



Universidade de Brasília - UnB  
Instituto de Ciências Exatas - IE  
Departamento de Matemática da UnB - MAT/UnB  
Programa de Doutorado em Matemática

RODOLFO FERREIRA DE OLIVEIRA

Existência e multiplicidade de soluções para equações diferenciais parciais  
elípticas

Brasília/DF

2025

RODOLFO FERREIRA DE OLIVEIRA

Existência e multiplicidade de soluções para equações diferenciais parciais elípticas

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado

Brasília/DF

2025

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Ata Nº: 09**

Aos dezoito dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e cinco, instalou-se a banca examinadora de Tese de Doutorado do aluno Rodolfo Ferreira de Oliveira, matrícula 20/0113119. A banca examinadora foi composta pelos professores Dr. Giovany de Jesus Malcher de Figueiredo (membro interno - MAT/UnB), Dr. Romildo Nascimento de Lima (membro externo à instituição - UFCG), Dr. Edcarlos Domingos da Silva (membro externo à instituição - UFG), Dr. Willian Cintra da Silva (Suplente - membro interno -MAT/UnB) e Dr. Marcelo Fernandes Furtado (orientador/presidente - MAT/UnB). O discente apresentou o trabalho intitulado "Existência e multiplicidade de soluções para equações diferenciais parciais elípticas".

Concluída a exposição, procedeu-se a arguição do(a) candidato(a), e após as considerações dos examinadores o resultado da avaliação do trabalho foi

(x ) Pela aprovação do trabalho;

( ) Pela aprovação do trabalho, com revisão de forma, indicando o prazo de até 30 dias para apresentação definitiva do trabalho revisado;

( ) Pela reformulação do trabalho, indicando o prazo de (Nº DE MESES) para nova versão;

( ) Pela reprovação do trabalho, conforme as normas vigentes na Universidade de Brasília.

Conforme os Artigos 34, 39 e 40 da Resolução 0080/2021 - CEPE, o(a) candidato(a) não terá o título se não cumprir as exigências acima.

Dr. Romildo Nascimento de Lima , UFCG  
Examinador Externo à Instituição

Dr. Edcarlos Domingos da Silva , UFG  
Examinador Externo à Instituição

Dr. Giovany de Jesus Malcher de Figueiredo, UnB  
Examinador Interno

Dr. Willian Cintra da Silva , UnB  
Examinador Interno (Suplente)

Dr. Marcelo Fernandes Furtado , UnB  
Presidente

Rodolfo Ferreira de Oliveira  
Doutorando



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Fernandes Furtado, Professor(a) de Magistério Superior do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas**, em 20/08/2025, às 15:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos da Silva, Usuário Externo**, em 20/08/2025, às 15:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **ROMILDO NASCIMENTO DE LIMA, Usuário Externo**, em 20/08/2025, às 16:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Coordenador(a) de Pós-Graduação do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas**, em 20/08/2025, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **Willian Cintra da Silva, Professor(a) de Magistério Superior do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas**, em 20/08/2025, às 16:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Ferreira de Oliveira, Usuário Externo**, em 20/08/2025, às 18:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento na Instrução da Reitoria 0003/2016 da Universidade de Brasília.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.unb.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.unb.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **12890518** e o código CRC **DB1171F1**.

Dedico este trabalho à minha mãe, Joana, e à minha esposa, Sharmenya, as duas maiores apoiadoras e incentivadoras em todas as minhas conquistas.

## AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, quero começar agradecendo a Deus por todas as graças que realizou em minha vida e, de modo mais específico, por ter me permitido alcançar esse título de Doutor em Matemática.

Agradeço a minha mãe, Joana D'arc, por tudo o que fez para cuidar de mim e do meu irmão durante todas as nossas vidas. Por todas as vezes que nos motivou, nos encorajou, torceu e rezou por nós. Mãe, a senhora é minha fortaleza e agradeço a Deus pela dádiva de ser seu filho.

Agradeço ao meu falecido pai, Raimundo, por tudo o que me ensinou enquanto em vida. Apesar de já se fazerem 15 anos de sua perda, sua memória sempre estará guardada em mim.

Agradeço à minha linda esposa, Sharmenya, por todo o amor, carinho, afeto e companheirismo nesses quase 10 anos de jornada juntos. Eu tenho a certeza que sou imensamente abençoado por ter você como companheira da minha vida. Te amo.

Agradeço ao meu irmão, Pedro Henrique, por ser esse parceiro para todas as horas. Meu irmão que é Doutor em Física, sempre um orgulho e inspiração, mas mais do que isso, é um amigo verdadeiro. Obrigado por tudo, mano.

Agradeço aos meus pets, Yoru, Valentina e Stark, os quais são nossa felicidade, nosso aconchego diário e a solução mais simples, eficaz e gentil para todos os problemas que podem vir a aparecer no dia a dia. Todos os dias eles nos ensinam sobre o mais puro amor.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial, aos meus amigos de mais longa data, Mayferson, Isael, Luan, Ricardo e Fabricio, esses dois últimos que são, inclusive, meus padrinhos de casamento. Também agradeço às grandes amigas que ganhei através de minha esposa, Jaylla, Lygia e Magna, as duas primeiras que são nossas madrinhas de casamento. E, claro, agradeço também à todas as amizades que fiz durante o período de meu doutorado e àquelas que mantive desde a época do mestrado. Muito obrigado à todos por toda a parceria, amizade e pelas ótimas resenhas.

Agradeço muito ao meu orientador, Marcelo, que aceitou continuar trabalhando comigo por mais esses 4 anos, que me ensinou bastante, mas que mais importante do que isso, também foi extremamente atencioso e compreensivo, permitindo que eu pudesse iniciar à trabalhar, mesmo que com isso, acabasse tendo que dedicar menos tempo à pesquisa.

Agradeço também ao professor Willian Cintra, que foi peça fundamental para a elaboração dessa tese, devido à grande colaboração que desenvolvemos juntos. Agradeço por todos os ensinamentos e também pela paciência que tivera comigo.

Agradeço aos demais membros da banca, pelo compromisso com meu trabalho e por terem dedicado um pouco de suas agendas apertadas para revisá-lo e me ajudar a corrigir os eventuais erros.

Agradeço também à todos os colegas e amigos que fiz na escola CEF 102 Norte, meu amado local de trabalho. Em especial, agradeço aos meus queridos alunos, por terem me propiciado alcançar a realização profissional enquanto professor.

Agradeço ao Programa de Doutorado da UnB pela oportunidade de realizar este curso e esta defesa.

Agradeço finalmente ao CNPq, que fomentou quase todo o meu período de Doutorado, para que eu pudesse permanecer em Brasília e lograr essa conquista.

*No caminho da vida, como em todos  
os caminhos, aquilo que verdadeiramente  
conta é não perder de vista a meta.*

*Papa Francisco*



## RESUMO

Neste trabalho apresentamos diversas classes de problemas elípticos não-lineares e encontramos para eles resultados de existência, não-existências, multiplicidade e regularidade de soluções. Utilizamos principalmente técnicas de Métodos Variacionais e Métodos Topológicos, mas também fazemos uso de técnicas da Teoria de Morse e de Regularidade Elíptica para Equações Diferenciais Parciais.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Existência, não-existência e multiplicidade de soluções. Métodos Variacionais. Métodos Topológicos.

## ABSTRACT

In this work, we present various classes of nonlinear elliptic problems and obtain results on the existence, non-existence, multiplicity, and regularity of solutions. We primarily use techniques from Variational Methods and Topological Methods, but we also employ techniques from Morse Theory and Elliptic Regularity for Partial Differential Equations.

**Keywords:** Elliptical Partial Differential Equations. Existence, non-existence and multiplicity of solutions. Variational Methods. Topological Methods.

## SUMÁRIO

Introdução	1
1 Problemas com fluxo superlinear na fronteira	13
1.1 Prova do Teorema A . . . . .	15
1.1.1 Primeira solução . . . . .	16
1.1.2 Segunda solução . . . . .	20
1.2 Prova do Teorema B . . . . .	29
1.2.1 Solucionando um problema modificado . . . . .	29
1.2.2 Estimativas à priori . . . . .	34
2 Problemas com fluxo côncavo na fronteira	39
2.1 Resultados Auxiliares . . . . .	41
2.1.1 Um Resultado de Regularidade . . . . .	41
2.1.2 O problema de autovalor de Steklov . . . . .	44
2.2 Prova do Teorema C . . . . .	46
2.3 Mínimos locais nas topologias $H^1$ e $C^1$ . . . . .	55
2.4 Prova do Teorema D . . . . .	64
2.5 Prova do Teorema E . . . . .	69
3 Problema de autovalor com operador quase-linear	75
3.1 Método de Sub-Supersolução . . . . .	77
3.2 Abordagem via Bifurcação . . . . .	83
3.2.1 Bifurcação a partir da solução trivial . . . . .	85
3.2.2 Bifurcação no infinito . . . . .	87
3.2.3 Prova do Teorema I . . . . .	91
3.3 Direção de Bifurcação e Multiplicidade de Soluções . . . . .	94
Considerações Finais	100
Bibliografia	101

## LISTA DE NOTAÇÕES E SÍMBOLOS

- $o_n(1)$  denota um termo que se aproxima de zero quando  $n \rightarrow +\infty$ .
- $o_\epsilon(1)$  denota um termo que se aproxima de zero quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .
- Para  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^N$  (não necessariamente limitado), denota-se por  $\nu$  o vetor normal unitário exterior à  $\partial\Omega$ .
- Para  $t \in \mathbb{R}$  um parâmetro real e  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aplicações, escrevemos  $f(t) = O(g(t))$  para simbolizar que  $|f(t)| \leq Cg(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , isto é, que  $f$  têm crescimento controlado por  $g$ . Quando  $f$  é limitada, escrevemos  $f(t) = O(1)$ .
- Para  $p \geq 1$ , denota-se por  $p'$  o expoente conjugado de  $p$ , o qual satisfaz  $p' = +\infty$  se  $p = 1$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  se  $p > 1$ .
- Para  $k \geq 0$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , consideramos  $C^k(\Omega)$  como o espaço das funções definidas em  $\Omega$ ,  $k$  vezes diferenciáveis, de maneira que todas as suas derivadas parciais até a ordem  $k$  sejam contínuas. No caso em que  $k = 0$ , este espaço corresponde ao espaço das funções contínuas. Quando  $\Omega$  é um aberto limitado, podemos definir sobre  $C^k(\Omega)$  a norma

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|,$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  é um multi-índice e  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ . Além disso, definimos

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$$

e  $C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$ , onde  $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$  é o suporte de  $u$ .

- Seja  $\alpha \in (0, 1)$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Definimos o espaço de Hölder

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < +\infty\},$$

em que

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C^k} + \sum_{|\beta|=k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$  é um multi-índice com  $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N$ .

- Seja  $1 \leq p < +\infty$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto mensurável. Definimos o espaço de Lebesgue

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \|u\|_{L^p(\Omega)} < +\infty\},$$

em que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Quando  $p = +\infty$ , definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\},$$

onde

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C, \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}.$$

- Para  $k \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p < +\infty$ , consideramos o espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\},$$

em que  $D^\alpha$  denota a  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$ , para cada  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  multi-índice com  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N \leq k$ . Neste caso, a norma de Sobolev é dada por

$$\|u\|_{k,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

# Introdução

Neste trabalho, estudamos diversas classes de problemas elípticos. Em cada uma delas, trabalharemos com técnicas únicas e muito diferentes entre si. Deste modo, organizaremos esse texto em 3 capítulos independentes, para buscar trazer uma melhor sistematização dos resultados. As três seções a seguir apresentam os resultados de cada um destes capítulos.

## Problemas com fluxo superlinear na fronteira

No primeiro capítulo, começamos por estudar

$$\begin{cases} -\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^N, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu a(x')|u|^{q-2}u + b(x')|u|^{2_*-2}u, & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N \sim \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\mathbb{R}_+^N := \{(x', x_N) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0\}$  é o semi-espaco superior e  $\nu$  é o vetor normal exterior à fronteira  $\partial\mathbb{R}_+^N$ , a qual pode ser identificada com o espaco  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Além disso,

$$1 < q < 2, \quad \mu > 0, \quad 2_* := \frac{2(N-1)}{N-2}$$

e  $a, b : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$  são potenciais que satisfazem

$$(a_0) \quad a \in L_K^{\sigma_q} \cap L_{\text{loc}}^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1}), \text{ com } (2_*/q)' < \sigma_q \leq (2/q)';$$

$$(b_0) \quad b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1});$$

(ab) existem  $\delta > 0$ ,  $b_0 > 0$  e  $\gamma > N-1$  tais que

$$B'_\delta := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x'| < \delta\} \subset (\Omega_a^+ \cap \Omega_b^+)$$

e

$$\|b\|_\infty := \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \leq b(x') + b_0|x'|^\gamma, \quad \text{q.t.p em } B'_\delta,$$

em que  $\Omega_a^+$  e  $\Omega_b^+$  representam os subconjuntos de  $\mathbb{R}^{N-1}$  em que  $a, b$  são positivas.

O primeiro resultado provado no Capítulo 1 é o seguinte:

**Teorema A.** *Suponha que  $N \geq 4$  e que  $a$  e  $b$  satisfazem  $(a_0)$ ,  $(b_0)$  e  $(ab)$ . Então, existe  $\mu^* > 0$  tal que, para todo  $\mu \in (0, \mu^*)$ , o problema (1) possui pelo menos duas soluções fracas não-nulas e não-negativas.*

**Observação.** *Com as hipóteses acima, no caso em que  $N = 3$ , é possível obter a existência de ao menos uma solução fraca não-nula e não-negativa para valores pequenos de  $\mu > 0$ . Na realidade, ao invés da condição  $(ab)$ , basta nesse caso que o conjunto  $\Omega_a^+$  tenha interior não-vazio.*

A primeira solução é obtida com um argumento de minimização, enquanto a segunda requer argumentos mais sofisticados, uma vez que a imersão do traço perde a compacidade no expoente crítico. O ponto principal para superar essa dificuldade vem de estimativas refinadas a partir de uma certa modificação das funções *instanton* exploradas por Escobar em [38] e por Beckner em [15].

O funcional energia associado ao problema (1) é claramente par. Consequentemente, assim como em Bartsch e Willem [14], seria esperado obter uma quantidade infinita de soluções (sem sinal prescrito). No nosso segundo resultado, inspirados pelos trabalhos [55, 74], substituímos o termo crítico  $b(x')|u|^{2^*-2}u$  por uma função mais geral  $f$  que seja ímpar perto do zero. Mais especificamente, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^N, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu a(x')|u|^{q-2}u + f(u), & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases}, \quad (2)$$

em que  $\mu$  e  $q$  permanecem como antes e as funções  $a, f$  satisfazem

$$(f_0) \quad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

$$(f_1) \quad \text{existe } p \in (2, 2_*) \text{ de modo que}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0;$$

$$(\tilde{a}_0) \quad a \in L_K^{\sigma_q} \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}), \text{ em que } (p/q)' < \sigma_q \leq (2/q)';$$

$(a_1)$   $\Omega_a^+$  possui um ponto interior.

Usando as condições acima, provamos o seguinte:

**Teorema B.** *Suponha que  $a$  e  $f$  satisfazem  $(\tilde{a}_0)$ ,  $(a_1)$ ,  $(f_0)$  e  $(f_1)$ . Além disso, suponha que  $f$  é ímpar no intervalo  $[-C_{N,p}, C_{N,p}]$ , em que*

$$C_{N,p} := \max \left\{ 1, 2S_{2_*}^{-1} \right\}^{1/(2_*-p)} \left( \frac{2_* + 2 - p}{2} \right)^{(2_*+2-p)/2(2_*-p)^2}.$$

*Então existe  $\bar{\mu} > 0$  tal que, para cada  $\mu \in (0, \bar{\mu})$ , o problema (2) possui um número infinito de soluções fracas.*

A prova também é variacional, porém apresenta um desafio significativo a ser superado. Se  $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ , o funcional energia formal associado ao problema (2) possui o termo  $\int F(u)d\sigma$ , o qual pode ser infinito, uma vez que não se tem controle sobre o comportamento de  $f$  no infinito. Mesmo na definição de solução fraca, temos que considerar que estamos com soluções no sentido distribucional. Para superar essa dificuldade, adotamos ideias dos artigos [10, 13, 55, 74]. Isto envolve aplicar um truncamento à função  $f$  de modo que o funcional truncado seja bem definido e coercivo em um espaço de Sobolev apropriado. Depois de mostrar a existência de infinitos pontos críticos para este funcional, aplicamos uma variação da Iteração de Moser [60] para provar que, se  $\mu > 0$  é pequeno, estes pontos críticos possuem norma  $L^\infty$  pequena na fronteira e, portanto, são soluções fracas do problema original.

Os dois problemas que estudamos neste capítulo recaem numa classe mais geral de problemas que pode ser modelada por

$$-\Delta v = g(x, v, \nabla v), \quad \text{em } \mathbb{R}_+^N, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = h(x', v), \quad \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1}.$$

Nesse sentido, falando um pouco sobre estudos relacionados, os autores em [42] consideraram o problema acima com

$$g(x, v, \nabla v) = \mu v + \frac{1}{2}(x \cdot \nabla v), \quad h(x', v) = |v|^{q-2}v,$$

com  $2 < q < 2_*$ . Além de obter resultados de existência de soluções para certos valores de  $\mu > 0$ , eles mostraram a relação entre o problema e a existência de soluções auto-similares para a equação do calor não-linear

$$w_t - \Delta w = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}_+^N \times (0, +\infty), \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = |w|^{q-2}w, \quad \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times (0, +\infty).$$

Para outras escolhas apropriadas das funções  $g$  e  $h$ , este problema modela problemas



em glaciologia [66], genética populacional [9], mecânica de fluídos não-Newtonianos [35], elasticidade não-linear [29], entre outros. De uma perspectiva matemática, também se relaciona ao estudo de obter as melhores constantes em imersões de traço de Espaços de Sobolev [34, 38] assim como no estudo de deformação conforme de variedades Riemannianas [39, 40].

Em um trabalho recente, Furtado e Silva [47] consideraram

$$g(x, v, \nabla v) = \frac{1}{2}(x \cdot \nabla v), \quad h(x', v) = \mu|v|^{q-2}v + |v|^{2^*-2}v,$$

com  $2 \leq q < 2_*$ , e mostraram a existência de soluções não-nulas em dois casos:  $2 < q < 2_*$ ,  $\mu > 0$ ; e  $q = 2$ ,  $\mu \in (0, \mu_1)$ , onde  $\mu_1 > 0$  é o primeiro autovalor de um problema linear associado. Em virtude destes resultados, é natural perguntar o que acontece no caso sublinear  $1 < q < 2$ . Daremos uma resposta parcial ao que acontece nesse caso ao provar o Teorema A.

Devido à natureza assimétrica do termo de fronteira não linear, os nossos problemas recaem numa classe conhecida como problemas do tipo côncavo-convexo. Com o objetivo de fazer uma perspectiva histórica, podemos considerar:

$$-\Delta u = g(x, u), \text{ em } \Omega, \quad \alpha_1 u + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x, u), \text{ sobre } \partial\Omega,$$

em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , é um domínio limitado. No seu artigo clássico, Ambrosetti, Brezis e Cerami [7] obtiveram duas soluções positivas quando  $\alpha_2 = 0$ ,  $h \equiv 0$ , e  $g(x, s) = \mu s^{q-1} + s^{p-1}$ , com  $1 < q < 2 < p \leq 2^* := 2N/(N-2)$ , e  $\mu > 0$  é pequeno. Em [44], de Figueiredo, Gossez e Ubilla generalizaram esses resultados ao considerar  $g(x, s) = \mu c(x)|s|^{q-2}s + d(x)|s|^{p-2}s$ , com  $c$  e  $d$  não possuindo sinal constante. No contexto de condições de fronteira de Dirichlet, podemos mencionar [4, 63, 75] e suas referências.

Para o caso Neumann, quando  $\alpha_1 = 0$ , podemos citar o trabalho de Azorezo, Peral e Rossi [12], que consideraram  $g(x, s) = |s|^{p-2}s - s$ ,  $h(x, s) = \mu|s|^{q-2}s$  e obtiveram resultados similares aos de [7]. Em [48], os autores consideraram  $g \equiv 0$  e  $h(x, s) = \mu c(x)|s|^{q-2}s + d(x)|s|^{p-2}s$ , com  $1 < q < 2 < p < 2_*$ . Os potenciais  $c$  e  $d$  são limitados e verificam as seguintes condições de sinal:  $\int_{\partial\Omega} c(x)d\sigma < 0$ ,  $\int_{\partial\Omega} d(x)d\sigma \neq 0$ . Sob outras condições mais técnicas, eles mostraram a existência de duas soluções positivas se  $\mu > 0$  é pequeno. Alguns outros resultados acerca de existência de infinitas soluções podem ser encontrados [13, 49, 55, 73, 74] e em suas referências.

Os dois resultados provados neste capítulo estendem e/ou complementam os trabalhos acima mencionados de diversas formas: consideramos um operador diferente, potenciais que podem mudar de sinal, o semi-espaço superior e condições locais de simetria.

Eles foram recentemente publicados no artigo [46].

Vale ressaltar que uma versão inicial do Teorema A está explorada com muitos detalhes na dissertação de mestrado do estudante (veja [62]). Lá, provamos este resultado para  $N \geq 5$ . Aqui, conseguimos estender também o resultado para  $N = 4$ , deixando-o mais completo.

## Problemas com fluxo côncavo na fronteira

No segundo capítulo, investigamos a multiplicidade de soluções para duas classes de problemas elípticos com condição de Neumann não-linear contendo um termo natureza côncava. Como comentado antes, no Capítulo 1 também estudamos problemas com a presença desse termo, que embora sejam voltados ao contexto de problemas côncavo-convexos, possuem similaridades com as duas equações que tratamos aqui.

Nas últimas décadas, esse tipo de não-linearidade tem ganhado destaque nas pesquisas. Trabalhos como os de Abreu, Carrião e Miyagaki [1], Perera [68] e Wang [74] contribuíram de forma decisiva para a consolidação de métodos voltados à existência de múltiplas soluções para esses tipos de problema.

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio regular,  $1 < p < +\infty$ ,  $-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  o operador  $p$ -laplaciano e o seguinte problema não-linear

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0, & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{q-2}u + g(x', u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

com  $\lambda > 0$ , com  $\lambda > 0$ ,  $1 < q < p$  e  $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cumprindo

( $g_0$ )  $g \in C(\partial\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

( $g_1$ ) existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x', s) = g(x', -s)$  para todo  $x' \in \partial\Omega$  e para todo  $s \in [-\delta, \delta]$ ;

( $g_2$ ) vale

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{g(x', s)}{|s|^q} = 0, \quad \text{uniformemente em } x' \in \partial\Omega.$$

O primeiro resultado do Capítulo 2 é:

**Teorema C.** *Suponha que  $g$  satisfaz ( $g_0$ )-( $g_2$ ). Então, para qualquer  $\lambda > 0$ , o problema (3) admite uma sequência  $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$  de soluções fracas tais que  $\|u_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

A motivação para estudar este problema foi o trabalho de Z-Q. Wang [74], em que o autor estuda os efeitos de uma não-linearidade côncava e ímpar perto da origem atuando juntamente com a potência côncava pura. Neste trabalho, o autor mostrou a existência de uma quantidade infinita de soluções com norma  $L^\infty$  pequena. Com as técnicas desenvolvidas por ele, somos capazes de definir um truncamento conveniente que permite deixar a não-linearidade côncava em toda a parte. Isso, somado à paridade e ao emprego de técnicas de simetria, garante uma infinidade de soluções.

Assim como no segundo problema do Capítulo 1, também não temos aqui hipóteses para o comportamento do termo não-linear no infinito, o que demandou a aplicação de uma técnica de regularidade combinada com estimativas a priori para garantir que as soluções do problema truncado são do original. No entanto, não fizemos iteração de Moser, como no primeiro capítulo. Ao invés disso, mostramos a validade um resultado que pode ser aplicado para realizar um iteração do tipo bootstrap para problemas com o  $p$ -laplaciano, que generaliza um resultado já conhecido da literatura ([10, Proposição 4.1]). Mais especificamente, provamos o seguinte:

**Lema.** *Sejam*

$$p > 1, \quad s > \max \left\{ 1, \frac{p(N-1)}{(p-1)N} \right\}, \quad \gamma := \frac{Ns(p-1)}{N-1},$$

$h \in L^s(\partial\Omega)$  e  $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$  uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p \psi + |\psi|^{p-2} \psi = 0, & \text{em } \Omega, \\ |\nabla \psi|^{p-2} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = h, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,  $\psi \in W^{1,\gamma}(\Omega)$  e existe uma constante universal  $C = C(N, s, \Omega) > 0$  tal que

$$\|\psi\|_{1,\gamma}^{p-1} \leq C \|h\|_{L^s(\partial\Omega)}.$$

No problema (3), a não-linearidade no bordo apresenta um parâmetro com sinal positivo. Como forma de ter uma certa dualidade, inspirados pelos trabalhos de [59, 64, 68] buscamos também fazer o estudo de uma equação semelhante, porém com parâmetro negativo. Assim, neste trabalho, consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\lambda |u|^{q-2} u + g(u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\lambda > 0$  e, agora, a não-linearidade  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

( $g_3$ )  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

( $g_4$ )  $g(0) = 0$  e  $g'(0) > \lambda_1$ , em que  $\lambda_1 > 0$  é o primeiro autovalor do problema de Steklov (ver (2.2));

( $g_5$ ) existe  $C_1 > 0$  e  $r \in (2, 2_*)$  de modo que

$$|g(s)| \leq C_1(1 + |s|^{r-1}), \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

( $g_6$ )  $\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2G(s)}{|s|^2} < \lambda_1$ .

Inspirados nas técnicas desenvolvidas e/ou utilizadas nos trabalhos de Perera [67, 68], Paiva, do Ó e Medeiros [64] e Azorero, Peral e Manfredi [11], mostramos existência e multiplicidade de soluções para o problema (4). Convém ressaltar que os trabalhos de Perera [67, 68] são um divisor de águas para o estudo de algumas classes de problemas elípticos, pois a partir deles, permitiu-se aliar ferramentas de álgebra e (co)-homologia de grupos à obtenção de resultados de natureza variacional.

Nosso primeiro resultado para o problema (4) é

**Teorema D.** *Suponha a validade de ( $g_3$ )-( $g_6$ ). Então, existe  $\lambda^* > 0$  tal que se  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , o problema (4) possui pelo menos 4 soluções não-triviais.*

Em alguns casos, é possível obter uma quinta solução, conforme pode-se ver no resultado abaixo

**Teorema E.** *Suponha a validade de ( $g_3$ ) e ( $g_5$ ). Além disso, suponha que existe  $k \geq 2$  tal que*

( $\tilde{g}_4$ )  $g(0) = 0$  e  $g'(0) > \lambda_k$ ;

( $\tilde{g}_6$ )  $G(s) \leq \frac{1}{2}\lambda_{k+1}s^2$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

*Então, existe  $\lambda^* > 0$  tal que se  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , o problema (4) possui 5 soluções não triviais.*

Em [68], Perera estudou o efeito da presença do parâmetro negativo juntamente com uma não-linearidade sublinear. No nosso caso, pedimos que a fonte que acompanha a potência pura na condição de contorno tenha crescimento subcrítico, assim como é feito em [64], o que caracteriza nosso problema como uma espécie de côncavo-convexo.

O nosso trabalho é inovador, por transferir para o bordo os efeitos das não-linearidades. Além disso, é muito importante frisar que foi necessário desenvolver uma nova versão do resultado que compara mínimos locais nas topologias Sobolev e Hölder, peça essencial para o estudo deste tipo de problema, como é destacado por Perera [68]. De fato, este tipo de resultado não é natural e é bastante surpreendente obtê-lo, apesar de já ser algo conhecido na literatura, pois requer uma estrutura bem particular do funcional, como enfatizam Brezis e Nirenberg em seu trabalho [21].

Uma característica marcante deste capítulo está na análise detalhada do papel do parâmetro que multiplica o termo côncavo na fronteira. Consideramos tanto o caso em que esse parâmetro é positivo, reforçando a contribuição da não linearidade sublinear, quanto o caso negativo, em que o termo côncavo passa a agir contra o aparecimento de soluções. Essa mudança de sinal não apenas altera profundamente a geometria do funcional associado ao problema, mas também demanda uma grande mudança nas técnicas empregadas para resolvê-lo.

Nosso objetivo, portanto, é compreender como essa inversão no sinal do parâmetro impacta a existência e multiplicidade de soluções, propondo métodos adequados a cada configuração. Ampliamos os resultados previamente conhecidos para problemas com termos côncavos na fronteira e oferecemos uma análise comparativa que evidencia a sensibilidade do problema em relação ao sinal do parâmetro envolvido.

## Problema de autovalor com operador quase-linear

No terceiro capítulo, tratamos da seguinte equação estacionária de reação-difusão-advecção

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)D_1(u)\nabla u) + D_2(u)[\vec{b}(x) \cdot \nabla u] = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e regular,  $a \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, [a_0, +\infty))$ , para algum  $a_0 > 0$ , e  $\vec{b} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ . As funções  $D_1, D_2 \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$  satisfazem

(d<sub>1</sub>)  $D_i(s) > 0$ , para qualquer  $s > 0$  e  $i \in \{1, 2\}$ ,

(d<sub>2</sub>)  $D_1(\infty) := \lim_{s \rightarrow +\infty} D_1(s) > 0$ .

Consideramos a função  $h : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definida por

$$h(s) = \begin{cases} \frac{D_2(s)}{D_1(s)}, & \text{se } s > 0, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_2(s)}{D_1(s)}, & \text{se } s = 0, \end{cases}$$

e assumimos que

$(H_1)$   $h \in C^1((0, +\infty))$  e  $h'(0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} h'(s) \in \mathbb{R}$ .

Os dois primeiros resultados do Capítulo 3 são:

**Teorema F.** *Suponha que  $h$  satisfaça  $(H_1)$ ,  $h(\infty) < +\infty$  e  $\sigma_1^0 D_1(0) < \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ . Então, para qualquer  $\lambda \in (\sigma_1^0 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty))$ , o problema (5) admite uma solução clássica positiva.*

**Teorema G.** *Suponha que  $h$  satisfaça  $(H_1)$ ,  $h(\infty) = +\infty$ , e*

$(b_1)$  *existe  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  tal que  $[\vec{b}(x) \cdot \nabla \psi] > 0$ , para todo  $x \in \overline{\Omega}$ .*

*Então, para qualquer  $\lambda > \sigma_1^0 D_1(0)$ , o problema (5) admite uma solução clássica positiva.*

Na demonstração, realizamos uma mudança de variável bem conhecida. No entanto, como não assumimos que  $D_1 = D_2$ , o problema equivalente permanece quase-linear. Ainda assim, provamos que os métodos de sub e supersolução podem ser aplicados para obtenção das soluções. Destacamos que, diferentemente de trabalhos anteriores, permitimos os casos em que  $D_1(0) = 0$  ou  $D_1(\infty) = \infty$ .

A condição  $(b_1)$  é usada para construir uma supersolução no caso mais delicado, onde  $h(\infty) = +\infty$ . Se  $\vec{b}$  for um campo conservativo regular, ou seja, se  $\vec{b} = \nabla \psi$  para algum  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ , então  $[\vec{b} \cdot \nabla \psi] = |\vec{b}|^2$ , e, portanto,  $(b_1)$  é satisfeita desde que  $\vec{b}$  não se anule em  $\Omega$ .

Fazemos também o estudo do problema via Teoria de Bifurcação, para conseguir uma análise detalhada do comportamento global das soluções. O primeiro resultado nesse sentido é

**Teorema H.** *Suponha que  $D_1(0) > 0$ .*

- (i) *Então existe uma componente ilimitada  $\mathfrak{C}_0 \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  de soluções positivas para (5) que emana da solução trivial em  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$ .*

- (ii) Se, adicionalmente,  $0 < D_i(\infty) < +\infty$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ , então existe uma componente ilimitada  $\mathfrak{C}_\infty \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  de soluções para (5) que intercepta  $(\sigma_1^\infty D_1(\infty), \infty)$ . Além disso, se  $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$  e  $h$  satisfaz  $(H_1)$ , então  $\mathfrak{C}_\infty$  consiste em soluções positivas para (5).

Além disso, sob uma das seguintes hipóteses adicionais:

- (b<sub>2</sub>) existe  $\xi \in (H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \setminus \{0\}$  tal que  $\text{div}(\xi^2 \vec{b})$  tem sinal constante quase sempre em  $\Omega$ ,

ou

- (d<sub>3</sub>) existe  $C > 0$  tal que  $\int_0^\infty D_2(t)t^{-1}dt < C$ ,

obtemos um resultado de não existência de soluções positivas de (5) para  $\lambda > 0$  suficientemente grande (ver Proposição 3.2). Na verdade, se definirmos

$$\underline{\lambda} := \min\{\sigma_1^0 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty)\} \quad \text{e} \quad \overline{\lambda} := \max\{\sigma_1^0 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty)\},$$

podemos estabelecer o seguinte resultado de existência:

**Teorema I.** *Suponha que  $D_1(0) > 0$ ,  $0 < D_i(\infty) < +\infty$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ , que  $h$  satisfaça  $(H_1)$  e que  $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ . Então, para qualquer  $\lambda \in (\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$ , o problema (5) admite uma solução clássica positiva. Se, adicionalmente, (b<sub>2</sub>) ou (d<sub>3</sub>) for satisfeita, então os contínuos  $\mathfrak{C}_0$  e  $\mathfrak{C}_\infty$  dados pelo Teorema H coincidem.*

Também destacamos que, pelo Teorema da Divergência, a condição (b<sub>2</sub>) implica que  $\text{div}(\xi^2 \vec{b}(x)) = 0$  q.t.p em  $\Omega$ .

Por fim, vale ressaltar que estudamos as direções de bifurcação tanto da solução trivial quanto do infinito (ver Teoremas 3.4, 3.5 e 3.6). Essa análise é particularmente desafiadora devido à presença do termo gradiente. Além disso, como um subproduto da classificação discutida acima, conseguimos estabelecer a existência de pelo menos duas soluções positivas para (3.1) sob certas condições adequadas sobre a função  $D_1$  (ver Teorema 3.7).

A equação (5) é de interesse tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista de aplicações. Por exemplo, pode ser interpretada como um modelo de estado estacionário de uma equação de reação-difusão-advecção na Dinâmica de Populações, onde  $\Omega$  representa o *habitat* de uma espécie, e a densidade populacional em cada ponto  $x \in \Omega$  é dada por  $u(x)$ . Neste contexto,  $-\text{div}(a(x)D_1(u)\nabla u)$  é denominado termo de

difusão, descrevendo o movimento espacial da espécie. A função  $d(x, u) := a(x)D_1(u)$  representa a taxa de difusão, indicando que a velocidade de deslocamento depende da posição  $x$  e da densidade populacional  $u(x)$ , tornando o modelo mais realista do que no caso semilinear. Por outro lado,  $D_2(u)[\vec{b}(x) \cdot \nabla u]$  representa o termo de advecção, que considera o movimento preferencial da espécie. Esse movimento pode resultar de comportamentos individuais ou processos físicos de transporte, como ventos ou correntes de rios. Finalmente,  $\lambda u$  representa o termo de reação, interpretado como a taxa de reprodução local dos indivíduos, assumindo que essa taxa é proporcional à densidade populacional (de acordo com a lei de Malthus). Para maiores detalhes, veja [25, 32, 61] e as referências neles contidas.

