os alunos do Colégio Militar Tiradentes, buscando demonstrar a viabilidade de aplicar projetos mais imersivos e significativos. Além disso, pretende-se evidenciar as possíveis aplicações e contextualizações históricas desses conteúdos, promovendo uma aproximação mais concreta entre os estudantes e a matemática, ao reconstruir, por exemplo, os caminhos e reflexões de Tales de Mileto sobre a semelhança de triângulos, até alcançar as relações métricas no triângulo retângulo.

Deste modo, esta pesquisa tem como objetivo geral analisar o desenvolvimento dos alunos ao longo do desenvolvimento de tarefas matemáticas sobre trigonometria, intercalados com aulas conteudistas, onde ao final será aplicada uma avaliação formativa e um formulário de opinião a fim de verificar os pareceres e concepções dos alunos sobre aulas de metodologia ativa e sua eficácia.

Os objetivos específicos da pesquisa são:

1. Construir a percepção de semelhanças de triângulos a partir de aplicações similares às utilizadas ao longo da história;
2. Identificar os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo relacionando ao conteúdo de semelhança de triângulos;
3. Aplicar as relações métricas do triângulo retângulo a partir do uso de um teodolito caseiro;
4. Determinar a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis ($30^o, 45^o, 60^o$) a partir de triângulos notáveis (triângulo equilátero e triângulo isósceles retângulo);
5. Avaliar o uso da metodologia ativa aplicado ao ensino de trigonometria;
6. Analisar a relevância do produto educacional a partir dos resultados da avaliação.

Sendo assim, o texto está disposto em capítulos de modo que o segundo, denominado como referencial teórico, foi dividido em quatro seções, sendo a primeira “Dificuldade do ensino-aprendizado de Matemática no Brasil”, a segunda seção “Metodologias ativas focadas em Caráter Exploratório”, sendo que a segunda possui uma subseção destinada à aplicação de materiais manipuláveis ao ensino de matemática. A primeira seção teve como embasamento dados retirados do PISA 2022 e estudos que destacam as relevâncias desses dados na evolução da educação brasileira, tendo como subseção as dificuldades do ensino de trigonometria, mesmo que este tópico tenha sido abordado de modo brando anteriormente, há uma necessidade de destacar pesquisas que procuram caracterizar e justificar tal adversidade.

Ainda no segundo capítulo, na terceira seção, apresenta, inicialmente, a história da trigonometria, partindo das relações de semelhanças de triângulos construídas pelos egípcios e gregos, séculos antes de Cristo. Logo em seguida, destacam-se as construções geométricas realizadas pelos hindus e pelos árabes ainda no primeiro milênio depois de Cristo. Posteriormente, o capítulo trata de definições trabalhadas no ensino fundamental e médio, como catetos, hipotenusa, seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis.

Por fim, na quarta seção do segundo capítulo consta a tabela 3 referente a coleta e análise de trabalhos acadêmicos selecionados, entre os anos de 2006 a 2023, concatenando o referencial, objetivos, metodologias e resultados de modo a ser mais visível as correlações entre cada publicação.

O terceiro capítulo aborda detalhadamente a metodologia utilizada na pesquisa, contemplando as abordagens quantitativa e qualitativa. A abordagem quantitativa tem como objetivo analisar o aprendizado dos alunos, respeitando as especificidades de cada um e buscando validar o ensino ativo, evidenciando suas contribuições significativas para a compreensão dos conteúdos. Já a abordagem qualitativa visa compreender a percepção e a aceitação dos alunos em relação à metodologia adotada.

No que diz respeito à pesquisa quantitativa, foram aplicados quatro métodos de análise para comparar o desempenho dos estudantes na prova bimestral do segundo semestre. As comparações envolveram a média de desempenho em trigonometria em relação à média geral, bem como em relação às frentes de álgebra e geometria. Para a pesquisa qualitativa, foram selecionados estudantes de cada turma para responder a um questionário, disponibilizado via Google Forms, estruturado em quatro seções.

O quarto capítulo, intitulado “Descrição e Análise de Resultados”, apresenta o núcleo metodológico da pesquisa por meio de três propostas desenvolvidas com base em tarefas matemáticas contextualizadas, organizadas em uma sequência didática planejada e aplicada ao longo do trabalho. A primeira tarefa consiste em uma avaliação diagnóstica voltada ao conteúdo de semelhança de triângulos, tema que havia sido abordado previamente na unidade de geometria durante o primeiro semestre letivo. Esta atividade teve como objetivo identificar o nível de compreensão prévia dos alunos, possibilitando traçar um panorama inicial de suas dificuldades e potencialidades.

A segunda tarefa propôs a aplicação prática do conceito de semelhança no cálculo de alturas de objetos a partir da medição de suas sombras, oportunizando aos alunos vivenciar uma experiência de aprendizagem mais concreta e conectada ao cotidiano. Já a terceira tarefa envolveu o uso de teodolitos (caseiros e modernos) como instrumentos de medição para o cálculo de alturas em campo, evidenciando de forma prática a correlação entre os conteúdos de geometria de triângulos e trigonometria. Essa atividade buscou, além de consolidar os conhecimentos anteriores, despertar o interesse dos alunos ao aproximar os conceitos teóricos da aplicação prática e interdisciplinar.

Além da descrição detalhada dessas tarefas, o capítulo também é responsável pela análise dos dados obtidos. Esta análise foi conduzida tanto de forma quantitativa, por meio de testes objetivos e estatísticos, quanto qualitativa, com base nas percepções e feedbacks dos alunos sobre o processo de ensino-aprendizagem. O capítulo, portanto, cumpre uma dupla função: relatar a execução didática e examinar seus efeitos sobre a aprendizagem, oferecendo um olhar reflexivo e crítico sobre a prática pedagógica adotada.

O quinto capítulo, denominado “Conclusão e Considerações Finais”, retoma os objetivos gerais e específicos estabelecidos na introdução do trabalho, articulando-os aos resultados discutidos ao longo dos capítulos anteriores. Nele, são apresentadas reflexões sobre a eficácia do uso de metodologias ativas e tarefas contextualizadas no ensino de Trigonometria, enfatizando os avanços percebidos tanto no desempenho acadêmico quanto no engajamento e autonomia dos alunos. Também são discutidas as contribuições do ensino ativo para a superação de dificuldades no ensino da Matemática, especialmente no que se refere à abstração e à descontextualização dos conteúdos.

Além disso, o capítulo final aponta limitações enfrentadas durante a execução da pesquisa, como o tempo reduzido para desenvolvimento das atividades e a disponibilidade de recursos, e sugere possíveis propostas futuras.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Atualmente, a educação brasileira enfrenta sérios desafios que refletem mudanças sociais, econômicas e tecnológicas em todo o mundo. No Brasil, por causa de suas dimensões continentais, a educação tem como um dos seus desafios homogeneizar o ensino e fornecer de modo igualitário os recursos educacionais necessários, que, apesar do progresso, ainda possui inúmeros fatores a serem trabalhados. Alguns desses fatores que compõem tais desafios são multifacetados, desde a ausência de funcionários administrativos dentro das escolas, a formação de profissionais da educação qualificados até a redução de verba para compra de materiais escolares.

Embora a BNCC (Brasil, 2018) enfatize a importância de "compreender, utilizar e criar tecnologias de informação e comunicação […] que gerem conhecimento, resolvam problemas", e apesar de vivermos numa era tecnológica, a acessibilidade dos materiais educativos e o uso da tecnologia na sala de aula estão aquém do esperado. No entanto, o cenário esperado é caracterizado por desenvolvimentos tecnológicos significativos, em que o conhecimento e a tecnologia são distribuídos de forma dinâmica e fluida, e chegam ao público de forma mais equitativa. Neste contexto, as estratégias e objetivos dispostos pela BNCC (Brasil, 2018) buscam uma forma eficaz de melhorar o uso da tecnologia na educação.

Nesse mesmo sentido, a educação passou por processos de inovações e mudanças de perspectivas, baseados numa relação em que, anteriormente, alguém detinha o conhecimento e os transmitia aos demais, enquanto, hoje, o foco da construção do conhecimento coloca o aluno como protagonista de seu ensino, deixando-o de modo mais imersivo e reflexivo produzindo seu conhecimento através do diálogo com os colegas, professores, sua comunidade e vivência, tendo estes focos supracitados em concordância com a BNCC (Brasil, 2018): "selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, [..] se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades[..]" e se correlacionando com Mayo et al. (1993, p. 227):

> estratégia pedagógica que apresenta aos estudantes situações significativas e contextualizadas no mundo real. Ao docente, mediador do processo de aprendizagem compete proporcionar recursos, orientação e instrução aos estudantes, na medida que eles desenvolvem seus conhecimentos e habilidades na resolução de problemas.

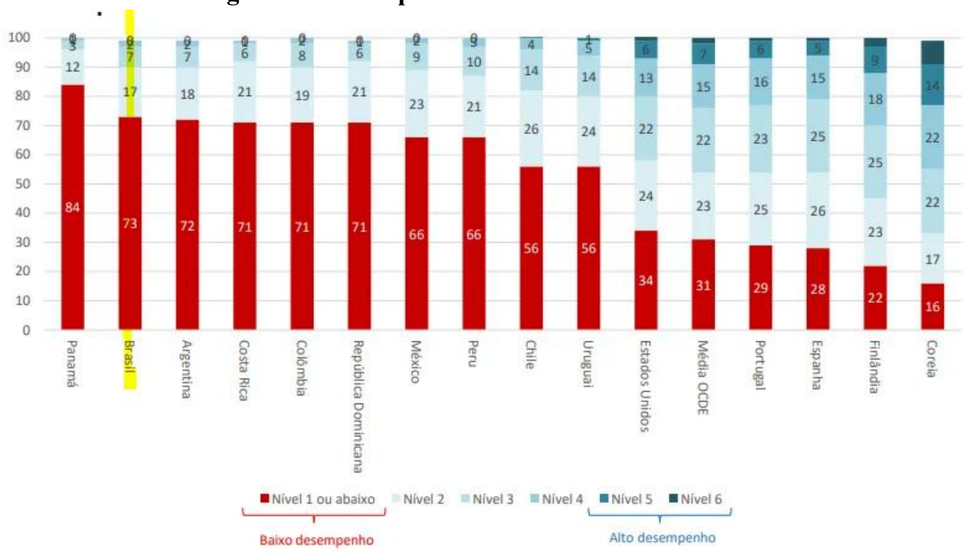
As transformações em curso tendem a modificar de forma significativa os processos educativos e de produção de conhecimento, sendo assim é preciso constantemente reavaliar os métodos de ensino que são aplicados dentro de sala, visando as perspectivas e necessidades do aluno, principalmente quanto a necessidade e a realidade do Brasil.

2.1. Dificuldade do ensino-aprendizagem de Matemática no Brasil

Quando retratamos e analisamos a implementação dessas inovações tecnológicas no Brasil, um país marcado por desigualdades socioeconômicas, é possível notar certos desafios significativos. A disparidade no acesso a dispositivos tecnológicos e à internet de qualidade entre as diferentes regiões do país, assim como entre os diferentes grupos sociais dentro destas regiões, pode exacerbar a exclusão digital educacional. Quando descrevemos o ensino de Matemática no Brasil, sempre tratamos como algo desafiador, no entanto, após o período de pandemia de 2020 a 2021, os alunos atingiram uma marca preocupante no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), em 2022, estando entre os 15 piores países na rendimentos na avaliação de matemática.

De acordo com Ernesto Martins Faria, diretor-fundador do Interdisciplinaridade e Evidências no Debate Educacional (Iede), em entrevista para a Fundação Roberto Marinho, “Alunos de 15 e 16 anos estão tendo o aprendizado esperado para alunos de 11 a 12 anos. O Brasil vai pior em Matemática e tem muita desigualdade, há uma diferença muito grande entre escolas privadas e escolas públicas”. (Faria, 2021)

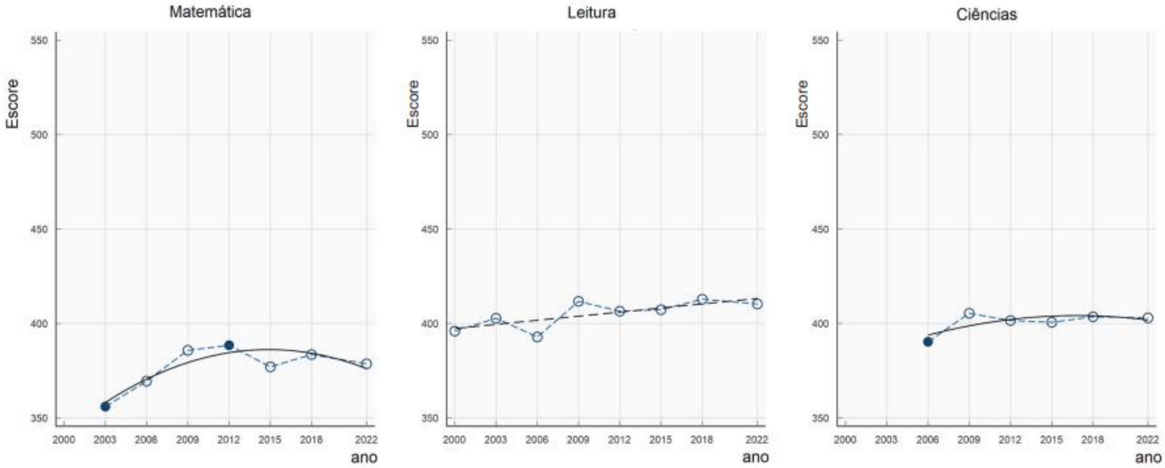
Figura 1 - Desempenho do Brasil em Matemática



Fonte: INEP - https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/acervo-linha-editorial/publicacoes-institucionais/avaliacoes-e-exames-da-educacao-basica/notas-sobre-o-brasil-no-pisa-2022

Ao analisar os dados fornecidos pelo INEP na figura 2, é possível notar que a curva de tendência referente a matemática, devido aos últimos desempenhos, projeta um decrescimento para os próximos anos. Pela mesma perspectiva, agora na figura 1, destaca-se negativamente o fato de que apenas 1% dos estudantes do Brasil atingiram alto desempenho em matemática, isto é, atingiram nível 5 ou 6 no teste.

Figura 2 - Tendências no desempenho em matemática, leitura e ciências

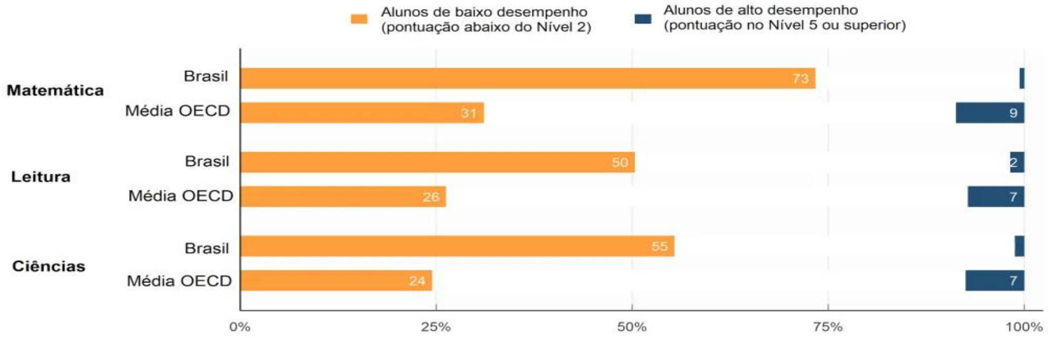


Fonte: INEP - https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/acervo-linha-editorial/publicacoes-institucionais/avaliacoes-e-exames-da-educacao-basica/notas-sobre-o-brasil-no-pisa-2022

Estes dados alarmantes mostram que há uma necessidade de reconstrução do sistema educacional por um todo, tendo em vista que a complacência com a ineficiência de todas as partes, governo, aluno e professor, faze com que a evolução educacional esteja estagnada em seus processos mais arcaicos, seja com os métodos de ensino ou com o sucateamento dos recursos ofertados pelo governo. Tais problemas foram evidenciados no período da pandemia de COVID-19, onde estas expectativas e notas serviram apenas para evidenciar a necessidade de reformular o ensino brasileiro. Aspecto este que, em outro momento da entrevista para Fundação Roberto Marinho, Ernesto (Faria, 2021) afirmou:

> Um aluno do 8º ano não deve apenas aprender o esperado para aquele ano, mas também o conteúdo dos anos anteriores (5º, 6º e 7º ano). Uma solução importante para assegurar esse aprendizado é proporcionar mais tempo pedagógico. Para esse aluno, 4 horas de ensino podem não ser suficientes. Ter mais tempo pedagógico e estratégias para personalizar o ensino, atendendo tanto alunos com baixo desempenho quanto os de desempenho mais alto, é fundamental.

Figura 3 - Comparação Percentual do Brasil em cada disciplina



Fonte: INEP - https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/acervo-linha-editorial/publicacoes-institucionais/avaliacoes-e-exames-da-educacao-basica/notas-sobre-o-brasil-no-pisa-2022

Enquanto isso, outro ponto a ser trabalhado é a formação de professores para o ensino com recursos tecnológicos, pela ótica do mundo globalizado em que vivemos, a capacitação nas ferramentas tecnológicas e digitais deve englobar não apenas a compreensão técnica, mas também a aplicação pedagógica que enriqueça o processo de ensino-aprendizagem.

De acordo com Soares Filho e Martins (2024), a presença significativa das tecnologias digitais exige uma formação docente que contemple o uso pedagógico consciente e contextualizado dessas ferramentas. Além disso, Santos et al. (2023) destacam que muitos professores ainda enfrentam dificuldades para integrar as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) em suas práticas devido à carência de formação continuada eficaz.

Como apontam Cavalcanti e Oliveira (2024), as desigualdades regionais no acesso às tecnologias também afetam diretamente a eficácia dos programas de capacitação docente, exigindo políticas educacionais mais equitativas e inclusivas. Nesse sentido, Machado, Kampff e Castro (2024) reforçam a importância de abordagens formativas que considerem a pluralidade sociocultural e a interculturalidade, promovendo uma educação conectada e cidadã.

2.1.1. Dificuldades do ensino de Trigonometria

As dificuldades no ensino de trigonometria sofridas pelos alunos e professores podem ser atribuídas a diversos fatores educacionais, como, por exemplo, à natureza abstrata dos conceitos trigonométricos que acabam sendo um obstáculo significativo para os estudantes. Conceitos como seno, cosseno e tangente, e suas relações com os ângulos e lados dos triângulos, requerem um nível de abstração Matemática que nem todos os alunos conseguem alcançar facilmente. Algo a que refere Mendes (2001), onde o autor propõe para o ensino de trigonometria pautar e estruturar atividades contextualizando com a história da Matemática como recurso metodológico em sala de aula, o qual ele define como sendo: "[...] uma ação metodológica centrada no ensino-aprendizagem pela experiência direta, com situações naturais e provenientes do conteúdo histórico." (Mendes, 2001, p. 59)

O componente visual, espacial e a interpretação dos contextos aplicados são outros pontos que os estudantes possuem certa dificuldade em concatenar com triângulos e outras figuras geométricas em suas mentes onde a habilidade de fazer essas visualizações mentais varia amplamente, fato que persiste desde décadas anteriores, como mostra o trabalho de Brito e Morey (2004), onde os mesmos procuraram objetificar e verificar as dificuldades do ensino de geometria e trigonometria:

> Analisando as dificuldades encontradas pelos professores podemos afirmar que tais dificuldades estão intimidades relacionadas à formação escolar [...] caracterizadas, entre outros aspectos, pelo descaso para com a geometria e a geometria, pela formalização precoce de conceitos geométricos e trigonométricos - quando esses eram estudados - e pela memorização de procedimentos sem a compreensão deles. (Brito, Morey 2004, p. 31)

Pela ótica de Ausubel (2003), os componentes supracitados de nada valerão caso não estejam relacionados com o conhecimento significativo para o aluno, concatenando com os três saberes: representacional, conceitual e proposicional. Em suma, o primeiro saber está relacionado com a representação simbólica de um objeto, tendo em vista que o desenvolvimento conceitual do mesmo não é necessário. E, ao longo do desenvolvimento do indivíduo, ele adquire habilidades sobre o objeto até atingir a fase conceitual, compreendendo sua função e conceito, até que se possa aplicar o saber proposicional — o saber da proposição — onde aquele que já compreende e possui habilidade consegue propor novas ideias e interpretar de diferentes perspectivas sobre o assunto.

Tais saberes, aplicados à trigonometria, possuem uma complexidade maior, pois há uma enorme quantidade de tópicos no cronograma do ensino médio, fazendo com que, à medida que o aluno desenvolve o conhecimento sobre um destes ele já tenha que iniciar um novo estudo, não havendo a possibilidade de consolidar os conceitos, de tal modo que não consiga atingir as três fases. Tal fato se agrava quando analisado pela perspectiva do professor, que, devido ao curto tempo que tem para lecionar todo o conteúdo programático, não consegue fundamentar cada aspecto da matéria e que, por vezes, não possui recursos educacionais para demonstrar e exemplificar como deseja, fazendo com que o desejo e a procura do saber por parte do aluno se tornem cada vez menores.

Para muitos, o tempo reduzido destinado ao ensino da Trigonometria mostrou-se insuficiente para promover a assimilação e a representação conceitual dos fundamentos desse conteúdo. Embora alguns alunos tenham conseguido, mesmo com essa limitação, despertar o prazer pelo saber e avançar de forma mais assertiva à medida que percorriam os tópicos, a maioria não teve o tempo necessário ou um ensino verdadeiramente significativo que favorecesse essa construção. Como consequência, cada novo tópico passou a ser percebido como um obstáculo, um fardo difícil de superar, o que se alinha ao que aponta Mora (2013), ao destacar que a ausência de conexão significativa com o conteúdo prejudica diretamente o envolvimento e o desenvolvimento do aluno.

> É necessário despertar a curiosidade, que é o mecanismo cerebral capaz de detectar a diferença na monotonia diária. Presta-se atenção àquilo que se destaca. [...] Por isso é preciso acender uma emoção no aluno, que é a base mais importante sobre a qual se apoiam os processos de aprendizagem e memória. As emoções servem para armazenar e recordar de uma forma mais eficaz.

2.2. Metodologias Ativas focadas em Caráter Exploratório

Enquanto, antigamente, consideramos que todos os indivíduos aprendem da mesma maneira e que o aluno deveria se adaptar ao método de ensino padrão, hoje percebemos que cada estudante vive sua própria realidade, opinião e possui suas próprias experiências, logo não podemos crer que a visão será a mesma sobre certo conteúdo.

A importância de ressignificar o que é o ensino e como devemos ensinar é um dos conceitos que Ladewig (2000) reflete em sua pesquisa:

> Hoje, da atividade mais simples à mais complexa, as crianças estão expostas constantemente a uma variedade de experiências onde é extremamente importante selecionar corretamente informações (dicas) relevantes à tarefa. A partir do momento que as crianças não desenvolvem completamente as estratégias da atenção seletiva até alcançarem à adolescência, a sua "performance" pode ser afetada caso não consiga selecionar corretamente as diversas informações de caráter proprioceptivas e exteroceptivas disponíveis no meio ambiente da actividade que estão realizando. O uso de estratégias cognitivas com a finalidade de auxiliar as crianças a lidarem com as distrações do meio ambiente, focando nos aspectos relevantes da tarefa.

Na metodologia de aula expositiva, o professor dedica-se a maior parte do tempo de sala de aula em demonstrar fórmulas e explicar conceitos técnicos, enquanto nos minutos restantes da aula separa e direciona alguns exercícios ao aluno para realizar em casa, como dever. À primeira vista parece bem simples e até mesmo lógico agir assim, no entanto, é necessário compreender que cada indivíduo leva um tempo diferente para realizar os exercícios, onde cada um tem seu nível de compreensão e dificuldade relativo aquela a disciplina, portanto alguns levariam minutos para resolvê-los enquanto outros levariam horas, sendo estes do segundo caso, muitas vezes, se sentem frustrados e acabam por desistir de realizar a atividade.

No entanto, para Bergmann & Sams (2014), para aplicar uma metodologia ativa na educação é necessário colocar e auxiliar o aluno a ser o protagonista do seu próprio conhecimento de modo que a curiosidade seja estimulada (D'Ambrósio, 1989), favorecendo o desenvolvimento de habilidades de percepção e solução de problemas de diferentes ângulos (Guerra, 2006), reestruturar o significado do conteúdo de modo que esteja relacionado a interesse pessoais (Guimarães, et al, 2009).

2.2.1. Material Manipulável

O uso de materiais manipuláveis, quando aplicado ao ensino de conteúdos ligados as Ciências Exatas, como a Matemática, por meio de recursos como ábacos, tangram, geoplanos e kits de experimentação científica, revela-se uma estratégia eficaz para demonstrar e dar sentido a definições teóricas, além de aproximar conceitos abstratos para realidade concreta dos alunos. Esses recursos servem como ponte entre a teoria e a prática, permitindo que os estudantes compreendam os fundamentos da disciplina por meio da experiência sensorial e da observação direta.

Nesse sentido, Lorenzato (2006, p. 22) considera que a conceituação de elementos surge justamente da experiência de modo que os conceitos evoluam conforme o processo de identificação e experimentação são aplicados, tendo como resultado a separação e análise progressiva dos atributos percebidos.

> É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos tamanho, cor, movimento, forma e peso. (Lorenzato, 2006, p. 22)

Com base nessa perspectiva, Lorenzato defende que a construção do conhecimento matemático se dá, inicialmente, por meio de vivências concretas que favorecem a formação do pensamento abstrato. Ao manipular objetos, os alunos acionam esquemas mentais e percepções que facilitam a internalização dos conceitos matemáticos. É nesse processo de construção ativa que os saberes deixam de ser meramente decorados e passam a ser compreendidos em sua essência. Logo, o uso de materiais manipuláveis não deve ser considerado um recurso secundário ou eventual, mas sim uma ferramenta didática indispensável, especialmente nas fases iniciais da aprendizagem, quando o estudante ainda está em transição do saber representacional para o conceitual.

Quando visamos o ensino da Matemática como algo que vai além de meras operações básicas e de questões descontextualizadas da realidade do aluno, passamos a buscar estratégias que provoquem sua curiosidade e despertem o interesse, de modo que as perspectivas e os preconceitos anteriormente associados à disciplina possam ser transformados. Todavia, para que isso ocorra, é indispensável um planejamento antecipado, que considere as especificidades da turma e vise proporcionar o melhor aproveitamento possível do aluno. Lorenzato (2006) reforça que não basta apresentar um conteúdo de forma direta e abstrata: é fundamental possibilitar uma vivência significativa, por meio de experiências didáticas bem estruturadas, que respeitem o tempo de assimilação dos estudantes e priorizem a construção do sentido.

