



Universidade de Brasília

Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de Políticas Públicas

Programa de Pós-Graduação em Administração

Tese de Doutorado em Administração

**Três Ensaaios sobre Entropia em Mercados Financeiros: Fluxo
de Informação, Estimação Não Paramétrica e Regimes
Estocásticos**

por

Iuri Ribeiro Nobre

Brasília, 26 de junho de 2025

Três Ensaio sobre Entropia em Mercados Financeiros: Fluxo de Informação, Estimacão Não Paramétrica e Regimes Estocásticos

por

Iuri Ribeiro Nobre

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade de Brasília (PPGA/UnB) como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Administração.

Área de Concentração: Finanças e Métodos Quantitativos

Orientador: Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Brasília, 26 de junho de 2025

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade de Brasília (PPGA/UnB) como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Administração.

Texto aprovado por:

Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita
Orientador, PPGA/UnB

Prof. PhD. Eraldo Sérgio Barbosa da Silva
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca
Instituto Federal de Goiás

Prof. PhD. Pushpa Narayan Rathie
Universidade de Brasília

In moerum parentum memoriam

Agradecimentos

Os meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita, pelo apoio e dedicação ao longo dessa jornada. Seu conhecimento e paciência foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

Aos professores, técnicos-administrativos e colegas do PPGA\UnB pelo apoio e aprendizados diários.

Aos meus amigos, que estiveram sempre ao meu lado em momentos de alegria e dificuldade.

À Ludmilla, pela presença constante e apoio incondicional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Esta tese investiga a entropia como ferramenta para descrever padrões informacionais nos mercados financeiros, com foco em dependência, identificação de regimes e caracterização de caudas nas distribuições de dados financeiros. Para isso, esta tese foi estruturada em três artigos. O primeiro aplica a transferência de entropia para analisar fluxos de informação entre mercados acionários, ouro e Bitcoin em três períodos relacionados à pandemia de COVID-19. O segundo propõe um novo estimador de entropia diferencial baseado em kernel de Pareto, demonstrando sua robustez frente a distribuições com caudas pesadas, por meio de simulações de Monte Carlo e dados cambiais. O terceiro artigo aplica esse estimador a séries de índices acionários, identificando transições entre regimes de risco, especialmente durante crises globais. A principal contribuição metodológica consiste no desenvolvimento e aplicação de uma abordagem não paramétrica para estimação de entropia em dados financeiros com caudas pesadas. Os resultados demonstram que a entropia diferencial pode capturar dimensões do risco e da incerteza que escapam às métricas tradicionais, como a variância, especialmente em contextos extremos. A tese também contribui para o debate conceitual ao propor a entropia como métrica alternativa na análise de risco, com aplicações potenciais em gestão financeira, regulação e modelagem de sistemas econômicos complexos.

Palavras-chave: entropia diferencial, kernel de Pareto, mercados financeiros, caudas pesadas, regimes de risco, modelagem não paramétrica.

Abstract

This thesis examines the application of entropy-based measures to characterize informational patterns in financial markets, with a focus on dependence structures, regime identification, and tail behavior. It is structured into three articles. The first applies transfer entropy to assess information flow between stock markets, gold, and Bitcoin across three distinct phases of the COVID-19 pandemic. The second proposes a new differential entropy estimator based on the Pareto kernel, demonstrating its robustness in heavy-tailed distributions through Monte Carlo simulations and exchange rate data. The third article applies this estimator to equity market indices, successfully detecting transitions between light- and heavy-tailed regimes, particularly during global crises. The main methodological contribution lies in developing and applying a nonparametric entropy estimation approach tailored to financial data with heavy tails. The results show that differential entropy can capture dimensions of risk and uncertainty that traditional measures such as variance often fail to reflect, especially under extreme market conditions. Conceptually, the thesis advocates for using entropy as an alternative metric for risk analysis, with potential applications in financial decision-making, regulation, and the modeling of complex economic systems.

Keywords: differential entropy, Pareto kernel, financial markets, heavy tails, risk regimes, nonparametric modeling.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Problema de Pesquisa e Objetivos	2
1.3	Contribuições	3
1.4	Relevância	4
2	Análise Informacional Pré, Durante e Pós-COVID-19	5
2.1	Introdução	6
2.2	Referencial Teórico	8
2.2.1	Fluxo de informações entre mercados durante momentos de incerteza	8
2.2.2	Funções do ouro e criptomoedas em carteiras de investimento	10
2.3	Metodologia	12
2.3.1	Transferência de Entropia	12
2.3.2	Amostra e dados	13
2.4	Resultados e discussões	14
2.4.1	Estatística descritiva	14
2.5	Análise de fluxo de informações	17
2.5.1	Da amostra inteira (2017-2024)	17
2.5.2	Da amostra pré-COVID (2017-2020)	19
2.5.3	Da amostra durante COVID (2020-2023)	21
2.5.4	Da amostra pós-COVID (2023-2024)	23
2.6	Discussão	25
2.7	Teste de Robustez	27

2.8	Conclusão	28
3	A entropia diferencial e o Kernel de Pareto	31
3.1	Introdução	31
3.2	Estimador de entropia pelo método do kernel	33
3.2.1	O estimador	34
3.2.2	Funções kernel	36
3.3	Estudo de Monte Carlo	37
3.4	Análise com dados financeiros	39
3.5	Conclusão	44
4	Detecção de mudanças de regimes no mercado de ações	49
4.1	Introdução	50
4.2	Metodologia	52
4.3	Resultados empíricos	55
4.4	Conclusão	61
5	Considerações Finais	63
	Referências Bibliográficas	65

Abreviações e Siglas

Ibovespa	índice da Bolsa de Valores de São Paulo
S&P500	índice composto por ativos de bolsas estadounidenses
Nikkei	índice da Bolsa de Valores de Tóquio
SSE	índice da Bolsa de Valores de Xangai
BTC	Bitcoin
TE	Tansferência de Entropia
ETE	Transferência de Entropia Relativa
KDE	entropia pelo método do Kernel
K-NN	técnica dos k-vizinhos mais próximos
SS	<i>sampling spacing</i>
CHF	franco suíço
BRL	real
EQM	erro quadrático médio
$(\mathbb{V}[\hat{H}(\hat{f})])$	variância
B	vício
GARCH	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>

Lista de Símbolos e Notações

S	entropia de Shannon, Eq. (2.1)
H	entropia de Rényi, Eq. (2.2)
T	Transferência de entropia de Shannon, Eq. (2.3)
H	entropia diferencial, Eq. (3.1)
$H(\hat{f})$	entropia diferencial cruzada, Eq. (3.2)
$D_{KL}(\hat{f}, f)$	divergência de Kullback-Leibler, Eq. (3.3)
$\hat{f}_h(x)$	estimador kernel, Eq. (3.4)
$\hat{D}_{KL}(\hat{f}_h, f)$	forma empírica da divergência de Kullback-Leibler, Eq. (3.6)
$\hat{H}(\hat{f}_h)$	minimização da entropia cruzada amostral, Eq. (3.7)
$CV(h)$	critério de validação cruzada, Eq. (3.8)
$\hat{H}(\hat{f}_h) = CV(\hat{h})$	estimativa da entropia diferencial por validação cruzada, Eq. (3.9)
$\hat{f}_{h,\alpha}(x_i)$	estimador kernel da função de densidade, Eq. (4.1)
κ_α	kernel de Pareto com índice $\alpha > 0$., Eq. (4.2)
$\hat{H}(\hat{f})$	estimador de momentos da entropia cruzada, Eq. (4.3)
$H(f)$	entropia teórica, Eq. (4.4)

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Os mercados financeiros estão sujeitos a transformações significativas, marcadas por crises, inovações tecnológicas, crescente interdependência global e um aumento expressivo na complexidade dos ativos negociados. Essa evolução torna o comportamento dos dados financeiros ainda mais desafiador de ser modelado, sobretudo em razão de suas distribuições apresentarem características não gaussianas, como caudas pesadas, assimetrias e dinâmicas de dependência não lineares.

No entanto, o desafio de se compreender as dinâmicas dos processos que geram distribuições de retornos financeiros é um problema relativamente antigo, em especial, a constatação de que tais retornos não seguem a distribuição normal. Desde o trabalho seminal de Mandelbrot (1963), que evidenciou propriedades não gaussianas como caudas pesadas e padrões escaláveis, iniciou-se uma busca por modelos probabilísticos mais adequados. Apesar dos avanços significativos nas últimas décadas, tais como modelos baseados em Inteligência Artificial (Li et al., 2023; Jareño e Yousaf, 2023) e modelos de distribuição mista (Duttilo, Gattone e Iannone, 2024), a caracterização precisa da distribuição dos dados financeiros permanece em aberto, refletindo a

complexidade inerente aos mercados financeiros.

Nesse contexto, a entropia surge como uma ferramenta capaz de mensurar a incerteza e acompanhar as mudanças dos mercados, muitas vezes de forma turbulenta. Ao contrário da variância dos retornos, por exemplo, a entropia permite medir a incerteza, mesmo sob eventos extremos, oferecendo uma perspectiva complementar aos métodos estatísticos convencionais. Além de quantificar a incerteza associada às distribuições de retorno, a entropia funciona como uma *proxy* para a identificação de fluxos de informação, mudanças de regime e identificação de assimetrias nas caudas. Além disso, formas generalizadas da entropia, como a entropia de Rényi, e métodos baseados em kernel podem fornecer insights adicionais ao se adaptar às propriedades empíricas dos dados, como as caudas pesadas. Dessa forma, a aplicação da entropia nos dados financeiros se revela útil para a análise de dados em situações de crises financeiras, choques sistêmicos ou transições abruptas nos padrões de volatilidade.

O cálculo da entropia, porém, depende da forma da distribuição dos dados. Por não conhecê-la, e por não haver consenso na literatura sobre a existência de uma família de distribuições que se aplique universalmente a todos os tipos de retornos financeiros, a opção deste trabalho é tratá-los de forma não paramétrica.

1.2 Problema de Pesquisa e Objetivos

A presente tese investiga como a entropia, sob diferentes formas e métodos de estimação, pode ser empregada para descrever e interpretar os padrões de comportamento dos mercados financeiros. Em especial, buscamos responder à seguinte pergunta central:

Como métricas de entropia podem contribuir para a compreensão de relações de dependência, identificação de regimes e caracterização de caudas em dados financeiros?

Para tanto, a tese se estrutura em três artigos científicos, cada um com objetivos específicos:

- i) O Artigo 1, intitulado *Mercados acionários, ouro e Bitcoin: Uma Análise Informacional Pré, Durante e Pós-COVID-19*, investiga se a transferência de entropia pode capturar fluxos de informação e contágio entre os mercados de ações, ouro e Bitcoin, considerando três fases temporais distintas: antes, durante e após a pandemia de COVID-19.
- ii) O Artigo 2 (*A entropia diferencial e o Kernel de Pareto*) discorre sobre um novo estimador de entropia diferencial baseado em kernel de Pareto, buscando melhorar a robustez da medida em contextos de caudas pesadas, comuns nos mercados de câmbio.
- iii) O Artigo 3 (*Detecção de mudanças de regimes no mercado de ações por meio da entropia diferencial*) aplica a entropia diferencial com kernel de Pareto a dados do mercado acionário para identificar regimes associados às caudas leves e pesadas, com vistas a compreender melhor as relações entre variabilidade e incerteza.

1.3 Contribuições

A principal contribuição desta tese é apresentar a entropia como um arcabouço flexível e potente para o estudo de incerteza em finanças, tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado.

Especificamente:

- Apresenta evidências empíricas de contágio e relações dinâmicas entre mercados durante choques globais.
- Descreve e aplica uma nova metodologia de estimação de entropia que se adapta à intensidade das caudas, fornecendo maior precisão em comparação com os estimadores tradicionais.
- Demonstra como a entropia pode ser empregada na detecção de regimes em séries temporais financeiras, indo além da variância como medida de risco.

1.4 Relevância

A crescente participação de investidores institucionais e individuais nos mercados globais aumenta a demanda por ferramentas capazes de lidar com eventos extremos e mudanças abruptas de regime. Nesse sentido, as contribuições desta tese oferecem suporte tanto para pesquisadores quanto para tomadores de decisão, ao disponibilizar ferramentas quantitativas que combinam rigor estatístico e aplicabilidade prática em um cenário de incerteza crescente.

A abordagem adotada também reforça a relevância da pesquisa multidisciplinar, combinando métodos da teoria da informação, estatística não paramétrica e economia financeira. Essa integração permite avançar o conhecimento sobre risco, eficiência de mercado e tomada de decisão sob incerteza, apoiando nas decisões para proteção do capital investido.

Capítulo 2

Mercados acionários, ouro e Bitcoin: Uma Análise Informacional Pré, Durante e Pós-COVID-19

Resumo

Este artigo aplica a metodologia de transferência de entropia para investigar os fluxos de informação entre cinco ativos financeiros — Ibovespa, S&P500, Nikkei, ouro e Bitcoin — ao longo de diferentes regimes temporais: pré-pandemia, durante a pandemia e pós-pandemia de COVID-19. Os resultados revelam padrões dinâmicos de contágio e desconexão entre os mercados, com destaque para a centralidade persistente do S&P500, a perda da função de proteção do ouro em contextos de crise e a robustez do Bitcoin como ativo diversificador. As evidências empíricas obtidas contribuem para a compreensão da estrutura informacional dos mercados e oferecem subsídios à gestão de risco e diversificação de carteiras em ambientes econômicos instáveis.

2.1 Introdução

A integração dos mercados é um fenômeno crescente e deve ser levado em consideração pelos que atuam em finanças. Tal integração pode gerar fluxo de informações entre diversos mercados, tais como: mercados acionários, de câmbio, de metais preciosos, de *commodities*, e até de criptomoedas (Feng, Yuan e Jiang, 2024; Boateng et al., 2022a; Armah, Bossman e Amewu, 2023). Esses fluxos de informações podem indicar co-movimentos entre mercados, o que pode ser chamado de contágio, sendo descrito como a transmissão da flutuação do preço de um mercado para outro (Kuang, 2021). A detecção de fluxos de informações, co-movimentos e contágios financeiros costumam ficar mais aparentes em crises financeiras.

Os impactos nas movimentações dos mercados causados pelo COVID-19 trouxeram novas evidências sobre o funcionamento deste fenômeno. Foram encontradas evidências de fluxo de informações entre mercado acionários (Ferreira et al., 2022; Junior e Hung, 2023), entre mercado acionários e *commodities* (Harikumar e Muthumeenakshi, 2024; Niu e Hu, 2021) e, em certas regiões, não houve sinais de contágio entre mercados (Junior et al., 2024). Este panorama demonstra que não há um consenso sobre o impacto da COVID-19 nos mercados. Sendo assim, novas pesquisas podem ajudar a cobrir essa lacuna de conhecimento.

Além disso, dentro dos impactos econômicos da pandemia, os investidores precisaram se adequar ao cenário de alta incerteza dos mercados, procurando ativos que permitam uma maior segurança (Baur e McDermott, 2010). Nesse sentido, o ouro é amplamente utilizado, devido à sua característica de modificar sua função na carteira de investimentos a depender do cenário econômico. Em momentos de alta turbulência dos mercados globais, o ativo que segura perdas é definido como *safe haven*. De outro modo, o *hedge* provém proteção às perdas em condições habituais do mercado. Por fim, a diversificação da carteira é utilizada para diminuir os riscos idiossincráticos. Devido às suas características, os investidores utilizam ouro para manter o valor das suas carteiras durante os momentos de incerteza excessiva (Bouri, Lucey e Roubaud,

2020; Salisu, Sikiru e Vo, 2020).

Porém, o ouro não é o único ativo que pode exercer diversas funções em uma carteira de investimentos. Descobertas recentes demonstram que as criptomoedas podem agir como ativo diversificador (Feng, Yuan e Jiang, 2024; Huang, Duan e Mishra, 2021), *safe haven* (Tarchella, Khalfaoui e Hammoudeh, 2024); e *hedge* (Huynh et al., 2020), sendo uma nova alternativa para os investidores diversificarem seu patrimônio. Apesar das evidências sobre as criptomoedas, ainda se faz necessário adquirir maior conhecimento sobre seu funcionamento e como se relacionam com outros mercados, a fim de mitigar os possíveis riscos advindos deste ativo (Ibrahim et al., 2024).

A partir disso, destaca-se a importância de estudar o fluxo de informações entre mercados acionários, mercados de metais preciosos e mercados de criptomoedas em situações de extrema incerteza, como é o caso da pandemia do COVID-19. Portanto, o objetivo deste artigo é investigar a existência de fluxo de informações entre os mercados antes, durante e depois da pandemia do COVID-19. Sabe-se do grande impacto econômico causado pela pandemia e a avaliação de como o mercado financeiro se comportou durante este período pode evidenciar possíveis padrões, contribuindo para o arcabouço de conhecimento em finanças, auxiliando na seleção de ativos para montar uma carteira de investimentos e auxilia na percepção do funcionamento dos mercados em períodos de crises financeiras globais. Tais contribuições são relevantes para investidores e para reguladores, pois auxiliam na tomada de decisão em momentos de alta incerteza.

A metodologia utilizada para a investigação do fluxo de informações entre os mercados selecionados foi a transferência de entropia. Tal modelagem é não linear e ajusta-se adequadamente à natureza dos dados financeiros, o que é essencial para se obter resultados robustos (Assaf, Mokni e Youssef, 2023). A amostra engloba os mercados acionários dos Estados Unidos, Japão e Brasil, e demonstra seus fluxos de informações entre si, com o bitcoin e com o ouro em períodos pré, durante e pós COVID-19. Os resultados indicam contágio financeiro

entre os mercados acionários, além de apresentar indícios de que o ouro não possui a função de *safe haven* e identificar a ação do Bitcoin como ativo diversificador durante a pandemia. Ainda, verificou-se a função de diversificação do ouro e Bitcoin nos demais períodos, além da função de *hedge* do ouro para com o Bitcoin na pós-pandemia.

O artigo contribui de diversas maneiras para a literatura de finanças, como: demonstra o fluxo de informações entre mercados, evidencia um potencial risco de contágio entre mercados acionários em momentos de crises financeiras; avalia a função do ouro em momentos de crises financeiras, contribuindo para o conhecimento de formação de carteiras de investimento; investiga as funções das criptomoedas em carteiras de investimento e sua relação com outros mercados.

2.2 Referencial Teórico

2.2.1 Fluxo de informações entre mercados durante momentos de incerteza

As evidências de fluxos de informações entre mercados financeiros em momentos de incerteza têm recebido maior atenção dos pesquisadores, porém, ainda é necessário maior desenvolvimento deste tópico. Kuang (2021) investigou a co-movimentação entre 31 mercados acionários no período de 2007 até 2018. Para isso, o autor construiu um modelo de redes baseadas em entropia, com diversas escalas de tempo. Em seus resultados, foi percebido que, apesar dos mercados desenvolvidos serem mais dominantes, possuem risco de contágio no curto prazo. Com relação à análise do período da crise do *sub-prime*, identificou que o mercado dos Estados Unidos teve grande influência no risco de contágio no curto prazo. De outra forma, Boateng et al. (2022b) verificaram o grau de transmissão de informação entre os mercados acionários na pandemia do Covid-19. Os autores optaram por utilizar os índices de volatilidade por capturar mais rapidamente os efeitos do fluxo de informações. Em seus resultados, observa-se um alto risco de informações saindo dos mercados dos países do BRICS chegando até os países em

desenvolvimento no curto e médio prazo. Porém, no longo prazo não é notada a existência de fluxo de informações que seja significativa. Ainda, alto fluxo de informações no sentido dos países desenvolvidos para os países em desenvolvimento é capturado.

Sobre os fluxos de informações capturados nos mercados acionário dos Estados Unidos, Nie e Xiao (2022) avaliaram a dinâmica do fluxo de informações entre os mercados acionários da China e dos Estados Unidos no período de 2004-2021. Os resultados apontam um fluxo de informações em que o mercado norte americano afeta o mercado chinês, sendo este fluxo intensificado nos períodos da crise de 2008 (*sub-prime*) e na pandemia do COVID-19. Nesse sentido, Karkowska e Urjasz (2022) compararam o fluxo de informação entre os índices do mercado de ações dos EUA e seis índices do mercado de ações europeu antes, durante e depois da crise de 2008, bem como antes e durante a pandemia do COVID-19. Os autores concluíram que tanto o índice de ações do EUA e da Europa responderam rapidamente às crises (2008 e COVID-19) e que as respostas a estes fenômenos mudaram com o tempo, a depender da informação que flui entre os mercados.

Com relação ao mercado europeu, Ferreira et al. (2022) procuram verificar possível existência de fluxos de informações entre 25 mercados acionários da União Europeia no período de 2006-2021. A análise dos autores permite inferir que os mercados acionários posicionados na região Central e Ocidental possuem influência sobre os demais mercados acionários da União Europeia. Além disso, os resultados demonstram que a relação entre mercados foi modificada conforme o tempo, revelando um certo dinamismo entre tais movimentações, podendo ser causadas por momentos de alta incerteza nos mercados.

