

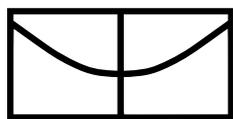


Universidade de Brasília
Instituto de Física

**Representação Simplética da Teoria de
Ginzburg-Landau**

Eduardo Alves Reis

Brasília, agosto de 2024.



UnB

Universidade de Brasília
Instituto de Física

Representação Simplética da Teoria de
Ginzburg-Landau

Eduardo Alves Reis

Orientador: Prof. Dr. Ademir Eugênio Santana

Coorientador: Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de Brasília para obtenção do
título de doutor em Física.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família querida que me forneceu a base necessária para aqui chegar, em especial minha avó Eduardina, que esteve comigo desde o primeiro dia no curso de Física, e minha mãe Margareth, por suas orações e dedicação. À minha Rai, segunda no comando, por sempre ter me incentivado durante toda minha trajetória acadêmica. Agradeço à minha esposa e companheira de existência, Tamila, pelo amor e paciência ao longo do caminho. Ao meu pai Armando, e aos meus irmãos Patrícia e Felipe, e ainda à minha irmãzinha mais nova Tabla, por estarem sempre ao meu lado. Agradeço ao professor Ademir, meu orientador, pelo direcionamento preciso, e grande exemplo, que juntamente com o professor Ronni me ajudaram em cada passo do trabalho. Agradeço ao colega Gustavo pela amizade e grande apoio. Tenho um sincero agradecimento ao meu amigo gaúcho, Cláudio, por cada conselho pertinente. Não posso deixar de agradecer ao professor Belich pela cooperação e os conselhos profícuos. Agradeço a todos integrantes do grupo Produto-estrela, em especial, ao Renato, Rendizley, Roemir, Luquinhas, e ao professor Sérgio. Devo ainda agradecer ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade de Brasília, que sempre foram solícitos às minhas demandas. É preciso, sem dúvida, agradecer a Universidade Federal do Oeste da Bahia, ao Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, no qual sou lotado, por ter me proporcionado o período de afastamento necessário para melhor desenvolver meu trabalho. Tenho um agradecimento singular, mas cheio de carinho, ao amigo Glauton por me trazer equilíbrio emocional nesses últimos passos da tese. Lembro-me ainda dos conselhos valiosos e incentivo à carreira acadêmica, ao longo da graduação, da professora Suani, a qual agradeço de coração. Há ainda um agradecimento mais que especial, se posso assim dizer, aos irmãos de luz cooperadores, que me acompanham, dos quais sempre recebo grandes inspirações.

”Esta tese dedico à minha avó Eduardina,
pelo amor e incentivo diário.”

Resumo

Neste trabalho, a teoria de Ginzburg-Landau é representada em uma variedade simplética com conteúdo de espaço de fase. O parâmetro de ordem é definido por uma quase amplitude de probabilidade, que dá origem a uma função de quase distribuição de probabilidade, ou seja, uma função do tipo Wigner. O ponto de partida é a representação do grupo térmico das simetrias Euclidianas e da simetria de calibre. Resultados básicos bem conhecidos sobre o comportamento de um supercondutor são deduzidos novamente, demonstrando a consistência da representação construída. A densidade crítica de corrente supercondutora é determinada e seu comportamento usual é inferido. As regiões negativas da função de quase distribuição de probabilidade, indicadoras da não-classicalidade do sistema físico, estão ligadas aos valores limites do momento associado ao campo e presentes na região mais próxima da borda do material supercondutor.

Palavras-chave: Grupo Euclidiano Térmico; Ginzburg-Landau; Espaço de fase.

Abstract

In this work, the Ginzburg-Landau theory is represented on a symplectic manifold with phase space content. The order parameter is defined by a quasi-probability amplitude, which gives rise to a quasi-probability distribution function, i.e., a Wigner-type function. The starting point is the thermal group representation of Euclidean symmetries and gauge symmetry. Well-known basic results on the behavior of a superconductor are derived again, providing consistency of representation. The critical superconducting current density is determined and its usual behavior is inferred. The negative regions of the quasi-probability distribution function, an indicator of the non-classicality of the physical system, are linked to the limiting values of the moment associated with the field and present in the region closest to the edge of the superconducting material.

Keywords: Thermo-Euclidian group; Ginzburg-Landau; Phase space.

Sumário

Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
2 Fenomenologia de Ginzburg-Landau	4
2.1 Supercondutividade	4
2.2 Transição de fases contínua	6
2.3 Teoria Fenomenológica de Ginzburg-Landau	10
2.3.1 Energia livre e equações de Ginzburg-Landau	10
2.3.2 Comprimento de coerência $\xi(T)$	12
2.3.3 Efeito Meissner-Ochsenfeld	12
2.3.4 Densidade de corrente crítica j_c	13
2.4 Quebra espontânea de simetria	16
3 Função de Wigner e o produto-estrela	18
3.1 Prescrição de Weyl	18
3.2 Função de Wigner	20
3.3 Produto-estrela	23
3.4 Representação simplética galileana	25
4 Representação Simplética Euclidiana	29
4.1 Álgebra Térmica: definição e notação	29
4.2 Álgebra de Lie Térmica Euclidiana	31
4.3 Estrutura Simplética	34
4.4 Equação Simplética	36
5 Calibre Abelian	39
5.1 Invariância da equação diferencial	39

5.2	Invariância da Densidade Lagrangiana	44
5.3	Equações Simpléticas de Ginzburg-Landau	49
6	Fenomenologia de Ginzburg-Landau Simplética	55
6.1	Densidade de Corrente Crítica	56
6.2	Solução particular da primeira equação simplética de Ginzburg-Landau . .	58
6.3	Efeito Meissner-Ochsenfeld	60
6.4	Função de quase distribuição de probabilidade e o fator de negatividade . .	62
7	Conclusões	68
	Referências Bibliográficas	70

Lista de Figuras

2.1	Isotermas de um fluido simples na vizinhança de um ponto crítico.	7
2.2	Dependência do parâmetro de ordem com a temperatura	8
2.3	A energia livre em função do parâmetro de ordem.	9
2.4	Variação espacial do parâmetro de ordem nas a partir da fronteira do material. 13	
2.5	Variação espacial do campo magnético externo incidente a partir da fronteira do material.	14
2.6	Densidade de corrente supercondutora em função da velocidade dos portadores de carga.	15
6.1	Densidade de corrente simplética, $J(v_\phi)$ (linha sólida), e densidade usual de portadores de carga supercondutora, $ \phi ^2$ (linha tracejada), em função da velocidade do fluxo de campo v_ϕ	57
6.2	O potencial vetor magnético $A(q)$ (linha tracejada) e o campo magnético $B(q)$ (linha sólida) em função da posição à medida que adentra o material supercondutor a partir da borda.	62
6.3	Comportamento funcional de $f_1(q)$ para diferentes valores de p . A linha pontilhada: $ \varphi(q) ^2$, corresponde ao resultado usual para a densidade de Ginzburg-Landau. Linha sólida: $f_1(q, p = 0)$. Linha tracejada: $f_1(q, p = p_c)$. 65	
6.4	$f_1(q)$ para $p = 0, 1$ com $N_{eg} = -0, 20$	66

Capítulo 1

Introdução

É com o trabalho experimental de Onnes ^[1], em 1911, que se descobre um dos fenômenos mais intrigantes da natureza, a supercondutividade. Após algumas tentativas de explicar o estado supercondutor falharem, pois os modelos clássicos da época não eram suficientes para tratar esse problema, modelos fenomenológicos se mostraram uma boa alternativa. Assim, em 1935, os irmãos London ^[2], baseados nos trabalhos de Meissner e Ochsenfeld ^[3], e usando de uma fenomenologia centrada em elementos totalmente clássicos, chegam no comprimento de penetração, um importante parâmetro experimental. Contudo, somente, em 1950, Vitaly Ginzburg e Lev Landau ^[4], a partir do modelo de Landau das transições de fase, propuseram um formalismo fenomenológico, considerando características da flutuação associada ao parâmetro de ordem do estado supercondutor. A fenomenologia construída por Ginzburg e Landau descreve o chamado efeito Meissner da expulsão do campo magnético, associado ao comprimento de penetração, e ainda estabelece um novo comprimento característico relacionado à densidade de portadores de carga.

Devido o sucesso alcançado pela teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau, outros estudos foram realizados ao longo das décadas seguintes para aprimorar e esclarecer conceitos gerais sobre os sistemas supercondutores. Esses estudos consideram, em particular, a natureza não linear da energia livre de Ginzburg-Landau ^[5]. Então é interessante examinar a consistência dos fenômenos críticos a partir do ponto de partida do espaço de fase com a perspectiva de explorar elementos de não-classicalidade e caoticidade ^[6]. Neste contexto, é notável a análise baseada em variedades topológicas simpléticas, dando origem, por exemplo, aos mapas de Poincaré ^[7]. No entanto, esse tipo de estudo ora apenas se inicia.

É importante enfatizar nesse ponto que as flutuações no modelo Ginzburg-Landau são introduzidas paralelamente ao caso quântico-mecânico. Esse aspecto aponta para a possibi-

lidade de representar o parâmetro de ordem em associação com uma quase distribuição de probabilidade; isto é, uma função do tipo Wigner. Explorando assim a importância singular da função Wigner para a análise da caoticidade, dissipação e não-classicalidade [8, 9, 10, 11]. Possibilitando, portanto, uma visão ampliada sobre o comportamento do parâmetro de ordem na região crítica supercondutora.

Esse é o objetivo central que buscamos no presente trabalho. Iniciamos formulando o problema em um espaço de Hilbert simplético e usando representações de grupos de simetria. Dito isso, uma vez que o parâmetro de ordem Ginzburg-Landau é um campo e a densidade de energia livre (equivalente a uma densidade Lagrangiana na teoria de campos) é invariante pelas transformações do grupo Euclidiano, é possível derivar representações simpléticas no contexto desta teoria.