Do ponto de vista matemático, esta é uma equação elíptica quase-linear, onde o termo não linear em  $u$  aparece tanto nas derivadas de segunda ordem quanto no termo de gradiente. Isso introduz desafios técnicos significativos na análise, especialmente devido à ausência de informação sobre o sinal do termo de gradiente.

Por exemplo, este problema não possui estrutura variacional, o que significa que os métodos clássicos utilizados para provar não-existência de soluções positivas não são aplicáveis aqui. Além disso, até onde sabemos, não existem resultados de estimativas a priori para esta classe de problemas. Ademais, desde que nós permitimos que as funções  $D_1$  e  $D_2$  degenerem na origem ou no infinito, isso introduz dificuldades técnicas adicionais.

O caso onde  $D_1 = D_2$  foi estudado em [65], onde o autor aplica uma mudança de variáveis e transforma o problema (5) em uma equação semilinear equivalente. Isso permite a aplicação de métodos clássicos de sub e supersoluções a essa classe de problemas.

No trabalho [8], os autores desenvolvem teoremas globais de bifurcação para o caso em que  $D_2 \equiv 0$ . Entre outros resultados, eles estudam a seguinte equação:

$$-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) = \lambda u, \text{ em } \Omega, \quad u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde  $A(x, s)$  é uma matriz simétrica, positiva definida, cujos coeficientes são funções de Carathéodory limitadas. O estudo desse problema com coeficientes não limitados foi realizado em [27].

A equação logística com um termo de difusão não linear e advecção linear foi estudada em [24]. Destacamos também os trabalhos [22, 23], nos quais os autores estudam a equação logística com difusão não linear na ausência de um termo de advecção.

Mais recentemente, em [30], um dos autores examinou o caso em que  $D_1 \equiv 1$  e  $D_2 = pu^{p-1}$ , com  $p > 1$ , na presença do termo clássico de reação logística. Nesse artigo, os autores estabelecem resultados sobre a existência e multiplicidade de soluções positivas,



além de um novo resultado de unicidade para essa classe de problemas. Subsequentemente, o caso em que  $p < 1$  foi analisado em [58].

Os resultados apresentados neste capítulo final contaram com a colaboração de Willian Cintra (UnB) e José Carmona (Universidad de Almería, Espanha) e podem ser encontrados no artigo [26].

# Capítulo 1

## Problemas com fluxo superlinear na fronteira

Ao longo deste capítulo, trabalhamos com o semi-espço superior

$$\mathbb{R}_+^N := \{(x', x_N) : x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0\}.$$

Denotando por  $\nu$  o vetor normal exterior à fronteira  $\partial\mathbb{R}_+^N$ , estudamos dois problemas da forma

$$-\Delta u = g(x, u, \nabla u), \quad \text{em } \mathbb{R}_+^N, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x', u), \quad \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N,$$

No primeiro deles, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^N, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu a(x')|u|^{q-2}u + b(x')|u|^{2_*-2}u, & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que  $1 < q < 2$ ,  $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$ ,  $\mu > 0$  é um parâmetro real e os potenciais  $a$  e  $b$  possuem sinal indefinido e satisfazem certas condições.

Conforme veremos na próxima seção, as soluções fracas do problema (1.1) pertencem ao espaço  $X$  definido como o fecho de  $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$  com relação à norma

$$\|u\| = \left( \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

onde

$$K(x) := e^{|x|^2/4}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Este tipo de espaço foi primeiramente introduzido em [41], com o espaço todo  $\mathbb{R}^N$  no lugar de  $\mathbb{R}_+^N$ . É importante destacar que  $X$  está imerso continuamente em

$$L_K^r := \left\{ u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{N-1}) : \|u\|_r := \left( \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) |u|^r d\sigma \right)^{1/r} < \infty \right\},$$

para todo  $r \in [2, 2_*]$ , em que  $2_* := 2(N-1)/(N-2)$  (ver [43, Teorema 1.1]).

Assim, estamos aptos a apresentar as hipóteses nos potenciais  $a$  e  $b$ , que podem inclusive mudar de sinal. Para isso, denotamos por  $s' > 1$  o expoente conjugado de  $s > 1$ , isto é,  $1/s + 1/s' = 1$ . Definimos

$$\Omega_a^+ := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : a(x') > 0\}, \quad \Omega_b^+ := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : b(x') > 0\}$$

e assumimos que:

$$(a_0) \quad a \in L_K^{\sigma_q} \cap L_{\text{loc}}^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1}), \text{ com } (2_*/q)' < \sigma_q \leq (2/q)';$$

$$(b_0) \quad b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1});$$

$$(ab) \quad \text{existem } \delta > 0, b_0 > 0 \text{ e } \gamma > N-1 \text{ tais que}$$

$$B'_\delta := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x'| < \delta\} \subset (\Omega_a^+ \cap \Omega_b^+)$$

e

$$\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \leq b(x') + b_0 |x'|^\gamma, \quad \text{q.t.p. em } B'_\delta.$$

Provamos o seguinte:

**Teorema A.** *Suponha que  $N \geq 4$  e que  $a$  e  $b$  satisfazem  $(a_0)$ ,  $(b_0)$  e  $(ab)$ . Então, existe  $\mu^* > 0$  tal que, para todo  $\mu \in (0, \mu^*)$ , o problema (1.1) possui pelo menos duas soluções fracas não-nulas e não-negativas.*

**Observação 1.1.** *Com as hipóteses acima, no caso em que  $N = 3$ , é possível obter a existência de ao menos uma solução fraca não-nula e não-negativa para valores pequenos de  $\mu > 0$ . Na realidade, ao invés da condição  $(ab)$ , basta nesse caso que o conjunto  $\Omega_a^+$  tenha interior não-vazio.*

Na segunda parte do capítulo estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^N, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu a(x') |u|^{q-2} u + f(u), & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases}, \quad (1.2)$$

em que  $\mu > 0$  e  $1 < q < 2$ . Com relação ao potencial  $a$  e a não-linearidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , vamos supor o seguinte:

$$(f_0) \quad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

$$(f_1) \quad \text{existe } p \in (2, 2_*) \text{ de modo que}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0;$$

$$(\tilde{a}_0) \quad a \in L_K^{\sigma_q} \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}), \text{ em que } (p/q)' < \sigma_q \leq (2/q)';$$

$$(a_1) \quad \Omega_a^+ \text{ possui um ponto interior.}$$

Veremos adiante na Proposição 1.1 que a imersão do traço  $X \hookrightarrow L_K^{2_*}$  é contínua. Assim, fica bem definido o número

$$S_{2_*} := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) |\nabla u|^2 dx : u \in X, \|u\|_{2_*} = 1 \right\}$$

e podemos enunciar o nosso segundo resultado principal:

**Teorema B.** *Suponha que  $a$  e  $f$  satisfazem  $(\tilde{a}_0)$ ,  $(a_1)$ ,  $(f_0)$  e  $(f_1)$ . Além disso, suponha que  $f$  é ímpar no intervalo  $[-C_{N,p}, C_{N,p}]$ , em que*

$$C_{N,p} := \max \left\{ 1, 2S_{2_*}^{-1} \right\}^{1/(2_*-p)} \left( \frac{2_* + 2 - p}{2} \right)^{(2_*+2-p)/2(2_*-p)^2}. \quad (1.3)$$

*Então existe  $\bar{\mu} > 0$  tal que, para cada  $\mu \in (0, \bar{\mu})$ , o problema (1.2) possui um número infinito de soluções fracas.*

Vale ressaltar alguns exemplos válidos para a não-linearidade  $f$ . Além do clássico exemplo  $f(s) = |s|^{r-2}s$ , com  $r > 2$ , podemos considerar  $f(s) = |s|^{r-2}se^{s^2}$  com  $r > 2$ , o qual possui crescimento exponencial. Na verdade, não existe restrição no crescimento de  $f$  quando  $|s|$  é grande.

## 1.1 Prova do Teorema A

Esta seção é dedicada à prova do Teorema A. Como já mencionado na Introdução, uma versão inicial deste resultado pode ser encontrada com grande riqueza maior de detalhes

na dissertação de mestrado do estudante (ver [62]). Porém, uma parte importante da demonstração não foi feita nesse trabalho e está sendo complementada aqui (ver Lema 1.1), além de que naquela época só conseguimos mostrar a existência da segunda solução no Teorema A quando  $N \geq 5$ . Complementamos assim aquele trabalho mostrando também essa multiplicidade no caso  $N = 4$ . Como o resultado mostra a existência de duas soluções e a forma de obtê-las é completamente distinta uma da outra, iremos dividir a seção em duas partes.

### 1.1.1 Primeira solução

Nesta subseção, iniciaremos a prova do primeiro resultado principal deste capítulo. Nesta e na subseção seguinte, assumiremos que  $(a_0)$ ,  $(b_0)$  e  $(ab)$  são válidas. Além disso, ao longo de todo o capítulo, escreveremos  $\|v\|_\infty$  para representar a norma de uma função  $v$  essencialmente limitada definida q.t.p. sobre  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

Como falado na seção anterior, consideramos a função peso  $K : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$K(x) := e^{|x|^2/4}.$$

Um cálculo direto mostra que se  $u$  é uma função suave, então

$$\operatorname{div}(K(x)\nabla u) = K(x) \left[ \Delta u + \frac{1}{2}(x \cdot \nabla u) \right].$$

Assim, para resolver (1.1) com uma abordagem variacional, é natural considerarmos o espaço  $X$  definido anteriormente.

O seguinte resultado abstrato foi provado em [43, Teorema 1.1] (veja também [42] e [62, Teorema 3.5] para uma maior riqueza de detalhes).

**Proposição 1.1.** *Se  $r \in [2, 2_*]$ , então*

$$S_r := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) |\nabla u|^2 dx}{\left( \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) |u|^r d\sigma \right)^{2/r}} < +\infty, \quad (1.4)$$

*e portanto a imersão do traço  $X \hookrightarrow L_K^r$  é contínua. Além disso, se  $r \in [2, 2_*)$  esta imersão também é compacta.*

Multiplicando a primeira equação de (1.1) por  $K$ , obtemos o funcional energia associado à este problema, a saber

$$I(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u^+)^q d\sigma - \frac{1}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u^+)^{2_*} d\sigma.$$

É possível verificar que  $I$  está bem definido,  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  e seus pontos críticos são exatamente soluções fracas do problema.

Começamos com o seguinte resultado de regularidade

**Lema 1.1.** *Se  $u \in X$  é um ponto crítico de  $I$ , então  $u \geq 0$  q.t.p. em  $\mathbb{R}_+^N$ . Além disso, se  $(a_0)$  e  $(b_0)$  valem, então  $u \in L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}_+^N) \cap L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^{N-1})$ , para qualquer  $s \geq 1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $u^+ := \max\{u, 0\}$  e  $u^- := u^+ - u$  as partes positiva e negativa de  $u$ , respectivamente. Uma vez que  $u^+ u^- = 0$  q.t.p. em  $\mathbb{R}_+^N$ , um cálculo simples mostra que  $0 = I'(u)u^- = -\|u^-\|^2$ . Isto prova que  $u = u^+ \geq 0$ , como enunciado.

Para a regularidade, primeiro note que  $v := K^{1/2}u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+^N)$  é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta v = g_1(x, v), & \text{em } \mathbb{R}_+^N \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = g_2(x', v), & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \end{cases},$$

em que  $g_1 : \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_2 : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são dadas por

$$g_1(x, s) := -\left(\frac{|x|^2 + 4N}{16}\right)s$$

e

$$g_2(x', s) := a(x')e^{(2-q)|x'|^2/8}|s|^{q-2}s + b(x')e^{(2-2_*)|x'|^2/8}|v(x', 0)|^{2_*-2}s.$$

Ao definirmos

$$L_1(x) := \left(\frac{|x|^2 + 4N}{16}\right), \quad L_2(x') := |a(x')|e^{(2-q)|x'|^2/8} + \|b\|_\infty |v(x', 0)|^{2_*-2},$$

temos para todo  $x \in \mathbb{R}_+^N$ ,  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$  e  $s \in \mathbb{R}$  que

$$|g_1(x, s)| \leq L_1(x)(1 + |s|), \quad |g_2(x', s)| \leq L_2(x')(1 + |s|).$$

Sabemos que  $L_1 \in L_{\text{loc}}^{N/2}(\mathbb{R}_+^N)$  e  $L_2 \in L_{\text{loc}}^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ , onde esta última inclusão se deve à  $(a_0)$  e ao fato de que  $v \in L_{\text{loc}}^{2_*}(\mathbb{R}^{N-1})$ . Assim, podemos aplicar [1, Lema 4.1] para concluir  $u \in L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}_+^N) \cap L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^{N-1})$ , para todo  $s \geq 1$ .  $\square$

Na primeira parte da prova do Teorema A, utilizaremos um argumento de minimização para obter uma solução  $u_\mu$  com energia negativa. Assim, precisamos provar o seguinte:

**Lema 1.2.** *Existem  $\mu^* = \mu^*(q, \|a\|_{\sigma_q}, \|b\|_\infty) > 0$ ,  $\rho = \rho(q, \|b\|_\infty) > 0$  e  $\alpha = \alpha(\rho) > 0$  tais*

que, para todo  $\mu \in (0, \mu^*)$ , vale

$$I(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in X \cap \partial B_\rho(0).$$

*Demonstração.* Segue da desigualdade de Hölder,  $(a_0)$  e (1.4) que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u^+)^q d\sigma \leq \|a\|_{\sigma_q} \|u^+\|_{q\sigma'_q}^q \leq S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} \|u\|^q.$$

Isso, combinado com (1.4), implica que

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^q \left[ \|u\|^{2-q} - \mu \frac{2}{q} S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} - C_1 \|u\|^{2_*-q} \right],$$

onde  $C_1 := (2/2_*) S_{2_*}^{-2_*/2} \|b\|_\infty > 0$ .

Com um cálculo simples, vemos que a função  $h(t) = t^{2-q} - C_1 t^{2_*-q}$ , para  $t > 0$ , atinge seu máximo global no ponto

$$\rho := \left[ \frac{2-q}{C_1(2_*-q)} \right]^{1/(2_*-2)} > 0.$$

Dessa forma, se considerarmos  $C_2 := h(\rho)$ , teremos que

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \rho^q \left[ C_2 - \mu \frac{2}{q} S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} \right] \geq \frac{C_2 \rho^q}{4} =: \alpha > 0,$$

sempre que  $\|u\| = \rho$  e

$$0 < \mu < \mu^* := \frac{q C_2}{4 \|a\|_{\sigma_q}} S_{q\sigma'_q}^{q/2},$$

o que finaliza a prova. □

O próximo resultado fornece a primeira solução do problema (1.1).

**Proposição 1.2.** *Sejam  $\mu^*$  e  $\rho > 0$  dados no Lema 1.2. Então, para qualquer  $\mu \in (0, \mu^*)$ , o ínfimo*

$$c_\mu := \inf_{u \in B_\rho(0)} I(u) < 0$$

*é atingido em um ponto crítico não-negativo  $u_\mu \in B_\rho(0)$ .*

*Demonstração.* Utilizando  $(a_0)$ ,  $(b_0)$  e a Proposição 1.1, mostramos que  $c_\mu > -\infty$ . Sejam  $\delta > 0$  dado na condição (ab) e  $\varphi \in C_c^\infty(B_\delta(0))$  uma função não-negativa tal que  $\varphi \equiv 1$  em

$B_{\delta/2}(0)$ . Desde que  $B_{\delta}(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^N \subset \Omega_a^+$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)a(x')\varphi^q d\sigma \geq \int_{B_{\delta/2}(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^N} K(x', 0)a(x')d\sigma > 0.$$

Note agora que

$$\frac{I(t\varphi)}{t^q} = \frac{t^{2-q}}{2} \|\varphi\|^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)a(x')\varphi^q d\sigma - \frac{t^{2*-q}}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)b(x')\varphi^{2_*} d\sigma,$$

donde segue que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(t\varphi)}{t^q} \leq -\frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)a(x')\varphi^q d\sigma < 0,$$

e, portanto,  $I(t\varphi) < 0$ , para  $t > 0$  pequeno. Isso prova que  $c_\mu < 0$ .

Seja  $(u_n) \subset \overline{B_\rho(0)}$  tal que  $I(u_n) \rightarrow c_\mu$ . Como  $(u_n)$  é limitada, existe  $u_\mu \in X$  de forma que  $u_n \rightharpoonup u_\mu$  fracamente em  $X$ ,  $u_n \rightarrow u_\mu$  fortemente em  $L_K^r$ , para todo  $r \in [2, 2_*)$ , e  $u_n(x', 0) \rightarrow u_\mu(x', 0)$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Ademais, pelo Lema 1.2, temos que  $(u_n) \subset B_\rho(0)$ , para todo  $n \geq n_0$ . Assim,  $\{u_n\}$  é uma sequência minimizante para  $I|_{\overline{B_\rho(0)}}$ . Dessa forma, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland [37] para assumir que  $I'(u_n) \rightarrow 0$ , se  $n \rightarrow +\infty$ .

Veja que  $I'(u_\mu) = 0$ . De fato, desde que  $\sigma_q > (2_*/q)'$ , temos que

$$1/\sigma_q + (q-1)/2_* < 1.$$

Consequentemente, existem  $r \in (2, 2_*)$  e  $\tau > 1$  tais que

$$\frac{1}{\sigma_q} + \frac{q-1}{r} + \frac{1}{\tau} = 1.$$

Da convergência forte  $u_n \rightarrow u_\mu$  em  $L_K^r$ , extraímos  $\eta_0 \in L_K^r$  tal que  $|u_n(x', 0)| \leq \eta_0(x')$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Assim, para qualquer  $v \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ , podemos usar a desigualdade de Young para obter

$$|Ka(u_n^+)^{q-1}v| \leq K \left[ \frac{|a|^{\sigma_q}}{\sigma_q} + \frac{q-1}{r} |\eta_0|^r + \frac{|v|^\tau}{\tau} \right] \quad \text{q.t.p. sobre } \mathbb{R}^{N-1}.$$

Sendo que  $v$  possui suporte compacto, o lado direito da desigualdade acima pertence à  $L^1(\mathbb{R}^{N-1})$ . Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)a(x')(u_n^+)^{q-1}v d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)a(x')(u_\mu^+)^{q-1}v d\sigma. \quad (1.5)$$



Utilizando que  $b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$  e um argumento simples, podemos verificar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u_n^+)^{2^*-1} v \, d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u_\mu^+)^{2^*-1} v \, d\sigma. \quad (1.6)$$

Combinando as convergências dadas em (1.5) e (1.6) com a convergência fraca  $u_n \rightharpoonup u_\mu$ , concluímos que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} I'(u_n)v = I'(u_\mu)v, \quad \forall v \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N}),$$

e segue por argumentos de densidade que  $I'(u_\mu) = 0$ . Pelo Lema 1.1, sabemos que  $u_\mu$  é não-negativa.

Uma vez que  $q\sigma'_q \in [2, 2_*)$ , existe  $\eta_1 \in L_K^{q\sigma'_q}$  de modo que  $|u_n(x', 0)| \leq \eta_1(x')$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Portanto, podemos utilizar a desigualdade de Young juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue como antes para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x') a(x') (u_n^+)^q \, d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x') a(x') (u_\mu^+)^q \, d\sigma.$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_\mu &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[ I(u_n) - \frac{1}{2_*} I'(u_n) u_n \right] \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) \|u_n\|^2 + \left( \frac{1}{2_*} - \frac{1}{q} \right) \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_n^+)^q \, d\sigma \right] \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2_*} \right) \|u_\mu\|^2 + \left( \frac{1}{2_*} - \frac{1}{q} \right) \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_\mu^+)^q \, d\sigma \\ &= I(u_\mu) - \frac{1}{2_*} I'(u_\mu) u_\mu = I(u_\mu). \end{aligned}$$

Como já sabemos que  $I(u_\mu) \geq c_\mu$ , concluímos que  $I(u_\mu) = c_\mu$ . □

### 1.1.2 Segunda solução

Em vistas de obter a segunda solução, adaptaremos argumentos de [49]. Dado  $c \in \mathbb{R}$ , relembre que dizer que  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale no nível  $c$  significa que qualquer sequência  $(u_n) \subset X$  tal que  $I(u_n) \rightarrow c$  e  $I'(u_n) \rightarrow 0$  possui uma subsequência convergente.

**Lema 1.3.** *Suponha que  $u_\mu$  dada na Proposição 1.2 seja o único ponto crítico não-nulo de  $I$ . Então,  $I$  satisfaz a condição Palais-Smale em qualquer nível  $c \in \mathbb{R}$  que satisfaça*

$$c < \bar{c} := I(u_\mu) + \frac{1}{2(N-1)} \frac{1}{\|b\|_\infty^{N-2}} S_{2_*}^{N-1}.$$

*Demonstração.* Seja  $(u_n)$  de tal modo que  $I(u_n) \rightarrow c < \bar{c}$  e  $I'(u_n) \rightarrow 0$ . Pela desigualdade de Hölder e denotando por  $o_n(1)$  uma quantidade que vai a zero quando  $n \rightarrow +\infty$ , temos que

$$\begin{aligned} c + o_n(1)\|u_n\| &= I(u_n) - \frac{1}{2_*} I'(u_n)u_n \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_*}\right)\|u_n\|^2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2_*}\right)\mu S_{q\sigma_q'}^{-q/2} \mathbf{1}_{a\mathbf{1}_{\sigma_q}}\|u_n\|^2, \end{aligned}$$

e, portanto,  $(u_n)$  é limitada. Assim, existe  $u \in X$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $X$ . Argumentando do mesmo jeito que na prova da Proposição 1.2, podemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_n^+)^q d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u^+)^q d\sigma.$$

Definindo  $v_n := u_n - u$  e aplicando o Lema de Brèzis-Lieb [20], obtemos que

$$0 = I'(u_n)u_n = I'(u)u + \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (v_n^+)^{2_*} d\sigma + o_n(1).$$

Assim como na prova da Proposição 1.2, temos que  $I'(u) = 0$ . Portanto, existe  $l \geq 0$  de forma que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|^2 = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (v_n^+)^{2_*} d\sigma.$$

Por conta da imersão do traço  $X \hookrightarrow L_K^{2_*}(\mathbb{R}^{N-1})$ , vale que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (v_n^+)^{2_*} d\sigma \leq \|b\|_\infty S_{2_*}^{-2_*/2} \left( \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) |\nabla v_n|^2 dx \right)^{2_*/2}.$$

Se  $l > 0$ , podemos tomar  $n \rightarrow +\infty$  na expressão acima para deduzir que

$$l \geq \frac{1}{\|b\|_\infty^{N-2}} S_{2_*}^{N-1}. \quad (1.7)$$

Por outro lado,

$$c + o_n(1) = I(u_n) = I(u) + \frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \frac{1}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (v_n^+)^{2_*} d\sigma,$$

em que  $o_n(1)$  denota uma quantidade que se aproxima de zero quando  $n \rightarrow +\infty$ . Desde que  $I'(u) = 0$ , segue que  $u \in \{0, u_\mu\}$  e, portanto,  $I(u) \geq I(u_\mu)$ . Assim, tomando o limite quando  $n \rightarrow +\infty$  na igualdade acima e utilizando (1.7), obtemos que

$$c \geq I(u) + \frac{1}{2(N-1)} \frac{1}{\|b\|_\infty^{N-2}} S_{2_*}^{N-1} \geq \bar{c},$$

o que é uma contradição. Consequentemente,  $l = 0$  e temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|^2 = l = 0,$$

o que mostra que  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $X$ .  $\square$

Para cada  $\epsilon > 0$ , considere a função

$$U_\epsilon(x', x_N) := \left( \frac{\epsilon}{|x'|^2 + (x_N + \epsilon)^2} \right)^{(N-2)/2}, \quad (x', x_N) \in \mathbb{R}_+^N.$$

A família  $\{U_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  consiste exatamente das funções que atingem a melhor constante da imersão do traço  $D^{1,2}(\mathbb{R}_+^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^{N-1})$  (veja [38] para maiores detalhes). Agora, defina

$$\psi_\epsilon(x) := K(x)^{-1/2} \varphi(x) U_\epsilon(x), \quad x \in \overline{\mathbb{R}_+^N}, \quad (1.8)$$

em que  $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$  é tal que  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi \equiv 1$  em  $B_{\delta/2}(0) \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$ ,  $\varphi \equiv 0$  fora de  $B_\delta(0) \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$ , e  $\delta > 0$  é o dado na condição (ab).

Considerando

$$A_N := \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla U_\epsilon|^2 dx, \quad B_N := \left( \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |U_\epsilon|^{2^*} d\sigma \right)^{2/2^*},$$

foi provado em [47, Lema 2.2] que  $A_N/B_N = S_{2^*}$ . Além disso, se  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , temos que

$$\|\psi_\epsilon\|^2 = A_N + \begin{cases} O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|), & \text{se } N = 4, \\ O(\epsilon^2), & \text{se } N \geq 5, \end{cases} \quad \text{e} \quad \|\psi_\epsilon\|_{2^*}^{2^*} = B_N^{2^*/2} + O(\epsilon^2).$$

O próximo resultado será utilizado para determinar, de forma precisa, o nível minimax do funcional energia associado ao problema (1.1). É neste resultado que fica clara a hipótese de  $N \geq 4$  no Teorema A. Ressaltamos que tudo o que foi feito na primeira subseção é válido ainda quando  $N = 3$ .

**Lema 1.4.** *Suponha que  $N \geq 4$  e considere*

$$v_\epsilon := \frac{\psi_\epsilon}{\|\psi_\epsilon\|_{2^*}},$$

em que  $\psi_\epsilon$  foi definida em (1.8). Então, se  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , vale

$$\|v_\epsilon\|^{2(N-1)} = S_{2^*}^{N-1} + \begin{cases} O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|), & \text{se } N = 4, \\ O(\epsilon^2), & \text{se } N \geq 5, \end{cases}$$

$e$

$$\|v_\epsilon\|_s^s = O\left(\epsilon^{N-1-s(N-2)/2}\right),$$

para todo  $2_*/2 < s < 2_*$ .

*Demonstração.* Se  $N \geq 5$ , podemos usar a definição de  $v_\epsilon$ , o Teorema do Valor Médio e a expressão acima para obter que

$$\begin{aligned} \|v_\epsilon\|^{2(N-1)} &= \frac{\|\psi_\epsilon\|^{2(N-1)}}{\|\psi_\epsilon\|_{2_*}^{2(N-1)}} = \frac{[A_N + O(\epsilon^2)]^{N-1}}{[B_N^{2_*/2} + O(\epsilon^2)]^{N-2}} = \frac{A_N^{N-1} + O(\epsilon^2)}{B_N^{2_*(N-2)/2} + O(\epsilon^2)} \\ &= \frac{A_N^{N-1} + O(\epsilon^2)}{B_N^{N-1} + O(\epsilon^2)} = \left(\frac{A_N}{B_N}\right)^{N-1} + O(\epsilon^2) = S_{2_*}^{N-1} + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Em relação ao caso  $N = 4$ , podemos proceder de maneira análoga para obter

$$\|v_\epsilon\|^{2(N-1)} = \frac{A_N^{N-1} + O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|)}{B_N^{N-1} + O(\epsilon^2)} = \frac{A_N^{N-1} + O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|)}{B_N^{N-1} + O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|)} = S_{2_*}^{N-1} + O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|).$$

Agora, vejamos a estimativa para a norma  $\|\psi_\epsilon\|_s^s$ . Desde que  $0 \leq \varphi \leq 1$  e  $\varphi$  se anula fora de uma bola, podemos fazer uso da mudança de variáveis  $x' = \epsilon y'$  para obter  $C_1 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|\psi_\epsilon\|_s^s &\leq C_1 \int_{\{|x'| \leq \delta\}} \left[ \frac{\epsilon}{|x'|^2 + \epsilon^2} \right]^{s(N-2)/2} d\sigma \\ &\leq C_1 \epsilon^{N-1-s(N-2)/2} \int_{\{|y'| \leq \delta/\epsilon\}} \left[ \frac{1}{|y'|^2 + 1} \right]^{s(N-2)/2} dy' \\ &\leq C_1 \epsilon^{N-1-s(N-2)/2} \left[ C_2 + \int_{\{|y'| \geq 1\}} |y'|^{-s(N-2)} dy' \right]. \end{aligned}$$

O termo entre colchetes é finito se, e somente se,  $s > (N-1)/(N-2)$ , o que está de acordo com nossa hipótese. Assim, a última parte do lema segue da expressão anterior e de  $\|\psi_\epsilon\|_{2_*}^s = B_N^{s/2} + o(1)$ .  $\square$

**Lema 1.5.** *Suponha  $N \geq 4$  e, para cada  $\epsilon > 0$ , considere  $v_\epsilon$  definida no lema anterior e  $u_\mu$  o mínimo local de  $I$  dado pela Proposição 1.2. Então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(u_\mu + tv_\epsilon) = -\infty.$$

*Demonstração.* Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
I(u_0 + t\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) |\nabla(u_0 + tv_\epsilon)|^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_0 + tv_\epsilon)^q d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u_0 + tv_\epsilon)^{2_*} d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + t \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) \nabla u_0 \nabla v_\epsilon dx + \frac{t^2}{2} \|v_\epsilon\|^2 \\
&\quad - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_0 + tv_\epsilon)^q d\sigma - \frac{1}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u_0 + tv_\epsilon)^{2_*} d\sigma \\
&\leq O(1) + O(t) + O(t^2) - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_0 + t\varphi)^q d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u_0 + tv_\epsilon)^{2_*} d\sigma. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Como  $u_\mu \geq 0$  e  $v_\epsilon = 0$  no complementar de  $B := B_\delta(0) \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$  e  $a, b > 0$  no suporte de  $v_\epsilon$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_\mu + tv_\epsilon)^q d\sigma &= \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B} K(x', 0) a(x') u_\mu^q d\sigma \\
&\quad + \int_B K(x', 0) a(x') (u_\mu + tv_\epsilon)^q d\sigma \\
&\geq O(1) + t^q \int_B K(x', 0) a(x') v_\epsilon^q d\sigma \\
&= O(1) + O(t^q). \tag{1.10}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u_\mu + tv_\epsilon)^{2_*} d\sigma &= \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B} K(x', 0) b(x') u_\mu^{2_*} d\sigma \\
&\quad + \int_B K(x', 0) b(x') (u_\mu + tv_\epsilon)^{2_*} d\sigma \\
&\geq O(1) + t^{2_*} \int_B K(x') b(x') v_\epsilon^{2_*} d\sigma. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Combinando as desigualdades (1.9), (1.10) e (1.11), temos que

$$I(u_\mu + tv_\epsilon) \leq O(t^2) + O(t^q) + O(t) + O(1) - \frac{t_*^2}{2_*} \int_B K(x', 0) b(x') v_\epsilon^{2_*} dx'.$$

Uma vez que a integral na desigualdade acima é positiva, ao fazermos  $t \rightarrow +\infty$ , obtemos o resultado.  $\square$

**Lema 1.6.** *Suponha que  $N \geq 4$ . Para cada  $\epsilon > 0$ , considere novamente  $v_\epsilon$  dada pelo*

Lema 1.4 e defina  $t_\epsilon > 0$  tal que

$$m_\epsilon := I(u_\mu + t_\epsilon v_\epsilon) = \max_{t \geq 0} I(u_\mu + tv_\epsilon).$$

Então  $(t_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  é limitado.

*Demonstração.* Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $h_\epsilon : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação de classe  $C^1$  dada por

$$h_\epsilon(t) = I(u_\mu + tv_\epsilon).$$

Do Lema 1.5,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_\epsilon(t) = -\infty$ . Além disso, como  $u_\mu$  é mínimo local de  $I$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $h_\epsilon(t) > h(0)$  para  $t \in (0, \delta)$ . Portanto,  $h_\epsilon$  atinge um máximo em algum  $t_\epsilon > 0$ . Isso mostra que o número  $m_\epsilon$  está bem definido. Suponha, por contradição, que  $t_{\epsilon_n} \rightarrow +\infty$ , para alguma sequência  $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ . De  $I'(u_\mu)v_{\epsilon_n} = 0$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) \nabla u_\mu \nabla v_{\epsilon_n} dx = \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') u_\mu^{q-1} v_{\epsilon_n} d\sigma + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu^{2^*-1} v_{\epsilon_n} d\sigma. \quad (1.12)$$

Ao combinar (1.12) com  $0 = h'_{\epsilon_n}(t_{\epsilon_n}) = I'(u_\mu + t_{\epsilon_n} v_{\epsilon_n})v_{\epsilon_n}$  e recordando que  $a$  e  $b$  são positivos no suporte de  $v_{\epsilon_n}$  (pela construção de  $v_\epsilon$ ), obtemos

$$\begin{aligned} t_\epsilon \|v_{\epsilon_n}\|^2 &= \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') (u_\mu + t_{\epsilon_n} v_{\epsilon_n})^{q-1} v_{\epsilon_n} d\sigma - \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') u_\mu^{q-1} v_{\epsilon_n} d\sigma \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (u_\mu + t_{\epsilon_n} v_{\epsilon_n})^{2^*-1} v_{\epsilon_n} d\sigma - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu^{2^*-1} v_{\epsilon_n} d\sigma \\ &\geq \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') u_\mu^{q-1} v_{\epsilon_n} d\sigma - \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') u_\mu^{q-1} v_{\epsilon_n} d\sigma \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') (t_{\epsilon_n} v_{\epsilon_n})^{2^*-1} v_{\epsilon_n} d\sigma - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu^{2^*-1} v_{\epsilon_n} d\sigma \\ &= t_{\epsilon_n}^{2^*-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') v_{\epsilon_n}^{2^*} d\sigma - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu^{2^*-1} v_{\epsilon_n} d\sigma, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') v_{\epsilon_n}^{2^*} d\sigma \leq t_{\epsilon_n}^{2-2^*} \|v_{\epsilon_n}\|^2 + t_{\epsilon_n}^{1-2^*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu^{2^*-1} v_{\epsilon_n} d\sigma.$$

Segue da desigualdade de Hölder, de  $\|v_{\epsilon_n}\|_{2^*} = 1$  e do Lema 1.4 que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') v_{\epsilon_n}^{2^*} d\sigma = 0.$$

Por outro lado, da condição  $(ab)$  temos que

$$b(x') \geq \|b\|_\infty - b_0 |x'|^\gamma, \quad \text{q.t.p. em } \{|x'| \leq \delta\},$$

com  $b_0 > 0$ . Consequentemente,

$$o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') v_{\epsilon_n}^{2*} d\sigma \geq \|b\|_\infty - b_0 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) |x'|^\gamma v_{\epsilon_n}^{2*} d\sigma. \quad (1.13)$$

Desde que  $\|\psi_{\epsilon_n}\|_{2*}^{2*} = B_N^{2*/2} + o_n(1)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) |x'|^\gamma v_{\epsilon_n}^{2*} d\sigma &\leq \frac{C_1}{\|\psi_{\epsilon_n}\|_{2*}^{2*}} \int_{\{|x'| \leq \delta\}} \frac{\epsilon_n^{N-1} |x'|^\gamma}{[|x'|^2 + \epsilon_n^2]^{N-1}} d\sigma \\ &\leq O(\epsilon_n^{N-1}) \int_{\{|x'| \leq \delta\}} |x'|^{\gamma-2(N-1)} d\sigma = O(\epsilon_n^{N-1}), \end{aligned}$$

onde foi usado que  $\gamma > N-1$  na última desigualdade acima. Segue de (1.13) que  $\|b\|_\infty = 0$ , o que contradiz (ab). Fica então provado o lema.  $\square$

O próxima lema é crucial para completar a prova do Teorema A.