Junior et al. (2024) investigaram os co-movimentos e a transmissão de informações entre os mercados de ações africanos a partir dos impactos do COVID-19. Os autores avaliaram que, com base em seus resultados, não houve evidências de co-movimentação dos mercados acionários africanos causados pelo efeito da COVID-19.

Logo, compreende-se pela literatura que os mercados acionários possuem evidências de co-

movimentação em momentos de incerteza e que, ao longo do tempo, esse fenômeno pode se modificar a depender do tamanho do choque financeiro. Assim, a constante avaliação desse fenômeno trará maior conhecimento para os atores financeiros e estudiosos da área.

2.2.2 Funções do ouro e criptomoedas em carteiras de investimento

O ouro é um ativo amplamente estudado no universo de finanças, principalmente pela sua função em carteiras de investimento. Baur e Lucey (2010) perceberam que o ouro poderia agir como *hedge* em uma carteira de ações e como *safe haven* quando o mercado acionário está em condições de incerteza extrema. A partir disso, diversos autores passaram a investigar as funções do ouro em contextos econômicos diferentes.

Bekiros et al. (2017) investigaram a função do ouro nos mercados acionários do BRICS utilizando uma amostra de 2001-2014. Os resultados indicam que o ouro atuou como diversificador e os dados não suportam evidências do ouro como *hedge* e *safe haven*. Por outro lado, Mensi et al. (2024) avaliaram as dependências dinâmicas do ouro, prata e petróleo com os mercados acionários do Médio Oriente e Norte da África no período da pandemia do COVID-19. Nos resultados, os autores demonstram que o ouro, a prata e o petróleo possuem a função de *hedge* nas regiões estudadas. Chang et al. (2022) estudaram a relação entre o ouro, o dólar americano e a taxa de juros no mercado acionário dos Estados Unidos no período de 2002- 2019. Os autores evidenciam que qualquer ativo estudado pode servir como um fraco *hedge* e/ou como um fraco *safe haven* durante os eventos em que o mercado estava em baixa no período amostral analisado.

A partir dessas evidências, percebe-se que a função do ativo também pode se modificar a depender do mercado acionário e período econômico estudado. Além disso, outros ativos podem assumir funções de proteção de carteira de investimentos além do ouro (Mensi et al., 2021).

Nesse sentido, as criptomoedas e suas funções passaram a ser estudadas devido à sua alocação em carteiras de investimentos (Feng, Yuan e Jiang, 2024). Corbet et al. (2018) analisaram o mercado de criptomoedas e a sua interconectividade entre os mercados acionários e o ouro. Os autores concluem que as criptomoedas não possuem interação com o mercado de ações e o ouro. Dessa forma, é possível avaliar as criptomoedas como uma forma de diversificação de portfólio, apesar do alto risco idiossincrático, o que torna improvável sua função de *hedge*. Huang, Duan e Mishra (2021) examinaram se o Bitcoin possui a função de *safe haven* em movimentos adversos das cinco maiores economias globais durante a pandemia do COVID-19. Os autores encontraram evidências de que o Bitcoin pode contribuir para a diversificação e mitigação de risco da carteira. Ainda, durante a pandemia do COVID-19, foi percebido uma alteração de função do Bitcoin para com os mercados acionários, exceto no caso dos Estados Unidos.

Assaf, Mokni e Youssef (2023) verificaram o impacto da pandemia de COVID-19 nos fluxos de informações entre o Bitcoin, Ethereum, Ripple e Litecoin com o índice de incerteza, o ouro e o mercado acionário Norte americano. Os autores destacam que, em seus achados, durante a pandemia do COVID-19, o ouro e o índice de incerteza mantêm a sua posição de *safe haven*. Porém, em outros períodos, há um grande fluxo de informação entre os ativos estudados, sugerindo baixa função de diversificação e *hedge*.

Tais evidências demonstram que tanto o ouro quanto as criptomoedas, apesar de serem amplamente estudadas, ainda não apresentam um padrão definido de atuação nas carteiras de investimento, sendo dependentes do período analisado e do mercado acionário. Portanto, evidências que demonstrem suas funções em mercados em desenvolvimento podem ajudar na construção do conhecimento em finanças.

2.3 Metodologia

2.3.1 Transferência de Entropia

Segundo Shannon (1948), define-se a entropia de uma variável aleatória discreta como

$$S_n(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i), \quad (2.1)$$

na qual $p_1, \dots, p_n$ forma uma distribuição de probabilidades tal que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $p_i \geq 0$ e $0 \ln 0 = 0$.

Apesar de a entropia de Shannon ser bastante utilizada no meio de finanças, a sua mensuração apresenta pesos iguais em todos os resultados em uma distribuição de probabilidade, não sendo capaz de considerar as caudas gordas, que são comuns nos dados financeiros (Bossman et al., 2022). Por isso, este trabalho também utilizará a entropia de Rényi que generaliza a entropia de Shannon de forma que, quando $r \rightarrow 0$, a entropia de Rényi é apenas o logaritmo da variável aleatória enquanto $r \rightarrow 1$, obtém-se a entropia de Shannon (Sheraz, Preda e Dedu, 2020):

$$H_r(P) = \frac{1}{1-r} \log \left(\sum_{i=1}^n p_i^r \right) \quad (2.2)$$

em que $r > 0$.

A transferência de entropia pode ser concebida como um parâmetro que pode ser usado para descrever a interação entre séries temporais e detectar a direção do fluxo de informações entre eles (Dhifaoui et al., 2023). Nesse sentido, o cálculo da transferência de entropia pode ser realizado através da entropia de Shannon ou Rényi, e o confronto desses dois resultados pode gerar o teste de robustez da transferência de entropia realizada nos dados (Maiti e Kayal, 2023).

Portanto, este estudo utilizará as duas metodologias de cálculo de transferência de entropia, conforme definido nas equações que se seguem.

$$T_{J \rightarrow I}(k, l) = \sum_{x_{t+1}, i_t^{(k)}, j_t^{(l)}} P(i_{t+1}, i_t^{(k)}, j_t^{(l)}) \log \left(\frac{P(i_{t+1} | i_t^{(k)}, j_t^{(l)})}{P(i_{t+1} | i_t^{(k)})} \right) \quad (2.3)$$

na qual $T_{J \rightarrow I}$ representa o fluxo de informação da variável J (de ordem l) para I (de ordem k), levando em consideração o processo estacionário de Markov, derivado da junção da entropia de Shannon e o conceito de distância de Kullback-Leibler. Isso implica que a probabilidade de I em $t + 1$ no estado i , condicionado a k observações passadas, é dada por (Maiti e Kayal, 2023)

$$P(i_{t+1} | i_t^{(k)}) = P(i_{t+1} | i_t^{(k)}, j_t^{(l)}),$$

dado $i_t^{(k)} = (x_t, \dots, x_{t-k+1})$ e $j_t^{(l)} = (j_t, \dots, j_{t-l+1})$.

E, para a entropia de Rényi, define-se transferência de entropia como

$$\text{TR}_{J \rightarrow I}(k, l) = \frac{1}{1-r} p(i_{t+1}, i_t^{(k)}, j_t^{(l)}) \log \left(\frac{\sum_i \varnothing_r(i_t^{(k)}) P^r(i_{t+1} | i_t^{(k)})}{\sum_{i,j} \varnothing_r(i_t^{(k)}, j_t^{(l)}) P^r(i_{t+1} | i_t^{(k)}, j_t^{(l)})} \right)$$

em que r representa o parâmetro de ponderação da entropia de Rényi e, se $r > 0$, então $\varnothing_r(j) = \frac{p^r(j)}{\sum_j p^r(j)}$ (Beck e Schögl, 1993).

2.3.2 Amostra e dados

Utilizaram-se as séries históricas dos preços do Ibovespa, Nikkei, S&P500, Ouro e Bitcoin para a formação da amostra com frequência diária, no período de 2017-2024. A partir disso, foram

calculados os retornos logarítmicos de todas as séries de preços como $r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \times 100$, em que r_t é o retorno composto contínuo, enquanto P_t e P_{t-1} são respectivamente os índices atual e anterior. Os dados foram obtidos através do Yahoo!Finance, sendo coletado por *webscraping* utilizando o pacote `quantmod` do software R. As transformações e os cálculos também foram efetuados através do R.

Após a transformação dos dados, foram criadas as seguintes janelas temporais: (i) período total da amostra; (ii) período pré-COVID (31-01-2017 até 29-11-2019); (iii) período COVID (30-11-2019 até 05-05-2023) e período pós-COVID (06-05-2023 até 10-04-2024). Este recorte temporal foi proposto com base nos alertas sobre o início e o fim da pandemia emitidos pela Organização Mundial da Saúde (OMS)¹. Portanto, as séries de retornos foram utilizado para calcular a entropia em cada um destes cenários, possibilitando a verificação do fluxo de informação durante o período amostral selecionado.

2.4 Resultados e discussões

2.4.1 Estatística descritiva

A Figura 2.1 descreve a variação dos preços e retornos dos mercados acionários do Brasil, Estados Unidos e Japão. Pode ser observado pelos gráficos que os mercados acionários se movimentaram positivamente até o momento da pandemia do COVID-19 (entre 30-11-2019 e 05-05-2023), quando houve uma queda abrupta nos preços e alta volatilidade de retornos nesses mercados.

A Figura 2.2 apresenta os gráficos de variação de preços e retornos da bitcoin e do ouro. Diferentemente do que foi verificado nos mercados acionários, o ouro permaneceu em tendência

¹**Nota:** Este artigo considera os efeitos da COVID-19 a partir do alerta emitido à OMS sobre uma nova cepa, até então inédita em seres humanos (<https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>). Tal recorte foi adotado a fim de capturar todos os efeitos relevantes dos mercados associados a esse fato.

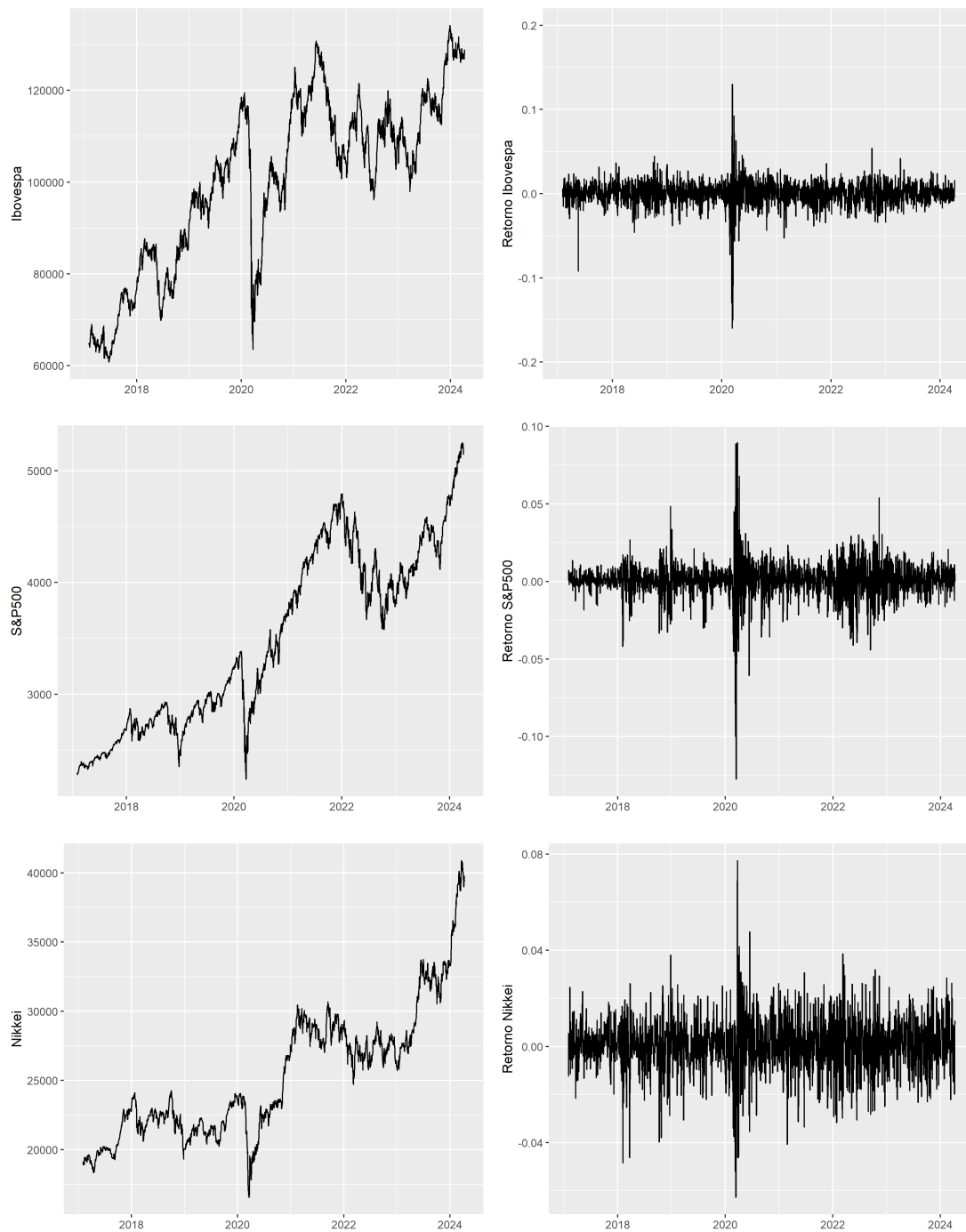


Figura 2.1: Série de preços e retornos dos mercados acionários

de alta nos preços. Porém, sua volatilidade é nitidamente afetada pela pandemia, podendo tal fenômeno ser justificado pela sua maior procura, visto os impactos causados nos mercados

acionários pela pandemia. Já o Bitcoin apresenta um curto momento de queda na pandemia. Porém, em meados de outubro de 2020, observa-se forte tendência de alta, com preços do Bitcoin subindo exorbitantemente. Percebe-se que o Bitcoin recebeu um choque de volatilidade em seus retornos, mas em menor magnitude em comparação com os mercados acionários e o ouro.

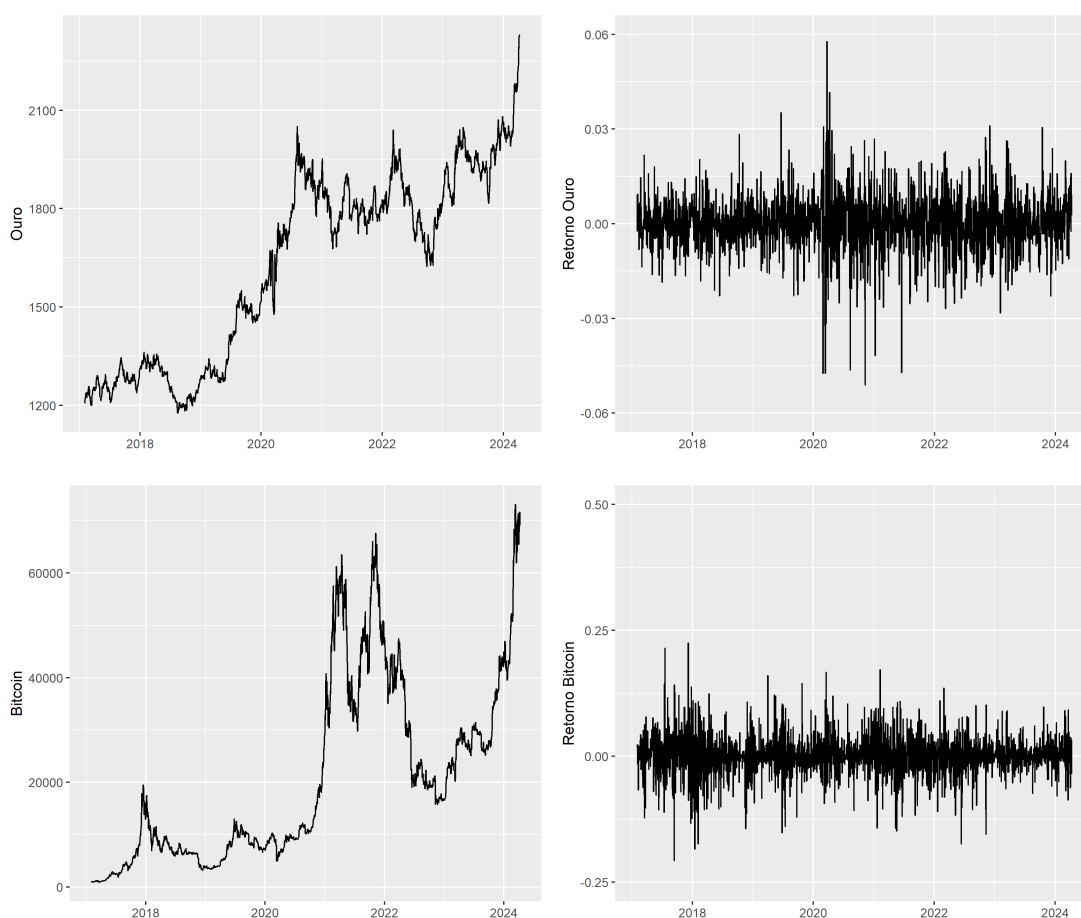


Figura 2.2: Série de preços e retornos do ouro e Bitcoin

A Tabela 2.1 apresenta algumas estatísticas preliminares dos dados das séries de retornos dos ativos estudados. Ao analisar todas as séries de retorno, o Bitcoin se destaca por apresentar maior volatilidade (0,0384) e amplitude total, com retornos variando de -46% a 22% no período da amostra, provando ser um ativo de alto risco. Por outro lado, dentre os índices dos mercados

acionários, o Ibovespa apresentou maior volatilidade, apresentando os maiores valores extremos e desvio padrão. O teste de Jarque-Bera permite rejeitar a hipótese de normalidade de todas as séries de retorno dos ativos estudados, o que já se espera como fato estilizado amplamente conhecido em finanças.

Tabela 2.1: Estatística descritiva dos retornos

	Min	Max	Média	Desvio padrão	Assimetria	Curtose	Jarque-Bera
Ibovespa	-0,1599	0,1302	0,0003	0,0156	-1,3977	22,3243	28133***
S&P500	-0,1276	0,0896	0,0004	0,0121	-0,8526	18,9657	19411***
Nikkei	-0,0627	0,0773	0,0004	0,0115	-0,0818	6,4990	889,08***
Ouro	-0,0510	0,0577	0,0003	0,0090	-0,1721	7,6801	1657,2***
Bitcoin	-0,4617	0,2251	0,0001	0,0384	-0,6802	14,3701	14342***

***Valores significativos (p-valor < 0,001)

2.5 Análise de fluxo de informações

2.5.1 Da amostra inteira (2017-2024)

A Tabela 2.2 apresenta as direções dos fluxos de informação, os valores da transferência de entropia (TE), a transferência de entropia relativa (ETE) e os respectivos p -valores para o período de 2017 a 2024. A análise revela padrões complexos e assimétricos de transmissão de informação entre os ativos financeiros considerados. Em particular, o S&P500 se destaca como um emissor dominante de informação, com fluxos estatisticamente significativos e relativamente intensos para o Nikkei (TE = 0,0457; ETE = 0,0407) e para o Ibovespa (TE = 0,0110; p = 0,0100).

A relação entre o S&P500 e o Nikkei é bidirecional, mas com maior intensidade no sentido do mercado norte-americano para o japonês. Nesse caso, formulamos duas hipóteses. A primeira, é que tal assimetria se deve tanto pela diferença de fuso horário — que permite ao mercado norte-americano reagir com maior antecedência a eventos globais — como pelo papel crescente do S&P500 como mercado de referência internacional. Embora estudos anteriores como Kwon e Yang (2008) e Jizba, Kleinert e Shefaat (2012) tenham documentado fluxos

mais intensos oriundos dos mercados asiáticos, a inversão observada neste estudo pode refletir mudanças estruturais na hierarquia informacional global ou efeitos conjunturais específicos do período pandêmico. A segunda, está relacionada com a política de juros baixos ou negativos historicamente mantido pelo Japão. Essa política favorece a obtenção de empréstimos a custos reduzidos, incentivando a alocação em ativos mais rentáveis no exterior — um fenômeno conhecido como *carry trade*. Como consequência, os mercados norte-americano e japonês apresentam uma relação de interdependência estrutural, e não um efeito contágio episódico, como argumentam (Forbes e Rigobon, 2002).

Considera-se plausível que essa assimetria observada nos fluxos de informação entre o S&P500 e o Nikkei também resulte de uma combinação dessas duas hipóteses levantadas. Por um lado, a posição privilegiada do mercado norte-americano no sistema financeiro internacional, aliada à vantagem temporal proporcionada pelo fuso horário, favorece sua influência antecipada sobre outros mercados. Por outro, a estrutura financeira japonesa — marcada por políticas monetárias acomodatórias e pela prevalência de estratégias de *carry trade* — contribui para uma interdependência mais profunda e duradoura com mercados externos, especialmente com os Estados Unidos. Assim, a predominância do fluxo informacional do S&P500 para o Nikkei pode ser compreendida como reflexo tanto de dinâmicas conjunturais quanto de fundamentos estruturais mais amplos.