Em relação ao uso de estruturas simpléticas para estudar teorias de campos não relativísticas e relativísticas diversas abordagens têm sido propostas [12, 13, 14, 15, 16, 17] em particular a partir de grupos de simetria [18, 19, 20, 21, 22]. O ponto de partida é a álgebra de Lie, que leva a equações de movimento que descrevem sistemas físicos no espaço de fase. Nesse caso, um elemento central é a função de Wigner, $f_W(q, p)$, onde q e p representam um ponto de posição e o momento canônico, respectivamente, ambos definidos no espaço métrico Euclidiano [23].

A função Wigner foi proposta como uma tentativa de melhorar as correções quânticas da teoria cinética clássica [23]. Embora $f_W(q, p)$ não seja uma distribuição de probabilidade, as médias observáveis na mecânica quântica são realizadas de maneira semelhante às usadas na física clássica [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. No formalismo de Wigner, cada operador A , definido no espaço (Euclidiano) de Hilbert, \mathcal{H}_E , está associado a uma função $A_W(q, p)$ no espaço de fase. Isso é alcançado usando um mapeamento linear $\Omega_W : A \rightarrow A_W(q, p)$, tal que a álgebra associativa e a estrutura não comutativa dos operadores em \mathcal{H}_E são preservados no espaço de fase. A consistência é devida ao produto de Weyl (ou estrela) de funções [31]. Porém, como a função de Wigner é Real, a análise das simetrias de calibre fica comprometida. Isso é um impedimento para a introdução da noção de interação no formalismo de Wigner. Para as simetrias de calibre não-Abelianas, como as interações fortes e fracas, a situação é ainda mais complicada. A solução para esse problema foi abordada através da introdução de uma função de onda, que é chamada de quase amplitude de probabilidade, $\phi(q, p)$, a partir de representações simpléticas de grupos de simetria. No caso do grupo de Galilei, isso levou à mecânica quântica simplética [32, 33].

Nesse contexto não relativístico, $\phi(q, p)$ é uma solução da equação de Schrödinger re-

presentada no espaço de fase. A associação com a função de Wigner é dada por $f_W(q, p) = \phi(q, p) \star \phi(q, p)^\dagger$, onde \star é o produto de Weyl. Como uma teoria de representação, a mecânica quântica simplética foi generalizada para analisar simetrias de calibre, e para simetrias relativísticas, levando às equações de Klein-Gordon e Dirac no espaço de fase ^[18].

Explorando esta teoria simplética, no presente trabalho, a energia livre de Ginzburg-Landau é representada em uma variedade simplética com o conteúdo do espaço de fase. Isso é logrado usando o conceito de grupo térmico, a estrutura do grupo de Lie associada à dinâmica do campo térmico e c^* -álgebras ^[33, 34]. Em seguida, é estudada uma representação simplética unitária do grupo Euclidiano. O parâmetro de ordem é descrito pela função de onda complexa $\phi(q, p)$. Para simetrias de calibre abelianas, são abordadas a auto-interação e a interação do parâmetro de ordem com um campo externo. Considerando um supercondutor, resultados bem conhecidos são deduzidos para mostrar a consistência do formalismo. Além disso, a estrutura do espaço de fase fornece outros elementos (não presentes no formalismo usual), como a natureza não clássica do parâmetro de ordem próximo à temperatura crítica.

A apresentação da tese está organizada da seguinte maneira. Um breve resumo da teoria de Ginzburg-Landau é apresentado no capítulo 2. No capítulo 3, fazemos uma revisão do formalismo de Wigner com a discussão das principais propriedades do produto-estrela. Os primeiros resultados são apresentados no capítulo 4, com a construção da representação simplética euclidiana no contexto das álgebras térmicas. No capítulo 5, obtemos a densidade Lagrangiana simplética de Ginzburg-Landau e as equações simpléticas. A análise das equações simpléticas é feita no capítulo 6, com a obtenção de uma solução particular para a primeira equação simplética. Ainda nesse capítulo, exploraremos a quase distribuição de probabilidade e o fator de negatividade associado à mesma. Terminaremos o texto discutindo e resumindo os principais resultados no capítulo de conclusão 7.

Capítulo 2

Fenomenologia de Ginzburg-Landau

Como preparativo, um pequeno resumo da teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau será apresentado; iniciando com os aspectos históricos relacionados à descoberta experimental da supercondutividade e os modelos fenomenológicos implementados, terminando com a criação da teoria microscópica. Nesse sentido, abordaremos os pontos mais destacados da teoria de Landau das transições de fase de segunda ordem, elencando o caso supercondutor. Discutiremos a teoria de Ginzburg-Landau propriamente dita, apresentando a energia livre, as equações diferenciais, os comprimentos característicos, e a densidade de corrente crítica. Por fim, relembremos alguns aspetos da teoria no contexto da quebra espontânea de simetria.

2.1 Supercondutividade

Em Leiden, cidade da Holanda, o grupo de pesquisa do professor Heike Kamerlingh-Onnes ^[35] tinha o aparato experimental sofisticado o suficiente para alcançar baixas temperaturas. Então dispoñdo do ambiente favorável para testar suas hipóteses, prosseguiu na investigação do comportamento da resistência elétrica no contexto de baixas temperaturas. O trabalho de fazer as medições coube ao seu estudante Gilles Holst, que aferindo a resistividade elétrica do mercúrio a cada vez mais baixas temperaturas, percebeu um completo desaparecimento da mesma a abaixo de $4,2\text{ K}$. Esse resultado foi então comunicado em 28 de abril de 1911 à Academia Real dos Países Baixos ^[1].

O novo estado da matéria que se revelou, possibilitaria a manutenção de uma corrente elétrica sem o advento de qualquer gerador de tensão, uma vez iniciada poderia se manter indefinidamente. Esse é, sem dúvida, um resultado que chamou a atenção da comunidade científica da época. O primeiro parâmetro que ficaria evidente, e que portanto caracterizaria

o material, seria a chamada temperatura crítica T_c , demarcadora da fronteira entre os dois estados, normal e supercondutor, como então foi designada.

Um segundo aspecto do comportamento supercondutor é sua resposta a um campo magnético externo. Em 1933, na cidade de Berlin, Alemanha, Walther Meissner e Robert Ochsenfeld, mostraram que o estado supercondutor repele um campo magnético externo, se comportando como um perfeito diamagneto [3], em analogia ao ferromagnetismo. A fase supercondutora no entanto, se estabelecia em uma faixa razoavelmente limitada de temperatura e campo magnético. Em 1957, A. Abrikosov mostra que o estado supercondutor não se mantém em duas circunstâncias distintas, indicando a classificação em supercondutores do tipo I e supercondutores do tipo II [36].

Supercondutores do tipo I, por exemplo, perdem o estado supercondutor de maneira abrupta após ultrapassar um determinado valor crítico H_c do campo magnético. O que se tem percebido, é que somente materiais puros apresentam esse comportamento, salvo poucas exceções, como o Nióbio (Nb) por exemplo. Para o tipo II contudo, há um gradual enfraquecimento da resposta magnética a partir de um valor crítico H_{c1} , até um valor superior H_{c2} , que pode ser algumas dezenas de teslas. Esse tipo de comportamento é encontrado geralmente em ligas e compostos cerâmicos.

Sendo assim, os esforços para tentar explicar o estado supercondutor tendiam a analisá-lo como uma condutividade perfeita, usando sempre modelos clássicos disponíveis à época. À medida que mais experimentos se acumularam, foi possível elaborar, se não um modelo microscópico a primeiros princípios, modelos fenomenológicos que demonstraram bons resultados no que se propunham. Baseando-se nos trabalhos de Meissner e Ochsenfeld, Fritz London e seu irmão Heinz, reconheceram que a propriedade fundamental do estado supercondutor não era a condutividade perfeita, e sim o diamagnetismo perfeito. Os resultados obtidos foram publicados em 1935 [2], demonstrando o efeito Meissner, da expulsão do campo magnético, e não somente isso, o campo magnético não desapareceria de imediato na borda do supercondutor, haveria, no entanto, certa profundidade de penetração do campo magnético, representada e caracterizada pelo comprimento λ_L de penetração magnética.

Foi em 1950 que Vitaly Ginzburg e Lev Landau [4], usando do modelo de Landau das transições de fase [37], propuseram um conjunto de equações para descrever o comportamento do parâmetro de ordem na fase supercondutora. As equações explicam tanto o chamado efeito Meissner, quanto o comprimento de penetração apresentado pelos irmãos London, mas também indicam a existência de um segundo comprimento característico do

estado supercondutor, o comprimento de coerência ξ . Esse comprimento pode ser interpretado como a distância mínima necessária para que haja portadores de carga supercondutores.

Vê-se, portanto, que os resultados fundamentais a respeito do papel dos fônons (vibrações da rede cristalina) e o aparecimento dos pares de Cooper [38], permitiram que o fenômeno supercondutor passasse a ser descrito no ambiente microscópico. Os fônons seriam, dessa forma, a ponte para a interação atrativa entre dois elétrons disponíveis na rede. Eles formariam pares ligados, cuja energia é menor que a soma da energia cinética das partículas individuais, os chamados pares de Cooper. A partir desses resultados, John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer desenvolvem a teoria designada pela sigla dos seus respectivos sobrenomes BCS [39], em 1957, pela qual receberiam o prêmio nobel no ano de 1972. Com o advento da teoria microscópica, não sendo necessário o uso demorado de parâmetros, foi possível explicar a maioria dos resultados experimentais até então evidenciados.

2.2 Transição de fases contínua

Os fenômenos de transição de fase são bem comuns e razoavelmente bem entendidos [40]. O comportamento geral é uma fenomenologia conhecida, no qual se encaixa uma grande variedade de sistemas. É possível observar em um diagrama de fases de um fluido simples, em termos dos campos termodinâmicos de pressão e temperatura, o comportamento usual da matéria em uma mudança de fases. Um exemplo é a mudança abrupta da natureza do sistema na passagem da água para o vapor. Esse tipo de transição de fases é mais especificamente identificada com a igualdade das energias livres e descontinuidades de suas primeiras derivadas.