**Lema 1.7.** *Se  $N \geq 4$  então, para todo  $\epsilon > 0$  pequeno, o número  $m_\epsilon$  definido no Lema 1.6 verifica  $m_\epsilon < \bar{c}$ .*

*Demonstração.* Usando que  $I'(u_\mu)v_\epsilon = 0$ , temos que

$$m_\epsilon = I(u_\mu) + \frac{t_\epsilon^2}{2} \|v_\epsilon\|^2 - \frac{\mu}{q} \Gamma_{1,\epsilon} - \frac{1}{2_*} \Gamma_{2,\epsilon}, \quad (1.14)$$

onde

$$\Gamma_{1,\epsilon} := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') [(u_\mu + t_\epsilon v_\epsilon)^q - u_\mu^q - t_\epsilon q u_\mu^{q-1} v_\epsilon] d\sigma,$$

e

$$\Gamma_{2,\epsilon} := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') [(u_\mu + t_\epsilon v_\epsilon)^{2*} - u_\mu^{2*} - t_\epsilon 2_* u_\mu^{2*-1} v_\epsilon] d\sigma.$$

O Teorema do Valor Médio combinado com a positividade de  $a$  no suporte de  $v_\epsilon$  implicam que  $\Gamma_{1,\epsilon} \geq 0$ . Além disso, para todo  $r, s \geq 0$  e  $\sigma \in (1, 2_* - 1)$ , existe  $C_\sigma > 0$  tal que

$$(r + s)^{2*} \geq r^{2*} + s^{2*} + 2_* r^{2*-1} s + 2_* r s^{2*-1} - C_\sigma r^{2*-\sigma} s^\sigma.$$

Tomando  $r = u_\mu$ ,  $s = t_\epsilon v_\epsilon$  e  $\sigma = 2_*/2$ , podemos utilizar que  $\Gamma_{1,\epsilon} \geq 0$  e (1.14) para chegar que

$$m_\epsilon \leq I(u_\mu) + \left( \frac{t_\epsilon^2}{2} \|v_\epsilon\|^2 - \frac{t_\epsilon^{2*}}{2_*} \|b\|_\infty \right) + \Gamma_{2,\epsilon,1} - \Gamma_{2,\epsilon,2} + \Gamma_{2,\epsilon,3}, \quad (1.15)$$

em que

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,\epsilon,1} &:= \frac{t_\epsilon^{2*}}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) [\|b\|_\infty - b(x')] v_\epsilon^{2*} d\sigma, \\ \Gamma_{2,\epsilon,2} &:= t_\epsilon^{2*-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu v_\epsilon^{2*-1} d\sigma \end{aligned}$$

e

$$\Gamma_{2,\epsilon,3} := C_\sigma \frac{t_\epsilon^{2_*/2}}{2_*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu^{2_*/2} v_\epsilon^{2_*/2} d\sigma.$$

Agora, note que

$$\max_{t \geq 0} \left\{ \frac{t^2}{2} \|v_\epsilon\|^2 - \frac{t^{2_*}}{2_*} \|b\|_\infty \right\} = \frac{1}{2(N-1)} \frac{\|v_\epsilon\|^{2(N-1)}}{\|b\|_\infty^{N-2}}.$$

Assumindo que  $N \geq 5$ , do Lema 1.4 temos que  $\|v_\epsilon\|^{2(N-1)} = S_{2_*}^{N-1} + O(\epsilon^2)$ . Assim, da definição  $\bar{c}$  e de (1.15), vale que

$$m_\epsilon \leq \bar{c} + O(\epsilon^2) + \Gamma_{2,\epsilon,1} - \Gamma_{2,\epsilon,2} + \Gamma_{2,\epsilon,3}. \quad (1.16)$$

Agora, vamos majorar cada um dos termos  $\Gamma_{2,\epsilon,i}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Para o primeiro, podemos argumentar como na prova do Lema 1.6 para obter que  $\Gamma_{2,\epsilon,1} = O(\epsilon^{N-1})$ . Os outros dois, no entanto, são um pouco mais delicados. Então, escolhemos  $r_1 > 1$  de modo que

$$\frac{1}{N+4} < \frac{r_1}{2(N-1)} < \frac{1}{N}.$$

Utilizando o Lema 1.1 e a desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) b(x') u_\mu v_\epsilon^{2_*-1} d\sigma \leq \|b\|_\infty \left( \int_{\{|x'| \leq \delta\}} K(x', 0) u_\mu^{r'_1} d\sigma \right)^{1/r'_1} \|v_\epsilon\|_{(2_*-1)r_1}^{2_*-1}.$$

Como  $1 < r_1 < 2(N-1)/N$ , vale que  $N/(N-2) < (2_*-1)r_1 < 2_*$ , e, portanto, podemos utilizar a expressão acima, o Lema 1.4 com  $s = (2_*-1)r_1$  e o Lema 1.6 para obter que

$$\Gamma_{2,\epsilon,2} = O\left(\epsilon^{(N-1)/r_1 - N/2}\right).$$

Agora, escolhemos  $r_2 \in (1, 2)$  e argumentamos como antes para concluir que

$$\Gamma_{2,\epsilon,3} \leq \|b\|_\infty \left( \int_{\{|x'| \leq \delta\}} K(x', 0) u_\mu^{(2_*/2)r'_2} d\sigma \right)^{1/r'_2} \|v_\epsilon\|_{(2_*/2)r_2}^{2_*/2}.$$

Uma vez que  $r_2 \in (1, 2)$ , podemos utilizar o Lema 1.6 com  $s = (2_*/2)r_2 \in (2_*/2, 2_*)$  para obter

$$\Gamma_{2,\epsilon,3} = O(\epsilon^{(N-1)/r_2 - (N-1)/2}).$$

Observando que

$$\lim_{r \rightarrow 2(N-1)/N} \left( \frac{N-1}{r} - \frac{N}{2} \right) = 0 < \frac{N-1}{2} = \lim_{r \rightarrow 1} \left( \frac{N-1}{r} - \frac{N-1}{2} \right),$$



podemos escolher os números  $r_1, r_2 > 0$  acima, de tal modo que

$$\nu_1 := \frac{N-1}{r_1} - \frac{N}{2} < 2, \quad \nu_2 := \frac{N-1}{r_2} - \frac{N-1}{2} > \nu_1.$$

Visto que  $\nu_1 < \min\{2, \nu_2\}$  e  $N \geq 5$ , podemos utilizar todas as estimativas acima para reescrever (1.16) como

$$m_\epsilon \leq \bar{c} + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^{N-1}) - O(\epsilon^{\nu_1}) + O(\epsilon^{\nu_2}) < \bar{c},$$

se  $\epsilon > 0$  é suficientemente pequeno. Isto conclui a prova para o caso  $N \geq 5$ .

No caso  $N = 4$ , a única alteração é que  $\|v_\epsilon\|^{2(N-1)} = S_{2*}^{N-1} + O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|)$ . Repetindo todos os passos anteriores, obtemos para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno

$$m_\epsilon \leq \bar{c} + O(\epsilon^2 |\ln \epsilon|) + O(\epsilon^{N-1}) - O(\epsilon^{\nu_1}) + O(\epsilon^{\nu_2}) < \bar{c},$$

observando que  $\epsilon^{2-\nu_1} |\ln \epsilon| \rightarrow 0$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . □

Com isso, estamos aptos a finalizar a prova do primeiro resultado principal deste capítulo.

*Prova do Teorema A.* Tome  $\mu \in (0, \mu^*)$ , onde  $\mu^*$  é o dado no Lema 1.2. De acordo com a Proposição 1.2, existe uma solução não-negativa  $u_\mu$  tal que  $I(u_\mu) < 0$ . Suponha, por absurdo, que este seja o único ponto crítico não-trivial de  $I$ . Assim, pelo Lema 1.3,  $I$  satisfaz a condição Palais-Smale em qualquer nível  $c < \bar{c}$ . No Lema 1.5, provamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(u_\mu + tv_\epsilon) = -\infty,$$

e, portanto, existe  $t_* > 0$  de modo que  $I(u_\mu + t_*v_\epsilon) < 0$  e  $\|u_\mu + t_*v_\epsilon\| > \rho$ , em que  $\rho > 0$  foi obtido no Lema 1.2. Isso mostra que o nível do Passo da Montanha

$$c_{MP} := \inf_{\theta \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\theta(t)) > 0,$$

está bem definido, onde  $\Gamma := \{\theta \in C([0, 1], X) : \theta(0) = 0, \theta(1) = u_\mu + t_*v_\epsilon\}$ . Do Lema 1.7, temos que  $c_{MP} < \bar{c}$ . Aplicando o Teorema do Passo da Montanha (cf. [71, Teorema 2.2]) obtemos um ponto crítico  $u_0 \neq 0$  tal que  $I(u_0) > 0$ . Desde que  $u_\mu$  possui energia negativa, concluímos que  $u_0 \neq u_\mu$ , o que é uma contradição. Isto assegura a existência da nossa segunda solução não-trivial para (1.1). Como antes, ela é não-negativa em  $\mathbb{R}_+^N$ . □

## 1.2 Prova do Teorema B

Nesta seção, provamos Teorema B. O problema (1.2) será resolvido em duas etapas: Consideramos um truncamento apropriado para o problema e o resolveremos na primeira parte desta seção e, na segunda, utilizaremos uma modificação da técnica de Iteração de Moser para mostrar que as soluções do problema truncado também resolvem (1.2).

Ao longo de toda a seção vamos supor a validade das condições  $(\tilde{a}_0)$ ,  $(a_1)$ ,  $(f_0)$  e  $(f_1)$ .

### 1.2.1 Solucionando um problema modificado

Como mencionado na introdução, se  $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ , o termo  $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0)F(u)d\sigma$  pode não ser finito, pois não possuímos controle no comportamento de  $F(s)$  para valores grandes de  $|s|$ . Assim, seguindo as mesmas ideias de Azorezo e Alonso [10] definimos  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(s) := \begin{cases} f(s), & \text{se } |s| \leq C_{N,p}, \\ \frac{f(C_{N,p})}{C_{N,p}^{p-1}} |s|^{p-2} s, & \text{se } |s| > C_{N,p}, \end{cases} \quad (1.17)$$

em que  $C_{N,p}$  é dada em (1.3). Desde que  $f$  é ímpar em  $[-C_{N,p}, C_{N,p}]$ , a função  $g$  é ímpar ao longo de toda a reta real. Além disso, da condição  $(f_1)$ , extraímos uma constante  $C_g > 0$ , que depende de  $N$  e  $p$ , satisfazendo

$$|g(s)| \leq C_g |s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Sejam  $G(s) := \int_0^s g(t)dt$  e  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') |u|^q d\sigma - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) G(u) d\sigma.$$

Observe que qualquer  $u \in X$  que seja um ponto crítico de  $J$  e que satisfaça  $\|u\|_\infty \leq C_{N,p}$  é uma solução fraca do problema (1.2). Ademais, como a parte não quadrática de  $J$  possui crescimento subcrítico, podemos usar um argumento padrão e a imersão compacta dada na Proposição 1.1 para mostrar que qualquer sequência Palais-Smale de  $J$  possui uma subsequência convergente. Com base na observação feita aqui, nosso objetivo nesta subseção será estabelecer a existência de uma infinidade de pontos críticos para  $J$ .

Utilizando a desigualdade de Hölder assim como no Lema 1.2, obtemos que

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \mu M_1 \|u\|^q - M_2 \|u\|^p,$$

onde

$$M_1 := (\mathbf{I}a\mathbf{I}_{\sigma_q}/q)S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \quad \text{e} \quad M_2 := (C_g/p)S_p^{-p/2},$$

e  $C_g > 0$  foi obtida em (1.18). Considere

$$h(t) := \frac{1}{2}t^2 - \mu M_1 t^q - M_2 t^p, \quad t \geq 0, \quad (1.19)$$

e note que

- (i)  $h(0) = 0$ ;
- (ii) existe  $t_0 > 0$  tal que  $h(t) < 0$  se  $t \in (0, t_0)$ ;
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = -\infty$ .

Semelhantemente à prova do Lema 1.2, a aplicação  $k : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$k(t) := (1/2)t^{2-q} - M_2 t^{p-q},$$

atinge seu máximo positivo em

$$\bar{t} = \left[ \frac{2-q}{2M_2(p-q)} \right]^{1/(p-2)} > 0.$$

Sendo  $M = k(\bar{t})$  este máximo, e se valendo de que  $h(t) = t^q(k(t) - \mu M_1)$ , concluímos que para todo  $\mu \in (0, M_1/M)$ ,  $h$  tem também um máximo positivo. Para estes valores de  $\mu$ ,  $h$  possui ao menos duas raízes positivas, a saber  $R_1 < R_2$ . Pela versão generalizada da regra dos sinais de Descartes (veja [52, Teorema 2.1]), não existem outras raízes positivas para  $h$ . De agora em diante, assumiremos que  $\mu \in (0, \mu^{**})$ , onde  $\mu^{**} = \frac{M_1}{M}$ .

Note que  $R_1$  depende de  $\mu$ , além de que quanto menor o valor de  $\mu$ , mais rápido a função  $h$  assume valores positivos. Com efeito, quando  $\mu = 0$ , a função  $h$  inicia tomando valores positivos, o que resulta que neste caso,  $R_1 = 0$ . Portanto, o seguinte comportamento é esperado:

**Lema 1.8.** *A primeira raiz positiva de  $h$  verifica  $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} R_1(\mu) = 0$ .*

*Demonstração.* Uma vez que  $R_1 > 0$  é raiz de  $h$ , temos que

$$0 = \frac{h(R_1)}{R_1^2} = \frac{1}{2} - \mu M_1 R_1^{q-2} - M_2 R_1^{p-2}.$$

Por outro lado, sendo  $h'(R_1) > 0$ , vale que

$$0 < \frac{h'(R_1)}{2R_1} = \frac{1}{2} - \frac{q}{2}\mu M_1 R_1^{q-2} - \frac{p}{2}M_2 R_1^{p-2}.$$

Combinando as duas expressões acima, concluímos que

$$\frac{1}{2} = \mu M_1 R_1^{q-2} + M_2 R_1^{p-2} > \frac{q}{2} \mu M_1 R_1^{q-2} + \frac{p}{2} M_2 R_1^{p-2}.$$

Em virtude de  $p > 2$  e da expressão acima, existe  $\alpha \geq 0$  de modo que  $R_1(\mu) \rightarrow \alpha \geq 0$ , quando  $\mu \rightarrow 0^+$ . Se  $\alpha > 0$ , passando o limite nos dois lados da expressão acima obtemos que  $M_2 \alpha^{p-2} \geq (p/2) M_2 \alpha^{p-2}$ , o que acarreta em  $p \leq 2$ . Esta clara contradição mostra que  $\alpha = 0$ , o que encerra a prova.  $\square$

Uma vez que  $0 < R_1 < R_2$ , podemos definir uma função corte  $\phi \in C_c^\infty([0, +\infty))$  de modo que  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\phi \equiv 1$  em  $[0, R_1]$  e  $\phi \equiv 0$  em  $[R_2, +\infty)$ . Sob essas condições, consideramos o funcional  $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$  definido por

$$\Phi(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') |u|^q d\sigma - \phi(\|u\|) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) G(u) d\sigma.$$

A seguir, apresentamos as principais propriedades de  $\Phi$ :

**Lema 1.9.** *Sobre o funcional  $\Phi$ , é válido que*

- (i)  $\Phi$  é coercivo;
- (ii) Se  $\Phi(u) < 0$ , então  $\|u\| < R_1$  e existe uma vizinhança de  $u$  na qual  $\Phi \equiv J$ ;
- (iii)  $\Phi$  satisfaz a condição de Palais-Smale em qualquer nível  $c < 0$ .

*Demonstração.* Procedendo como na prova do Lema 1.2 e utilizando (1.18), obtemos que

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \mu M_1 \|u\|^q - \phi(\|u\|) M_2 \|u\|^p.$$

Como  $\phi$  se anula em  $(R_2, +\infty)$  e  $q < 2$ , concluímos que  $\Phi$  é coercivo, o que finaliza a prova do item (i).

Para demonstrar o item (ii), definimos

$$h_\phi(t) := \frac{1}{2} t^2 - \mu M_1 t^q - \phi(t) M_2 t^p, \quad t \geq 0.$$

Da definição de  $\phi$ , se  $t > R_2$ , então

$$h'_\phi(t) = t - q\mu M_1 t^{q-1}.$$

Neste caso,  $h'_\phi(t) > 0$  se, e somente se,  $t > (q\mu M_1)^{1/(2-q)}$ . Porém, desde que  $h(R_2) = 0$ , temos que

$$R_2 > (2\mu M_1)^{1/(2-q)} > (q\mu M_1)^{1/(2-q)},$$

e, portanto,  $h_\phi$  é crescente em  $[R_2, +\infty)$ .

Seja  $u \in X$  tal que  $\Phi(u) < 0$  e, por absurdo, suponha que  $\|u\| \geq R_1$ . Se  $\|u\| > R_2$ , então podemos usar novamente que  $h(R_2) = 0$  para obter que

$$0 > \Phi(u) \geq h_\phi(\|u\|) \geq h_\phi(R_2) = h(R_2) + M_2(1 - \phi(R_2))R_2^p = M_2R_2^p > 0,$$

o que é uma contradição. Consequentemente,  $R_1 \leq \|u\| \leq R_2$ . Porém, neste caso,  $h(\|u\|) \geq 0$  e, portanto

$$0 > \Phi(u) \geq h_\phi(\|u\|) \geq h(\|u\|) \geq 0,$$

o que é outra contradição. Assim,  $\|u\| < R_1$  e, portanto,  $\Phi(u) = J(u)$ . Da continuidade de  $\Phi$ , existe  $r > 0$  tal que  $\Phi < 0$  em  $B_r(u)$ . Para qualquer elemento nesta bola, o mesmo argumento anterior mostra que  $\Phi = J$ . Assim, provamos também o item (ii).

Para o item (iii), Suponha que  $(u_n) \subset X$  seja tal que  $\Phi(u_n) \rightarrow c < 0$  e  $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$ . Uma vez que podemos assumir que  $\Phi(u_n) < 0$ , segue do item (ii) que  $\Phi(u_n) = J(u_n) \rightarrow c$  e  $\Phi'(u_n) = J'(u_n) \rightarrow 0$ , isto é,  $(u_n)$  é uma sequência Palais-Smale de  $J$ . Como  $\Phi$  é coercivo, segue que  $(u_n)$  é limitado e, portanto, como mencionado antes,  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente.  $\square$

O próximo resultado é a ferramenta chave que nos permite atacar funcionais com simetria.

**Lema 1.10.** *Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $r = r(k) > 0$ ,  $\beta = \beta(k) > 0$  e um subespaço  $k$ -dimensional  $X_k \subset X$  tal que*

$$\sup_{u \in X_k \cap \partial B_r(0)} \Phi(u) \leq -\beta < 0.$$

*Demonstração.* De acordo com a condição  $(a_1)$ , existe uma bola  $B' \subset \mathbb{R}^{N-1}$  tal que  $a > 0$  q.t.p. em  $B'$ . Seja  $\nu > 0$  e  $y_1 = (y'_1, 0), \dots, y_k = (y'_k, 0) \in \partial \mathbb{R}_+^N$  de tal modo que  $(B_\nu(y_i) \cap \partial \mathbb{R}_+^N) \subset B'$  e  $\overline{B_\nu(y_i)} \cap \overline{B_\nu(y_j)} = \emptyset$ , para todo  $i, j = 1, \dots, k$ , com  $i \neq j$ . Para cada  $i = 1, \dots, k$ , escolhemos uma função suave  $\phi_i$  satisfazendo  $\phi_i \equiv 1$  em  $B_{\nu/2}(y_i) \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$  e  $\phi_i \equiv 0$  fora de  $B_\nu(y_i) \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$ .

Uma vez que estas funções possuem suporte disjunto, o conjunto  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$  é linearmente independente, e o subespaço  $X_k := \langle \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \rangle$  gerado por elas tem dimensão

$k$ . Note que a aplicação

$$Q(u) := \left( \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') |u|^q d\sigma \right)^{1/q},$$

define uma norma em  $X_k$ . Com efeito, claramente  $Q(0) = 0$ . Vejamos que  $Q(u) > 0$  para todo  $u \neq 0$ . De fato, seja  $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi_i$  uma função não-nula. Se denotarmos  $B'_i := B_{\nu/2}(y_i) \cap \partial \mathbb{R}_+^N$ , teremos por  $(a_1)$  que

$$\begin{aligned} Q(u)^q &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') |\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_k \phi_k|^q d\sigma \\ &\geq \sum_{i=1}^k \int_{B'_i} K(x', 0) a(x') |\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_k \phi_k|^q d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^q \int_{B'_i} K(x', 0) a(x') d\sigma > 0, \end{aligned}$$

uma vez que os conjuntos  $B_i$  são disjuntos,  $\phi_i \equiv 1$  e  $a > 0$  em  $B_i$  e, como  $u \neq 0$ , pelo menos um entre os  $\alpha_i$ 's é não-nulo. As demais propriedades que uma norma deve verificar podem ser facilmente deduzidas pela definição de  $Q$ .

Como  $\dim X_k < \infty$ , existe  $C_1 = C_1(k) > 0$  tal que

$$C_1 \|u\|^q \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') |u|^q d\sigma, \quad \forall u \in X_k.$$

Consequentemente, para algum  $C_2 > 0$ , é válido que

$$\Phi(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|^q \left( \|u\|^{2-q} + C_2 \|u\|^{p-q} - \frac{2\mu C_1}{q} \right) \leq -\beta < 0, \quad \forall u \in X_k.$$

para  $r = r(k) > 0$  satisfazendo

$$r^{2-q} + C_2 r^{p-q} < \frac{\mu C_1}{q}$$

e  $\beta = \beta(k) := r^q \mu C_1 / (2q)$ . □

Seja  $\Sigma$  a classe de todos os subconjuntos fechados de  $X \setminus \{0\}$  que são simétricos com respeito à origem. Se  $A \in \Sigma$ , o gênero de  $A$ , denotado por  $\gamma(A)$ , é definido da seguinte forma

$$\gamma(A) := \inf \{k \in \mathbb{N} : \text{existe } \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ contínua e ímpar}\},$$

quando este conjunto é não-vazio. Caso este conjunto seja vazio, definimos  $\gamma(A) = +\infty$ . Citamos [71, Capítulo 7] para maiores detalhes neste assunto.

Estamos em posição de provar o principal resultado desta subseção.

**Proposição 1.3.** *O funcional  $\Phi$  possui infinitos pontos críticos com energia negativa*

*Demonstração.* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , considere

$$\Gamma_k := \{A \in \Sigma : \gamma(A) \geq k\}$$

e

$$c_k := \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} \Phi(u).$$

Como  $\Phi$  permanece limitado em bolas e é coercivo, temos que  $c_k \in \mathbb{R}$ . Sejam  $X_k$  e  $r > 0$  os dados no Lema 1.10. É claro que podemos definir um homeomorfismo ímpar entre  $X_k \cap \partial B_r(0)$  e a esfera unitária  $\mathbb{S}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$ . Portanto, podemos utilizar [71, Proposição 7.7] para mostrar que  $\gamma(X_k \cap \partial B_r(0)) = k$ .

Uma vez que  $X_k \cap \partial B_r(0)$  é fechado e simétrico, este conjunto pertence à  $\Gamma_k$ . Segue do Lema 1.10 que

$$c_k \leq \sup_{u \in X_k \cap \partial B_r(0)} \Phi(u) \leq -\beta < 0.$$

Assim, todos os níveis minimax  $c_k$  são negativos. Do Lema 1.9(iii),  $\Phi$  satisfaz a condição Palais-Smale em cada um desses níveis. Utilizando que  $\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k$ , concluímos que  $c_k \leq c_{k+1}$ . Ademais, desde que  $\Phi$  é par e satisfaz a condição Palais-Smale em qualquer nível negativo, podemos argumentar nas mesmas linhas de [71, Proposição 9.3] para provar que, se  $c_k = \dots = c_{k+j} = c$  e  $K_c = \{u \in X : \Phi(u) = c, \Phi'(u) = 0\}$ , então  $\gamma(K_c) \geq j + 1$ .

As considerações acima provam que cada  $c_k < 0$  é um valor crítico de  $\Phi$ . Além disso, se algum desses valores repetir, isto é  $c_l = c_{l+1} < 0$ , teremos que  $\gamma(K_{c_l}) \geq 2$ , implicando que  $K_{c_l}$  possuirá uma quantidade infinita de elementos (cf. [71, Observação 7.3]). Consequentemente, podemos concluir que  $\Phi$  possui infinitos pontos críticos com energia negativa.  $\square$

### 1.2.2 Estimativas à priori

Esta subseção é inteiramente dedicada à prova do Teorema B.

*Prova do Teorema B.* Seja  $u \in X$  um dos pontos críticos de  $\Phi$  dados pela Proposição 1.3. Desde que  $\Phi(u) < 0$ , segue do Lema 1.9(ii) que  $\|u\| < R_1$  e  $J'(u) = 0$ . Vamos mostrar que, para todo  $\mu > 0$  suficientemente pequeno, vale que

$$|u(x', 0)| \leq C_{N,p}, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^{N-1}, \quad (1.20)$$

e, portanto, seguirá da definição de  $g$  (veja (1.17)) que  $f(u) = g(u)$ . Assim,  $J'(u) = 0$ , implicando que  $u$  é uma solução do problema original (1.2).

A ideia da prova de (1.20) é uma adaptação do clássico método de Iteração de Moser [60]. No que se segue, vamos supor que  $u \geq 0$ . Se este não for o caso, é suficiente performar todos os cálculos separadamente para as partes positiva e negativa de  $u$ .

Inspirados pelo truncamento de Stampacchia (veja [18, 72]), definimos, para qualquer  $0 < L < 1$  e  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^N}$ ,

$$u_L(x) := \begin{cases} u(x) - L, & \text{se } u(x) > L, \\ 0, & \text{se } u(x) \leq L. \end{cases}$$

Para  $\beta > 1$ , também definimos

$$\phi_L := u_L^{2(\beta-1)} u.$$

Sendo que  $\Phi(u) < 0$ , decorre do Lema 1.9 que  $J'(u)\phi_L = 0$ . Portanto, podemos utilizar (1.18) para obter que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x)(\nabla u \cdot \nabla \phi_L) dx &\leq \mu \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') u^{q-1} \phi_L d\sigma \\ &+ C_g \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) u^{p-1} \phi_L d\sigma. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Sendo  $u \nabla u_L = u \nabla u$  no conjunto  $\{u > L\}$  e tendo em vista que

$$\nabla \phi_L = 2(\beta - 1) u_L^{2\beta-3} u \nabla u_L + u_L^{2\beta-2} \nabla u,$$

é válido que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x)(\nabla u \cdot \nabla \phi_L) dx &= \int_{\{u > L\}} K(x)(\nabla u \cdot \nabla \phi_L) dx \\ &= \int_{\{u > L\}} K(x) \left[ 2(\beta - 1) u_L^{2\beta-3} u + u_L^{2(\beta-1)} \right] |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Assim, como  $u_L = 0$  em  $\{u \leq L\}$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} K(x)(\nabla u \cdot \nabla \phi_L) dx \geq \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) u_L^{2(\beta-1)} |\nabla u|^2 dx. \quad (1.22)$$

Se chamarmos de  $\Gamma_1$  o termo multiplicando  $\mu$  em (1.21), teremos que

$$\Gamma_1 = \int_{\{L < u < 1\}} K(x', 0) a(x') u^{q-1} \phi_L d\sigma + \int_{\{u \geq 1\}} K(x', 0) a(x') u^{q-1} \phi_L d\sigma.$$



Uma vez que  $u_L \leq u < 1$ , no conjunto  $\{L < u < 1\}$  ocorre

$$u^{q-1}\phi_L = u^{q-1}u_L^{2(\beta-1)}u \leq u^q.$$

Além disso, em  $\{u \geq 1\}$  vale que  $u^{q-1} \leq u^{p-1}$ . Assim

$$\Gamma_1 \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) a(x') u^q d\sigma + \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) u^{p-1} \phi_L d\sigma. \quad (1.23)$$

Usando a desigualdade de Hölder na primeira integral de (1.23) e combinando (1.22) e (1.21), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) u_L^{2(\beta-1)} |\nabla u|^2 dx &\leq \mu S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} \|u\|^q \\ &+ (\mu \|a\|_\infty + C_g) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) u^{p-1} \phi_L d\sigma. \end{aligned} \quad (1.24)$$

De  $u_L \leq u$  e da desigualdade de Hölder com os expoentes  $s = 2_*/(p-2)$  e  $s' = 2_*/(2_* + 2 - p)$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) u^{p-1} \phi_L d\sigma &\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) u^{p-2} u^{2\beta} d\sigma \\ &\leq \|u\|_{2_*}^{p-2} \|u\|_{m\beta}^{2\beta} \leq S_{2_*}^{(2-p)/2} \|u\|^{p-2} \|u\|_{m\beta}^{2\beta}, \end{aligned}$$

em que

$$m := 2s' = \frac{2 \cdot 2_*}{2_* + 2 - p} < 2_*.$$

Por definição,  $u_L(x) \rightarrow u(x)$ , quando  $L \rightarrow 0^+$ . Além do mais, sabemos que  $\|u\| \leq R_1$ . Portanto, podemos substituir a desigualdade acima em (1.24) e utilizar o Lema de Fatou para chegar em

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) u^{2(\beta-1)} |\nabla u|^2 dx &\leq \mu S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} R_1^q \\ &+ (\mu \|a\|_\infty + C_g) S_{2_*}^{(2-p)/2} R_1^{p-2} \|u\|_{m\beta}^{2\beta}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Agora, definindo

$$z_L := u_L^{\beta-1} u,$$

observe que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) z_L^{2_*} d\sigma \right)^{2/2_*} \leq S_{2_*}^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) |\nabla z_L|^2 dx.$$

Como  $u_L = 0$  em  $\{u \leq L\}$ ,

$$\nabla z_L = \left[ (\beta - 1)u_L^{\beta-2}u + u_L^{\beta-1} \right] \nabla u.$$

Portanto, utilizando que  $u_L \leq u$  e  $(\beta - 1)^2 + 1 + 2(\beta - 1) = \beta^2$ , concluimos que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K(x', 0) z_L^{2*} d\sigma \right)^{2/2*} \leq S_{2*}^{-1} \beta^2 \int_{\mathbb{R}_+^N} K(x) u^{2(\beta-1)} |\nabla u|^2 dx.$$

Uma vez que  $z_L(x) \rightarrow u^\beta(x)$ , quando  $L \rightarrow 0^+$ , segue da estimativa acima, de (1.25) e do Lema de Fatou que

$$\|u\|_{2*\beta}^{2\beta} \leq S_{2*}^{-1} \beta^2 \left[ \mu S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} R_1^q + (\mu \|a\|_\infty + C_g) S_{2*}^{(2-p)/2} R_1^{p-2} \|u\|_{m\beta}^{2\beta} \right].$$

Lembre que estamos assumindo  $0 < \mu < \mu^{**}$ , onde  $\mu^{**}$  foi introduzido no começo da subseção anterior. Isso assegura que a função  $h$  definida em (1.19) possui exatamente duas raízes positivas  $0 < R_1 < R_2$ . Precisamos reduzir mais uma vez o valor de  $\mu$ . Na verdade, como  $R_1(\mu) \rightarrow 0$ , quando  $\mu \rightarrow 0^+$  (veja Lema 1.8) sabemos que existe  $0 < \bar{\mu} < \mu^{**}$  tal que, para todo  $\mu \in (0, \bar{\mu})$ , todas as desigualdades abaixo são satisfeitas:

$$\mu S_{q\sigma'_q}^{-q/2} \|a\|_{\sigma_q} R_1^q < 1, \quad (\mu \|a\|_\infty + C_g) S_{2*}^{(2-p)/2} R_1^{p-2} < 1, \quad S_{2*}^{-1/2} R_1 < 1. \quad (1.26)$$

Com esta restrição sobre  $\mu$ , temos que

$$\|u\|_{2*\beta}^{2\beta} \leq C_1 \beta^2 \max \left\{ 1, \|u\|_{m\beta}^{2\beta} \right\}, \quad (1.27)$$

em que  $C_1 := 2S_{2*}^{-1}$ . Isso mostrar que, uma vez que  $u \in L_K^{m\beta}$ , então  $u \in L_K^{2*\beta}$ . Assim, se fixarmos  $\beta := 2*/m > 1$ , teremos  $2*\beta > 2* = m\beta$ , e assim melhoramos a regularidade de  $u$ . Além disso,  $2*\beta = m\beta^2$  e podemos repetir os cálculos acima, substituindo  $\beta$  por  $\beta^2$ , e utilizar (1.27) para obter que

$$\begin{aligned} \|u\|_{2*\beta^2}^{2\beta^2} &\leq C_1 \beta^4 \max \left\{ 1, \|u\|_{m\beta^2}^{2\beta^2} \right\} = C_1 \beta^4 \max \left\{ 1, \|u\|_{2*\beta}^{2\beta^2} \right\} \\ &\leq C_1 \beta^4 \max \left\{ 1, \left( C_1 \beta^2 \max \{ 1, \|u\|_{2*}^{2\beta} \} \right)^\beta \right\}. \end{aligned}$$

Tomando  $C_2 := \max\{1, C_1\}$ , podemos reescrever a estimativa acima como

$$\|u\|_{2*\beta^2}^{2\beta^2} \leq C_2^{1+\beta} \beta^{2(2+\beta)} \max \left\{ 1, \|u\|_{2*}^{2\beta^2} \right\}.$$

Dado  $k \in \mathbb{N}$ , repetindo esse processo  $k$  vezes obtemos

$$\|u\|_{2_*\beta^k} \leq C_2^{\frac{1}{2\beta^k} \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i} (\beta^2)^{\frac{1}{2\beta^k} \sum_{i=1}^k i\beta^{k-i}} \max\{1, \|u\|_{2_*}\}. \quad (1.28)$$

Como  $\beta > 1$ , temos que

$$\frac{1}{\beta^k} \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i = \frac{1}{(\beta-1)}, \quad \frac{1}{\beta^k} \sum_{i=1}^k i\beta^{k-i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{\beta}\right)^i = \frac{\beta}{(\beta-1)^2}.$$

Além disso, da última desigualdade em (1.26) e de  $\|u\| \leq R_1$ , temos que

$$\|u\|_{2_*} \leq S_{2_*}^{-1/2} \|u\| \leq S_{2_*}^{-1/2} R_1 < 1.$$

As observações acima aliadas ao fato de que  $\beta = (2_* + 2 - p)/2$ ,  $C_2 > 1$ , (1.28) e (1.3) implicam que

$$\|u\|_{2_*\beta^k} \leq C_2^{1/[2(\beta-1)]} \beta^{\beta/(\beta-1)^2} = C_{N,p}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.29)$$

donde se conclui que (1.20) vale. Com efeito, suponha por contradição que exista  $C_3 > C_{N,p}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$  com medida positiva e finita em  $\mathbb{R}^{N-1}$  tal que  $|u(x', 0)| > C_3$  para q.t.p.  $x' \in \Omega$ . Então,

$$\|u\|_{2_*\beta^k} \geq \left( \int_{\Omega} |u|^{2_*\beta^k} d\sigma \right)^{1/(2_*\beta^k)} \geq C_3 |\Omega|^{1/(2_*\beta^k)},$$

o que implica que  $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u\|_{2_*\beta^k} \geq C_3 > C_{N,p}$ , contrariando (1.29). Esta contradição conclui a prova do Teorema B.  $\square$

## Capítulo 2

# Problemas com fluxo côncavo na fronteira

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio regular,  $1 < p < +\infty$ ,  $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  o operador  $p$ -laplaciano e o seguinte problema não-linear

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} u = 0, & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{q-2} u + g(x', u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $\lambda > 0$ ,  $1 < q < p$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  é a derivada parcial na direção normal externa e  $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz:

( $g_0$ )  $g \in C(\partial\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;

( $g_1$ ) existe  $\delta > 0$  tal que

$$g(x', s) = g(x', -s), \quad \forall x' \in \partial\Omega, s \in [-\delta, \delta];$$

( $g_2$ ) uniformemente em  $x' \in \partial\Omega$ , vale

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{g(x', s)}{|s|^q} = 0.$$

No primeiro resultado deste capítulo, provamos o seguinte teorema de multiplicidade.