> Muitas vezes, os professores de Matemática e mesmo os livros didáticos indicam uma nova unidade pela etapa da representação: em primeiro lugar, vem a definição (representação formal do conceito); depois, alguns exemplos; a seguir situações práticas em que se pode aplicar aquele conceito. Esse, acreditamos, é um dos grandes motivos pelos quais os alunos, mesmo os de cursos do nível médio, acham que Matemática é uma disciplina em que se devem decorar algumas regras e aplicá-las em situações de sala de aula, e que nada tem a ver com a vida prática. (Toledo e Toledo, 1997, p. 37)

No entanto, é importante destacar que o uso de materiais manipuláveis exige intencionalidade pedagógica. Não devem ser tratados como meros objetos de distração ou decoração em sala de aula, mas como ferramentas com objetivos claros e alinhados à proposta metodológica adotada. Nesse sentido, Freitas e Bittar (2004, p. 29) alertam que, muitas vezes, esses materiais acabam assumindo o papel central do ensino e deixam de cumprir sua função primordial: permitir que o aluno, por meio da manipulação e experimentação, construa seu próprio conhecimento de forma ativa, significativa e progressiva.

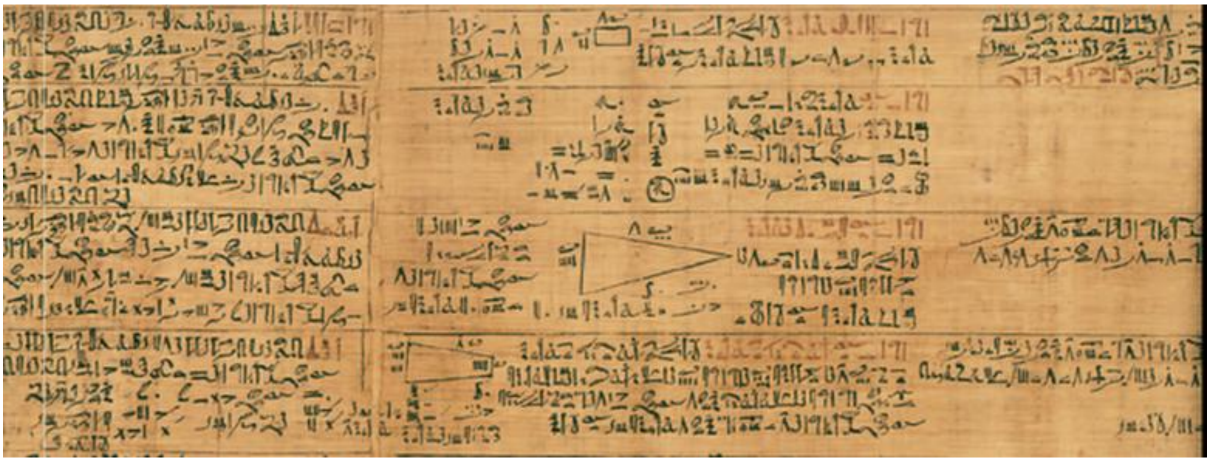
2.3. Trigonometria

Do grego *trígonos,* triângulo, e *métron*, medida, trigonometria tem como definição no dicionário: "Ramo da Matemática que possibilita o cálculo das medidas dos lados de um triângulo e de seus ângulos". A trigonometria pode abranger e interagir com diferentes áreas da Matemática e assim tem se entrelaçado com a história tanto da humanidade quanto da própria Matemática em si.

2.3.1. História da Trigonometria

Os primeiros registros de uma aplicação de cálculos relacionando entre números, medidas e lados de triângulos semelhantes, isto é, aplicações de razões trigonométricas, são datadas por volta de 1650 a.C. no Papiro de Ahmes, do Egito Antigo, onde contém 84 problemas matemáticos, dos quais quatro mencionam o *seqt* do ângulo.

Figura 4 - Papiro de Ahmes



Fonte: Todão.Os Papiros da Matemática Egípcia - O Papiro de Rhind ou Ahmes (2017).

Apesar de não ter sido claro ao expressar o significado de *seqt* em seus textos, o *seqt* se assemelha à cotangente do ângulo OMV, conforme o triângulo representado na figura 5, abaixo.

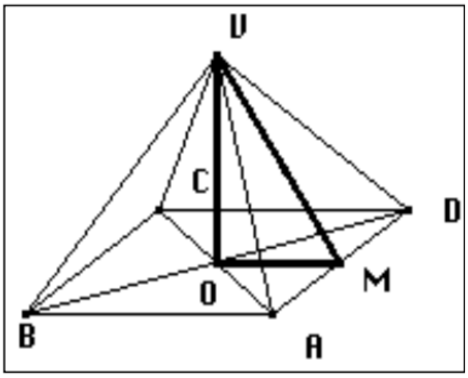
Figura 5 - Exemplo de *seqt*

Exemplo:

Seja OV = 40 e OM = 80,

então o seqt = $\frac{80}{40}$,

isto é: seqt = 2



Fonte: Lobo da Costa. A História da Trigonometria, p. 02, (2016).

No período babilônico, a *tábua cuneiforme Plimpton 322*, datada entre 1900 e 1600 a.C., apresenta uma notável lista de valores relacionados a secantes, obtidos por meio de triângulos semelhantes. Apesar das contribuições desse período, não há consenso sobre o surgimento exato do conceito de medida de ângulo, devido às limitações documentais e à própria forma como o conhecimento era difundido entre diferentes civilizações. No entanto, a partir dessas relações iniciais, os gregos puderam desenvolver estudos sistemáticos sobre as relações entre ângulos e arcos em uma circunferência.

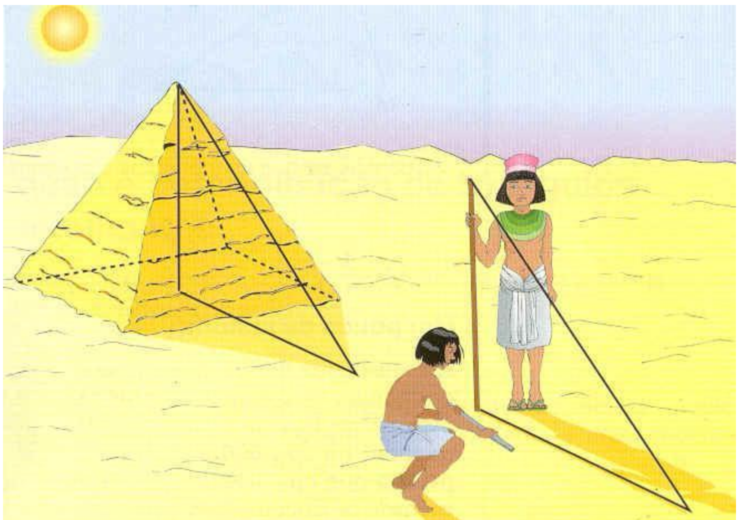
Figura 6 - Tábula de Plimpton

Fonte: Conheça Plimpton 322 – um tablete de argila com escrita cuneiforme babilônica datado em 3800 anos, RFCIA – Matemática, Ciência, Tecnologia, Inteligência Artificial (2018).

Muito do conhecimento de geometria e trigonometria se alavancou nos últimos séculos antes de Cristo na Grécia Antiga, onde houve duas das mentes mais emblemáticas da época, Tales de Mileto (624-548 a.C.) e Pitágoras (570 - 495 a.C.). De fato, esses dois nomes são os mais conhecidos atualmente por terem sidos fundamentais aos estudos de triângulos, tendo cada um contribuído ao estudo de semelhança de triângulos e à relação dos catetos e a hipotenusa em um triângulo retângulo, respectivamente.

Aprofundando um pouco em cada uma de suas contribuições, Tales foi responsável por facilitar o cálculo da medida da altura de triângulos e pirâmides, conhecido como teorema de Tales e, praticamente em todas as aulas introdutórias do assunto, se conta a história que durante uma passagem dele pelo Egito, o filósofo matemático foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Queóps.

Figura 7 - Tales calculando a altura da Pirâmide de Quéops

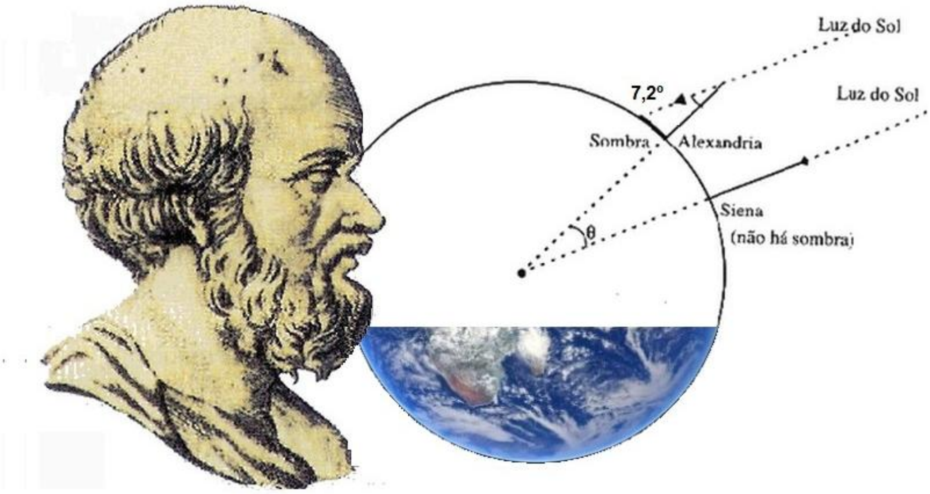


Fonte: http://www.professorfisicawellington.comunidades.net/teorema-de-tales3

Enquanto o matemático Pitágoras, discípulo de Tales, conjecturou a primeira demonstração de seu teorema: “Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.” Tal demonstração contribuiu de forma significativa para o estudo de trigonometria, de modo a servir como base para demonstração da relação fundamental da trigonometria.

Ao mesmo tempo que Pitágoras e Tales determinavam suas relações e construções a partir de semelhanças de triângulos, Eratóstenes, discípulo de ambos, ao observar que as sombras formadas por postes de mesma dimensão, localizados em Alexandria e Siena, no mesmo horário, formavam sombras diferentes. E, a partir desse questionamento do porquê isso ocorria, demonstrou a partir de uma relação simples que a Terra possui formato esférico, determinando o raio da Terra com uma precisão de 95%.

Figura 8 - Eratóstenes e Demonstração de seu descobrimento



Fonte: https://www.leme.pt/magazine/o-saber-não-ocupa-lugar/calculada-a-medida-da-circunferência-da-terra.html

Todos esses estudos contribuíram para que o astrônomo grego Hiparco de Nicéia, do século II a.C., adquirisse o conhecimento necessário para que suas descobertas pudessem dá-lo o reconhecimento e o título de “pai” da trigonometria. Hiparco foi responsável por construir a primeira tabela trigonométrica relacionada a uma tabela de cordas, sendo que estas cordas foram muito utilizadas em aplicações astronômicas, de modo a contribuir na catalogação de estrelas e em processos de observações da astronomia, como a duração do mês e do ano, tamanho da Lua e ângulo de inclinação eclíptica.

Hiparco, além disso, lançou uma coleção de 12 volumes dedicados à área de trigonometria, na qual abordou diversos termos e contribuiu significativamente para a padronização da nomenclatura. Sendo ele quem dividiu a circunferência em 360 partes iguais, definindo o grau como unidade de medida angular, e, em outro momento, subdividiu cada grau em 60 partes, estabelecendo o que hoje conhecemos como "minuto de arco".

Já Ptolomeu de Alexandria (90–168 d.C.), autor da obra "*Syntaxis mathematica",* composta por 13 volumes, deu continuidade ao legado de Hiparco e consolidou os conhecimentos astronômicos e trigonométricos da Antiguidade. Reconhecida pelos árabes como a maior obra científica de seu tempo.

> A Syntaxis mathematica (síntese matemática) é a obra mais influente e significativa da Trigonometria da antiguidade, esta síntese era distinguida de outro grupo de tratados astronômicos por outros autores, como Aristarco (310− 230 a.C., astrônomo e matemático grego, sendo o primeiro cientista a propor que a Terra gira em torno do Sol), por ser a obra de Ptolomeu chamada a coleção "maior" e a de Aristarco e outros a coleção "menor", e também devido às frequentes referências a primeira como magíster surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu *o Almagesto* (o maior) (Kennedy, 1992).

Após as quedas dos impérios romano e grego, a dedicação ao estudo da trigonometria reduziu de modo significativo na região da Europa, transferindo o polo de estudo para o Oriente Médio, tendo seu polo principal na região de Bharat (Índia). Esta transferência cultural auxiliou para que a compreensão e conhecimento sobre trigonometria, até então estudado pelos gregos e babilônicos, avançassem de modo que, segundo Kennedy (1992), a primeira menção ao queria seria o seno de um ângulo pode ser visto nos estudo feitos pelos Hindus pode ser visto através do texto escrito por Aryabhata, *Surya Siddhanta.*

Durante aproximadamente um milênio, 500 a 1500 d.C., os hindus estudaram a relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central da circunferência, identificando no triângulo retângulo em uma circunferência denominando como "*jiva"* a razão entre o cateto oposto e hipotenusa. Um ponto interessante a ressaltar é que o método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara em 1150.

O nome seno vem do latim *sinus* que significa seio, volta, curva, cavidade. Este nome se deve ao fato de que sua característica gráfica da função correspondente ser bastante sinuosa. No entanto, *sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta, que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Apesar dessa tradução errônea, o uso de Fibonacci do termo *sinus rectus arcus* fez com que rapidamente o uso universal de termo seno se tornasse recorrente.

2.3.2. Fundamentos Teóricos para o ensino-aprendizagem de Trigonometria

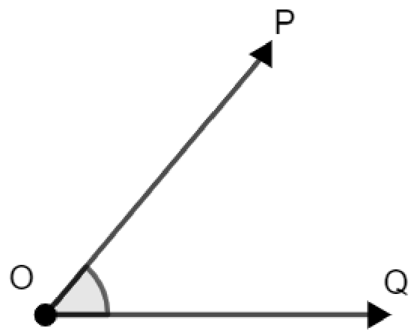
A trigonometria é a parte da Matemática que estuda a relação entre os ângulos e os lados de um triângulo. Deste modo, antes de iniciar o estudo sobre razões trigonométricas, é necessário compreender conceitos geométricos de menor complexidade, tais como ângulo e semelhança de triângulo, deste modo, essa subseção é destinado a cada uma das definições e demonstrações das fórmulas ensinadas no ensino de trigonometria.

2.3.2.1. Ângulos

Do latim "*angulum*", ângulo significa canto, esquina ou dobra. Desta forma, um ângulo é determinado "canto" ou "esquina" entre duas semirretas.

Considerando duas semirretas de mesma origem, não opostas, o espaço compreendido entre elas é chamado de ângulo. A origem comum das semirretas OP e OQ é denominada de vértice do ângulo, conforme a figura 9.

Figura 9 - Definição de ângulo



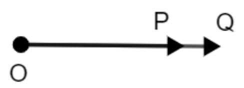
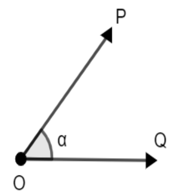
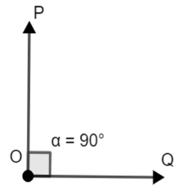
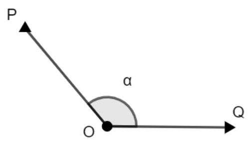
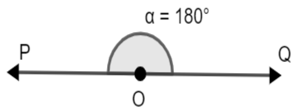
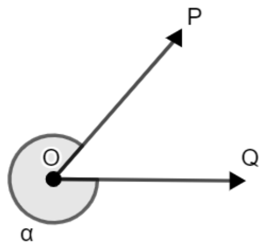
Fonte: Elaborado pelo Autor (2025).

Considerando o ponto O vértice e os pontos P e Q contidos em cada uma das semirretas que formam o ângulo, podemos denominá-lo como $P\hat{O}Q$ *ou* $Q\hat{O}P$.

No caso das semirretas serem colineares existem duas possibilidades: serem coincidentes, que no caso gera-se um par de ângulos, 0º, nulo, e 360º, volta completa, ou serem opostas em relação à origem delas, onde, nesse caso, formam um ângulo de 180º denominado como raso.

Para classificar os ângulos possuímos seis classificações, conforme a tabela 1:

Tabela 1 - Classificação dos ângulos

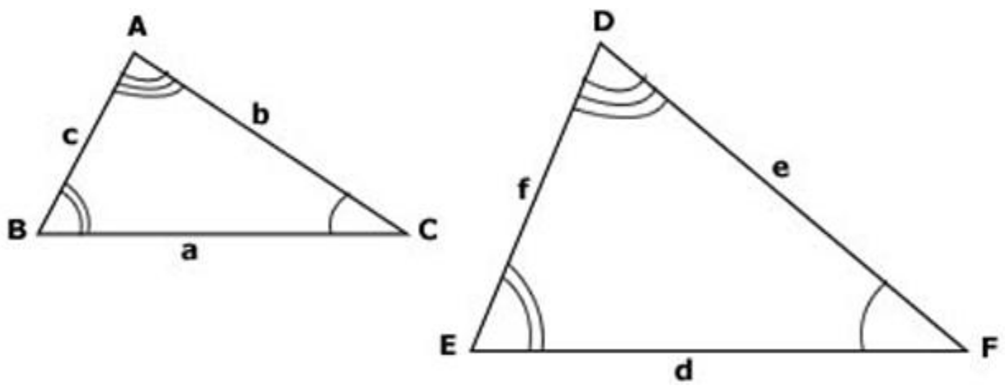
Classificação	nulo	Agudo	reto
medida	0º	0º$< \alpha <$ 90º	90º
figura			
Classificação	obtuso	raso	reflexivo
medida	90º$< \alpha <$ 180º	180º	$\alpha >$180º
figura			

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

2.3.2.2. Semelhança de Triângulos

Na geometria plana é dito que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, seus ângulos são congruentes e existe uma relação de proporcionalidade entre seus lados aos ângulos. Deste modo, afirmamos que, um triângulo ΔABC é semelhante ao triângulo ΔDEF se:

Figura 10 - Triângulos Semelhantes



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

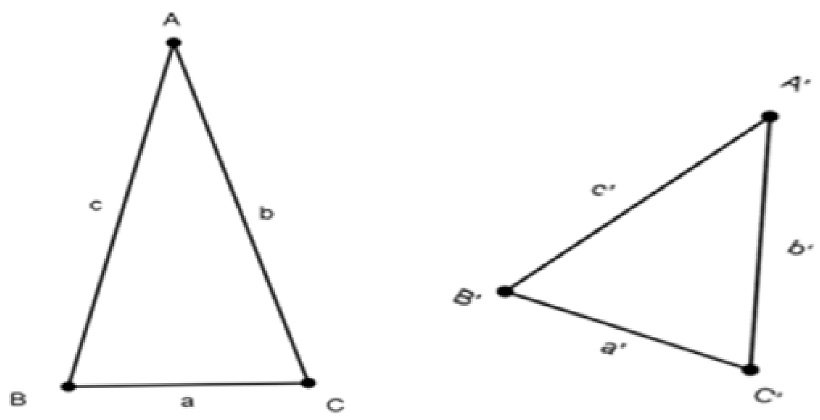
$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} B\hat{A}C \cong F\hat{D}E \\ A\hat{B}C \cong D\hat{E}F \\ A\hat{C}B \cong E\hat{F}D \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \dfrac{c}{f} = \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \end{cases}$$

Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos/

2.3.2.2.1. Casos de Semelhança de Triângulos

Caso LLL (Lado-Lado-Lado): Dois triângulos são semelhantes se, e somente, se, têm os três lados respectivamente proporcionais.

Figura 11 - Triângulos Semelhantes caso LLL

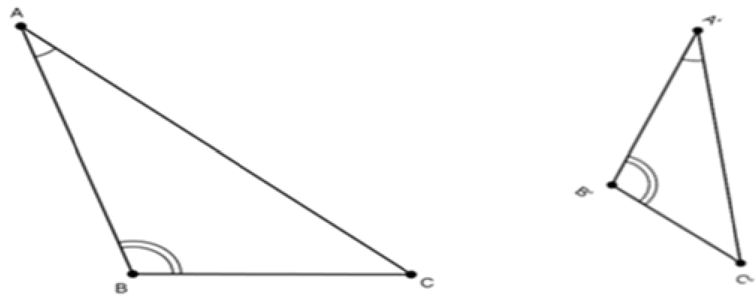


$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos/

Caso AA (Ângulo-Ângulo): Dois triângulos são semelhantes, se, e somente, se, têm dois ângulos correspondentes congruentes.

Figura 12 - Triângulos Semelhantes caso AA

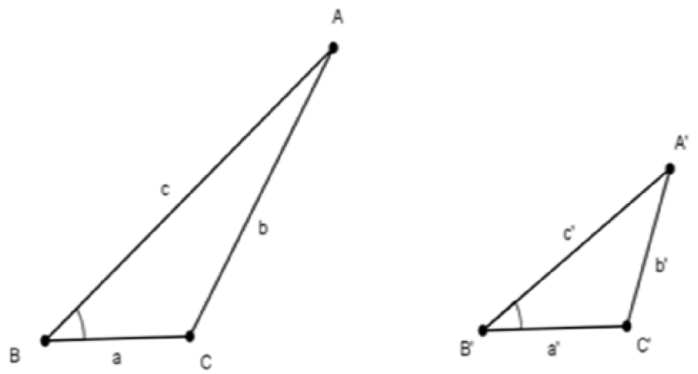


$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}\,C \cong B'\hat{A}'C' \\ A\hat{B}\,C \cong A'\hat{B'}C' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos/

Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado): Dois triângulos são semelhantes se, e somente, se, têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados no vértice comum desses lados são congruentes.

Figura 13 - Triângulos Semelhantes caso LAL



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\ A\hat{B}\,C \cong A'\hat{B'}C' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

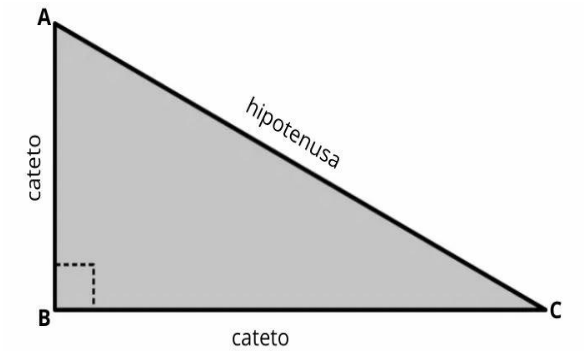
Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos

2.3.2.3. Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é a figura plana formada por três lados e três ângulos, sendo um deles reto, isto é, possui medida igual a 90º.

Os lados de um triângulo retângulo são denominados como: catetos, sendo estes os lados opostos aos ângulos agudos e hipotenusa, o maior lado do triângulo e oposto ao ângulo de 90º.

Figura 14 - Triângulos Retângulo

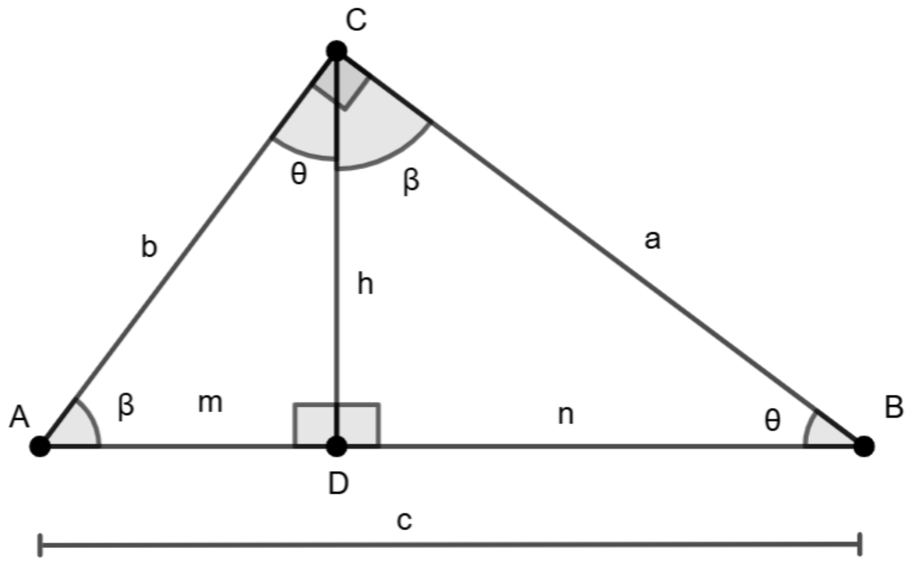


Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/area-triangulo-2.htm

2.3.2.4. Relações Métricas no Triângulo Retângulo

A partir da semelhança de triângulos, é possível determinar relações fundamentais entre os segmentos de um triângulo retângulo.

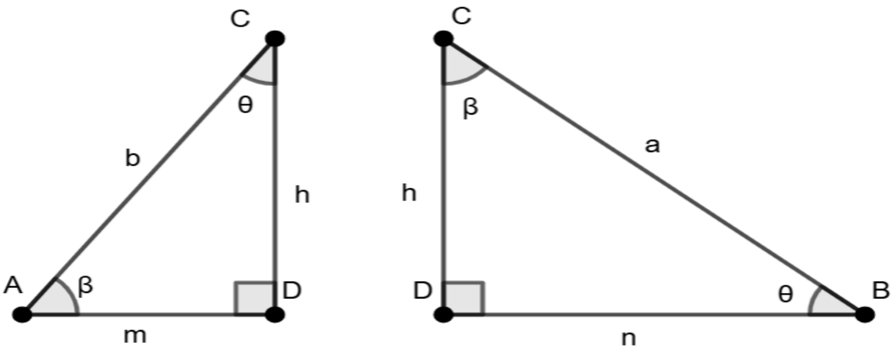
Figura 15 - Triângulos Retângulo com altura relativa



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para auxiliar na compreensão das relações de semelhança entre os triângulos ΔADC e ΔCDB, desenha-se separadamente ambos os triângulos conforme a imagem:

Figura 16 - Triângulos Retângulos Semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Deste modo, temos que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow h^2 = m \cdot n$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{b}{c} = \frac{m}{b} \rightarrow b^2 = c \cdot m$$

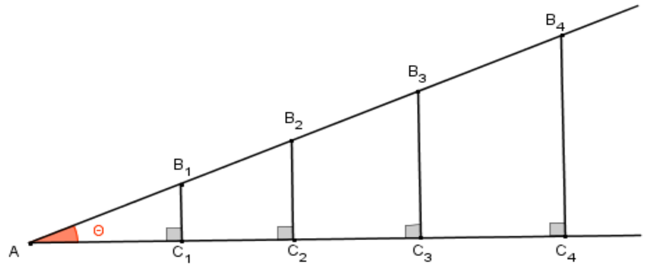
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{n}{a} \rightarrow a^2 = c \cdot n$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{h}{b} = \frac{a}{c} \rightarrow c \cdot h = a \cdot m$$

2.3.2.5. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Sejam os triângulos $\Delta AB_1C_1, \Delta AB_2C_2, \Delta AB_3C_3$,.... retângulos, conforme a figura 17. Verifica-se, pelo critério de semelhança AA(Ângulo-Ângulo), que os triângulos supracitados, assim como a infinidade de triângulos formados consecutivamente de ângulo θ, são semelhantes, logo a razão entre a medida de lados correspondentes é constante.