No caso da passagem da água para o vapor, a descontinuidade da entropia implicará a existência do calor latente de vaporização, e identifica-se esse tipo de transição de fases como sendo de primeira ordem, na nomenclatura atribuída a Ehrenfest, onde as transições de fase seriam classificadas como sendo de ordem n , caso a n -ésima derivada da energia livre apresentasse uma descontinuidade. Dessa forma, transições descontínuas seriam classificadas como sendo de primeira ordem, e as transições contínuas de segunda ordem. No entanto, é preciso ressaltar que o observado, na verdade, é uma divergência nas derivadas segundas (como calor específico e compressibilidade), apresentando um comportamento singular ou anômalo.

Para um melhor entendimento do fenômeno de transição de fases contínua, observemos o diagrama pressão (P) x volume (V), exposto na Figura 2.1. Esse comportamento, revela

o que seria o expoente crítico que caracteriza o comportamento assintótico, do que será chamado parâmetro de ordem ϕ . À medida que temperatura aumenta a diferença entre os

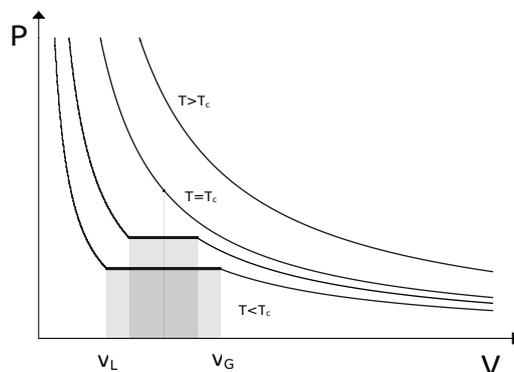


Figura 2.1: *Isotermas de um fluido simples na vizinhança de um ponto crítico.*

volumes específicos, v_G da fase gasosa, e v_L da fase líquida, $\phi = v_G - v_L$ diminui, terminando por se anular no ponto crítico. Dessa forma, o que se observa é uma relação funcional do tipo

$$\phi \sim B \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta,$$

com o expoente β assumindo valores próximos de $1/3$, para quaisquer fluidos ou grandezas equivalentes em outros tipos de sistemas. O comportamento geral do parâmetro de ordem em relação à temperatura pode ser observado no gráfico mostrado na Figura 2.2.

O estudo das transições de fases contínuas ganha robustez com o advento da teoria de Landau. A proposta de Landau [37, 11] foi apresentada pela primeira vez em 1937. Sua ideia consistia em expandir a energia livre generalizada $G(P, T, \phi)$, em função do parâmetro de ordem ϕ , próximo ao ponto de transição, com $T \sim T_c$, ou seja

$$G(T, \phi) = G_0(T) + a(T)\phi^2 + b(T)\phi^4.$$

Devido à arbitrariedade na definição do parâmetro de ordem, pode-se sempre fazer uma translação, ou usando de argumentos de simetria, eliminar o termo cúbico. Derivando

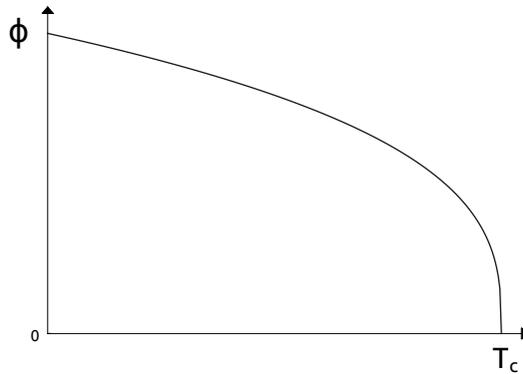


Figura 2.2: Dependência do parâmetro de ordem com a temperatura .

$G(T, \phi)$ em relação ϕ e igualando a zero, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \phi} &= 0 \\ 2a(T)\phi + 4b(T)\phi^3 &= 0 \end{aligned}$$

a qual nos fornece duas soluções para ϕ ,

$$\phi = 0, \text{ e } \phi^2 = -\frac{a(T)}{2b(T)}.$$

Para que a energia livre $G(T, \phi)$ tenha um mínimo como se espera, $b(T) > 0$; contudo, se $a(T) > 0$, o mínimo da energia livre se configura em $\phi = 0$, sendo identificada como a fase desordenada. Considerando ainda a energia livre $G(T, \phi)$ contínua no ponto crítico, devemos ter $a(T_c) = 0$, exatamente no ponto crítico, de forma que podemos escrever $a(T)$ nas proximidades do ponto crítico como $\alpha(T - T_c)$, onde $\alpha > 0$. Dessa forma, é possível fazer a leitura correta da fenomenologia, pois nesse caso temos a mudança de sinal do termo quadrado da expansão, indicando um novo mínimo para a fase ordenada. Observa-se ainda, que nas proximidades do ponto crítico, $b(T)$ deve se comportar como uma constante positiva, não modificando seu sinal e assim preservando a construção do novo mínimo da

energia. A energia livre pode agora ser escrita, como

$$G(T, \phi) = G_0(T) + \alpha(T - T_c)\phi^2 + b\phi^4. \quad (2.1)$$

Seu comportamento, ver Figura 2.3, mostra claramente o novo mínimo da energia livre encontrado na fase ordenada, para $T < T_c$.

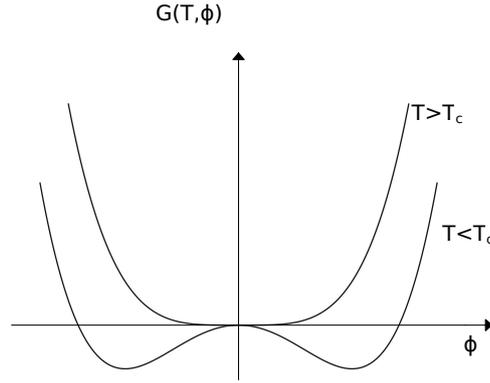


Figura 2.3: A energia livre em função do parâmetro de ordem.

É possível ainda considerar o cenário no qual o parâmetro de ordem possa sofrer flutuações no espaço Euclidiano, \mathbf{x} ; para um dado campo $\phi = \phi(\mathbf{x})$. Dessa forma, a energia livre, Eq. (2.1), é generalizada para incluir termos que contenham derivadas do campo $\nabla\phi(\mathbf{x})$, sendo a derivada primeira a forma mais simples. Lembrando que o termo das derivadas deve ser ao quadrado, pois a energia livre é um escalar. Dadas as modificações sugeridas, a energia livre, fica

$$G[T, \phi(\mathbf{x})] = G_0(T) + \alpha(T - T_c)\phi(\mathbf{x})^2 + b\phi(\mathbf{x})^4 + e(T)[\nabla\phi(\mathbf{x})]^2.$$

Essa perspectiva foi proposta por Ginzburg-Landau ^[4]. A derivada é uma forma de estimar localmente a mudança de ponto-a-ponto. A aplicação do princípio de extremo nos levará à chamada primeira equação de Ginzburg-Landau, que pode ser escrita de maneira geral, como segue

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) - a'(T)\phi(\mathbf{x}) + b'|\phi(\mathbf{x})|^2\phi(\mathbf{x}) = 0.$$

Esta equação é uma equação de campo, e fornecerá informações cruciais a respeito do estado supercondutor. A seguir discutiremos em maiores detalhes a teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau usual, apresentando seus principais resultados.

2.3 Teoria Fenomenológica de Ginzburg-Landau

A teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau considera uma pseudo função de onda $\psi(\mathbf{r})$ como um parâmetro de ordem complexo [5]. A densidade local de portadores das cargas supercondutoras é representada pelo quadrado $|\psi(\mathbf{r})|^2$. A partir da expansão em série de potências para $|\psi|^2$ e $|\nabla\psi|^2$ da densidade de energia livre, encontra-se, pelo princípio de extremos, as equações diferenciais para a função $\psi(\mathbf{r})$ e o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Mesmo com alguns questionamentos por se tratar de uma teoria fenomenológica, seu papel no contexto geral da supercondutividade foi devidamente estabelecido com os trabalhos de Gor'kov em 1959 [41], mostrando que se tratava de um caso limite da teoria microscópica BCS, ou seja, na temperatura crítica torna-se exata. Nesse contexto, a teoria de Ginzburg-Landau permanece restrita às temperaturas próximas da temperatura crítica, sem grandes variações espaciais dos campos $\psi(\mathbf{r})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. A teoria se revela de grande valia no tratamento macroscópico dos supercondutores, para o qual a energia livre tem um papel de destaque no contexto geral do fenômeno, fornecendo uma descrição qualitativa das respectivas variáveis quânticas envolvidas.

2.3.1 Energia livre e equações de Ginzburg-Landau

Com isso, as características e propriedades da fenomenologia do estado supercondutor podem ser estabelecidas através da energia livre [42], que considera ψ pequeno e variando de maneira lenta no espaço,

$$F = F_0 + \int \mathcal{F}(\mathbf{r}) d^3r$$

onde $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ é a densidade de energia livre. Substituindo a expansão característica, temos

$$F = F_0 + \int \left[\alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] d^3r.$$

Para modelar o aumento da energia associado ao parâmetro de ordem é necessário adicionar o termo com o gradiente, a saber

$$F = F_0 + \int \left[\alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 \right] d^3r,$$

com m^* , considerado inicialmente apenas um parâmetro. O termo acrescentado, é certamente, um termo cinético nos moldes do problema quanto-mecânico. Sendo assim, Ginzburg-Landau entenderam que a prescrição Hamiltoniana poderia ser usada,

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A}$$

e, em termos dos operadores quanto-mecânicos, temos

$$\nabla \rightarrow \nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A},$$

onde $e^* = 2e$ posteriormente será entendido como a carga dos portadores. Incluídas estas modificações, reescrevemos a energia livre, como

$$F = F_0 + \int \left\{ \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left[\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) \right|^2 \right\} d^3r.$$

Ainda é preciso acrescentar a contribuição do possível campo magnético externo,

$$F = F_0 + \int \left\{ \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left[\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right\} d^3r.$$

E usando do método variacional, minimiza-se a energia livre com relação à função $\psi^*(\mathbf{r})$, obtendo

$$\begin{aligned} \delta F &= \int d^3r \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + \alpha \psi(\mathbf{r}) + \beta |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) \right] \delta \psi^*(\mathbf{r}) \\ &+ \int d^2\mathbf{r} \cdot \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) \delta \psi^*(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

e a condição de extremo permiti-nos chegar à primeira equação de Ginzburg-Landau,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \psi(\mathbf{r}) + \alpha \psi(\mathbf{r}) + \beta |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.2)$$

Isso posto, o termo de superfície da segunda integração que poderá ser usado para estabelecer as condições de contorno. A variação da energia livre, agora em relação ao campo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, aponta-nos a lei de Ampère ($\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$), desde que identifiquemos a densidade

de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, como

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{ie^*\hbar}{2m^*} [\psi^*(\nabla\psi) - \psi(\nabla\psi^*)] - \frac{e^{*2}}{m^*c} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Esta, por sua vez, é chamada de segunda equação de Ginzburg-Landau.