Além disso, observa-se um fluxo de informações bidirecional entre o Ibovespa e o Nikkei, indicando um grau elevado de interconexão entre esses mercados. Esse resultado está alinhado com os achados de Boateng et al. (2022b), que documentam transferências de informação tanto unidirecionais quanto bidirecionais entre mercados em desenvolvimento e desenvolvidos. Entretanto, tal bidirecionalidade também implica maior risco de contágio, tornando menos eficiente a combinação desses ativos em uma mesma carteira de investimentos, conforme discutido por Lahmiri e Bekiros (2020).

O ouro aparece como receptor de informação a partir do S&P500 ($TE = 0,0130$; $p < 0,001$),

do Ibovespa ($TE = 0,0119$; $p < 0,001$) e do Nikkei ($TE = 0,0101$; $p = 0,0133$), mas não atua como transmissor significativo de informação para todos os mercados (exceto para o Nikkei). Isso sugere que o ouro, ao longo do período analisado, não cumpre satisfatoriamente suas funções tradicionais de *hedge* ou *safe haven*, dado que os fluxos ocorrem majoritariamente em uma única direção. Essa conclusão está em consonância com os resultados de Assaf, Mokni e Youssef (2023) e Duc Huynh, Burggraf e Wang (2020), os quais indicam que, sob certas condições de mercado, o ouro pode perder sua capacidade protetiva frente a choques nos mercados acionários. Nesse cenário, sua utilidade como instrumento de diversificação também é limitada.

O Bitcoin, por sua vez, não apresenta fluxos de informação estatisticamente significativos com nenhum dos mercados acionários nem com o ouro, reforçando sua característica de ativo informacionalmente autônomo. Isso corrobora sua possível função como diversificador em carteiras de investimento, conforme sugerido pela ausência de cointegração informacional durante o período analisado. A dissociação entre a dinâmica da criptomoeda e dos demais ativos tradicionais pode ser explorada por investidores interessados em mitigar riscos sistemáticos.

Em conjunto, esses achados contribuem para uma compreensão empírica inicial das relações de contágio e independência entre ativos financeiros durante a amostra total. Agora, para melhor compreensão dos fenômenos dos ativos estudados, ela foi segmentada em três partes: pré-COVID, COVID e pós-COVID. Dessa forma, é possível separar os efeitos causados pela pandemia, com o intuito de melhorar a compreensão desse fenômeno.

2.5.2 Da amostra pré-COVID (2017-2020)

A Tabela 2.3 apresenta os resultados da transferência de entropia no período pré-COVID (2017–2019). Observa-se um fluxo de informação estatisticamente significativo entre o mercado norte-americano (S&P500) e o mercado japonês (Nikkei), com maior intensidade no sentido do S&P500 para o Nikkei. Esse resultado pode refletir o papel dominante do mercado norte-americano na dis-

Tabela 2.2: Transferência de entropia: amostra total

Direção	TE	ETE	p-valor
Ibov → S&P500	0.0026	0.0000	0.9700
Ibov → Nikkei	0.0298	0.0246	0.000***
Ibov → Ouro	0.0119	0.071	0.000***
Ibov → BTC	0.0033	0.000	0.7800
S&P500 → Ibov	0.0110	0.0054	0.0100**
S&P500 → Nikkei	0.0457	0.0407	0.000***
S&P500 → Ouro	0.0130	0.0081	0.000***
S&P500 → BTC	0.0068	0.0017	0.1800
Nikkei → Ibov	0.0094	0.0036	0.0300**
Nikkei → S&P500	0.0181	0.0125	0.000***
Nikkei → Ouro	0.0101	0.0054	0.0133**
Nikkei → BTC	0.0038	0.0000	0.7467
Ouro → Ibov	0.0090	0.0037	0.0533
Ouro → S&P500	0.0092	0.0034	0.0667
Ouro → Nikkei	0.0103	0.0050	0.0100***
Ouro → BTC	0.0055	0.0001	0.3533
BTC → Ibov	0.0062	0.0004	0.3133
BTC → S&P500	0.0059	0.0003	0.3833
BTC → Nikkei	0.0081	0.0030	0.0633
BTC → Ouro	0.0064	0.0018	0.1700

*Valores significativos (p-valor < 0,05)

**Valores significativos (p-valor < 0,01)

***Valores significativos (p-valor < 0,001)

seminação de choques informacionais mesmo antes do início formal da pandemia, indicando uma antecipação de expectativas ou um alinhamento crescente entre os mercados. Além disso, destaca-se a existência de um fluxo significativo do Ibovespa para o Nikkei (TE = 0,0459; $p < 0,001$), sugerindo que, mesmo em períodos de estabilidade aparente, mercados em desenvolvimento podem exercer influência relevante sobre economias asiáticas, possivelmente por meio de canais indiretos como commodities, fluxo de capitais ou expectativas regionais.

Com relação ao ouro, os resultados indicam ausência de fluxo de informação entre esse ativo e o Ibovespa, S&P500 e Bitcoin, o que sinaliza sua função de ativo diversificador no período analisado. No entanto, o fluxo significativo partindo do Nikkei para o ouro (TE = 0,0159; $p = 0,0400$) compromete parcialmente essa função, ao menos no que se refere à independência frente ao mercado japonês.

No que tange ao Bitcoin, os resultados reforçam sua condição de ativo informacionalmente

Tabela 2.3: Transferência de entropia: amostra pré-COVID

Direção	TE	ETE	<i>p</i> -valor
Ibov → S&P500	0.0059	0.0000	0.9500
Ibov → Nikkei	0.0459	0.0362	0.000***
Ibov → Ouro	0.0035	0.0000	0.8000
Ibov → BTC	0.0058	0.0000	0.8267
S&P500 → Ibov	0.0106	0.0003	0.3500
S&P500 → Nikkei	0.0823	0.0717	0.000***
S&P500 → Ouro	0.0035	0.0000	0.7600
S&P500 → BTC	0.0053	0.0000	0.8567
Nikkei → Ibov	0.0125	0.0030	0.2500
Nikkei → S&P500	0.0334	0.0214	0.000***
Nikkei → Ouro	0.0159	0.0086	0.0400*
Nikkei → BTC	0.0136	0.0042	0.1933
Ouro → Ibov	0.0093	0.0000	0.4033
Ouro → S&P500	0.0176	0.0049	0.1200
Ouro → Nikkei	0.0153	0.0055	0.1233
Ouro → BTC	0.0030	0.0000	0.9500
BTC → Ibov	0.0168	0.0079	0.0567
BTC → S&P500	0.0149	0.0024	0.2800
BTC → Nikkei	0.0164	0.0067	0.0733
BTC → Ouro	0.0058	0.0000	0.6100

*Valores significativos (p-valor < 0,05)

**Valores significativos (p-valor < 0,01)

***Valores significativos (p-valor < 0,001)

autônomo, uma vez que não se observam fluxos estatisticamente significativos com nenhum dos ativos tradicionais considerados. Assim, sua função como instrumento de diversificação permanece válida no contexto anterior à pandemia, em consonância com a literatura que discute a baixa correlação entre criptomoedas e mercados financeiros tradicionais em tempos de normalidade.

2.5.3 Da amostra durante COVID (2020-2023)

Com relação à Tabela 2.4, que apresenta os resultados da transferência de entropia entre os ativos durante o período da pandemia de COVID-19 (2020–2023), observa-se uma redução na intensidade do fluxo de informação entre o S&P500 e o Nikkei em comparação ao período pré-pandêmico. Ainda assim, a relação permanece estatisticamente significativa, indicando que esses mercados continuaram fortemente conectados durante o choque global. Destaca-

se também o surgimento de um fluxo bidirecional entre o Ibovespa e o Nikkei, sugerindo um aumento no risco de contágio entre mercados desenvolvidos e em desenvolvimento — evidência compatível com os achados de Boateng et al. (2022b).

Outro aspecto relevante é a persistente ausência de fluxo de informações entre o S&P500 e o Ibovespa nos recortes pré-pandêmico e pandêmico, apesar da existência de tal conexão na amostra total. Essa oscilação pode indicar que o contágio entre esses mercados ocorre de forma intermitente ou em horizontes mais longos, alinhando-se à perspectiva de Wang et al. (2017), segundo a qual as conexões informacionais variam conforme o regime de mercado.

Com relação ao ouro, verifica-se um aumento significativo nos fluxos de informação recebidos, em comparação ao período pré-COVID, com modificações na força e no nível de significância das relações. Durante a pandemia, o ouro deixou de exercer as funções tradicionais de *safe haven* e diversificador, uma vez que passou a receber fluxos de todos os mercados acionários analisados, inclusive de forma bidirecional com o Ibovespa. Esses achados indicam uma perda de seu papel protetivo frente ao risco sistêmico, corroborando estudos anteriores como Choudhry, Hassan e Shabi (2015), Bekiros et al. (2017), Thuy, Oanh e and (2024) e Tarchella, Khalfaoui e Hammoudeh (2024).

Também se observa, de forma inédita na série temporal analisada, um fluxo bidirecional entre o ouro e o Bitcoin, o que sugere um comovimento informacional entre os dois ativos durante a pandemia. Esse resultado reforça a ideia de que o período pandêmico alterou significativamente a dinâmica dos ativos financeiros e é consistente com as observações de Ibrahim et al. (2024).

Por fim, o Bitcoin manteve sua característica de ativo informacionalmente autônomo em relação aos mercados acionários, sem apresentar fluxos significativos de ou para esses mercados. Esse padrão reforça seu papel como potencial instrumento de diversificação em carteiras de investimento, inclusive durante períodos de crise, como também é relatado por Wen, Tong e Ren (2022).

Tabela 2.4: Transferência de entropia: amostra durante COVID

Direção	TE	ETE	<i>p</i> -valor
Ibov → S&P500	0.0155	0.0050	0.0967
Ibov → Nikkei	0.0340	0.0254	0.0000***
Ibov → Ouro	0.0197	0.0112	0.0167*
Ibov → BTC	0.0105	0.0009	0.2867
S&P500 → Ibov	0.0109	0.0000	0.3700
S&P500 → Nikkei	0.0420	0.0331	0.0000***
S&P500 → Ouro	0.0221	0.0139	0.0010***
S&P500 → BTC	0.0126	0.0032	0.1467
Nikkei → Ibov	0.0179	0.0074	0.0400*
Nikkei → S&P500	0.0295	0.01995	0.0000***
Nikkei → Ouro	0.0172	0.0084	0.0300*
Nikkei → BTC	0.0051	0.0000	0.8500
Ouro → Ibov	0.0182	0.0072	0.0400**
Ouro → S&P500	0.0145	0.0042	0.1433
Ouro → Nikkei	0.0097	0.0004	0.3700
Ouro → BTC	0.0182	0.0086	0.0267*
BTC → Ibov	0.0146	0.0038	0.1400
BTC → S&P500	0.0069	0.0000	0.7300
BTC → Nikkei	0.0139	0.0046	0.0733
BTC → Ouro	0.0162	0.0077	0.0300*

*Valores significativos (p-valor < 0,05)

**Valores significativos (p-valor < 0,01)

***Valores significativos (p-valor < 0,001)

2.5.4 Da amostra pós-COVID (2023-2024)

Finalmente, a Tabela 2.5 apresenta os resultados da transferência de entropia entre os ativos financeiros no período pós-COVID (2023–2024). Observa-se uma queda acentuada na quantidade e intensidade dos fluxos de informação em comparação aos períodos anteriores, com apenas duas relações estatisticamente significativas. Esse resultado sugere que o contágio informacional amplificado pela pandemia não se prolongou após o seu encerramento formal, indicando uma possível normalização das conexões entre os mercados.

Entre os fluxos remanescentes, destaca-se a persistência da relação entre o S&P500 e o Nikkei, embora agora significativa apenas no sentido unidirecional — do mercado norte-americano para o japonês. Esse padrão reforça a hipótese de que o S&P500 atua como polo central na transmissão global de informação, independentemente do regime econômico vigente, em linha

Tabela 2.5: Transferência de entropia: amostra pós-COVID

Direção	TE	ETE	p-valor
Ibov → S&P500	0.00235	0.0082	0.1700
Ibov → Nikkei	0.0164	0.0000	0.503
Ibov → Ouro	0.0094	0.0000	0.9200
Ibov → BTC	0.0219	0.0000	0.3300
S&P500 → Ibov	0.0228	0.0000	0.4000
S&P500 → Nikkei	0.0704	0.0506	0.0000***
S&P500 → Ouro	0.0101	0.0000	0.8733
S&P500 → BTC	0.0348	0.0126	0.1200
Nikkei → Ibov	0.0354	0.0106	0.1267
Nikkei → S&P500	0.0135	0.0000	0.5667
Nikkei → Ouro	0.0150	0.0000	0.5167
Nikkei → BTC	0.0354	0.0133	0.0900
Ouro → Ibov	0.0168	0.0000	0.5500
Ouro → S&P500	0.0110	0.00000	0.7200
Ouro → Nikkei	0.0156	0.0000	0.4833
Ouro → BTC	0.1030	0.0820	0.0000***
BTC → Ibov	0.0345	0.0118	0.1267
BTC → S&P500	0.0178	0.0000	0.3267
BTC → Nikkei	0.0092	0.0000	0.9400
BTC → Ouro	0.0142	0.0000	0.5700

*Valores significativos (p-valor < 0,05)

**Valores significativos (p-valor < 0,01)

***Valores significativos (p-valor < 0,001)

com seu papel de referência internacional para os investidores.

Outro ponto relevante é a ausência de fluxos estatisticamente significativos entre os mercados acionários (Ibovespa, S&P500, Nikkei) e os ativos alternativos (ouro e Bitcoin). Essa desconexão reforça a interpretação de que, no período pós-pandêmico, tanto o ouro quanto o Bitcoin retomam suas funções de diversificação em relação às principais bolsas de valores. Essa evidência é particularmente relevante para a construção de carteiras resilientes, dado o retorno a uma dinâmica informacional mais segmentada.

Adicionalmente, observa-se um fluxo de informação unidirecional do ouro para o Bitcoin. Tal padrão pode ser interpretado como uma função de *hedge* exercida pelo ouro, especialmente em resposta à forte queda do Bitcoin registrada em 2023. Nesse contexto, o metal precioso parece atuar como ativo estabilizador frente às oscilações extremas da criptomoeda, oferecendo proteção parcial em momentos de estresse específico do mercado digital.

2.6 Discussão

A comparação entre os períodos pré-COVID (2017–2019), durante a pandemia (2020–2023) e pós-COVID (2023–2024) revela transformações significativas nos padrões de transmissão de informação entre os mercados financeiros analisados. Esses achados permitem não apenas interpretar o impacto dinâmico da pandemia sobre as interconexões de mercado, mas também levantar hipóteses sobre o papel cíclico ou estrutural de determinados ativos no contexto de choques sistêmicos e posterior normalização.

No período pré-pandemia, os fluxos de informação apresentaram uma estrutura relativamente assimétrica e concentrada em conexões específicas. Destacou-se a forte influência do S&P500 sobre o Nikkei e a existência de um fluxo significativo do Ibovespa para o Nikkei, sugerindo uma rede informacional moderadamente conectada, mas com alguns canais relevantes de transmissão entre mercados em desenvolvimento e desenvolvidos. O ouro e o Bitcoin, por sua vez, mostraram-se relativamente isolados, reforçando sua função de ativos diversificadores em um cenário de estabilidade.

Durante a pandemia, houve uma intensificação clara dos fluxos informacionais, evidenciada pela emergência de relações bidirecionais entre o Ibovespa e o Nikkei e pelo aumento da transferência de entropia entre os mercados acionários e o ouro. Essa reconfiguração pode ser interpretada como um reflexo da elevação da incerteza sistêmica e da maior sensibilidade dos mercados a choques exógenos. Nesse cenário, o ouro perdeu sua função clássica de *safe haven*, passando a receber informação de todos os mercados, enquanto o Bitcoin manteve sua autonomia frente às bolsas, mas passou a interagir com o ouro, indicando uma eventual mudança de regime para o criptoativo. Tais transformações são consistentes com a literatura que associa eventos extremos à intensificação do contágio e à erosão temporária da função protetiva de ativos tradicionalmente considerados defensivos.

No período pós-pandemia, observa-se uma retração significativa nos fluxos de informação.

A maior parte das conexões estatisticamente significativas desapareceu, restando apenas poucos fluxos relevantes, como o do S&P500 para o Nikkei e do ouro para o Bitcoin. Esse esvaziamento da rede de interdependência pode ser interpretado como um retorno à normalidade informacional, com reconfiguração dos papéis dos ativos. O ouro e o Bitcoin voltaram a se posicionar como ativos diversificadores, ao passo que a persistência do S&P500 como emissor de informação para o mercado japonês reforça sua centralidade estrutural. A presença isolada do fluxo do ouro para o Bitcoin — especialmente após a queda abrupta da criptomoeda em 2023 — levanta a hipótese de que o ouro tenha assumido uma função de *hedge* específico frente a choques no mercado digital, ainda que essa relação não tenha sido observada nos períodos anteriores.

Esses resultados indicam que os padrões de interdependência financeira não são estáticos, mas sim sensíveis ao regime de mercado. A pandemia atuou como um catalisador de conexões informacionais, gerando um regime de alta conectividade e maior risco sistêmico, seguido por um processo de desalinhamento e recuo das interações. A comparação entre os três períodos revela a importância de abordagens dinâmicas e flexíveis — como a transferência de entropia — para a detecção de mudanças estruturais e de regime nos mercados financeiros.

Dentre as hipóteses que emergem dessa análise, destacam-se: (i) a função cíclica do ouro como diversificador, que pode se inverter sob choques sistêmicos prolongados; (ii) a resiliência informacional do Bitcoin frente aos mercados tradicionais, com exceção de sua conexão com o ouro em períodos de crise; e (iii) o papel persistente do S&P500 como transmissor global de informação, independentemente do regime. Essas hipóteses podem ser exploradas em estudos futuros por meio de janelas móveis, modelagem de séries com mudança de regime ou dados em alta frequência.

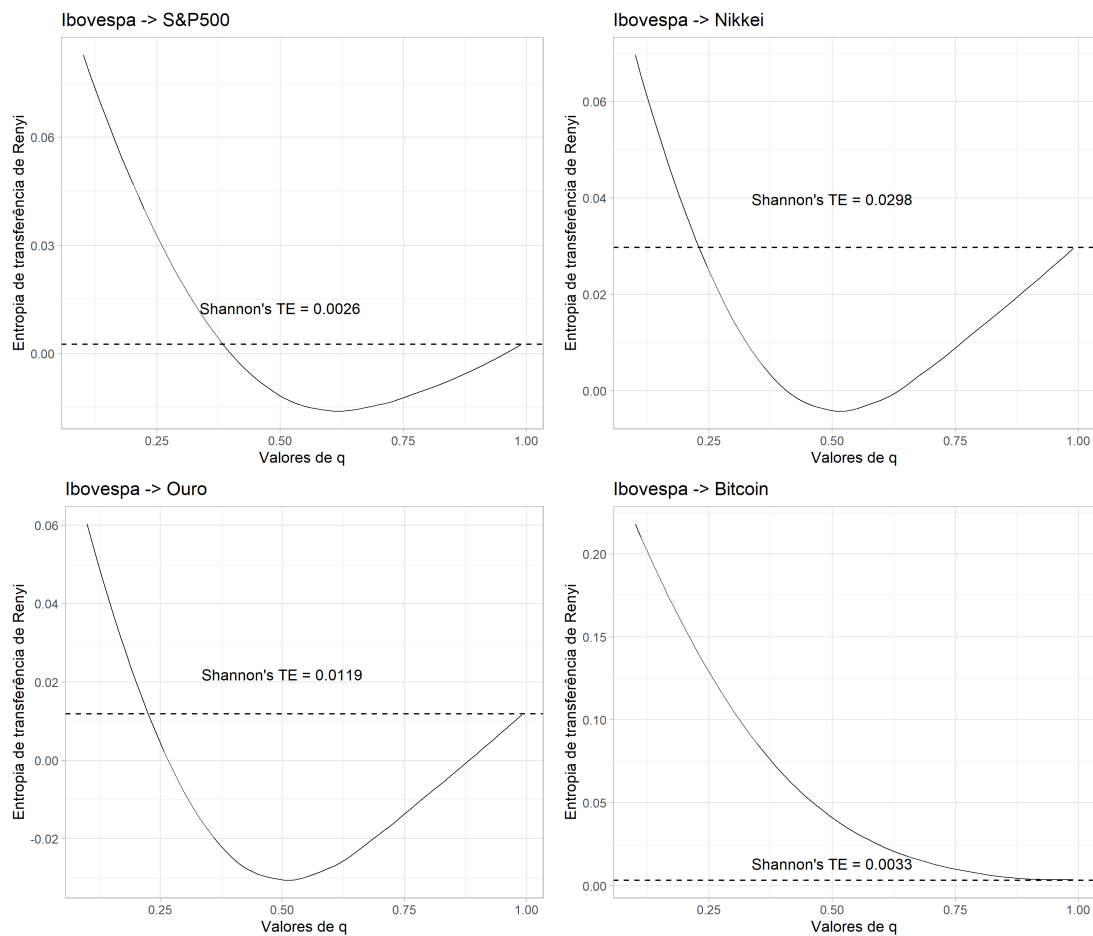


Figura 2.3: Teste de robustez

2.7 Teste de Robustez

Como teste de robustez, procedeu-se ao cálculo da transferência de entropia de Rényi para diferentes valores do parâmetro q , comparando-se os resultados obtidos com a transferência de entropia de Shannon (caso limite com $q \rightarrow 1$), conforme ilustrado na Figura 2.3. A análise foi realizada especificamente para o par formado pelo Ibovespa e os demais ativos financeiros considerados, no período total da amostra (2017–2024).