Figura 17 - Demonstração do conceito de seno, cosseno e tangente



Fonte: https://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-brincando-com-trigonometria/

Como os segmentos $\overline{AC_1}, \overline{AC_2}, \overline{AC_3}, \ldots\ldots.$ são catetos adjacentes ao ângulo θ e os seguimentos $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \overline{AB_3}, \ldots\ldots.$ são hipotenusas dos triângulos, a constante $\frac{\overline{AC_1},}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2},}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3},}{\overline{AB_3}} = \ldots\ldots$ será a razão entre o comprimento do cateto adjacente a θ e o da hipotenusa. Essa razão é conhecida por cosseno do ângulo θ:

$$cos(\theta) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

Deste modo, podemos definir as demais razões $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \ldots\ldots$ e $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \ldots\ldots$, como as seguintes fórmulas do seno e tangente do ângulo θ, respectivamente:

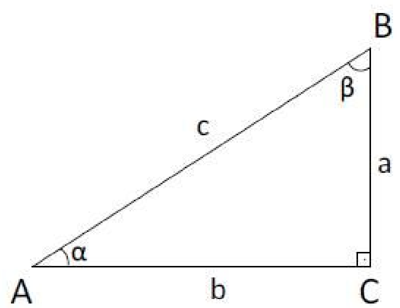
$$sen(\theta) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$tg(\theta) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

2.3.2.6. Relações Fundamentais da Trigonometria

A partir de um triângulo retângulo qualquer, podemos determinar com o auxílio do Teorema de Pitágoras que:

Figura 18 - Triângulo ΔABC com ângulos agudos α e β



Fonte: Sala de Atividades: Brincando com trigonometria

$c^2 = b^2 + a^2$; dividindo ambos lados por c^2

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}\ ;\ \text{substituindo } cos(\alpha) = \frac{b}{c}\ e\ sen(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\mathbf{1 = cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)}$$

Outra relação fundamental que pode ser notada no triângulo acima é que:

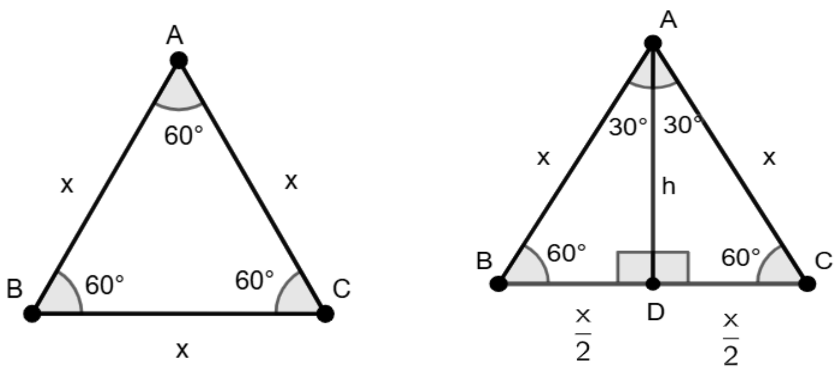
$$sen(\beta) = \frac{b}{c} = cos(\alpha)$$
$$cos(\beta) = \frac{a}{c} = sen(\alpha)$$
$$tg(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{tg(\alpha)}$$

Deste modo, podemos determinar que os senos e cossenos de ângulos complementares são inversamente correspondentes, isto é, o seno de um deles é congruente ao cosseno do complementar e vice-versa.

2.3.2.7. Seno, Cosseno e Tangente de Ângulos Notáveis

Os ângulos de 30º, 45º e 60º são denominados notáveis devido à possibilidade de calcular suas relações trigonométricas a partir de figuras geométricas regulares (triângulo equilátero e quadrado), conforme abaixo:

Figura 19 - Triângulo Equilátero com e sem altura relativa à base



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Como a altura de um triângulo equilátero coincide com a mediana e com a bissetriz, tem-se que D é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, sendo assim, é possível determinar o segmento $\overline{AD}$, a altura h, a partir de Pitágoras de modo que:

$$x^2 = h^2 + (\frac{x}{2})^2$$

$$x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3x^2}{4} = h^2$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = h$$

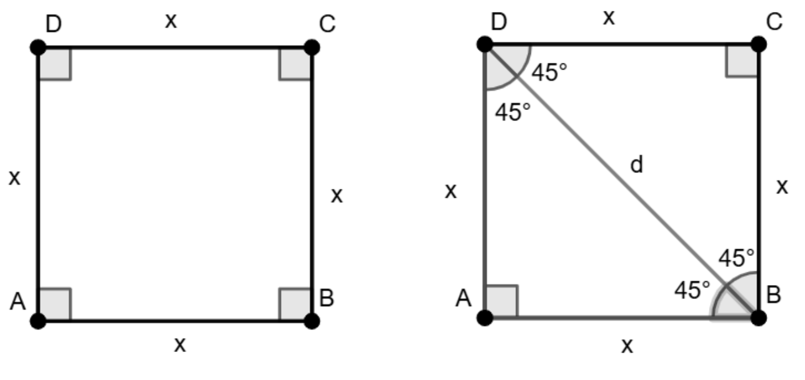
Tendo o valor de h e utilizando as fórmulas supracitadas em 3.2.5. temos que:

$$sen(30^0) = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \qquad cos(30^0) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad tg(30^0) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen(60^0) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad cos(60^0) = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}\; tg(60^0) = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Agora, a partir de um quadrado ABCD qualquer, calcula-se sua diagonal utilizando a fórmula de Pitágoras, obtendo assim valor igual a:

Figura 20 - Quadrado com e sem exposição diagonal



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

$$d^2 = x^2 + x^2$$

$$d^2 = 2x^2$$

$$d = x\sqrt{2}$$

Tendo o valor de D e utilizando, novamente, as fórmulas supracitadas em 3.2.5. temos que:

$$sen(45^o) = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos(45^o) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(45^o) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{x}{x} = 1$$

Deste modo temos assim a Tabela 2 contendo os valores de seno, cosseno e tangente de 30º, 45º e 60º, os ângulos notáveis

Tabela 2 - Seno, cosseno e Tangente dos ângulos notáveis

	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

2.3.3. História do Teodolito e sua Funcionalidade

Esta seção tem como objetivo apresentar a funcionalidade e a aplicabilidade do teodolito, assim como sua história, mostrando sua relevância para o projeto e sua capacidade de aplicação para o ensino de trigonometria.

Por definição, o teodolito é um instrumento óptico comumente utilizado no ramo de engenharia para medir ângulos verticais e horizontais, denominados como azimutes, com exatidão, deste modo, é um instrumento topográfico facilitador para a construção de mapas em escalas e para cálculos de longas distâncias. De acordo com Souza (2010, p.44), o teodolito "pode ser utilizado para medir distâncias que relacionadas com ângulos verticais permitem obter tanto a distância horizontal, entre dois pontos, quanto a diferença de nível entre os mesmos".

Apesar da primeira definição formal feita para um teodolito ter sido escrita por Leonard Digges em seu livro Pantometria, na primeira metade do século XVI, na Inglaterra, existem relatos que os egípcios e babilônios utilizavam cordas para medição de distâncias entre pontos, chamando de "esticadores de cordas", conforme a figura 21.

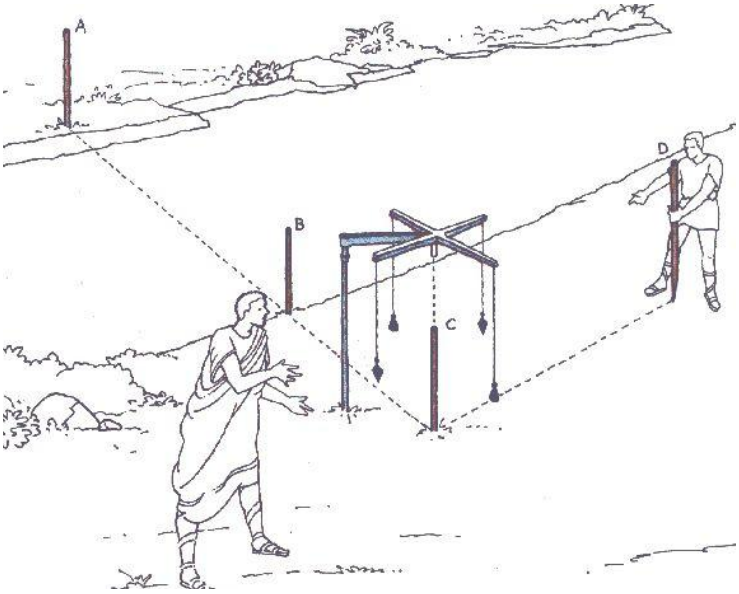
Figura 21 - Esticadores de corda

Fonte: Matemática Profissional: CONHECENDO UM POUCO DA HISTÓRIA DOS INSTRUMENTOS USADO NA TOPOGRAFIA

A utilização de objetos físicos para a medição e demarcação de territórios acompanha a trajetória da humanidade desde os períodos mais remotos. Ao longo dos séculos, esses instrumentos passaram por constantes inovações, refletindo e, ao mesmo tempo, impulsionando a evolução do conhecimento matemático de cada época.

Um exemplo notável dessa relação entre instrumentos e avanços matemáticos é o "groma", ferramenta desenvolvida pelos romanos. Com formato semelhante ao de uma cruz com prumos pendurados em seus extremos e fixada a uma haste vertical, o groma era utilizado em levantamentos topográficos. Sua função principal era auxiliar na criação de ângulos retos e linhas retas, fundamentais para a construção de estradas e edificações com maior precisão e alinhamento ortogonal.

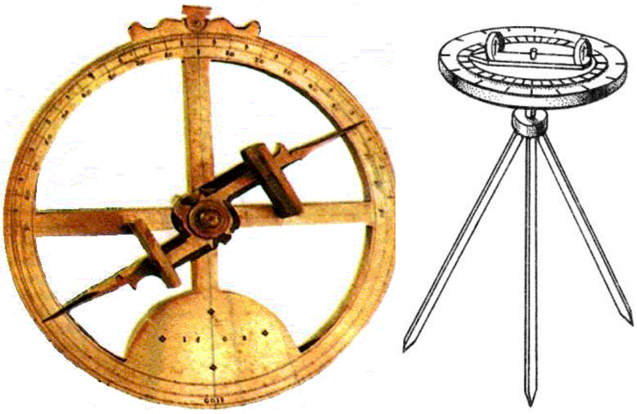
Figura 22 - Esboço do funcionamento de uma groma



Fonte: Per la serie "come eravamo": la GROMA – Multicoopter drone

No século XVI, período das grandes navegações, o teodolito primitivo de Leonard Digges, figura 23, era usado por navegadores ingleses com o objetivo de medir ângulos horizontais e verticais do céu, servindo para orientação e deslocamentos realizados ao longo de percursos marítimos, algo similar ao precursor do teodolito, o Astrolábio, ferramenta criada por Hiparco, o "pai" da trigonometria, utilizava o mesmo para catalogação de estrelas e construção de mapas geográficos.

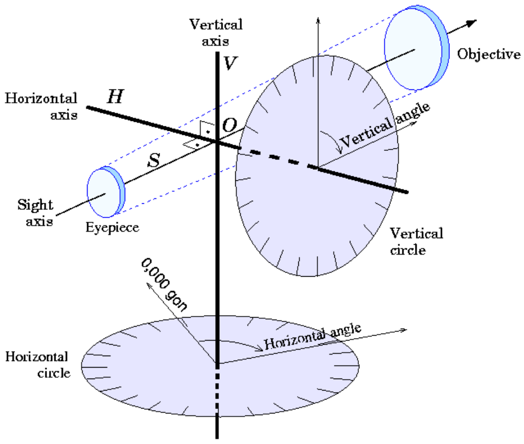
Figura 23 - Astrolábio e Teodolito Primitivo



Fonte: [Teodolito: o que é e para que serve? - Adenilson Giovanini]

Os teodolitos atuais, assim como o primitivo, são montados sobre um tripé com niveladores de estabilidade proporcionando assim uma liberdade de rotação vertical e horizontal, de modo que o operador do instrumento manuseie e se oriente em duas partes: a mecânica e a óptica, sendo a primeira denominada como "base" e a segunda de "alidarte".

Figura 24 - Estrutura óptica de um teodolito

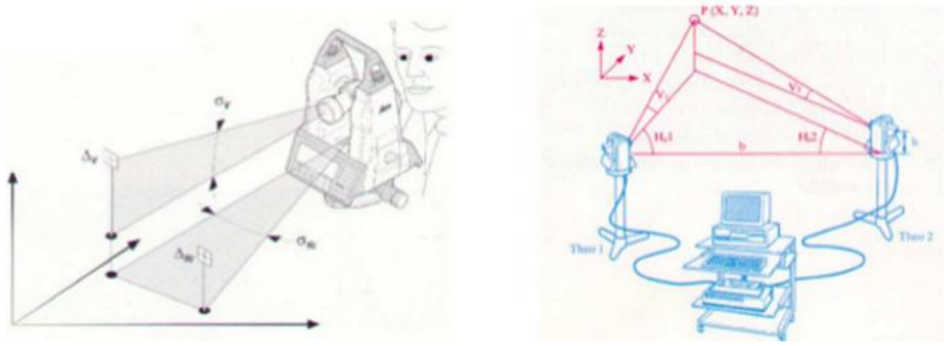


Fonte: [Teodolito: o que é e para que serve? - Adenilson Giovanini]

Atualmente os teodolitos possuem dois tipos: o Teodolito Standard e o Teodolito Estação Total, chamado também apenas de Teodolito Total.

O Standard é o mais simples onde, a partir de um telescópio, foca em um alvo pré determinado e determina, assim, os ângulos em cada um dos eixos tridimensionais, enquanto o Estação Total utiliza de raios infravermelhos posicionados no centro da luneta, podendo determinar também a distância do alvo pela utilização de receptores de ondas aquelas emitidas pela luneta. Este último, através do ângulo vertical, horizontal e pela distância a um ponto especificado, possui um software que reconhece e converte em coordenadas no plano tridimensional de modo automaticamente, gerando assim suas coordenadas polares, conforme a figura 25.

Figura 25 - Funcionamento de um teodolito moderno



Fonte: Catálogo Leica Mobile 3D metrology – Measurably Better - p. 4 – Ref.UI-241E – VII.92

2.4 Revisão de Literatura

Tendo como objetivo analisar as tendências pedagógicas sobre o ensino de trigonometria no triângulo retângulo, foi feita uma revisão de leitura com pesquisas realizadas do período de 2005 a 2023. A coleta destas pesquisas ocorreu em duas plataformas: na biblioteca virtual *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e no site de pesquisa acadêmicas *Google Scholar* (Google Acadêmico). Para ambas as pesquisas foram utilizadas as palavras-chaves trigonometria, ensino e metodologia ativa. No total, foram selecionadas 10 publicações, 2 pela SciELO e 8 pelo Google Acadêmico.

Na tabela 3 estão as informações de cada uma das pesquisas publicadas e ressaltam-se os seguintes critérios: referência, país, referencial teórico, objetivos, métodos e resultados das pesquisas, tendo como maior foco colaborar no entendimento em cada uma delas. Vale ressaltar que 20% destas publicações são estrangeiras.

Tabela 3 – Revisão de Leitura

Nº	Coleta	Referência	País	Referencial Teórico	Objetivos	Métodos	Resultados
1	Google Acadêmico	SANTOS (2015)	Brasil	SILVEIRA (2011), MACHADO (2006) e FREITAS, BITTAR (2004)	Propor uma metodologia ativa e aplicada do ensino de trigonometria no triângulo retângulo. Avaliar de modo qualitativo a proposta de atividade, anotar as percepções dos alunos sobre a disciplina e ponderar os questionamentos, contribuindo para o desenvolvimento dos estudantes.	SANTOS, nas primeiras aulas, se preocupou em revisar os conteúdos necessários para compreensão de trigonometria, para que nas subsequentes pudesse iniciar a proposta de atividade metodológica. Dividindo a sala em grupos, os estudantes terão que construir o próprio material a partir das instruções do professor. Após a construção, cada um dos grupos se direciona a um local determinado onde, junto ao professor, irão calcular distâncias a partir de angulações as quais foram medidas pelo instrumento criado.	De acordo com o autor, a proposta teve grandes impactos na percepção dos alunos sobre trigonometria, tanto no aspecto conceitual, quanto que prático, propondo uma nova perspectiva de entendimento. SANTOS considera que o processo de ensino-aprendizagem a partir de metodologias ativas apresenta um caráter motivacional para o aluno, onde a troca de experiências entre aluno/aluno e professor/aluno passaram a ser mais ativas, construindo de forma mais significativa o ensino.
2	Google Acadêmico	ANDRADE, OLIVEIRA, PEREIRA (2018)	Brasil	MENDES (2009)	incentivar os alunos na construção do conhecimento matemático; registrar as produções dos alunos com a mínima intervenção da professora; relacionar um instrumento matemático com o cotidiano e verificar se os estudantes	Inicialmente, foi realizada uma avaliação diagnóstica para compreender e analisar o entendimento dos alunos sobre trigonometria. Após esta coleta de dados, os alunos foram instruídos para a construção de um teodolito caseiro e com	As autoras acreditam que a proposta realizada não só auxiliou os educandos no processo de construção do conhecimento de forma autônoma como também perceberam ainda, a oportunidade de uma opção de mudança no ato de aprender

					sabiam efetuar as medições e posteriormente calcular a tangente.	auxílio do professor, os alunos mediram distâncias e ângulos manuseando o aparelho. Ao fim, foi feito novamente uma avaliação diagnóstica.	interagindo o conteúdo com um instrumento matemático desde sua origem.
3	Google Acadêmico	JUNIOR (2023)	Brasil	LUZ; GALLON; NASCIMENTO (2017) e BARRETO E FREITAS (2016)	Mediar e facilitar a aprendizagem de Trigonometria; Compreender como a utilização do Teodolito pode auxiliar no aprendizado de trigonometria; Observar a evolução do aprendizado dos estudantes nos conceitos trigonométricos; Identificar as dificuldades dos estudantes nas atividades dos conceitos de trigonometria	A metodologia abordada tem sido adotada como metodologia de ensino inovadora, classificada como Metodologia da aprendizagem criativa, ela busca envolver os alunos, encorajando-os a construir um teodolito caseiro, ao mesmo tempo em que desenvolvem habilidades essenciais, a aplicação da sequência de atividades didáticas com coleta de dados	Avalia-se que a realização de atividades diversificadas gera e desperta o interesse dos alunos, visto ser uma grande aliada na prática pedagógica do professor, permitindo um alcance dos objetivos pedagógicos, visando melhor desempenho do ensino aprendizagem. Acredita-se que os resultados desta pesquisa despertem o interesse dos professores de várias áreas do conhecimento, levando em conta a importância das metodologias ativas na formação do sujeito.
4	Google Acadêmico	DANTAS (2018)	Brasil	ABRAMOVICH (1990), LOPES (2011) e SANTOS, LORETO, GONÇALVES (2010)	Avaliar o desenvolvimento dos estudantes a partir de aulas estruturadas com a tecnologia do Geogebra, questionando suas percepções e relatando o posicionamento dos	Com o objetivo de comparar o desempenho dos estudantes, DANTAS optou por realizar uma atividade avaliativa pré e pós o ensino de trigonometria pelo aplicativo do GeoGebra.	As contribuições do GeoGebra, relatadas pelo autor, foram significativas para o aprendizado dos alunos, demonstrando um maior engajamento dos mesmos. Os estudantes que

					alunos em relação a esta tecnologia.	Durante as aulas expositivas pela plataforma o mesmo observou e coletou informações e relatos para que ao fim de sua pesquisa os estudantes participassem de uma entrevista semiestruturada.	participaram das entrevistas relataram que houveram melhoras sobre seus discernimentos sobre o assunto, tendo alguns deles utilizado o software como mecanismo de estudo para o avaliação. Todavia, DANTAS, ainda relata que apesar das características apresentadas terem sido positivas, o mesmo não descarta a necessidade de utilização de outros meios de abordagem do conhecimento, como livro, por exemplo. Afirmando que o GeoGebra serve como material facilitador de entendimento sobre trigonometria e não de fundamentalização teórico.
5	Google Acadêmico	OLIVEIRA (2006)	Brasil	COSTA (1970) e MENDES (2001)	Discutir outros trabalhos já publicados, cujo foco seja o ensino de trigonometria ou o ensino de Matemática por atividades. Preparar uma sequência didática como parte de uma proposta de ensino de trigonometria através de atividades. Realizar recomendações,	A partir de uma pesquisa metodológica, o autor propõe uma série de atividades práticas e teóricas sobre o que tange a trigonometria, propondo que a atividade seja feita em 5 semanas. Dividindo a turma em grupos, o autor propõe que seja siga um caráter de metodologia ativa e ao	O autor obteve resultados positivos e considera que atividades e metodologias ativas são importantes para o desenvolvimento de competências do educando, destacando a relevância para o ensino de trigonometria. No entanto, o mesmo considera que existem fatores extrínsecos que

					discutindo e apontando alternativas de superação de dificuldades no ensino de trigonometria por atividades.	longo desse período, o mesmo observe, corrija e oriente os estudantes sobre cada etapa de cada atividade. Ao final de cada etapa, é recomendável que seja feita uma avaliação, podendo ser de caráter diagnóstico ou de caráter somativo, avaliando e averiguando o desempenho dos estudantes sobre o entendimento de cada tópico ensinado.	impedem uma maior adesão pelo público estudantil, sendo estes o bloqueio emocional/dificuldade que sentem pelo estudo da matemática, o incentivo/falta de verba ofertada pela escola para compra e produção de materiais. Por fim, ainda cita, de forma motivacional e instrucional, quais pontos devem ser ponderados para a programação de atividades, tais como: compreender o público alvo, validar o material previamente e readaptar para diferentes causalidades que possam ocorrer dentro e fora de sala de aula, podendo assim obter maiores resultados.
6	Google Acadêmico	BRITO, SANTOS, OLIVEIRA (2023)	Brasil	BACURY (2017) e COSTA, OLIVEIRA (2016)	O objetivo deste estudo é a sala de aula e o entrecruzamento de aspectos da formação inicial de professores que ensinam Matemática e a prática docente de atividades pedagógicas ativas. A pergunta diretriz foi expressa como: em que perspectivas o	A abordagem metodológica é de natureza qualitativa, pois delimita o contexto de uma turma do segundo ano do ensino médio para o desenvolvimento de atividades vinculadas a um projeto de atuação docente. Os dados foram produzidos por meio de	No caso do presente estudo, também se faz necessário registrar que, mediante a experiência realizada, infere-se que o teodolito caseiro pode auxiliar na aprendizagem de razões trigonométricas No triângulo retângulo, as quais emergiram das ações práticas realizadas

					teodolito caseiro contribui com a aprendizagem de razões trigonométricas no triângulo retângulo?	notas de observação em um caderno de campo, assim como o registro de imagens fotográficas de forma complementar.	durante a sua execução, e que favorecem a interação entre os alunos participantes, e entre os alunos e professor/estagiário. Se, por um lado, os alunos interagem, discutem, anotam, realizam cálculos entre si, por outro, apontam inferências, questionamentos ou mesmo dúvidas que, em situações concretas das atividades,
7	Google Acadêmico	RODRIGUES, SOUZA, THIENGO (2022)	Brasil	SHULMAN (1986) e BALL, THAMES, PHELPS (2008)	Identificar os conhecimentos dos professores acerca dos conteúdos de Trigonometria e seus requisitos. Identificar estratégias de ensino de Trigonometria que vêm sendo implementadas em sala de aula.	Consistiu em uma pesquisa, de caráter qualitativo, a base de dados de distintas plataformas obtendo uma gama maior de resultados. Após essa coleta, separou as pesquisas em duas categorias e comparou os resultados e metodologias das mesmas.	A revisão feita apresentou que os professores possuíam uma lacuna de conhecimento sobre trigonometria, impactando diretamente nos estudantes, onde os mesmos apresentaram erros conceituais provenientes de sua formações acadêmicas, apresentando maior preocupação com resolução de exercícios do que construir conceitos Apesar disso, alguns projetos apresentaram inovações metodológicas que o autor acredita que há uma possibilidade de exploração e aprimoramento.

8	SciELO	GOMES (2013)	Brasil	BRITO, MOREY (2004) e MENDES (2001)	Este trabalho objetiva relatar a construção de um caderno de atividades para o ensino de trigonometria, enfocando a fusão possível entre a abordagem histórica no ensino de Matemática a metodologia ativa.	São expostos aspectos teóricos considerados na construção desse produto educacional, uma descrição detalhada da estrutura desse produto, algumas considerações sobre sua aplicação e os principais resultados observados.	O autor destacou diversas dificuldades apresentadas pelos participantes perante as atividades do produto, sendo estas: 1) Não familiaridade com instrumentos nas construções geométricas. 2)Conhecimentos geométricos insuficientes ou problemas na assimilação de conceitos básicos. 3) Domínio insuficiente de técnicas algébricas. 4) Mesclar geometria e álgebra na formação da trigonometria. Apesar disso, ele considera que o produto educacional possui relevância para o ensino de trigonometria, mas para que isso seja necessário um alinhamento pedagógico junto a outras ferramentas, tais como GeoGebra.
9	SciELO	NURI, SERKAN, ABDULLAH, O'MARBEK (2021)	Cazaquistão	FAGEN; CROUCH; MAZUR (2002) KNIGHT; BRAME (2018)	Duas classes da nona série foram designadas, aleatoriamente, para grupo experimental e grupo de controle. Dados pré-teste e pós-teste foram obtidos para a medida de desempenho na	Esta pesquisa experimental quantitativa foi realizada com uma amostra de estudantes cazaques de uma escola secundária sobre sua experiência com instruções de pares. Para a	Os autores sugerem que alunos no pré-teste, durante as aulas comumente respondem de acordo com que a maioria dos demais da sala respondem, sem analisar de maneira adequada as

					matemática, em trigonometria. Os dados foram analisados por meio de procedimentos de análise de covariância, com nível de significância alfa de 0,05.	recolha de dados foi desenvolvido um instrumento composto por 25 itens da unidade de trigonometria, os quais foram recolhidos no final do semestre de outono do ano letivo 2018-2019.	possibilidades. Todavia, os mesmos afirmam no pós-teste que os estudantes quando trabalhados em pares, possuem maior confiança em questionar e trabalhar de modo mais independente.
10	SciELO	CASTRO, CÁRCAMO (2023)	Chile/	MAXWELL, (1992)	Este trabalho exploratório tem como objetivo identificar e classificar os erros que cometem um grupo de estudantes de primeiro ano de engenharia quando resolvem tarefas associadas a equações trigonométricas.	Este estudo enquadra-se numa metodologia qualitativa, de natureza exploratória e descritiva cujo objetivo é identificar e classificar os erros que os alunos do primeiro ano de engenharia cometem na resolução de tarefas que envolvem equações trigonométricas.	Os autores argumentam que os erros identificados neste estudo se devem, principalmente, à falta de conhecimento prévio necessário para resolver adequadamente tarefas que envolvem equações trigonométricas. No entanto, este conhecimento prévio não está apenas diretamente relacionado com o conteúdo das equações trigonométricas, mas também ligado a propriedades algébricas, conforme observado nas diferentes resoluções dos alunos. Os resultados deste estudo evidenciam o quão importante é a realização de uma avaliação diagnóstica para averiguar o conhecimento prévio do aluno.