2.3.2 Comprimento de coerência $\xi(T)$

Voltando nossa atenção à primeira equação de Ginzburg-Landau, Eq. (2.2), trataremos do caso unidimensional na ausência do campo magnético ($A = 0$). Assumimos que o material supercondutor se encontre em $x > 0$. Sob estas prerrogativas, a equação diferencial toma a seguinte forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0.$$

Sabendo que no estado supercondutor α é negativo, e portanto, conveniente substituí-lo por $-|\alpha|$, após algumas manipulações chega-se à seguinte solução

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right), \quad (2.4)$$

onde ξ é o chamado comprimento de coerência, definido por

$$\xi^2 \equiv \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}. \quad (2.5)$$

O resultado da Eq. (2.4) demonstra o comportamento dos portadores de carga a partir da fronteira, ou interface, entre o material supercondutor e o não supercondutor, representada por $x = 0$. Na Figura 2.4 mostramos seu comportamento funcional. A densidade de "super"elétrons aumenta ao longo do comprimento de coerência até atingir o valor máximo, e assim o estado supercondutor se configura.

2.3.3 Efeito Meissner-Ochsenfeld

Desconsiderando as variações do parâmetro de ordem supercondutor na segunda equação de Ginzburg-Landau, Eq. (2.3), chegamos à equação de London ^[2], a saber

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^{*2}}{m^*c} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

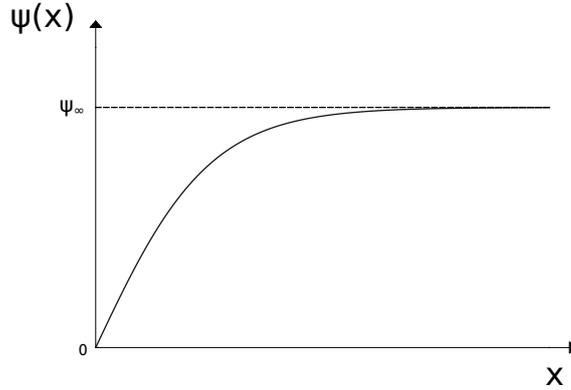


Figura 2.4: *Varição espacial do parâmetro de ordem nas a partir da fronteira do material.*

Tomando o rotacional dos dois lados, e usando a lei Ampère, temos

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0,$$

onde foi definido o parâmetro

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m^* c^2}{4\pi e^{*2} |\psi(\mathbf{r})|^2}}. \quad (2.6)$$

Considerando apenas o caso unidimensional, onde a interface do material supercondutor é $x = 0$, chega-se na solução

$$B(x) = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right),$$

mostrando que o campo magnético externo B_0 é atenuado no interior do material, como pode ser observado na Figura 2.5. O comprimento característico é o parâmetro λ_L , chamado comprimento de penetração magnética, previsto na teoria dos irmãos London [2]. Dessa forma, as linhas de campo magnético são expulsas do material supercondutor, estabelecendo o que se conhece como efeito Meissner-Ochsenfeld [3].

2.3.4 Densidade de corrente crítica j_c

Consideraremos ainda o caso de um filme fino [5], cujo espessura é muito menor do que o comprimento de coerência. Nesse caso, considera-se que o termo da energia livre proporcional à $\nabla|\psi|^2$ não tem contribuição substancial, pois $\psi(\mathbf{r})$ pode ser tomado por

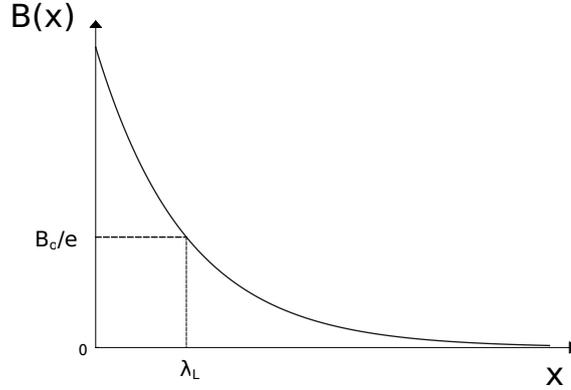


Figura 2.5: *Variação espacial do campo magnético externo incidente a partir da fronteira do material.*

$|\psi|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$, onde $|\psi|$ é considerado constante. Baseado nesses pressupostos, a expressão da densidade de corrente pode ser aproximada, para

$$\mathbf{j} = \frac{e^*}{m^*} |\psi|^2 \left(\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right),$$

ou, substituindo a expressão da velocidade generalizada de uma partícula sob ação do campo eletromagnético,

$$\mathbf{j} = e^* |\psi|^2 \mathbf{v},$$

onde $m^* \mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A}$. A densidade de energia livre, para tanto, deverá ser escrita, como

$$f = f_0 + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2} |\psi|^2 m^* v^2,$$

onde consideramos que o termo referente ao campo externo é muito menor que o termo da energia cinética. Minimizando a densidade de energia livre em relação $|\psi|^2$, encontramos

$$-\alpha - \beta |\psi|^2 + \frac{1}{2} m^* v^2 = 0,$$

para qual já nos encontramos no estado supercondutor, pois $\alpha(T) = -|\alpha(T)|$. E, então,

$$|\psi|^2 = \psi_\infty^2 \left(1 - \frac{m^* v^2}{2|\alpha|} \right),$$

com $\psi_\infty^2 = \frac{\alpha}{\beta}$. Substituindo esse último resultado na expressão da densidade de corrente, temos

$$\mathbf{j} = e^* \psi_\infty^2 \left(1 - \frac{m^* v^2}{2|\alpha|} \right) \mathbf{v}.$$

A densidade de corrente supercondutora possui um valor máximo quando a energia cinética

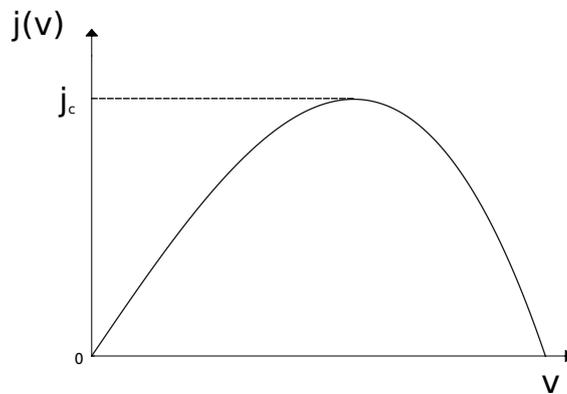


Figura 2.6: Densidade de corrente supercondutora em função da velocidade dos portadores de carga.

dos portadores de carga é igual a $\frac{|\alpha|}{3}$, apontando para $\frac{|\psi|^2}{\psi_\infty^2} = \frac{2}{3}$, como pode ser observado na Figura 2.6. Esta expressão da densidade de corrente também é capaz de fornecer a dependência da densidade de corrente de pico, ou crítica, com a temperatura, nas proximidades da temperatura crítica, a saber

$$j_c = \frac{4\sqrt{6}}{9\beta\sqrt{m^*}} e^* |\alpha(T)|^{\frac{3}{2}}.$$

Esta dependência com a temperatura, nas proximidades da temperatura crítica, tem sido fruto de estudos experimentais recentes em micro-pontes supercondutoras [43, 44]. Os dados demonstram, que para micro-pontes estreitas, a relação funcional com a temperatura da corrente crítica realmente se dá de acordo com o previsto na teoria de Ginzburg-Landau.

Contudo, para micro-pontes mais largas essa dependência se modifica, não mais se comportando como prevê a teoria fenomenológica. Podemos ainda determinar o *momentum* característico crítico, a saber

$$p_c = \frac{\hbar}{\xi(T)\sqrt{3}}.$$

A densidade de corrente pico, ou também chamada de densidade de corrente de desemparelhamento dos pares, acontece no cenário que a densidade dos portadores de carga torna-se muito baixa para manter o estado supercondutor ^[45]. Simplesmente não existem portadoras suficientes para manter uma corrente mais elevada.

A seguir, abordaremos a fenomenologia de Ginzburg-Landau na perspectiva da quebra espontânea de simetria abeliana.

2.4 Quebra espontânea de simetria

Nesta seção, consideraremos o estado supercondutor no contexto da quebra espontânea de simetria do campo, como um exemplo do modelo de Higgs ^[46] na simetria abeliana. Partindo da densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -(\nabla - ie\mathbf{A})\phi \cdot (\nabla + ie\mathbf{A})\phi^* - m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 - \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 \quad (2.7)$$

onde $-\mathcal{L}$ representa a energia livre de Ginzburg-Landau, com $m^2 = a(T - T_c)$ nas proximidades da temperatura crítica T_c . O campo ϕ representa, dessa forma, a configuração macroscópica dos portadores de carga, segundo indica a teoria BCS. Por esse cenário, considerando a teoria quântica de campos, os quanta do campo seriam assim, os já citados, pares de Cooper, "partículas" constituintes do condensado que se forma para baixas temperaturas. Em conformidade ao que temos descrito, para $T < T_c$, $m^2 < 0$, a energia livre deve então ter um mínimo em,

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda},$$

caracterizando o procedimento usual da quebra espontânea de simetria. A densidade Lagrangiana, Eq. (2.7), é invariante por transformações de calibre locais, do tipo $\phi \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\phi$, exigindo que o campo de calibre \mathbf{A} se transforme, como

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \frac{1}{e}\nabla\Lambda(x).$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre \mathbf{A} nos permite escrever a seguinte expressão para a densidade de corrente,

$$\mathbf{j} = -i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) - 2e|\phi|^2 \mathbf{A},$$

a qual possui divergência nula, e, sendo assim, é conservada. Ao considerarmos a fraca variação do campo ϕ , o segundo termo domina a expressão, nos possibilitando chegar na equação dos irmãos London ^[2], e em seguida derivar o comportamento já discutido do efeito Meissner-Ochsenfeld ^[3]. Podemos ainda acrescentar que, nesse contexto, utilizando-se das equações de Maxwell, o campo de calibre é dado pela equação explicitamente invariante por Lorentz, a saber

$$\square A_\mu = -k^2 A_\mu,$$

indicando que, os ditos aqui "fótons", adquiriram massa; comportamento característico do mecanismo de Higgs. Esta, é conhecida como equação de Proca ^[46].