**Teorema C.** *Suponha que  $g$  satisfaz ( $g_0$ )-( $g_2$ ). Então, para qualquer  $\lambda > 0$ , o Problema (2.1) admite uma sequência  $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$  de soluções fracas tais que  $\|u_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

No problema acima, a não-linearidade no bordo apresenta um parâmetro com sinal positivo. Com forma de ter uma certa dualidade, inspirados pelos trabalhos de [59, 64, 68] buscamos também fazer o estudo de uma equação semelhante, porém com parâmetro negativo. Para tanto, será essencial o uso de algumas propriedades do problema de autovalor de Steklov

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{p-2} u, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Mais adiante, na sub-seção 2.1.2, apresentamos com mais detalhes este problema de autovalor, trazendo os principais resultados acerca dele. De antemão, registramos que ele admite uma sequência de autovalores  $(\lambda_n)$  tal que  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  se  $n \rightarrow +\infty$ , e que o primeiro autovalor  $\lambda_1 > 0$  é simples e isolado.

No segundo resultado deste capítulo, consideramos a existência e multiplicidade de soluções fracas para o problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\lambda |u|^{q-2} u + g(u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $\lambda > 0$  e, agora, a não-linearidade  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$(g_3) \quad g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

$$(g_4) \quad g(0) = 0 \text{ e } g'(0) > \lambda_1;$$

$$(g_5) \quad \text{existe } C_1 > 0 \text{ e } r \in (2, 2_*) \text{ tais que}$$

$$|g(s)| \leq C_1(1 + |s|^{r-1}), \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

$$(g_6) \quad \text{vale}$$

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2G(s)}{|s|^2} < \lambda_1.$$

Nosso primeiro resultado para o problema (2.3) é

**Teorema D.** *Suponha que  $g$  satisfaz  $(g_3)$ -( $g_6$ ). Então existe  $\lambda^* > 0$  tal que o Problema (2.3) possui pelo menos 4 soluções não nulas, sempre que  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ .*

Em alguns casos, é possível obter uma quinta solução, conforme podemos ver no resultado abaixo

**Teorema E.** *Suponha que  $g$  satisfaz  $(g_3)$ ,  $(g_5)$  e que existe  $k \geq 2$  tal que*

$$(\tilde{g}_4) \quad g(0) = 0 \text{ e } g'(0) > \lambda_k;$$

$$(\tilde{g}_6) \quad G(s) \leq \frac{1}{2} \lambda_{k+1} s^2, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

*Então existe  $\lambda^* > 0$  tal que o problema (2.3) possui pelo menos 5 soluções não nulas, sempre que  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ .*

Apesar dos problemas (2.1) e (2.3) parecerem semelhantes, eles são estruturalmente bem diferentes entre si, o que é refletido pelas técnicas que utilizaremos para solucionar cada um.

Ao longo de todo este capítulo, vamos denotar por  $\|\cdot\|_{1,t}$  a norma em  $W^{1,t}(\Omega)$ ,  $t > 1$ , definida por

$$\|u\|_{1,t} := \left( \int_{\Omega} [|\nabla u|^t + |u|^t] dx \right)^{1/t}, \quad \forall u \in W^{1,t}(\Omega).$$

## 2.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção, enunciamos e demonstramos alguns resultados auxiliares que serão empregados ao longo do capítulo. Na primeira subseção, estabelecemos um resultado de regularidade que, ao que sabemos, é inédito e possui interesse próprio.

### 2.1.1 Um Resultado de Regularidade

Provamos aqui um resultado de regularidade que permite performar um argumento de regularização do tipo *bootstrap* para problemas com o  $p$ -laplaciano com condições de Neumann não-lineares e, por isso, será bastante útil na prova do Teorema D.

Antes de apresentar o resultado principal, vamos enunciar um resultado auxiliar que enunciamos dentro do contexto em que vamos utilizar, embora ele seja mais geral.

**Teorema 2.1.** [2, Teorema 3.9] *Se  $1 < p < +\infty$  e  $L \in (W^{1,p}(\Omega))'$ , então existe único  $v = (v_0, v_1, \dots, v_N) \in [L^{p'}(\Omega)]^{N+1}$  tal que*

$$L(u) = \int_{\Omega} uv_0 dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_{x_i} v_i dx, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Além disso,

$$\|L\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} = \left( \sum_{i=0}^N \int_{\Omega} |v_i|^p dx \right)^{1/p}.$$

Observe que podemos reescrever o resultado acima da seguinte forma: dado  $L \in (W^{1,p}(\Omega))'$ , existe único  $v = (v_0, \bar{v}) \in L^{p'}(\Omega) \times [L^{p'}(\Omega)]^N$  tal que

$$L(u) = \int_{\Omega} [uv_0 + \nabla u \cdot \bar{v}] dx, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, denotando  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_N)$ ,

$$\begin{aligned} \|L\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} &= \left( \sum_{i=0}^N \int_{\Omega} |v_i|^p dx \right)^{1/p} \\ &\geq \left( \int_{\Omega} [|v_0|^p + C|\bar{v}|^p] dx \right)^{1/p} \\ &\geq \min\{1, C\}^{1/p} \left( \int_{\Omega} [|v_0|^p + |\bar{v}|^p] dx \right)^{1/p} \\ &= \min\{1, C\}^{1/p} \|v\|_{L^{p'}(\Omega) \times [L^{p'}(\Omega)]^N}, \end{aligned}$$

em que  $C = C(p)$  é uma constante que depende apenas de  $p$  e verifica

$$C|x|^p \leq |x_1|^p + \dots + |x_N|^p, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

O resultado principal dessa sub-seção, que é uma generalização de [12, Proposição 4.1], está enunciado abaixo.

**Lema 2.1.** *Sejam*

$$p > 1, \quad s > \max \left\{ 1, \frac{p(N-1)}{(p-1)N} \right\}, \quad \gamma := \frac{Ns(p-1)}{N-1},$$

$h \in L^s(\partial\Omega)$  e  $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$  uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p \psi + |\psi|^{p-2} \psi = 0, & \text{em } \Omega, \\ |\nabla \psi|^{p-2} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = h, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Então  $\psi \in W^{1,\gamma}(\Omega)$  e existe uma constante universal  $C = C(N, s, \Omega) > 0$  tal que

$$\|\psi\|_{1,\gamma}^{p-1} \leq C \|h\|_{L^s(\partial\Omega)}. \quad (2.5)$$

*Demonstração.* Tomando  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$  como função teste na formulação fraca de (2.4),

obtemos

$$\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla\varphi + |\psi|^{p-2}\psi\varphi)dx = \int_{\partial\Omega} h\varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Temos pela desigualdade de Hölder que

$$\left| \int_{\Omega} (|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla\varphi + |\psi|^{p-2}\psi\varphi) dx \right| \leq \|h\|_{L^s(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L^{s'}(\partial\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Usamos densidade para estender a desigualdade acima para toda  $\varphi \in W^{1,t}(\Omega)$ , em que  $t$  será um valor apropriado entre 1 e  $N$ . Mais especialmente, considere

$$t := \frac{Ns}{Ns - (N-1)}.$$

Como  $1 < s < +\infty$ , temos que  $1 < t < N$ , de modo que podemos considerar o expoente crítico  $t_* := \frac{t(N-1)}{N-t}$ . Observe que

$$\begin{aligned} t_* &= \frac{t(N-1)}{N-t} = \frac{\frac{Ns(N-1)}{Ns - (N-1)}}{N - \frac{Ns}{Ns - (N-1)}} = \frac{Ns(N-1)}{N^2s - N(N-1) - Ns} \\ &= \frac{s(N-1)}{Ns - (N-1) - s} = \frac{s(N-1)}{(N-1)(s-1)} = \frac{s}{s-1} = s'. \end{aligned}$$

Como  $t_* = s'$ , podemos aplicar a imersão do traço  $W^{1,t}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_*}(\partial\Omega)$  para obter uma constante positiva  $C_1 = C_1(N, t, \Omega) = C_1(N, s, \Omega) > 0$  tal que

$$\left| \int_{\Omega} (|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla\varphi + |\psi|^{p-2}\psi\varphi) dx \right| \leq C_1 \|h\|_{L^s(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{1,t}, \quad \forall \varphi \in W^{1,t}(\Omega). \quad (2.6)$$

A desigualdade acima mostra que o funcional linear  $T_\psi : W^{1,t}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$T_\psi(\varphi) := \int_{\Omega} (|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla\varphi + |\psi|^{p-2}\psi\varphi) dx, \quad \varphi \in W^{1,t}(\Omega),$$

está bem definido, é contínuo e  $\|T_\psi\| \leq C\|h\|_{L^s(\partial\Omega)}$ . Logo,  $T_\psi \in (W^{1,t}(\Omega))'$  e podemos usar o Teorema 2.1 para obter um vetor  $v = (v_1, v_2) \in (L^{t'}(\Omega))^N \times L^{t'}(\Omega)$  tal que

$$T_\psi(\varphi) = \int_{\Omega} (v_1 \cdot \nabla\varphi + v_2\varphi) dx, \quad \forall \varphi \in W^{1,t}(\Omega).$$

Como  $t > 1$ ,  $v$  é único. Portanto, de (2.6), temos que  $v_1 = |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi$  e  $v_2 = |\psi|^{p-2}\psi$ .



Assim,  $|\psi|^{p-1}, |\nabla\psi|^{p-1} \in L^{t'}(\Omega)$  o que significa que  $\psi, |\nabla\psi| \in L^{t'(p-1)}(\Omega)$ . Note agora que

$$t' = \frac{t}{t-1} = \frac{\frac{Ns}{Ns - (N-1)}}{\frac{Ns}{Ns - (N-1)} - 1} = \frac{Ns}{Ns - Ns + (N-1)} = \frac{Ns}{N-1},$$

de modo que

$$t'(p-1) = \frac{Ns(p-1)}{N-1} = \gamma.$$

Ademais, para  $C_2 = C_2(t') = C_2(s) > 0$ ,

$$\|T_\psi\| \geq C_2 \|v\|_{(L^{t'}(\Omega))^N \times L^{t'}(\Omega)} = C_2 \left( \int_{\Omega} (|\nabla\psi|^{t'(p-1)} + |\psi|^{t'(p-1)}) dx \right)^{1/t'} = C_2 \|\psi\|_{1,\gamma}^{p-1},$$

e, portanto,

$$\|\psi\|_{1,\gamma}^{p-1} \leq C \|h\|_{L^s(\partial\Omega)},$$

onde  $C = C(N, s, \Omega) := \frac{C_1}{C_2}$ , o que encerra a prova de (2.5).  $\square$

**Observação 2.1.** Como  $s > \frac{p(N-1)}{(p-1)N}$ , temos que

$$\gamma = \frac{Ns(p-1)}{N-1} > \frac{N(p-1)}{N-1} \frac{p(N-1)}{(p-1)N} = p.$$

Logo o resultado acima efetivamente melhora a regularidade esperada da solução. Além disso, se  $p \geq N$ , então  $\frac{p(N-1)}{(p-1)N} \leq 1$  e portanto a condição sobre  $s$  pode ser trocada por  $s > 1$ . Na realidade, em qualquer um dos casos, a única condição que realmente é necessária é  $s > 1$ , porém precisamos que  $s > \frac{p(N-1)}{(p-1)N}$  para garantir que  $\gamma > p$  e que, portanto, o resultado melhora a regularidade da solução.

### 2.1.2 O problema de autovalor de Steklov

Nesta sub-seção, trazemos os principais resultados acerca do problema de autovalor de Steklov (2.2). Todas as demonstrações e demais detalhes técnicos podem ser encontradas em [53, 57]. Vale ressaltar que estes trabalhos estudam uma versão já generalizada deste problema de autovalor, considerando-o com o operador  $p$ -laplaciano,  $1 < p < +\infty$ . Primeiramente, ressaltamos que o problema de Steklov possui uma sequência de autovalores

**Teorema 2.2.** *O problema de autovalor de Steklov (2.2) admite uma sequência positiva de autovalores  $(\lambda_n)$  de modo que  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

*Demonstração.* Veja [53, Teorema 3.5].  $\square$

**Teorema 2.3.** *Sobre o primeiro autovalor do problema de Steklov, temos*

(i) *vale a caracterização variacional*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + u^2] dx : \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = 1 \right\};$$

(ii) *se  $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$  é uma autofunção de (2.2) associada à  $\lambda_1$ , então  $\varphi_1 > 0$  ou  $\varphi_1 < 0$  em  $\overline{\Omega}$ ;*

(iii)  *$\lambda_1$  é simples, isto é, se  $\varphi$  e  $\psi$  são duas autofunções de (2.2) associadas à ele, então existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi = c\psi$ ;*

(iv)  *$\lambda_1$  é isolado, isto é, existe  $a > \lambda_1$  tal que  $\lambda_1$  é o único autovalor de (2.2) em  $[0, a]$ ;*

(v) *se  $\varphi \in H^1(\Omega)$  é uma autofunção de (2.2) associada à um autovalor  $\lambda \neq \lambda_1$ , então  $\varphi$  troca de sinal sobre  $\partial\Omega$ .*

*Demonstração.* Veja [53, Lema 5.6, Teorema 5.7, Proposição 5.8 e Teorema 5.16] e [57, Equação 1.3, Teorema 1.1 e Lema 2.3].  $\square$

Para finalizar esta seção, vamos estabelecer uma notação adequada para poder tratar dos auto-espacos gerados pelas autofunções deste problema. Considere a aplicação  $A : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  dada por

$$A(u) = -\Delta u + u$$

em que  $\Delta u$  denota o laplaciano de  $u$  no sentido das distribuições. Ao operador  $A$  está associada uma forma bilinear, contínua e coerciva. Portanto, para cada  $f \in L^2(\partial\Omega)$  existe uma única  $u_f \in H^1(\Omega)$  com  $A(u_f) = 0$  em  $\Omega$  e  $u_f = f$  sobre  $\partial\Omega$ . Agora, considere o operador  $\Lambda : L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  dado por

$$\Lambda(f) = \frac{\partial u_f}{\partial \nu},$$

que nos permite escrever o problema de Steklov como

$$\Lambda(f) = \lambda f.$$

Pelo visto no Teorema 2.2, este problema admite uma sequência de autovalores. Assim, para cada  $j \in \mathbb{N}$ , podemos denotar por  $H_j := \ker(\Lambda - \lambda_j I)$  o auto-espaço gerado pelo  $j$ -ésimo autovalor do problema de Steklov. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , defina

$$X_k = \bigoplus_{j=1}^k H_j.$$

Podemos então expressar  $H^1(\Omega) = X_k \oplus X_k^\perp$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Além disso, valem as desigualdades variacionais:

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq \lambda_k \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma, \quad \forall u \in X_k, \quad (2.7)$$

e

$$\|u\|_{1,2}^2 \geq \lambda_{k+1} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma, \quad \forall u \in X_k^\perp \quad (2.8)$$

## 2.2 Prova do Teorema C

Esta seção é dedicada à prova do Teorema C. Usamos as mesmas ideias de [74] (veja também [50]). Uma vez que não sabemos nada a respeito do comportamento de  $g$  no infinito, o funcional energia  $I$  associado ao problema (2.1) pode não estar bem definido. Para contornar este obstáculo, construímos um truncamento conveniente para obter um funcional de classe  $C^1$  com boas propriedades.

**Lema 2.2.** *Suponha que  $g$  satisfaz  $(g_0)$ - $(g_2)$  e considere  $0 < \theta < \left(\frac{p-q}{q}\right)\lambda$ . Então existem  $0 < a < \delta/p$  e  $\tilde{g} \in C(\partial\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  tal que para quaisquer  $(x', s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$  valem*

$$(a) \quad \tilde{g}(x', -s) = -\tilde{g}(x', s);$$

$$(b) \quad \tilde{g}(x', s) = g(x', s) \text{ se } |s| \leq a;$$

$$(c) \quad \tilde{g}(x', s)s - p\tilde{G}(x', s) \leq \theta|s|^q;$$

$$(d) \quad |\tilde{G}(x', s)| \leq \frac{\lambda}{pq}|s|^q;$$

$$(e) \quad |\tilde{g}(x', s)| \leq \theta|s|^{q-1}.$$

*Demonstração.* Seja  $0 < \theta < \left(\frac{p-q}{q}\right)\lambda$ . Por  $(g_2)$ , para qualquer

$$0 < \epsilon < \frac{\theta}{2(p^2 + p + 1)} \quad (2.9)$$

existe  $0 < a < \delta/p$  tal que

$$|G(x', s)| \leq \epsilon|s|^q \quad \text{e} \quad |g(x', s)s| \leq \epsilon|s|^q, \quad \forall x' \in \partial\Omega, |s| \leq pa. \quad (2.10)$$

Considere  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$  uma função corte par que satisfaça

$$\begin{cases} \phi \equiv 1, & \text{em } [-a, a]; \\ \phi \equiv 0, & \text{em } \mathbb{R} \setminus (-pa, pa); \\ 0 \leq \phi \leq 1, & \text{em } \mathbb{R}; \\ \phi'(s)s \leq 0, |\phi'(s)| \leq \frac{p}{a}, & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fixe

$$0 < \beta < \frac{\theta}{2p(p+1)} \quad (2.11)$$

e considere a função de classe  $C^1$  dada por

$$\tilde{G}(x', s) = \phi(s)G(x', s) + (1 - \phi(s))\beta|s|^q.$$

Se  $|s| \leq pa$ , utilizando (2.9), (2.10) e (2.11), obtemos

$$|\tilde{G}(x', s)| \leq (\epsilon + \beta)|s|^q \leq \left(\frac{\theta}{p(p+1)}\right)|s|^q \leq \left(\frac{\lambda(p-q)}{p(p+1)q}\right)|s|^q \leq \frac{\lambda}{pq}|s|^q.$$

Se  $|s| > pa$ , então

$$|\tilde{G}(x', s)| \leq \beta|s|^q \leq \frac{\lambda}{pq}|s|^q,$$

e, com isso, temos provado o item (d). Para os demais, note inicialmente que

$$\tilde{g}(x', s) := \frac{\partial \tilde{G}}{\partial s}(x', s) = \phi'(s)[G(x', s) - \beta|s|^q] + \phi(s)g(x', s) + (1 - \phi(s))q\beta|s|^{q-2}s$$

é contínua. É fácil verificar que  $\tilde{g}(x', s) = g(x', s)$  se  $|s| \leq a$ , o que prova o item (b) e mostra que  $\tilde{g}$  é ímpar em  $s$  quando  $s \in [-a, a]$ . Além disso, como  $\phi$  se anula fora de  $(-pa, pa)$ , vale que

$$\tilde{g}(x', s) = q\beta|s|^{q-2}s, \quad |s| > pa,$$

que é ímpar em  $s$ . Por fim, se  $s \in (-pa, pa) \setminus (-a, a)$ , uma vez que  $g$  é ímpar em  $s$  quando  $s \in [-\delta, \delta]$ ,  $\phi$  é par e  $(-pa, pa) \subset (-\delta, \delta)$ , temos que  $\tilde{g}$  se exprime como somas de produtos de funções pares por funções ímpares, o que gera uma função ímpar. Assim, fica provado também o item (a).

Se  $|s| \leq pa$ , podemos usar as propriedades de  $\phi$ , (2.10) e  $q < p$  para obter

$$\begin{aligned}
|\tilde{g}(x', s)| &\leq |\phi'(s)|(|G(x', s)| + \beta|s|^q) + |g(x', s)| + q\beta|s|^{q-1} \\
&\leq \frac{p}{a}(\epsilon|s|^q + \beta|s|^q) + \epsilon|s|^{q-1} + p\beta|s|^{q-1} \\
&\leq p^2\epsilon|s|^{q-1} + p^2\beta|s|^{q-1} + \epsilon|s|^{q-1} + p\beta|s|^{q-1} \\
&\leq (p^2 + 1)\epsilon|s|^{q-1} + p(p + 1)\beta|s|^{q-1}.
\end{aligned}$$

E, portanto, segue de (2.9) e (2.11) que

$$|\tilde{g}(x', s)| \leq \frac{\theta}{2}|s|^{q-1} + \frac{\theta}{2}|s|^{q-1} = \theta|s|^{q-1}.$$

Se  $|s| > pa$ , então  $\phi(s) = 0$ . Logo,

$$|\tilde{g}(x', s)| = q\beta|s|^{q-1} \leq p\beta|s|^{q-1} \leq \theta|s|^{q-1},$$

isto é, o item (e) também está provado. Tudo o que nos resta é demonstrar o item (c). Observe que, se  $|s| \leq pa$ , podemos repetir o mesmo argumento acima para obter

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x', s)s - p\tilde{G}(x', s) &= |G(x', s)|(p + |\phi'(s)||s|) + \beta|s|^q(q + |\phi'(s)||s|) + |g(x', s)s| \\
&\leq \epsilon|s|^q(p + p^2) + \beta|s|^q(p + p^2) + \epsilon|s|^q \\
&\leq (p^2 + p + 1)\epsilon|s|^q + (p^2 + p)\beta|s|^q \\
&\leq \frac{\theta}{2}|s|^q + \frac{\theta}{2}|s|^q = \theta|s|^q.
\end{aligned}$$

Para  $|s| > pa$ , temos  $\phi = \phi' \equiv 0$ , e portanto

$$\tilde{g}(x', s)s - p\tilde{G}(x', s) = q\beta|s|^q + p\beta|s|^q \leq 2p\beta|s|^q \leq \frac{\theta}{p+1}|s|^q \leq \theta|s|^q.$$

Assim, o lema está provado. □

O Lema 2.2 (d) combinado com a imersão do traço  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$  assegura que o funcional  $\tilde{I} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\tilde{I}(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} \tilde{G}(x', u) d\sigma,$$

é de classe  $C^1$ . Usando o Lema 2.2(a) concluimos que  $\tilde{I}$  é par. Além disso, vale o seguinte:

**Lema 2.3.** *Se  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , então*

$$\tilde{I}(u) = 0 = \tilde{I}'(u)u \iff u = 0.$$

*Demonstração.* É claro que, se  $u = 0$ , então  $\tilde{I}(u) = 0 = \tilde{I}'(u)u$ . Suponha então que  $\tilde{I}(u) = 0 = \tilde{I}'(u)u$ . Usando o Lema 2.2(c), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = -p\tilde{I}(u) + \tilde{I}'(u)u &= \lambda \left( \frac{p-q}{q} \right) \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma + \int_{\partial\Omega} (p\tilde{G}(x', u) - \tilde{g}(x', u)u) d\sigma \\ &\geq \left[ \lambda \left( \frac{p-q}{q} \right) - \theta \right] \|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^q, \end{aligned}$$

o que implica que  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Neste caso,

$$0 = \tilde{I}(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p,$$

o que implica que  $u = 0$ . □

**Observação 2.2.** Suponha que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  é um ponto crítico de  $\tilde{I}$  tal que  $\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq a$ . Então,  $u$  satisfaz

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + |u|^{p-2} u \varphi) dx = \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u \varphi d\sigma + \int_{\partial\Omega} \tilde{g}(x', u) \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Porém, como  $\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq a$ , vale pelo Lema 2.2(b) que  $g(x', u) = \tilde{g}(x', u)$ . Assim, podemos reescrever a expressão acima por

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + |u|^{p-2} u \varphi) dx = \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u \varphi d\sigma + \int_{\partial\Omega} g(x', u) \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega),$$

o que significa dizer exatamente que  $u$  resolve (2.1) no sentido fraco.

Lembramos que, para  $c \in \mathbb{R}$ ,  $X$  um espaço de Banach e  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ , uma sequência  $(u_n) \subset X$  é chamada *sequência Palais-Smale para  $J$  no nível  $c$*  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} J'(u_n) = 0.$$

Quando toda sequência deste tipo possui subsequência convergente, dizemos que  $J$  satisfaz a *condição de Palais-Smale no nível  $c$* .

Para obter os pontos críticos de  $\tilde{I}$ , faremos uso do resultado a seguir.

**Teorema 2.4.** [74, Lema 2.4] *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Suponha que  $J$  satisfaça a condição de Palais-Smale, seja par, limitado inferiormente e que  $J(0) = 0$ . Suponha ainda que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existam um subespaço  $X_k \subset X$  com dimensão  $k$  e  $\rho_k > 0$  tais que*

$$\sup_{u \in X_k \cap \mathbb{S}_{\rho_k}} J(u) < 0,$$

em que  $\mathbb{S}_{\rho_k} = \{u \in X : \|u\|_X = \rho_k\}$ . Então,  $J$  possui uma sequência de valores críticos

$c_k < 0$  tais que  $c_k \rightarrow 0$  se  $k \rightarrow +\infty$ .

No nosso primeiro resultado, vamos provar que  $\tilde{I}$  satisfaz a condição de compacidade requerida no teorema acima.

**Lema 2.4.** *O funcional  $\tilde{I}$  é coercivo e satisfaz a condição de Palais-Smale em qualquer nível  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Fazendo uso do Lema 2.2(d) e da imersão do traço  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{I}(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda(p+1)}{qp} \|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^q \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^q \left[ \|u\|_{1,p}^{p-q} - \frac{\lambda(p+1)C_1}{q} \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que  $p > q$ , concluímos que  $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \tilde{I}(u) = +\infty$ , isto é,  $\tilde{I}$  é coercivo.

Fixe  $c \in \mathbb{R}$  e considere  $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\tilde{I}(u_n) \rightarrow c$  e  $\tilde{I}'(u_n) \rightarrow 0$ . Uma vez que  $\tilde{I}$  é coercivo,  $(u_n)$  é limitada. A menos de subsequência, existe  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $W^{1,p}(\Omega)$  e  $u_n \rightarrow u$  em  $L^q(\partial\Omega)$ . Pela desigualdade de Hölder e do Lema 2.2(e) temos que

$$\int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) d\sigma \leq \|u_n\|_{L^q(\partial\Omega)}^{q-1} \|u_n - u\|_{L^q(\partial\Omega)} = o_n(1),$$

e

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{g}(x', u_n)(u_n - u) d\sigma \leq \theta \|u_n\|_{L^q(\partial\Omega)}^{q-1} \|u_n - u\|_{L^q(\partial\Omega)} = o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{I}'(u_n)(u_n - u) &= \int_{\Omega} [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) + |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u)] dx \\ &\quad - \lambda \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) d\sigma - \int_{\partial\Omega} \tilde{g}(x', u_n)(u_n - u) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) + |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Como  $o_n(1) = \tilde{I}'(u_n)(u_n - u)$ , concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) + |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u)] dx = 0. \quad (2.12)$$

Da convergência fraca  $u_n \rightharpoonup u$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ , temos que

$$\|u\|_{1,p} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{1,p}. \quad (2.13)$$

Argumentando como em [36], considere o funcional de classe  $C^1$   $F : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$F(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} [|\nabla v|^p + |v|^p] dx = \frac{1}{p} \|v\|_{1,p}^p.$$

Observe que  $F$  é de classe  $C^1$  e convexo. Assim, usando (2.12), obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} [F(u) - F(u_n)] \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F'(u_n)(u - u_n) = 0.$$

Segue então de (2.13) que

$$\|u\|_{1,p}^p = pF(u) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} pF(u_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{1,p}^p \geq (\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{1,p})^p \geq \|u\|_{1,p}^p,$$

o que mostra que  $\|u_n\|_{1,p} \rightarrow \|u\|_{1,p}$  em  $\mathbb{R}$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Como já possuímos a convergência fraca de  $u_n$  para  $u$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ , segue da convexidade uniforme deste espaço que  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $W^{1,p}(\Omega)$ , o que finaliza a prova.  $\square$

O resultado a seguir fornece a hipótese geométrica do nosso teorema abstrato.

**Lema 2.5.** *Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe um número  $\rho_k > 0$  e um subespaço  $X_k \subset W^{1,p}(\Omega)$  de dimensão  $k$  tais que*

$$\sup_{u \in X_k \cap \mathbb{S}_{\rho_k}} \tilde{I}(u) < 0,$$

em que  $\mathbb{S}_{\rho_k} := \{u \in X : \|u\|_{1,p} = \rho_k\}$ .

*Demonstração.* Fixe  $k$  pontos distintos  $x'_1, \dots, x'_k \in \partial\Omega$  e considere  $r > 0$  tal que  $\overline{B_r(x'_i)} \cap \overline{B_r(x'_j)} = \emptyset$ , para todo  $i, j = 1, \dots, k$ , com  $i \neq j$ . Para cada  $i = 1, \dots, k$ , escolhamos uma função suave  $\phi_i \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $\phi_i \equiv 1$  em  $B_i := \overline{B_{r/2}(x_i)} \cap \overline{\Omega}$  e  $\phi_i \equiv 0$  em  $\overline{\Omega} \setminus B_r(x_i)$ .

Uma vez que estas funções possuem suportes disjuntos, o conjunto  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$  é linearmente independente, e o subespaço gerado  $X_k := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subset W^{1,p}(\Omega)$  possui dimensão  $k$ . Afirmamos que a aplicação

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} = \left( \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^{1/q},$$

definem uma norma em  $X_k$ . De fato, vejamos que  $\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} > 0$  para qualquer  $u \neq 0$ . Seja  $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi_i$  uma função não-nula. Com isso, pelo menos um dos coeficientes  $\alpha_i$  é



não-nulo. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^q &= \int_{\partial\Omega} |\alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_k\phi_k|^q d\sigma \\
&\geq \sum_{i=1}^k \int_{B_i} |\alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_k\phi_k|^q d\sigma \\
&= \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^q \int_{B_i} d\sigma > 0,
\end{aligned}$$

já que os conjuntos  $B_i$  são disjuntos e  $\phi_i \equiv 1$  em  $B_i$ . As demais propriedades que uma norma verifica são naturalmente satisfeitas. Agora, como  $\dim X_k < \infty$ , podemos obter  $C = C(k) > 0$  tal que

$$C(k)\|u\|_{1,p}^q \leq \|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^q, \quad \forall u \in X_k.$$

Combinando o feito acima com o Lema 2.2(d), para todo  $u \in X_k$  vale

$$\begin{aligned}
\tilde{I}(u) &\leq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma + \frac{\lambda}{pq} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \\
&= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^q \left[ \frac{\lambda(p-1)}{pq} \right] \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^q \left( \|u\|_{1,p}^{p-q} - \frac{\lambda(p-1)}{q} C(k) \right).
\end{aligned}$$

Consequentemente, definindo  $\rho_k = \left( \frac{\lambda(p-1)}{2q} C(k) \right)^{1/(p-q)} > 0$ , obtemos que

$$\tilde{I}(u) \leq \frac{\lambda\rho_k^q(1-p)C(k)}{2pq} < 0, \quad \forall u \in \mathbb{S}_{\rho_k}^k,$$

finalizando assim a demonstração. □

Agora, estamos em condições de apresentar a prova do Teorema C.

*Prova do Teorema C.* Usando os lemas anteriores e o Teorema 2.4, obtemos uma sequência de valores críticos  $(c_k)$  do funcional  $\tilde{I}$  tal que  $c_k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , considere  $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$  um ponto crítico de  $\tilde{I}$  tal que  $\tilde{I}(u_k) = c_k$ . Naturalmente,  $(u_k)$  é uma sequência de Palais-Smale de  $\tilde{I}$  no nível 0. Decorre do Lema 2.4 que, a menos de subsequência, existe  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  de modo que  $u_k \rightarrow u$  fortemente em  $W^{1,p}(\Omega)$ . Da regularidade de  $\tilde{I}$ , segue que  $\tilde{I}(u) = 0$  e  $\tilde{I}'(u) = 0$ . Assim, segue do Lema 2.3 que  $u = 0$ , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{1,p} = 0. \quad (2.14)$$

Sendo  $\tilde{I}'(u_k) = 0$ , então  $u_k$  é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u_k + |u_k|^{p-2} u_k = 0, & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u_k|^{p-2} \frac{\partial u_k}{\partial \nu} = h_k, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que

$$h_k(x') := \lambda |u_k|^{q-2} u_k + \tilde{g}(x', u_k).$$

Usando o Lema 2.2(e), temos que

$$|h_k(x')| \leq (\lambda + \theta) |u_k|^{q-1}. \quad (2.15)$$

Agora, temos dois casos a considerar

Caso 1:  $1 < p < N$

Como  $u_k \in L^{p^*}(\partial\Omega)$ , então  $h_k \in L^{p^*/(q-1)}(\partial\Omega)$ . Uma vez que  $1 < q < p$ , valem

$$\frac{p_*}{q-1} = \frac{p(N-1)}{(N-p)(q-1)} > \frac{p}{q-1} > 1, \quad \frac{p_*}{q-1} > \frac{p_*}{p-1} > \frac{p(N-1)}{(p-1)N}.$$

Desse modo, podemos aplicar o Lema 2.1 com  $s = p_*/(q-1)$  para concluir que

$$u_k \in W^{1,\gamma_1}(\Omega), \quad \text{com } \gamma_1 = \frac{Np_*(p-1)}{(q-1)(N-1)} > p_*$$

e

$$\|u_k\|_{1,\gamma_1}^{p-1} \leq C(N, p, q, \Omega) \|h_k\|_{L^{p^*/(q-1)}(\partial\Omega)}.$$

Além do mais, de (2.15), da imersão do traço de Sobolev e de (2.14), segue que

$$\|h_k\|_{L^{p^*/(q-1)}(\partial\Omega)} \leq C_1(\lambda, \theta, p, q, N, \Omega) \|u_k\|_{1,p}^{q-1} \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty.$$

Combinando as duas últimas expressões, concluímos que  $\|u_k\|_{1,\gamma_1} \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Se  $\gamma_1 > N$ , então  $W^{1,\gamma_1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\partial\Omega)$  e portanto  $\|u_k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ . Assim, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  grande o suficiente de modo que  $\|u_k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq a$ , para qualquer  $k \geq k_0$ . Das considerações feitas na Observação 2.2,  $\{u_k\}_{k \geq k_0}$  é uma sequência de soluções fracas de (2.1).

Se  $\gamma_1 = N$ , podemos usar imersão do traço para concluir que  $u_k \in L^t(\Omega)$ , para qualquer  $t \geq \gamma_1$ . Assim,  $h_k \in L^{t/(q-1)}(\partial\Omega)$  para tais valores de  $t$ . Usando novamente o

Lema 2.1, concluimos que

$$u_k \in W^{1,\gamma}(\Omega), \text{ com } \gamma = \frac{Nt(p-1)}{(q-1)(N-1)} > N,$$

para  $t > 1$  grande. Portanto,  $u_k \in L^\infty(\partial\Omega)$  e

$$\|u_k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C\|u_k\|_{1,\gamma} \leq C\|h_k\|_{L^{r/(q-1)}(\partial\Omega)}^{1/(p-1)} \leq C\|u_k\|_{1,\gamma_1}^{(q-1)/(p-1)} \rightarrow 0, \quad \text{se } k \rightarrow +\infty,$$

e novamente o resultado segue.