Ao analisar essas publicações, destacou-se a importância das metodologias ativas para motivação dos alunos com a Matemática e, principalmente, com a trigonometria, onde Junior (2023) alegou que o alcance dos objetivos pedagógicos e o desempenho dos estudantes foram mais significativos, assim como Andrade, Oliveira e Pereira (2018) afirmou que a atividade realizada proporcionou uma construção de conhecimento de forma mais autônoma.

Todavia, foi possível notar nas publicações tanto na Castro e Cárcamo (2023) quanto na Rodrigues, Souza e Thiengo (2022), que existe uma lacuna de conhecimento pelos profissionais de educação o que acarreta diretamente nos estudantes, destacando em Rodrigues, Souza e Thiengo (2022) quando afirmam que existe uma maior preocupação em resolução de exercícios do que construir conceitos.

Sobre as dificuldades dos alunos em relação à trigonometria, se torna de quase de senso comum que a não familiaridade, conhecimento geométrico insuficientes ou pouco domínio sobre técnicas algébricas é um dos principais fatores observados, tendo sendo vistos em 60% das publicações, destacando para os resultados obtidos por Oliveira (2006), onde o autor afirma que é necessário ter conhecimento prévio sobre seu público-alvo, reavaliando a cada passo, preocupando-se a maximizar os resultados.

Em relação às atividades pedagógicas ou produtos educacionais, quatro delas, Santos (2015); Andrade, Oliveira e Pereira (2018); Junior (2023); Brito, Santos e Oliveira (2023), utilizaram o teodolito caseiro como motivador para o ensino, enquanto Gomes (2013 e Dantas (2018), utilizaram o aplicativo GeoGebra como facilitador de ensino de trigonometria. Deste modo é possível ver que o estudo e aplicação de estudos topográficos e geodésicos são de suma importância e relevância para o ensino matemático, buscando sempre relacionar com a realidade e contexto dos alunos, sobrepujando o trabalho de Brito, Santos e Oliveira (2023), pois os autores puderam proporcionar também a utilização de um Teodolito Standard aos alunos, buscando uma situação-problema mais realista para o aluno gerando um engajamento maior.

Nuri, Serkan, Abdullah e O'Marbek (2021), apesar de realizarem uma metanálise comparando dois grupos de estudantes em relação a uma sala de aula expositiva, cadeiras enfileiradas ou separadas e uma sala de aula disposta em duplas, se correlaciona com aos demais projetos dispostos neste texto, pois concatena com a percepção positiva de metodologia ativa e atividades em grupos, também vista nos demais.

Nesse contexto, observa-se que nos últimos 9 anos, a busca pelo aprimoramento de produtos pedagógicos relacionados à trigonometria, seja pela maior disposição de atividades, pela utilização de materiais manipuláveis ou pela sintonia entre diferentes tecnologias, vem se tornando de uso mais comum pela comunidade matemática. Outro ponto que se destaca é a necessidade de reavaliar os objetivos das aulas, diminuindo a necessidade de solucionar uma maior quantidade de questões possíveis e fundamentalizar de modo mais efetivo os conceitos teóricos das disciplinas, “lutando” contra a frase “decorar para a prova”.

3. METODOLOGIA

Assim como visto anteriormente, em 2.1. e em 2.1.1., o ensino da trigonometria e seu excesso de formalismo cria para o aluno uma perspectiva de abstracionismo, e difícil correlação com a realidade, todavia, devido ao crescente avanço pela reformulação da educação no país, foram criados, pela Lei de diretrizes e Base de Educação (LDB), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) onde os mesmos determinam que:

> A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas as experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades. Nos cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo, na organização de atividades como agricultura e pesca, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade. Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia. (BRASIL, 1997. p. 30-31)

A fundamentação teórico-histórica no ensino da Matemática é essencial para tornar o processo educativo mais efetivo, promovendo uma abordagem interdisciplinar que considera as necessidades e contextos próprios de cada época ao longo do ensino fundamental e médio. Segundo Sá (2000), os Parâmetros Curriculares Nacionais em Matemática indicam a importância de priorizar a resolução de problemas e utilizar os conteúdos como meio para desenvolver conceitos matemáticos fundamentais, tais como proporcionalidade, função e equivalência. Além disso, recomenda-se organizar os conteúdos de forma espiral, superando a visão linear baseada em pré-requisitos rígidos, e empregar a história da Matemática como um recurso para facilitar a compreensão dos conceitos.

A integração de recursos didáticos, como calculadoras, computadores e jogos, durante todo o ensino fundamental também é enfatizada, assim como o incentivo ao trabalho colaborativo em pequenos grupos. Por fim, Sá (2000) destaca que a avaliação deve ser compreendida como um processo contínuo e integrado ao fazer pedagógico. Essas orientações contribuem para uma prática educativa mais dinâmica, contextualizada e significativa, alinhada às diretrizes curriculares nacionais.

Deste modo, este capítulo apresenta a metodologia adotada na pesquisa, de natureza qualitativa e quantitativa, com o objetivo de analisar a relevância do produto educacional proposto: a utilização do teodolito como recurso didático no ensino de trigonometria no triângulo retângulo. O produto consiste em uma sequência didática que alia teoria e prática por meio da aplicação do teodolito — instrumento óptico de medição angular — como ferramenta pedagógica que possibilita ao aluno vivenciar conceitos trigonométricos de forma concreta e contextualizada. Busca-se, com isso, analisar os impactos dessa abordagem tanto na percepção dos estudantes sobre a trigonometria quanto na facilitação do processo de aprendizagem e na obtenção de melhores resultados acadêmicos.

Pelo cronograma disposto no Apêndice A, foram realizadas 3 avaliações: diagnóstica 1, sendo esta de caráter revisional sobre o conteúdo anteriormente visto: semelhança de triângulos; revisional 1, servindo para averiguar o entendimento dos alunos sobre trigonometria ao longo do processo e atividades propostas e por fim, a avaliação somativa, sendo esta de caráter obrigatório a todos os alunos.

Além disso, foram construídas e desenvolvidas duas atividades com os estudantes: sendo a primeira (tarefa Matemática 1 - Tales de Mileto e a Semelhança de Triângulos) relacionada a avaliação diagnóstica e a segunda (tarefa Matemática 2 - Teodolito Caseiro e a Aplicação da Trigonometria), ambas encontradas no apêndice B e C, respectivamente. Cada uma destas atividades foi realizada em grupos de quatro a seis integrantes. Para realização destas aulas, foi disponibilizado dois tempos de 45 minutos em cada dia, sendo o primeiro para o conteúdo teórico-histórico e o segundo para a aula prática, o que totaliza 90 minutos de atividade.

Por fim, foi solicitado que 9 alunos de cada turma respondessem a um questionário voltado à avaliação de suas experiências com metodologias ativas. O instrumento foi elaborado com base no modelo SERVQUAL (Service Quality), desenvolvido por Parasuraman, Zeithaml e Berry (1988), que permite mensurar a qualidade percebida por meio da comparação entre expectativas e percepções do serviço educacional. As questões foram estruturadas utilizando escalas Likert de quatro e cinco pontos, que, conforme Likert (1932), visam captar o grau de concordância dos respondentes em relação às afirmações apresentadas. O questionário também incluiu uma questão dicotômica e uma questão aberta de caráter discursivo, totalizando 16 itens, organizados em três seções, conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 4 - Perfil das questões realizadas no questionário sobre metodologia ativa

Seções	Quantidade e Tipos de Questões
Perfil do Aluno	2 questões de 5 pontas
	1 questão dicotômica

Comparação entre Metodologia Ativa e Tradicional	4 questões de 5 pontas
	2 questões de 4 pontas
Relevância e Impacto	4 questões de 4 pontas
	2 questões de 5 pontas
	1 discursiva

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Os registros das práticas aplicadas foram coletados mediantes a áudios e vídeos registrados pelo celular do professor-pesquisador sobre os desdobramentos das atividades, registrando momentos de explicações e indagações aos grupos; anotações sobre as dúvidas decorrentes das atividades e fotografias. Os registros citados estarão descritos e transcritos no capítulo 4, análise e resoluções das atividades.

3.1. Abordagem Qualitativa

A pesquisa desenvolvida aconteceu com alunos matriculados no 8º ano do Colégio Militar Tiradentes, CMT, tendo como um dos focos analisar de que forma a adoção de metodologias ativas, aliada ao uso de recursos didáticos e à proposição de tarefas matemáticas, pode favorecer a aprendizagem de conceitos relacionados à trigonometria. De acordo com Minayo (2012), a pesquisa qualitativa tem como objetivo captar a experiência humana e suas interações, analisando os significados e valores atribuídos, onde Creswell (2014) caracteriza a pesquisa qualitativa pela perspectiva dos participantes e análise interpretativa dos dados. Deste modo, esta pesquisa está catalogada de acordo com as etapas descritas por D'Ambrosio (2009):

> 1. Formulação das questões a serem investigadas com base no referencial teórico do pesquisador;
> 2. Seleção de locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco da investigação;
> 3. Identificação da relação entre esses elementos;
> 4. Definição de estratégias de coleção e análise de dados.
> 5. Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3;
> 6. Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2;
> 7. Redefinição de estratégias definidas no item 4;
> 8. Coleta e análise de dados.
>
> (D'Ambrosio, 2009, p. 103)

O cenário desta pesquisa está catalogado pelas etapas D'Ambrosio (2009) de acordo com a tabela 5.

Tabela 5 - Respostas das etapas descritas por D'Ambrosio (2009)

Etapas	Cenário da pesquisa
1	Como as tarefas matemáticas/metodologias ativas contribuem para o ensino de trigonometria?
2	Pesquisa *SERVQUAL*, análise de resultados e produções das atividades realizadas com os estudantes do 8º segmento do ensino fundamental do Colégio Militar Tiradentes - CMT.
3	Trigonometria no triângulo retângulo é um dos conteúdos desenvolvidos no ensino fundamental na 6º etapa do 8ºsegmento em matemática
4	Optou-se por um questionário estruturado, baseado nas cinco dimensões do SERVQUAL, com escala de Likert para mensuração da percepção dos estudantes. A análise foi realizada por meio de estatística descritiva e categorização temática, de modo a integrar os dados quantitativos e qualitativos.
5	Os dados obtidos para pesquisa *SERVQUAL* foram por meio de questionário no *Google Forms* e os resultados das produções de atividades foram coletadas pela plataforma *SAS*.
6	A partir da leitura inicial das respostas, foi possível identificar nuances que permitiram aprimorar a compreensão das dimensões avaliadas. Esse refinamento retroalimenta a formulação das questões e a interpretação das respostas.
7	Com base na análise inicial, foi possível ajustar as categorias analíticas e aprofundar a correlação entre as dimensões do modelo SERVQUAL e os resultados quantitativos da avaliação diagnóstica
8	A análise dos dados foi retomada com maior profundidade, buscando evidenciar como a percepção dos alunos sobre a qualidade do ensino relaciona-se ao seu desempenho

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No contexto da presente pesquisa, ao que incorpora os elementos da abordagem qualitativa, destaca-se a aplicação do modelo SERVQUAL como instrumento teórico-metodológico para a análise da qualidade percebida pelos alunos sobre o que tange o modelo de metodologia ativa focada na aplicação de tarefas matemáticas, em especial, de tarefas sobre trigonometria. Desenvolvido por Parasuraman, Zeithaml e Berry (1985), o SERVQUAL é amplamente reconhecido como um dos modelos mais utilizados para avaliação qualitativa da prestação de serviços, a partir da perspectiva do usuário. Sua estrutura permite investigar a discrepância entre as expectativas dos clientes e as percepções sobre o serviço efetivamente recebido, revelando assim a percepção de qualidade. O modelo é composto por cinco dimensões fundamentais:

1. Tangibilidade – aparência física das instalações, equipamentos e apresentação dos funcionários;
2. Confiabilidade – capacidade de cumprir promessas com precisão e consistência;
3. Responsividade – prontidão para atender o cliente e oferecer assistência;
4. Segurança (ou Garantia) – conhecimento técnico, cortesia e confiança transmitida pelos prestadores de serviço;
5. Empatia – atenção individualizada e compreensão das necessidades do cliente.

A metodologia do *SERVQUAL* consiste em aplicar questionários que mensuram, para cada dimensão, as expectativas do usuário antes da prestação do serviço e a percepção após sua realização. A diferença entre esses dois momentos constitui o chamado *gap*, que representa o nível de satisfação percebida.

No campo da educação, o *SERVQUAL* tem se mostrado útil na avaliação da qualidade percebida de serviços educacionais, como o atendimento institucional, infraestrutura escolar, acesso a recursos pedagógicos, desempenho docente e a experiência de aprendizagem. Ao permitir a coleta de dados centrados na percepção dos alunos ou responsáveis, o modelo possibilita identificar com maior clareza os pontos fortes e os aspectos críticos do processo educacional, sendo, portanto, um recurso estratégico para melhorias institucionais e pedagógicas.

A utilização do *SERVQUAL* na pesquisa qualitativa fortalece a compreensão de como os serviços educacionais são vivenciados pelos seus usuários, além de ampliar as possibilidades de análise interpretativa dos dados, contribuindo para a construção de diagnósticos mais ricos e contextualmente fundamentados.

3.2. Abordagem Quantitativa

A presente pesquisa também apresenta um estudo quantitativo buscando também analisar, de maneira objetiva e mensurável, o desempenho dos alunos na prova de matemática, Anexo A, realizada após as três tarefas matemáticas dispostas no capítulo 4, com ênfase em analisar o desenvolvimento dos estudantes no que tange a parte de trigonometria. Esta abordagem permite a aplicação de métodos estatísticos para identificar padrões de desempenho e comparar possíveis relações entre as três frentes da prova: álgebra, geometria (administradas pelos demais professores de Matemática do 8º ano do colégio CMT) e trigonometria (administrada por mim).

A pesquisa quantitativa desempenha um papel fundamental em estudos educacionais, pois possibilita uma análise estruturada e baseada em evidências, permitindo a identificação e correlação das tendências, dificuldades comuns entre os alunos e fatores que podem influenciar no aprendizado. Segundo Creswell (2014), a pesquisa quantitativa baseia-se na coleta e análise de dados numéricos para testar hipóteses e responder a questões de pesquisa de maneira sistemática. Esse tipo de abordagem é comumente utilizado para avaliar o impacto de diferentes métodos de ensino, compreender dificuldades específicas dos alunos e, como nesta pesquisa, medir a eficácia de intervenções pedagógicas, neste caso, a aplicação de tarefas matemáticas no ensino de trigonometria.

No contexto educacional, de modo mais amplo, os dados quantitativos permitem comparações entre grupos, facilitam a análise de desempenho ao longo do tempo e contribuem para a formulação de políticas educacionais mais eficazes. Além disso, a análise estatística aplicada à educação fornece subsídios suficientes para tomadas de decisões mais eficazes por parte de professores, gestores e pesquisadores, permitindo um aprimoramento contínuo dos processos de ensino e aprendizagem.

Para a coleta de dados, utilizamos a porcentagem de acertos por questão em cada uma das seis turmas participantes, além da segmentação do desempenho específico em trigonometria. Tendo em vista isso, a prova realizada continha 15 questões, sendo as de 1, 2, 3, 4 e 13 de álgebra, 5, 6, 7, 12 e 14 de geometria e 8, 9, 10, 11 e 15 de trigonometria, os cálculos foram realizados considerando os acertos percentuais por questão em cada turma. Esses dados foram organizados em planilhas eletrônicas e tratados estatisticamente no Google Planilhas.

A análise estatística aplicada nesta pesquisa buscou empregar diferentes técnicas, como o teste de ANOVA utilizada para comparar os desempenhos médios entre as frentes da prova e entre as diferentes turmas, permitindo assim verificar se há diferenças estatisticamente significativas entre os grupos analisados. De acordo com Field (2013), o teste de ANOVA é essencial para detectar variações significativas quando se comparam múltiplos grupos, evitando erros tipo I que podem surgir em comparações múltiplas.

A pesquisa também utilizou o coeficiente de correlação de Pearson para investigar possíveis relações entre o desempenho em trigonometria e o desempenho geral na prova, além da regressão linear múltipla para identificar qual das três frentes teve maior influência no resultado geral.

Dessa forma, a pesquisa quantitativa adotada busca contribuir de modo mais detalhado para averiguar a eficiência do aprendizado da trigonometria por tarefas e sua relação com as demais frentes da matemática. Além disso, os métodos estatísticos empregados buscam fornecer subsídios para possíveis intervenções pedagógicas dentro do ambiente escolar que possam melhorar o ensino e a aprendizagem não somente da área de conhecimento de matemática, mas para todas as disciplinas em geral

3.2.1. Teste Anova

O teste ANOVA (Análise de Variância) é usado para comparar as médias de três ou mais grupos e verificar se há diferenças estatisticamente significativas entre elas. No contexto desta pesquisa, ele será aplicado para comparar o desempenho das turmas e das frentes da prova (álgebra, geometria e trigonometria).

$$F = \frac{Variância\ entre\ grupos\ (MS_B)}{Variância\ dentro\ dos\ grupos\ (MS_W)}$$

Sendo que:

- Variância entre grupos (MS_B): mede a variação das médias dos grupos em relação à média geral.
- Variância dentro dos grupos (MS_W): mede a variação dentro de cada grupo (dispersão dos dados dentro de cada conjunto).

O valor F obtido é então comparado com o valor crítico da distribuição F para determinar a significância estatística do resultado.

Se o valor p associado ao F for menor que o nível de significância (α), rejeitamos a hipótese nula e concluímos que há diferenças significativas entre as médias dos grupos. Sendo assim, analisamos de modo que:

- Se $p < 0,05 \rightarrow$ Existe uma diferença estatisticamente significativa entre os desempenhos das frentes da prova.
- Se $p > 0,05 \rightarrow$ Não há diferença significativa entre os grupos, ou seja, o desempenho em álgebra, geometria e trigonometria pode ser considerado semelhante.

Caso o ANOVA indique diferença significativa, pode-se usar um teste post hoc (como Tukey) para identificar quais frentes da prova possuem diferenças significativas entre si.

3.2.2. Correlação de Pearson

A Correlação de Pearson mede a força e direção da relação entre duas variáveis. No nosso caso, podemos usar para ver se o desempenho em trigonometria influencia o desempenho geral.

Fórmula da Correlação de Pearson

$$r = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

Onde:

- X, Y → Variáveis analisadas: percentual de acertos em trigonometria e percentual de acertos geral.
- $\overline{X}$, $\overline{Y}$→ Médias das variáveis.

Se:

- $r > 0{,}7$ → Forte correlação positiva.
- $r < 0{,}7$ → Forte correlação negativa.
- $-0{,}3 < r < 0{,}3$

3.2.3. Teste t para Comparação entre Frentes

O Teste t é usado para comparar duas médias e verificar se a diferença entre elas é estatisticamente significativa. No nosso caso, pode ser usado para comparar:

- O desempenho em trigonometria vs. álgebra
- O desempenho em trigonometria vs. geometria

Fórmula do Teste t para Amostras Independentes

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{s_{\overline{d}}}$$

Sendo que:

- $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ → Médias das duas amostras.
- $s_{\overline{d}}$ → Erro padrão da diferença das médias, calculado como:

$$s_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Com:

- s_1^2, s_2^2 → Variâncias das amostras.
- n_1, n_2 → Número de observações em cada grupo.

3.2.4. Regressão Linear Múltipla

A Regressão Linear Múltipla é usada para analisar a influência de múltiplas variáveis independentes sobre uma variável dependente. No nosso caso, queremos verificar qual das frentes (álgebra, geometria, trigonometria) teve maior influência no desempenho geral dos alunos.

Fórmula da Regressão Linear Múltipla

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

Onde:

- Y→ Desempenho geral na prova.
- X_1, X_2, X_3 → Desempenhos em álgebra, geometria e trigonometria, respectivamente.
- β_0 → Intercepto.
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ → Coeficientes da regressão (impacto de cada frente no desempenho geral).
- ε → Erro residual.

3.3. Perfil da Escola

Para entender melhor sobre o grupo discente o qual foi aplicado o projeto é necessário entender sobre a história da escola, seus princípios e objetivos. A criação do Colégio Militar

Tiradentes - CMT foi o resultado do anseio de integrantes da Polícia Militar do Distrito Federal - PMDF em fornecer um ensino de qualidade tanto para os filhos dos mesmos quanto para a comunidade brasiliense.

Sob essa ótica, a história do Colégio Militar Tiradentes teve início com a promulgação da Lei 12.086, em novembro de 2009, que, em seu capítulo IX, apresentou um esboço preliminar da nova estrutura básica da Polícia Militar do Distrito Federal (PMDF). O sonho da PMDF de administrar uma escola foi concretizado com a aprovação do Decreto 31.793, em 11 de junho de 2010, que oficializou o Colégio Militar Tiradentes como parte integrante do Sistema de Ensino do Distrito Federal.

Em consonância com o Planejamento Estratégico da PMDF, especialmente com o objetivo de fortalecer a motivação dos seus recursos humanos, o Decreto 37.786, publicado em 2016, atribuiu ao Colégio a relevante missão de oferecer ensino fundamental (anos finais) e médio, com prioridade para os dependentes de policiais militares do DF. Essa função é realizada como parte do apoio educacional assistencial da Corporação, seguindo as diretrizes do Ministério da Educação e do Comando Geral da PMDF.

As primeiras turmas, formadas entre 2012 e 2013, incluíram alunos dependentes de policiais militares e membros da comunidade civil, com as vagas sendo preenchidas por sorteio. Inicialmente, foram abertas três turmas para o 6º ano. Diante da alta demanda e visando garantir transparência e equidade, a partir de 2014 o ingresso passou a ser realizado por meio de processo seletivo. Com a continuidade das séries, em 2019, a escola formou sua segunda turma de alunos que concluíram o ciclo completo da educação básica, finalizando a 3ª série do Ensino Médio.

A partir dos pontos supracitados, a escola necessitou realizar uma expansão, e com o auxílio da UnB, em especial, o arquiteto e funcionário público na época, Alberto de Faria em oferecer o projeto estrutural do Bloco de Salas Adjacentes Norte - BSAN para construção de dois novos blocos de salas: sendo um deles destinado para o ensino fundamental e o outro para o ensino médio.

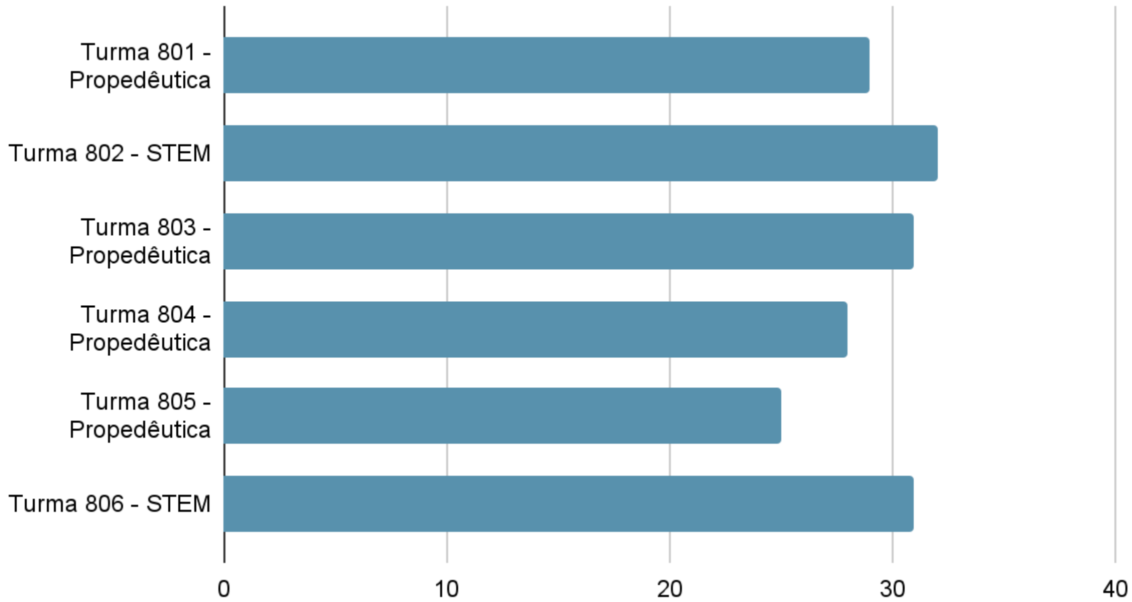
Hoje, o colégio oferta dois processos seletivos de ingresso: um para os alunos do 6º ano do fundamental e o outro para o 1º ano do ensino médio, sendo 90% das vagas destinadas a filhos de oficiais da polícia e 10% para a comunidade. A partir de 2024, os alunos do fundamental puderam escolher em qual tipo de turma que gostariam de estar inseridos: a primeira delas chamada de propedêutica, onde os mesmos seguiram a grade curricular e horas/aulas exigidas pelo Ministério da Educação, enquanto as turmas STEM, destinados a alunos de altas performances olímpicas, seguiram os mesmos requisitos da turma propedêutica, mas possuíam aulas de matemática, física e química olímpicas.

É importante destacar que o Colégio Militar Tiradentes, comprometido com a busca por uma educação de excelência, incentiva seus alunos a participarem de olimpíadas acadêmicas em diversas disciplinas, tanto em âmbito nacional quanto internacional. Esse esforço tem gerado resultados notáveis, como a conquista de 1.550 medalhas pelos estudantes até o terceiro trimestre de 2024.