Capítulo 3

Função de Wigner e o produto-estrela

Eugene Paul Wigner, em 1932, buscando implementar correções quânticas na mecânica estatística sugere uma expressão para a probabilidade, a qual hoje é conhecida como função de Wigner [23]. Apesar de oferecer uma nova perspectiva, Wigner observa que a dita função é Real, mas nem sempre positiva definida, e por esse motivo chamada de *quase distribuição de probabilidade*. Contudo, é justamente a partir desse resultado peculiar que sua característica estatística se demonstra, com indicativos da natureza não-clássica do sistema para a região negativa acessada. Essa e outras propriedades da função de Wigner serão apresentadas neste capítulo.

Partiremos da prescrição de Weyl [31] para indicar, através do produto de dois operadores de Weyl, o que será chamado de produto-estrela. A função de Wigner é então apresentada como a transformada de Weyl do operador densidade e suas propriedades são discutidas. Cada operador A definido no espaço de Hilbert \mathcal{H} , é associado a uma função $A_W(q, p)$ no espaço de fase Γ , através do mapeamento $\Omega_W : A \rightarrow A_W(q, p)$, chamado mapeamento de Wigner. De modo que, a álgebra associativa de operadores em \mathcal{H} corresponde a uma álgebra igualmente associativa, porém não comutativa em Γ . O produto de dois operadores AB em \mathcal{H} é representado no espaço de fase Γ pelo produto-estrela, ou produto de Moyal [27]. Possuindo propriedades que o destacam, e um importante papel na estrutura simplética, o produto-estrela servirá de substrato para nossa abordagem da teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau discutida nos capítulos seguintes.

3.1 Prescrição de Weyl

Uma correspondência pode ser feita entre variáveis z^j de um espaço Euclidiano D -dimensional com operadores \hat{z}^j no respectivo espaço Euclidiano não-comutativo [47]. Consideremos a álgebra comutativa no dito espaço Euclidiano de funções $f(z)$, que possam ser

representadas por transformadas de Fourier, do tipo

$$\tilde{f}(k) = \int d^D z \exp(-ik_j z^j) f(z),$$

onde j vai de 1 a D . O respectivo espaço não-comutativo por sua vez, poderá ser construído substituindo as coordenadas locais z^j por operadores Hermitianos \hat{z}^j que respondam à relação de comutação $[\hat{z}^j, \hat{z}^k] = i\theta^{jk}$, na qual esses mesmos operadores são também geradores de uma álgebra não-comutativa. Com isso, é possível introduzir o chamado operador de Weyl, $\widehat{\mathcal{W}}[f(z)]$, dado pela transformada

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(z)] = \int \frac{d^D z}{(2\pi)^D} f(z) \widehat{\Delta}(z),$$

onde, a função $f(z)$, pode ainda ser identificada como a transformada de Weyl de $F = \widehat{\mathcal{W}}[f]$, com $\widehat{\Delta}(z)$ escrito, como

$$\widehat{\Delta}(z) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \exp(-ik_j \hat{z}^j) \exp(-ik_l z^l).$$

Esse procedimento configura um mapeamento dos campos, representados pelas funções $f(z)$ no espaço comutativo, com operadores de Weyl no espaço não-comutativo. Para escrever a expressão característica, do que mais adiante será chamado produto-estrela, faz-se necessário definir o produto de dois operadores de Weyl, a saber $\widehat{\mathcal{W}}[f]\widehat{\mathcal{W}}[g]$. Esta expressão deverá, portanto, relacionar as transformadas de Fourier das funções $f(z)$ e $g(z)$, como segue

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(z)]\widehat{\mathcal{W}}[g(z)] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) \exp(-ik_{1j} \hat{z}^j) \exp(-ik_{2l} z^l). \quad (3.1)$$

Usando a relação *Baker-Campbell-Hausdorff* para exponenciais de operadores, e lembrando que $[\hat{z}^j, \hat{z}^k] = i\theta^{jk}$, reescrevemos a Eq. (3.1) como

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(z)]\widehat{\mathcal{W}}[g(z)] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) \exp\left(-\frac{i}{2} k_{1j} k_{2l} \theta^{jl}\right) \exp[-i(k_{1j} + k_{2j}) \hat{z}^j].$$

E então, defini-se o produto-estrela ou produto de Moyal ^[27] entre as funções $f(z)$ e $g(z)$ como sendo o traço do produto dos operadores de Weyl com o operador $\widehat{\Delta}(z)$, a saber

$$f(z) \star g(z) = Tr \left[\widehat{\mathcal{W}}[f(z)] \widehat{\mathcal{W}}[g(z)] \widehat{\Delta}(z) \right]. \quad (3.2)$$

A forma diferencial contudo, não explicitando algumas manipulações matemáticas ^[48], fica dada por

$$f(z) \star g(z) = f(z) \exp \left(\frac{i}{2} \theta^{jl} \overleftarrow{\partial}_j \overrightarrow{\partial}_l \right) g(z), \quad (3.3)$$

o qual será mais adiante, na Seção 3.3, discriminado. Percebe-se, que o produto dos operadores de Weyl não é igual ao produto das respectivas transformadas, e sim a algo mais intrincado, dando origem a deformação pseudo-diferencial associativa do produto ordinário $f(z)g(z)$.

Ademais, considerando a construção acima, é ainda possível identificar, e essa associação ficará mais clara nas seções seguintes, a função que chamaremos de função de Wigner, como sendo

$$f_W(z) = Tr \left[\widehat{\mathcal{W}}[f(z)] \widehat{\Delta}(z) \right]. \quad (3.4)$$

Deixando claro, de certa forma, que há uma correspondência entre a formulação utilizada por Weyl e o método da função de Wigner, já que a função identificada por Wigner é o traço do produto, do assim denominado operador de Weyl com o operador $\widehat{\Delta}(z)$, responsável pelo mapeamento dos campos. A seguir apresentaremos seu formato usual e suas propriedades.

3.2 Função de Wigner

Já em Dirac ^[49] podemos observar uma abordagem do ponto de vista estatístico através do operador densidade, que pode ser escrito como

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|$$

onde consideramos os $\{\psi_i\}$ como sendo os estados microscópicos do ensemble estatístico, e $\omega_i = \frac{N_i}{N}$ o peso estatístico para o estado quântico $|\psi_i\rangle$. Dessa forma, a matriz densidade reúne as informações fisicamente relevantes do ensemble estudado. O valor esperado de um determinado observável físico A fica, $\langle A \rangle = Tr(\rho A)$, e a equação de Liouville-von Neumann, responsável pela evolução temporal da matriz densidade, é obtida a partir da equação de

Schrödinger, e pode ser escrita como

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H(t), \rho(t)], \quad (3.5)$$

onde o operador $H(t)$ representa a energia total do sistema.

Seguindo um procedimento similar ao adotado por Dirac, mas não de todo igual, Wigner usa a prescrição não-comutativa de Weyl para estabelecer uma estrutura geométrica igualmente não-comutativa ^[47]. O espaço de fase usual e as respectivas variáveis com dimensão de posição e *momentum* são representadas por z^i , ou seja $z = (q^i, p^i)$. Esse espaço se mostra como um produto cartesiano $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, onde o índice d se refere ao dual, e com $i = 1$ apenas, tratando do caso unidimensional. Esta escolha da prescrição de Weyl é chamada de realização simplética. Nesta realização, o operador $\widehat{\Delta}(z) = \widehat{\Delta}(q, p)$, passa a assumir a forma

$$\widehat{\Delta}(q, p) = \int \frac{dudv}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}[u(q-\widehat{q})-v(p-\widehat{p})]},$$

onde os operadores \widehat{q} e \widehat{p} respondem à relação de comutação de Heisenberg, $[\widehat{q}, \widehat{p}] = i\hbar$. Ao considerarmos o operador de Weyl na Eq. (3.4) como sendo o operador densidade ρ associado a um determinado sistema físico, a função de Wigner é identificada como a transformada de Weyl, e escrita na sua forma mais compacta ^[48], como

$$f_W(q, p) = Tr \left[\rho \widehat{\Delta}(q, p) \right],$$

haja vista a realização simplética usual do espaço de fase em p e q . Encontramos a função de Wigner por uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade, na forma

$$f_W(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle dz,$$

ou

$$f_W(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle dk.$$

Quando consideramos sistemas quânticos descritos por estados puros $|\psi\rangle$, cujo operador densidade é dado pelo "ketbra" $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, a função de Wigner poderá ser escrita, como

$$f_W(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right) dz.$$

É importante ressaltar que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabi-

lidade como já o dissemos, pois a mesma eventualmente poderá assumir valores negativos, chamada assim de uma função *quase distribuição de probabilidade*. A parte negativa da função de Wigner, pode ser interpretada como um indicador da não-classicalidade do sistema ^[55], cujo fator, em decorrência da função de Wigner ser normalizada, é dado por

$$N_{eg} = \int |f_W(q, p)| dq dp - 1. \quad (3.6)$$

Mesmo que a função de Wigner não represente uma distribuição de probabilidade propriamente dita no espaço de fase, densidades de probabilidades nas coordenadas poderão ser obtidas através da integração em q , tal que

$$|\psi(q)|^2 = \int f_W(q, p) dp,$$

ou, de forma análoga nos *momenta*

$$|\bar{\psi}(p)|^2 = \int f_W(q, p) dq.$$

Os equivalentes de Wigner dos operadores quânticos designados de forma geral por $A_W(q, p)$, são funções associadas ao operador $A(Q, P)$, que podem ser escritas como

$$A_W(q, p) = \int \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \right\rangle dz.$$