Observa-se que os valores da transferência de entropia de Rényi tendem a ser maiores para baixos valores de q — refletindo a maior sensibilidade da entropia de Rényi às regiões de alta

probabilidade — e convergem gradualmente para a entropia de Shannon à medida que q se aproxima de 1. Esse comportamento está de acordo com a teoria da informação e reforça a consistência matemática e empírica das estimativas obtidas. Tal padrão de convergência foi verificado de forma sistemática em todos os testes realizados, ainda que a Figura 2.3 apresente apenas um exemplo representativo.

Ressalta-se que essa comparação entre entropias só é válida sob a utilização dos mesmos critérios de discretização — particularmente os mesmos *bins* — como discutido por Maiti e Kayal (2023). A manutenção desse critério garante a comparabilidade dos resultados e valida a robustez das estimativas frente à generalização da medida de entropia utilizada. Em conjunto, os achados confirmam que os resultados principais do estudo não são sensíveis à escolha da entropia de Shannon, sendo reproduzíveis sob a generalização da entropia de Rényi.

2.8 Conclusão

Este artigo teve como objetivo investigar a existência e a evolução dos fluxos de informação entre os mercados financeiros antes, durante e após a pandemia de COVID-19, por meio da aplicação do método de transferência de entropia. Essa abordagem se destaca por permitir uma análise não linear e robusta das relações informacionais, respeitando as características empíricas dos dados financeiros, como assimetrias, caudas pesadas e não estacionaridade.

Os resultados obtidos apontam para uma ligação significativa entre os mercados norte-americano (S&P500) e japonês (Nikkei) já no período anterior à pandemia, o que pode refletir uma antecipação das expectativas econômicas associadas ao surgimento da crise sanitária. No mesmo intervalo, identifica-se um fluxo de informação partindo do mercado brasileiro (Ibovespa) em direção ao japonês, sugerindo que, mesmo em contextos de relativa estabilidade, mercados emergentes podem influenciar mercados desenvolvidos asiáticos — possivelmente por meio de canais vinculados a *commodities* ou fluxos de capital.

Quanto aos ativos alternativos, tanto o ouro quanto o Bitcoin atuaram como instrumentos de diversificação no período pré-pandêmico, com exceção da relação entre o ouro e o mercado japonês, que apresentou dependência informacional.

Durante a pandemia, verifica-se um aumento expressivo na intensidade e no número de fluxos de informação entre os mercados acionários, evidenciando um regime de maior contágio financeiro. Curiosamente, não se observou fluxo estatisticamente significativo entre o S&P500 e o Ibovespa nesse período, o que contrasta com evidências documentadas na literatura, como em Wang et al. (2017). No tocante ao ouro, os resultados indicam a perda de sua tradicional função de *safe haven*, corroborando estudos recentes como Thuy, Oanh e and (2024), embora ele ainda desempenhe um papel de diversificador frente aos mercados norte-americano e japonês. Essa função, contudo, é comprometida em relação ao mercado brasileiro, dada a bidirecionalidade do fluxo com o Ibovespa. O Bitcoin, por sua vez, manteve sua característica de ativo informacionalmente autônomo em relação aos mercados acionários, confirmando sua utilidade como instrumento de diversificação durante choques sistêmicos.

No período pós-pandemia, observa-se uma retração significativa nos fluxos de informação entre os ativos, com apenas dois fluxos estatisticamente relevantes: do S&P500 para o Nikkei e do ouro para o Bitcoin. Isso sugere que a influência do mercado norte-americano sobre o japonês persiste mesmo em contextos de normalidade econômica. Além disso, a transferência de informação do ouro para o Bitcoin pode indicar uma função de *hedge* parcial exercida pelo metal precioso frente à volatilidade do mercado cripto, especialmente após a queda abrupta da criptomoeda em 2023.

Em termos práticos, os resultados apresentados oferecem insights valiosos para investidores e tomadores de decisão, especialmente na construção de carteiras de investimento mais resilientes diante de diferentes regimes de risco. Além disso, reforçam a relevância do uso de medidas baseadas em entropia para a análise de conectividade e contágio entre ativos financeiros.

Como sugestão para pesquisas futuras, recomenda-se explorar o comportamento das fun-

ções do ouro e do Bitcoin em outros contextos geopolíticos relevantes, como os conflitos entre Ucrânia e Rússia, bem como estender a análise para dados em alta frequência, com o intuito de capturar dinâmicas de curto prazo e reações rápidas dos mercados.

Capítulo 3

A entropia diferencial e o Kernel de Pareto

Resumo

Este capítulo propõe um novo estimador de entropia diferencial baseado no uso de um kernel de Pareto, com foco na análise de distribuições com caudas pesadas, comuns em dados financeiros. A metodologia desenvolvida visa aprimorar a capacidade de mensuração da incerteza informacional em séries temporais, superando limitações de estimadores tradicionais que assumem distribuições com momentos finitos. O capítulo apresenta a fundamentação teórica do estimador, discute suas propriedades e aplica o método a séries históricas de taxas de câmbio. Os resultados mostram que o estimador é sensível à estrutura das caudas e capaz de capturar variações associadas a regimes econômicos distintos. A análise empírica reforça a utilidade da entropia como medida complementar à volatilidade na avaliação da eficiência de mercado e na identificação de períodos de comportamento atípico.

3.1 Introdução

Em teoria da informação, a entropia diferencial representa uma medida de incerteza para variáveis aleatórias contínuas (Cover e Thomas, 2006). Ela se mostra bastante útil para o es-

tudo de fenômenos financeiros, envolvendo cenários complexos cujas propriedades nem sempre são bem capturadas por medidas estatísticas tradicionais (Dionisio, Reis e Coelho, 2008; Al-Yahyaee et al., 2019; Jaroonchokanan, Termsaithong e Suwanna, 2022; Jizba e Korbel, 2014; Xu, Shang e Zhang, 2019; Zhang et al., 2020; Smerlak, 2016; Xian, He e Lai, 2016; Guo, Zhang e Tian, 2018; Jizba, Lavička e Tabachová, 2021; Fernandes et al., 2023).

Como a entropia diferencial é uma média do logaritmo de uma função de densidade, sendo tal densidade desconhecida, faz-se necessário estimá-la por meio de técnicas não paramétricas (Beirlant et al., 1997; Chapeau-Blondeau e Rousseau, 2009; Govindan et al., 2007; Goel, Taneja e Kumar, 2018). Tradicionalmente, o histograma é uma ferramenta básica para cumprir tal tarefa. Porém, ele é um estimador inconsistente, já que seu aspecto é influenciado pela escolha das amplitudes dos intervalos de classe, com pontos de descontinuidades entre uma classe e outra (Silverman, 2018). Além disso, a aplicação do histograma remete à entropia de Shannon, cujas propriedades são bem distintas da entropia diferencial (Cover e Thomas, 2006).

Por isso, a estimação da entropia de uma distribuição contínua requer a utilização de outras metodologias. Dentre eles, encontra-se o estimador da entropia pelo método do Kernel (KDE), a técnica dos k-vizinhos mais próximos (K-NN), e o método *sampling spacing* (SS). De modo geral, esses estimadores são considerados concorrentes sob certas condições de suavidade, caudas e quantidade de modas na distribuição dos dados (Beirlant et al., 1997). Por isso, o fato de dados financeiros, tipicamente, terem caudas pesadas (Calvet e Fisher, 2002; Campbell, Lo e MacKinlay, 1997; Cont, 2001; Gabaix et al., 2003; Mandelbrot, 2003; Matsushita et al., 2023) exige uma atenção especial na estimação da entropia diferencial.

Por exemplo, no método KDE, a qualidade dos resultados depende da escolha da função kernel apropriada (Hall e Morton, 1993). Embora esse tipo de estimador seja flexível e não requerer suposições sobre a forma da distribuição populacional, seu desempenho estatístico piora nas regiões das caudas da distribuição, onde há poucos dados (Hall e Morton, 1993). Por isso, sugere-se que o kernel de caudas pesadas possa atenuar os efeitos adversos proporcionados por

caudas (Hall, 1987; Hall e Morton, 1993). Além disso, a literatura não trata sobre o desempenho dos estimadores K-NN e SS sob essas condições.

Diante disso, este trabalho propõe um estudo que avalia o desempenho dos estimadores K-NN, SS e KDE sob caudas pesadas, além de propor como função kernel a forma da distribuição de Pareto simétrica centrada em zero. Nessa proposta, o expoente de Pareto de função kernel cumpre com o papel de adaptar o estimador conforme a intensidade das caudas, permitindo lidar tanto com caudas leves como pesadas.

A aplicabilidade do estimador da entropia diferencial com kernel de Pareto será ilustrada por meio da análise dos dados de taxas diárias de câmbio entre o franco suíço (CHF) e o real brasileiro (BRL) frente ao dólar norte-americano, cujos dados são registrados e disponibilizados pelo *Federal Reserve Bank* de Nova York.

Como o índice de Pareto (α) da função kernel deve corresponder às características das caudas da distribuição populacional, infere-se que quanto menor for α , mais pesada deve ser a cauda da distribuição populacional. Assim, ao aplicarmos janelas móveis em uma série de retornos financeiros, será possível identificar os diferentes regimes das caudas, indiretamente, por meio das estimativas da entropia diferencial com a função kernel de Pareto.

3.2 Estimador de entropia pelo método do kernel

Seja $X \in \mathbb{R}$ uma variável aleatória contínua com função densidade denotada por f . Define-se sua entropia diferencial como

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx = -\mathbb{E}[\ln f(X)], \quad (3.1)$$

na qual $f(x) \ln f(x)$ é igual a zero se $f(x) = 0$.

Sendo f desconhecida, digamos que ela seja estimada por $\hat{f}$. Nesse caso, ao substituirmos

f por sua estimativa na definição da entropia diferencial como

$$H(\hat{f}) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \hat{f}(x) dx = -\mathbb{E}[\ln \hat{f}(x)], \quad (3.2)$$

tem-se a entropia diferencial cruzada.

Há portanto, uma diferença entre a entropia teórica $H(f)$ e seu correspondente empírico $H(\hat{f})$, que se denomina *divergência de Kullback-Leibler* de $\hat{f}$ para f ,

$$D_{KL}(\hat{f}, f) = H(\hat{f}) - H(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} dx. \quad (3.3)$$

Sabendo que $D_{KL}(\hat{f}, f) \geq 0$ (Cover e Thomas, 2006), conclui-se que o estimador $H(\hat{f})$ tende a superestimar $H(f)$. Contudo, é possível encontrar $\hat{f}$ que minimize tal divergência.

3.2.1 O estimador

Dada uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$, extraída de uma população f , seu estimador kernel é

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (3.4)$$

no qual $h > 0$ denota seu parâmetro de suavização, e K é uma função kernel que deve satisfazer às seguintes propriedades para todo $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} K(u) &\geq 0, \\ K(-u) &= K(u), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du &= 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} uK(u) du &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Portanto, a função kernel apresenta as mesmas propriedades de uma função de densidade de uma variável aleatória contínua e simétrica em torno de zero.

A forma empírica da equação (3.3) é dada por (Hall, 1987; Hall e Morton, 1993)

$$\hat{D}_{KL}(\hat{f}_h, f) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \frac{f(X_j)}{\hat{f}_h(X_j)}, \quad (3.6)$$

na qual o valor ótimo $\hat{h}$ é obtido por meio da minimização da própria equação (3.6) com respeito a $h > 0$. Mas como f não depende de h , minimizar (3.6) equivale a minimizar a entropia cruzada amostral dada por

$$\hat{H}(\hat{f}_h) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \hat{f}_h(X_j). \quad (3.7)$$

Note que a própria função objeto de minimização representa o estimador da entropia diferencial.

Entretanto, na equação (3.4), quando $x = X_i$, observe que $K(0)$ não depende de h , o que pode levar a resultados inconsistentes (pela simples ausência do objeto a ser otimizado nessa equação). Para evitar essa distorção, excluem-se os pontos $x = X_i$ com base no critério da validação cruzada (Hall, 1987; Habbema, Hermans e van Der Broek, 1974; Duin, 1976),

$$CV(h) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left[\frac{1}{(n-1)h} \sum_{i \neq j} K \left(\frac{X_j - X_i}{h} \right) \right], \quad (3.8)$$

de modo que $\hat{h} = \arg \min_{h>0} CV(h)$ (Duin, 1976; Hall, 1987).

Assim, finalmente, a estimativa da entropia diferencial por validação cruzada é dada por

$$\hat{H}(\hat{f}_{\hat{h}}) = CV(\hat{h}) \quad (3.9)$$

sendo um estimador consistente de $H(f)$, a depender da propriedade das caudas do kernel K e da distribuição populacional f (Ivanov e Rozhkova, 1981; Hall e Morton, 1993; Beirlant et al.,

1997).

3.2.2 Funções kernel

Hall e Morton (1993) discutem que a qualidade da estimativa de entropia baseada em métodos não paramétricos, como histogramas ou kernels, é fortemente influenciada pelo comportamento das caudas da distribuição subjacente e pela escolha do kernel. Eles destacam que distribuições com caudas pesadas podem comprometer a precisão dos estimadores, especialmente devido à sensibilidade do logaritmo da densidade a regiões de baixa probabilidade. Para mitigar esses efeitos, os autores recomendam o uso de kernels que também possuam caudas pesadas — como o kernel t de *Student* — pois estes conferem maior estabilidade às estimativas ao atribuir maior peso a observações extremas. Assim, há uma interação crítica entre a cauda da distribuição e a cauda do kernel: quanto mais pesada for a cauda da distribuição, mais apropriado é utilizar um kernel com cauda igualmente pesada, de modo a equilibrar o viés e a variância da estimativa e garantir melhor desempenho, especialmente em dimensões baixas.

Porém, Hall e Morton (1993) não tratam do uso simultâneo de h e ν como dois parâmetros livres no kernel t de *Student* (Tabela 3.1). Eles assumem o kernel com ν fixado, e apenas o *bandwidth* h é ajustado com base em dados amostrais.

Como kernel para acomodar tanto distribuições com caudas pesadas e caudas mais leves, este trabalho sugere o kernel de Pareto na forma

$$K_{\alpha}(u) = \frac{\alpha}{2}(1 + |u|)^{-(\alpha+1)}, \quad (3.10)$$

na qual $u \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma (ou índice de Pareto), que permite descrever a forma da cauda da distribuição como leve ou pesada.

Além do kernel t de *Student* e de Pareto, a Tabela 3.1 apresenta outros exemplos de funções kernel: as funções gaussiana e de Laplace que são do tipo de caudas leves, enquanto o de

Cauchy é de cauda pesada.

Tabela 3.1: Exemplos de funções kernel com caudas leves e pesadas, com $u \in \mathbb{R}$.

Nome	Kernel	Tipo de cauda
Gaussiana	$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2)$	leve
Laplace	$K(u) = \frac{1}{2} \exp(- u)$	leve
Pareto	$K_\alpha(u) = \frac{\alpha}{2} (1 + u)^{-(\alpha+1)}$	pesada ($\alpha < \infty$) leve (delta de Dirac) ($\alpha = \infty$)
t de <i>Student</i>	$\frac{1}{\sqrt{\nu}} B^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2} \right) (1 + u^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$	pesada ($\nu < \infty$) leve ($\nu = \infty$)
Cauchy	$K(u) = \frac{1}{\pi} (1 + u^2)^{-1}$	pesada

A novidade introduzida neste trabalho, é que o expoente de Pareto representa um parâmetro adicional de suavização, definindo a função de perda por validação cruzada como $CV(h, \alpha)$ a fim de obter

$$(\hat{h}, \hat{\alpha}) = \arg \min_{h>0, \alpha>0} CV(h, \alpha).$$

Trata-se, portanto, de um kernel versátil e flexível, podendo apresentar caudas pesadas ($\alpha \leq 2$) ou caudas leves ($\alpha > 2$). À medida que α cresce, o kernel de Pareto se aproxima da função delta de Dirac, que exibe uma cauda muito leve. Dessa forma, diferentemente da abordagem sugerida por Hall e Morton (1993), o peso das caudas do kernel é orientado pelos próprios dados.

3.3 Estudo de Monte Carlo

Este estudo de Monte Carlo foi proposto para se avaliar e comparar os desempenhos das funções kernel em situações de distribuições de caudas pesadas. Foram realizadas 500 réplicas de Monte Carlo, gerando-se amostras de tamanhos 30 e 500 de uma distribuição t de *Student*, com graus de liberdade variando entre 1 a 100. Tal distribuição foi utilizada pelo fato de ela possuir caudas pesadas à medida que ν diminui (Cauchy se $\nu = 1$), e caudas mais leves à medida que ν aumenta (Gaussiana se $\nu \rightarrow \infty$). Quando $\nu = 2$, é obtida uma distribuição com uma variância indefinida

e média finita.

Da Tabela 3.1, as funções kernel utilizadas em nosso experimento foram a Gaussiana, Cauchy e Pareto. Para comparar o desempenho do método KDE com outros estimadores, foram utilizados também os estimadores K-NN e o SS.

As estimativas de $H(f)$ com base nas amostras sintéticas retiradas da distribuição t de Student com ν graus de liberdade foram comparadas com seu valor teórico dado por

$$H(f) = \frac{\nu + 1}{2} \left[\psi \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] + \ln \left[\sqrt{\nu} B \left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} \right) \right],$$

no qual ψ representa a função digama e B a função beta.

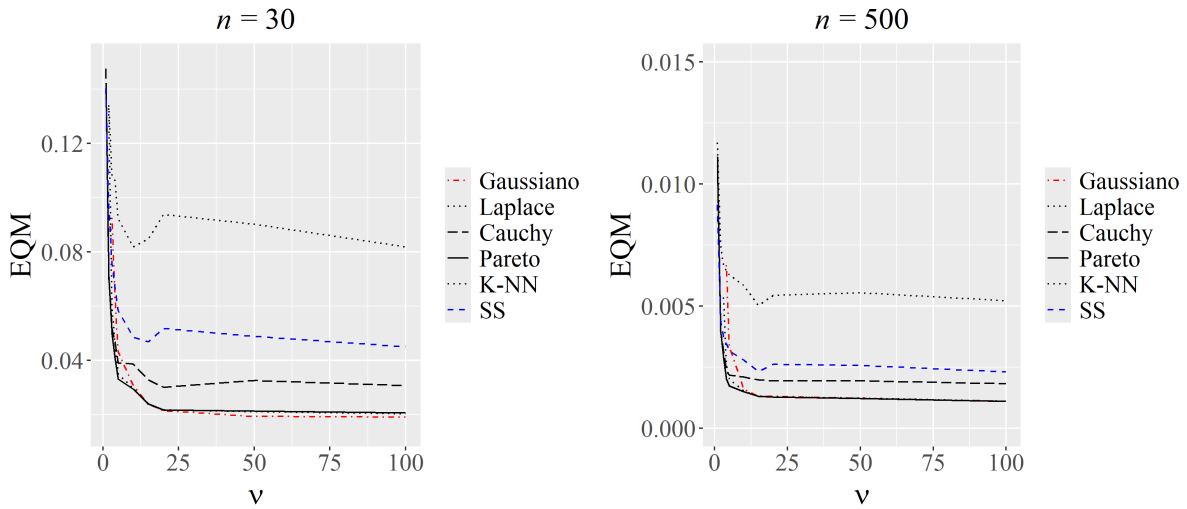


Figura 3.1: Erros quadráticos médios (EQM) da estimativa de kernel da entropia diferencial de uma distribuição de t Student com ν graus de liberdade, extraídos das 500 replicações de Monte Carlo para $n = 30$ e $n = 500$.