3.3.1. Perfil dos alunos do 8º ano do CMT de 2024

Analisando o perfil dos alunos que participaram da pesquisa, de acordo com os dados fornecidos pela própria instituição temos que as turmas do 8º ano as quais foram aplicadas a proposta de atividades dispostas nesta dissertação, em relação a sua quantidade de alunos, respectivamente, estão descritas no gráfico abaixo:

Gráfico 1 - Quantidade de alunos por turma do Colégio Militar Tiradentes no ano de 2024



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Sob a perspectiva de idade, conforme a tabela 6 abaixo, notamos que a média das idades nas turmas 802 e 805 são mais elevadas que as demais por diferentes fatores, enquanto na primeira a média é superior pelo fato de ter tido alunos que optaram retroceder um ano do ensino fundamental para poderem ingressar na escola, isto é, repetir o 6º ano por opção, tendo em vista que a escola somente permite que os alunos aprovados no concurso ingressem no 6ºano, enquanto o caso da 805 era a turma com a maior quantidade de alunos retidos no ano anterior pela reprovação disciplinar

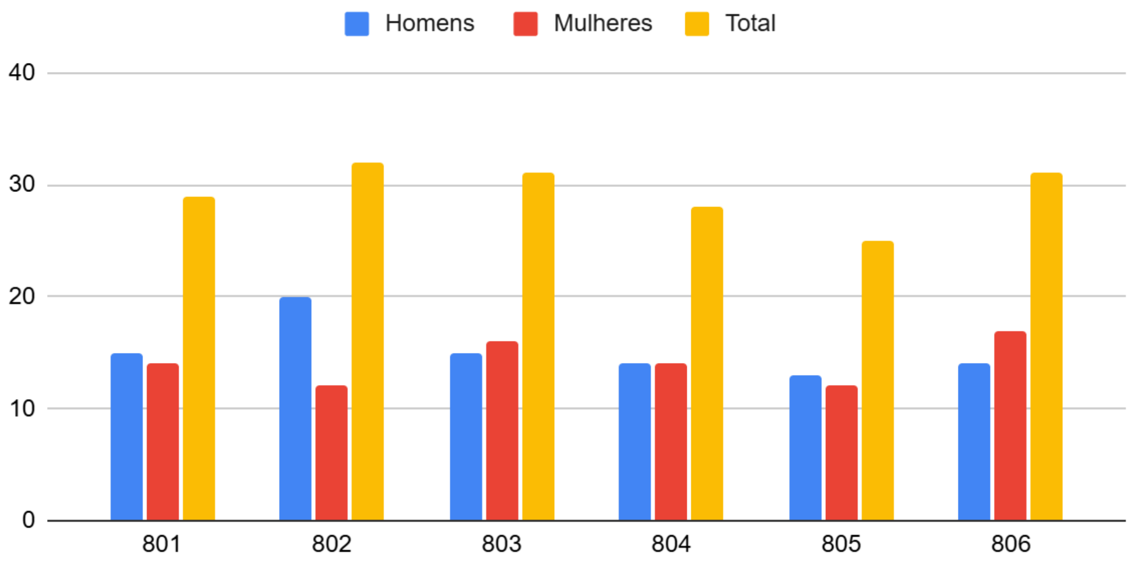
Tabela 6 - Idade dos alunos por turma do Colégio Militar Tiradentes no ano de 2024

Idade (anos)	801	802	803	804	805	806
12	11	11	11	11	7	12
13	13	14	14	12	11	11
14	5	6	6	4	4	5
15	0	1	0	1	3	3
Média	12,79	12,91	12,84	12,82	13,12	12,97

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Por fim, quando analisado os perfis dos alunos por gênero por turma, observa-se que apenas na turma 802 e 806 houveram uma maior discrepância entre seus valores, pois apesar de serem turmas STEM, como citado anteriormente, os alunos foram divididos pela média geral das notas do ano anterior.

Gráfico 2 - Gêneros dos alunos por turma do Colégio Militar Tiradentes no ano de 2024



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

4.1. Tarefas Matemáticas: Cronologia e Desenvolvimento

A fim de seguir um sentido lógico de desenvolvimento em espiral, conforme a perspectiva de Vygotsky sobre a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo, especialmente no que se refere à zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky, 1998), as tarefas Matemáticas foram pautadas na construção e no desenvolvimento do conhecimento relacionado à trigonometria e à sua articulação com o conceito de semelhança entre triângulos, a partir do círculo trigonométrico de raio unitário. A primeira tarefa Matemática consistiu em uma avaliação diagnóstica elaborada pelo professor-pesquisador abordando especificamente o tópico supracitado: Semelhanças de Triângulos. A segunda e terceira tarefas matemáticas foram desenvolvidas com base no ensino exploratório e listas de exercícios revisionais, pois ao final destas atividades exploratórias houve uma quarta tarefa matemática: avaliação somativa, de caráter obrigatório para todos os alunos. Por fim, houve uma seleção de alunos para que respondessem um questionário qualitativo *SERVQUAL.*

4.1.1. Tarefa 1 - Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica, elaborada pelo professor-pesquisador, foi aplicada na primeira semana de outubro de 2024, com o objetivo de verificar as habilidades já trabalhadas com os alunos em maio do mesmo ano e avaliar a consolidação do conteúdo. As habilidades avaliadas foram desenvolvidas com base em conceitos, definições e aplicações relacionadas à Semelhança de Triângulos. Para esse fim, a avaliação foi composta por sete questões, sendo cinco de múltipla escolha e duas discursivas. Para facilitar a compreensão, a Tabela 7, apresentada a seguir, destaca as questões e as habilidades avaliadas.

Tabela 7 - Habilidades por questões da avaliação diagnóstica

Questões	Sigla da Habilidade	Explicação sobre Habilidades
Questão 1	H1	Resolver situação-problema simples envolvendo conhecimento de semelhança de triângulos.
Questão 2	H1	Resolver situação-problema simples envolvendo conhecimento de semelhança de triângulos.

Questão 3	H2	Utilizar o princípio de proporcionalidade aplicado em semelhança de triângulos
Questão 4	H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimento de semelhança de triângulos com uma variável
Questão 5	H4	Resolver situação-problema médio envolvendo conhecimento de semelhança de triângulos.
Questão 6	H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimento de semelhança de triângulos com uma variável
Questão 7	H5	Resolver situação-problema avançado envolvendo conhecimento de semelhança de triângulos com duas variáveis

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A importância de avaliar o aluno em diferentes critérios que envolvem distintas perspectivas que possibilitam o uso de uma maior variedade de mecanismos é apresentado na seguinte citação, extraída do Plano Global da Escola (2001-2004, p. 233):

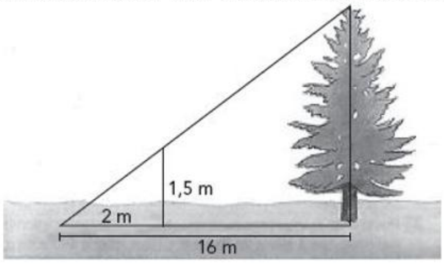
> Busca-se garantir que o conhecimento matemático seja apresentado em suas múltiplas relações por meio de diferentes representações. Assim, pode-se afirmar que a apropriação dos conhecimentos matemáticos acontece de forma contextualizada e interdisciplinar. Para tanto, utilizamos uma metodologia que prioriza a análise de situações problemas que possibilitam identificar, interpretar, analisar, comparar, verificar, aplicar, utilizar, construir, argumentar, abstrair.

Dessa forma, essa avaliação foi estruturada do seguinte modo:

- Na questão 1, figura 26, a partir de um enunciado pronto, o estudante deveria desenvolver a questão por meio da construção de dois triângulos semelhantes e assim determinar o resultado desejado.

Figura 26 - Questão 1 da avaliação diagnóstica

Questão 01
Para medir a altura de um pinheiro, peguei um bastão de 1,5 m e verifiquei que ele projetava uma sombra de 2 m, enquanto o pinheiro projetava uma sombra de 16 m. Que altura encontrei para essa árvore?



A) Um número ímpar.
B) Um múltiplo de 12.
C) Um valor com 6 metros a menos que a sombra do pinheiro.
D) 14 m.

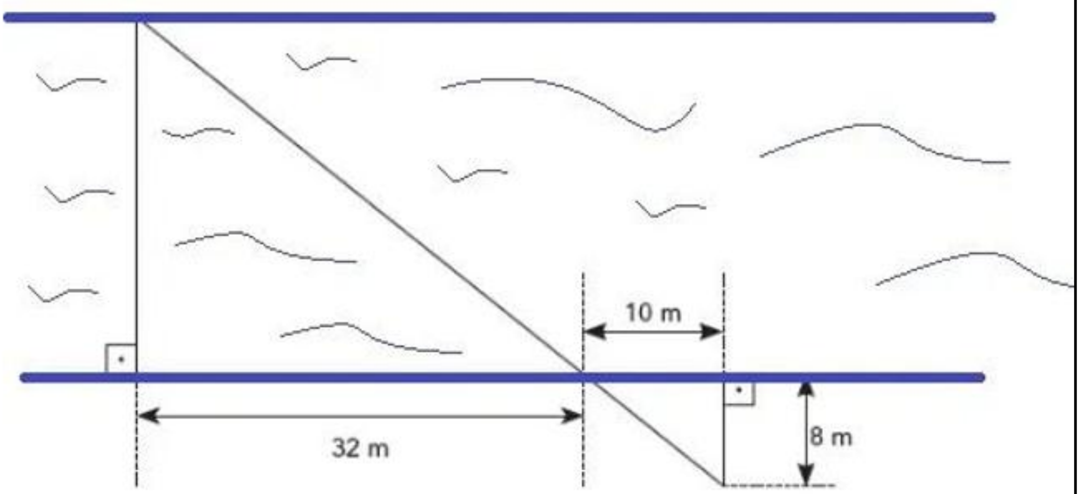
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- Na questão 2, figura 27, tem como princípio a mesma habilidade da questão 1, no entanto, sua relevância vem da utilização de ângulos opostos para solução da mesma.

Figura 27 - Questão 2 da avaliação diagnóstica

Questão 02

A figura a seguir representa um rio cujas margens são retas paralelas.



Qual é o inteiro mais próximo da largura do rio, medida em metros?

A) 30
B) 26
C) 22
D) 21

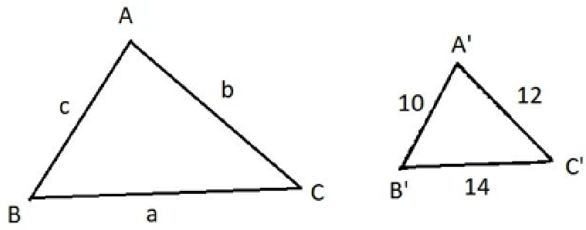
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- Na questão 3, figura 28, a partir de uma informação do texto, o estudante deveria determinar cada um dos lados utilizando noções de proporcionalidade.

Figura 28 - Questão 3 da avaliação diagnóstica

Questão 03

Os triângulos ABC e A'B'C' das figuras são semelhantes. Se a razão de semelhança do primeiro triângulo para o segundo é $\frac{3}{2}$, quanto valem a, b e c?



Passe a limpo no cartão-resposta

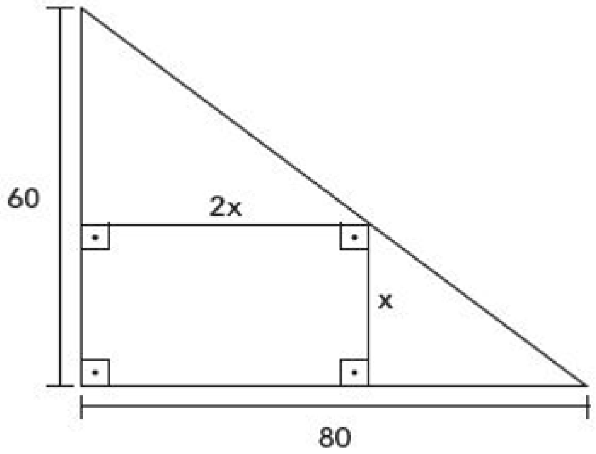
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- Na questão 4, figura 29, utiliza de outra figura geométrica de modo que o aluno deveria separar e distinguir cada figura para determinar o valor da variável desejada.

Figura 29 - Questão 4 da avaliação diagnóstica

Questão 04

Na figura a seguir, um dos lados do retângulo inscrito no triângulo é representado por *x*.



O valor de *x* é

A) 12.
B) 24.
C) 34.
D) 36.
E) 48.

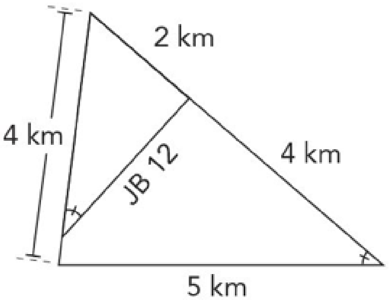
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- Na questão 5, figura 30, possui um distrator para alunos desatentos: um dos polígonos não é um retângulo, deste modo o estudante deveria notar com mais atenção quais são os triângulos semelhantes e realizar o cálculo desejado.

Figura 30 - Questão 5 da avaliação diagnóstica

Questão 05

O esquema a seguir mostra quatro estradas. Podemos afirmar que o comprimento da estrada **JB 12** é:



A) 2,5.
B) 2,2.
C) 1,4.
D) 1,2.

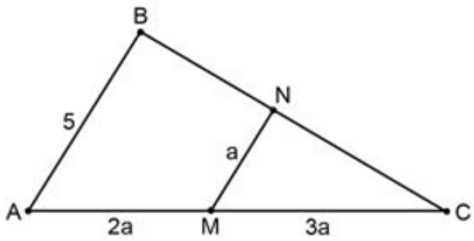
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- Na questão 6, figura 31, assim como na questão 4, o aluno deveria separar e distinguir as figuras geométricas para determinar a variável desejada.

Figura 31 - Questão 6 da avaliação diagnóstica

Questão 06

Após a finalização da planta de uma casa, um arquiteto verificou que restava uma área representada pelo triângulo ABC da figura abaixo. Resolveu dividi-la em dois espaços para construção de um *deck* e de uma churrasqueira, traçando uma reta MN paralela ao lado AB desse triângulo.



O valor de a é igual a:

A) 7.
B) 5.
C) 3.
D) 1.

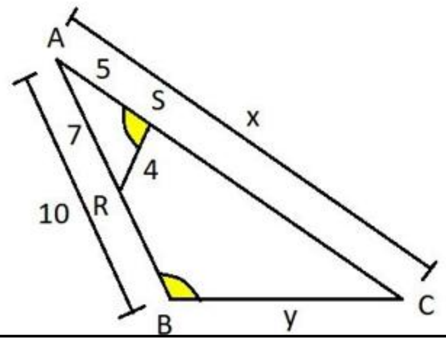
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- Na questão 7, figura 32, por haver duas variáveis, o aluno deveria utilizar duas vezes as semelhanças de triângulos.

Figura 32 - Questão 7 da avaliação diagnóstica

Questão 07

Na figura, os ângulos S e B têm a mesma medida. Além disso, AR = 7 cm, AS = 5 cm, SR = 4 cm, AB = 10 cm. Determine as medidas de x e y.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Cada turma foi levada para o laboratório de computadores para realização da avaliação diagnóstica via plataforma do Sistema Ari de Sá - SAS - do bloco do fundamental e, devido a uma instabilidade na internet do colégio, os alunos realizaram em dupla de modo que todos presentes pudessem realizar a atividade sem sobrecarregar a rede disponível. A avaliação diagnóstica foi realizada sem utilização de calculadora, sem quaisquer recursos pedagógicos e o tempo destinado para realização da mesma foi de 45 minutos.

4.1.2. Tarefas Matemáticas estruturadas para compreensão de Trigonometria

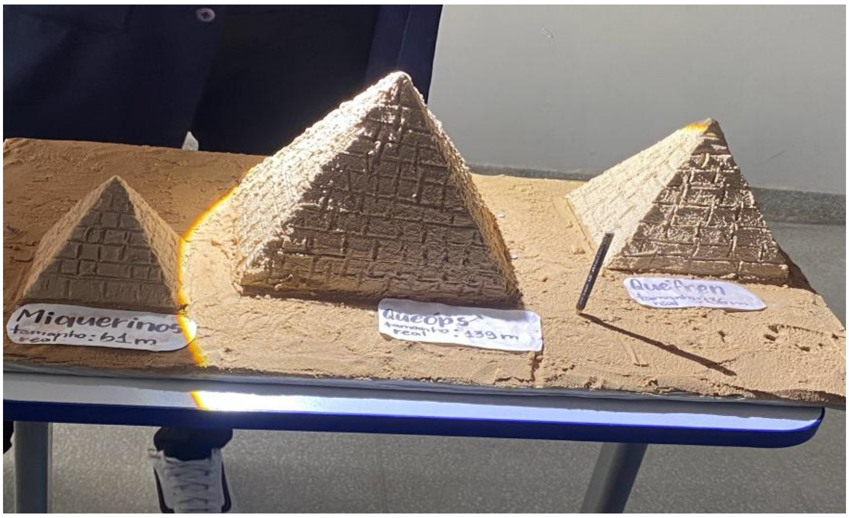
Para o ensino de trigonometria foram desenvolvidas duas tarefas matemáticas com o intuito de proporcionar reflexões sobre as necessidades da época relacionadas ao assunto e como foram os desdobramentos para solucioná-los, tendo assim um caráter de ensino exploratório. Deste modo, estas foram determinadas como:

- Tarefa 2 - Altura do poste por semelhança de triângulos (conto de Tales de Mileto e a pirâmide Quéops)
- Tarefa 3 - Altura do poste por trigonometria - Aplicação do teodolito caseiro

4.1.2.1. Tarefa Matemática 2

A tarefa Matemática 2 - Apêndice B - foi estruturada de forma que a aula seguiria em 3 fases: fase inicial, composta por um vídeo, retirado da plataforma *youtube* (*Tales e a altura da pirâmide*), sobre o conto de como Tales determinou a altura de pirâmide de Quéops utilizando de um graveto e aplicando a semelhança de triângulos formadas pelas sombras da pirâmide e do próprio graveto. Na segunda fase, foi demonstrado para os alunos, com o auxílio de uma lanterna e uma réplica fora de escala das pirâmides, como que o sol influencia na relação das sombras, conforme a figura 33.

Figura 33 - Exemplificação do conto de Tales e a pirâmide



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na terceira e última fase, os alunos foram divididos em grupos e tinham como objetivo reproduzir os processos do conto de Tales e calcular a altura dos mastros das bandeiras utilizando de trenas/fitas métricas, conforme o Apêndice B. Durante esta fase, foi solicitado que um auxiliar educacional tirasse fotos e filmasse as interações com os alunos, deste modo, foi possível verificar certos questionamentos interessantes entre os alunos, como o transcrito no trecho 1.

Trecho 1

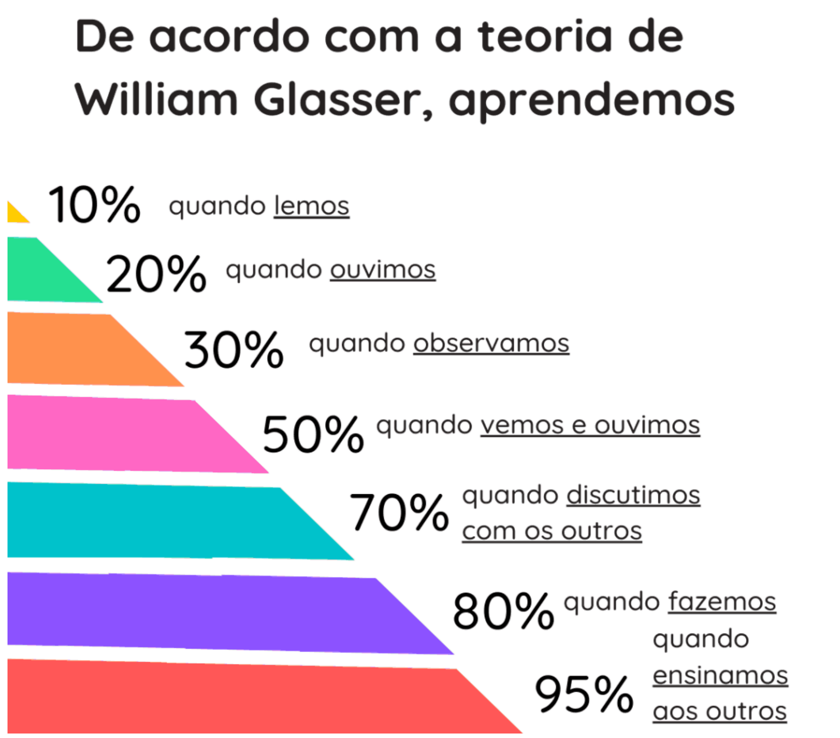
Estudante 1: Por que a sombra parece estar menor?

Estudante 2: O sol fica parado o tempo todo?! Não né, então ou a gente faz tudo quase na mesma hora ou não vai dar certo.

Estudante 1: Professor, você pode então anotar os valores pra gente? Porquê ai eu consigo medir os dois juntos e depois faço as contas.

Neste ponto da tarefa, todos os grupos estavam empenhados a mensurar as sombras de modo que integrantes de diferentes grupos decidiram por ajudar os demais para que assim todos pudessem ir para a etapa de cálculo e finalizar a atividade. Tal comportamento visto correlaciona com a teoria da escolha para a educação formulada pelo psiquiatra americano William Glasser, onde, segundo a pirâmide proposta do mesmo autor, figura 34, considera que estes comportamentos simbolizam um aprendizado mais eficaz.

Figura 34 - Pirâmide de Glasser



Fonte: [O que é e como funciona a pirâmide de aprendizagem de William Glasser? - Aspectum]

Ao retornarem à sala, foi aberto um espaço de discussões e comparação de resultados, onde os alunos de cada grupo puderam trazer suas observações e questionamentos sobre as atividades, tendo como destaque as citadas abaixo:

Trecho 2

Estudante 3: Por que a minha resposta "deu" diferente das dos outros?

Estudante 4: Era para cada um achar uma resposta diferente.

Estudante 3: E o mastro tem tamanho diferente?

Esse trecho foi considerado importante por exemplificar ao aluno a variação nos valores medidos e os valores reais de um objeto, tangendo o conceito de erro experimental, algo aplicado nos laboratórios de estudos de física e de engenharia.

4.1.2.1.1. Antecipações e mediações da Tarefa 2

Com intuito de antever os pensamentos e dúvidas que os alunos possam ter ao longo do processo da tarefa, foi criado uma série de antecipações e mediações que ajudem a fomentar a discussão e reflexão dos próprios alunos sobre o conteúdo e sua aplicabilidade. Deste modo, as mediações podem ser realizadas pelo professor como provocações para o desenvolvimento das tarefas ou como questões a serem respondidas pelos alunos de forma individual.

Para minimizar as dúvidas e dificuldades dos estudantes, foram criadas possíveis respostas assertivas e mediações a partir de possíveis antecipações:

I. Qual a necessidade de fazermos isso?
   A. Além de ajudar a compreender melhor o conteúdo, é necessário que tenhamos uma experiência vivida sobre o assunto, ajudando a assimilar e interpretar questões contextualizadas
   B. Pedir para que o aluno ache um método de medir a altura sem o uso de pesquisa da internet
II. Se eu não conseguir terminar hoje?
   A. Como qualquer tarefa matemática e metodologia ativa, o objetivo principal é ajudar a compreender o assunto, e não necessariamente, ser o primeiro a terminar.
   B. Afirmar ao aluno para focar nas etapas iniciais: medir e anotar os valores.
III. Isso vai ficar mais difícil?

A. O objetivo dessa atividade é facilitar a compreensão para que nos próximos momentos, sejam eles de maior aprofundamento ou não, possamos relembrar a essa atividade e contribuir e aplicar o que aprendemos hoje.

B. Questionar um conteúdo que passou pelo mesmo processo de antes foi considerado difícil, mas ao longo do processo de ensino fez com que considerassem fácil e explicar que o processo de aprendizagem necessita destes desafios.

IV. Porque não simplesmente medir o mastro?

A. Assim como o mastro, é necessário medir alturas de objetos maiores que simplesmente não conseguimos utilizar uma régua ou uma trena, mas que apesar disso, existem mecanismos para que possamos mensurar sem dificuldades.

B. Demonstrar a dificuldade que é medir a altura do mastro usando apenas uma trena e depois questionar como medir caso fosse um objeto maior, por exemplo, um poste.

V. Como temos certeza que o ângulo formado é o mesmo?

A. Assim como vimos nos vídeos do *Youtube*, o ângulo formado é o mesmo pelo fato de estarmos na mesma posição e lugar que o objeto.

B. Pedir para que o aluno alinhe o próprio objeto com a sombra do mastro.

4.1.2.2. Tarefa Matemática 3

A tarefa Matemática 3 - Apêndice C - foi aplicada após aulas teóricas relacionadas a trigonometria no triângulo retângulo, de modo que os alunos pudessem aplicar os conhecimentos aprendidos na semana anterior e correlacionar com a tarefa Matemática anterior.

Para a realização desta tarefa, foram necessárias duas aulas, sendo a primeira aula destinada apenas para a construção do teodolito caseiro, de acordo com as seguintes etapas:

- **Etapa inicial:** Apresentação do vídeo do explicativo sobre a invenção do teodolito, suas aplicações e sobre seu manuseamento, pela plataforma *Youtube* COMO USAR UM TEODOLITO E COMO FAZER UM!!!

Figura 35 - Teodolito caseiro construído por aluno

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- **Etapa intermediária:** apresentação dos materiais necessários e explicação das etapas de construção junto com a construção do mesmo.
- **Etapa final:** verificação do teodolito caseiro e demonstração da utilização do mesmo.

Na segunda fase desta tarefa, com os materiais construídos, os alunos foram direcionados novamente para o pátio da escola para medir a altura novamente dos mesmos mastros que realizaram a tarefa 2 de modo que pudessem comparar os resultados. Nesse ponto, os alunos tinham melhor entendimento dos processos que seriam necessários para a realização da tarefa tendo em vista que seguiriam as mesmas etapas da tarefa anterior.

Nesse ponto, os grupos já se direcionaram para os respectivos mastros, no entanto, nesse processo surgiram alguns levantamentos relevantes para a aplicação:

Trecho 3

Estudante 5: Qual a distância que temos que utilizar?

Estudante 6: Posso ficar me movendo para frente e para trás até que fique 30º, 45º ou 60º?

Em especial, o grupo do estudante 6 teve um dos aprofundamentos essenciais sobre o triângulo retângulo com ângulos agudos de 45º, pois sabendo que o mesmo é isósceles, apenas era necessário calcular a distância, sem a necessidade de pesquisar na tabela o valor da tangente do ângulo correspondente.

Figura 36 - Alunos utilizando o teodolito

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

4.1.2.2.1. Antecipações e mediações da Tarefa 3

Assim como na tarefa 2, foi pensado em outras séries de antecipações que pudessem prever possíveis questionamentos e proporcionar possíveis discussões sobre a tarefa, gerando uma possível reflexão aos alunos:

I. É possível usar o teodolito com qualquer distância?
   A. O teodolito tem a função de calcular alturas e distâncias a partir dos ângulos (azimutes) mensurados, ou seja, se por possível mensurar o ângulo e um dos comprimentos é possível calcular.

II. Por que os valores das duas tarefas não foram iguais?
   A. Além de não haver alta precisão do ângulo do teodolito, o erro humano é considerado uma das variáveis essenciais para o estudo aplicado de questões que envolvam engenharia ou física.

III. A tangente do ângulo não muda se o triângulo tem suas dimensões grandes ou pequenas?
   A. Como visto em sala, a tabela trigonométrica representa os comprimentos das alturas e das bases formadas no círculo trigonométrico de raio 1, sendo assim a

aplicação de trigonometria no triângulo retângulo é na verdade uma aplicação de semelhança de triângulos.

B. Um possível exemplo é construir 2 ou mais triângulos proporcionais no quadros e pedir para que o aluno, com a ajuda de um transferidor, mensure os ângulos de cada um deles, mostrando que independente dos tamanhos dos lados, a tangente, o seno, ou o cosseno sempre será o mesmo.