Dessa forma, a própria função de Wigner é o equivalente de Wigner do operador densidade

$$f_W = (2\pi\hbar)^{-1} \rho_W.$$

Dada a definição anterior, podemos escrever o valor esperado de um observável num estado $|\psi\rangle$

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int A_W(q, p) f_W(q, p) dq dp.$$

Os operadores na representação de Wigner ainda apresentam as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}\int A_W(q, p) dp &= (2\pi\hbar)\langle q|A|q\rangle, \\ \int A_W(q, p) dq &= (2\pi\hbar)\langle p|A|p\rangle, \\ \text{Tr}(A) &= \int A_W(q, p) dq dp.\end{aligned}$$

Há de se ressaltar que, sendo $A = A(Q)$, o equivalente em Wigner será $A_W = A_W(q)$, e se $A = A(P)$, então $A_W = A_W(p)$. Se porém, $A = \text{constante}$, então $A_W = A$. Essas e outras propriedades da função de Wigner, dos operadores na representação de Wigner e suas respectivas demonstrações, podem ser encontradas nas referências [51, 52, 53, 54].

3.3 Produto-estrela

Voltemos nossa atenção ao produto de dois operadores de Weyl citado na Seção 3.1. Esse produto relaciona duas transformadas de Weyl das funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$, considerando a realização simplética usual do espaço de fase pode ser escrito, como

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{W}}[f(q, p)]\widehat{\mathcal{W}}[g(q, p)] &= \int \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} f(q_1, p_1)g(q_2, p_2)\widehat{\Delta}(q_1, p_1)\widehat{\Delta}(q_2, p_2) \\ &= \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} [f(q, p) \star g(q, p)]\widehat{\Delta}(q, p),\end{aligned}$$

onde podemos perceber que o produto dos operadores de Weyl pode ser escrito ainda,

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(q, p)]\widehat{\mathcal{W}}[g(q, p)] = \widehat{\mathcal{W}}[f(q, p) \star g(q, p)].$$

E, a partir da qual, é possível identificar a Eq. (3.2), e escrever

$$\begin{aligned}f(q, p) \star g(q, p) &= \text{Tr} \left[\widehat{\mathcal{W}}[f(q, p)]\widehat{\mathcal{W}}[g(q, p)]\widehat{\Delta}(q, p) \right] \\ &= \int \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} f(q_1, p_1)g(q_2, p_2)\text{Tr} \left[\widehat{\Delta}(q_1, p_1)\widehat{\Delta}(q_2, p_2)\widehat{\Delta}(q, p) \right].\end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações matemáticas [48], o resultado obtido é dado por

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] g(q, p),$$

ou de forma mais compacta,

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp\left(\frac{i\hbar}{2}\Lambda_0\right) g(q, p),$$

com

$$\Lambda_0 = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}, \quad (3.7)$$

onde Λ_0 é um operador pseudo-diferencial. Esse produto é conhecido como produto-estrela ou produto de Moyal ^[27], o qual configura uma deformação pseudo-diferencial do produto associativo ordinário das funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$.

O produto-estrela apresenta algumas propriedades que serão de grande valia para discussões futuras do texto. O produto-estrela de uma função constante $c \in \mathbb{C}$ se trivializa,

$$c \star f(q, p) = f(q, p) \star c = cf(q, p).$$

O produto-estrela é anti-comutativo, ou seja

$$f(q, p) \star g(q, p) \neq g(q, p) \star f(q, p),$$

o que temos na verdade é

$$f(q, p) \exp\left(\frac{i\hbar\Lambda_0}{2}\right) g(q, p) = g(q, p) \exp\left(\frac{-i\hbar\Lambda_0}{2}\right) f(q, p). \quad (3.8)$$

O produto-estrela entre duas funções no espaço de fase pode ser visto como a atuação de uma delas como operador, ou seja

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) g(q, p), \\ &= f(q, p) g\left(q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right). \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever o operador-estrela \hat{f} , como

$$\hat{f}(q, p) = f(q, p) \star.$$

A partir da propriedade de anti-comutatividade, Eq. (3.8), possível perceber que a con-

jugação complexa inverte a ordem do produto-estrela

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \quad (3.9)$$

O produto-estrela é associativo,

$$[f(q, p) \star g(q, p)] \star h(q, p) = f(q, p) \star [g(q, p) \star h(q, p)].$$

O produto-estrela se trivializa na integração em todo espaço de fase ou simplético, considerando a convergência da integral, devemos ter

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \int f(q, p) g(q, p) dq dp. \quad (3.10)$$

O produto-estrela pode ser escrito em termos de uma expansão em série de potências, a saber

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!m!} \\ &\times [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ou ainda através da integração

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= \left(\frac{1}{\pi\hbar} \right)^2 \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} [2p(q' - q'') + 2p'(q'' - q) + 2p''(q - q')] \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Essas, e outras propriedades do produto-estrela, estão demonstradas de forma detalhada nas referências [51, 52, 53, 54].

3.4 Representação simplética galileana

Apontando para o que mais adiante usaremos como guia na construção da representação simplética da teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau, obtendo como resultado as equações características no respectivo espaço simplético, discutiremos a representação Galileana e obtenção da equação de Schrödinger no espaço de fase [32]. O procedimento descrito servirá de base para construção que faremos, pois possibilita deduzir funções de *quase distribuição de probabilidade*, sem a estrutura, muitas vezes intrincada, da equação

de Liouville-von Neumann ^[47]. A partir desse ponto buscaremos reconstruir o roteiro para chegar na equação de Schrödinger no espaço de fase. Outras *-representações simpléticas, utilizando os grupos de simetria já foram construídas de forma análoga, obtendo-se as equações de Klein-Gordon e Dirac no espaço de fase ^[18, 19].

Para tanto, definiremos um conjunto de operadores-estrela, baseados numa representação do Grupo de Galilei num espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ , associado ao espaço de fase. Esta identificação é realizada considerando o conjunto de funções complexas de quadrado integrável $\phi(q, p)$, a partir da qual

$$\int \phi^*(q, p)\phi(q, p)dqdp < \infty,$$

que possa ser considerada uma forma bilinear real. Então, escrevemos a função $\phi(q, p) = \langle q, p | \phi \rangle$, tal que

$$\int |q, p\rangle \langle q, p| dqdp = 1,$$

onde $\langle \phi |$ é o vetor dual de $|\phi\rangle$. A álgebra de Galilei é dada a partir dos operadores-estrela \hat{q} e \hat{p} , como segue

$$\begin{aligned}\hat{q} &= q_\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \\ \hat{p} &= p_\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q, \\ \hat{K} &= k_{i\star} = mq_{i\star} - tp_{i\star}, \\ \hat{L}_i &= \epsilon_{ijk}\hat{q}_j\hat{p}_k, \\ \hat{H} &= \frac{\hat{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2).\end{aligned}$$

De forma que tais operadores obedecem a seguinte álgebra de Galilei-Lie,

$$\begin{aligned}[\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k, \\ [\hat{L}_i, \hat{K}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{K}_k, \\ [\hat{L}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{P}_k, \\ [\hat{K}_i, \hat{K}_j] &= 0, \\ [\hat{K}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar m\delta_{ij}\mathbf{1}, \\ [\hat{K}_i, \hat{H}] &= i\hbar\hat{P}_i;\end{aligned}$$

onde as outras relações de comutação são nulas. Os próximos passos serão definir novos operadores \bar{Q} e \bar{P} que possam corresponder às respectivas transformações puras do grupo de Galilei, a saber

$$\exp\left(-iv\frac{\hat{K}}{\hbar}\right)2\bar{Q}\exp\left(iv\frac{\hat{K}}{\hbar}\right) = 2\bar{Q} + vt\mathbf{1},$$

e

$$\exp\left(-iv\frac{\hat{K}}{\hbar}\right)2\bar{P}\exp\left(iv\frac{\hat{K}}{\hbar}\right) = 2\bar{P} + mv\mathbf{1},$$

onde $\bar{Q} = 2q\mathbf{1}$ e $\bar{P} = 2p\mathbf{1}$. Contudo, esses últimos, não podem ser considerados observáveis a teoria, pois $[\bar{Q}, \bar{P}] = 0$. No entanto, servirão para construir um referencial no espaço de fase associado a um espaço de Hilbert, o já citado \mathcal{H}_Γ . Para tanto, consideraremos o conjunto de autovetores normalizados $|q, p\rangle$, de tal forma que $\bar{Q}|q, p\rangle = q|q, p\rangle$ e $\bar{P}|q, p\rangle = p|q, p\rangle$, com $\langle q, p|q', p'\rangle = \delta(q - q')\delta(p - p')$, onde

$$\int |q, p\rangle\langle q, p|dqdp = 1.$$

E assim podemos afirmar que os operadores \bar{Q} e \bar{P} , com seus respectivos autovalores q e p , são coordenadas do dito espaço de fase, no qual usamos a estrutura simplética para definir o produto-estrela ou produto de Moyal.