Resta considerar o caso em que  $\gamma_1 < N$ , no qual faremos um argumento do tipo *bootstrap*. Observe inicialmente que

$$\frac{\gamma_1}{p_*} = \frac{N(p-1)}{(q-1)(N-1)} =: \beta > 1.$$

Com isso,  $\gamma_1 = \beta p_*$ . Já que  $u_k \in L^{(\gamma_1)*}(\partial\Omega)$ , temos que  $h_k \in L^{(\gamma_1)*/(q-1)}(\partial\Omega)$ . Como  $\gamma_1 > p_*$ , obtemos

$$\frac{(\gamma_1)_*}{q-1} > \frac{p_*}{q-1} > \frac{p(N-1)}{(p-1)N} > 1.$$

Aplicando o Lema 2.1 com  $s = (\gamma_1)_*/(q-1)$ , concluimos que

$$u_k \in W^{1,\gamma_2}(\Omega), \text{ com } \gamma_2 = \frac{N(\gamma_1)_*(p-1)}{(q-1)(N-1)} > (\gamma_1)_*.$$

Mais ainda,

$$\|u_k\|_{1,\gamma_2}^{p-1} \leq C\|h_k\|_{L^{(\gamma_1)_*/(q-1)}(\partial\Omega)} \leq C\|u_k\|_{1,\gamma_1}^{q-1} \rightarrow 0, \quad \text{se } k \rightarrow +\infty.$$

Além disso,

$$\frac{\gamma_2}{(\gamma_1)_*} = \frac{N(p-1)}{(q-1)(N-1)} = \beta$$

e portanto

$$\gamma_2 = \alpha(\gamma_1)_* > \alpha\gamma_1 = \alpha^2 p_*.$$

Se  $\gamma_2 \geq N$ , o resultado segue como antes. Caso contrário, poderemos ir repetindo todos os passos feitos de modo recursivo, obtendo uma sequência  $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$  tal que

$$u_k \in W^{1,\gamma_n}(\Omega), \text{ com } \gamma_n > \alpha^n p_*, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{1,\gamma_n} \rightarrow 0.$$

Como  $\alpha > 1$  e  $\gamma_n > \alpha^n p_*$ , segue que  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Portanto, escolhendo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, temos que  $\gamma_n > N$  e assim podemos finalizar a prova para este caso.

Caso 2:  $p \geq N$

Neste caso, a imersão de Sobolev implica que  $u_k \in L^t(\partial\Omega)$  para todo  $t \geq p$ . Assim, como  $h_k \in L^{t/(q-1)}(\partial\Omega)$  e do Lema 2.1 temos que

$$u_k \in W^{1,\gamma}(\Omega), \text{ com } \gamma = \frac{Nt(p-1)}{N-1} \geq Nt > N$$

e

$$\|u_k\|_{1,\gamma}^{p-1} \leq C\|h_k\|_{L^{t/(q-1)}(\partial\Omega)} \leq C\|u_k\|_{1,p}^{q-1} \rightarrow 0, \text{ se } k \rightarrow +\infty.$$

Como  $\gamma > N$ , segue que  $u_k \in L^\infty(\partial\Omega)$  e

$$\|u_k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C\|u_k\|_{1,\gamma} \rightarrow 0, \text{ se } k \rightarrow +\infty,$$

donde o resultado segue. □

## 2.3 Mínimos locais nas topologias $H^1$ e $C^1$

Nesta seção, iniciamos o estudo do problema (2.3). Inicialmente, observe que soluções fracas de (2.3) são exatamente os pontos críticos do funcional energia  $J_\lambda : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx + \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u) d\sigma,$$

em que  $G(s) := \int_0^s g(t) dt$ . Usando  $(g_5)$  e as imersões do traço de Sobolev podemos mostrar que  $J_\lambda$  está bem definido e é de classe  $C^1$ .

Para podermos atacar apropriadamente o problema (2.3), precisamos provar um resultado abstrato acerca do funcional energia associado a este problema. Para tanto, faremos uso dos dois importantes resultados de regularidade a seguir:

**Teorema 2.5.** [53, Teorema 4.4] *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado,  $1 < p < +\infty$  e  $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$  uma solução fraca de*

$$-\Delta_p u = f(x, u), \quad \text{em } \Omega,$$

*em que  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Carathéodory. Considere  $g(x) = f(x, u_0)$ , a qual está definida q.t.p. em  $\Omega$ . Se*

$$g \in L^s(\Omega), \text{ com } s > \frac{p}{p-1}N,$$

então  $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$  para algum  $0 < \alpha < 1$ . Em particular, o resultado vale se  $g \in L^\infty(\Omega)$ .

**Teorema 2.6.** [53, Teorema 4.9] *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado com fronteira  $C^{1,\gamma}$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ . Seja  $u_0 \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  uma solução fraca e limitada do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x), & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \phi(x', u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ . Suponha que  $g \in L^\infty(\Omega)$  com  $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$  e  $\phi$  satisfaça

$$|\phi(x, z) - \phi(y, w)| \leq L[|x - y|^\gamma + |z - w|^\gamma], \quad |\phi(x, z)| \leq L,$$

para todo  $(x, z), (y, w) \in \partial\Omega \times [-M, M]$ . Então, existe  $\alpha = \alpha(\gamma, N, p, M, K) \in (0, 1)$  tal que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C = C(\gamma, N, p, M, K, L, \Omega).$$

Os dois resultados acima são ferramentas para mostrar regularidade do tipo  $C^{1,\alpha}$ . O primeiro mostra essa regularidade no interior, enquanto o segundo a transporta até o bordo. Tendo eles em mãos, podemos nos voltar ao principal resultado dessa seção, o qual permite, em linhas gerais, obter mínimos locais do funcional buscando-os apenas na topologia de  $C^1$ , que é consideravelmente menor. Existem vários trabalhos que fazem este tipo de resultado (veja [45, 51, 59, 64]). O mais clássico deles é o célebre trabalho de Brezis-Nirenberg [21], do qual o resultado abaixo é uma versão.

**Teorema 2.7.** *Suponha que  $u_0 \in H^1(\Omega)$  seja um mínimo local de  $J_\lambda$  na topologia  $C^1$ . Então  $u_0$  é também mínimo local de  $J_\lambda$  na topologia  $H^1$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que

$$J_\lambda(u_0) \leq J_\lambda(u_0 + v), \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \|v\|_{C^1} < \delta. \quad (2.16)$$

Fixe  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  com  $\|v\|_{C^1} = 1$  e defina  $f_v : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_v(t) = J_\lambda(u_0 + tv).$$

Por (2.16), vale que  $f_v(0) \leq f_v(t)$  para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ . Como  $f_v$  é de classe  $C^1$ , isso implica que  $f'_v(0) = 0$ . Em outras palavras,  $J'_\lambda(u_0)v = 0$ . Da arbitrariedade da escolha de  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  na esfera de raio 1 e pela linearidade da aplicação  $v \in C^1(\overline{\Omega}) \mapsto J'_\lambda(u_0)v \in \mathbb{R}$ , segue que

$$J'_\lambda(u_0)v = 0, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Uma vez que  $C^1(\overline{\Omega})$  é denso em  $H^1(\Omega)$ , segue que  $J'_\lambda(u_0) = 0$ . Portanto,  $u_0$  é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + u_0 = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = -\lambda|u_0|^{q-2}u_0 + g(u_0), & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definindo  $f(s) := -\lambda|s|^{q-2}s + g(s)$ , em virtude de  $(g_5)$ , vale que

$$|f(s)| \leq \lambda|s|^{q-1} + C_1(1 + |s|^{r-1}), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Como  $u_0 \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\partial\Omega)$  e  $1 < q < 2 < r$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |f(u_0)|^{2^*/(r-1)} d\sigma &\leq \int_{\partial\Omega} \left[ \lambda|u_0|^{q-1} + C_1(1 + |u_0|^{r-1}) \right]^{2^*/(r-1)} d\sigma \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \left[ \lambda(1 + |u_0|^{r-1}) + C_1(1 + |u_0|^{r-1}) \right]^{2^*/(r-1)} d\sigma \\ &\leq (\lambda + C_1)^{2^*/(r-1)} \int_{\partial\Omega} \left[ |u_0|^{r-1} + 1 \right]^{2^*/(r-1)} d\sigma \\ &\leq 2^{r-1}(\lambda + C_1)^{2^*/(r-1)} \int_{\partial\Omega} |u_0|^{2^*} + 1 d\sigma < +\infty, \end{aligned}$$

e portanto  $f(u_0) \in L^{2^*/(r-1)}(\partial\Omega)$ . Usando  $2 < r < 2_*$  e  $N \geq 3$ , obtemos

$$\begin{aligned} r - 1 < 2_* - 1 = \frac{N}{N-2} &\implies \frac{1}{N} < \frac{1}{(N-2)(r-1)} \\ &\implies \frac{2_*}{r-1} = \frac{2(N-1)}{(N-2)(r-1)} > \frac{2(N-1)}{N} > 1. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1, com  $s = 2_*/(r-1)$  segue que

$$u_0 \in W^{1,\gamma_1}(\Omega), \quad \text{com } \gamma_1 = \frac{2_*N}{(r-1)(N-1)} > 2, \quad (2.17)$$

em que usamos ainda a conta feita na Observação 2.1 para garantir que  $\gamma_1 > 2$ .

Vamos considerar agora 3 casos distintos.

Caso 1:  $\gamma_1 > N$

Neste caso, devido às imersões de Sobolev,  $u_0 \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , para algum  $0 < \alpha < 1$ . Em particular,  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ . Assim, uma vez que  $-\Delta u_0 = -u_0$  em  $\Omega$ , segue do Teorema 2.5 que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ .

Precisamos agora garantir a regularidade no bordo. Observe que  $f$  se decompõe na soma de  $-\lambda|s|^{q-2}s$ , que é Hölder contínua com expoente  $q-1$ , o termo  $g(s)$  que, por ser de classe  $C^1$ , é localmente Lipschitz e, portanto, localmente Hölder com qualquer expoente.

Se  $M = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ , existe  $L_1 = L_1(M) > 0$  tal que

$$|g(s) - g(t)| \leq L_1 |s - t|^{q-1}, \quad \forall s, t \in [-M, M].$$

Também, pelo que já foi já comentado acima, existe  $L_1 > 0$ , independente de  $M$  tal que

$$|-\lambda|s|^{q-2}s - (-\lambda|t|^{q-2}t)| \leq L_2 |s - t|^{q-1}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Com isso, sendo  $L_3 = \max\{L_1, L_2\} > 0$ ,

$$|f(s) - f(t)| \leq L_3 |s - t|^{q-1}, \quad \forall s, t \in [-M, M].$$

Além disso, segue do crescimento de  $g$  que, para qualquer  $s \in [-M, M]$ , vale

$$|f(s)| \leq \lambda|s|^{q-1} + |g(s)| \leq \lambda M^{q-1} + C_1(1 + M^{r-1}) =: L_4.$$

Escolhendo-se  $L := \max\{L_3, L_4\}$ , estamos em condições de aplicar o Teorema 2.6 (veja também [54, Teorema 2]) para garantir que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

### Caso 2: $\gamma_1 = N$

Este caso é bem semelhante. De fato, teremos pelas imersões de Sobolev que  $u_0 \in L^t(\Omega)$  para todo  $t \geq 1$ . Aplicando o Teorema 2.5, ganhamos que  $u_0$  é de classe  $C^{1,\alpha}(\Omega)$ , para algum  $0 < \alpha < 1$ . Para conseguir a regularidade no bordo, basta proceder como no caso anterior.

### Caso 3: $\gamma_1 < N$

Nesta situação, faremos a aplicação do bootstrap. Já observamos anteriormente que  $u_0 \in W^{1,\gamma_1}(\Omega)$ , com  $\gamma_1 > 2$  dado em (2.17). Além disso,

$$\frac{\gamma_1}{2} = \frac{2_* N}{2(r-1)(N-1)} = \frac{N}{(r-1)(N-2)} = \frac{2_* - 1}{r-1} =: \beta > 1.$$

Pela imersão do traço, temos que  $u_0 \in L^{(\gamma_1)*}(\partial\Omega)$ , de onde se conclui que  $f(u_0) \in L^{(\gamma_1)*/(r-1)}(\partial\Omega)$ . Sendo  $\gamma_1 > 2$ ,  $r < 2_*$  e  $N \geq 3$ , concluímos que

$$\frac{(\gamma_1)_*}{r-1} > \frac{2_*}{r-1} > \frac{2(N-1)}{N} > 1.$$

Com isso, aplicando novamente o Lema 2.1, obtemos que

$$u_0 \in W^{1,\gamma_2}(\Omega), \quad \text{com} \quad \gamma_2 = \frac{N(\gamma_1)_*}{(N-1)(r-1)}.$$

Se  $\gamma_2 \geq N$ , repetimos o argumento usando nos casos anteriores para concluir que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Caso isso não ocorra, perceba que

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\frac{N(\gamma_1)_*}{(N-1)(r-1)}}{\frac{2_*N}{(N-1)(r-1)}} = \frac{(\gamma_1)_*}{2_*} = \frac{\frac{\gamma_1(N-1)}{N-\gamma_1}}{\frac{2(N-1)}{N-2}} = \frac{\gamma_1(N-2)}{2(N-\gamma_1)} > \frac{\gamma_1}{2} = \beta.$$

Portanto,  $\gamma_2 > \frac{\gamma_1^2}{2} = 2\beta^2$ . Iterando esse processo obtemos, no próximo passo de iteração,

$$u_0 \in W^{1,\gamma_3}(\Omega), \quad \text{com } \gamma_3 = \frac{N(\gamma_2)_*}{(N-1)(r-1)}.$$

Além disso,

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_2} = \frac{(\gamma_2)_*}{(\gamma_1)_*} = \frac{\gamma_2(N-\gamma_1)}{\gamma_1(N-\gamma_2)} > \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Assim,

$$\gamma_3 > \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} > \frac{\gamma_1^4}{4\gamma_1} = \frac{\gamma_1^3}{4} = 2\beta^3.$$

Rekursivamente, obteremos uma sequência crescente  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $u_0 \in W^{1,\gamma_n}(\Omega)$  e  $\gamma_n > 2\beta^n$ . Uma vez que  $\beta > 1$ , segue que  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  se  $n \rightarrow +\infty$ . Logo, em algum momento, teremos  $\gamma_n > N$  e o Caso 1 mostra que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Afim de provar o teorema vamos supor, por contradição, que  $u_0$  não é mínimo local de  $J_\lambda$  na topologia de  $H^1$ . Isso significa que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $v_\epsilon \in H^1(\Omega)$  com  $\|v_\epsilon\|_{1,2} \leq \epsilon$  tal que

$$J_\lambda(u_0 + v_\epsilon) < J_\lambda(u_0). \quad (2.18)$$

Afirmamos que  $J_\lambda$  é fracamente semicontínuo inferiormente. Com efeito, sejam  $(u_n) \subset H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$  tais que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $H^1(\Omega)$ . Então,  $(u_n)$  é limitada e, a menos de subsequência, vale para todo  $1 \leq s < 2_*$  que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u, & \text{em } L^s(\partial\Omega), \\ u_n(x') \rightarrow u(x'), & \text{q.t.p. } x' \in \partial\Omega, \\ \exists \phi_s \in L^s(\partial\Omega) \text{ tal que } |u_n(x')| \leq \phi_s(x') & \text{q.t.p. } x' \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u_n|^q d\sigma = \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma.$$

Além disso, de  $(g_3)$ , vale que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(u_n(x')) = G(u(x')), \quad \text{q.t.p. } x' \in \partial\Omega.$$



Por outro lado, de  $(g_5)$ ,

$$G(u_n(x')) \leq C(|u_n(x')| + |u_n(x')|^r) \leq C(\phi_1(x') + |\phi_r(x')|^r) \in L^1(\partial\Omega).$$

Decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} G(u_n) d\sigma = \int_{\partial\Omega} G(u) d\sigma.$$

Portanto, como a norma é fracamente semicontínua inferiormente, segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} J_\lambda(u_n) &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \|u_n\|_{1,2}^2 + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u_n|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u_n) d\sigma \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u) d\sigma = J_\lambda(u). \end{aligned}$$

Como  $H^1(\Omega)$  é reflexivo e separável, a bola fechada

$$\overline{B}_\epsilon(u_0) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \|u_0 - v\|_{1,2} \leq \epsilon \right\},$$

é compacta e metrizável na topologia fraca de  $H^1$ . Usando resultados clássicos de Análise Funcional (veja por exemplo [19, p. 11]), concluímos que  $J_\lambda|_{\overline{B}_\epsilon(u_0)}$  é limitado inferiormente e que o ínfimo é atingido. Sem perda de generalidade, denotaremos o elemento que atinge este ínfimo também por  $u_0 + v_\epsilon$ . Desta forma,

$$J_\lambda(u_0 + v_\epsilon) = \inf_{v \in H^1(\Omega), \|v\|_{1,2} \leq \epsilon} J_\lambda(u_0 + v). \quad (2.19)$$

Observe que  $v_\epsilon$  minimiza o funcional  $v \in H^1(\Omega) \mapsto J_\lambda(u_0 + v)$  quando restrito à bola fechada  $\overline{B}_\epsilon(0)$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que, na realidade,  $\|v_\epsilon\|_{1,2} = \epsilon$  pois, do contrário, bastaria considerar que estamos na bola de raio  $\epsilon' < \epsilon$  em que  $\epsilon' = \|v_\epsilon\|_{1,2}$ . Assim,  $v_\epsilon$  minimiza o funcional  $v \in H^1(\Omega) \mapsto J_\lambda(u_0 + v)$  restrito à esfera

$$S_\epsilon = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,2} = \epsilon\} = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \Psi(v) := \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx = \epsilon^2 \right\}.$$

Usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange obtemos  $\mu_\epsilon \in \mathbb{R}$  tal que

$$J'_\lambda(u_0 + v_\epsilon)\varphi = \mu_\epsilon \Psi'(v_\epsilon)\varphi, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (2.20)$$

Afirmção:  $\mu_\epsilon \leq 0$  para todo  $\epsilon > 0$ .

Por absurdo, suponha que para algum  $\epsilon > 0$  se tenha  $\mu_\epsilon > 0$ . Considere a aplicação

$$h(t) := J_\lambda(u_0 + (1-t)v_\epsilon), \quad t \in [0, 1].$$

Note que  $h$  é de classe  $C^1([0, 1])$ ,  $h(0) = J_\lambda(u_0 + v_\epsilon)$  e  $h(1) = J_\lambda(u_0)$ . Por outro lado, usando a definição de  $h$  e (2.20), obtemos

$$h'(0) = J'_\lambda(u_0 + v_\epsilon)(-v_\epsilon) = \mu_\epsilon \Psi'(v_\epsilon)(-v_\epsilon) = -2\mu_\epsilon \|v_\epsilon\|_{1,2}^2 = -2\mu_\epsilon \epsilon^2 < 0.$$

Assim, existe  $\tau \in (0, 1)$  de tal maneira que  $h(0) > h(\tau)$ , ou seja

$$J_\lambda(u_0 + v_\epsilon) > J_\lambda(u_0 + (1 - \tau)v_\epsilon).$$

Entretanto, a desigualdade acima entra em contradição com (2.19), uma vez que

$$\|(1 - \tau)v_\epsilon\|_{1,2} = (1 - \tau)\|v_\epsilon\|_{1,2} = (1 - \tau)\epsilon < \epsilon.$$

Logo,  $\mu_\epsilon \leq 0$  para todo  $\epsilon > 0$ .

Dada  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , segue de (2.20) que

$$\begin{aligned} (1 - 2\mu_\epsilon) \int_{\Omega} (\nabla v_\epsilon \nabla \varphi + v_\epsilon \varphi) dx + \int_{\Omega} (\nabla u_0 \nabla \varphi + u_0 \varphi) dx \\ = -\lambda \int_{\partial\Omega} |u_0 + v_\epsilon|^{q-2} (u_0 + v_\epsilon) \varphi d\sigma \\ + \int_{\partial\Omega} g(u_0 + v_\epsilon) \varphi d\sigma. \end{aligned}$$

Em outras palavras,  $v_\epsilon$  é uma solução fraca de

$$\begin{cases} (1 - 2\mu_\epsilon)(-\Delta v_\epsilon + v_\epsilon) - \Delta u_0 + u_0 = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial(u_0 + v_\epsilon)}{\partial\nu} = -\lambda|u_0 + v_\epsilon|^{q-2}(u_0 + v_\epsilon) + g(u_0 + v_\epsilon), & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entretanto, uma vez que  $u_0$  satisfaz (2.3) e usando que  $\mu_\epsilon \leq 0$ , obtemos que  $v_\epsilon$  é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta v_\epsilon + v_\epsilon = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v_\epsilon}{\partial\nu} = -\lambda|u_0 + v_\epsilon|^{q-2}(u_0 + v_\epsilon) + \lambda|u_0|^{q-2}u_0 + g(u_0 + v_\epsilon) - g(u_0), & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Considere a aplicação  $k : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} k(x', s) = & -\lambda|u_0(x') + s|^{q-2}(u_0(x') + s) + \lambda|u_0(x')|^{q-2}u_0(x') \\ & + g(u_0(x') + s) - g(u_0(x')). \end{aligned}$$

Utilizando que  $1 < q < 2 < r$  e o crescimento de  $g$ , concluímos que:

$$\begin{aligned} |k(x', s)| &\leq \lambda(|u_0 + s|^{q-1} + |u_0|^{q-1}) + |g(u_0 + s)| + |g(u_0)| \\ &\leq \lambda(2 + |u_0 + s|^{r-1} + |u_0|^{r-1}) + C_1(2 + |u_0 + s|^{r-1} + |u_0|^{r-1}) \\ &\leq C_2(1 + |u_0|^{r-1} + |s|^{r-1}), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$|k(x', v_\epsilon(x'))| \leq C_2(1 + |u_0|^{r-1} + |v_\epsilon|^{r-1}). \quad (2.21)$$

A regularidade de  $x' \mapsto k(x', v_\epsilon(x'))$  é determinada apenas pela regularidade de  $v_\epsilon$ , uma vez que  $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ . O nosso objetivo agora é mostrar que  $v_\epsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ . Para tanto, vamos aplicar novamente os resultados de regularidade que utilizamos para mostrar que  $u_0$  era suave. Primeiramente, como  $v_\epsilon \in L^{2*}(\partial\Omega)$ ,  $k(\cdot, v_\epsilon) \in L^{2*/(r-1)}(\partial\Omega)$ . Aplicando o Lema 2.1 como antes, temos que  $v_\epsilon \in W^{1,\gamma_1}(\Omega)$ . Mais ainda, pela parte final do Lema 2.1, existe  $C_3 = C_3(\Omega, N, r) > 0$  que independe de  $\epsilon$  de forma que

$$\|v_\epsilon\|_{1,\gamma_1} \leq C_3 \|k(\cdot, v_\epsilon)\|_{L^{2*/(r-1)}(\partial\Omega)}. \quad (2.22)$$

Vamos calcular o valor do termo no lado direito da desigualdade acima. Para tanto, observe que deduz-se facilmente da construção de  $v_\epsilon$  que  $v_\epsilon \rightarrow 0$  em  $H^1(\Omega)$ . Assim, existe  $\phi \in L^{2*}(\partial\Omega)$  tal que, a menos de subsequência, vale que

$$\begin{cases} |v_\epsilon| \leq \phi, & \text{q.t.p. sobre } \partial\Omega, \\ v_\epsilon, \nabla v_\epsilon \rightarrow 0, & \text{q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

Denotando por  $(v_\epsilon)$  esta subsequência, usando (2.21) e o disposto acima, temos que

$$\begin{aligned} \|k(\cdot, v_\epsilon)\|_{L^{2*/(r-1)}(\partial\Omega)}^{2*/(r-1)} &\leq \int_{\partial\Omega} [C_2(1 + |u_0|^{r-1} + |v_\epsilon|^{r-1})]^{2*/(r-1)} d\sigma \\ &\leq C_4 \int_{\partial\Omega} (1 + |u_0|^{2*} + |v_\epsilon|^{2*}) d\sigma \\ &\leq C_4 \int_{\partial\Omega} (1 + |u_0|^{2*} + |\phi|^{2*}) d\sigma = C_5. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|k(\cdot, v_\epsilon)\|_{L^{2*/(r-1)}(\partial\Omega)}$  é limitada por uma constante que não depende de  $\epsilon$ . Segue de (2.22) que  $(v_\epsilon)$  é também limitada em  $W^{1,\gamma_1}(\Omega)$  por uma constante independente de  $\epsilon$ .

Se  $\gamma_1 > N$ , as imersões de Sobolev implicam que  $v_\epsilon \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Além disso,  $(v_\epsilon)$  é limitada em  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  por uma constante que não depende de  $\epsilon$ . Se  $\gamma_1 = N$ , o mesmo acontece, só que dessa vez, com a norma de  $L^s(\partial\Omega)$ , qualquer que seja o valor de  $s \geq \gamma_1$ . Assim, procedendo de maneira similar ao feito acima, é possível mostrar que  $\|k(\cdot, v_\epsilon)\|_{L^{s/(r-1)}(\partial\Omega)}$  é controlada uniformemente por uma constante que independe de  $\epsilon$ . Escolhendo-se  $s$  grande

o suficiente, temos pelo Lema 2.1 que  $v_\epsilon \in W^{1,\gamma}(\Omega)$  com  $\gamma > N$  e recaímos no caso anterior, uma vez que também possuímos a estimativa a priori que garante que  $\|v_\epsilon\|_{1,\gamma}$  possui um controle que não depende de  $\epsilon$ . Assim, neste caso também possuímos um controle uniforme para a norma de  $v_\epsilon$  em  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Caso  $\gamma_1 < N$ , os passos da iteração de bootstrap podem ser totalmente repetidos sem prejuízo até recairmos nos casos anteriores. Com isso, temos provado que  $v_\epsilon \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  e, além disso,  $\|v_\epsilon\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$  é majorada por uma constante independente de  $\epsilon$ .

Aplicando o Teorema 2.5 obtemos que  $v_\epsilon \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ . Para alcançar a regularidade no bordo, precisamos verificar novamente as condições do Teorema 2.6, já que a não-linearidade no bordo da equação de  $v_\epsilon$  não é a mesma que se faz presente na equação satisfeita por  $u_0$ .

Seja  $\tilde{M} > 0$  a menor constante que limita uniformemente  $\|v_\epsilon\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$  para todo  $\epsilon > 0$  e redefina  $M := \|u_0\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \tilde{M}$ . Argumentando como na prova de (2.21), temos que

$$|k(x', s)| \leq C_2(1 + \|u_0\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}^{r-1} + \tilde{M}^{r-1}) \leq C_6(1 + M^{r-1}) =: L_5, \quad (2.23)$$

para todo  $(x', s) \in \partial\Omega \times [-\tilde{M}, \tilde{M}]$ . Como antes, existe  $L_6 = L_6(M)$  tal que

$$|g(a) - g(b)| \leq L_6|a - b|^{q-1}, \quad \forall a, b \in [-M, M].$$

Dessa forma, usando que  $u_0 \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , que a aplicação  $s \in [-\tilde{M}, \tilde{M}] \mapsto s$  é Hölder contínua em qualquer expoente e que  $1 < q < 2$ , vale para todo  $(x', s)$  e  $(y', t)$  em  $\partial\Omega \times [-\tilde{M}, \tilde{M}]$  que

$$\begin{aligned} |g(u_0(x') + s) - g(u_0(y') + t)| &\leq L_6|u_0(x') + s - u_0(y') - t|^{q-1} \\ &\leq L_6[|u_0(x') - u_0(y')| + |s - t|]^{q-1} \\ &\leq L_6(C_7|x' - y'|^\alpha + C_8|s - t|^\alpha)^{q-1} \\ &\leq 2^{q-1}L_6(C_7^{q-1}|x' - y'|^{\alpha(q-1)} + C_8^{q-1}|s - t|^{\alpha(q-1)}) \end{aligned}$$

e, portanto, existe  $L_7 = L_7(M) > 0$  tal que

$$|g(u_0(x') + s) - g(u_0(y') + t)| \leq L_7(|x' - y'|^{\alpha(q-1)} + |s - t|^{\alpha(q-1)}), \quad (2.24)$$

para todo  $(x', s), (y', t) \in \partial\Omega \times [-\tilde{M}, \tilde{M}]$ .

Também vale que

$$|g(s) - g(t)| \leq L_6|s - t|^{q-1} \leq L_6C_8^{q-1}|s - t|^{\alpha(q-1)} = L_8|s - t|^{\alpha(q-1)}. \quad (2.25)$$

Utilizando que a função  $h(s) := |s|^{q-2}s$  é Hölder de expoente  $q - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\left| h(u_0(x') + s) - h(u_0(y') + t) \right| &\leq C_9 |u_0(x') + s - u_0(y') - t|^{q-1} \\
&\leq C_9 [|u_0(x') - u_0(y')| + |s - t|]^{q-1} \\
&\leq C_9 (C_7 |x' - y'|^\alpha + C_8 |s - t|^\alpha)^{q-1} \\
&\leq 2^{q-1} C_9 (C_7^{q-1} |x' - y'|^{\alpha(q-1)} + C_8^{q-1} |s - t|^{\alpha(q-1)})
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left| h(u_0(x') + s) - h(u_0(y') + t) \right| \leq L_9 (|x' - y'|^{\alpha(q-1)} + |s - t|^{\alpha(q-1)}), \quad (2.26)$$

para todo  $(x', s), (y', t) \in \partial\Omega \times [-\tilde{M}, \tilde{M}]$ . Por fim, nessas mesmas condições, temos que

$$\left| h(u_0(x')) - h(u_0(y')) \right| \leq C_9 |u_0(x') - u_0(y')|^{q-1} \leq L_{10} |x' - y'|^{\alpha(q-1)}.$$

Tomando-se  $L = \max\{L_5, L_7, L_8, L_9, L_{10}\}$  e combinando a expressão acima com (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), temos

$$|k(x', s) - k(y', t)| \leq L (|x' - y'|^{\alpha(q-1)} + |s - t|^{\alpha(q-1)}), \quad |k(x', s)| \leq L,$$

para todo  $(x', s), (y', t) \in \partial\Omega \times [-\tilde{M}, \tilde{M}]$ . Assim, podemos aplicar o Teorema 2.6 e concluir que  $v_\epsilon \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$  para algum  $\theta \in (0, 1)$  e, além disso,

$$\|v_\epsilon\|_{C^{1,\theta}(\Omega)} \leq C(\alpha, q, N, L, M),$$

onde  $C(\alpha, q, N, L, M)$  é uniforme em  $\epsilon$ , pois  $M$  não depende de  $\epsilon$ . Com isso,  $(v_\epsilon)$  e  $(\nabla v_\epsilon)$  são famílias equilimitadas e equicontínuas. Pelo Teorema de Àrzela-Ascoli, existe  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $v_\epsilon \rightarrow v$  em  $C^1(\bar{\Omega})$ . Uma vez que  $v_\epsilon, \nabla v_\epsilon \rightarrow 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , então  $v = 0$ . Portanto, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $\|v_\epsilon\|_{C^1(\bar{\Omega})} < \delta$ . Usando então (2.16) concluímos que

$$J_\lambda(u_0) \leq J_\lambda(u_0 + v_\epsilon),$$

o que contradiz (2.18) e finaliza a demonstração.  $\square$

## 2.4 Prova do Teorema D

Esta seção é dedicada à prova do Teorema D. Inicialmente, provemos algumas propriedades variacionais acerca do funcional energia  $J_\lambda$ .

**Lema 2.6.** *Suponha que  $g$  satisfaz  $(g_3)$  e  $(g_6)$ . Então, o funcional energia  $J_\lambda$  é coercivo.*

*Demonstração.* Por  $(g_6)$ , existe  $a < \lambda_1$  tal que  $G(s) \leq (a/2)s^2$  para  $|s|$  suficientemente grande. Pela regularidade de  $g$ , existe  $C > 0$  de forma que

$$G(s) \leq \frac{1}{2}as^2 + C, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Assim, dada  $u \in H^1(\Omega)$  vale que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{2}au^2 + C \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2}a \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 - C|\partial\Omega| \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 \left( 1 - \frac{a}{\lambda_1} \right) - C|\partial\Omega|, \end{aligned}$$

em que usamos que  $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq \lambda_1^{-1} \|u\|_{1,2}^2$  para qualquer  $u \in H^1(\Omega)$  (veja [57]). Uma vez que  $a < \lambda_1$ , a desigualdade acima assegura a coercividade de  $J_\lambda$ .  $\square$

Como consequência deste resultado, do crescimento subcrítico de  $g$  e da compacidade da imersão do traço, podemos argumentar como na prova do Lema 2.4 para garantir que  $J_\lambda$  satisfaz a condição de Palais-Smale em qualquer nível  $c \in \mathbb{R}$ .

Defina agora  $J_\lambda^\pm \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$  por

$$J_\lambda^\pm(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u^\pm|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u^\pm) d\sigma,$$

onde  $u^+ := \max\{u, 0\}$  e  $u^- := \min\{u, 0\}$  denotam, respectivamente, as partes positivas e negativas de  $u$ . Procedendo da mesma forma que no Lema 2.6, podemos mostrar que  $J_\lambda^\pm$  é coercivo e satisfaz a condição de Palais-Smale. A serventia de apelar para esses funcionais auxiliares se justifica no próximo resultado.

**Lema 2.7.** *Se  $u_\pm \in H^1(\Omega)$  um ponto crítico de  $J_\lambda^\pm$ . Então,  $\pm u_\pm \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Em particular,  $u_\pm$  é ponto crítico de  $J_\lambda$ .*

*Demonstração.* Faremos a prova apenas para o funcional  $J_\lambda^+$ , pois o outro caso é análogo. Como  $u_+$  é ponto crítico de  $J_\lambda^+$ , ela é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_+ + u_+ = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_+}{\partial \nu} = -\lambda |u_+^{q-2} u_+^+ + g(u_+^+), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Tomando  $u_+^-$  como função teste, temos

$$\begin{aligned}
0 &= (J_\lambda^+)'(u_+)u_+^- \\
&= \int_{\Omega} (\nabla u_+ \nabla u_+^- + u_+ u_+^-) dx + \lambda \int_{\partial\Omega} |u_+^+|^{q-2} u_+^+ u_+^- d\sigma - \int_{\partial\Omega} g(u_+^+) u_+^- d\sigma \\
&= \int_{\Omega} (|\nabla u_+^-|^2 + |u_+^-|^2) dx = \|u_+^-\|_{1,2}^2.
\end{aligned}$$

Logo  $u_+^- = 0$ , o que mostra que  $u_+ \geq 0$  q.t.p. em  $\Omega$ .  $\square$

Do resultado anterior, vemos que é suficiente obter pontos críticos de  $J_\lambda^\pm$  para encontrar soluções de (2.3). Na próxima seção, demonstramos um outro resultado nessa mesma linha de raciocínio que relacionará os mínimos locais de  $J_\lambda^\pm$  com os mínimos locais de  $J_\lambda$ .

No próximo lema, mostramos que a origem é um mínimo local de  $J_\lambda$ , assim como de  $J_\lambda^\pm$ . Isso será peça essencial para a obtenção de duas das soluções de (2.3).