4.2. ANÁLISE DE DADOS

Esta seção tem como objetivo a análise dos dados coletados constituindo uma etapa fundamental desta pesquisa, permitindo a interpretação dos resultados à luz dos objetivos previamente estabelecidos.

Para apresentação dos resultados foi necessário organizar, examinar e interpretar dados de forma sistemática, dividindo-os em dois aspectos, qualitativos e quantitativos. Os dados quantitativos foram analisados por meio dos métodos estatísticos descritos no capítulo 3, assim como, os qualitativos passaram por um processo de categorização e análise dos resultados das tarefas. Assim, busca-se oferecer uma visão límpida e detalhada sobre os resultados da pesquisa, contribuindo para as respostas às questões norteadoras do estudo.

4.2.1. Análise de Dados sobre a Abordagem Qualitativa

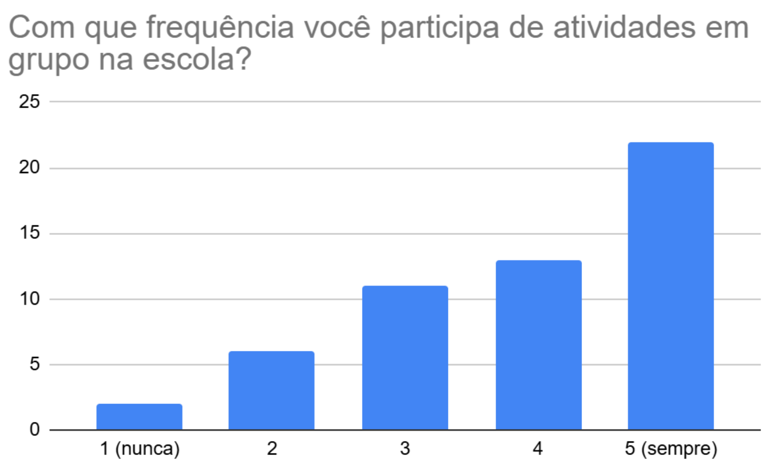
Ao longo das tarefas matemáticas 2 e 3 os alunos puderam observar e participar de aulas com embasamento em metodologia ativa e ao final deste processo incluindo a prova bimestral, 9 alunos de cada turma, totalizando 54 alunos, foram selecionados de modo aleatório para participar da pesquisa do questionário: experiência sobre metodologia ativas, respondendo as 15 perguntas, fornecendo os seguintes dados distribuídos de acordo a pesquisa *SERVQUAL*:

Gráfico 3: Perfil do aluno - Questão 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Ao analisar a pergunta: “Qual é o seu nível de interesse nas aulas em geral?”, nota-se que em sua maioria respondeu que se considera interessado, totalizando 41% dos alunos que participaram do questionário. Além disso, quando analisado por média ponderada, obtemos uma média 3,78 o que significa que, de modo geral, os alunos tendem a se considerar interessados pelas disciplinas.

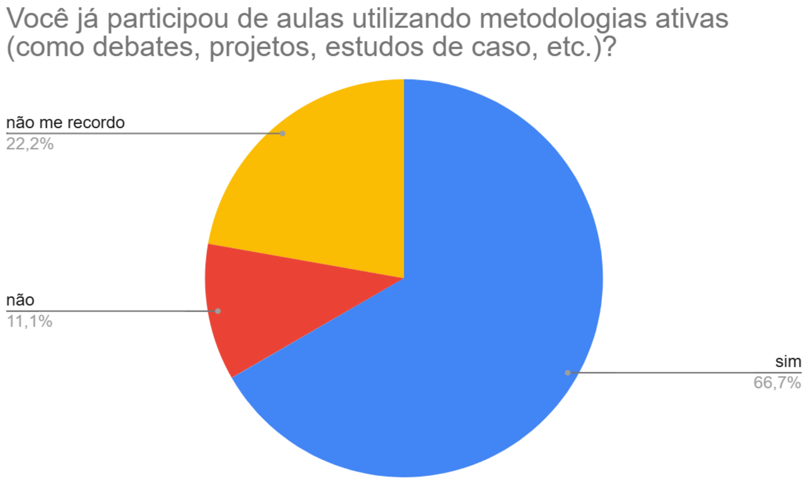
Gráfico 4: Perfil do aluno - Questão 2



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Em relação à questão 2, apesar de haver 2 alunos que responderam que nunca participaram de atividades em grupo na escola, a média geral é 3,87 mostrando que a maior parcela dos estudantes tem costume de participar de atividades em grupo.

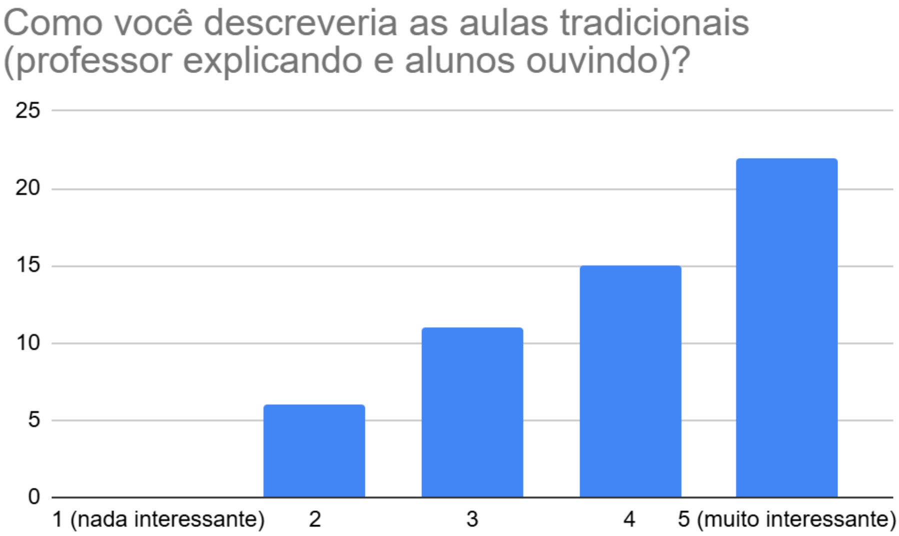
Gráfico 5: Perfil do aluno - Questão 3



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

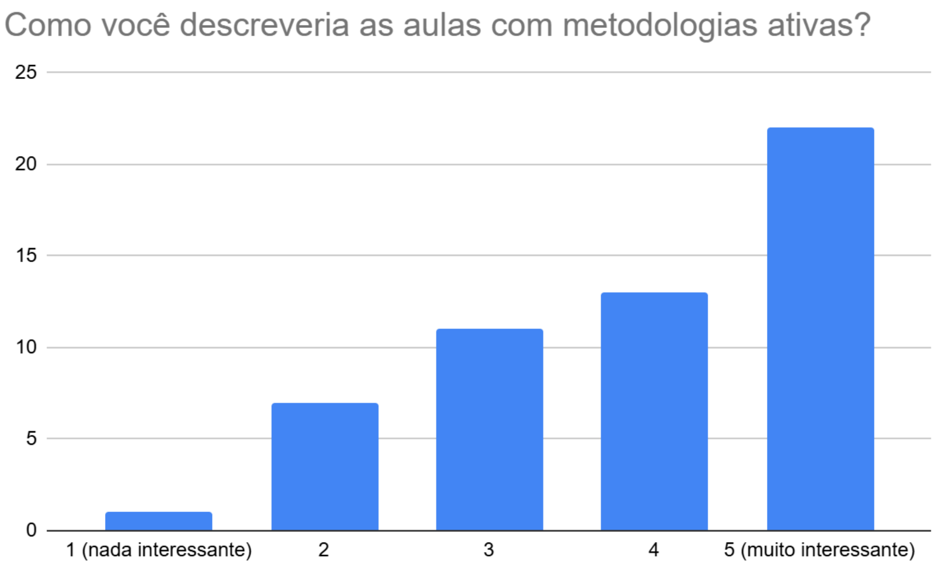
Apesar da escola ser considerada tradicional, seja pela disposição das cadeiras dentro de sala de aula, ou seja, pelos métodos avaliativos que em sua maioria são somativos, quase dois terços dos alunos afirmam ter participado de aulas planejadas em metodologias ativas.

Gráfico 6: Comparação entre metodologia ativa e aula expositiva - Questão 4



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

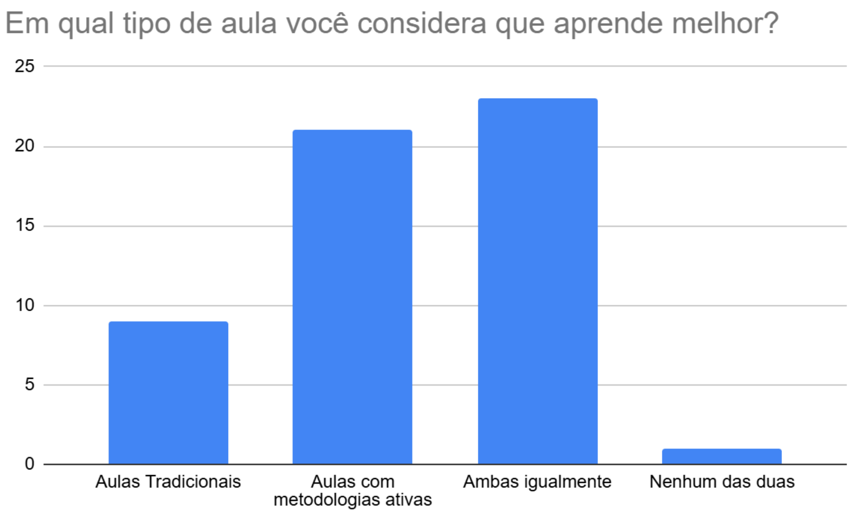
Gráfico 7: Comparação entre metodologia ativa e aula expositiva- Questão 5



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Ao comparar os gráficos 4 e 5 é possível notar que apenas quando se trata sobre metodologia ativa houve um aluno que marcou nada interessante e, quando comparado às médias ponderadas relacionadas aos tipos de metodologias, a média em relação à metodologia de aula expositiva é superior a metodologia ativa, 3,98 e 3,88, respectivamente.

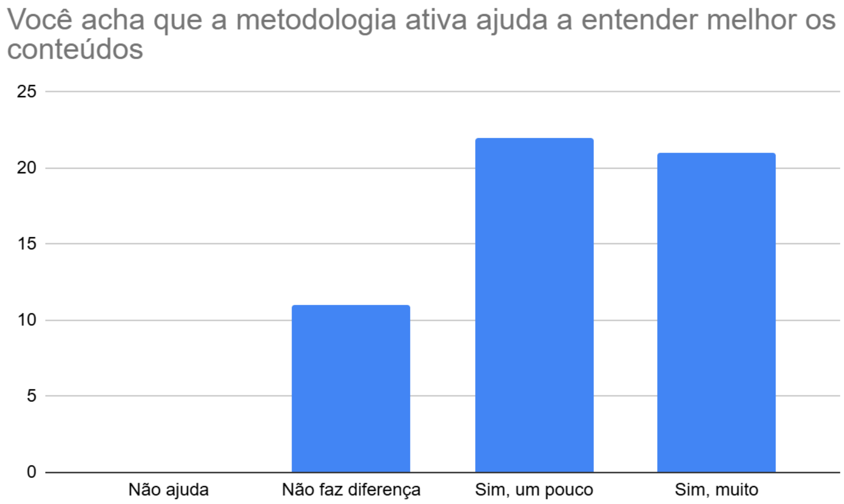
Gráfico 8: Comparação entre metodologia ativa e aula expositiva - Questão 6



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Apesar do que foi visto nos gráficos 4 e 5, no gráfico 6 nota-se que apenas 16,67% considera que aprende melhor com aulas expositivas enquanto 38,88% considera que aprende melhor com metodologias ativas e 42,59% consideram que com ambas metodologias consegue aprender e 1,85% considera que não consegue aprender com qualquer uma das metodologias já trabalhadas.

Gráfico 9: Comparação entre metodologia ativa e aula expositiva - Questão 7



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

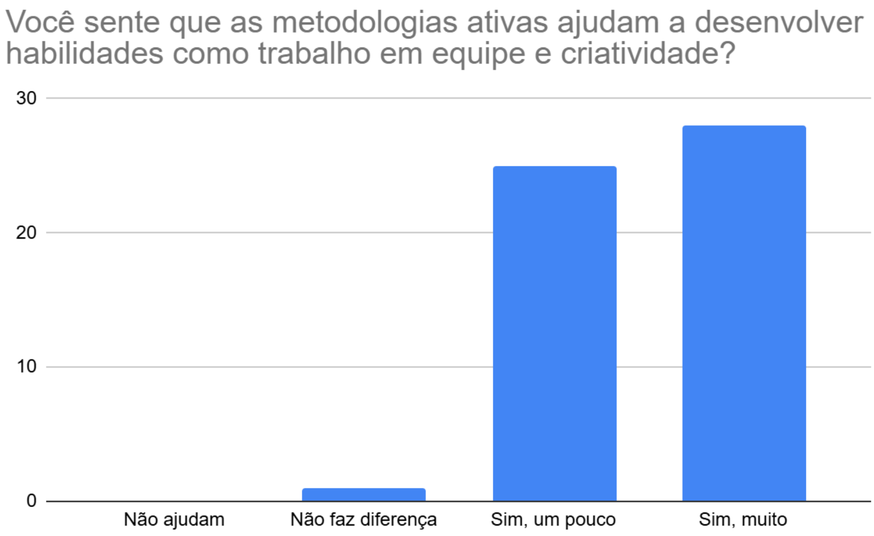
Gráfico 10: Comparação entre metodologia ativa e aula expositiva - Questão 8

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Quando questionados sobre a relevância da metodologia ativa na ajuda da compreensão de conteúdos, questão 7, 20,37% considera que a metodologia não tem tal aplicação, enquanto 79,63% considera que ajuda a entender melhor os conteúdos, seja um pouco ou muito.

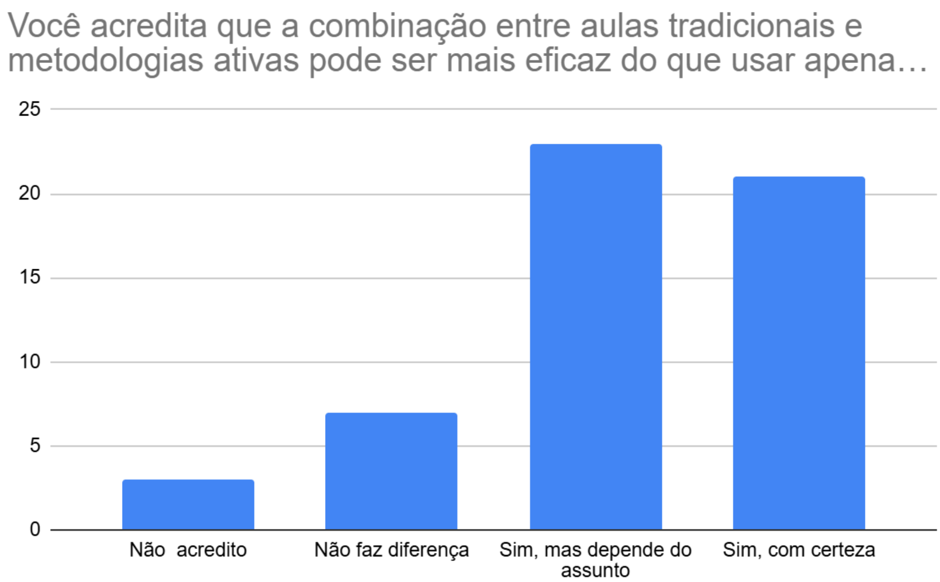
E, quando questionados sobre a necessidade de aulas com metodologia de aula expositiva, questão 8, obtemos uma média de 4,11, o que indica que os alunos consideram entre importante e muito importante manter tal tipo de metodologia para ensinar certos assuntos. Ainda sobre esta questão, 5,55% discordam parcialmente da necessidade de aulas tradicionais.

Gráfico 11: Relevância e Impacto - Questão 9



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

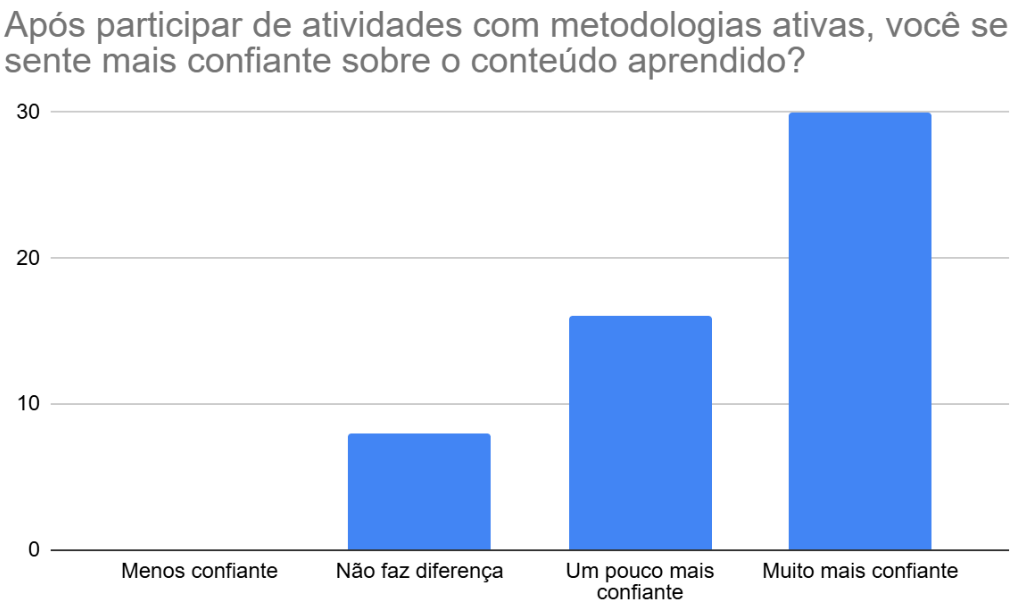
Gráfico 12: Relevância e Impacto - Questão 10



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

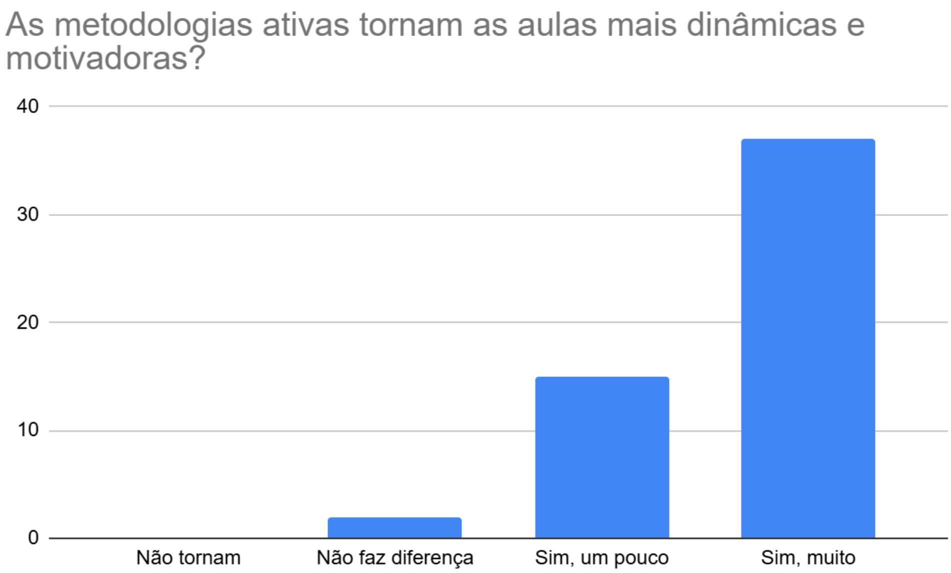
Nas questões 9 e 10 sobre relevância e impacto de metodologias ativas, é possível notar que 98,14% consideram que a metodologia ativa ajuda a desenvolver habilidades como trabalho em equipe e criatividade. No entanto, 18,51% consideram que combinações entre metodologias tradicionais e ativas não são eficazes ou não consideram que fazem diferença.

Gráfico 13: Relevância e Impacto - Questão 11



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

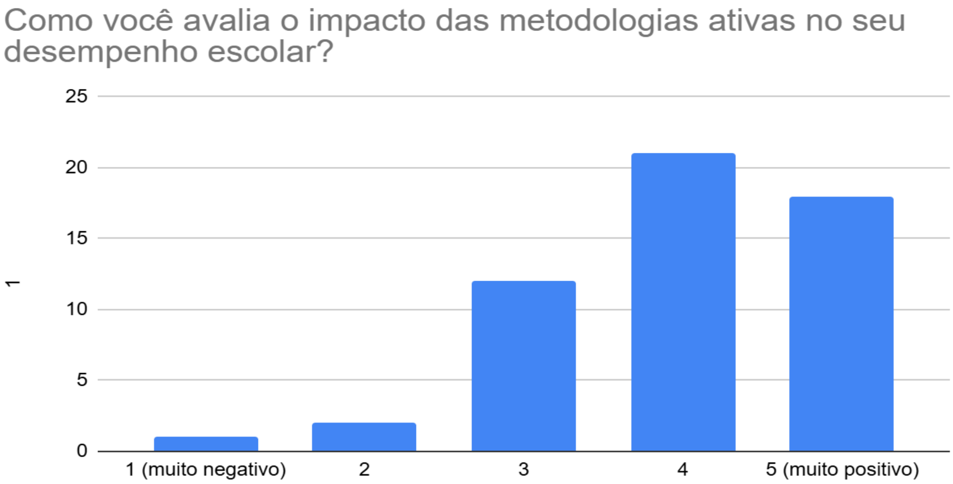
Gráfico 14: Relevância e Impacto - Questão 12



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Em relação ao sentimento de confiança sobre o conteúdo aprendido, no gráfico 11, 85,18% dos alunos consideram que se sente mais confiante quando participam de aulas com metodologias ativas. Do mesmo modo que, 96,29% consideram que metodologia ativa torna as aulas mais dinâmicas e motivadoras, gráfico 12.

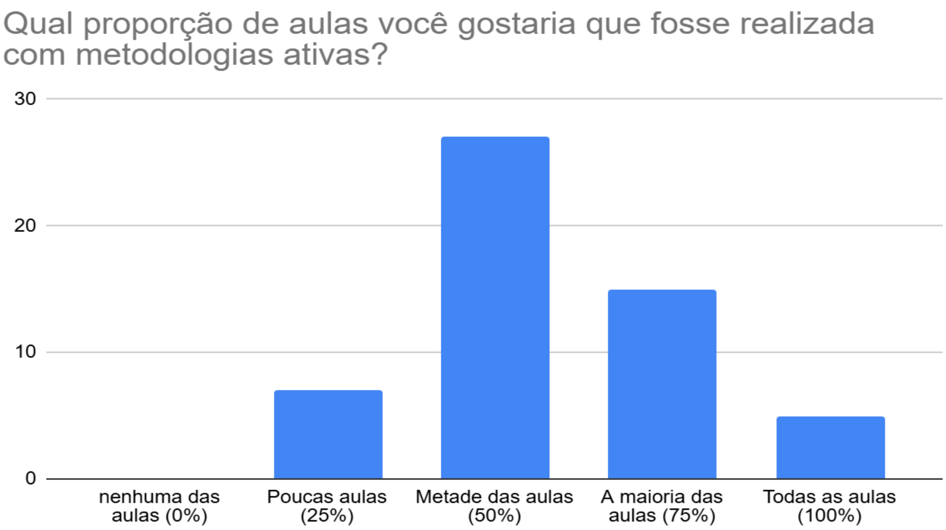
Gráfico 15: Relevância e Impacto - Questão 13



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Sobre o impacto das metodologias no desempenho escolar, gráfico 13, nota-se que um aluno considera que tal tipo de metodologia possui um impacto muito negativo em seu desempenho escolar, assim como 2 alunos consideram que a metodologia ativa possui uma influência um pouco negativa para o mesmo critério. No entanto, apesar dos fatos, supracitados, a média ponderada é de 3,98, sendo a mais alta juntamente com a questão 5.

Gráfico 16: Relevância e Impacto - Questão 14



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Sobre a proporção de aulas expositivas e ativas, metade dos alunos consideram que uma proporção de 1 para 1 seria o ideal para um melhor desenvolvimento do ensino.

Por fim, seguem abaixo algumas das respostas a 15º e última pergunta do questionário: “O que você gostaria que fosse melhorado nas metodologias ativas?”:

- *“Nada, apenas algumas listas que são realizadas em conjunto com os colegas de classe faz uma grande diferença no modo de compreensão e entendimento da matéria.”*
- *“Seria muito bom se os professores interagissem melhor com os alunos, de forma que seja confortável do professor explicar e que os alunos compreendam a matéria dada.”*
- *“Acho que é necessário que a turma colabore, porque não é toda vez que se tem uma aula prática. Falo isso porque reparei que durante as atividades práticas,(desde o início do ano) a maioria dos professores desistiram, por conta da turma. Mas no meu ponto de vista, as atividades foram ótimas, e gostei bastante do nosso ano juntos”*
- *“Sendo um professor legal tá ótimo, pois muitas vezes até as aulas expositivas ficam legais dependendo do humor do professor, então apenas por ser algo diferente já ajuda muito. Principalmente na matemática, que muitas vezes não é pelo professor que ficamos entediados, mas sim porque não conseguimos entender direito, então o importante é deixar claro e manter uma aparência altruísta e "animada" (não necessariamente desse jeito, mas não apresentar uma aula como se não quisesse estar ali, por exemplo).”*
- *“Trabalhar o assunto envolvendo os alunos e professores de uma forma mais descontraída e de fácil compreensão, porém com o uso contínuo da metodologia padrão, onde é de maior compreensão a parte teórica.”*
- *“Eu gostaria que em aulas com metodologias ativas podiam ser fora do ambiente escolar, pois isso sai da rotina e fica mais memorável na cabeça dos estudantes”*

4.2.2. Análise de Dados sobre a Abordagem Quantitativa

A avaliação quantitativa tem como intuito uma análise essencial dos dados educacionais, permitindo a interpretação objetiva dos resultados obtidos a partir dos instrumentos avaliativos aplicados ao longo do bimestre aos estudantes. Neste estudo, com foco as tarefas matemáticas aplicadas ao ensino de trigonometria, tendo assim com embasamento em metodologias ativas, a abordagem quantitativa visa identificar padrões de desempenho verificando relações estatísticas entre variáveis e avaliar a eficácia das estratégias pedagógicas adotadas ao longo do período supracitado.

Para tal, foram coletados dados por meio de duas frentes principais, uma inicial denominada como avaliação diagnóstica, aplicada previamente à abordagem direta do conteúdo de trigonometria, com o intuito de medir os conhecimentos prévios relacionados à semelhança de triângulos, sendo este fundamental para a compreensão da Trigonometria, e ao final do processo das tarefas matemáticas foi aplicado uma avaliação bimestral composta por questões que envolviam os conteúdos de álgebra, geometria e trigonometria, buscando avaliando o desempenho geral dos estudantes.