O desempenho dos estimadores são avaliados utilizando-se três métricas principais: o erro quadrático médio (EQM), a variância ($\mathbb{V}[\hat{H}(f)]$) e o vício (B). Tais métricas são fundamentais para compreender os pontos fortes e as limitações dos estimadores estatísticos. O EQM quantifica a média dos quadrados das diferenças entre os valores estimados e o valor real da entropia diferencial. A variância de um estimador mensura o quanto uma estimativa varia de uma amostra para a outra e o estimador mede o quão distante o valor esperado do estimador está do valor

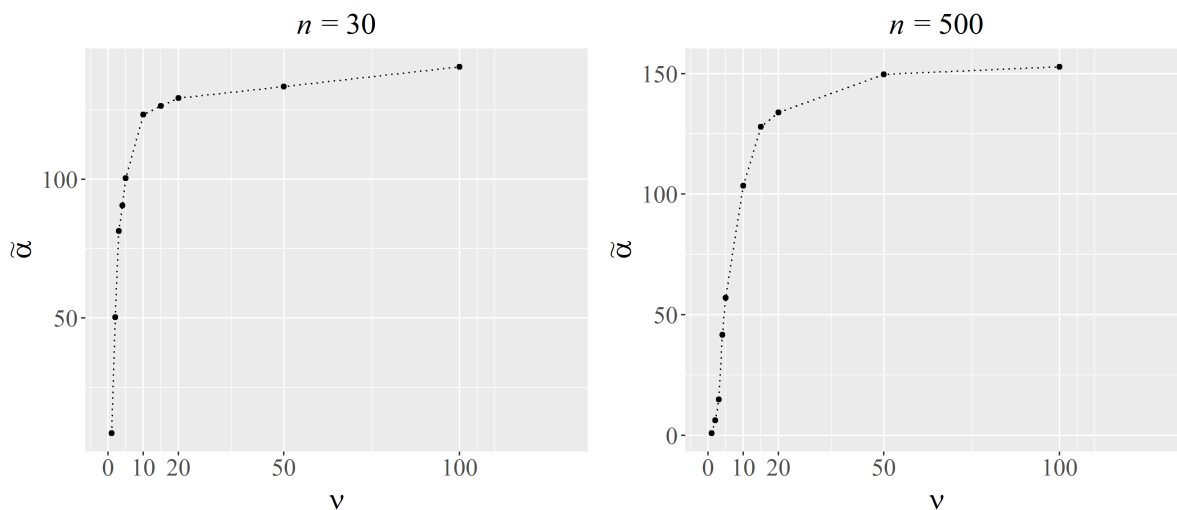


Figura 3.2: Valores medianos de $\hat{\alpha}$ para diferentes valores de ν quando utilizado o kernel de Pareto nos experimentos univariados de Monte Carlo.

real do parâmetro. O estimador é viciado se houver diferença entre o valor esperado e o seu valor real. A decomposição de viés-variância resume entre o EQM, variância e viés, expressa pela equação $\text{EQM} = B^2 + \mathbb{V}[\hat{H}(\hat{f})]$. Essa equação fundamental expressa o equilíbrio entre viés e variância na estimação estatística. Portanto, o equilíbrio entre viés e variância é essencial para o desenvolvimento de estimadores eficientes.

O kernel de Pareto geralmente apresenta menores erros quadráticos médios em comparação com os outros estimadores para todos os ν , seguido pelo espaçamento amostral e estimativa de entropia do kernel de Cauchy. No entanto, o estimador K-NN apresentou um desempenho insatisfatório (Figura 3.1). A Figura 3.2 demonstra como a mediana $\tilde{\alpha}$ cresce em função de ν . Assim, como se espera, $\tilde{\alpha}$ aumenta à medida que a distribuição se torna menos pesada.

3.4 Análise com dados financeiros

Nesta análise, busca-se ilustrar como o método proposto é capaz de identificar diferentes regimes de cauda na evolução histórica de taxas de câmbio. A ideia central é verificar se o procedimento consegue capturar mudanças associadas a eventos econômicos significativos, como a

transição para o regime de câmbio flutuante ocorrida em março de 1973. Naquele momento, diversas economias abandonaram os esforços de manter o sistema de taxas fixas, passando a adotar um regime flutuante entre o dólar norte-americano e as principais moedas internacionais.

O estudo se restringe na análise do franco suíço (CHF) e do real brasileiro (BRL). Embora o CHF seja amplamente reconhecido como uma moeda forte, um evento marcante ocorreu em 15 de janeiro de 2015, quando o Banco Nacional Suíço anunciou, de forma inesperada, que deixaria de manter o câmbio fixo entre o CHF e o euro. A decisão resultou em uma acentuada desvalorização da taxa de câmbio a partir daquela data (Matsushita et al., 2020).

Quanto ao BRL, sua trajetória é marcada por distintos regimes cambiais. O primeiro deles se iniciou com o Plano Real, em 1993, como parte de uma política de estabilização monetária baseada em uma âncora cambial, cujo pilar era o controle da taxa de câmbio como instrumento de combate à hiperinflação. A nova moeda, o real (BRL), foi lançada em julho de 1994, operando sob um regime de bandas cambiais até 13 de janeiro de 1999, quando ocorreu uma crise cambial que levou à adoção do câmbio flutuante. O BRL também passou por uma bolha log-periódica entre 28 de maio de 2002 e 14 de janeiro de 2003, possivelmente impulsionada pelas incertezas associadas às eleições presidenciais daquele ano e às expectativas quanto às políticas econômicas do presidente eleito, Luiz Inácio Lula da Silva (Matsushita et al., 2006). Outros episódios relevantes incluem o impeachment da presidente Dilma Rousseff, o período de austeridade durante o governo de transição de Michel Temer, e a ascensão de Jair Bolsonaro, um ciclo marcado por sucessivas mudanças nas diretrizes de política econômica e monetária, refletindo um ambiente de alta instabilidade.

Agora, desconsiderando-se tais fatos históricos, aplicaremos a abordagem descrita nesse capítulo com o objetivo de detectá-los por meio da estimativa da entropia diferencial através do kernel de Pareto.

Dada uma série temporal de taxas de câmbio P_t , defina o log-retorno, $X_t = \ln P_t / P_{t-1}$, no qual t representa o índice temporal variando de 2 até n , sendo n o tamanho da amostra. As séries

temporais de retornos foram divididas em blocos de tamanho b , de modo que $n = b \times m$. Dessa forma, foram geradas m séries temporais de tamanho b . Para cada bloco, utilizando o kernel de Pareto, foi calculada a entropia diferencial com o parâmetro $\hat{\alpha}$, sendo classificados com base na sua magnitude. Considera-se que a cauda seja pesada se $\ln \alpha \leq \ln 2$, leve se $\ln 2 < \ln \alpha \leq \ln 5$, e muito leve (delta de Dirac), se $\ln \alpha > 5$.

Em mercados perfeitamente eficientes, os movimentos dos preços são aleatórios e imprevisíveis, pois todas as informações disponíveis são incorporadas instantaneamente aos preços, eliminando oportunidades sistemáticas de arbitragem ou padrões previsíveis. Diversas metodologias podem ser utilizadas para avaliar o grau de eficiência nas taxas de câmbio, como a entropia de Shannon (Kristoufek e Vosvrda, 2013; Oh, Kim e Eom, 2007), o expoente de Hurst (Cajueiro e Tabak, 2004), a reversão à média (Serletis e Rosenberg, 2009), a estrutura de correlação (Kristoufek e Vosvrda, 2013) e a complexidade algorítmica (Giglio et al., 2008).

Na abordagem adotada neste artigo, o parâmetro α regula a sensibilidade da função kernel aos dados locais. Quando α assume valores elevados, a influência de outros pontos da amostra sobre a função kernel em um determinado ponto X_t torna-se praticamente nula. Esse comportamento pode ser interpretado como sinal de eficiência econômica, refletido por alta aleatoriedade na série de retornos e, portanto, por uma entropia diferencial elevada. Em contrapartida, valores baixos de α (tipicamente, $\alpha \leq 2$) indicam forte dependência entre os pontos da série, sugerindo maior estrutura e menor aleatoriedade — características associadas à ineficiência de mercado. Nesse contexto, α reduzidos tendem a ocorrer em períodos turbulentos, ao passo que valores mais altos de α são observados em períodos de maior estabilidade, com menor presença de caudas pesadas.

Importante destacar que valores altos ou baixos de α não correspondem necessariamente a maior ou menor incerteza ou volatilidade, uma vez que α é um parâmetro estrutural da função kernel, e não uma medida direta de dispersão.

Com base na estimativa da entropia diferencial, os resultados obtidos sugerem indícios de

ineficiência de mercado, pois apontam para dependência entre os retornos em determinados períodos classificados como menos eficientes. Essa interpretação se ancora no princípio teórico de que, em um mercado eficiente, os preços devem se comportar de forma totalmente aleatória e imprevisível, refletindo imediatamente todas as informações disponíveis. Assim, valores mais elevados de entropia diferencial, que indicam menor previsibilidade e maior grau de aleatoriedade, são compatíveis com um ambiente de maior eficiência de mercado.

O método de kernel de Pareto, desenvolvido neste artigo, foi concebido para lidar com distribuições de caudas pesadas frequentemente observadas nos mercados financeiros, oferecendo *insights* relevantes sobre a eficiência de mercado. Sua sensibilidade ao comportamento das caudas torna-o particularmente adequado para identificar regimes nos quais os dados de mercado se afastam das premissas da hipótese de mercados eficientes. Ao avaliar a dependência de caudas nos retornos financeiros, o método possibilita a identificação de períodos potencialmente marcados por ineficiência, nos quais há alguma previsibilidade nos movimentos de preços ou acúmulo anormal de informações nos preços dos ativos.

Com o intuito de explorar essa capacidade, propõe-se um estudo sistemático no qual a estimativa de entropia, baseada no kernel de Pareto, seja empregada diretamente como ferramenta de teste para a eficiência de mercado. A análise da evolução temporal dos níveis de entropia, correlacionada a eventos de mercado ou alterações regulatórias, parte do pressuposto de que tais ocorrências impactam a eficiência informacional. Variações abruptas na entropia em resposta a esses eventos podem servir como evidência da utilidade do modelo proposto como teste empírico de eficiência. Adicionalmente, uma análise comparativa com modelos tradicionais permite destacar as vantagens específicas e eventuais limitações da abordagem apresentada, contribuindo para uma compreensão mais ampla de sua aplicabilidade na análise de mercados financeiros.

Os dados utilizados nessa análise foram obtidos no *site* do *Federal Reserve* (<http://www.federalreserve.gov/releases/H10/hist/>). Os dados tem como referência o valor das mo-

edas em termos de dólar americano, coletados pelo Federal Reserve de Nova York a partir de uma amostra dos participantes do mercado. Foram desconsiderados finais de semana e feriados, focando a análise exclusivamente nos dias úteis de negociação.

Optou-se por utilizar $b = 60$, o que resultou em $m = 221$ blocos para a série do CHF e $m = 121$ blocos para a série do BRL. A Figura 3.3 apresenta as séries temporais das taxas de câmbio BRL/USD e CHF/USD, abrangendo o período de 5 de janeiro de 1971 a 16 de novembro de 2023 para o CHF e de 4 de janeiro de 1995 a 13 de dezembro de 2023 para o BRL. Embora os kernels sejam calculados com base em blocos de log-retornos (Figura 3.4), é possível observar um panorama compatível com eventos históricos relevantes que influenciaram o comportamento dos preços ao longo do tempo.

A Figura 3.5 mostra as estimativas de entropia diferencial em função da variância amostral dos blocos. Nota-se que, para determinados blocos associados a baixos valores de α — correspondentes a kernels com caudas pesadas —, as estimativas de entropia se afastam significativamente da linha gaussiana. Tal comportamento reforça a distinção entre caudas pesadas, incerteza e volatilidade, conceitos que, embora relacionados, não são equivalentes e devem ser tratados de forma cuidadosa na avaliação de riscos financeiros.

A Tabela 3.2 lista os blocos classificados como de cauda pesada, os quais estão em conformidade com os eventos destacados no início desta seção. Por fim, a Figura 3.6 apresenta a relação entre as estimativas de entropia diferencial e os valores de $\ln \alpha$, evidenciando a existência de três regimes distintos de kernel. O caso de cauda pesada é teoricamente justificado, uma vez que a distribuição de Pareto apresenta variância infinita para $\ln \alpha \leq \ln 2$. Já para $\ln \alpha > 5$, a formação de um *cluster* bem definido de pontos permite interpretar esse regime como uma aproximação ao núcleo delta de Dirac, o que justifica tal classificação.

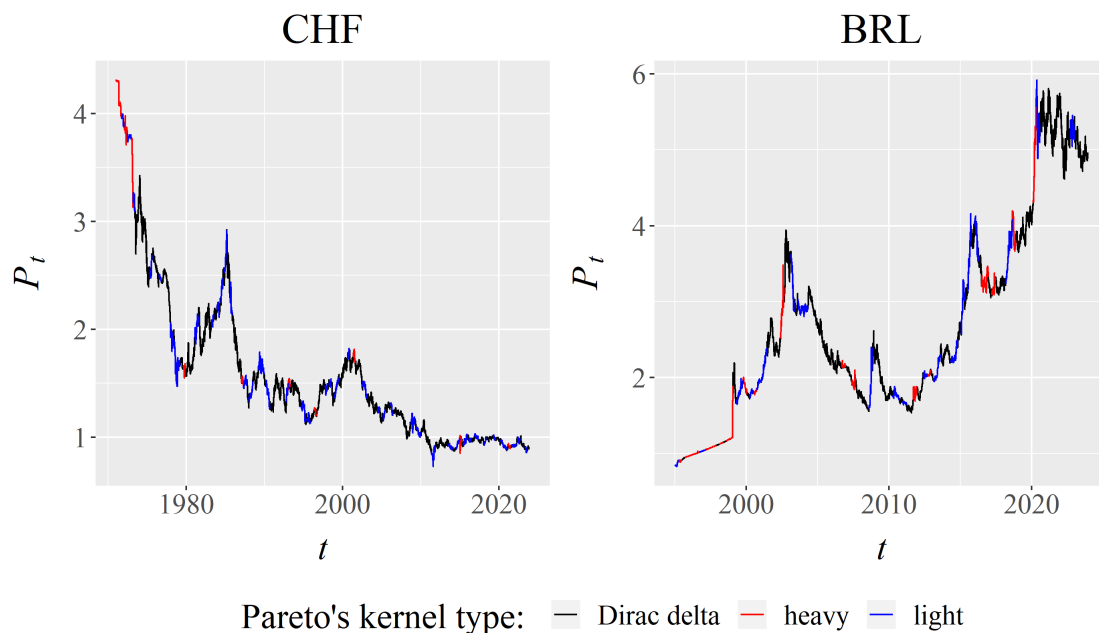


Figura 3.3: Evolução histórica das taxas de câmbio em relação ao dólar norte-americano. Franco suíço (CHF): $n = 13.260$ observações de 5/jan/1971 a 16/nov/2023. Real brasileiro (BRL): $n = 7.260$ de 4/jan/1995 a 13/dez/2023. Identificam-se os tipos de kernel de Pareto que sugerem diferentes regimes coerentes com fatos históricos conhecidos, como a mudança no sistema cambial na década de 1970 (CHF) e o Plano Real no início da década de 1990 (BRL).

3.5 Conclusão

Este capítulo apresentou um novo estimador de entropia diferencial fundamentado no uso do kernel de Pareto, com o objetivo de oferecer maior robustez na análise de distribuições financeiras marcadas por caudas pesadas. Ao integrar a flexibilidade da estimação não paramétrica com as propriedades assintóticas do kernel proposto, desenvolveu-se uma ferramenta sensível às características empíricas dos dados financeiros — especialmente à presença de valores extremos e regimes de elevada incerteza.

Este estudo ressalta a importância do comportamento das caudas na estimação da entropia diferencial, especialmente na análise de dados financeiros. Os resultados obtidos, tanto nas simulações de Monte Carlo quanto na aplicação a séries de taxas de câmbio, sustentam a adoção de um estimador baseado no kernel de Pareto por se tratar de uma ferramenta robusta e eficaz

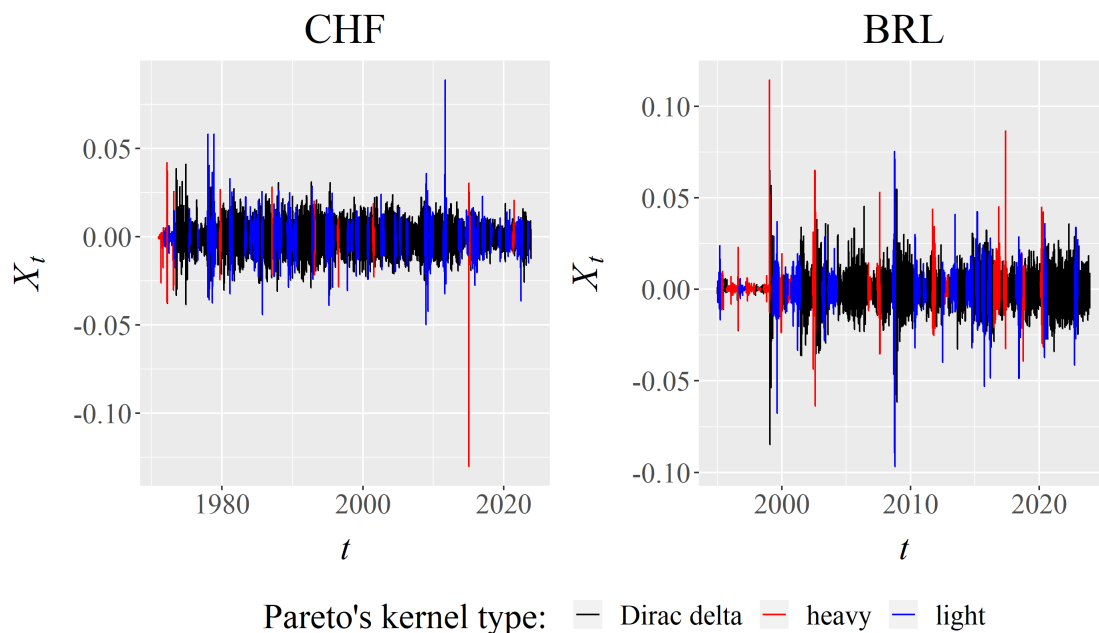


Figura 3.4: Retornos logarítmicos dos dados apresentados na Figura 3.3, com os tipos de kernels de Pareto sugerindo diferentes regimes estocásticos

diante das propriedades estatísticas observadas nos mercados. O método melhora a precisão da estimativa da entropia diferencial e proporciona uma compreensão mais refinada da dinâmica dos mercados sob a ótica da incerteza informacional.

Além disso, a dissociação observada entre entropia, volatilidade e caudas reforça a ideia de que essas métricas capturam aspectos distintos do risco e da complexidade dos ativos financeiros, o que torna a entropia uma medida complementar relevante às abordagens tradicionais. Do ponto de vista metodológico, a proposta contribui para o avanço das técnicas de estimação de entropia ao oferecer um modelo adaptável à forma empírica dos dados, preservando as propriedades fundamentais da medida de incerteza. Do ponto de vista prático, a metodologia se mostra promissora para aplicações em finanças quantitativas, sobretudo na avaliação da eficiência de mercado, na detecção de regimes extremos e no aprimoramento de metodologias de avaliação de risco.

Pesquisas futuras podem explorar a aplicação do estimador em séries multivariadas, investi-

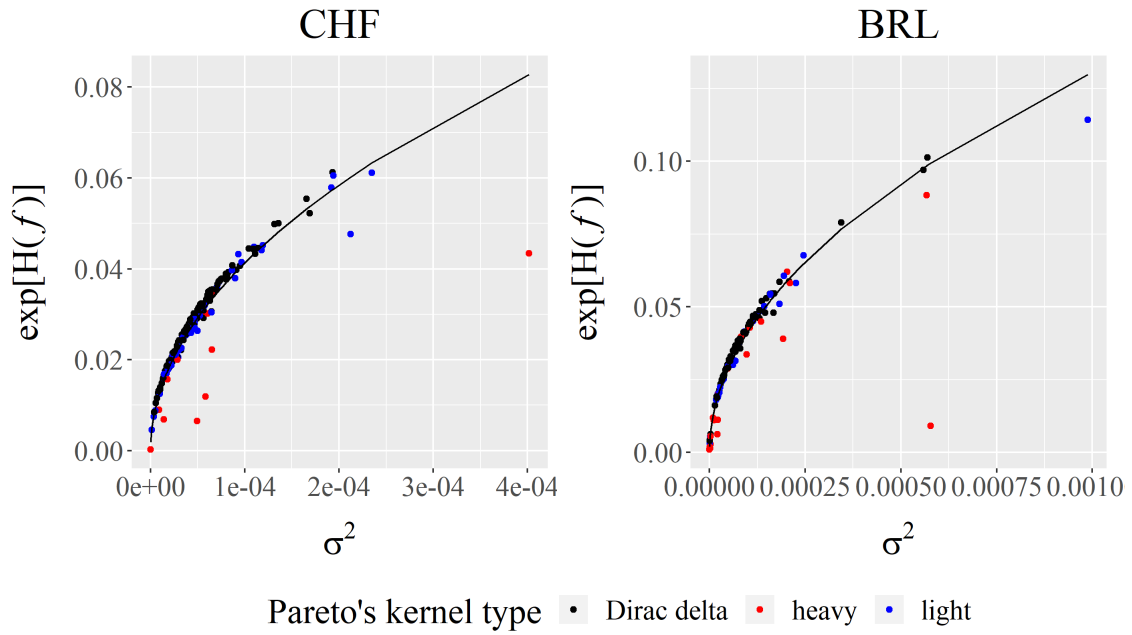


Figura 3.5: m estimativas de entropia diferencial *versus* variâncias amostrais calculadas paara cada bloco de tamanho $b = 60$, onde $m = 221$ para CHF e $m = 121$ para BRL. A linha vermelha refere-se à entropia diferencial gaussiana, dada por $H(f) = 0.5 \ln(2\pi\sigma^2) + 0.5$

gar sua sensibilidade a diferentes janelas temporais, e combiná-lo com técnicas de modelagem financeira para aprofundar a compreensão sobre outros comportamentos de mercado. Por enfatizar a adaptabilidade e a eficácia do kernel de Pareto, esta pesquisa contribui para o desenvolvimento de ferramentas estatísticas aplicadas ao contexto de finanças, fortalecendo o arcabouço metodológico disponível para análise de mercados complexos e incertos.