**Lema 2.8.** *A origem é um mínimo local de  $J_\lambda$  e de  $J_\lambda^\pm$ .*

*Demonstração.* Provaremos o resultado apenas para o funcional  $J_\lambda$ . Os demais são análogos. Pelo Teorema 2.7 é suficiente mostrar que a origem é um mínimo local de  $J_\lambda$  na topologia  $C^1$ . Seja  $\rho > 0$  e considere  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  tal que  $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \rho$ . Considere a função auxiliar  $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(s) = \begin{cases} \frac{G(s)}{s^2}, & \text{se } s \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ \frac{g'(0)}{2}, & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Com uma aplicação direta da regra de L'Hôpital, prova-se que  $h$  é contínua. Desse modo, existe  $C_1 > 0$  tal que  $|h(s)| \leq C_1$  para qualquer  $s \in [-1, 1]$ . Uma vez que  $G(0) = 0$ , isso implica dizer que

$$|G(s)| \leq C_1 |s|^2, \quad \forall s \in [-1, 1]. \quad (2.27)$$

Por  $(g_5)$ , temos também que

$$|G(s)| \leq C_2(|s| + |s|^r), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Como para  $|s| > 1$ , é válido que  $|s| \leq |s|^2$ , obtemos que

$$|G(s)| \leq C_2(|s|^2 + |s|^r), \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \quad (2.28)$$

Combinando (2.27) com (2.28), concluímos que

$$|G(s)| \leq C_3(|s|^2 + |s|^r), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u) d\sigma \\ &\geq \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} C_2(|u|^2 + |u|^r) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\lambda}{q} - C_3|u|^{2-q} - C_2|u|^{r-q} \right) |u|^q d\sigma \\ &\geq \left( \frac{\lambda}{q} - C_4\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{2-q} - C_4\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{r-q} \right) \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma. \end{aligned}$$

Uma vez que  $u \rightarrow 0$  em  $C^1(\overline{\Omega})$  quando  $\rho \rightarrow 0$  e tendo em vista que  $q < 2 < r$ , podemos escolher  $\rho > 0$  suficientemente pequeno para que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\lambda}{2q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \geq 0 = J_\lambda(0), \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}), \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \rho.$$

Assim, a origem é de fato um mínimo local de  $J_\lambda$  na topologia  $C^1$  e, portanto, também o é na topologia  $H^1$ .  $\square$

No último resultado auxiliar desta seção, mostramos que  $J_\lambda^\pm$  satisfaz a segunda geometria do Passo da Montanha.

**Lema 2.9.** *Seja  $\varphi_1 > 0$  a primeira autofunção do problema de Steklov (2.2) normalizada em  $H^1(\Omega)$ . Então existem  $\lambda^* > 0$  e  $t_0 > 0$  tais que  $J_\lambda^\pm(\pm t_0 \varphi_1) < 0$  para todo  $0 < \lambda < \lambda^*$ .*

*Demonstração.* Uma vez que  $g'(0) > \lambda_1$  e  $g(0) = 0$ , existe  $\epsilon_0$  tal que para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  existe  $\delta > 0$  de maneira que

$$g'(s) \geq \lambda_1 + \epsilon, \quad \forall s \in (-\delta, \delta).$$

Dessa forma,

$$G(s) \geq \left( \frac{\lambda_1 + \epsilon}{2} \right) s^2, \quad \forall s \in (-\delta, \delta).$$

Por outro lado, decorre de  $(g_5)$  que

$$G(s) \geq -C_1|s|^r, \quad \forall |s| \geq \delta.$$



Existe  $C_2 = C_2(\delta) > 0$  suficientemente grande de modo que

$$-C_1|s|^r \geq \left(\frac{\lambda_1 + \epsilon}{2}\right) s^2 - C_2|s|^r, \quad |s| \geq \delta.$$

Combinando todas essas informações, chegamos que

$$G(s) \geq \left(\frac{\lambda_1 + \epsilon}{2}\right) s^2 - C_2|s|^r, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Feitas essas preliminares podemos provar o lema. Faremos a prova somente com o funcional  $J_\lambda^+$ , pois o outro será análogo. Uma vez que  $\varphi_1 > 0$ , então  $J_\lambda^+(t\varphi_1) = J_\lambda(t\varphi_1)$ . Utilizando a desigualdade acima,  $\|\varphi_1\|_{1,2} = 1$ , as imersões do traço e o fato de  $\varphi_1$  ser autofunção associada à  $\lambda_1$ , temos pelas imersões de Sobolev e pela caracterização de  $\lambda_1$  que

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\varphi_1) &= \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla(t\varphi_1)|^2 + (t\varphi_1)^2) dx + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |t\varphi_1|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(t\varphi_1) d\sigma \\ &\leq \frac{t^2}{2} + \frac{\lambda t^q}{q} \|\varphi_1\|_{L^q(\partial\Omega)}^q - \int_{\partial\Omega} \left[ \left(\frac{\lambda_1 + \epsilon}{2}\right) (t\varphi_1)^2 - C_2|t\varphi_1|^r \right] d\sigma \\ &\leq \frac{t^2}{2} + \frac{C_3\lambda t^q}{q} - \left(\frac{\lambda_1 + \epsilon}{2\lambda_1}\right) t^2 + C_4 t^r, \end{aligned}$$

Vamos chamar de  $h(t)$  a última parcela na desigualdade acima, isto é,

$$h(t) := \frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1 + \epsilon}{\lambda_1}\right) + \frac{C_3\lambda t^q}{q} + C_4 t^r, \quad t \geq 0.$$

Temos que  $h$  é de classe  $C^1$ ,  $h_1(0) = 0$  e  $h_1(t) > 0$  para  $t > 0$  próximo da origem, uma vez que  $q < 2 < r$ . Além disso,  $h(t) = t^q \left(s(t) + \frac{C_3\lambda}{q}\right)$ , onde

$$s(t) := \frac{t^{2-q}}{2} \left(1 - \frac{\lambda_k + \epsilon}{\lambda_k}\right) + C_4 t^{r-q}, \quad t \geq 0$$

Com um cálculo simples, mostramos que  $h_1$  possui um mínimo global negativo atingido em

$$t_0 = \left[ \frac{\left(\frac{\lambda_1 + \epsilon}{\lambda_1} - 1\right) (2 - q)}{2C_4(r - q)} \right]^{1/(r-2)}.$$

Dessa forma, existe  $\lambda^* > 0$  tal que se  $0 < \lambda < \lambda^*$ , vale

$$h(t_0) = t_0^q \left(s(t_0) + \frac{C_3\lambda}{q}\right) < 0,$$

o que implica que  $J_\lambda^+(t\varphi_1) = J_\lambda(t_0\varphi_1) \leq h(t_0) < 0$ .  $\square$

Estamos prontos para obter as 4 primeiras soluções do problema (2.3).

*Prova do Teorema D.* Note inicialmente que, pelo Lema 2.8, o ponto  $u = 0$  é um mínimo local de  $J_\lambda^\pm$ . Tome  $\lambda^*$  o dado no Lema 2.9 e considere  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Lembre que comentamos que este mesmo resultado assegura que  $J_\lambda^\pm$  satisfaz a segunda geometria do passo da montanha. Dessa forma, como  $J_\lambda^\pm$  satisfaz a condição de Palais Smale, segue do Teorema do Passo da Montanha que existe  $u_{1\pm} \in H^1(\Omega)$  ponto crítico de  $J_\lambda^\pm$  satisfazendo  $J_\lambda^\pm(u_{1\pm}) > 0$ . Por outro lado, como  $J_\lambda^\pm$  é limitado inferiormente (por ser contínuo e coercivo), ele admite um mínimo global atingindo em algum  $u_{2\pm} \in H^1(\Omega)$ . Em virtude do Lema 2.9, vale que

$$J_\lambda^\pm(u_{2\pm}) = \inf_{u \in H^1(\Omega)} J_\lambda^\pm(u) \leq J_\lambda^\pm(\pm t_0\varphi_1) < 0.$$

o que garante que  $u_{1\pm} \neq u_{2\pm}$ . Como naturalmente também vale  $u_{1\pm} \neq u_{2\pm}$ , esses 4 pontos críticos são distintos. Além disso, pelo Lema 2.7, cada um deles é também ponto crítico de  $J_\lambda$  e, portanto, solução do Problema (2.3).  $\square$

## 2.5 Prova do Teorema E

Essa seção é dedicada à da prova do Teorema E. Na seção anterior, encontramos 4 soluções do problema (2.3) ao encontrar pontos críticos dos funcionais  $J_\lambda^\pm$ . Veremos que existe entre esses funcionais uma relação ainda mais forte:

**Lema 2.10.** *Se  $u_\pm$  é um mínimo local de  $J_\lambda^\pm$ , então ele também é um mínimo local de  $J_\lambda$ .*

*Demonstração.* Em virtude do Teorema 2.7, é suficiente provar que  $u_0$  é mínimo local de  $J_\lambda$  na topologia de  $C^1(\overline{\Omega})$ .

Observe inicialmente que, como  $u_\pm$  é mínimo local de  $J_\lambda^\pm$ , ele é um ponto crítico deste funcional. Assim, pelo Lema 2.7, ele é ponto crítico de  $J_\lambda$  e satisfaz  $\pm u_\pm \geq 0$ . Uma conferência da prova do Teorema 2.7 mostra que qualquer ponto crítico de  $J_\lambda$  possui pelo menos a regularidade  $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Seja então  $\rho > 0$  tal que

$$J_\lambda^\pm(u) \geq J_\lambda^\pm(u_\pm), \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}), \|u - u_\pm\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \rho.$$

Para  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  como acima, fazendo uso da igualdade  $J_\lambda(u_\pm) = J_\lambda^\pm(u_\pm)$ , obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) - J_\lambda(u_\pm) &= J_\lambda(u) - J_\lambda^\pm(u_\pm) \\ &\geq J_\lambda(u) - J_\lambda^\pm(u) \\ &= \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} (|u|^q - |u^\pm|^q) d\sigma - \int_{\partial\Omega} (G(u) - G(u^\pm)) d\sigma, \end{aligned}$$

e portanto

$$J_\lambda(u) - J_\lambda(u_\pm) \geq \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u^\mp|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u^\mp) d\sigma.$$

Segue então de (2.29) e de  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) - J_\lambda(u_\pm) &\geq \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u^\mp|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} C_2(|u^\mp|^2 + |u^\mp|^r) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\lambda}{q} - C_3|u^\mp|^{2-q} - C_3|u^\mp|^{r-q} \right) |u^\mp|^q d\sigma \\ &\geq \left( \frac{\lambda}{q} - C_3\|u^\mp\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{2-q} - C_3\|u^\mp\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{r-q} \right) \int_{\partial\Omega} |u^\mp|^q d\sigma. \end{aligned}$$

Uma vez que  $u \rightarrow u_\pm$  em  $C^1(\overline{\Omega})$  quando  $\rho \rightarrow 0$  e que  $\pm u_\pm \geq 0$ , então  $u^\mp \rightarrow 0$  em  $C^0(\overline{\Omega})$  quando  $\rho \rightarrow 0$ . Dessa forma, como  $2 - q > 0$  e  $r - q > 0$ , podemos escolher  $\rho$  suficientemente pequeno de modo que

$$J_\lambda(u) - J_\lambda(u_\pm) \geq \frac{\lambda}{2q} \int_{\partial\Omega} |u^\mp|^q d\sigma \geq 0,$$

donde concluímos que  $u_\pm$  é mínimo local de  $J_\lambda$  na topologia  $C^1$ . O resultado segue agora do Teorema 2.7.  $\square$

O resultado acima mostra que as soluções  $u_{2\pm}$  encontradas na seção anterior são mínimos locais de  $J_\lambda$ , uma vez que estes pontos são os mínimos globais de  $J_\lambda^\pm$ .

Para encontrar a quinta solução, precisamos falar um pouco de Teoria de Morse, com ênfase no conceito de Grupos Críticos. Para mais detalhes e para conferir os vários pré-requisitos desse assunto, indicamos a leitura do livro [28]. Em linhas gerais,

**Definição 2.1** (Grupo Crítico). *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$  e  $u_0 \in X$  um ponto crítico isolado de  $\Phi$  com  $\Phi(u_0) = c$ . Para cada  $q \in \mathbb{N}$ , definimos o  $q$ -ésimo grupo crítico de  $\Phi$  em  $u_0$  por*

$$C_q(\Phi, u_0) = H_q(\Phi_c \cap U, (\Phi_c \cap U) \setminus \{u\}),$$

em que  $\Phi_c = \{v \in X : \Phi(v) \leq c\}$ ,  $U \subset X$  é uma vizinhança de  $u_0$  tal que  $u_0$  é o único ponto crítico de  $\Phi$  em  $\Phi_c \cap U$  e  $H_q(\cdot, \cdot)$  representa o  $q$ -ésimo grupo de homologia singular

relativa com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ .

De forma intuitiva, o grupo  $C_q(\Phi, u)$  mede a contribuição topológica do ponto crítico  $u$  à faixa de nível  $\Phi_c$ . Quando o funcional  $\Phi$  possui uma estrutura variacional adequada, esses grupos críticos são todos nulos, exceto possivelmente em um único índice  $q$ . Este índice onde o grupo crítico  $C_q(\Phi, u)$  não é trivial é exatamente o índice de Morse de  $u$ . No contexto de funções definidas em  $\mathbb{R}^N$ , o índice de Morse de um ponto crítico é a dimensão do maior subespaço de  $\mathbb{R}^N$  cuja a matriz Hessiana nesse ponto é negativa definida. Por exemplo, em mínimos locais, onde a Hessiana do ponto é positiva definida em todo o  $\mathbb{R}^N$  o índice de Morse é 0. Assim, é esperado que

**Lema 2.11** ([28, Exemplo 1, p. 33]). *Seja  $u \in X$  um mínimo local isolado de  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Então*

$$C_q(\Phi, u) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0, \\ 0, & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

A ideia para obter a quinta solução do problema (2.3) é encontrar um ponto crítico de  $J_\lambda$  com energia negativa e que possua o grupo crítico de algum grau distinto do respectivo grupo crítico de  $u_{2\pm}$ . Para tanto, aplicaremos o seguinte resultado abstrato, devido à Perera [68].

**Teorema 2.8** ([68, Teorema 3.1]). *Sejam  $X = E_1 \oplus E_2$  um espaço de Banach com  $0 < k := \dim E_1 < +\infty$  e  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfazendo:*

( $I_1$ ) *existe  $\rho > 0$  tal que*

$$\sup_{u \in E_1 \cap \mathbb{S}_\rho} I(u) < 0,$$

*em que  $\mathbb{S}_\rho := \{u \in X : \|u\|_X = \rho\}$ ;*

( $I_2$ )  *$I \geq 0$  em  $E_2$ ;*

( $I_3$ ) *existe  $e \in E_1 \setminus \{0\}$  tal que  $I$  é limitado inferiormente no semi-espaço*

$$\{se + u : s \geq 0 \text{ e } u \in E_2\}.$$

*Além disso, suponha que  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale e possua apenas valores críticos isolados com cada valor crítico correspondendo à uma quantia finita de pontos críticos. Então,  $I$  possui dois pontos críticos  $u_1, u_2 \in X$  com*

$$I(u_1) < 0 \leq I(u_2), \quad C_{k-1}(I, u_1) \neq 0 \text{ e } C_k(I, u_2) \neq 0.$$

Para mostrar que  $J_\lambda$  satisfaz as hipóteses geométricas do teorema acima, vamos fazer uma decomposição conveniente de  $H^1(\Omega)$  usando os subespaços gerados pelas autofunções do problema de Steklov, como já foi minuciosamente detalhado no final da Seção 2.1.2.

Como consequência da desigualdade variacional (2.7), temos o seguinte:

**Lema 2.12.** *Suponha que  $g$  satisfaça  $(g_3)$ ,  $(\tilde{g}_4)$  e  $(g_5)$ . Então existem  $\rho > 0$  e  $\lambda^* > 0$  tais que*

$$\sup_{u \in X_k \cap \mathbb{S}_\rho} J_\lambda(u) < 0,$$

para todo  $0 < \lambda < \lambda^*$ , em que  $\mathbb{S}_\rho := \{u \in H^1(\Omega) : \|u\|_{1,2} = \rho\}$ .

*Demonstração.* Usando que  $g'(0) > \lambda_k$  e argumentando como no Lema 2.9, obtemos  $C_2 > 0$  tal que

$$G(s) \geq \left( \frac{\lambda_k + \epsilon}{2} \right) s^2 - C_2 |s|^r, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Seja  $u \in X_k$  com  $\|u\|_{1,2} = \rho$ , com  $\rho > 0$  a ser determinado posteriormente. Utilizando a imersão do traço  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$ ,  $1 \leq s \leq 2_*$  e (2.7), temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u) d\sigma \\ &\leq \frac{\rho^2}{2} + \frac{\lambda}{q} \|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^q - \int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{\lambda_k + \epsilon}{2} \right) u^2 - C_2 |u|^r \right] d\sigma \\ &\leq \frac{\rho^2}{2} + \frac{C_3 \lambda \rho^q}{q} - \left( \frac{\lambda_k + \epsilon}{2\lambda_k} \right) \rho^2 + C_4 \rho^r \\ &= h_k(\rho), \end{aligned}$$

em que

$$h_k(t) := \frac{t^2}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_k + \epsilon}{\lambda_k} \right) + \frac{C_3 \lambda t^q}{q} + C_4 t^r, \quad t \geq 0.$$

Da mesma forma que na demonstração do Lema 2.9, ao tomar  $\rho > 0$  o ponto de mínimo global da aplicação

$$s_k(t) = \frac{t^{2-q}}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_k + \epsilon}{\lambda_k} \right) + C_4 t^{r-q}, \quad t \geq 0,$$

existe  $\lambda^* > 0$  tal que se  $0 < \lambda < \lambda^*$ , vale que

$$h_k(\rho) = \rho^q \left( s_k(\rho) + \frac{C_3 \lambda}{q} \right) < 0,$$

donde segue que  $J_\lambda(u) \leq h_k(\rho) < 0$  para toda  $u \in X_k$  com  $\|u\|_{1,2} = \rho$ . Daí, para esta escolha de  $\rho$ , vale que

$$\sup_{u \in X_k \cap \mathbb{S}_\rho} J_\lambda(u) < 0,$$

o que conclui a prova do lema.  $\square$

**Lema 2.13.** *Se  $g$  satisfaz  $(\tilde{g}_6)$  então*

$$J_\lambda(u) \geq 0, \quad \forall u \in X_k^\perp.$$

*Demonstração.* Utilizando  $(\tilde{g}_6)$  e (2.8), obtemos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 + \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma - \int_{\partial\Omega} G(u) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{1,2}^2 - \frac{\lambda_{k+1}}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \geq 0, \end{aligned}$$

para toda  $u \in X_k^\perp$ .  $\square$

**Observação 2.3.** *É importante observar que a substituição das condições  $(\tilde{g}_4)$  e  $(\tilde{g}_6)$  por  $(g_4)$  e  $(g_5)$  também garantem, assim como na sessão anterior, a existência de pelo menos quatro soluções para o problema (2.3), uma vez que a condição  $(\tilde{g}_4)$  implica na validade de  $(g_4)$  e a condição  $(\tilde{g}_6)$  garante a coercividade de  $J_\lambda$ , além de também permitir provar os Lemas 2.8 e 2.10 de uma maneira até mais simples, por já implicar a dominância de  $|G(s)|$  por um termo quadrático em toda a reta.*

Possuímos todas as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema E.

*Demonstração do Teorema E.* Como já comentado na Observação 2.3, já conhecemos 4 soluções do problema (2.3), a saber  $u_{1\pm}$  com  $J_\lambda(u_{1\pm}) > 0$  e  $u_{2\pm}$  com  $J_\lambda(u_{2\pm}) < 0$ . Falta apenas encontrar a quinta solução. Façamos a decomposição  $H^1(\Omega) = E_1 \oplus E_2$ , com  $E_1 = X_k$  e  $E_2 = X_k^\perp$  em que  $k \geq 2$  é o dado nas hipóteses  $(\tilde{g}_4)$  e  $(\tilde{g}_6)$ . Seja  $0 < \lambda < \lambda^*$ , com  $\lambda^* > 0$  obtido no Lema 2.12. Dessa forma,  $J_\lambda$  satisfaz a condição  $(I_1)$ . Do Lema 2.13, temos também a validade de  $(I_2)$ . Como  $J_\lambda$  é limitado inferiormente em todo  $H^1(\Omega)$ , a condição  $(I_3)$  é trivialmente satisfeita. Assim, pelo Teorema 2.8, existe  $u_3 \in H^1(\Omega)$  com  $J_\lambda(u_3) < 0$  e  $C_{k-1}(I, u_3) \neq 0$ . Claramente,  $u_3 \neq u_{1\pm}$ . Agora, pelo Lema 2.11, uma vez que  $u_{2\pm}$  são mínimos locais isolados de  $J_\lambda$ , vale que  $C_q(I, u_{2\pm}) = 0$  para todo  $q \neq 0$ . Uma vez que  $k \geq 2$ , temos em particular que  $C_{k-1}(I, u_{2\pm}) = 0$ , o que mostra que  $u_3 \neq u_{2\pm}$  e, portanto, é um ponto crítico distinto de todos os 4 já previamente obtidos. Temos assim a nossa quinta solução de (2.3).  $\square$

**Observação 2.4.** *Para finalizar este capítulo, vamos deixar registrado algumas dificuldades que aparecem no estudo da versão para o  $p$ -laplaciano do problema (2.3). Primeiramente, não seria possível obter neste caso a quinta solução dada no Teorema E, pois usamos fortemente na demonstração a decomposição de  $H^1(\Omega)$  como a soma direta dos auto-espaços associados ao problema de autovalor. O mesmo não poderia ser feito com  $W^{1,p}(\Omega)$ .*

Entretanto, o Teorema D poderia ser obtido sem prejuízo nenhum, uma vez que o que foi feito na seção 2.5 pode ser totalmente replicado sem prejuízo algum para o caso do  $p$ -laplaciano. Isso não foi feito neste trabalho porque não conseguimos conseguir provar o Teorema 2.7 para este caso. Se tentássemos seguir a prova, depois de aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange obteríamos que a função  $v_\epsilon$  resolveria

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(v_\epsilon)) + |u_0 + v_\epsilon|^{p-2}(u_0 + v_\epsilon) - |u_0|^{p-2}u_0 - \mu_\epsilon |v_\epsilon|^{p-2}v_\epsilon = 0, & \text{em } \Omega, \\ A(v_\epsilon) \cdot \nu = -\lambda(|u_0 + v_\epsilon|^{q-2}(u_0 + v_\epsilon) - |u_0|^{q-2}u_0) + g(u_0 + v_\epsilon) - g(u_0), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que

$$A(v_\epsilon) := |\nabla(u_0 + v_\epsilon)|^{p-2}\nabla(u_0 + v_\epsilon) - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 - \mu_\epsilon |\nabla v_\epsilon|^{p-2}\nabla v_\epsilon.$$

Precisamos de um resultado que permita regularizar  $v_\epsilon$  e que, além disso, ainda forneça uma estimativa a priori. Acreditamos ser possível obter isso, uma vez que em trabalhos relacionados (ver [11, 51, 64]) apareceram situações semelhantes, sendo que no primeiro deles é feita uma análise detalhada do processo de regularização.

## Capítulo 3

# Problema de autovalor com operador quase-linear

Neste capítulo, consideramos a equação estacionária de reação-difusão-advecção

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)D_1(u)\nabla u) + D_2(u)[\vec{b}(x) \cdot \nabla u] = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e regular,  $a \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, [a_0, +\infty))$ , para algum  $a_0 > 0$ , e  $\vec{b} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ . As funções  $D_1, D_2 \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$  satisfazem

(d<sub>1</sub>)  $D_i(s) > 0$ , para qualquer  $s > 0$  e  $i \in \{1, 2\}$ ,

(d<sub>2</sub>)  $D_1(\infty) := \lim_{s \rightarrow +\infty} D_1(s) > 0$ ,

No que se segue, consideramos a função  $h : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definida por

$$h(s) = \begin{cases} \frac{D_2(s)}{D_1(s)}, & \text{se } s > 0, \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{D_2(s)}{D_1(s)}, & \text{se } s = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

e assumimos que

(H<sub>1</sub>)  $h \in C^1((0, +\infty))$  e  $h'(0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} h'(s) \in \mathbb{R}$ .

Definimos também as quantidades

$$h(\infty) := \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{D_2(s)}{D_1(s)}, \quad D_i(\infty) := \lim_{s \rightarrow +\infty} D_i(s), \text{ para } i \in \{1, 2\},$$



e o operador

$$L_0 := -\operatorname{div}(a(x)\nabla) + h(0)[\vec{b}(x) \cdot \nabla].$$

Quando  $h(\infty) \in \mathbb{R}$ , também consideramos

$$L_\infty := -\operatorname{div}(a(x)\nabla) + h(\infty)[\vec{b}(x) \cdot \nabla].$$

Seja  $L$  um operador elíptico de segunda ordem com coeficientes Hölder contínuos em um domínio regular e limitado  $U \subset \mathbb{R}^N$ . Denotamos por  $\sigma_1^U[L]$  o autovalor principal de  $L$  em  $U$ , sob a condição homogênea de Dirichlet. Para simplificar, também adotamos as seguintes notações:

$$\sigma_1^0 := \sigma_1^\Omega[L_0], \quad \sigma_1^\infty := \sigma_1^\Omega[L_\infty].$$

No nosso primeiro teorema principal, obtemos a existência de solução para o problema quando  $\sigma_1^0 D_1(0) < \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ . Mais especificamente, provamos os seguintes resultados

**Teorema F.** *Suponha que  $h$  satisfaça  $(H_1)$ ,  $h(\infty) < +\infty$  e  $\sigma_1^0 D_1(0) < \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ . Então, para qualquer  $\lambda \in (\sigma_1^0 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty))$ , o problema (3.1) admite uma solução clássica positiva.*

**Teorema G.** *Suponha que  $h$  satisfaça  $(H_1)$ ,  $h(\infty) = +\infty$ , e*

*(b<sub>1</sub>) existe  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  tal que  $[\vec{b}(x) \cdot \nabla \psi] > 0$ , para todo  $x \in \overline{\Omega}$ .*

*Então, para qualquer  $\lambda > \sigma_1^0 D_1(0)$ , o problema (3.1) admite uma solução clássica positiva.*

Uma forma de complementar os resultados anteriores, seria considerar o caso em que a desigualdade  $\sigma_1^0 D_1(0) < \sigma_1^\infty D_1(\infty)$  não é válida. Para isso, aplicamos a teoria de bifurcação. No próximo resultado, apresentamos condições necessárias para bifurcação tanto a partir de soluções triviais quanto do infinito. Mais especificamente, provamos o seguinte:

**Teorema H.** *Suponha que  $D_1(0) > 0$ .*

- (i) *Então existe uma componente ilimitada  $\mathfrak{C}_0 \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  de soluções positivas para (3.1) que emana da solução trivial em  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$ ;*
- (ii) *Se, adicionalmente,  $0 < D_i(\infty) < +\infty$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ , então existe uma componente ilimitada  $\mathfrak{C}_\infty \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  de soluções para (3.1) que intercepta  $(\sigma_1^\infty D_1(\infty), \infty)$ . Além disso, se  $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$  e  $h$  satisfaz  $(H_1)$ , então  $\mathfrak{C}_\infty$  consiste em soluções positivas para (3.1).*

De fato, provamos que a bifurcação de soluções positivas a partir da solução trivial (respectivamente, do infinito) não pode ocorrer em nenhum outro ponto além de  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$  (respectivamente,  $(\sigma_1^\infty D_1(\infty), \infty)$ ).

Além disso, sob uma das seguintes hipóteses adicionais:

$(b_2)$  existe  $\xi \in (H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \setminus \{0\}$  tal que  $\text{div}(\xi^2 \vec{b})$  tem sinal constante quase sempre em  $\Omega$ ,

ou

$(d_3)$  existe  $C > 0$  tal que  $\int_0^\infty D_2(t)t^{-1}dt < C$ ,

obtemos um resultado de não existência de soluções positivas de (3.1) para  $\lambda > 0$  suficientemente grande (ver Proposição 3.2). Na verdade, se definirmos

$$\underline{\lambda} := \min\{\sigma_1^0 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty)\} \quad \text{e} \quad \bar{\lambda} := \max\{\sigma_1^0 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty)\},$$

podemos estabelecer o seguinte resultado de existência:

**Teorema I.** *Suponha que  $D_1(0) > 0$ ,  $0 < D_i(\infty) < +\infty$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ , que  $h$  satisfaça  $(H_1)$  e que  $\vec{b} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ . Então, para qualquer  $\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ , o problema (3.1) admite uma solução clássica positiva. Se, adicionalmente,  $(b_2)$  ou  $(d_3)$  for satisfeita, então os contínuos  $\mathfrak{C}_0$  e  $\mathfrak{C}_\infty$  dados pelo Teorema H coincidem.*

O restante do capítulo está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, introduzimos uma mudança de variáveis e aplicamos métodos de sub e supersoluções. A Seção 3 investiga a bifurcação de soluções positivas. Finalmente, na Seção 4, analisamos a direção da bifurcação e discutimos a multiplicidade de soluções.

### 3.1 Método de Sub-Supersolução

Iniciamos esta seção realizando uma mudança de variável da seguinte maneira: definimos a função auxiliar

$$g(s) := \int_0^s D_1(t)dt, \quad s \in \mathbb{R}_+ := \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}.$$

Como  $g'(s) = D_1(s) > 0$ , para todo  $s > 0$ , a função  $g$  é injetora e pertence à classe  $C^1$ . Além disso, como  $\int_0^\infty D_1(s)ds = \infty$ , pela hipótese  $(d_2)$ , também temos que  $g(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ .

Assim, a função  $g$  é invertível e, se chamarmos sua inversa de  $g^{-1}$ , então a aplicação

$$q(s) := \begin{cases} g^{-1}(s), & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0, \end{cases}$$

está bem definida.

Um cálculo direto mostra que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  é uma solução positiva de (3.1) se, e somente se,  $w = g(u)$  for uma solução positiva de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla w) + h(q(w))[\vec{b}(x) \cdot \nabla w] = \lambda q(w), & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $h$  foi definido em (3.2). O próximo resultado apresenta algumas propriedades da função  $q$  que serão úteis.

**Lema 3.1.** *A aplicação  $q$  é crescente e de classe  $C^1$ . Além disso,*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(s)}{s} = \begin{cases} \frac{1}{D_1(0)} & \text{se } D_1(0) > 0, \\ +\infty & \text{se } D_1(0) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{q(s)}{s} = \begin{cases} \frac{1}{D_1(\infty)} & \text{se } D_1(\infty) < +\infty, \\ 0 & \text{se } D_1(\infty) = +\infty. \end{cases} \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Desde que  $q$  é a inversa de  $g$ , ela é de classe  $C^1$  e

$$q'(s) = \frac{1}{g'(q(s))} > 0, \quad \forall s > 0.$$

Então,  $q$  é crescente. Ademais,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} q'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{g'(q(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{D_1(q(s))}$$

e (3.4) segue da regra de L'Hospital. A prova de (3.5) é análoga.  $\square$

Como queremos aplicar o método de sub-super solução, apresentamos as seguintes definições:

**Definição 3.1.** *Dizemos que  $\underline{w} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  é uma sub-solução de (3.3) se*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla \underline{w}) + h(q(\underline{w}))[\vec{b}(x) \cdot \nabla \underline{w}] \leq \lambda q(\underline{w}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{w} \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Já uma função  $\bar{w} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  é chamada uma *super-solução* de (3.3) se a expressão acima é válida com as desigualdades invertidas. Além disso, um par  $\underline{w}, \bar{w}$  de sub-super soluções é dito *ordenado* se  $\underline{w} \leq \bar{w}$ . Neste caso, dizemos que  $w_*$  é uma *solução minimal* de (3.3) no intervalo ordenado  $[\underline{w}, \bar{w}]$  caso  $w_*$  esteja neste intervalo, seja solução de (3.3) e qualquer outra solução  $v \in [\underline{w}, \bar{w}]$  de (3.3) satisfaça  $w_* \leq v$ . De modo análogo, definimos o que seria uma *solução maximal*.

A seguir, mostramos que o método de sub-super solução pode ser aplicado ao problema (3.3).

**Teorema 3.1.** *Suponha que  $h$  satisfaça  $(H_1)$  e que exista um par ordenado  $\underline{w}, \bar{w}$  de sub-super soluções de (3.3). Então, o problema possui uma solução minimal  $w_*$  e uma solução maximal  $w^*$  no intervalo ordenado  $[\underline{w}, \bar{w}]$ .*

*Demonstração.* Para qualquer  $\lambda > 0$ , considere

$$f_\lambda(x, s, \eta) := \lambda q(s) - h(q(s))[\vec{b}(x) \cdot \eta], \quad (x, s, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N.$$

Como  $\vec{b} \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ , temos que  $f_\lambda(\cdot, s, \eta) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  para todo  $(s, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ . Por  $(H_1)$ , as derivadas parciais  $\partial f_\lambda / \partial \eta$  e  $\partial f_\lambda / \partial s$  são contínuas. Se definirmos

$$c(\rho) := \lambda q(\rho) + \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \max_{0 \leq s \leq \rho} h(q(s)), \quad \rho \geq 0,$$

é claro que, para qualquer  $s \in [0, \rho]$ , vale

$$|f_\lambda(x, s, \eta)| \leq \lambda q(s) + |\vec{b}(x)| h(q(s)) |\eta| \leq c(\rho)(1 + |\eta|^2).$$

Com isso, o resultado segue ao aplicar [5, Teorema 1.1]. □

Agora, o nosso objetivo é obter um par ordenado de sub-super soluções de (3.3). Começaremos estabelecendo a sub-solução.