A seguir os dados coletados estão analisados estatisticamente por meio de descritivos e inferenciais de modo que para a avaliação diagnóstica foram analisados a média geral, desvio padrão, desvio médio e variância enquanto para a avaliação bimestral foram analisados os resultados a partir dos métodos de análise de variância (ANOVA), regressão linear múltipla, teste t e correlação de Pearson, de modo que os indicadores como média, desvio padrão, variância e coeficientes de determinação pudessem ser interpretados de modo analógico. Cada conjunto será apresentado e interpretado de modo individual e separado por subseções que se seguem, sendo inicialmente pela análise dos dados avaliação diagnóstica e posteriormente pela avaliação bimestral.

4.2.2.1. Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica aplicada neste estudo ocorreu no começo de novembro de 2024, para ser mais exato no dia 04 de novembro de 2024, e teve como objetivo principal identificar o nível de conhecimento prévio dos estudantes sobre o tema de Semelhança de Triângulos, conteúdo inicial para o entendimento de Trigonometria. Essa estratégia diagnóstica é fundamental para o planejamento pedagógico, pois permite ao professor compreender quais lacunas precisam ser trabalhadas antes da introdução de novos conceitos mais complexos ou que correlacionam. Além disso, esse tipo de avaliação se alinha à proposta de tarefas matemáticas que valorizam o protagonismo do aluno e a personalização do ensino com as necessidades detectadas.

Para tal avaliação foram elaboradas 7 questões objetivas que contemplam com os principais conceitos relacionados à semelhança de triângulos, como razão e proporção entre lados correspondentes, ângulos congruentes e critérios de semelhança, de acordo com questões vistas na tarefa 1, de acordo com o subtópico 5.1.

A aplicação foi realizada em seis turmas, no entanto, devido aos fatores citados nos subtópicos anteriores, apenas 66,49% enviaram respostas, abrangendo deste modo uma amostra significativa dos estudantes e obtendo os dados a seguir:

Tabela 8 - percentual de acerto e participação de cada turma

Turma	Nota Média	Participação (%)	Desvio Padrão	Desvio Médio	Variância
801	5,713	76,67%	0,64	0,44	0,41
802	5,931	57,57%	0,69	0,48	0,48
803	5,704	67,74%	0,66	0,46	0,44
804	5,362	53,33%	0,58	0,39	0,34
805	5,278	65,51%	0,55	0,37	0,30
806	7,144	78,12%	0,72	0,50	0,52
Total	**5,855**	**66,82%**	**0,66**	**0,45**	**0,43**

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Em relação aos dados apresentados, a turma 806, turma STEM, apresentou o melhor desempenho, com média 7,144 e a maior taxa de participação (78,12%), indicando uma possível correlação entre desempenho e engajamento. Olhando por outra perspectiva, apesar da menor média ser da turma 805 (5,278), teve uma participação intermediária (65,51%), enquanto a turma 802, outra turma STEM, mesmo tendo a menor taxa de participação (57,57%), apresentou resultado acima da média (5,931).

A média geral obtida pelos alunos foi de 5,855 indicando um domínio parcial do conteúdo de semelhança de triângulos, sendo que a dispersão, desvio padrão, foi relativamente baixa (***desvio padrão*** = 0,66), sugerindo certa homogeneidade entre as turmas. Esses dados são fundamentais para estruturar e orientar estratégias pedagógicas na abordagem da Trigonometria, especialmente considerando sua base geométrica a qual foi aquém do esperado.

4.2.2.2. Avaliação bimestral

As provas bimestrais, totalizando 6 ao longo do ano, são divididas em três frentes, Matemática 1 (álgebra), Matemática 2 (geometria) e Matemática (Matemática aplicada), sendo a última de minha responsabilidade de lecionar. Por tal fato, cada prova é montada a partir dos conteúdos lecionados ao longo de 5 a 7 semanas e as questões são elaboradas a partir dos tópicos que cada professor considerou relevante de ser trabalhado ao longo do período.

Ao fim desse ciclo, os alunos foram submetidos a uma prova composta por questões de múltipla escolha e de julgar verdadeiro ou falso, pautadas nos modelos de questão tipo B e C do vestibular tradicional da UnB e do programa seriado de ingresso a mesma universidade.

Tendo em vista os fatos acima, a realização da prova, Anexo 1, ocorreu no dia 29 de novembro de 2024, e para que não houvesse interferência de qualquer professor, a secretaria do colégio corrigiu as provas a partir de um programa de computador próprio, onde apenas se lê o cartão de resposta de cada aluno, diminuindo drasticamente a possibilidade de intervenção de qualquer professor ou membro do corpo docente a análise destes resultados.

Ao final deste processo, foi solicitado ao CA, Corpo Acadêmico (secretaria escolar) que enviassem os relatórios de cada turma, o qual foi organizado e disposto na tabela abaixo:

Tabela 9 - percentual de acerto por questão de cada turma

PROVA						
Turmas	**801 (%)**	**802 (%)**	**803 (%)**	**804 (%)**	**805 (%)**	**806 (%)**
Questão 1 (Algebra)	68,97	34,38	45,16	35,71	40,00	93,55
Questão 2 (Algebra)	89,66	93,75	96,77	92,86	84,00	96,77
Questão 3 (Algebra)	65,52	75,00	64,52	71,43	64,00	87,10
Questão 4 (Algebra)	55,17	50,00	38,71	35,71	72,00	87,10
Questão 5 (Geometria)	79,31	78,13	51,61	71,43	64,00	83,87
Questão 6 (Geometria)	44,83	31,25	29,03	28,57	28,00	77,42
Questão 7 (Geometria)	44,83	56,25	38,71	35,71	36,00	83,87
Questão 8 (Trigonometria)	72,41	68,75	67,74	55,17	52,00	87,10
Questão 9 (Trigonometria)	65,52	62,50	61,29	60,71	72,00	96,77
Questão 10 (Trigonometria)	86,21	59,38	70,97	85,71	52,00	87,10
Questão 11 (Trigonometria)	79,31	62,50	80,65	71,43	64,00	90,32
Questão 12 (Geometria)	62,07	90,63	38,71	96,43	76,00	100,00
Questão 13 (Algebra)	86,21	87,50	41,94	78,57	60,00	80,65
Questão 14 (Geometria)	79,31	59,38	32,26	57,14	68,00	96,77
Questão 15 (Trigonometria)	72,41	56,25	41,94	41,94	48,00	83,87

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Vale ressaltar que apesar das classes 802 e 806 serem turmas STEM, para o agrupamento destes alunos, a escola os ordenaram, colocando os primeiros 32 alunos na 806 e os demais colocados ficaram na 802. Por tal fato, nota-se que o percentual de acerto de cada questão foi maior na turma dos alunos com maior rendimento acadêmico. Para fins de organização, na tabela abaixo, tabela 10, foram dispostas as médias da turma por frente de matemática:

Tabela 10 - Percentual de acerto por frente de Matemática em cada turma

Turma	Álgebra (%)	Geometria (%)	Trigonometria (%)	Média Geral (%)
801	73,1	62,07	75,17	70,11
802	68,13	63,13	61,88	64,38
803	57,42	38,06	64,52	53,33
804	62,86	57,86	62,99	61,24
805	64	54,4	57,6	58,67
806	89,03	88,39	89,03	88,82

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A partir da tabela anterior, vemos que apenas a turma 802 teve o percentual de trigonometria abaixo dentre as três frentes, enquanto 4 turmas tiveram média de trigonometria superior às demais frentes matemáticas.

Esta primeira anamnese revela indícios promissores quanto à efetividade das tarefas realizadas e metodologia aplicada. Em razão destes primeiros dados apontarem para uma tendência positiva, os testes estatísticos aplicados neste capítulo buscam corroborar com a análise inicial e justificar a continuidade e aprofundamento das investigações, além de reforçar a hipótese central do estudo.

4.2.2.2.1. Teste ANOVA

Para o teste de Análise de Variância, *ANOVA,* foi optado pela extensão *XLMiner Analysis ToolPak* do google planilhas, usando os dados da tabela 9 supra citados anteriormente. Como este teste tem como funcionalidade identificar se houve diferença significativa entre os desempenhos nas três frentes foi realizado o mesmo processo para álgebra, geometria e trigonometria comparando-os com a média geral, deste modo, os dados compreendidos estão descritos na tabela abaixo:

Tabela 11 - Resultados do Teste ANOVA para cada frente

Frente	Soma dos Quadrados (SQ)	Graus de Liberdade (GL)	F	p-valor
Álgebra	1,40	1	146096,82	0,000007
Geometria	6,30	1	656364,06	0,000002
Trigonometria	7,66	1	797500,53	0,000001

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observa-se que, em todas as frentes analisadas, os valores de **p** foram significativamente inferiores a 0,05, o que indica que cada uma delas contribuiu de forma relevante para a explicação da média geral. Dentre elas, a Trigonometria apresentou o menor ***p-valor***, evidenciando sua maior influência. Esse resultado é corroborado também pelos valores da ***Soma dos Quadrados (SQ)***, nos quais a Trigonometria obteve o maior valor (7,66), demonstrando a maior contribuição para a variabilidade da média geral.

Para os valores de ***F*** obtidos nesta análise, apesar de terem sido excepcionalmente altos, superando centenas de milhares, eles refletem duas condições particulares dos dados: o ***erro residual (SQ resíduo)*** foi igual a 0,000019, um valor extremamente pequeno e o ***número de observações,*** ou seja, número de turmas ser igual a 6 resultou em apenas 2 graus de liberdade no erro. Por fim, como o valor de ***F*** é a razão entre o quadrado médio do fator e o quadrado médio do erro, esse denominador muito pequeno elevou drasticamente os valores de ***F***. Em termos práticos, isso significa que a variabilidade explicada pelos fatores (as frentes) é muito superior à variabilidade não explicada (erro), evidenciando sua importância na explicação da média geral.

4.2.2.2.2. Correlação de Pearson

A correlação de Pearson teve como aplicação verificar o grau de associação linear entre o desempenho em cada uma das frentes e a média geral das turmas. Os valores obtidos para cada associação foram:

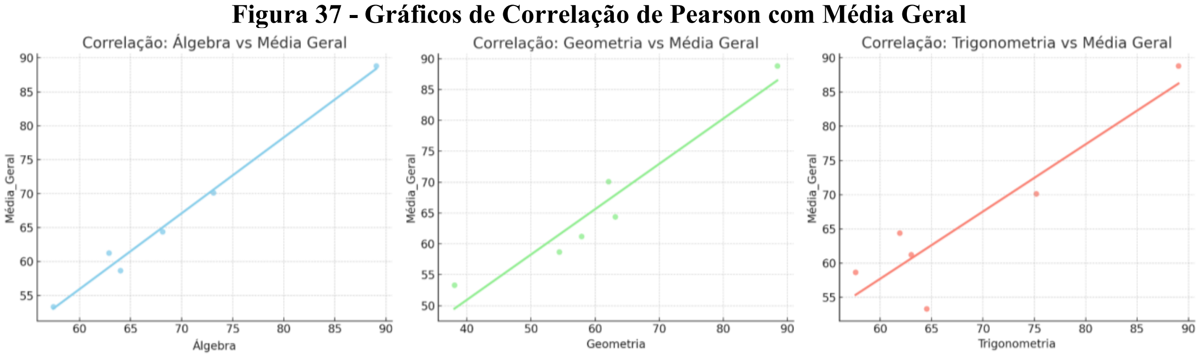
Tabela 12 - Resultados da Correlação de Pearson para cada frente

Frente	Grau de Correlação de Pearson (r)	p-valor
Álgebra	0,95	0,003
Geometria	0,91	0,010
Trigonometria	0,98	0,0009

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Como os coeficientes de cada frente indicaram uma correlação forte e positiva, e seus ***p-valor*** foram menores que 0,05 podemos afirmar que os todos alinham significativamente com a tendência em relação à média, como demonstrado abaixo:

Figura 37 - Gráficos de Correlação de Pearson com Média Geral



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Além disso, nota-se que para trigonometria tanto o grau quanto ***p-valor*** foram os que melhores apresentaram resultados para tais parâmetros, sugerindo que o desempenho dos alunos na frente de trigonometria teve melhor influência nos resultados, tendo o ***coeficiente de determinação (r^2)*** igual a 0,9604, isto é, que 96,04% da variação da média geral é explicado pelas notas de trigonometria.

4.2.2.2.3. Teste t para Comparação entre Frentes

Com o intuito de verificar se as diferenças médias são estatisticamente significativas ou não, foram realizados testes t pareados (bilaterais) entre as frentes, obtendo os seguintes resultados:

Tabela 13 – Teste t para cada Comparação entre Frentes

Comparação	Diferença Média (%)	t (t-student)	p-valor
Álgebra vs Geometria	8,11	2,16	0,084
Álgebra vs Trigonometria	0,39	0,10	0,922
Geometria vs Trigonometria	-7,72	-2,09	0,093

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Os resultados sugerem que, apesar de existir diferença nas médias, estas não atingem significância estatística. Deste modo, podemos destacar os valores obtidos para ***Álgebra vs Trigonometria***, onde o ***p-valor***, a probabilidade de hipótese nula ocorrer, que no caso deste estudo é não haver diferença média estatisticamente significativa, é igual a 92,2% indicando que os alunos possam ter se dedicado com maior afinco as duas disciplinas em detrimento a de geometria ou os alunos tiveram mais facilidade nas duas disciplinas.

Outro ponto a ser observado é em ***Geometria vs Trigonometria,*** onde o ***p-valor*** foi igual a 0,093, sendo este o menor observado, onde indica uma tendência de diferença, mas sem confirmação estatística. Um dos fatores para que isso possa ter ocorrido é pelo pequeno número de observações, o que reduz o poder do teste.

4.2.2.2.4. Regressão Linear Múltipla

Por fim, foi realizado uma regressão linear a partir dos dados coletados para averiguação da contribuição de cada disciplina para a média geral. O modelo considerou álgebra, geometria e trigonometria como variáveis assim como a média geral, sendo independente e dependente, respectivamente.

Deste modo, foram obtidos os seguintes valores:

- coeficiente de determinação: R^2: *0,998* (altíssimo)
- F de modelo: 710,5
- p do modelo: $p < 0{,}0001$

Tabela 14 - Resultados da Regressão Linear Múltipla

Variável	Coeficiente (β)	p-valor
Álgebra	0,30	0,0047
Geometria	0,23	0,0241
Trigonometria	0,47	0,0012

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Deste modo obtemos a seguinte equação característica da regressão linear múltipla:

$$Y = 0 + 0{,}30 \cdot X_1 + 0{,}23 \cdot X_2 + 0{,}47 \cdot X_3 + \mathbf{0{,}057}$$

- ***Intercepto (β_0 = 0,00)***: Representa o valor esperado da média geral quando todas as variáveis independentes forem zero. Embora seja igual a zero neste caso, ele é mantido na equação como base do modelo.
- ***Álgebra (β_1 = 0,30)***: Para cada ponto percentual de aumento em Álgebra, espera-se um aumento de 0,30 na média geral, mantendo as demais variáveis constantes.
- ***Geometria (β_2 = 0,23)***: Indica um aumento de 0,23 na média geral para cada ponto percentual a mais em Geometria.
- ***Trigonometria (β_3 = 0,47)***: Indica que um aumento de 1 ponto percentual em Trigonometria resulta em um acréscimo de 0,47 na média geral, o maior impacto entre as três frentes.

Os valores extremamente altos do ***F*** e o ***p-valor*** extremamente baixo refletem a altíssima capacidade explicativa do modelo, com um R^2 de 0,998. Isso significa que 99,8% da variabilidade da média geral pode ser explicada pelas três frentes. O erro padrão da estimativa indica que a média geral prevista pelo modelo tende a desviar-se em apenas 0,057 unidades em média dos valores reais, demonstrando a precisão da regressão. Tal resultado pode ser atribuído à alta correlação entre variáveis e à baixa variabilidade residual. Contudo, vale ressaltar que a amostra é pequena, contendo apenas 6 grupos de observação, podendo assim gerar sobre ajuste e limitar a robustez do modelo para generalizações.

4.2.3. Análise de Dados à Luz do Referencial Teórico

Os resultados alcançados ao longo da pesquisa forneceram subsídios necessários para estabelecer relações entre a prática educativa analisada e os princípios teóricos que fundamentam este estudo. A análise que segue visa evidenciar essas conexões, destacando implicações, convergências, possibilitando aprofundar a compreensão sobre os fenômenos investigados e possíveis discordâncias.

Assim como Santos (2015), pela perspectiva da avaliação qualitativa, o impacto de tarefas matemáticas, na percepção dos alunos sobre trigonometria, contribui tanto no aspecto conceitual quanto prático, colaborando no desenvolvimento de análise de situações-problemas e cativando os mesmos a terem uma maior participação de seu ensino-aprendizagem.

Pela perspectiva da avaliação quantitativa, o projeto entra em concordância com Dantas (2018) onde apesar de ambas pesquisas terem sido positivas para tal perspectiva, a necessidade de utilização de uma abordagem mais expositiva continua sendo bem vista para alguns assuntos ou matérias, onde o mesmo afirma que tais materiais tem como funcionalidade ser um facilitador de ensino, algo que pode ser visto pelos comentários e pelas respostas obtidas pela pesquisa *SERVQUAL*, apresentados no gráfico 16.

Partindo de uma proposta semelhante, Brito, Santos, Oliveira (2023) exploram uma abordagem metodológica para o ensino de trigonometria por meio da construção e aplicação de um teodolito caseiro. Durante a execução da atividade, observaram um maior engajamento por parte dos alunos, além de interações positivas no ambiente de aprendizagem. Esses resultados dialogam com a presente análise, especialmente com os dados obtidos por meio da pesquisa *SERVQUAL*, representados nos gráficos 13 e 14.

Em relação à pesquisa internacional selecionada dos autores Nuri, Serkan, Abdullah, O'marbek (2021), a comparação de um pré-teste e um pós-teste para averiguar o desenvolvimento dos alunos a partir de uma metodologia ativa, no caso estudo individual x estudos em pares apresentou que o grupo experimental obteve melhores resultados tendo em vista que os mesmos possuíam maior confiança e participação em sala de modo que pudessem ter uma maior independência para o desenvolvimento sobre o que tange o conteúdo de trigonometria, algo que correlaciona com os dados apresentados no subseção 4.2.1, em especial nos gráficos 11 e 12.

Quanto às falhas dos alunos em relação às questões diagnósticas e as questões da prova bimestral do segundo semestre, apresentadas nas tabelas 8 e 9 respectivamente, nota-se uma convergência de fatores apresentados tanto por Gomes (2013) e Castro, Cárcamo (2023), onde os autores argumentam sobre os erros identificados, sejam eles por falta de conhecimento prévio ou por assuntos não bem trabalhados anteriormente, no caso deste estudo, uma defasagem em relação ao conhecimento sobre semelhanças de triângulos, mas também uma possível defasagem a assuntos adjacentes para resolução das questões de trigonometria, tais como resolução de equação em álgebra, quanto frações em aritmética.

Para a fundamentalização das aulas e para a construção das tarefas o estudo realizado pelos autores Rodrigues, Souza, Thiengo (2022) e Oliveira (2006), onde os argumentos realizados pelo primeiro estudo apontam para uma possível lacuna de conhecimento sobre trigonometria quando o foco educacional é apenas na realização de atividades, algo que impacta diretamente nos estudantes, de modo que os erros conceituais apresentados pela pesquisa de 2022 indicaram que a falta de conceitualização impede o desenvolvimento pleno. Já em contrapartida o artigo de 2006 busca dialogar com propostas metodológicas acessíveis, apresentando pontos a serem trabalhados e observados para a aplicação destas atividades, como público alvo e material necessário para realização do mesmo.

Por fim, as pesquisas realizadas por Junior (2023) e Andrade, Oliveira, Pereira (2018) serviram como embasamento teórico para a aplicação do teodolito caseiro e foram norteadores para possíveis antecipações e mediações, tendo em vista que em ambos os casos os autores trouxeram dúvidas e questionamentos dos alunos de modo que possibilitaram o aprofundamento de cada planejamento, podendo assim trazer diferentes discussões para os alunos ao longo das tarefas realizadas.

5. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo central analisar o desenvolvimento dos alunos no estudo da Trigonometria, a partir da aplicação de tarefas interativas, pautadas por metodologias ativas e intercaladas com aulas expositivas. Para atingir tal finalidade, foram utilizados instrumentos avaliativos e ferramentas estatísticas robustas, com destaque para a Análise de Variância (ANOVA), Correlação de Pearson, Testes t e Regressão Linear Múltipla, além de uma análise qualitativa baseada no modelo *SERVQUAL*. Esses recursos permitiram mensurar com profundidade não apenas o desempenho acadêmico, mas também a percepção dos estudantes quanto ao processo de ensino-aprendizagem.

A ANOVA revelou diferenças estatisticamente significativas entre as frentes de conteúdo, sendo a Trigonometria a frente com maior contribuição para a média geral, conforme indicado pelo maior valor de F e menor valor-p. Esse resultado está alinhado ao primeiro e segundo objetivos específicos da pesquisa, que buscaram construir a percepção de semelhança de triângulos e relacionar os conceitos trigonométricos a essa base geométrica. As atividades práticas e contextualizadas parecem ter reforçado a compreensão desses conceitos, refletindo positivamente nos dados quantitativos.

Além disso, a correlação de Pearson demonstrou forte relação entre a nota da frente de Trigonometria e a média final dos alunos, com coeficiente superior a 0,95. Esse dado reforça o impacto da metodologia empregada e valida os esforços para aproximar o conteúdo matemático de aplicações práticas e históricas, atendendo ao terceiro e quartos objetivos específicos, que abordam o uso do teodolito caseiro e a dedução das razões trigonométricas a partir de triângulos notáveis. A análise evidenciou ainda que os alunos que se engajaram nessas tarefas apresentaram melhor desempenho global.

A regressão linear múltipla trouxe uma visão integrada, revelando que, embora todas as frentes contribuam para o desempenho geral, a Trigonometria apresentou o coeficiente mais expressivo no modelo, destacando-se como variável mais preditiva. O valor do coeficiente beta para Trigonometria, bem como a significância estatística do modelo, reforça o papel central da metodologia ativa aplicada nesse conteúdo específico. Mesmo com um valor de R^2 moderado, os dados sugerem que práticas inovadoras e contextualizadas têm um papel relevante no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Do ponto de vista qualitativo, os dados do formulário aplicado aos alunos apontaram elevada satisfação com as aulas pautadas em metodologias ativas. As cinco dimensões do SERVQUAL (Tangibilidade, Confiabilidade, Responsividade, Segurança e Empatia) foram bem avaliadas, especialmente nos aspectos relacionados ao envolvimento com a prática, clareza do conteúdo e sensação de autonomia. Esses dados complementam os resultados quantitativos e respondem diretamente ao quinto e sexto objetivos específicos, que tratam da eficácia percebida da metodologia ativa e da avaliação do produto educacional.

Ainda assim, ao longo da análise, algumas lacunas importantes foram identificadas e merecem ser exploradas em futuras investigações. Entre elas, destaca-se a questão do tempo dedicado ao ensino de Trigonometria: em um planejamento de longo prazo, com duração de aproximadamente seis meses, haveria potencial para um aprofundamento maior e para resultados ainda mais expressivos na aprendizagem? Além disso, questiona-se se a inclusão de ferramentas tecnológicas, como o uso de um teodolito moderno, poderia potencializar o engajamento e a compreensão dos alunos, tornando o conteúdo mais concreto e atrativo.

Apesar destas lacunas, e tendo como base os resultados positivos obtidos, propõem-se novas possibilidades de exploração metodológica, como o ensino da construção e do cálculo de áreas de polígonos regulares a partir de ângulos centrais e internos — uma abordagem que amplia a articulação entre geometria e trigonometria. Soma-se a isso a sugestão de desenvolver práticas interdisciplinares envolvendo Física e Matemática, como a criação de produtos educacionais que articulem as Leis de Newton ao estudo do triângulo retângulo, ampliando a aplicabilidade do conteúdo e favorecendo uma aprendizagem mais integrada.

Portanto, conclui-se que a aplicação de tarefas matemáticas contextualizadas e interativas no ensino de Trigonometria promove avanços significativos na aprendizagem dos alunos, tanto em termos de desempenho quanto de percepção positiva sobre o processo educativo. O alinhamento entre os dados quantitativos e qualitativos reforça a validade do modelo proposto, indicando que metodologias ativas são uma estratégia eficaz e relevante para o ensino da Matemática no contexto da educação básica. Este trabalho, assim, contribui não apenas para o aprimoramento das práticas pedagógicas, mas também para a valorização da Trigonometria como um conteúdo acessível, aplicável e significativo.

6. REFERÊNCIAS

ABRAMOVICH, Fanny. **Os professores não duvidam! Dúvida?** São Paulo: Summus, 1990.

OTAVIANO, Alessandra Barbosa. **Estímulo à criatividade por professores de Matemática e motivação do aluno.** Psicologia Escolar e Educacional. 2012, 16(1), 61-69.. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=282323570007.

ANDRADE, M. H.; OLIVEIRA, R. R.; PEREIRA, A. C. C. Um recurso histórico para estudos iniciais de trigonometria: apresentando o teodolito. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 5, p. 66-76, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v5i13.69.

BACURY, Gerson Ribeiro. **Práticas investigativas na formação de futuros professores de matemática**. 2017. 187 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

BALTA, Nuri; KAYMAK, Serkan; ALMAS, Abdullah; NURBAVLIYEV, O'Marbek. The Impact of Peer Instruction on Ninth Grade Students' Trigonometry Knowledge. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 206-222, 2021. DOI: 10.1590/1980-4415v35n69a10.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey Charles. **Content Knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov. 2008.

BARRETO, G. B. B.; FREITAS, A. M. T. Jogos educativos africanos da família mancala: um caminho para ensinar e aprender matemática. **Laplage em Revista**, v. 2, p. 146–153, 2016.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Flipped Learning: Gateway to student engagement.** [S.l.]: [s.n.], 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 2000. 88 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Notas sobre o Brasil no Pisa 2022**. Brasília, DF: Inep, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2022/pisa_2022_brazil_prt.pdf. Acesso em: 05 de jun de 2025.

BRITO, A. de J.; MOREY, **Bernadete Barbosa. Geometria e Trigonometria: dificuldades de professores do ensino fundamental**. Presenças Matemáticas, Natal: EDUFRN, p. 9-33, 2004.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. **Na vida dez, na escola zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática**. São Paulo: Cortez, 1988. Fundação Carlos Chagas.

CASTRO, Teresa; CÁRCAMO, Andrea. Errores en la Resolución de Ecuaciones Trigonométricas: un Estudio Exploratorio con Estudiantes de Primer Año de Ingeniería. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 37, p. 336-351, 2023. Disponível em: 10.1590/1980-4415v37n75a16.