A equação de Schrödinger é agora o nosso objetivo. Assim, podemos definir uma certa quantidade $|\psi(t)\rangle$, no espaço \mathcal{H}_Γ , representando o estado do sistema quântico que estamos estudando, de forma que possamos usar os conjunto de kets $\{|q, p\rangle\}$ para escrever $\psi(q, p, t) = \langle q, p|\psi(t)\rangle$. Esse último resultado não é exatamente uma função de onda, já que as variáveis q e p são autovalores dos operadores \bar{Q} e \bar{P} respectivamente, e que anteriormente, já o dissemos, não podem ser tomados como observáveis. Sua natureza está relacionada ao conteúdo estatístico que a função de Wigner apresenta, sendo chamada dessa forma de *quase amplitude de probabilidade*. Sua evolução no tempo é dada por

$$\psi(q, p, t) = \exp\left(-it\frac{H}{\hbar}\right) \star \psi(q, p, 0),$$

e que ao ser derivada em relação ao tempo, considerando $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, fica

$$i\hbar\partial_t\psi(q, p, t) = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\partial_q^2 - \frac{i\hbar p}{2m}\partial_q\right)\psi(q, p, t) + V\left(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right)\psi(q, p, t),$$

e assim, chegamos na equação de Schrödinger no espaço de fase. A função de Wigner por sua vez, está relacionada à quase amplitude de probabilidade por meio do produto-estrela,

$$f_W(q, p) = \psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t). \quad (3.13)$$

Com conteúdo estatístico, a função de quase densidade de probabilidade contém em si as informações referentes ao comportamento do sistema. Nas próximas seções discutiremos seu papel específico no fenômeno que estamos tratando.

Capítulo 4

Representação Simplética Euclidiana

Neste capítulo apresentaremos, com algum detalhe, a primeira etapa do objetivo do nosso trabalho: construir a representação simplética da teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau ^[6].

Deduziremos a equação diferencial da teoria fenomenológica na variedade simplética a partir da estrutura algébrica associada ao espaço Euclidiano. Na qual, o conhecido parâmetro ordem da teoria original, será interpretado como uma quase amplitude de probabilidade, nesse contexto. Considerando os invariantes do grupo térmico Euclidiano, a equação de Liouville-Von Neumann independente do tempo será deduzida. Dessa forma, seremos capazes de associar uma função de quase distribuição de probabilidade, ou seja, uma função do tipo Wigner, ao parâmetro de ordem da teoria em uma variedade simplética com conteúdo de espaço de fase. A primeira equação simplética de Ginzburg-Landau, na ausência de campo externo, emerge do invariante da álgebra térmica associada à simetria, e a densidade de corrente de Noether é determinada.

4.1 Álgebra Térmica: definição e notação

Um importante aspecto das teorias térmicas é a duplicação em sua estrutura algébrica, que se mostrou necessária por construção. Proposta e evidenciada na própria dinâmica de campos térmicos, a duplicação caracteriza um formalismo algébrico em tempo real para teorias quânticas de campos em temperatura finita ^[11]. Nesse contexto, o espaço de Hilbert é duplicado, escrito como $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_E \otimes \tilde{\mathcal{H}}_E$, onde \mathcal{H}_E e $\tilde{\mathcal{H}}_E$ são o espaço de Hilbert original e dual, respectivamente, ambos definidos a partir da variedade euclidiana. Embora à primeira vista possa parecer que esse procedimento seja algo novo quando proposto para a dinâmica de campos térmicos em tempo real, esse tipo de duplicação estava presente na equação de

Liouville-von Neumann, geralmente escrita como

$$i\partial_t\rho(t) = \widehat{H}\rho(t),$$

onde $\rho(t)$ é a matriz densidade. Ao considerarmos um estado puro, ρ pode ser escrita como $\rho \simeq |\psi\rangle\langle\psi|$. E, para um sistema conservativo, a evolução temporal é dada por meio do operador Liouvilliano $\widehat{H} = [H, \cdot]$, onde H é a Hamiltoniana do sistema. O operador \widehat{H} representa o gerador de evolução temporal, enquanto H é o observável que descreve a energia do sistema. Esta estrutura duplicada também está presente na teoria cinética. Em termos algébricos, foi identificada como as representações padrão da c^* -álgebras. No contexto da álgebra de Lie, foi chamada de termo-álgebra [34]. Para o objetivo deste trabalho, iremos rever alguns elementos dessa estrutura algébrica, no intuito de melhor compreender a simetria que estamos explorando.

Consideremos $L_G = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$ uma álgebra de Lie, onde a_i são os geradores de simetria do grupo de Lie correspondente. O produto de Lie (\cdot, \cdot) é escrito como

$$(a_i, a_j) = iC_{ij}^k a_k, \quad (4.1)$$

onde assumimos a soma sobre os índices repetidos. Os números C_{ij}^k são as constantes de estrutura da álgebra. O produto de Lie dado por meio da Eq. (4.1) satisfaz a condição de anti-simetria

$$(a_i, a_j) = -(a_j, a_i),$$

e a identidade de Jacobi,

$$(a_i, (a_j, a_k)) + (a_k, (a_i, a_j)) + (a_j, (a_k, a_i)) = 0.$$

A noção de álgebra térmica de Lie é introduzida como uma representação de L_G para sistemas físicos considerando os seguintes aspectos que passamos a descrever [34]. O conjunto de variáveis cinemáticas representado por, \mathcal{V} , é um espaço vetorial definido em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_T , o espaço portador da representação para a álgebra de Lie L_G . O conjunto \mathcal{V} é composto por dois subespaços, ou seja, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{obs} \otimes \mathcal{V}_{gen}$. Para o propósito ao qual se destina, \mathcal{V}_{obs} , representa o conjunto de observáveis em um sistema físico e \mathcal{V}_{gen} , por sua vez, descreve os geradores de simetria. Considerando aspectos gerais de simetria física [11],

a representação de L_G em \mathcal{H}_T é dada por

$$\begin{aligned} [\widehat{A}_i, \widehat{A}_j] &= iC_{ij}^k \widehat{A}_k, \\ [\widehat{A}_i, A_j] &= iC_{ij}^k A_k, \\ [A_i, A_j] &= iC_{ij}^k A_k, \end{aligned}$$

onde $\widehat{A} \in \mathcal{V}_{gen}$ e $A \in \mathcal{V}_{obs}$, com $[\cdot, \cdot]$ sendo o comutador. Essa foi chamada de termo-Lie álgebra, L_G^T , [34]. Nesse contexto, é importante observar que L_G^T é uma álgebra de Lie semi-simples. Então é escrita como uma soma direta de duas álgebras de Lie. Na verdade, introduzindo a variável $\widetilde{A} = A - \widehat{A}$, a álgebra de Lie L_G^T leva a

$$[A_i, A_j] = iC_{ij}^k A_k, \quad (4.2)$$

$$[\widetilde{A}_i, \widetilde{A}_j] = -iC_{ij}^k \widetilde{A}_k, \quad (4.3)$$

$$[A_i, \widetilde{A}_j] = 0. \quad (4.4)$$

Essa duplicação é pensada como um mapeamento em \mathcal{V} , digamos $\mathcal{J}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, denotado por $JAJ = \widetilde{A}$. Com esta notação, e usando as Eqs. (4.2)-(4.4), o mapeamento \mathcal{J} preenche as seguintes condições:

$$\begin{aligned} (A_i A_j)^\sim &= \widetilde{A}_i \widetilde{A}_j, \\ (cA_i + A_j)^\sim &= c^* \widetilde{A}_i + \widetilde{A}_j, \\ (A_i^\dagger)^\sim &= (\widetilde{A}_i)^\dagger, \\ (\widetilde{A}_i)^\sim &= A_i, \\ [A_i, \widetilde{A}_j] &= 0. \end{aligned}$$

Essas propriedades são chamadas de regras de conjugação til, na dinâmica de campos térmicos. Na c^* -álgebra, \mathcal{J} é a conjugação modular [34]. Na próxima seção, esta representação será explorada considerando o grupo Euclidiano.

4.2 Álgebra de Lie Térmica Euclidiana

O grupo Euclidiano é o produto semidireto de $O(3) \times T_a$ em \mathbb{R}^3 , um subgrupo do grupo de Galilei, contendo as rotações, $O(3)$, e translações, T_a , preservando a norma. A álgebra

de Lie associada é escrita da seguinte forma

$$(l_i, l_j) = i\hbar\epsilon_{ijk}l_k,$$

$$(l_i, p_j) = i\hbar\epsilon_{ijk}p_k,$$

onde l_i é o gerador das rotações e p_i representa os geradores das translações espaciais. Os invariantes são: $I_1 = p^2$ e $I_2 = l^2 + s^2$, onde s representa ainda rotações em graus de liberdade internos no espaço. Para este estudo tomaremos $s = 0$. A álgebra térmica associada a esta simetria, é escrita em termos de relações de comutação diferentes de zero entre observáveis e operadores de til,

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \quad (4.5)$$

$$[L_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k, \quad (4.6)$$

$$[\tilde{L}_i, \tilde{L}_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}\tilde{L}_k, \quad (4.7)$$

$$[\tilde{L}_i, \tilde{P}_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}\tilde{P}_k, \quad (4.8)$$

destacando os invariantes P^2 e \tilde{P}^2 .

No espaço suporte, $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_E \otimes \tilde{\mathcal{H}}_E$, o espaço de Hilbert térmico, um vetor é denotado por $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_T$. O valor médio de um observável \mathcal{A} com respeito a $|\phi\rangle$ é escrito como $\langle\mathcal{A}\rangle = \langle\phi|\mathcal{A}|\phi\rangle$, com $\langle\phi|\phi\rangle = 1$. Uma representação física deve ser construída a partir do vetor $|I\rangle = \sum_n |n, \tilde{n}\rangle \in \mathcal{H}_T$. O estado $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_T$ é escrito em termos de um operador F_ϕ definido em \mathcal{H}_E como $|\phi\rangle = (F_\phi \otimes 1)|I\rangle = |F_\phi\rangle$. Se $|\phi\rangle$ é normalizado, então garantimos que $Tr(F_\phi^\dagger F_\phi) = 1$. Neste ponto, é conveniente introduzir outra notação, a saber $F_\phi = \rho^{\frac{1}{2}}$. Dessa forma, temos

$$|\phi\rangle = |\rho^{\frac{1}{2}}\rangle = (\rho^{\frac{1}{2}} \otimes 1)|I\rangle,$$

com $\rho^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{H}_E$.