Os código e funções em R para a estimação da entropia diferencial utilizando o kernel de Pareto e a base de dados estão disponíveis no Figshare (<https://doi.org/10.6084/m9.figshare.25688094.v1>).

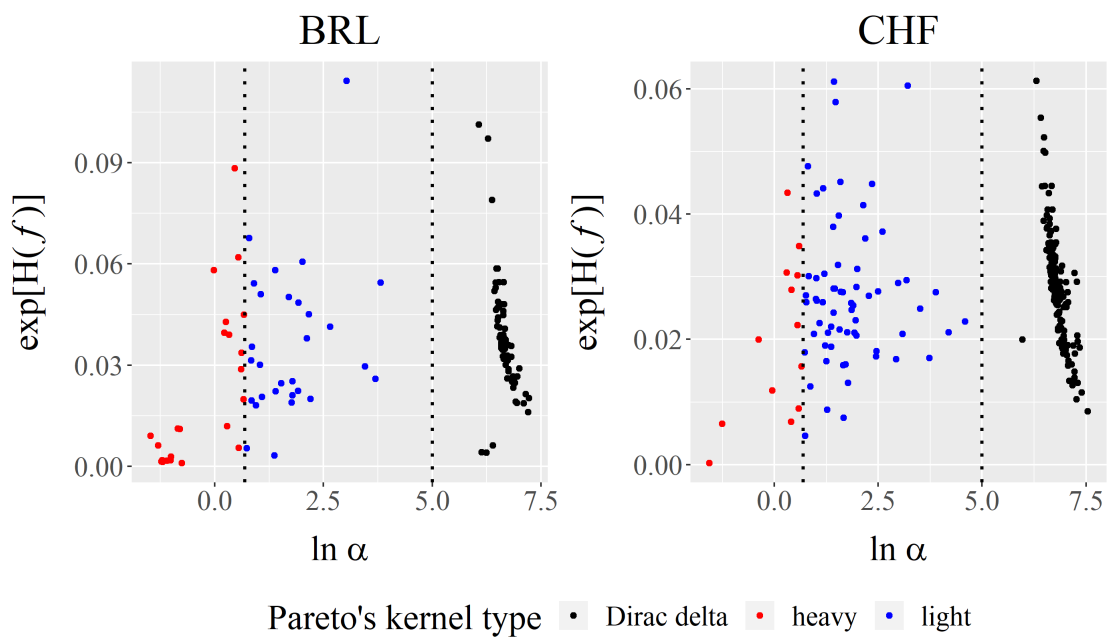


Figura 3.6: m estimativas de entropia diferencial *versus* $\ln \alpha$ estimado por cada bloco de tamanho $b = 60$, onde $m = 221$ para CHF e $m = 121$ para BRL. Foram encontrados três *clusters* de α evidenciados por linhas verticais tracejadas: $\ln \alpha \leq \ln 2$ (kernel de caudas pesadas), $\ln 2 < \ln \alpha \leq 5$ (kernel de caudas leves) e foram consideradas $\ln \alpha > 5$ como aproximação para o kernel do Delta de Dirac.

Tabela 3.2: Blocos com entropias diferenciais estimadas utilizando o kernel de cauda pesada

Franco Suíço (CHF)					
bloco	período	$\hat{\alpha}$	$\hat{h}$	$\hat{H}(\hat{f}_{\hat{h}})$	
1	1971-01-05 — 1971-03-31	0.21	5.5×10^{-9}	-8.35	
2	1971-04-01 — 1971-06-24	1.50	4.0×10^{-4}	-4.99	
3	1971-06-25 — 1971-09-27	1.80	8.9×10^{-4}	-4.72	
4	1971-12-28 — 1972-03-21	0.95	2.5×10^{-4}	-4.44	
5	1972-03-22 — 1972-06-14	0.29	1.3×10^{-6}	-5.03	
6	1972-12-08 — 1973-03-07	1.75	2.1×10^{-3}	-3.81	
7	1979-08-23 — 1979-11-20	1.34	1.2×10^{-3}	-3.49	
8	1987-01-29 — 1987-04-23	1.75	1.9×10^{-3}	-3.50	
9	1993-01-15 — 1993-04-12	1.81	1.7×10^{-6}	-3.36	
10	1996-05-16 — 1996-08-09	0.68	9.5×10^{-5}	-3.91	
11	2001-05-18 — 2001-08-13	1.51	1.3×10^{-3}	-3.58	
12	2014-12-30 — 2015-03-26	1.37	2.8×10^{-3}	-3.14	
13	2021-03-31 — 2021-06-23	1.92	1.5×10^{-3}	-4.16	
Real brasileiro (BRL)					
block	period	$\hat{\alpha}$	$\hat{h}$	$\hat{H}(\hat{f}_{\hat{h}})$	
1	1995-03-28 — 1995-06-20	0.43	8.8×10^{-6}	-4.49	
2	1995-09-15 — 1995-12-12	0.33	4.7×10^{-7}	-6.39	
3	1995-12-13 — 1996-03-15	0.37	5.4×10^{-7}	-5.88	
4	1996-03-18 — 1996-06-10	0.30	3.4×10^{-7}	-6.30	
5	1996-06-11 — 1996-09-04	0.27	1.2×10^{-6}	-5.09	
6	1997-03-03 — 1997-05-23	0.29	2.8×10^{-7}	-6.55	
7	1997-05-27 — 1997-08-19	0.30	2.9×10^{-7}	-6.62	
8	1997-08-20 — 1997-11-14	0.36	7.0×10^{-7}	-6.31	
9	1998-02-13 — 1998-05-08	0.47	8.0×10^{-7}	-6.96	
10	1998-08-04 — 1998-10-28	1.74	5.0×10^{-4}	-5.21	
11	1998-10-29 — 1999-01-27	0.23	6.0×10^{-7}	-4.71	
12	1999-10-14 — 2000-01-07	1.84	2.2×10^{-3}	-3.55	
13	2000-06-29 — 2000-09-22	0.45	1.2×10^{-5}	-4.50	
14	2002-05-30 — 2002-08-22	1.59	3.1×10^{-3}	-2.43	
15	2006-09-14 — 2006-12-08	1.94	1.2×10^{-3}	-3.92	
16	2007-06-04 — 2007-08-27	1.95	4.2×10^{-3}	-3.10	
17	2011-09-15 — 2011-12-12	1.73	2.9×10^{-3}	-2.78	
18	2012-08-29 — 2012-11-26	1.33	2.7×10^{-4}	-4.44	
19	2016-06-29 — 2016-09-22	1.25	7.8×10^{-4}	-3.23	
20	2016-09-23 — 2016-12-20	1.85	2.7×10^{-3}	-3.39	
21	2017-03-22 — 2017-06-14	1.39	1.8×10^{-3}	-3.24	
22	2018-08-24 — 2018-11-20	1.29	1.1×10^{-3}	-3.15	
23	2020-02-10 — 2020-05-04	0.98	7.2×10^{-4}	-2.84	

Capítulo 4

Detecção de mudanças de regimes no mercado de ações por meio da entropia diferencial

Resumo

Este capítulo aplica a entropia diferencial, estimada por meio de um kernel de Pareto, à identificação de regimes de cauda nos mercados acionários globais. Utilizando janelas móveis e uma abordagem não paramétrica, o método permite detectar transições dinâmicas na estrutura estatística das distribuições de retornos sem depender de suposições rígidas sobre momentos finitos. A análise empírica abrange os índices Ibovespa, S&P 500, Nikkei e SSE, evidenciando que eventos como a bolha *dot-com*, a crise do *subprime*, a pandemia de COVID-19 e a disputa tarifária de 2025 estão associados a regimes de cauda pesada. Os resultados revelam que a entropia diferencial capta padrões de incerteza que não são totalmente refletidos pela variância, especialmente em contextos de turbulência, nos quais o quarto momento pode não existir. Destaca-se, ainda, a resposta defasada de certos mercados, como o japonês, aos choques financeiros globais, em consonância com a literatura sobre assimetria na transmissão internacional

de crises. Com isso, o capítulo reforça a utilidade da entropia como ferramenta complementar para o monitoramento de riscos extremos, oferecendo uma perspectiva alternativa aos modelos tradicionais baseados em volatilidade.

4.1 Introdução

Os mercados financeiros apresentam distribuições de retorno complexas, nas quais os eventos extremos observados nas caudas desempenham um papel central na avaliação e gestão de risco. Compreender o comportamento dessas caudas é essencial para apoiar investidores, formuladores de política e demais agentes econômicos na tomada de decisão sob incerteza (Eom e Park, 2020; Freire, 2021; Fernandez-Mejia, 2024).

Embora caudas pesadas e alta curtose sejam características estilizadas amplamente reconhecidas dos retornos financeiros, nenhuma distribuição teórica é capaz de capturar adequadamente a diversidade de comportamentos observada nos mercados sob diferentes regimes e circunstâncias (Eom et al., 2021; Zakamulin, 2023). A distribuição normal, apesar de sua conveniência analítica, falha ao representar eventos extremos. A distribuição t de Student contempla caudas pesadas, mas ignora a assimetria e a ocorrência de mudanças de regime. Já a distribuição α -estável oferece maior flexibilidade nas caudas, porém sua hipótese de variância infinita compromete a aplicação em contextos como a precificação de ativos e a gestão de risco (Eom, Kaizoji e Scalas, 2019). Outras abordagens, como as distribuições hiperbólicas generalizadas, t generalizado, de valores extremos e de voos de Lévy, também apresentam limitações quanto à complexidade computacional, dificuldade de estimação e adaptação a diferentes ativos ou períodos (Tran e Kukal, 2022; Matsushita et al., 2023). Nesse cenário, a escolha do modelo torna-se dependente do conjunto de dados e da aplicação financeira específica.

Além das limitações modelares, os mercados exibem transições dinâmicas entre estados de baixa e alta volatilidade, fenômeno frequentemente associado a ciclos econômicos, choques externos e mudanças no sentimento dos investidores (Santis e Imrohoroğlu, 1997; Poon e Gran-

ger, 2003). Essas mudanças de regime desafiam os modelos tradicionais — como GARCH e Markov-switching — que, embora úteis, geralmente impõem estruturas rígidas de transição e distribuições predefinidas (Bijsterbosch e Guérin, 2013; Zakamulin, 2023).

A teoria dos mercados eficientes, em sua forma forte ou semi-forte, pressupõe que os preços dos ativos refletem, de forma imediata e completa, toda a informação disponível. Nesse cenário, os retornos seriam essencialmente aleatórios, tornando improvável a existência de padrões persistentes ou previsíveis. No entanto, a literatura empírica documenta diversos episódios em que essa hipótese é violada, especialmente durante crises financeiras, mudanças de regime ou choques externos. Nesses contextos, anomalias de mercado e estruturas de dependência podem emergir temporariamente, indicando falhas na incorporação eficiente da informação.

Neste capítulo, adota-se uma abordagem não paramétrica centrada na estimativa da entropia diferencial com kernels de cauda pesada, que evita suposições rígidas sobre a forma funcional da distribuição de retornos. A metodologia permite que os dados revelem suas próprias estruturas — especialmente nas caudas — sem a necessidade de impor distribuições específicas.

Essa abordagem é particularmente útil para investigar a eficiência de mercado sob uma perspectiva informacional. Alterações significativas na entropia, associadas a regimes de cauda pesada, podem sinalizar períodos de ineficiência, nos quais os preços não reagem plenamente à informação disponível. Assim, a entropia diferencial oferece uma métrica alternativa, baseada na complexidade da distribuição empírica dos retornos, para capturar desvios em relação ao comportamento aleatório esperado em mercados eficientes.

A integração entre entropia diferencial e análise de cauda oferece uma perspectiva mais refinada da incerteza e do risco nos mercados financeiros, especialmente em períodos turbulentos, nos quais a detecção de mudanças de regime é crítica. Como variância, incerteza e cauda não são conceitos sinônimos, o uso de ferramentas que os distingam torna-se crucial para caracterizar o comportamento informacional dos preços (Ardakani, 2023; Chen e Liu, 2024; Matsushita et al., 2024).

Por fim, destaca-se que a estimação de caudas requer grandes amostras, pois os eventos extremos são raros por natureza. No entanto, como regimes de cauda frequentemente se restringem a períodos curtos e específicos, estimadores tradicionais como o de Hill tornam-se pouco confiáveis, especialmente sob mudanças estruturais. A entropia diferencial surge, nesse contexto, como alternativa robusta para captar tais transições sem depender exclusivamente da frequência de eventos extremos observados.

Dessa forma, o presente estudo investiga a capacidade da entropia diferencial de detectar mudanças de regime nas caudas das distribuições de retornos, oferecendo uma ferramenta exploratória complementar aos modelos tradicionais e um possível indicador de ineficiências temporárias nos mercados financeiros.

4.2 Metodologia

A entropia diferencial de uma variável aleatória contínua X , cuja função densidade de probabilidade é denotada por f , quantifica a incerteza média associada à distribuição contínua de probabilidade. Ao contrário da entropia de Shannon, que se aplica a variáveis discretas e resulta sempre em valores não negativos, a entropia diferencial $H(f)$ pode assumir valores negativos e não é invariante a transformações lineares de escala. Essa propriedade reflete o fato de que a entropia diferencial não mede a incerteza em termos absolutos, mas sim em termos relativos ao espaço contínuo em que X está definido.

Dessa forma, mais do que uma simples medida de dispersão numérica, a entropia diferencial captura o conteúdo informacional de uma distribuição, incorporando características como assimetria e, principalmente, o comportamento das caudas. Neste artigo, explora-se justamente esse aspecto: ao aplicar estimadores não paramétricos da entropia diferencial a séries financeiras, busca-se identificar mudanças de regime e padrões informacionais que se manifestam nas caudas das distribuições empíricas dos retornos.

A abordagem adotada neste trabalho considera que a densidade de probabilidade f é desconhecida e utiliza o método de estimação por densidade kernel (KDE) para estimá-la de forma não paramétrica. Estudos como os de Hall e Morton (1993) e Matsushita et al. (2024) apontam que o desempenho da estimativa da entropia diferencial $H(f)$ por meio do KDE depende fortemente do comportamento das caudas da distribuição dos dados. Em particular, Matsushita et al. (2024) argumentam que o peso das caudas do kernel deve ser adaptativo, mesmo em amostras pequenas, a fim de capturar adequadamente a estrutura informacional dos dados.

Nesse contexto, o uso do kernel de Pareto se destaca por sua flexibilidade. Devido ao seu expoente de cauda ajustável, essa classe de kernels permite modelar eficientemente distribuições com diferentes graus de assimetria e caudas — desde distribuições com caudas leves até aquelas com caudas pesadas. Como demonstrado por Matsushita et al. (2024), tal característica torna o kernel de Pareto uma alternativa robusta e consistente para a estimação da entropia diferencial, especialmente em aplicações financeiras, onde o comportamento extremo é recorrente e relevante para a avaliação do risco.

Assim, dada uma série temporal de log-retornos $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$, para a estimação da entropia diferencial, considera-se primeiramente o estimador kernel da função de densidade dada por

$$\hat{f}_{h,\alpha}(x_i) = \frac{1}{nh} \sum_{\substack{x_j \in \mathcal{X} \\ i \neq j}} \kappa_\alpha \left(\frac{x_i - x_j}{h} \right), \quad (4.1)$$

em que a largura de banda $h > 0$ controla o nível de suavização, e

$$\kappa_\alpha \left(\frac{x_i - x_j}{h_t} \right) = \frac{\alpha}{2} \left(1 + \left| \frac{x_i - x_j}{h} \right|^{\alpha+1} \right)^{-1} \quad (4.2)$$

representa o kernel de Pareto com índice $\alpha > 0$.

Em seguida, define-se o estimador *plug-in* da entropia diferencial como um estimador de

momentos da entropia cruzada (Hall, 1987; Hall e Morton, 1993), $H(\hat{f})$, ou seja,

$$\hat{H}(\hat{f}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \hat{f}_{\hat{h}, \hat{\alpha}}(x_i), \quad (4.3)$$

em que

$$(\hat{h}, \hat{\alpha}) = \arg \min_{h>0, \alpha>0} \hat{H}(\hat{f}).$$

Ainda que α não seja igual ao índice de cauda da distribuição populacional, ela fornece *insights* relevantes sobre o tipo de cauda dos dados (Matsushita et al., 2024).

Por meio de simulações computacionais, sugere-se a seguinte escala logarítmica para classificar o regime de cauda que engloba o conjunto de dados $\mathcal{X}$: regime de caudas pesadas, se $\ln \hat{\alpha}_t < 5$; e regime de caudas leves, se $\ln \hat{\alpha}_t \geq 5$.

Foram obtidas 1.000 réplicas de amostras sintéticas de tamanho 60 gerada a partir de uma distribuição t de Student com ν graus de liberdade, cuja entropia teórica é dada por

$$H(f) = \frac{\nu+1}{2} \left[\psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] + \ln \left[\sqrt{\nu} B \left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.4)$$

na qual ψ é a função digama e B representa a função beta. As caudas são muito pesadas com $\nu \leq 1$ (sem média) ou $1 < \nu \leq 2$ (com média, mas sem variância). À medida que ν aumenta, a cauda se aproxima da distribuição normal padrão. Mas neste estudo, o intervalo $\nu \leq 15$ permite estabelecer os resultados de interesse.

Em seguida, para cada amostra de Monte Carlo, foi aplicada a Eq.(4.3) com o objetivo de estimar a entropia diferencial da distribuição t de Student. A Figura 1 (à esquerda) mostra a evolução das médias das estimativas da entropia diferencial em função do número de graus de liberdade ν (linha sólida), comparando-a com seu valor teórico (4.4) (linha pontilhada).

A Figura 1 (à direita) mostra como a log-mediana de $\hat{\alpha}$ evolui em função de ν , evidenciando

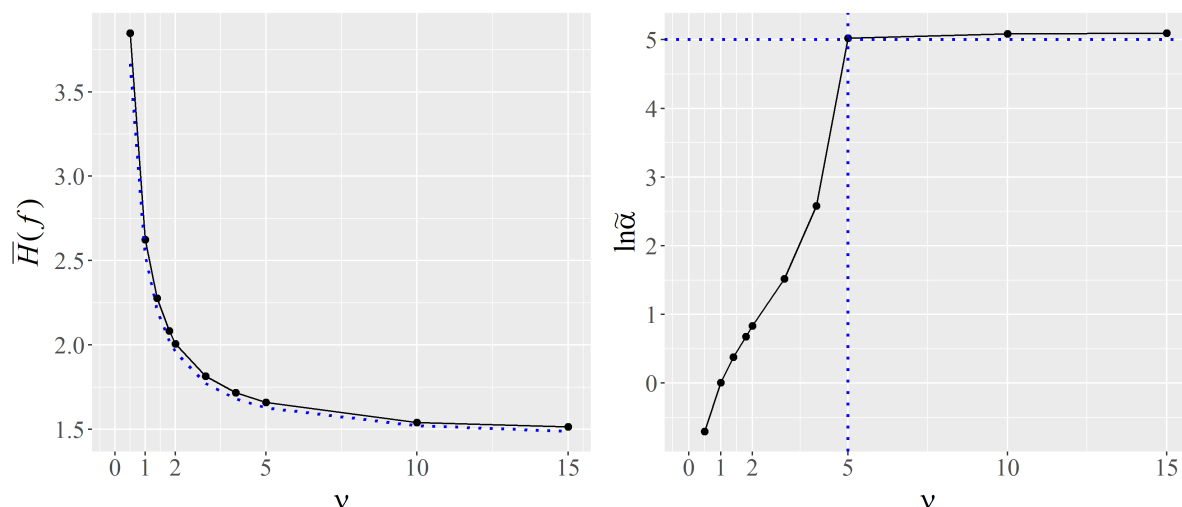


Figura 4.1: **Esquerda:** Médias das estimativas da entropia diferencial de uma distribuição t de Student obtidas por meio de 1.000 réplicas de amostras de tamanho $n = 60$, extraídas de uma distribuição t de Student com ν graus de liberdade. A entropia teórica (4.4) é representada pela linha pontilhada. **Direita:** Logaritmo natural das medianas de $\hat{\alpha}$ em função de ν , com base em 1.000 réplicas para cada grau de liberdade, havendo quebra de *scaling* no ponto $\nu \approx 5$.

claramente a existência de dois regimes distintos devido à ruptura na escala. Caudas mais pesadas do que as da distribuição t de Student com $\nu = 5$ graus de liberdade são observadas para $\ln \alpha \leq 5$. Esse caso abrange, por exemplo, a distribuição de Cauchy ($\nu = 1$), que não possui média, nem variância, nem curtose.