**Lema 3.2.** *O problema (3.3) possui uma sub-solução para todo  $\lambda > \sigma_1^0 D_1(0)$ .*

*Demonstração.* Escolha  $m > 1$  tal que  $\lambda > m\sigma_1^0 D_1(0)$ . Seja  $\varphi_0 > 0$  a principal autofunção de  $L_0$  tal que  $\|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ . Defina, para  $\epsilon > 0$ , a função  $\underline{w} := \epsilon\varphi_0^m$  e note que

$$\nabla(\underline{w}) = \epsilon m \varphi_0^{m-1} \nabla \varphi_0$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(a(x)\nabla \underline{w}) &= \epsilon m \varphi_0^{m-1} [\nabla a \cdot \nabla \varphi_0 + a(x) \Delta \varphi_0] + \epsilon m(m-1) \varphi_0^{m-2} |\nabla \varphi_0|^2 \\
&= \epsilon m \varphi_0^{m-1} \operatorname{div}(a(x) \nabla \varphi_0) + \epsilon m(m-1) \varphi_0^{m-2} |\nabla \varphi_0|^2 \\
&= \epsilon m \varphi_0^{m-1} (h(0) \vec{b}(x) \cdot \nabla \varphi_0 - \sigma_1^0 \varphi_0) + \epsilon m(m-1) \varphi_0^{m-2} a(x) |\nabla \varphi_0|^2.
\end{aligned}$$

Assim,  $\underline{w}$  é uma sub-solução de (3.3) se, e somente se,

$$\left( \frac{\lambda q(\epsilon \varphi_0^m)}{m \epsilon \varphi_0^m} - \sigma_1^0 \right) \varphi_0 \geq (1-m) a(x) \varphi_0^{-1} |\nabla \varphi_0|^2 + (h(q(\epsilon \varphi_0^m)) - h(0)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla \varphi_0],$$

em  $\Omega$ . Uma vez que  $m > 1$ ,  $a(x) \geq a_0 > 0$  em  $\Omega$  e  $\varphi_0^{-1} \geq \|\varphi_0\|_\infty^{-1} = 1$ , a desigualdade acima é verdadeira se

$$\left( \frac{\lambda q(\epsilon \varphi_0^m)}{m \epsilon \varphi_0^m} - \sigma_1^0 \right) \varphi_0 + (m-1) a_0 |\nabla \varphi_0|^2 - \|\vec{b} \cdot \nabla \varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)} |h(q(\epsilon \varphi_0^m)) - h(0)| \geq 0, \quad (3.6)$$

para todo  $x \in \Omega$ . Se  $D_1(0) > 0$ , podemos usar  $q(0) = 0$  e (3.4) para concluir que os limites a seguir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} |h(q(\epsilon \varphi_0^m)) - h(0)| = 0$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{\lambda q(\epsilon \varphi_0^m)}{m \epsilon \varphi_0^m} - \sigma_1^0 \right) = \mu_0 := \left( \frac{\lambda}{m D_1(0)} - \sigma_1^0 \right) > 0,$$

valem uniformemente em  $\Omega$ . Denotando o lado esquerdo de (3.6) por  $\Gamma_\epsilon$ , temos que

$$\Gamma_\epsilon(x) = (\mu_0 + o_\epsilon(1)) \varphi_0(x) + (m-1) a_0 |\nabla \varphi_0(x)|^2 + o_\epsilon(1), \quad x \in \Omega. \quad (3.7)$$

Obteremos  $\epsilon > 0$  e  $m > 1$  de tal modo que  $\Gamma_\epsilon$  seja não-negativo em  $\Omega$ , o que claramente implica (3.6). Para tanto, note inicialmente que  $L_0$  não possui termos de ordem zero e, portanto, podemos aplicar o Princípio do Máximo Forte para concluir que  $\varphi_0 > 0$  em  $\Omega$  e  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} < 0$  sobre  $\partial \Omega$ . Então, dado  $r > 0$  pequeno e definindo

$$\Omega_r := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial \Omega) < r\},$$

obtemos  $c_1 = c_1(r) > 0$  de maneira que

$$\varphi_0 \geq c_1 > 0 \text{ em } \Omega \setminus \overline{\Omega}_r, \quad |\nabla \varphi_0|^2 \geq c_1 > 0, \text{ em } \overline{\Omega}_r.$$

Em  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_r$ , podemos utilizar (3.7), a primeira desigualdade acima,  $m > 1$  e  $\mu_0 > 0$ , para concluir que

$$\Gamma_\epsilon(x) \geq (\mu_0 + o_\epsilon(1)) c_1 + o_\epsilon(1) \geq 0, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_1].$$

Analogamente, desde que  $\varphi_0 > 0$ , no conjunto  $\overline{\Omega}_r$  temos que

$$\Gamma_\epsilon(x) \geq (m-1)a_0c_1^2 + o_\epsilon(1) \geq 0, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_2]..$$

Consequentemente, se fixamos  $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ , concluimos que (3.6) é válida e, portanto,  $\underline{w} = \epsilon\varphi_0^m$  é uma sub-solução de (3.3).

Quando  $D_1(0) = 0$ , segue de (3.4) que  $q(s)/s \rightarrow +\infty$ , se  $s \rightarrow 0$ . Assim, para qualquer  $\mu_0 > 0$  temos que

$$\Gamma_\epsilon(x) \geq (\mu_0 + o_\epsilon(1))\varphi_0(x) + (m-1)a_0|\nabla\varphi_0(x)|^2 + o_\epsilon(1), \quad x \in \Omega,$$

e podemos repetir os argumentos acima. Os detalhes serão omitidos.  $\square$

Na construção da super-solução, consideramos dois casos distintos dependendo de  $h(\infty)$ . Primeiramente, vamos discutir o caso em que  $h(\infty)$  é finito.

**Lema 3.3.** *Se  $h(\infty) \in [0, +\infty)$ , então o problema (3.3) possui uma super-solução para todo  $\lambda < \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, assuma que  $D_1(\infty) < \infty$ . Seja  $U \subset \mathbb{R}^N$  um domínio regular de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $\overline{\Omega} \subset U$  e tome  $\tilde{a}, \tilde{b} : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  extensões regulares de  $a, \vec{b}$  em  $U$  com  $\tilde{a} \geq a_0/2 > 0$ . Podemos considerar então o operador  $L_\infty$  agindo em funções definidas em  $U$  e usar  $\lambda < \sigma_1^\infty D_1(\infty)$  para supor que  $U$  é escolhido de tal sorte que

$$\lambda < \sigma_1^U[L_\infty]D_1(\infty) \leq \sigma_1^\infty D_1(\infty).$$

Seja  $\tilde{\varphi}_\infty > 0$  uma autofunção de  $L_\infty$  associada à  $\sigma_1^U[L_\infty]$  de modo que  $\|\tilde{\varphi}_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ . Se definirmos para  $K > 0$ , a função  $\overline{w} := K\tilde{\varphi}_\infty$ , um cálculo direto mostra que  $\overline{w}$  é uma super-solução de (3.3) se, e somente se,

$$\left( \frac{\lambda q(K\tilde{\varphi}_\infty)}{K\tilde{\varphi}_\infty} - \sigma_1^U[L_\infty] \right) \tilde{\varphi}_\infty \leq (h(q(K\tilde{\varphi}_\infty)) - h(\infty)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla \tilde{\varphi}_\infty], \quad \text{em } \Omega. \quad (3.8)$$

Concluimos de (3.5) que  $q(s) \rightarrow +\infty$ , se  $s \rightarrow +\infty$ . Desde que  $\tilde{\varphi}_\infty$  é positivo, segue novamente de (3.5) que

$$\mu_\infty := \lim_{K \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda q(K\tilde{\varphi}_\infty)}{K\tilde{\varphi}_\infty} - \sigma_1^U[L_\infty] \right) = \frac{\lambda}{D_1(\infty)} - \sigma_1^U[L_\infty] < 0.$$

Por construção, existe  $c_1 > 0$  tal que  $\tilde{\varphi}_\infty \geq c_1 > 0$  em  $\Omega$ . Consequentemente, para  $K > 0$

grande, temos que

$$\left( \frac{\lambda q(K\tilde{\varphi}_\infty)}{K\tilde{\varphi}_\infty} - \sigma_1^U[L_\infty] \right) \tilde{\varphi}_\infty = (\mu_\infty + o_K(1)) \tilde{\varphi}_\infty \leq \frac{\mu_\infty}{2} c_1 < 0,$$

em  $\Omega$ . A desigualdade em (3.8) é uma consequência da limitação acima e do fato que

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} (h(q(K\tilde{\varphi}_\infty)) - h(\infty)) = 0,$$

uniformemente em  $\Omega$ .

Se  $D_1(\infty) = +\infty$ , podemos repetir os mesmos argumentos acima, observando que  $\mu_\infty = -\sigma_1^U[L_\infty] < 0$ . Omitimos novamente os detalhes.  $\square$

O caso em que  $h(\infty) = \infty$  é mais delicado e exige a presença da condição geométrica  $(b_1)$ . Mais precisamente:

**Lema 3.4.** *Se  $h(\infty) = \infty$  e  $\vec{b}$  satisfaz  $(b_1)$ , então o problema (3.3) possui uma super-solução para todo  $\lambda > 0$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  dada em  $(b_1)$  e  $M > 0$  tal que  $\psi + M > 0$  em  $\overline{\Omega}$ . Defina  $\overline{w} = K(\psi + M)$ , onde  $K > 0$  é uma constante a ser escolhida posteriormente. Por meio de um cálculo direto vemos que  $\overline{w}$  é uma super-solução de (3.3) se, e somente se,

$$\frac{\lambda q(K(\psi + M))}{K(\psi + M)}(\psi + M) + \operatorname{div}(a(x)\nabla\psi) \leq h(q(K(\psi + M)))[\vec{b}(x) \cdot \nabla\psi] \quad \text{em } \Omega. \quad (3.9)$$

Como  $h(\infty) = \infty$  e  $[\vec{b}(x) \cdot \nabla\psi] > 0$ , segue de (3.5) que

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} h(q(K(\psi + M)))[\vec{b}(x) \cdot \nabla\psi] = +\infty$$

e

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\lambda q(K(\psi + M))}{K(\psi + M)} = \begin{cases} \frac{\lambda}{D_1(\infty)} & \text{se } D_1(\infty) < +\infty, \\ 0 & \text{se } D_1(\infty) = +\infty. \end{cases}$$

uniformemente em  $\Omega$ . Já que  $\operatorname{div}(a(x)\nabla\psi(x))$  é limitado, as expressões acima implicam na validade de (3.9) para  $K > 0$  suficientemente grande.  $\square$

**Observação 3.1.** *A regularidade de  $\phi$  pode ser enfraquecida, de modo a podermos considerar  $\phi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , desde que ainda se tenha a limitação superior da aplicação  $x \mapsto \operatorname{div}(a(x)\nabla\phi)$ . Além do mais, podemos considerar  $\overline{w}$  como uma super-solução q.t.p. se  $\vec{b}(x) \cdot \nabla\phi > 0$  apenas fora de um conjunto de medida nula. É claro que, como a natureza do nosso método de sub-super solução é pontual, não iremos fazer este caso aqui.*

Estamos aptos a provar os nossos primeiros resultados de existência para o problema (3.1).

*Prova do Teorema F.* Fixe  $\lambda \in (\sigma_0^1 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty))$ . A partir dos Lemas 3.2 e 3.3 obtemos um par de sub-super soluções  $\underline{w} = \epsilon \varphi_0^m$ ,  $\bar{w} = K \tilde{\varphi}_\infty$  para o problema auxiliar (3.3). Desde que  $\tilde{\varphi}_\infty \geq c_1 > 0$  em  $\Omega$ , podemos tomar  $K > 0$  suficientemente grande de modo que  $\underline{w} \leq \bar{w}$  em  $\Omega$ . Segue do Teorema 3.1 que o problema (3.3) possui ao menos uma solução  $w$  em  $[\underline{w}, \bar{w}]$ . Já que  $\varphi_0 > 0$  em  $\Omega$ , esta solução é positiva. Portanto, tomando  $u = q(w)$ , obtemos uma solução positiva para (3.1).  $\square$

**Observação 3.2.** Se  $D_1(0) = 0$  ou  $D_1(\infty) = +\infty$ , o intervalo  $(\sigma_1^0 D_1(0), \sigma_1^\infty D_1(\infty))$  está bem definido. Entretanto, se  $D_1(0) > 0$  e  $D_1(\infty) < +\infty$ , pode ocorrer que  $\sigma_1^0 D_1(0) > \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ , o que acarretaria na impossibilidade da existência de algum  $\lambda$  onde o método de sub-super solução poderia ser aplicado com as funções que foram obtidas nos Lemas 3.2 e 3.3. Para ilustrar essa situação, considere

$$D_1(s) = D_2(s) = D(s) = 1 + \frac{1}{s+1}.$$

Neste caso,  $h \equiv 1$ , portanto  $\sigma_1^0 = \sigma_1^\infty$ . Por outro lado,  $D(0) = 2 > 1 = D(\infty)$ .

*Prova do Teorema G.* A prova é análoga à do F, a única diferença é que usamos o Lema 3.4 ao invés do Lema 3.3.  $\square$

## 3.2 Abordagem via Bifurcação

Essa seção é dedicada ao estudo de pontos de bifurcação de soluções positivas, assim como provar o Teorema I. Antes, porém, vamos revisar alguns fatos básicos e resultados abstratos da Teoria de Bifurcação. Para maiores detalhes, recomendamos as referências [31, 33, 56, 69, 70].

**Definição 3.2** (Ponto de bifurcação a partir da origem). *Sejam  $\mathcal{U}$  um espaço de Banach e  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  uma aplicação contínua tal que  $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dizemos que  $(\lambda_0, 0)$  é um ponto de bifurcação da equação  $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$  a partir da curva de soluções triviais  $(\lambda, 0)$  se existe uma sequência  $(\lambda_n, u_n) \subset \mathbb{R} \times \mathcal{U} \setminus \{0\}$  de modo que  $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  e  $u_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

Na prova do Teorema H, usaremos o seguinte resultado abstrato, o qual é um compilado dos resultados dados em [56, Proposição 6.5.2, Lema 6.5.3, Lema 6.5.4 e Teorema 6.5.5]:



**Teorema 3.2.** *Seja  $\mathcal{U}$  um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo  $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$  seja normal e possua interior não-vazio. Considere  $\mathcal{K} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  um operador linear, contínuo, compacto e fortemente positivo, isto é, que  $\mathcal{K}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}} \setminus \{0\}) \subset \text{int}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}})$ . Considere também  $\mathcal{G} : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  um operador contínuo que seja compacto em conjuntos limitados e que, para qualquer conjunto compacto  $\Lambda \subset \mathbb{R}$ , satisfaça*

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}(\lambda, u)}{\|u\|_{\mathcal{U}}} = 0, \quad \text{uniformemente para } \lambda \in \Lambda.$$

*Finalmente, assumamos que o operador*

$$\mathcal{F}(\lambda, u) := u - \lambda \mathcal{K}u - \mathcal{G}(\lambda, u),$$

*satisfaça o Princípio do Máximo Forte, no sentido que*

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{P}_{\mathcal{U}} \setminus \{0\}) \\ \mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \end{array} \right\} \implies u \in \text{int}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}}).$$

*Então, existe uma componente ilimitada  $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R} \times \text{int}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}})$  de soluções de  $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$  emanando de  $(\lambda_0, 0)$ , onde  $\lambda_0$  denota o inverso do raio espectral de  $\mathcal{K}$ . Além disso, este é o único ponto de bifurcação de soluções positivas a partir da curva de soluções triviais.*

Agora, lembre que

**Definição 3.3** (Ponto de Bifurcação no Infinito). *Um ponto  $(\lambda_0, \infty)$ , com  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , é um ponto de bifurcação no infinito da equação  $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$  se existe uma sequência  $(\lambda_n, u_n) \subset \mathbb{R} \times \mathcal{U}$  tal que  $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  e  $\|u_n\|_{\mathcal{U}} \rightarrow +\infty$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

Em ordem de apresentar o resultado abstrato, necessitamos demonstrar a segunda parte do Teorema H. Considere um operador uniformemente elíptico  $\mathfrak{L}$ , uma função contínua  $\kappa : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$  em  $\Omega$  e denote por  $\mu_1$  o principal autovalor de

$$\mathfrak{L}u = \lambda \kappa(x)u \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Com essas notações, podemos enunciar o seguinte caso particular dos resultados contidos em [70, Teorema 2.28 e Corolário 2.37]:

**Teorema 3.3.** *Se  $\mathcal{G} \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  satisfaz*

$$\lim_{(s, |\xi|) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{|\mathcal{G}(x, s, \xi, \lambda)|}{(s^2 + |\xi|^2)^{1/2}} = 0, \quad (3.10)$$

*uniformemente em  $x \in \Omega$  e em  $\lambda \in \Lambda$  compacto, então a equação*

$$\mathfrak{L}u = \lambda \kappa(x)u + \mathcal{G}(x, u, Du, \lambda) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

possui um contínuo  $\mathfrak{C}_\infty \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  de soluções que toca  $(\mu_1, \infty)$ . Além disso, existe uma vizinhança  $\mathcal{M}$  de  $(\mu_1, \infty)$  tal que

(i)  $\mathfrak{C}_\infty \setminus \mathcal{M}$  é limitado em  $\mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  e toca  $\mathbb{R} \times \{0\}$  ou

(ii)  $\mathfrak{C}_\infty \setminus \mathcal{M}$  é ilimitado.

Se, adicionalmente,  $\mathcal{G}$  for continuamente diferenciável e

$$\mathcal{G}(x, s, \xi, \lambda) = \mathcal{G}_1(x, s, \xi, \lambda)s + \sum_{j=1}^N (\mathcal{G}_2)_j(x, s, \xi, \lambda)\xi_j, \quad (3.11)$$

com  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  contínuas em  $(s, \xi) = (0, 0)$ , então as soluções obtidas podem ser consideradas positivas.

O restante desta seção é destinado ao estudo da bifurcação a partir da curva de soluções triviais e da bifurcação a partir do infinito.

### 3.2.1 Bifurcação a partir da solução trivial

Nosso objetivo agora é mostrar a existência de um contínuo ilimitado  $\mathfrak{C}_0 \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  de soluções positivas de (3.1) emanando do ponto  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$ . Isso é exatamente o que está enunciado no primeiro item do Teorema H, cuja prova apresentamos agora:

*Prova do Teorema H item (i).* O primeiro passo é reescrever o problema (3.3) de um modo em que possamos aplicar o Teorema 3.2. Desde que  $L_0$  não possui termos de ordem zero, podemos considerar a aplicação  $K = L_0^{-1} : C(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ , que é exatamente o operador resolvente associado ao problema linear

$$\begin{cases} L_0 u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para cada  $f \in C(\overline{\Omega})$ . É fácil ver que  $K$  é linear e contínuo. Utilizando algumas ferramentas padrão de regularidade elíptica combinadas com a imersão compacta de Sobolev  $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ , para  $p > N$ , mostra-se que  $K$  é compacto. Como  $L_0$  satisfaz o Princípio do Máximo Forte, temos em particular que  $K$  é fortemente positivo. Além disso, já que  $K = L_0^{-1}$ , o inverso do raio espectral do operador  $K$  coincide com  $\sigma_1^0$ .

Note que  $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  é uma solução clássica de (3.3) se, e somente se,

$$\begin{cases} L_0 w = \lambda q(w) + (h(0) - h(q(w))) [\vec{b}(x) \cdot \nabla w], & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo  $D_1(0) > 0$ , o problema acima se torna equivalente à

$$F(\lambda, w) := w - \lambda \frac{1}{D_1(0)} K(w) - G(\lambda, w) = 0,$$

onde  $G : \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$  é definida por

$$G(\lambda, w) := \lambda K \left( q(w) - \frac{w}{D_1(0)} \right) + K \left( (h(0) - h(q(w))) [\vec{b}(x) \cdot \nabla w] \right).$$

Note que  $G$  é contínua e compacta. Ademais, para qualquer  $w \neq 0$ , podemos usar que  $K$  é um operador linear e contínuo para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\|G(\lambda, w)\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}}{\|w\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}} &\leq \frac{C_1 |\lambda|}{\|w\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}} \left\| q(w) - \frac{w}{D_1(0)} \right\|_{C(\overline{\Omega})} + C_2 \|h(q(w)) - h(0)\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq C_1 |\lambda| \left\| \frac{q(w)}{w} - \frac{1}{D_1(0)} \right\|_{C(\overline{\Omega})} + C_2 \|h(q(w)) - h(0)\|_{C(\overline{\Omega})} \end{aligned}$$

com  $C_1 = C_1(T) > 0$  e  $C_2 = C_2(\vec{b}) > 0$ . Assim, recordando que  $q(0) = 0$  e usando (3.4), concluimos que, para qualquer conjunto compacto  $\Lambda \subset \mathbb{R}$ , vale que

$$\lim_{\|w\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \rightarrow 0} \frac{\|G(\lambda, w)\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}}{\|w\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}} = 0, \quad \text{uniformemente em } \lambda \in \Lambda.$$

Por fim, lembre que o cone positivo  $\mathcal{P}$  do espaço de Banach ordenado  $C_0^1(\overline{\Omega})$  verifica (ver [6, p. 623-624])

$$\text{int}(\mathcal{P}) = \left\{ u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u > 0 \text{ em } \Omega, \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Suponha que  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $w \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  sejam tais que  $F(\lambda, w) = 0$ . Então,  $w$  é uma solução não-trivial e não-negativa de (3.3). Assim, para

$$\tilde{L} := -\text{div}(a(x)\nabla) + h(q(w(x)))[\vec{b}(x) \cdot \nabla],$$

temos que

$$\begin{cases} \tilde{L}w = \lambda q(w), & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se  $\lambda \leq 0$ , segue do Princípio Máximo Forte que  $w \leq 0$ , o que é uma contradição. Consequentemente,  $\lambda > 0$  e podemos aplicar novamente o Princípio do Máximo Forte para concluir que  $w \in \text{int}(\mathcal{P})$ .

As considerações acima garantem que podemos aplicar o Teorema 3.2 para extrair o contínuo de soluções positivas  $\mathfrak{C}_0$  dado no item (i) do Teorema H.  $\square$

### 3.2.2 Bifurcação no infinito

Nesta sub-seção, obteremos resultados sobre a bifurcação no infinito para o problema (3.1), complementando o estudo feito acima. Começaremos provando a segunda parte do Teorema H:

*Prova do Teorema H item (ii).* Desde que  $D_i(\infty) \in (0, +\infty)$ , para  $i = 1, 2$ , nós temos que  $h(\infty) < +\infty$ . Assim, podemos reescrever (3.3) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} L_\infty w = \lambda \frac{1}{D_1(\infty)} w + G(x, w, \nabla w, \lambda), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde

$$G(x, s, \xi, \lambda) := \lambda \left( q(s) - \frac{s}{D_1(\infty)} \right) + (h(\infty) - h(q(s))) [\vec{b}(x) \cdot \xi],$$

para todo  $(x, s, \xi, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ . É claro que a decomposição em (3.11) vale com

$$G_1(x, s, \xi, \lambda) := \begin{cases} \lambda \left( \frac{q(s)}{s} - \frac{1}{D_1(\infty)} \right), & \text{se } s \neq 0, \\ \lambda \left( \frac{1}{D_1(0)} - \frac{1}{D_1(\infty)} \right), & \text{se } s = 0, \end{cases}$$

e

$$(G_2)_j(x, s, \xi, \lambda) := (h(\infty) - h(q(s))) b_j(x),$$

para todo  $j = 1, \dots, N$ .

Seja  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  um conjunto compacto e note que, para qualquer  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\lim_{(s, |\xi|) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{\left| \lambda \left( q(s) - \frac{s}{D_1(\infty)} \right) \right|}{(s^2 + |\xi|^2)^{1/2}} \leq c_1 \lim_{(s, |\xi|) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \left| \frac{q(s)}{s} - \frac{1}{D_1(\infty)} \right| = 0.$$

Além disso,

$$\frac{\left| (h(\infty) - h(q(s))) [\vec{b}(x) \cdot \xi] \right|}{(s^2 + |\xi|^2)^{1/2}} \leq |h(\infty) - h(q(s))| \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)},$$

e, consequentemente,

$$\lim_{(s,|\xi|)\rightarrow(+\infty,+\infty)} \frac{|(h(\infty) - h(q(s))) [\vec{b}(x) \cdot \xi]|}{(s^2 + |\xi|^2)^{1/2}} = 0.$$

Já que os dois limites acima são uniformes em  $x \in \Omega$  e  $\lambda \in \Lambda$ , concluímos que

$$\lim_{(s,|\xi|)\rightarrow(+\infty,+\infty)} \frac{|G(x, s, \xi, \lambda)|}{(s^2 + |\xi|^2)^{1/2}} = 0, \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega, \lambda \in \Lambda,$$

e, portanto, (3.10) é válida. Assim, podemos aplicar o Teorema 3.3 para o problema (3.12) e utilizar a definição de  $\sigma_1^\infty$  para finalizar a prova do H item (ii).  $\square$

É interessante observar que o nosso problema não admite outros pontos de bifurcação no infinito, como podemos ver no próximo resultado:

**Proposição 3.1.** *Suponha que  $D_1(0) > 0$  e  $D_i(\infty) \in (0, +\infty)$ , para  $i = 1, 2$ . Se  $\lambda > 0$  é um ponto de bifurcação no infinito de (3.3) de soluções positivas em  $\mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$ , então  $\lambda = \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\lambda > 0$  tal que existe uma sequência de soluções  $(\lambda_n, w_n) \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$  de (3.3) de modo que  $w_n \geq 0$  em  $\Omega$  e

$$(\lambda_n, \|w_n\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}) \rightarrow (\lambda, +\infty).$$

Pelo Princípio Máximo Forte, temos que  $w_n(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ . Além disso, em virtude de resultados clássicos de regularidade elíptica,  $(\lambda_n, w_n)$  é uma solução clássica de (3.3) e

$$\|w_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty.$$

Definindo  $v_n := w_n / \|w_n\|_{L^2(\Omega)}$  e usando que  $(\lambda_n, w_n)$  é uma solução de (3.3), nós temos que

$$\int_{\Omega} a(x) [\nabla v_n \cdot \nabla \phi] dx + \int_{\Omega} h(q(w_n)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v_n] \phi dx = \lambda_n \int_{\Omega} \frac{q(w_n)}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} \phi dx, \quad (3.13)$$

para qualquer  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

Se escolhermos  $\phi = v_n$ , obteremos que

$$\int_{\Omega} a(x) |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\Omega} h(q(w_n)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v_n] v_n dx = \lambda_n \int_{\Omega} \frac{q(w_n)}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} v_n dx. \quad (3.14)$$

No que se segue, consideremos  $\vec{b} \neq 0$ . O caso em que  $\vec{b} \equiv 0$  é semelhante. Segue de (d<sub>1</sub>),

$D_1(0) > 0$ , (3.4) e (3.5) que

$$q(s) \leq c_1 s, \quad \forall s \geq 0,$$

para algum  $c_1 > 0$ . Utilizando novamente que  $D_1(0) > 0$ , juntamente com  $D_i(\infty) \in (0, +\infty)$ , extraímos  $c_2 > 0$  tal que

$$|h(s)| \leq c_2, \quad \forall s \geq 0.$$

Ademais, existe  $c_3 > 0$  de modo que  $|\lambda_n| \leq c_3$ , para todo  $n \geq 1$ . Dado  $\epsilon > 0$ , podemos aplicar essas estimativas em (3.14) para concluir que

$$\begin{aligned} a_0 \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq c_1 c_3 \int_{\Omega} v_n^2 dx + c_2 \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla v_n| |v_n| dx \\ &\leq c_1 c_3 \int_{\Omega} v_n^2 dx + c_2 \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \epsilon \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

onde também fizemos uso da desigualdade de Young na última linha. Escolhendo  $\epsilon = a_0/2c_2\|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$  e lembrando que  $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , obtemos que

$$\frac{a_0}{2} \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c_1 c_3 + \frac{c_2^2 \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2a_0}.$$

Portanto,  $(v_n)$  é limitada em  $H_0^1(\Omega)$ . A menos de subsequência, temos que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega), \quad v_n \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega). \quad v_n(x) \rightarrow v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad (3.15)$$

para algum  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Utilizando  $\phi = (v_n - v)$  como função teste em (3.13) obtemos que

$$\int_{\Omega} a(x) [\nabla v_n \cdot \nabla (v_n - v)] dx = \Gamma_{1,2} - \Gamma_{2,n} \quad (3.16)$$

onde

$$\Gamma_{1,n} := \lambda_n \int_{\Omega} \frac{q(w_n)}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} (v_n - v) dx \quad \text{e} \quad \Gamma_{2,n} := \int_{\Omega} h(q(w_n)) (v_n - v) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v_n] dx.$$

Da desigualdade de Hölder, temos que

$$|\Gamma_{1,n}| \leq c_1 c_3 \int_{\Omega} |v_n| |v_n - v| dx \leq c_1 c_3 \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)},$$

e

$$|\Gamma_{2,n}| \leq c_2 \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla v_n| |v_n - v| dx \leq c_2 \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Segue de (3.15) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_{1,n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_{2,n}.$$

Portanto, podemos utilizar (3.16), (3.15) e  $a(x) \geq a_0$  para obter que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Isso somado a convergência fraca de  $(v_n)$  implicam que  $v_n \rightarrow v$  fortemente em  $H_0^1(\Omega)$ .

Agora, vamos analisar o limite de cada termos em (3.13). Primeiramente, a convergência fraca de  $(v_n)$  fornece

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(x) [\nabla v_n \cdot \nabla \phi] dx = \int_{\Omega} a(x) [\nabla v \cdot \nabla \phi] dx,$$

Desde que  $v_n > 0$ , temos que  $v \geq 0$ . Além disso,  $v \neq 0$ , afinal  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Assim, o conjunto

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : v(x) > 0\}$$

possui medida positiva. É claro que  $w_n(x) = v_n(x)\|w_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty$  q.t.p. em  $\Omega^+$  e assim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(q(w_n(x))) = h(\infty) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q(w_n)}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q(w_n)}{w_n} v_n = \frac{1}{D_1(\infty)} v,$$

para q.t.p.  $x \in \Omega^+$ . Segue de (3.15) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega^+} h(q(w_n)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v_n] \phi dx = \int_{\Omega^+} h(\infty) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v] \phi dx,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega^+} \frac{q(w_n)}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} \phi dx = \int_{\Omega^+} \frac{1}{D_1(\infty)} v \phi dx.$$

Por outro lado,

$$\left| \int_{\Omega \setminus \Omega^+} h(q(w_n)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v_n] \phi dx \right| \leq c_2 \|\vec{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega \setminus \Omega^+} |\nabla v_n| |\phi| dx$$

e

$$\left| \int_{\Omega \setminus \Omega^+} \frac{q(w_n)}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} \phi dx \right| \leq c_1 \int_{\Omega \setminus \Omega^+} |v_n| |\phi| dx$$

Já que  $v \equiv 0$  em  $\Omega \setminus \Omega^+$ , podemos argumentar como antes para obter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \setminus \Omega^+} h(q(w_n)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v_n] \phi dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \setminus \Omega^+} \frac{q(w_n)}{\|w_n\|_{L^2(\Omega)}} dx = 0.$$

Combinando essas convergências e fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (3.13), concluimos que

$$\int_{\Omega} a(x) [\nabla v \cdot \nabla \phi] dx + \int_{\Omega} h(\infty) [\vec{b}(x) \cdot \nabla v] \phi dx = \frac{\lambda}{D_1(\infty)} \int_{\Omega} v \phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,  $v$  é uma solução fraca de

$$\begin{cases} L_\infty v = \frac{\lambda}{D_1(\infty)} v, & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como  $v \neq 0$  e  $v \geq 0$ , ela tem que ser uma autofunção associada ao primeiro autovalor de  $L_\infty$ . Assim,  $\lambda = \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ , o que finaliza a prova.  $\square$

### 3.2.3 Prova do Teorema I

Essa sub-seção é dedicada à apresentar a demonstração do Teorema I. Inicialmente, mostramos um resultado de não-existência, o qual será usado para complementar o estudo dos contínuos obtidos anteriormente. Vale ressaltar que este resultado por si só pode ser interessante.

**Proposição 3.2.** *Suponha que  $D_1(\infty) < +\infty$  e tome  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  uma solução fraca e não-negativa de (3.1).*

(i) *Se  $D_2$  satisfaz  $(d_3)$ , então para toda  $\psi \in (H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \setminus \{0\}$  vale que*

$$\lambda \leq \|D_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\int_\Omega a(x) |\nabla \psi|^2 dx}{\int_\Omega \psi^2 dx} + C \int_\Omega |\operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x))| dx$$

(ii) *Se  $\vec{b}$  satisfaz  $(b_2)$ , então*

$$\lambda \leq \|D_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\int_\Omega a(x) |\nabla \xi|^2 dx}{\int_\Omega \xi^2 dx},$$

*em que  $\xi \in (H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \setminus \{0\}$  é tal que  $\operatorname{div}(\xi^2 \vec{b})$  possui sinal constante q.t.p. em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Sejam  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  uma solução fraca e não-negativa de (3.1) e  $\psi \in (H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)) \setminus \{0\}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , podemos utilizar  $\psi^2/(u + \epsilon) \in H_0^1(\Omega)$  como função teste, obtendo que

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega \frac{u}{u + \epsilon} \psi^2 dx &= \int_\Omega \frac{D_2(u)}{u + \epsilon} \psi^2 [\vec{b}(x) \cdot \nabla u] dx \\ &\quad - \int_\Omega a(x) D_1(u) \nabla u \cdot \left[ \frac{\psi^2}{(u + \epsilon)^2} \nabla u - \frac{2\psi}{u + \epsilon} \nabla \psi \right] dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$



Seja  $f_\epsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  a função de classe  $C^1$  dada por

$$f_\epsilon(s) := \int_0^s \frac{D_2(t)}{t + \epsilon} dt, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Integrando por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{D_2(u)}{u + \epsilon} \psi^2 [\vec{b}(x) \cdot \nabla u] dx &= \int_\Omega \psi^2 [\vec{b}(x) \cdot \nabla (f_\epsilon(u))] dx \\ &= \int_{\partial\Omega} f_\epsilon(u) \psi^2 [\vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x)] d\sigma - \int_\Omega f_\epsilon(u) \operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x)) dx \\ &= - \int_\Omega f_\epsilon(u) \operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x)) dx, \end{aligned}$$

Assim, voltando à equação (3.17), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega \frac{u}{u + \epsilon} \psi^2 dx &= - \int_\Omega a(x) D_1(u) \nabla u \cdot \left[ \frac{\psi^2}{(u + \epsilon)^2} \nabla u - \frac{2\psi}{u + \epsilon} \nabla \psi \right] dx \\ &\quad - \int_\Omega f_\epsilon(u) \operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x)) dx \\ &= - \int_\Omega a(x) D_1(u) \left| \nabla \psi - \frac{\psi}{u + \epsilon} \nabla u \right|^2 dx + \int_\Omega a(x) D_1(u) |\nabla \psi|^2 dx \\ &\quad - \int_\Omega f_\epsilon(u) \operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x)) dx \\ &\leq \|D_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_\Omega a(x) |\nabla \psi|^2 dx + \int_\Omega |f_\epsilon(u) \operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x))| dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0^+$  e utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lambda \int_\Omega \psi^2 dx \leq \|D_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_\Omega a(x) |\nabla \psi|^2 dx + \int_\Omega |f(u) \operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x))| dx.$$

A desigualdade acima combinada com as hipóteses implicam no resultado.  $\square$

**Observação 3.3.** Se  $\operatorname{div}(\vec{b}(x)) = 0$  para todo  $x \in \Omega$  e, para alguma função não-nula  $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ , nós tivermos que  $[\vec{b} \cdot \nabla \psi] = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , então  $\operatorname{div}(\psi^2 \vec{b}(x)) = 0$  q.t.p. em  $\Omega$  e, portanto,  $(b_2)$  vale. Esta condição no produto interno significa que  $\psi$  é a primeira integral do campo vetorial  $\vec{b}$ . Ela aparece em diversos problemas envolvendo grandes termos de advecção. Veja, por exemplo, [3, 16, 17].

**Observação 3.4.** A Proposição 3.1 é um indício que, mesmo sem as condições da Proposição 3.2, deveríamos ter um resultado de não-existência para valores grandes de  $\lambda$ , desde que se tivesse a finitude de  $D_i(\infty)$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Entretanto, não conseguimos obtê-lo.

Estamos em posição de provar o nosso segundo resultado principal acerca de existência

de soluções. Durante a demonstração, para um conjunto  $C \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\bar{\Omega})$ , denotaremos por  $\text{Proj}_{\mathbb{R}} C$  o conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{R} : \exists u \in C_0^1(\bar{\Omega}) \text{ de modo que } (\lambda, u) \in C\}$ , que é exatamente a projeção de  $C$  em  $\mathbb{R}$ .