CAVALCANTI, Maria da Silva; OLIVEIRA, João Pedro de. Acesso às tecnologias na formação de professores diante das desigualdades regionais. **IOSR Journal of Business and Management**, v. 26,

n. 8, p. 15-26, 2024. Disponível em: https://www.iosrjournals.org/iosr-jbm/papers/Vol26-issue8/Ser-8/C2608081526.pdf. Acesso em: 24 maio 2025.

COSTA, D. V. S. D.; OLIVEIRA, S. Projeto de Atuação Docente como contribuições de ações da escola. In: VIII Fórum Internacional de Pedagogia. Educação em/para os Direitos Humanos, Diversidade, Ética e Cidadania, 8., 2016, Imperatriz - MA. **Anais do VIII FIPED**. Campina Grande: Realize Editora, 2016.

COSTA, N. M. L. **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador**. 1997. 250 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

CRESWELL, J. W. **Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches**. SAGE Publications, 2014.

D'AMBRÓSIO, B. S. **Como ensinar Matemática hoje?** 1989. Disponível em: http://educamoc.com.br/ckfinder/files/6%20DAMBROSIO%2C%20B%20-%20COMO%20ENSINAR%20MATEM%C3%81TICA%20HOJE.pdf . Acesso em: 16 fev. 2025.

DANTAS, Aleksandre Saraiva. O uso do GeoGebra no ensino de trigonometria: uma experiência com alunos do ensino médio. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, p. 143-155, 2015.

FAGEN, A. P.; CROUCH, C. H.; MAZUR, E. Peer instruction: Results from a range of classrooms. **The Physics Teacher**, v. 40, n. 4, p. 206-209, 2002.

FARIA, Ernesto Martins. **Alunos de 15 e 16 anos estão tendo o aprendizado esperado para alunos de 11 a 12 anos**. Entrevista concedida à Fundação Roberto Marinho, 2021. Disponível em: https://www.fundacaorobertomarinho.org.br/noticias/aprendizado-de-matematica-no-brasil/. Acesso em: 24 maio 2025.

FIELD, A. **Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics.** SAGE Publications, 2013.

FREITAS, J. L. M. de; BITTAR, M. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2. ed. Campo Grande: UFMS, 2004.

GOMES, S. C. Ensino de trigonometria numa abordagem histórica – um produto educacional. **HOLOS**, v. 3, p. 193–203, 2015. DOI: 10.15628/holos.2015.683.

GUERRA, E. C. S. **Creatividad em educación matemática.** In: Comprender y evaluar la creatividad. Málaga: Aljibe, 2006. p. 475-494.

GUIMARÃES, S. É. R.; SISTO, F. F.; COSTA, E. R. d.; MARTINI, M. L. **Motivação do aluno: Contribuições da psicologia contemporânea**. São Paulo: Vozes, 2009.

KENNEDY, E. S. T**ópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula**, volume 5: Trigonometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

KNIGHT, J.; BRAME, C. Peer Instruction. **CBE-Life Sciences Education**, v. 17, n. 2, p. 1-4, 2018.

LADEWIG, I. A importância da atenção na aprendizagem de habilidades motoras. **Revista Paulista de Educação Física**, p. 62-71, 2000.

LIKERT, Rensis. A technique for the measurement of attitudes. **Archives of Psychology**, v. 140, p. 1-55, 1932.

Lobo da Costa, Nielce M. **A História da Trigonometria**. Artigo – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2016. Disponível em: http://www.paulofreire.org/Biblioteca/histtrigon.pdf. Acesso em: 10 de fev. de 2025.

LOPES, Maria Maroni. Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife. **Anais... Recife**: [s.n.], 2011.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino da matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUZ, B. E. S. C.; GALLON, M. da S.; NASCIMENTO, S. S. do. Contextualizando e discutindo as atividades lúdicas em ciências no ensino fundamental. **Revista Eletrônica Ludus Scientiae**, v. 1, n. 2, p. 14–30, ago. 2017.

MACHADO, Arthur Versiani. **Métodos e meios de ensino: categorias básicas da Tecnologia Educacional**. Publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso, [s.l.], [s.d.].

MACHADO, Karen Graziela Weber; KAMPFF, Adriana Justin Cerveira; CASTRO, Thomas Selau de. Formação docente, tecnologias digitais e interculturalidade: reflexões para educação em uma sociedade plural e conectada. **Revista Educação em Foco**, v. 6, n. 1, p. 189-204, 2024. Disponível em: https://revista.uemg.br/index.php/educacaoemfoco/article/view/6306. Acesso em: 24 maio 2025.

MARÔCO, J. **Análise Estatística com o SPSS Statistics**. ReportNumber, 2011.

MAXWELL, J. A. Understanding and validity in qualitative research. **Harvard Educational Review**, v. 62, n. 3, p. 279-301, 1992.

MAYO, P.; DONNELLY, M. B.; NASH, P. P.; SCHWARTZ, R. W. Student perceptions of tutor effectiveness in problem-based surgery clerkship. **Teaching and Learning in Medicine**, v. 5, n. 4, p. 227-233, 1993.

MAYO, Valerie; COURTNEY, Scott. Developing Meaning in Trigonometry. **Illinois Mathematics Teacher**, v. 63, p. 25-33, 2015.

MENDES, Iran Abreu. **O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências**. Belém: Eduepa, 2001.

TODÃO, J. **Os Papiros da Matemática Egípcia** - O Papiro de Rhind ou Ahmes. Matemática é fácil. 2017. Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html#google_vignette. Acesso em: 23 de fev. 2025.

APÊNDICE A: CRONOGRAMA DE ATIVIDADES

COLÉGIO MILITAR TIRADENTES

CASA DE HONRADOS PATRIOTAS

Cronograma **A3s2** – **Matemática 3** – 8º ano

Professor: **Gabriel Teixeira**

22/10 a 28/11

CONTEÚDOS PARA A3s2
1. Trigonometria no Triângulo Retângulo (Conteúdo Extra) **a. Construção a partir de semelhança de triângulos** **b. Compreensão de um teodolito** **c. Aplicação de Seno, Cosseno e Tangente** **d. Triângulos Especiais (30, 45, e 60 graus)**
OBJETIVOS
● Compreender e identificar as relações trigonométricas em construções e aplicações do cotidiano. ● Aplicar as fórmulas de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, assim como identificar qual melhor relação possível. ● Identificar os triângulos especiais e utilizar a tabela de seno, cosseno e tangente em questões contextualizadas.

SEQUÊNCIA DAS AULAS		
Semana 1 21.10 a 25.10	Aula 01	**Correção da Prova A2s2**
	Aula 02	Avaliação diagnóstica - Semelhança de Triângulos
Semana 2 28.10 a 01.11	Aula 03	Aula Teórica - Semelhança de Triângulos + Teorema de Tales Aula Prática - Medição de Alturas de objetos da escola
	Aula 04	Aula de Exercícios - Lista de Semelhanças de Triângulos
Semana 3 04.11 a 08.11	Aula 05	Aula Teórica - Construção da definição de seno, cosseno e tangente em triângulos semelhantes
	Aula 06	Aula Teórica - Construção de um Teodolito e explicação de um teodolito
Semana 4 11.11 a 15.11	Aula 07	Aula prática - Aplicação do Teodolito caseiro para medição de objetos da escola
	Aula 08	Aula de Exercícios - Lista de Trigonometria
Semana 5 18.11 a 22.11	Aula 09	Aula Teórica - Triângulos Especiais (30, 45, 60 graus) Tabela de seno cosseno e tangente
	Aula 10	Aula de exercícios - Lista de Trigonometria 2
Semana 6 25.11 a 29.11	Aula 11	Revisão para a prova A3s2
	Aula 12	**Prova A3s2**

Queridos alunos, estudem todos os dias!

"Tem gente que sonha com o sucesso. Tem gente que trabalha todos os dias para conquistá-lo."

APÊNDICE B: TAREFA MATEMÁTICA 2

Título da Tarefa Matemática: Explicação da Semelhança de Triângulos pelo Teorema de Tales

Habilidades contempladas na Tarefa Matemática (considerar a Base Nacional Comum Curricular):

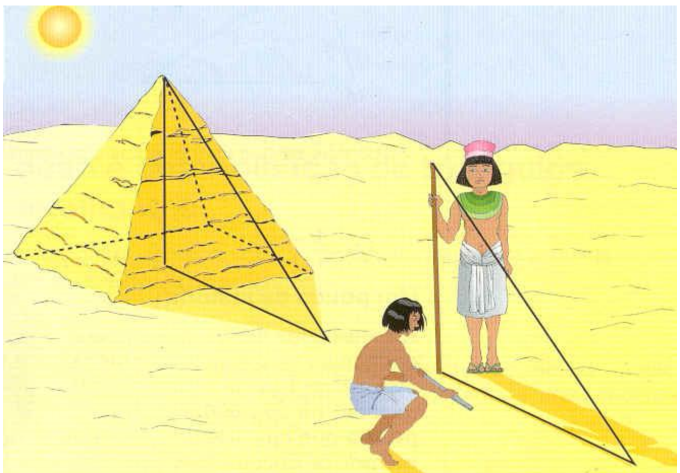
- EF09MA12 - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Objetivos:

1. **Geral**
    a. Revisar o conteúdo de semelhança de triângulos já visto no primeiro semestre.
    b. Definir as condições de semelhanças.

2. **Específico**
    a. Visualizar o conceito de semelhança de triângulos em diversas situações.
    b. Utilizar os critérios de semelhança de triângulos para a resolução de problemas.

A Fim de simular os passos do método que Tales realizou para determinar a altura do pirâmide de Quéops, os alunos passarão por 3 estágios de construção de pensamento: O primeiro sendo de contextualização histórica, dando importância ao conteúdo e sua contribuição para matemática, o segundo passo sendo uma simulação guiada, onde, com auxílio de uma lanterna e dois objetos pequenos de alturas diferentes, podemos visualizar de diferentes perspectivas o método de semelhança aplicado por Tales. E por último, a aplicação na prática, onde os alunos, juntos de fitas métricas, irão determinar a altura de postes e mastros da escola.



Resolução detalhada da Tarefa Matemática:

(5 min) Apresentação de vídeo do *Youtube* sobre a história de Tales de Mileto e o desafio determinar a altura da pirâmide de Quéops.

(5 min) Com o auxílio de uma lanterna, montar uma simulação com pequenos objetos do que será realizado do lado de fora da sala junto aos alunos.

(5 min) Dividir a sala em grupos de 3 estudantes, definindo suas funções: um será responsável pela fita métrica e medir as sombras dos objetos de estudos, um será responsável por coletar as informações e desenhar um rascunho, o terceiro será o auxiliador, podendo ajudar em alinhar a fita métrica, organizar e verificar as contas.

(20 min) Momento de protagonismo dos alunos: cada grupo terá um integrante ou objeto alinhado com a sombra do mastro ou poste, onde o segundo integrante medirá as sombras e alturas enquanto o terceiro anotará todas as informações. Ao fim, cada grupo, irá calcular a altura do objeto desejado e comparar com os demais grupos.

(5 min) Momento de retorno à sala de aula e discussão com os alunos sobre suas percepções e dúvidas.

Antecipações das possíveis dúvidas e dificuldades dos estudantes quanto resolverem a Tarefa Matemática.

1. **Dúvidas:**
    a. Como alinhar corretamente com a sombra.
    b. A partir de qual ponto deve-se começar a medir a sombra
    c. Se pode arredondar.
2. **Dificuldades:**
    a. Como medir corretamente usando uma fita métrica
    b. Anotar os dados ou errar os valores.

APÊNDICE C: TAREFA MATEMÁTICA 3 (PARTE 1)

Título da Tarefa Matemática: Construção do Teodolito Caseiro

Habilidades contempladas na Tarefa Matemática (considerar a Base Nacional Comum Curricular):

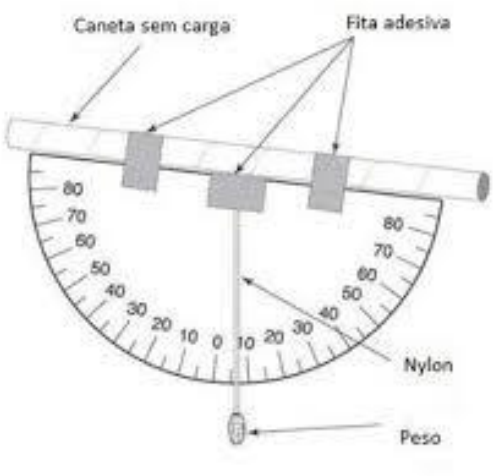
- **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Objetivos:

1. **Geral**
    a. Aprender sobre os instrumentos utilizados na construção civil e na época das navegações
    b. Aplicar os conceitos de semelhanças a trigonometria no triângulo retângulo.

2. **Específico**
    a. Compreender e aplicar a tabela trigonométrica em contextos reais.

Com o objetivo de proporcionar uma aplicação prática de trigonometria aos alunos, a construção do material auxilia na transformação do conteúdo abstrato para o concreto e palpável aos alunos. Tendo eles como protagonista do próprio ensino, ao manusear o teodolito caseiro, conseguem compreender a correlação entre o ângulo e o ponto de observação desejado assim como concatenar o conteúdo de semelhança de triângulos e a trigonometria num contexto prático.



Passo a Passo:

1º Passo: esse passo será responsabilidade do professor. Com o auxílio de uma furadeira elétrica fazer um orifício na parte central do transferidor,

2° Passo: Amarrar um barbante de 45 centímetros passando no orifício feito no 1º passo.

3° Passo: Cortar o isopor em um quadrado de 12cm x 12cm usando o estilete;

4º Passo: Com o uso da cola de silicone, colar o transferidor no isopor de modo que o mesmo fique centralizado. Aguardando três minutos após fixar o transferidor no isopor, para secagem da cola.

5º Passo: Com o uso da cola de silicone, colar a vareta de fixação de balões ou canudo no transferidor, de modo que ele passe pelo diâmetro do transferidor, ou seja, fique sobre os ângulos de 0° e 180°. Aguardando três minutos após fixar a vareta de fixação de balões no transferidor, para secagem da cola.

6° Passo: Amarrar na outra extremidade do barbante um peso para manter o fio esticado.

7° Passo: Livre para ornamentação do "teodolito caseiro". Esse passo também pode ser realizado antes do passo 4.

8° Passo: Teste de qualidade do "teodolito caseiro".

Resolução detalhada da Tarefa Matemática:

(10 min) Apresentação de vídeo do *Youtube* sobre a invenção do teodolito, suas aplicações e sobre seu manuseamento.

(5 min) Divisão do material para cada grupo pré-determinado na atividade 1 e explicar o passo a passo.

(30 min) Observar e orientar os alunos durante as etapas de construção, verificando a participação e compreensão do grupo sobre o material e manuseio.

(5 min) Verificação de montagem, manuseio e qualidade, ajudando nos últimos detalhes, caso seja necessário.

APÊNDICE C: TAREFA MATEMÁTICA 3 (PARTE 2)

Título da Tarefa Matemática: Aplicação do Teodolito Caseiro

Habilidades contempladas na Tarefa Matemática (considerar a Base Nacional Comum Curricular):

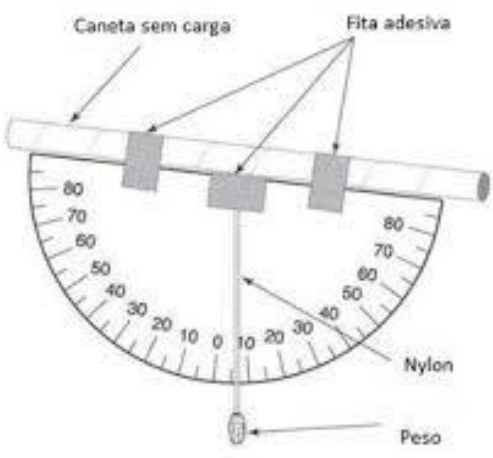
- **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Objetivos:

1. **Geral**
    a. Aprender sobre os instrumentos utilizados na construção civil e na época das navegações
    b. Aplicar os conceitos de semelhanças a trigonometria no triângulo retângulo.

2. **Específico**
    a. Compreender e aplicar a tabela trigonométrica em contextos reais.

Com o objetivo de proporcionar uma aplicação prática de trigonometria aos alunos, a construção do material auxilia na transformação do conteúdo abstrato para o concreto e palpável aos alunos. Tendo eles como protagonista do próprio ensino, ao manusear o teodolito caseiro, conseguem compreender a correlação entre o ângulo e o ponto de observação desejado assim como concatenar o conteúdo de semelhança de triângulos e a trigonometria num contexto prático.



Resolução detalhada da Tarefa Matemática:

(15 min) Com o teodolito em mãos, direcionar os grupos para o lado externo da escola e quando todos estiverem prestando atenção, demonstrar como mirar no objeto desejado corretamente, assim como mostrar para o aluno do suporte como anotar e mensurar o ângulo de inclinação

(25 min) Momento de protagonismo dos alunos: cada grupo terá um integrante como manuseador do teodolito, tendo como objetivo mirar e ficar de modo estático no objeto calculado na tarefa 1 enquanto o segundo integrante do grupo deverá medir a distância do teodolito ao objeto desejado. Por fim, o terceiro anotará todas as informações. Ao fim, cada grupo, irá calcular a altura do objeto desejado utilizando uma tabela trigonométrica ou uma calculadora científica.

(5 min) Momento de retorno à sala de aula e discussão com os alunos sobre suas percepções e dúvidas.

Antecipações das possíveis dúvidas e dificuldades dos estudantes quanto resolverem a Tarefa Matemática.

1. **Dúvidas:**
    a. Como funciona a medição dos ângulos?
    b. Por que os resultados das atividades, para alguns, foram diferentes?
    c. Se pode arredondar o ângulo ou a medição

2. **Dificuldades:**
    a. Como medir corretamente usando uma fita métrica
    b. Anotar os dados ou errar os valores.
    c. Mirar com precisão

ANEXO A: TAREFA 3 - PROVA BIMESTRAL

POLÍCIA MILITAR DISTRITO FEDERAL	GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL POLÍCIA MILITAR DO DISTRITO FEDERAL **COLÉGIO MILITAR TIRADENTES**	
	A3s2 – Matemática – 8º ano	
Professores:	**Valor máximo: 30 Pontos**	**Nota:**
Aluno(a): ______________________________ Nº:_______ Turma: _______		Data de aplicação **28/11/2024**

01. Use somente caneta **azul ou preta** para registro das respostas, o que for escrito a lápis será desconsiderado na correção;
02. NÃO é permitido o uso de calculadora, agenda eletrônica, telefone celular, *tablet, smartphone ou* qualquer outro aparelho eletrônico;
03. Não utilize meios ilícitos (cola), pois se isto ocorrer, sua prova será recolhida e lhe será atribuída nota zero, sem direito à 2ª Chamada;
04. Revise toda a prova antes de entregá-la, verificando se não há questões em branco ou incompletas na FOLHA DE RESPOSTAS DEFINITIVA;
05. Cada questão de múltiplas alternativas e cada item de Certo ou Errado vale 2 pontos.

Questão 1

Considere as afirmações a seguir sobre equação do 1º grau com duas incógnitas:

I. Uma das soluções da equação $2x - 3y = 5$ é o par ordenado $(4, -1)$.
II. O par ordenado $(1, -2)$ é uma solução da equação $4x + 3y = -2$.
III. $x = 10$ e $y = -9$ satisfazem a equação $5x - 2y = 58$.

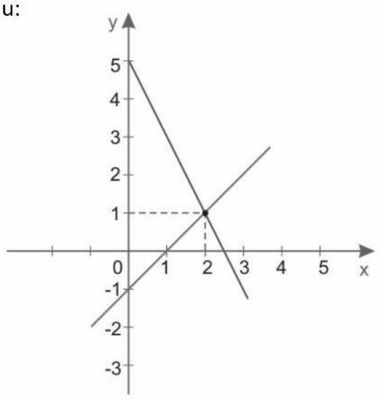
Sobre as afirmações acima, pode-se dizer que:

A Apenas I e II estão corretas.
B Apenas I e III estão corretas.
C Apenas II e III estão corretas.
D Apenas II está correta.
E Apenas III está correta.

Espaço livre

Questão 2

Júlia precisava resolver um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas e para isso, decidiu utilizar o método gráfico. Observe abaixo o gráfico que Juliana construiu:



De acordo com o gráfico acima, qual sistema de equações Júlia resolveu?

A $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

B $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$

D $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases}$

E $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$

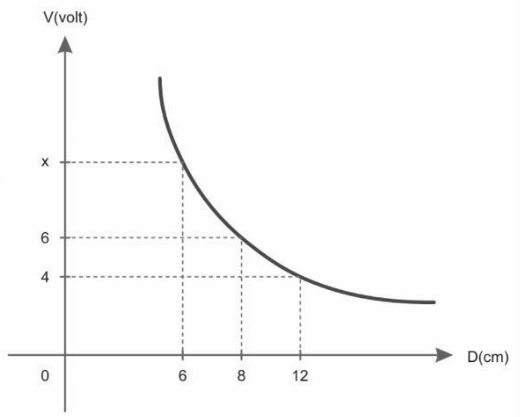
Questão 3

$(FGV - adaptada)$ Num pátio existem carros e motos. O número total de rodas é 130 e o número de motos é o triplo do número de carros. Então, o número total de veículos que se encontram no pátio é:

A 42.
B 48.
C 50.
D 52.
E 54.

Questão 4

O gráfico a seguir refere-se a duas grandezas inversamente proporcionais.



O valor de x é:

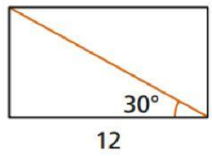
A 12.
B 11.
C 10.
D 9.
E 8.

Espaço livre

Questão 5

Qual a área do retângulo a seguir, sabendo que a unidade de medida é o metro?

Considere: $tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$



A $48\sqrt{3}$
B $32\sqrt{3}$
C $32\frac{\sqrt{3}}{3}$
D $16\sqrt{3}$
E $8\sqrt{3}$

Questão 6

Um arquiteto, projetando uma casa para venda, decidiu ladrilhar a parte da frente da casa com algumas pedras de concreto no formato de losangos, todas iguais. Ele solicitou, na indústria, medidas específicas para esse losango. As instruções eram que o perímetro do losango teria que ser, necessariamente, igual a $60\ cm$, e que a diagonal maior precisaria ser o triplo da menor. Nessas condições, a área desse losango era igual a:

A $90\ cm^2$
B $120\ cm^2$
C $135\ cm^2$
D $155\ cm^2$
E $175\ cm^2$

Espaço livre

Questão 7

O CMT contratou a *Oruam Engenharia* para projetar a piscina na modalidade semi olímpica. A empresa apresentou o projeto para que o comando pudesse analisar e, assim, começar a obra. A piscina, que está representada na imagem abaixo, possui as seguintes dimensões: $7\ m$ de comprimento, $4\ m$ de largura e $1,5\ m$ de altura (profundidade).

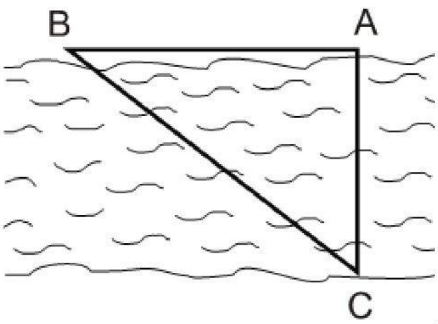
Quantos litros de água serão necessários para que esta piscina fique completamente cheia?

A $4,2\ L$
B $42,2\ L$
C $422,20\ L$
D $4200\ L$
E $42000\ L$

Questão 8

O professor Gabriel Teixeira, a fim de demonstrar uma das aplicações de trigonometria, decidiu por calcular a largura do lago paranoá. Para isso, ele toma os pontos A e C que estão em margens opostas do rio. Em seguida, ele caminha de A até o ponto B, distante 120 metros, de tal forma que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares. Usando um instrumento de precisão, a partir do ponto B ele visa o ponto C e em seguida o ponto A, determinando o ângulo $C\hat{B}A$ que mede $53°$, possibilitando, assim, mensurar a largura do rio. O valor determinado pelo professor Gabriel Teixeira corresponde, em metros, a:

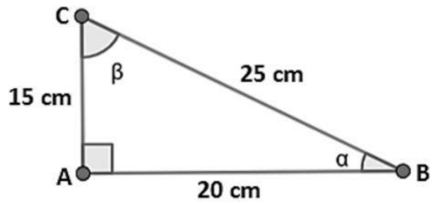
Considere: cos (53°)= $0,60$, sen (53°)= $0,80$.



A 78 metros.
B 96 metros.
C 100 metros.
D 160 metros.
E 200 metros.

Questão 9

Observe o triângulo a seguir.



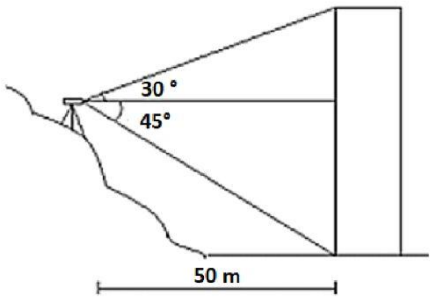
Em relação ao triângulo ΔABC acima, o resultado da expressão $sen\ (\beta)\ +\ cos\ (\alpha)$ é igual:

A $\frac{8}{3}$.
B $\frac{7}{5}$.
C $\frac{8}{5}$.
D $\frac{6}{5}$.
E 1.

Espaço livre

Questão 10

Considere que um engenheiro tenha como objetivo determinar a altura de um prédio utilizando um teodolito que está a 50 metros de distância e forma ângulos de $30°$ e $45°$ com o topo e base do prédio, respectivamente, conforme a imagem abaixo.

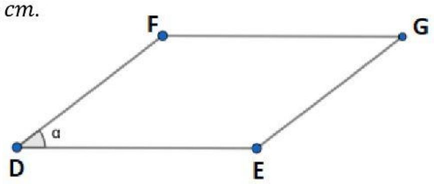


Considerando $\sqrt{3} = 1,71$, a altura do prédio, em metros, é igual a:

A $50,05$.
B $78,50$.
C $91,80$.
D $105,50$.
E $125,00$.

Espaço livre

A partir dos seus estudos sobre quadriláteros, considere que os lados do paralelogramo $DEGF$ estão na proporção de 4 para 3 e seu perímetro é igual a $56\ cm$.



Tendo como referência a imagem e os dados apresentados, julgue os itens de **11 a 15**.

11 Para qualquer ângulo agudo α, é correto afirmar que $sen^2(\alpha) - cos^2(\alpha) = 1$.

12 Caso um losango tivesse o perímetro com mesmo valor numérico que o perímetro do paralelogramo $DEGF$, seus lados seriam iguais a $14\ cm$.

13 O paralelogramo $DEGF$ possui dimensões iguais a $16\ cm$ e $12\ cm$.

14 Caso o seno do ângulo α seja igual a $0,75$, a área do paralelogramo é igual a $192\ cm^2$.

15 Caso o ângulo α tenha cosseno igual a 0,6, é correto afirmar que $\alpha < 45°$.

Espaço livre