4.3 Resultados empíricos

Os dados utilizados na análise foram os índices Ibovespa, Nikkei, S&P500 e SSE, retirados do *Yahoo Finance*, por meio do pacote `quantmod` na linguagem R. O conjunto de dados contempla os preços de fechamento diários no período de janeiro de 1998 a março de 2025 (Tabela 4.1). Os retornos logarítmicos foram calculados conforme a expressão $r_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1})$, em que P_t representa o preço de fechamento no dia t .

Ao longo do período analisado, os mercados acionários foram fortemente influenciados por uma série de crises econômicas, tanto de alcance global quanto específicas de determinados

países, as quais impactaram significativamente a volatilidade e a dinâmica dos retornos. Entre os eventos globais mais relevantes, destaca-se a bolha das empresas *dot-com* (2000–2002), que provocou perdas expressivas no setor de tecnologia e gerou repercussões nos principais índices acionários mundiais. Em seguida, a crise do *subprime* (2007–2009), originada pelo colapso do mercado imobiliário nos Estados Unidos, desencadeou uma crise financeira sistêmica que também afetou severamente os mercados considerados neste estudo. Mais recentemente, a pandemia de COVID-19 (2020) representou um choque de grande magnitude, elevando de forma abrupta a volatilidade nos mercados globais. Esse aumento esteve associado a paralisações econômicas em larga escala, rupturas nas cadeias de suprimentos e elevada incerteza quanto à eficácia e ao alcance das respostas governamentais nas esferas sanitária e econômica.

Além dos eventos globais mencionados, cada mercado acionário analisado também foi afetado por crises domésticas específicas. No caso brasileiro, o índice Ibovespa foi particularmente impactado pela crise cambial de 1999, desencadeada pela abrupta desvalorização da moeda nacional e pela instabilidade macroeconômica subsequente. Outro episódio relevante foi o *impeachment* da presidente Dilma Rousseff, em 2016, que gerou incertezas políticas e contribuiu para a volatilidade nos mercados financeiros do país, evidenciando a influência de eventos políticos sobre a dinâmica acionária.

O índice japonês Nikkei enfrentou um período prolongado de estagnação ao longo dos anos 2000, frequentemente denominado “Década Perdida”, caracterizado por crescimento econômico anêmico e deflação persistente. Esse cenário foi agravado pelo desastre nuclear de Fukushima e o terremoto de Tōhoku, ocorridos em 2011, que impactaram profundamente a economia japonesa e seus mercados financeiros.

Nos Estados Unidos, o índice S&P 500 refletiu episódios de instabilidade doméstica, como os desdobramentos dos atentados de 11 de setembro de 2001 e, mais recentemente, as tensões comerciais entre os Estados Unidos e a China em 2018, que afetaram o sentimento dos investidores e contribuíram para oscilações relevantes no mercado.

O índice SSE, representando o mercado acionário da China, foi influenciado por diversos fatores internos, incluindo o colapso de 2015, provocado por alavancagem excessiva e negociações altamente especulativas, bem como pela desaceleração econômica no início da década de 2010. Mais recentemente, a crise tarifária entre Estados Unidos e China em 2025, intensificada durante a campanha presidencial do ex-presidente Donald Trump, foi marcada por elevações abruptas nas tarifas e pela adoção de novas barreiras comerciais. Esses desdobramentos contribuíram para um aumento generalizado da volatilidade nos mercados globais, alimentado pelas incertezas econômicas e financeiras decorrentes do conflito.

Tabela 4.1: Descrição dos dados diários de preços no fechamento (1 de janeiro de 1998 — 31 de março de 2025)

Índice de ações	Mercado acionário	País	Tamanho da amostra
Ibovespa	São Paulo	Brazil	6,744
S&P 500	New York	USA	6,852
Nikkei	Tokyo	Japan	6,675
SSE	Shanghai	China	6,592

A entropia diferencial estimada por meio do kernel de Pareto permite identificar regimes nos mercados financeiros que vão além das métricas tradicionais baseadas na variância, ao capturar padrões associados a caudas pesadas, comumente observados durante crises e períodos de alta turbulência. Para a análise empírica, adotaram-se janelas móveis de tamanho 61, o que representa um compromisso entre resolução temporal e confiabilidade estatística na estimação da entropia ao longo do tempo.

A Figura 4.2 apresenta a evolução histórica dos retornos logarítmicos dos índices descritos na Tabela 4.1. A partir da estimativa do expoente de cauda do kernel de Pareto, denotado por α_t , é possível classificar os regimes observados: valores de $\ln \alpha_t \leq 5$ indicam a presença de caudas pesadas, enquanto $\ln \alpha_t > 5$ caracteriza regimes de caudas leves. Essa classificação se mostra coerente com episódios históricos amplamente documentados, como a crise financeira asiática (1997–1998) e a bolha da Internet *dot-com* (2000–2002), além de eventos domésticos específicos, como as eleições presidenciais brasileiras.

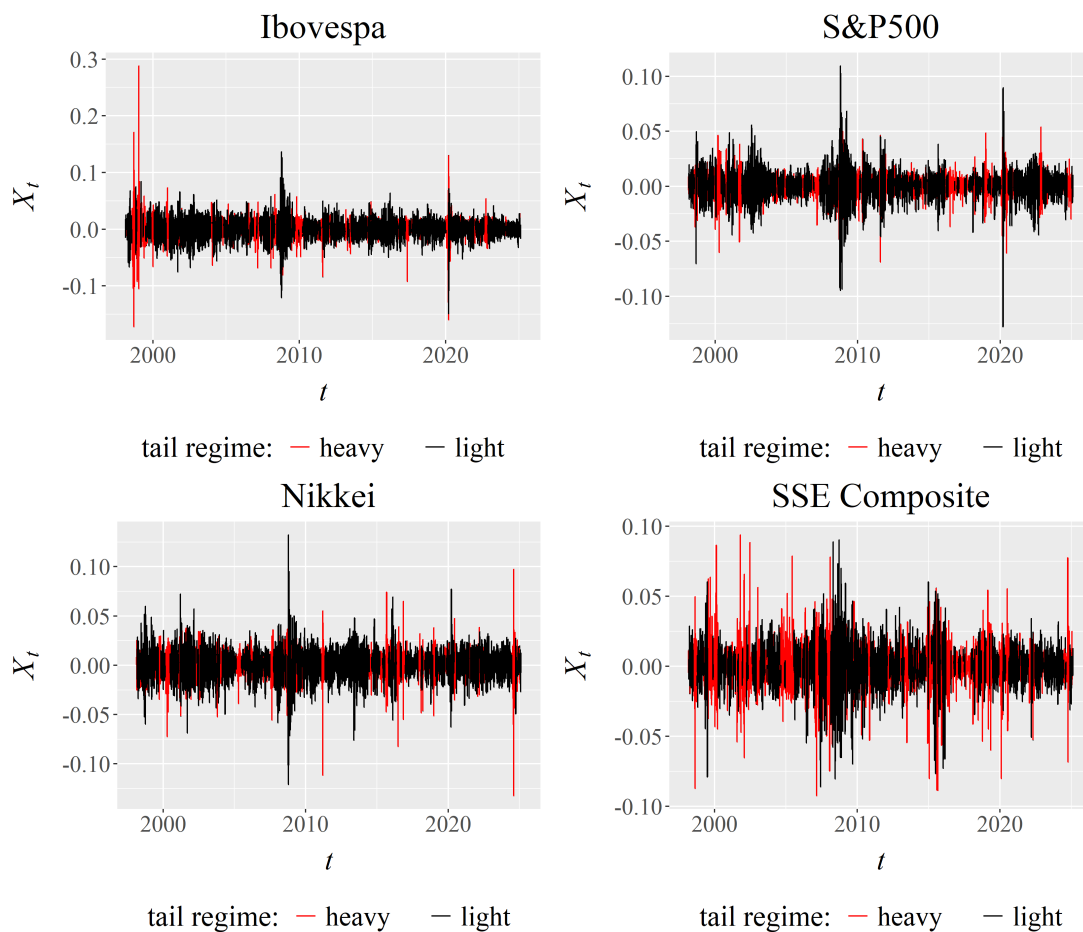


Figura 4.2: Evolução histórica dos retornos logarítmicos dos índices listados na Tabela 4.1. Diferentes regimes estocásticos das caudas são identificados por meio do expoente α do kernel de Pareto e janelas móveis de tamanho 61, em consonância com os eventos históricos que precedem crises financeiras. Regimes de caudas pesadas são definidos por $\ln \alpha_t \leq 5$, enquanto regimes de caudas leves correspondem a $\ln \alpha_t > 5$.

O impacto prolongado da crise financeira asiática foi perceptível em todos os mercados analisados, refletindo sua natureza sistêmica. Já a bolha *dot-com* exerceu influência mais pronunciada sobre os índices S&P 500 e Nikkei, dada a alta exposição desses mercados às ações do setor de tecnologia, cujo colapso foi o principal catalisador daquele episódio.

O método empregado neste estudo foi capaz de capturar a turbulência de mercado associada à crise tarifária ocorrida no início de 2025 entre os Estados Unidos e a China, a qual resultou em um regime de caudas pesadas, especialmente nos índices S&P 500, Nikkei e SSE. Esse episódio ilustra como alterações abruptas na política comercial podem produzir impactos imediatos e

significativos sobre o risco de cauda, evidenciando a sensibilidade da abordagem adotada ao estresse financeiro induzido por decisões de natureza econômica e geopolítica.

No caso brasileiro, observam-se episódios recorrentes de instabilidade associados ao calendário eleitoral, com destaque para os anos de 1998, 2002 e 2016. Neste último, o processo de *impeachment* da presidente Dilma Rousseff intensificou a volatilidade, refletindo-se em regimes persistentes de cauda pesada. De forma análoga, a crise do *subprime* (2007–2009) configurou um dos episódios mais prolongados de risco extremo, com valores de $\ln \alpha_t \leq 5$ sustentados ao longo de diversos meses consecutivos.

A abordagem também capturou com clareza o estresse de mercado associado à pandemia de COVID-19, ainda que com intensidades e padrões temporais distintos entre os mercados. Enquanto os índices S&P 500 e Ibovespa evidenciaram comportamento de cauda pesada logo no início de 2020, o Nikkei apresentou uma resposta mais tardia, o que está em consonância com estudos que documentam a defasagem na transmissão de choques financeiros globais entre diferentes regiões econômicas (Liu et al., 2020; Bentes, 2021).

Além da identificação de períodos de alta volatilidade, a abordagem utilizada também permite detectar fases do mercado caracterizadas por risco extremo de cauda, nas quais até mesmo o quarto momento da distribuição de retornos pode não existir. Tais condições refletem um elevado grau de instabilidade, com implicações significativas para a gestão de riscos, a formulação de políticas econômicas e a precificação de ativos financeiros.

A Figura 4.3 ilustra a relação entre as estimativas exponenciadas da entropia diferencial e as variâncias amostrais, calculadas em janelas móveis de tamanho 61. Observa-se que variabilidade, mensurada pela variância (σ^2), e incerteza, capturada pela entropia, nem sempre caminham juntas — sobretudo em regimes de caudas pesadas. Enquanto a variância se restringe à dispersão em torno da média, a entropia incorpora informações sobre toda a distribuição, inclusive seus extremos.

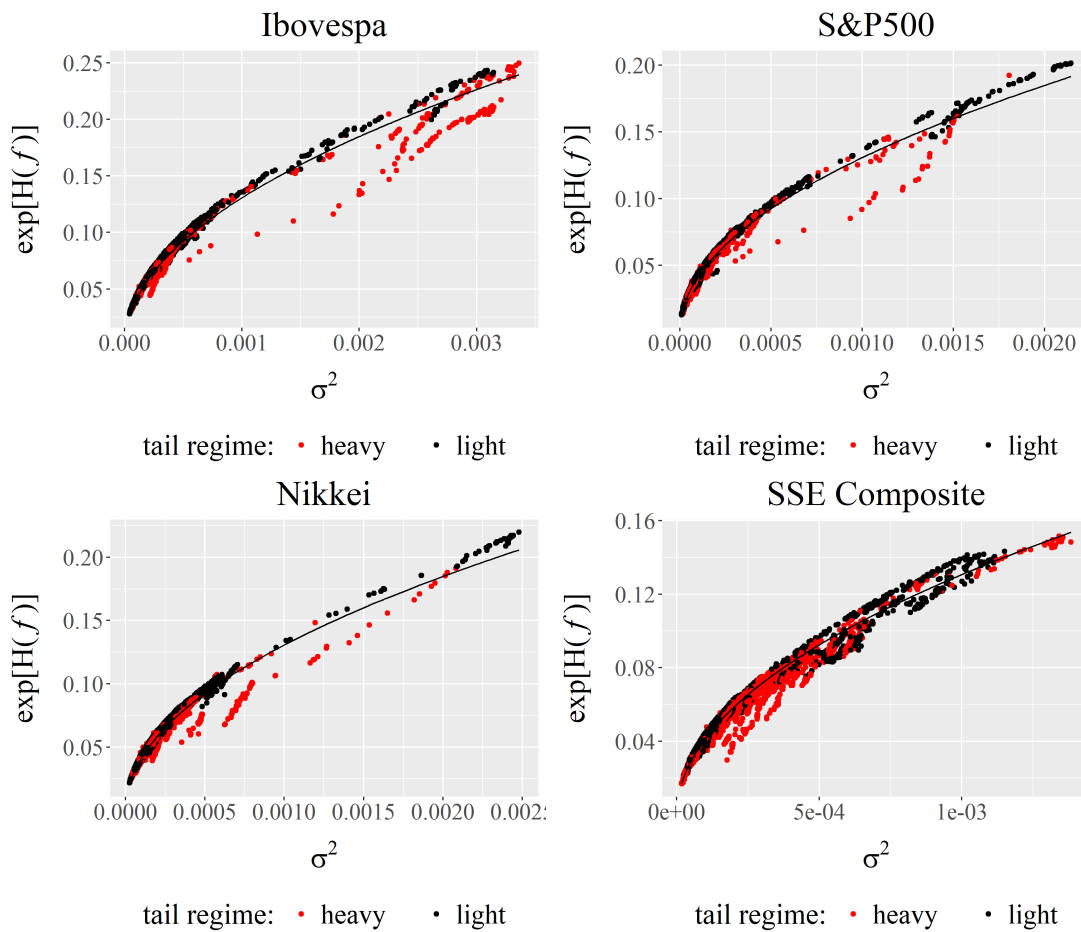


Figura 4.3: Estimativas da entropia diferencial exponenciada em função das variâncias amostrais em cada janela móvel de tamanho 61 ($w = 30$). A linha contínua representa o regime Gaussiano, no qual a entropia diferencial é dada por $H(f) = 0,5 \ln(2\pi\sigma^2) + 0,5$.

Nos regimes aproximadamente gaussianos, entropia e variância mantêm uma relação teórica bem estabelecida, dada por

$$H(f) \approx \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2},$$

o que implica uma correspondência entre variabilidade e incerteza. No entanto, à medida que o comportamento de cauda se intensifica, essa relação se enfraquece: eventos extremos tornam-se mais frequentes, e a distribuição se desvia do padrão normal. Nesses contextos, é possível observar situações em que uma alta variância não se traduz necessariamente em alta entropia, ou vice-versa.

Essa divergência evidencia que a variância, isoladamente, pode ser insuficiente para caracterizar a incerteza em mercados sob estresse. Por isso, destaca-se a importância do uso de medidas complementares, como a entropia diferencial, que fornecem uma perspectiva mais abrangente do risco, especialmente em regimes de cauda pesada.

Mais ainda, modelos tradicionais de volatilidade, como o GARCH e suas variações, assumem a existência dos quatro primeiros momentos da distribuição dos retornos. No entanto, em regimes de caudas extremamente pesadas, o quarto momento pode não existir, violando os pressupostos fundamentais desses modelos. Nesses contextos, as estimativas de volatilidade tornam-se pouco confiáveis e as previsões de risco podem ser severamente enviesadas, uma vez que grandes flutuações deixam de estar adequadamente delimitadas, resultando em alta sensibilidade a choques.

Medidas baseadas em entropia oferecem uma alternativa robusta para caracterizar cenários de instabilidade de mercado, pois permanecem bem definidas mesmo na presença de distribuições com caudas do tipo lei de potência. Essa propriedade torna a entropia diferencial uma ferramenta promissora para avaliar a incerteza informacional em contextos onde os modelos convencionais falham devido à ausência de momentos finitos.

4.4 Conclusão

Este estudo demonstrou que a entropia diferencial estimada com kernel de Pareto constitui uma ferramenta eficaz para a identificação de regimes nos mercados financeiros, superando as limitações das métricas tradicionais baseadas em variância. A adoção de uma estrutura com janelas móveis permitiu capturar variações dinâmicas no comportamento das caudas, sem a necessidade de suposições paramétricas rígidas, fornecendo uma abordagem flexível e orientada pelos dados para a detecção de regimes de risco.

Os resultados empíricos confirmam que grandes eventos de estresse financeiro — como

a bolha das empresas *dot-com*, a crise do *subprime*, a pandemia de COVID-19 e a recente disputa tarifária entre Estados Unidos e China em 2025 — estão associados a regimes de caudas pesadas, marcados por elevada incerteza e movimentos extremos nos mercados. Esses episódios evidenciam as limitações de modelos de risco convencionais, como os da família GARCH, que muitas vezes não conseguem capturar adequadamente a magnitude da instabilidade durante períodos de turbulência.

Adicionalmente, foi possível observar que, em regimes de cauda pesada, a variância elevada nem sempre está acompanhada de um aumento proporcional da entropia. Essa dissociação destaca que medidas baseadas em momentos podem ser inadequadas quando o quarto momento não existe, o que compromete a validade de modelos que dependem dessa suposição. Nesse cenário, a entropia diferencial surge como uma alternativa robusta, permanecendo bem definida mesmo na presença de distribuições com caudas do tipo lei de potência.

Mais do que uma medida teórica de incerteza, a entropia diferencial mostrou-se uma ferramenta prática para o monitoramento do risco financeiro e a classificação de regimes de mercado. Sua natureza não paramétrica e sensibilidade ao comportamento das caudas a tornam particularmente adequada para contextos de mudança estrutural, oferecendo *insights* relevantes para investidores, formuladores de política e gestores de risco diante da crescente complexidade dos mercados financeiros.

Capítulo 5

Considerações Finais

Esta tese teve como objetivo central investigar como métricas baseadas em entropia podem ser empregadas para descrever e interpretar padrões de comportamento nos mercados financeiros. A partir disso, formulou-se a seguinte pergunta de pesquisa: *de que maneira a entropia pode contribuir para a compreensão das relações de dependência, identificação de regimes e caracterização de caudas em dados financeiros?* Para abordar essa questão sob diferentes perspectivas, a tese foi estruturada em três artigos, cada um com objetivos específicos e metodologias complementares.

O primeiro artigo, *Mercados acionários, ouro e Bitcoin: Uma Análise Informacional Pré, Durante e Pós-COVID-19*, investigou o uso da transferência de entropia para captar fluxos de informação e efeitos de contágio entre mercados de ações, ouro e Bitcoin, considerando três fases distintas em relação à pandemia de COVID-19. Os resultados evidenciaram um aumento significativo da interdependência entre os mercados durante o período pandêmico, além da atuação do ouro como ativo diversificador para os mercados norte-americano e japonês, e do Bitcoin como ativo com papel semelhante em todos os períodos analisados.

O segundo artigo, *A entropia diferencial e o Kernel de Pareto*, propôs um novo estimador

de entropia diferencial baseado em kernel com cauda pesada. O objetivo foi aprimorar a robustez e a precisão da medida frente a distribuições com caudas não gaussianas, frequentemente observadas em contextos financeiros. Por meio de simulações de Monte Carlo e aplicação empírica ao mercado de câmbio, demonstrou-se que o uso do kernel de Pareto torna a estimação da entropia diferencial mais estável e adequada para ambientes de alta incerteza.