*Prova do Teorema I.* Inicialmente, observe que o Teorema H fornece a existência dos contínuos  $\mathfrak{C}_0$  e  $\mathfrak{C}_\infty$ , bifurcando a partir da origem em  $\sigma_1^0 D_1(0)$  e do infinito em  $\sigma_1^\infty D_1(\infty)$ , respectivamente. Além disso, pelo Teorema 3.2 e pela Proposição 3.1, estes são os únicos pontos de bifurcação de soluções positivas de (3.1). Ademais, pelo Princípio Máximo Forte, (3.1) não possui solução positiva para  $\lambda = 0$ . Assim,

$$\text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}_0 \subset (0, \infty) \quad \text{e} \quad \text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}_\infty \subset (0, \infty).$$

Se  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_\infty$ , então  $(\lambda, \bar{\lambda}) \subset \text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}_0$ , o que implica o resultado.

Agora suponha que  $\mathfrak{C}_0 \neq \mathfrak{C}_\infty$ . Desde que  $\mathfrak{C}_0$  é ilimitado e  $\sigma_1^\infty D_1(\infty)$  é o único ponto de bifurcação no infinito, segue que  $(\sigma_1^0 D_1(0), \infty) \subset \text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}_0$ . De modo similar, temos que  $(\sigma_1^\infty D_1(\infty), \infty) \subset \text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}_\infty$ . Consequentemente, o resultado segue.

Finalmente, assumindo  $(b_2)$  ou  $(d_3)$ , podemos aplicar a Proposição 3.2 para concluir que o problema (3.1) não admite solução positiva para  $\lambda > 0$  grande e, portanto, as primeiras coordenadas de  $\mathfrak{C}_0$  e  $\mathfrak{C}_\infty$  são limitadas. Daí, pela natureza global desses contínuos segue que  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_\infty$ .  $\square$

A Figura 3.1 ilustra os possíveis diagramas de bifurcação dados pelo Teorema I. Na parte (a), mostramos uma possível configuração quando  $\mathfrak{C}_0 \neq \mathfrak{C}_\infty$ , e na parte (b), uma possível diagrama quando eles são iguais. Para simplificar a figura, denotaremos  $\lambda_0 = \sigma_1^0 D_1(0)$  e  $\lambda_\infty = \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ .

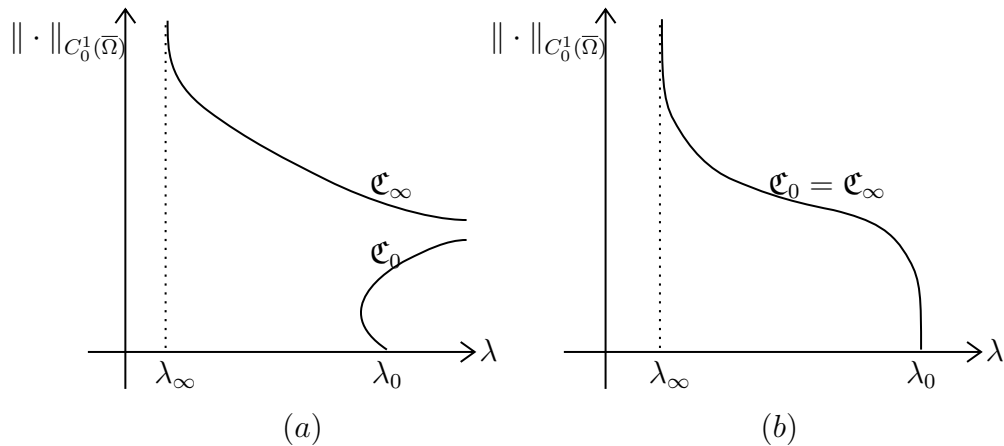


Figura 3.1: Possíveis diagramas de bifurcação.

### 3.3 Direção de Bifurcação e Multiplicidade de Soluções

Nesta seção, estudaremos a direção de bifurcação de soluções positivas tanto da origem quanto no infinito. Esta análise nos permitirá obter resultados de multiplicidade de soluções em alguns casos.

No que se segue, analisaremos a direção de bifurcação a partir da curva de soluções triviais. Recorde que a bifurcação em um ponto  $(\lambda^*, 0)$  é dita subcrítica se existe uma vizinhança de  $(\lambda^*, 0)$  em  $C_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$  tal que toda solução  $(\lambda, u)$  de (3.1) nesta vizinhança satisfaz  $\lambda < \lambda^*$ . De forma análoga, se para toda solução  $(\lambda, u)$  de (3.1) em uma vizinhança de  $(\lambda^*, 0)$  ocorrer que  $\lambda^* < \lambda$ , então dizemos que a bifurcação em  $(\lambda^*, 0)$  é supercrítica.

**Teorema 3.4.** *Suponha que  $D_1 \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $D_2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$  e  $D_1(0) > 0$ . Então,  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$  é um ponto de bifurcação de (3.1) a partir da curva de soluções triviais  $(\lambda, 0)$ . Além disso, se denotarmos por  $\varphi_0^*$  a principal autofunção positiva do operador adjunto  $L_0^*$ , esta bifurcação será subcrítica se*

$$\mathcal{I} := D_1'(0) \int_{\Omega} a(x) \varphi_0 [\nabla \varphi_0 \cdot \nabla \varphi_0^*] dx + D_2'(0) \int_{\Omega} \varphi_0 \varphi_0^* [\vec{b}(x) \cdot \nabla \varphi_0] dx < 0, \quad (3.18)$$

e supercrítica se  $\mathcal{I} > 0$ .

*Demonstração.* Seja  $F : \mathbb{R} \times C_0^2(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega})$  dada por

$$F(\lambda, u) := -\operatorname{div}(a(x) D_1(u) \nabla u) - D_2(u) [\vec{b}(x) \cdot \nabla u] - \lambda u.$$

É claro que  $F$  é de classe  $C^1$  e as soluções de  $F(\lambda, u) = 0$  são soluções de (3.1). Além disso, com um cálculo direto, temos que

$$\mathcal{L}(\lambda) := D_u F(\lambda, 0) = D_1(0) L_0 - \lambda I.$$

Como  $\sigma_1^0$  é um autovalor simples de  $L_0$ , temos que

$$\ker [\mathcal{L}(\sigma_1^0 D_1(0))] = \operatorname{span}\{\varphi_0\}.$$

Afirmamos que

$$\mathcal{L}'(\sigma_1^0 D_1(0)) \varphi_0 \notin R[\mathcal{L}(\sigma_1^0 D_1(0))], \quad (3.19)$$

em que  $R[\mathcal{L}(\sigma_1^0 D_1(0))]$  denota o resolvente do operador  $\mathcal{L}(\sigma_1^0 D_1(0))$ . Com efeito, se isso não for o caso, poderíamos usar  $\mathcal{L}'(\sigma_1^0 D_1(0)) = -I$  para extrair  $\xi \in C_0^2(\overline{\Omega})$  de forma que

$$-\varphi_0 = \mathcal{L}(\sigma_1^0 D_1(0)) \xi = D_1(0) [L_0 \xi - \sigma_1^0 \xi].$$

Multiplicando essa igualdade por  $\varphi_0^*$  e integrando por partes sobre  $\Omega$ , obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &> \int_{\Omega} -\varphi_0 \varphi_0^* dx = D_1(0) \int_{\Omega} [L_0 \xi - \sigma_1^0 \xi] \varphi_0^* dx \\ &= D_1(0) \int_{\Omega} [L_0^* \varphi_0^* - \sigma_1^0 \varphi_0^*] \xi dx = 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Isso prova (3.19).

Aplicando o Teorema de Crandall-Rabinowitz [31, Teorema 1.7] concluímos que  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$  é um ponto de bifurcação de  $F(\lambda, u) = 0$  a partir da curva de soluções triviais. Mais ainda, sendo  $Z$  o complemento topológico de  $\ker [\mathcal{L}(\sigma_1^0 D_1(0))]$  em  $C_0^2(\overline{\Omega})$ , existem  $\epsilon > 0$  e aplicações contínuas

$$\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow Z$$

de modo que  $\lambda(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$  e as soluções não-triviais de  $F(\lambda, u) = 0$  em uma vizinhança de  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$  são dadas por

$$(\mu(s), u(s)) := (\sigma_1^0 D_1(0) + \lambda(s), s(\varphi_0 + \psi(s))) \quad s \in (-\epsilon, \epsilon), \quad s \neq 0.$$

Desde que  $\varphi_0 \in \text{int}(\mathcal{P})$ , então  $u(s) \in \text{int}(\mathcal{P})$  para  $s > 0$  suficientemente pequeno, onde  $\mathcal{P}$  denota o cone positivo do espaço de Banach ordenado  $C_0^1(\overline{\Omega})$ . Isso implica que as únicas soluções positivas em uma vizinhança de  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$  são dadas por  $(\mu(s), u(s))$ , para  $s > 0$  pequeno. Uma vez que  $F(\mu(s), u(s)) = 0$ , podemos tomar  $\varphi_0^*$  como função teste para chegar que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\sigma_1^0 D_1(0) + \lambda(s)] u(s) \varphi_0^* dx &= \int_{\Omega} a(x) D_1(u(s)) [\nabla u(s) \cdot \nabla \varphi_0^*] dx \\ &+ \int_{\Omega} D_2(u(s)) [\vec{b}(x) \cdot \nabla u(s)] \varphi_0^* dx. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ademais,

$$D_1(0) \int_{\Omega} \varphi_0^* L_0 u(s) dx = D_1(0) \int_{\Omega} u(s) L_0^* \varphi_0^* dx = \sigma_1^0 D_1(0) \int_{\Omega} u(s) \varphi_0^* dx,$$

isto é,

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 D_1(0) \int_{\Omega} u(s) \varphi_0^* dx &= D_1(0) \int_{\Omega} a(x) [\nabla u(s) \cdot \nabla \varphi_0^*] dx \\ &+ D_2(0) \int_{\Omega} [\vec{b}(x) \cdot \nabla u(s)] \varphi_0^* dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por outro lado, fazendo a expansão de Taylor obtemos para  $i = 1, 2$  que

$$D_i(u(s)) = D_i(0) + sD'_i(0)u'(0) + o(s) = D_i(0) + sD'_i(0)\varphi_0 + o(s),$$

as  $s \rightarrow 0$ . Substituindo a equação acima em (3.20), utilizando (3.21) e lembrando que  $u(s)/s = (\varphi_0 + \psi(s))$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(s)}{s} \int_{\Omega} (\varphi_0 + \psi(s)) \varphi_0^* dx &= \int_{\Omega} a(x) \left( D'_1(0)\varphi_0 + \frac{o(s)}{s} \right) [\nabla \varphi_0^* \cdot \nabla (\varphi_0 + \psi(s))] dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( D'_2(0)\varphi_0 + \frac{o(s)}{s} \right) [\vec{b}(x) \cdot \nabla (\varphi_0 + \psi(s))] \varphi_0^* dx \end{aligned}$$

Fazendo  $s \rightarrow 0^+$ , obtemos que  $\lambda'_+(0) \int_{\Omega} \varphi_0 \varphi_0^* dx = \mathcal{I}$ , isto é, o sinal de  $\lambda'_+(0)$  é dado pelo sinal de  $\mathcal{I}$ , o que conclui a prova.  $\square$

Como consequência deste resultado, é possível mostrar que a direção de bifurcação de soluções positivas a partir da solução trivial é determinada pelo sinal de  $D'_1(0)$ , desde que se assuma hipóteses apropriadas sobre o campo vetorial  $\vec{b}$ . Especificamente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.5.** *Suponha que  $D_1 \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $D_2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $D_1(0) > 0$  e defina*

$$L'_0 := -\operatorname{div}(a(x)D_1(0)\nabla).$$

*Suponha que  $\vec{b} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$  satisfaça  $\operatorname{div}(\vec{b}(x)) = 0$  e  $[\vec{b}(x) \cdot \nabla z_0(x)] = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , em que  $z_0 > 0$  é a principal autofunção de  $L'_0$  associada à  $\sigma_1^\Omega[L'_0]$ . Então, a bifurcação de soluções positivas de (3.1) a partir de  $(\sigma_1^0 D_1(0), 0)$  é subcrítica se  $D'_1(0) < 0$  e supercrítica se  $D'_1(0) > 0$ .*

*Demonstração.* Por simplicidade, denote  $\lambda' = \sigma_1^\Omega[L'_0]$ . Desde que  $[\vec{b}(x) \cdot \nabla z_0(x)] = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , então

$$L_0 z_0 = \frac{\lambda'}{D_1(0)} z_0, \quad \text{em } \Omega, \quad z_0 = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Como  $z_0 > 0$ , concluímos que  $\lambda' = \sigma_1^0 D_1(0)$  e  $z_0 = \varphi_0$ , em que  $\varphi_0$  é uma autofunção positiva de  $L_0$  associada à  $\sigma_1^0$ . Ademais, sendo que  $\vec{b}$  é um campo vetorial livre de divergência,  $L_0$  é um operador uniformemente elíptico e auto-adjunto. Em particular,  $\varphi_0^* = \varphi_0$  e podemos aplicar o Teorema da Divergência para obter que

$$\begin{aligned} 3 \int_{\Omega} \varphi_0 \varphi_0^* [\vec{b}(x) \cdot \nabla \varphi_0] dx &= \int_{\Omega} [\vec{b}(x) \cdot \nabla (\varphi_0^3)] dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{b}(x)) \varphi_0^3 dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_0^3 [\vec{b}(x) \cdot \eta] d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{I} = D'_1(0) \int_{\Omega} a(x) \varphi_0 [\nabla \varphi_0 \cdot \nabla \varphi_0^*] dx = D'_1(0) \int_{\Omega} a(x) \varphi_0 |\nabla \varphi_0|^2 dx$$

tem o mesmo sinal de  $D'_1(0)$ .  $\square$

O mesmo tipo de resultado pode ser obtido quando consideramos a bifurcação no infinito. Ressaltamos que os conceitos de bifurcação subcrítica e supercrítica são definidos de maneira análoga.

**Teorema 3.6.** *Suponha que  $D_1(0) > 0$ ,  $D_i(\infty) \in (0, +\infty)$ , para  $i = 1, 2$ , e defina*

$$L'_\infty := -\operatorname{div}(a(x)D_1(\infty)\nabla).$$

*Suponha que  $\vec{b} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$  satisfaça  $\operatorname{div}(\vec{b}(x)) = 0$  e  $[\vec{b}(x) \cdot \nabla z_\infty(x)] = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , onde  $z_\infty > 0$  é uma autofunção principal de  $L'_\infty$  associada à  $\sigma_1^\Omega[L'_\infty]$ . Então a bifurcação de soluções positivas a partir do infinito em  $\lambda = \sigma_1^\infty D_1(\infty)$  é*

(i) *subcrítica, se  $D_1(s) \leq D_1(\infty)$  para todo  $s > 0$ .*

(ii) *supercrítica, se  $D_1(s) > D_1(\infty)$  para todo  $s > 0$ .*

*Demonstração.* Procedendo de maneira análoga à prova do Teorema 3.5 obtemos que

$$\begin{cases} L_\infty z_\infty = \frac{\sigma_1^\Omega[L'_\infty]}{D_1(\infty)} z_\infty, & \text{em } \Omega, \\ z_\infty = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e, portanto,  $\sigma_1^\Omega[L'_\infty] = \sigma_1^\infty D_1(\infty)$  e  $z_\infty = \varphi_\infty$ . Assim, segue da Proposição 3.2 e da Observação 3.3 que, se  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$  é uma solução fraca e não-negativa de (3.1), então

$$0 < \lambda \leq \|D_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\int_{\Omega} a(x) |\nabla \varphi_\infty|^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi_\infty^2 dx} = \|D_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sigma_1^\infty.$$

Se  $D_1(s) \leq D_1(\infty) < +\infty$ , então  $\|D_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq D_1(\infty)$ , e portanto

$$\lambda \leq \sigma_1^\infty D_1(\infty),$$

o que implica que a bifurcação no infinito de soluções positivas é subcrítica. Com isso, provamos o item (i).

Para demonstrar o item (ii), argumentaremos por contradição. Suponha que  $D_1(s) > D_1(\infty)$  para todo  $s > 0$  e assumamos que exista uma sequência  $(\lambda_n, u_n)$  de soluções clássicas de (3.1) tal que

$$(\lambda_n, \|u_n\|_{C_0^1(\bar{\Omega})}) \rightarrow (\sigma_1^\infty D_1(\infty), +\infty)$$

e  $\lambda_n \leq \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\varphi_\infty \in \text{int}(\mathcal{P})$ , podemos escolher  $u_n^2/\varphi_\infty$  como função teste na equação satisfeita por  $\varphi_\infty$  para chegar que

$$\int_{\Omega} a(x) D_1(\infty) \nabla \varphi_\infty \cdot \left[ \frac{2u_n}{\varphi_\infty} \nabla u_n - \frac{u_n^2}{\varphi_\infty^2} \nabla \varphi_\infty \right] dx = \sigma_1^\infty D_1(\infty) \int_{\Omega} u_n^2 dx, \quad (3.22)$$

onde utilizamos que  $[\vec{b}(x) \cdot \varphi_\infty(x)] = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Uma vez que  $(\lambda_n, u_n)$  verifica (3.1), podemos tomar  $u_n$  como função teste nessa equação e usar  $\lambda_n \leq \sigma_1^\infty D_1(\infty)$  para obter que

$$\int_{\Omega} a(x) D_1(u_n) |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} D_2(u_n) [\vec{b}(x) \cdot \nabla u_n] u_n dx \leq \sigma_1^\infty D_1(\infty) \int_{\Omega} u_n^2 dx. \quad (3.23)$$

Definindo  $f(s) := \int_0^s D_2(t) t dt$ , utilizando que  $\text{div}(\vec{b}(x)) = 0$  q.t.p. em  $\Omega$  e integrando por partes, temos que

$$\int_{\Omega} D_2(u_n) [\vec{b}(x) \cdot \nabla u_n] u_n dx = \int_{\partial\Omega} f(u_n) [\vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x)] d\sigma - \int_{\Omega} f(u_n) \text{div}(\vec{b}(x)) dx = 0.$$

Assim, segue de (3.22) e de (3.23) que

$$\int_{\Omega} a(x) D_1(\infty) \nabla \varphi_\infty \cdot \left[ \frac{2u_n}{\varphi_\infty} \nabla u_n - \frac{u_n^2}{\varphi_\infty^2} \nabla \varphi_\infty \right] dx \geq \int_{\Omega} a(x) D_1(u_n) |\nabla u_n|^2 dx.$$

Consequentemente, podemos usar  $D_1(s) > D_1(\infty)$  para obter que

$$0 < \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_n|^2 [D_1(u_n) - D_1(\infty)] dx \leq - \int_{\Omega} a(x) D_1(\infty) \left| \nabla u_n - \frac{u_n}{\varphi_\infty} \nabla \varphi_\infty \right|^2 dx \leq 0,$$

o que é uma contradição.  $\square$

Por fim, podemos combinar os Teoremas 3.4 e 3.6 para estabelecer o seguinte resultado de multiplicidade:

**Teorema 3.7.** *Suponha que todas as condições dos Teoremas 3.4 e 3.6 sejam válidas e considere  $\mathcal{I}$  o número real dado em (3.18).*

- (i) *Se  $\sigma_1^0 D_1(0) > \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ ,  $\mathcal{I} > 0$ , e  $D_1(s) > D_1(\infty)$  para todo  $s > 0$ , então existe  $\lambda^* > \sigma_1^0 D_1(0)$  de modo que o problema (3.1) possui ao menos duas soluções clássicas e positivas para cada  $\lambda \in (\sigma_1^0 D_1(0), \lambda^*)$ .*
- (ii) *Se  $\sigma_1^0 D_1(0) < \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ ,  $\mathcal{I} < 0$ , e  $D_1(s) < D_1(\infty)$  para todo  $s > 0$ , então existe  $0 < \lambda^* < \sigma_1^0 D_1(0)$  de modo que o problema (3.1) possui ao menos duas soluções clássicas e positivas para cada  $\lambda \in (\lambda^*, \sigma_1^0 D_1(0))$ .*

*Demonstração.* Provaremos apenas o item (i), pois o segundo item é totalmente análogo. Uma vez que  $\mathcal{I} > 0$  e  $D_1(s) > D_1(\infty)$  para cada  $s > 0$ , pelos Teoremas 3.4 e 3.6, temos que ambas as bifurcações (na origem e no infinito) são supercríticas. Assim, usando que  $\sigma_1^0 D_1(0) > \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ , obtemos  $\lambda^* > \sigma_1^0 D_1(0)$  de maneira que (3.1) possua duas soluções clássicas e positivas para cada  $\lambda \in (\sigma_1^0 D_1(0), \lambda^*)$ .  $\square$

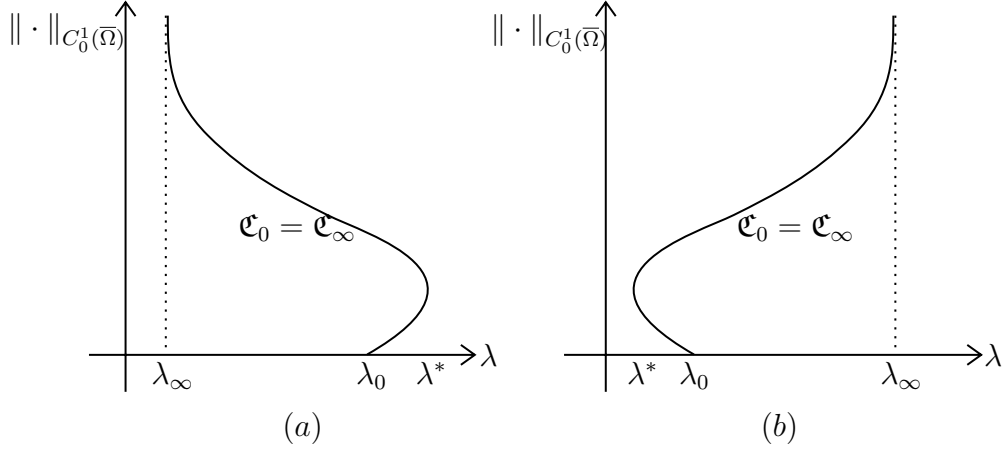


Figura 3.2: Possíveis Diagramas de Bifurcação

Na Figura 3.2, ilustramos os possíveis comportamento do contínuum de soluções  $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_\infty$  sob as hipóteses do Teorema 3.7 (i) e (ii). Por simplicidade, denotamos  $\lambda_0 = \sigma_1^0 D_1(0)$  e  $\lambda_\infty = \sigma_1^\infty D_1(\infty)$ .

**Observação 3.5.** Note que todas as hipóteses do Teorema 3.7 são satisfeitas neste caso: Assuma  $D_1(s) = D_2(s) = D(s)$ . Neste caso,  $h \equiv 1$  e  $\sigma_1^0 = \sigma_1^\infty$ . Além disso, suponha que  $\text{div}(\vec{b}(x)) = 0$  e  $\vec{b} \cdot \nabla \varphi_a = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , onde  $\varphi_a > 0$  denota a principal autofunção positiva para o operador  $-\text{div}(a(x)\nabla \cdot)$ . Assim, se  $D(s) > D(\infty) > 0$  para todo  $s > 0$  e  $D'(0) > 0$ , podemos aplicar o item (i) para obter duas soluções positivas de (3.1) para  $\lambda$  em um intervalo específico. A função  $s \geq 0 \mapsto D(s) := e^{-(s-1)^2} e^{-(s-1)} + 1$  satisfaz todas as condições acima. De forma semelhante, se  $0 < D(s) < D(\infty)$  para todo  $s \geq 0$  e  $D'(0) < 0$ , todas as condições no item (ii) são válidas. Um exemplo é a função  $s \geq 0 \mapsto D(s) = -e^{-(s-1)^2} e^{-(s-1)} + 2$ .

**Observação 3.6.** Algumas questões interessantes que podem levar a trabalhos futuros são

- (i) Complementar a descrição das soluções positivas de (3.1) quando  $h(\infty) = \infty$ , sem a hipótese  $(b_1)$ ;
- (ii) Obter resultados de existência ou não-existência de soluções de (3.1) para valores grandes de  $\lambda$  sem a presença das hipóteses  $(b_2)$  ou  $(d_3)$ .
- (iii) Estudar o caso degenerado em que  $h(0)$  não é um número real.



# Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos diversas classes de problemas elípticos, obtendo resultados de existência, multiplicidade, não-existência e regularidade de soluções.

Nos dois primeiros capítulos estudamos variações de problemas clássicos, impondo condições de Neumann não-lineares no bordo e conseguimos para esses problemas obter o mesmo tipo de resultado que é válido quando a não-linearidade se faz presente no interior com condição de Dirichlet homogênea.

Já no último capítulo, o objeto de estudo foi bem distinto, bem como as técnicas utilizadas. Em verdade, todo o trabalho se mostra como uma grande mistura heterogênea de problemas de equações diferenciais parciais, ressaltando a abrangência da pesquisa realizada durante o período de doutorado.

Para o futuro próximo, gostaríamos de complementar os resultados do Capítulo 2, finalizando o estudo do problema (2.3) para o  $p$ -laplaciano, bem como fechando os casos que não foram estudados no Capítulo 3.

# Bibliografia

- [1] E.A.M. Abreu, P.C. Carrião e O.H. Miyagaki, *Multiplicity of solutions for a convex-concave problem with a nonlinear boundary condition*, Adv. Nonlinear Stud. **6** (2006), 133–148.
- [2] R.A. Adams e J.J.F Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd edition, Pure and Applied Mathematics Series, Elsevier, 2003.
- [3] A. Aghajani e C. Cowan, *An Elliptic Problem Involving Large Advection*, Potential Analysis **58** (2023), 545–560.
- [4] S. Alama e G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calculus of Variations in PDE **1** (1993), 439–475.
- [5] H. Amann, *Existence and Multiplicity Theorems for Semi-linear Elliptic Boundary Value Problems*, Math, Z. **150** (1976), 281–295.
- [6] H. Amann, *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*, SIAM Review **18** (1976), 620–709.
- [7] A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519–543.
- [8] D. Arcoya, J. Carmona e B. Pellacci, *Bifurcation for some quasilinear operators*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **131A** (2001), 733–765.
- [9] D.G. Aronson e H.F. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. **30** (1978) 33–76.
- [10] J.G. Azorezo e I.P. Alonso *Multiplicity of solutions for elliptic equation with critical exponent of with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 877–895.
- [11] J.G. Azorezo, I. Peral e J. Manfredi, *Sobolev versus Holder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Commun. Contemp. Math. **2** (2000), 385–404.

- [12] J.G. Azorezo, I. Peral and J. Rossi, *A convex-concave problem with a nonlinear boundary condition*, J. Differential Equations **198** (2004), 91–128.
- [13] V.P. Bandeira e G.M. Figueiredo, *Multiple solutions for an equation with weights and a nonlinearity with arbitrary growth*, Complex Var. Elliptic Equations **67** (2022), 1–13.
- [14] T. Bartsch e M. Willem, *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3555–3561.
- [15] W. Beckner, *Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality*, Ann. of Math. **138** (1993), 213–242.
- [16] H. Berestycki, F. Hamel e N. Nadirashvili, *Elliptic Eigenvalue Problems with Large Drift and Applications to Nonlinear Propagation Phenomena*, Comm. Math. Phys. **253** (2005), 451–480.
- [17] H. Berestycki, A. Kiselev, A. Nokikov e L. Ryzhik, *The explosion problem in a flow*, J. d'Analyse Mathématique **110** (2010), 31–65.
- [18] L. Boccardo e G. Croce, *Elliptic partial differential equations. Existence and regularity of distributional solutions*, De Gruyter Studies in Mathematics, 55. De Gruyter, Berlin, 2014.
- [19] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [20] H. Brezis e E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*. Proc. Amer. Math. Soc. **88** (3) (1983), 486–490.
- [21] H. Brezis e L. Nirenberg,  *$H^1$  versus  $C^1$  local minimizers*. C. R. Acad. Sci. Paris **317** (1993), 465–472.
- [22] R.S. Cantrell e C. Cosner, *Conditional persistence in logistic models via nonlinear diffusion*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **132A** (2) (2002), 267–281.
- [23] R. S. Cantrell e C. Cosner, *Upper and Lower Solutions for a Homogeneous Dirichlet Problem with Nonlinear Diffusion and the Principle of Linearized Stability*. Rocky Mountain J. Math. **30**(4) (2000), 1229–1236,
- [24] R.S. Cantrell e C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: Population models in disrupted environments II*, SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), 1043–1064.
- [25] R.S. Cantrell e C. Cosner, *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*, Wiley series in mathematical and computational biology, J. Wiley, 2003

- [26] J. Carmona, W. Cintra, M.F. Furtado e R.F. de Oliveira, *Positive solutions for a stationary reaction-diffusion-advection model with nonlinear advection term*. Z. Angew. Math. Phys. **76** (2025), 189.
- [27] J. Carmona e A. Suárez, *An eigenvalue problem for non-bounded quasi-linear operator*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **47** (2) (2004), 353–363.
- [28] K.C. Chang, *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*, Birkhauser, Boston, 1993.
- [29] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, vol. I. Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [30] W. Cintra, M. Montenegro e A. Suárez, *The logistic equation with nonlinear advection term*, Nonlinear Anal. RWA **65** (2022) 103503, pp. 15.
- [31] M.G. Crandall e P.H. Rabinowitz, *Bifurcation from Simple Eigenvalues*, J. Functional Analysis **8** (1971), 321–340.
- [32] C. Cosner, *Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (5) (2014), 1701–1745.
- [33] E.N. Dancer *Global solution branches for positive mappings*. Arch. Rational Mech. Anal. **52** (1973), 181–192
- [34] M. del Pino e C. Flores, *Asymptotic behavior of best constants and extremals for trace embeddings in expanding domains*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), 2189–2210.
- [35] J.I. Diaz, *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries, vol. I. Elliptic Equations*, Res. Notes Math., vol. 106, Pitman, Boston, MA, 1985.
- [36] P. Drábek e P. Takáč, *Poincaré inequality and Palais–Smale condition for the  $p$ -Laplacian*, Calc. Var. **29** (2007), 31–58.
- [37] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353
- [38] J.F. Escobar, *Sharp constant in a Sobolev trace inequality*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), 687–698.
- [39] J.F. Escobar, *Uniqueness theorems on conformal deformation metrics*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 857–883.
- [40] J.F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature*, Ann. of Math. **136** (1992), 1–50.

- [41] M. Escobedo e O. Kavian, *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation*, Nonlinear Anal. **11** (1987), 1103–1133.
- [42] L.C. Ferreira, M.F. Furtado e E.S. Medeiros, *Existence and multiplicity of self-similar solutions for heat equations with nonlinear boundary conditions*, Calc. Var. Part. Diff. Equations **54** (2015), 4065–4078.
- [43] L.C. Ferreira, M.F. Furtado, E.S. Medeiros e J.P.P. Silva, *On a weighted trace embedding and applications to critical boundary problems*, Math. Nach. **294** (2021), 877–899.
- [44] D.G. de Figueiredo, J.P. Gossez e P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*, J. Funct. Anal. **199** (2003), 452–467.
- [45] D.G. de Figueiredo, J.P. Gossez e P. Ubilla, *Local 'superlinearity' and 'sublinearity' for the  $p$ -Laplacian*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 721–752.
- [46] M.F. Furtado e R.F. de Oliveira, *Elliptic equations with critical and supercritical growth at the boundary*. J. Math. Anal. Appl. **536** (2024), 128177.
- [47] M.F. Furtado e J.P.P. Silva, *Critical boundary value problems in the upper-half space*, Nonlinear Anal. **212** (2021), 112441.
- [48] M.F. Furtado, R. Ruviano e E.D. Silva, *Semilinear elliptic problems with combined nonlinearities on the boundary*, Ann. Mat. Pura Appl. **196** (2017), 1887–1901.
- [49] M.F. Furtado e K.C.V. Sousa, *Multiplicity of solutions for a nonlinear value problem in the upper half-space*, J. Math. Anal. Appl. **493** (2021), 124544.
- [50] M.F. Furtado e H.R. Zanata, *Multiple solutions for a Kirchhoff equation with nonlinearity having arbitrary growth*, Bull. Aust. Math. Soc. **96** (2017), 98–109.
- [51] J. Giacomoni, S. Prashanth e K. Sreenadh,  *$W^{1,N}$  versus  $C^1$  local minimizers for elliptic functionals with critical growth in  $\mathbb{R}^N$* , C. R. Acad. Sci. Paris **347** (2009), 255–260.
- [52] P. Haukkanen e T. Tossavainen, *A generalization of Descartes rule of signs and fundamental theorem of algebra*, Appl. Math. Comput. **218** (2011) 1203–1207.
- [53] A. Lê, *Eigenvalue problems for the  $p$ -Laplacian*, Nonlinear Anal. **67** (2006), 1057–1099.
- [54] G.M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1203–1219.

- [55] J. Liu, L. Zhao e P. Zhao, *Multiple positive solutions for elliptic problem with concave and convex nonlinearities*, Elect. J. Diff. Equations **78** (2015), 1–11.
- [56] J. López-Gómez, *Spectral theory and nonlinear functional analysis*, New York: Chapman & Hall/CRC (2001)
- [57] S. Martínez e J.D. Rossi, *Isolation and simplicity for the first eigenvalue of the  $p$ -laplacian with a nonlinear boundary condition*, Abstr. Appl. Anal. **7** (2002), 287–293.
- [58] J. McNicholl, *The logistic problem with nonlinear directed advection*, Nonlinear Anal. RWA. **76** (2024), 103992
- [59] E.S. de Medeiros e K. Perera, *Multiplicity of solutions for a quasilinear elliptic problem via the cohomological index*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3654–3660.
- [60] J. Moser, *A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 457–468.
- [61] A. Okubo, S. A. Levin, *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*, 2nd Edition, Interdisciplinary Applied Mathematics 14, Springer-Verlag New York, 2001
- [62] R.F. de Oliveira, *Uma equação elíptica no semi-plano com não-linearidade crítica no bordo*, 2021. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2021.
- [63] J.C.N. Pádua, E.A.B. Silva e S.H.M. Soares, *Positive solutions of critical semilinear problems involving a sublinear term on the origin*, Indiana Univ. Math. J. **55** (2006), 1091–1111.
- [64] F.O. de Paiva, J.M. do Ó e E.S. de Medeiros, *Multiplicity Results for some quasilinear elliptic equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **34** (2009), 77–89.
- [65] C.V. Pao, *Eigenvalue problems of a degenerate quasilinear elliptic equation*, Rocky Mountain J. Math. **40** (2010), 305–311.
- [66] M.C. Pélissier e L. Reynaud, *Étude d'un modèle mathématique d'e coulement de glacier*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. **279** (1974), 531–534.
- [67] K. Perera, *Critical groups of pairs of critical points produced by linking subsets*, J. Differential Equations **140** (1997), 142–160.
- [68] K. Perera, *Multiplicity results for some elliptic problems with concave nonlinearities*, J. Differential Equations **140** (1997), 133–141.
- [69] P.H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7** (3) (1971) 487–513

- [70] P.H. Rabinowitz, *On Bifurcation From Infinity*, J. Differential Equations **14** (1973), 462–475.
- [71] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [72] G. Stampacchia, *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, Annali di Matematica **51** (1960), 1–37.
- [73] E. Tokens, *A semilinear elliptic equation with convex and concave nonlinearities*, Top. Meth. Nonlinear Anal. **13** (1999), 251–271.
- [74] Z-Q. Wang, *Nonlinear boundary value problems with concave nonlinearities near the origin*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **8** (2001), 15–33.
- [75] T-F. Wu, *Existence and multiplicity of positive solutions for a class of nonlinear boundary value problems* J. Differential Equations **252** (2012), 3403–3435.