O terceiro artigo, *Detecção de mudanças de regimes no mercado de ações por meio da entropia diferencial*, aplicou o estimador proposto a dados de mercados acionários com o intuito de identificar transições entre regimes de caudas leves e pesadas. Os resultados indicaram que a metodologia é capaz de reconhecer, de forma eficaz, eventos críticos como crises financeiras e episódios de turbulência acentuada. A análise revelou, ainda, que medidas tradicionais de risco, como a variância, podem ser insuficientes em contextos extremos, reforçando a entropia como métrica alternativa mais sensível a mudanças estruturais e ao comportamento das caudas.

Do ponto de vista metodológico, a tese propôs avanços relevantes ao adaptar o uso da entropia diferencial com kernel de Pareto à análise de dados financeiros, oferecendo um novo estimador sensível à estrutura de caudas e adequado a distribuições com momentos indefinidos. Essa proposta amplia as possibilidades de aplicação da entropia em contextos econômicos e financeiros, tradicionalmente dominados por modelos baseados em momentos finitos.

Ao adotar um enfoque informacional, esta tese também contribui para um deslocamento conceitual na análise de risco, propondo a entropia como métrica complementar à variância, com maior capacidade de captar interdependências complexas, comportamentos não lineares e regimes extremos. Em conjunto, os resultados obtidos demonstram que a entropia — especialmente em sua forma diferencial e com suporte não paramétrico — constitui uma ferramenta poderosa para a análise financeira.

Além do escopo acadêmico, os resultados aqui apresentados podem ser incorporados a sistemas de monitoramento de risco, algoritmos de detecção de anomalias em plataformas de negociação automática ou ferramentas de vigilância regulatória, contribuindo para uma gestão

mais informada e adaptativa dos riscos de mercado.

Reconhece-se, no entanto, que esta tese possui limitações que abrem espaço para investigações futuras. Entre elas, destaca-se a necessidade de explorar a sensibilidade dos métodos em ambientes de dados mais granulares e em outras classes de ativos.

Como desdobramentos futuros, sugere-se a aplicação do estimador de entropia diferencial com kernel de Pareto a dados de alta frequência, visando compreender o comportamento intradiário dos mercados e investigar a ocorrência de mudanças de regime em janelas temporais reduzidas. Além disso, recomenda-se aprofundar o desenvolvimento de medidas de transferência de entropia baseadas na entropia diferencial, o que pode ampliar a aplicabilidade do método em dados contínuos e contextos informacionais complexos.

Dessa forma, a entropia, em suas diferentes formas, se consolida como um conceito promissor na modelagem financeira contemporânea, com potencial de redefinir como os riscos e as incertezas são mensurados, monitorados e interpretados em mercados cada vez mais complexos e interconectados.

Referências Bibliográficas

- Al-Yahyaee, Khamis Hamed et al. (2019). “Testing for the Granger-causality between returns in the U.S. and GIPSI stock markets”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 531, p. 120950.
- Ardakani, Omid M. (2023). “Capturing information in extreme events”. *Economics Letters* 231, p. 111301.
- Armah, Mohammed, Bossman, Ahmed e Amewu, Godfred (2023). “Information flow between global financial market stress and African equity markets: An EEMD-based transfer entropy analysis”. *Heliyon* 9.3.
- Assaf, Ata, Mokni, Khaled e Youssef, Manel (2023). “COVID-19 and information flow between cryptocurrencies, and conventional financial assets”. *The Quarterly Review of Economics and Finance* 89, pp. 73–81. ISSN: 1062-9769.
- Baur, Dirk G. e Lucey, Brian M. (2010). “Is Gold a Hedge or a Safe Haven? An Analysis of Stocks, Bonds and Gold”. *Financial Review* 45.2, pp. 217–229.
- Baur, Dirk G. e McDermott, Thomas K. (2010). “Is gold a safe haven? International evidence”. *Journal of Banking and Finance* 34.8. New Contributions to Retail Payments: Conference at Norges Bank (Central Bank of Norway) 14–15 November 2008, pp. 1886–1898. ISSN: 0378-4266.
- Beck, Christian e Schögl, Friedrich (1993). *Thermodynamics of Chaotic Systems : An Introduction*. Cambridge University Press.

- Beirlant, Jan et al. (1997). “Nonparametric entropy estimation: An overview”. *International Journal of Mathematical and Statistical Sciences* 6.1, pp. 17–39.
- Bekiros, Stelios et al. (2017). “Black swan events and safe havens: The role of gold in globally integrated emerging markets”. *Journal of International Money and Finance* 73. Global Economy: Future Financial and Macro Challenges, pp. 317–334. ISSN: 0261-5606.
- Bentes, Sónia R. (2021). “How COVID-19 has affected stock market persistence? Evidence from the G7’s”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 581, p. 126210. ISSN: 0378-4371.
- Bijsterbosch, Martin e Guérin, Pierre (2013). “Characterizing very high uncertainty episodes”. *Economics Letters* 121.2, pp. 239–243.
- Boateng, Ebenezer et al. (2022a). “Quantifying Information Flows among Developed and Emerging Equity Markets”. *Mathematical Problems in Engineering* 2022.1, p. 2462077.
- (2022b). “Quantifying Information Flows among Developed and Emerging Equity Markets”. *Mathematical Problems in Engineering* 2022.1, p. 2462077.
- Bossman, Ahmed et al. (2022). “A new ICEEMDAN-based transfer entropy quantifying information flow between real estate and policy uncertainty”. *Research in Economics* 76.3, pp. 189–205. ISSN: 1090-9443.
- Bouri, Elie, Lucey, Brian e Roubaud, David (2020). “Cryptocurrencies and the downside risk in equity investments”. *Finance Research Letters* 33, p. 101211. ISSN: 1544-6123.
- Cajueiro, Daniel O e Tabak, Benjamin M (2004). “The Hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 336.3, pp. 521–537.
- Calvet, Laurent e Fisher, Adlai (2002). “Multifractality in Asset Returns: Theory and Evidence”. *The Review of Economics and Statistics* 84.3, pp. 381–406.
- Campbell, John Y., Lo, Andrew W. e MacKinlay, A. Craig (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. New Jersey: Princeton University Press.

- Chang, Meng-Shiuh et al. (2022). “Determining hedges and safe havens for stocks using interval analysis”. *The North American Journal of Economics and Finance* 61, p. 101671. ISSN: 1062-9408.
- Chapeau-Blondeau, François e Rousseau, David (2009). “The minimum description length principle for probability density estimation by regular histograms”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 388.18, pp. 3969–3984.
- Chen, Yan e Liu, Yakun (2024). “Idiosyncratic Asymmetry in Stock Returns: An Entropy Measure”. *Finance Research Letters* 64, p. 105317.
- Choudhry, Taufiq, Hassan, Syed S. e Shabi, Sarosh (2015). “Relationship between gold and stock markets during the global financial crisis: Evidence from nonlinear causality tests”. *International Review of Financial Analysis* 41, pp. 247–256. ISSN: 1057-5219.
- Cont, R. (2001). “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”. *Quantitative Finance* 1.2, pp. 223–236.
- Corbet, Shaen et al. (2018). “Exploring the dynamic relationships between cryptocurrencies and other financial assets”. *Economics Letters* 165, pp. 28–34. ISSN: 0165-1765.
- Cover, Thomas M e Thomas, Joy A (2006). *Elements of Information Theory*. 2nd. Wiley-Interscience.
- Dhifaoui, Zouhaier et al. (2023). “Exploring the effect of climate risk on agricultural and food stock prices: Fresh evidence from EMD-Based variable-lag transfer entropy analysis”. *Journal of Environmental Management* 326, p. 116789. ISSN: 0301-4797.
- Dionisio, Andreia, Reis, A. Heitor e Coelho, Luis (2008). “Utility function estimation: The entropy approach”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 387.15, pp. 3862–3867.
- Duc Huynh, Toan Luu, Burggraf, Tobias e Wang, Mei (2020). “Gold, platinum, and expected Bitcoin returns”. *Journal of Multinational Financial Management* 56, p. 100628. ISSN: 1042-444X.

- Duin (1976). “On the Choice of Smoothing Parameters for Parzen Estimators of Probability Density Functions”. *IEEE Transactions on Computers* C-25.11, pp. 1175–1179.
- Dutillo, Pierdomenico, Gattone, Stefano Antonio e Iannone, Barbara (2024). “Mixtures of generalized normal distributions and EGARCH models to analyse returns and volatility of ESG and traditional investments”. *AStA Advances in Statistical Analysis* 108.4, pp. 755–775.
- Eom, Cheoljun, Kaizoji, Taisei e Scalas, Enrico (2019). “Fat tails in financial return distributions revisited: Evidence from the Korean stock market”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 526, p. 121055.
- Eom, Cheoljun e Park, Jong Won (2020). “Effects of the fat-tail distribution on the relationship between prospect theory value and expected return”. *The North American Journal of Economics and Finance* 51, p. 101052.
- Eom, Cheoljun et al. (2021). “Limitations of Portfolio Diversification Through Fat Tails of the Return Distributions: Some Empirical Evidence”. *The North American Journal of Economics and Finance* 56, p. 101358.
- Feng, Jingyu, Yuan, Ying e Jiang, Mingxuan (2024). “Are stablecoins better safe havens or hedges against global stock markets than other assets? Comparative analysis during the COVID-19 pandemic”. *International Review of Economics and Finance* 92, pp. 275–301. ISSN: 1059-0560.
- Fernandes, Leonardo H. S. et al. (2023). “Assessment of Sector Bond, Equity Indices and Green Bond Index Using Information Theory Quantifiers and Clusters Techniques”. *Fractals* 31.1, pp. 2350017–537.
- Fernandez-Mejia, Julian (2024). “Extremely stablecoins”. *Finance Research Letters* 63, p. 105268.
- Ferreira, Paulo et al. (2022). “The use of transfer entropy to analyse the comovements of European Union stock markets: a dynamical analysis in times of crises”. *Revista Galega de Economía* 31.3, pp. 1–21.

- Forbes, Kristin J. e Rigobon, Roberto (2002). “No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Comovements”. *The Journal of Finance* 57.5, pp. 2223–2261. ISSN: 00221082, 15406261.
- Freire, Gustavo (2021). “Tail risk and investors’ concerns: Evidence from Brazil”. *The North American Journal of Economics and Finance* 58, p. 101519.
- Gabaix, X. et al. (2003). “A theory of power-law distributions in financial market fluctuations”. *Nature* 423, 267–270.
- Giglio, R. et al. (2008). “Algorithmic complexity theory and the relative efficiency of financial markets”. *Europhysics Letters* 84.4, p. 48005.
- Goel, Ritu, Taneja, H.C. e Kumar, Vikas (2018). “Measure of entropy for past lifetime and k-record statistics”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 503, pp. 623–631.
- Govindan, R.B. et al. (2007). “Revisiting sample entropy analysis”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 376, pp. 158–164.
- Guo, X., Zhang, H. e Tian, T. (2018). “Development of stock correlation networks using mutual information and financial big data”. *PLOS One* 13.4, e0195941.
- Habbema, J. D. F., Hermans, J. e van Der Broek, K. (1974). “A stepwise discriminant analysis program using density estimation”. Em: *Compstat 1974*. Ed. por G. Bruckmann. Physica, pp. 101–110.
- Hall, P. e Morton, S.C. (1993). “On the estimation of entropy”. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 45, pp. 69–88.
- Hall, Peter (1987). “On Kullback-Leibler Loss and Density Estimation”. *The Annals of Statistics* 15.4, pp. 1491–1519.
- Harikumar, Yedhu e Muthumeenakshi, M (2024). “Pandemic’s Ripple Effect: Exploring Dynamic Connectedness of Indian Equity and Commodity Markets”. *International Research Journal of Multidisciplinary Scope*.

- Huang, Yingying, Duan, Kun e Mishra, Tapas (2021). “Is Bitcoin really more than a diversifier? A pre- and post-COVID-19 analysis”. *Finance Research Letters* 43, p. 102016. ISSN: 1544-6123.
- Huynh, Toan Luu Duc et al. (2020). ““Small things matter most”: The spillover effects in the cryptocurrency market and gold as a silver bullet”. *The North American Journal of Economics and Finance* 54, p. 101277. ISSN: 1062-9408.
- Ibrahim, Bassam A et al. (2024). “Volatility contagion between cryptocurrencies, gold and stock markets pre-and-during COVID-19: evidence using DCC-GARCH and cascade-correlation network”. *Financial Innovation* 10.1, pp. 1–28.
- Ivanov, A. V. e Rozhkova, M. N. (1981). “On Properties of the Statistical Estimate of the Entropy of a Random Vector with a Probability Density”. *Problems of Information Transmission* 17.3, pp. 171–178.
- Jareño, Francisco e Yousaf, Imran (2023). “Artificial intelligence-based tokens: Fresh evidence of connectedness with artificial intelligence-based equities”. *International Review of Financial Analysis* 89.
- Jaroonchokanan, Nawee, Termsaithong, Teerasit e Suwanna, Sujin (2022). “Dynamics of hierarchical clustering in stocks market during financial crises”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 607, p. 128183.
- Jizba, Petr, Kleinert, Hagen e Shefaat, Mohammad (2012). “Rényi’s information transfer between financial time series”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391.10, pp. 2971–2989. ISSN: 0378-4371.
- Jizba, Petr e Korbel, Jan (2014). “Multifractal diffusion entropy analysis: Optimal bin width of probability histograms”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 413, pp. 438–458.
- Jizba, Petr, Lavička, Hynek e Tabachová, Zlata (2021). “Rényi Transfer Entropy Estimators for Financial Time Series”. *Engineering Proceedings* 5.1.

- Junior, Peterson Owusu e Hung, Ngo Thai (2023). “Asymmetric information flow to G7 and Nordic equities markets during COVID-19 pandemic”. *The Journal of Risk Finance* 24.4, pp. 393–423.
- Junior, Peterson Owusu et al. (2024). “Comovement of african stock markets: Any influence from the COVID-19 pandemic?” *Heliyon* 10.9.
- Karkowska, Renata e Urjasz, Szczepan (2022). “Linear and Nonlinear Effects in Connectedness Structure: Comparison between European Stock Markets”. *Entropy* 24.2. ISSN: 1099-4300.
- Kristoufek, Ladislav e Vosvrda, Miloslav (2013). “Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.1, pp. 184–193.
- Kuang, Peng-Cheng (2021). “Measuring information flow among international stock markets: An approach of entropy-based networks on multi time-scales”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 577, p. 126068. ISSN: 0378-4371.
- Kwon, O. e Yang, J.-S. (2008). “Information flow between stock indices”. *Europhysics Letters* 82.6, p. 68003.
- Lahmiri, Salim e Bekiros, Stelios (2020). “Renyi entropy and mutual information measurement of market expectations and investor fear during the COVID-19 pandemic”. *Chaos, Solitons and Fractals* 139, p. 110084. ISSN: 0960-0779.
- Li, Man et al. (2023). “Clustering-enhanced stock price prediction using deep learning”. *World Wide Web* 26.1, pp. 207–232.
- Liu, HaiYue et al. (2020). “The COVID-19 Outbreak and Affected Countries Stock Markets Response”. *International Journal of Environmental Research and Public Health* 17.8.
- Maiti, Moinak e Kayal, Parthajit (2023). “Asymmetric Information Flow between Exchange Rate, Oil, and Gold: New Evidence from Transfer Entropy Approach”. *Journal of Risk and Financial Management* 16.1. ISSN: 1911-8074.
- Mandelbrot, Benoit (1963). “New Methods in Statistical Economics”. *Journal of Political Economy* 71.5, pp. 421–440.

- Mandelbrot, Benoit B. (2003). “Chapter 1 - Heavy Tails in Finance for Independent or Multifractal Price Increments”. Em: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Ed. por Svetlozar T. Rachev. Vol. 1. Handbooks in Finance. Amsterdam: North-Holland, pp. 1–34.
- Matsushita, Raul et al. (2006). “Log-periodic crashes revisited”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 364, pp. 331–335.
- Matsushita, Raul et al. (2020). “Bypassing the truncation problem of truncated Lévy flights”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 559, p. 125035.
- Matsushita, Raul et al. (2023). “Retrodicting with the truncated Lévy flight”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 116, p. 106900. ISSN: 1007-5704.
- Matsushita, Raul et al. (2024). “Differential Entropy Estimation with a Paretian Kernel: Tail Heaviness and Smoothing”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 646, p. 129850.
- Mensi, Walid et al. (2021). “Asymmetric spillover and network connectedness between crude oil, gold, and Chinese sector stock markets”. *Energy Economics* 98, p. 105262. ISSN: 0140-9883.
- Mensi, Walid et al. (2024). “Quantile dependence and portfolio management between oil, gold, silver, and MENA stock markets”. *Research in International Business and Finance* 70, p. 102296. ISSN: 0275-5319.
- Nie, Chun-Xiao e Xiao, Jing (2022). “Dynamics of Information Flow between the Chinese A-Share Market and the U.S. Stock Market: From the 2008 Crisis to the COVID-19 Pandemic Period”. *Entropy* 24.8. ISSN: 1099-4300.
- Niu, Hongli e Hu, Ziang (2021). “Information transmission and entropy-based network between Chinese stock market and commodity futures market”. *Resources Policy* 74, p. 102294. ISSN: 0301-4207.
- Oh, Gabjin, Kim, Seunghwan e Eom, Cheoljun (2007). “Market efficiency in foreign exchange markets”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 382.1. Applications of Physics in Financial Analysis, pp. 209–212.

- Poon, Ser-Huang e Granger, Clive W. J. (2003). “Forecasting volatility in financial markets: A review”. *Journal of Economic Literature* 41.2, pp. 478–539.
- Salisu, Afees A., Sikiru, Abdulsalam Abidemi e Vo, Xuan Vinh (2020). “Pandemics and the emerging stock markets”. *Borsa Istanbul Review* 20. Financial markets under growing uncertainty: Information transmission and investment strategies, S40–S48. ISSN: 2214-8450.
- Santis, Giorgio De e Imrohoroglu, Selahattin (1997). “Stock returns and volatility in emerging financial markets”. *Journal of International Money and Finance* 16.4, pp. 561–579.
- Serletis, Apostolos e Rosenberg, Aryeh Adam (2009). “Mean reversion in the US stock market”. *Chaos, Solitons & Fractals* 40.4, pp. 2007–2015.
- Shannon, Claude E (1948). “A mathematical theory of communication”. *The Bell system technical journal* 27.3, pp. 379–423.
- Sheraz, Muhammad, Preda, Vasile e Dedu, Silvia (2020). “Non-extensive minimal entropy martingale measures and semi-Markov regime switching interest rate modeling”. *AIMS Mathematics* 5.1, pp. 300–310. ISSN: 2473-6988.
- Silverman, Bernard W (2018). *Density estimation for statistics and data analysis*. Routledge.
- Smerlak, Matteo (2016). “Thermodynamics of inequalities: From precariousness to economic stratification”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 441, pp. 40–50.
- Tarchella, Salma, Khalfaoui, Rabeh e Hammoudeh, Shawkat (2024). “The safe haven, hedging, and diversification properties of oil, gold, and cryptocurrency for the G7 equity markets: Evidence from the pre- and post-COVID-19 periods”. *Research in International Business and Finance* 67, p. 102125. ISSN: 0275-5319.
- Thuy, Van Le Thi, Oanh, Tran Thi Kim e and, Nguyen Thi Hong Ha (2024). “The roles of gold, US dollar, and bitcoin as safe-haven assets in times of crisis”. *Cogent Economics & Finance* 12.1, p. 2322876.
- Tran, Huang Van e Kukal, Jaromir (2022). “A novel heavy tail distribution of logarithmic returns of cryptocurrencies”. *Finance Research Letters* 47, p. 102574.

- Wang, Gang-Jin et al. (2017). “Stock market contagion during the global financial crisis: A multiscale approach”. *Finance Research Letters* 22, pp. 163–168. ISSN: 1544-6123.
- Wen, Fenghua, Tong, Xi e Ren, Xiaohang (2022). “Gold or Bitcoin, which is the safe haven during the COVID-19 pandemic?” *International Review of Financial Analysis* 81, p. 102121. ISSN: 1057-5219.
- Xian, Lu, He, Kaijian e Lai, Kin Keung (2016). “Gold price analysis based on ensemble empirical model decomposition and independent component analysis”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 454, pp. 11–23.
- Xu, Meng, Shang, Pengjian e Zhang, Sheng (2019). “Multiscale analysis of financial time series by Rényi distribution entropy”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 536, p. 120916.
- Zakamulin, Valeriy (2023). “Revisiting the Duration Dependence in the US Stock Market Cycles”. *Applied Economics* 55.4, pp. 357–368.
- Zhang, Yali et al. (2020). “Cumulative Tsallis entropy based on multi-scale permuted distribution of financial time series”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 548, p. 124388.