Agora estamos em posição para examinar a ação do invariante $\hat{P}^2 = P^2 - \tilde{P}^2$, no vetor $|\phi\rangle = |\rho^{\frac{1}{2}}\rangle$, onde \hat{P} é o gerador das translações espaciais. Como a regra de conjugação til é um mapeamento anti-linear ^[11], \hat{P}^2 é escrito como

$$\hat{P}^2 = \nabla^2 \otimes 1 - 1 \otimes \nabla^2 = 0.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\hat{P}^2|\phi\rangle &= \hat{P}^2(\rho^{\frac{1}{2}} \otimes 1|I\rangle), \\
&= (\nabla^2 \otimes 1 - 1 \otimes \nabla^2)(\rho^{\frac{1}{2}} \otimes 1|I\rangle), \\
&= [\nabla^2 \rho^{\frac{1}{2}} - \rho^{\frac{1}{2}} \nabla^2] \otimes 1|I\rangle, \\
&= [\nabla^2, \rho^{\frac{1}{2}}] \otimes 1|I\rangle, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

E, dessa forma, garantimos que o operador $\rho^{\frac{1}{2}}$ satisfaça a seguinte equação

$$[\nabla^2, \rho^{\frac{1}{2}}] = 0. \tag{4.10}$$

Introduzindo o operador normalizado $\rho = \rho^{\frac{1}{2}\dagger} \rho^{\frac{1}{2}}$ como o operador densidade, chegamos na seguinte expressão

$$[\nabla^2, \rho] = 0. \tag{4.11}$$

Essa é a versão da equação de Liouville-Von Neumann independente do tempo.

Neste contexto é possível explorar a representação de Wigner da Eq. (4.10), a qual é derivada usando o mapeamento de Wigner, Ω_W , i.e.,

$$\begin{aligned}
\Omega_W[\nabla^2, \rho^{\frac{1}{2}}] &= \Omega_W[\nabla^2 \rho^{\frac{1}{2}}] - \Omega_W[\rho^{\frac{1}{2}} \nabla^2], \\
&= p^2 \star f^{\frac{1}{2}}(q, p) - f^{\frac{1}{2}}(q, p) \star p^2, \\
&= \{p^2, f^{\frac{1}{2}}(q, p)\}_M, \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$ é o chamado parênteses de Moyal, com (q, p) representando as coordenadas da variedade simplética com conteúdo de espaço de fase e $f = \Omega_W(\rho)$, a função equivalente de Wigner do operador densidade. Atuando de forma análoga na Eq. (4.11), este procedimento leva-nos à equação de Liouville-von Neumann nesta variedade simplética, a saber

$$\{p^2, f(q, p)\}_M = 0. \tag{4.13}$$

A partir das Eqs. (4.12) e (4.13), observamos que $f(q, p) \in \mathbb{R}$, ou seja, embora normalizada pode ser negativa. E ainda, sendo proveniente do mapeamento de Wigner, a função

$f(q, p)$ pode ser escrita, como

$$\begin{aligned} f(q, p) &= \Omega_W[\rho], \\ &= \Omega_W[\rho^{\frac{1}{2}\dagger}\rho^{\frac{1}{2}}], \\ f(q, p) &= \phi(q, p) \star \phi^\dagger(q, p), \end{aligned}$$

onde usamos a notação $\Omega_W[\rho^{\frac{1}{2}}] = f^{\frac{1}{2}}(q, p) = \phi(q, p)$.

Até agora, temos deduzido uma função de quase distribuição de probabilidade, ou seja, uma função do tipo Wigner, em uma variedade simplética a partir dos invariantes do grupo térmico Euclidiano. A seguir, construiremos a estrutura simplética para a qual associaremos o parâmetro de ordem da teoria fenomenológica a uma quase amplitude de probabilidade.

4.3 Estrutura Simplética

A estrutura simplética associada com o espaço Euclidiano, \mathbb{E} , é introduzida por meio da noção de fibrado cotangente, $T^*\mathbb{E}$, com coordenadas

$$\eta^k = (q^k, p^k),$$

onde p^k é a coordenada no espaço dual \mathbb{E}^* , e a matriz métrica é a própria matriz identidade tridimensional. A estrutura simplética de $T^*\mathbb{E}$ emerge a partir da introdução da 2-forma

$$\omega = dq^k \wedge dp^k.$$

Essa, por sua vez, considerando o espaço de funções analíticas definidas no fibrado cotangente, $C^\infty(T^*\mathbb{E})$, e um operador linear bi-diferencial definido por $\Lambda_0 = \overleftarrow{\partial_{q^k}\partial_{p^k}} - \overleftarrow{\partial_{p^k}\partial_{q^k}}$, é possível escrever 2-forma ω , como

$$\omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g = \{f, g\},$$

onde,

$$\{f, g\} = \partial_{q^k} f \partial_{p^k} g - \partial_{p^k} f \partial_{q^k} g,$$

é o conhecido parênteses de Poisson. Equipado com essa estrutura simplética, $T^*\mathbb{E}$ é o própria variedade simplética assim definida, ou mais conhecido no contexto mecânico como espaço de fase. Esse, será denotado por Γ_E .

O espaço de Hilbert é introduzido tendo em vista o subespaço linear de funções quadráticas

integráveis $\mathcal{H}(\Gamma) \subset C^\infty(\Gamma_E)$, com valores complexos, $\{\phi : \Gamma_E \rightarrow \mathbb{C}\}$, ou seja,

$$\int_{\Gamma_E} \phi^\dagger(\eta^k) \phi(\eta^k) d\eta^k < \infty$$

onde $d\eta^k = dq^k dp^k$. Tal espaço torna-se um espaço de Hilbert ao introduzir o produto interno

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int_{\Gamma_E} \phi_1^\dagger(\eta^k) \phi_2(\eta^k) d\eta^k. \quad (4.14)$$

Além disso, consideramos os mapeamentos lineares $\bar{Q}, \bar{P}: \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$, tais que

$$\bar{Q}\phi(\eta) = q\phi(\eta);$$

$$\bar{P}\phi(\eta) = p\phi(\eta).$$

Como $[\bar{Q}, \bar{P}] = 0$, o espectro de \bar{Q} e \bar{P} é usado para construir uma base em $\mathcal{H}(\Gamma)$, $\{|\eta\rangle\}$, tal que

$$\bar{Q}|\eta\rangle = q|\eta\rangle;$$

$$\bar{P}|\eta\rangle = p|\eta\rangle.$$

Como $\phi(\eta) = \langle \eta | \phi \rangle$, derivamos da Eq. (4.14) o resultado

$$\int_{\Gamma_E} |\eta\rangle \langle \eta| d\eta = 1,$$

com $\langle \eta | \eta' \rangle = \delta(\eta - \eta')$ e $\delta(\eta - \eta') = \delta(q - q') \delta(p - p')$. Vale ressaltar que os operadores \bar{Q} e \bar{P} não são os operadores usuais da mecânica quântica para posição e *momentum*, pois estamos lidando com uma estrutura simplética para o campo $\phi(q, p)$, que será considerado um parâmetro de ordem.

Usando as funções q e p definidas em $\mathcal{H}(\Gamma)$, construímos os seguintes operadores til e

não til, a saber

$$\begin{aligned} P = p\star &= p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q, \\ Q = q\star &= q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \\ \tilde{P} = \star p &= p + \frac{i\hbar}{2}\partial_q, \\ \tilde{Q} = \star q &= q - \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} L_i &= \epsilon_{ijk}Q_jP_k, \\ \tilde{L}_i &= \epsilon_{ijk}\tilde{Q}_j\tilde{P}_k. \end{aligned}$$

Esse conjunto de operadores satisfaz as mesmas relações de comutação da álgebra térmica apresentadas nas Eqs. (4.5)-(4.8). Como consequência, Q e P são transformados como posição e *momentum*, e são observáveis por construção devido à estrutura da álgebra térmica assumida.

4.4 Equação Simplética

A partir do gerador das translações espaciais, \hat{P} , temos um dos invariantes da álgebra térmica euclidiana \hat{P}^2 . Esse, atuando em um estado de \mathcal{H}_T , Eq. (4.9), permiti-nos escrever

$$P^2\phi = \alpha m\phi,$$

onde α e m são constantes. Lembrando que $P = p\star$, definido na seção anterior, temos

$$(p\star)^2\phi = \alpha m\phi.$$

Como $p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q$, chegamos na seguinte equação diferencial,

$$\frac{1}{m} \left(p^2 - i\hbar p\partial_q - \frac{\hbar^2}{4}\partial_q^2 \right) \phi(q, p) = \alpha\phi(q, p). \quad (4.15)$$

Essa é a equação de Ginzburg-Landau, excluído o termo não linear, escrita em uma variedade simplética, através da representação do grupo Euclidiano, para a qual consideramos $\alpha = \alpha_0(T - T_c) = \alpha(T)$, onde T_c é a temperatura crítica da transição de fase. A equação

(4.15) é obtida a partir da ação

$$\begin{aligned} S &= \int \mathcal{L}_0 dpdq, \\ &= \int \left[\frac{1}{m} (p \star \phi)^\dagger (p \star \phi) + \alpha(T) \phi^\dagger \phi \right] dpdq, \end{aligned}$$

onde a densidade Lagrangiana, \mathcal{L}_0 , é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{m} (p \star \phi)^\dagger (p \star \phi) + \alpha(T) \phi^\dagger \phi. \quad (4.16)$$

Para uma auto-interação, um termo que preserva a invariância de \mathcal{L} por $\phi \rightarrow -\phi$ é introduzido pela densidade na variedade simplética $\frac{\beta}{2} (\phi^\dagger \phi)^2$, um termo do tipo $\lambda \phi^4$. Adicionando esse termo, a densidade Lagrangiana fica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{m} (p \star \phi)^\dagger (p \star \phi) + \alpha(T) \phi^\dagger \phi + \frac{\beta}{2} (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (4.17)$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo $\phi^\dagger(q, p)$ é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} - \partial_q \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_q \phi^\dagger)} \right] - \partial_p \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_p \phi^\dagger)} \right] = 0, \quad (4.18)$$

que leva-nos à seguinte equação para o campo $\phi(q, p)$,

$$\frac{1}{m} \left(p - \frac{i\hbar}{2} \partial_q \right)^2 \phi(q, p) + \alpha(T) \phi(q, p) + \beta |\phi(q, p)|^2 \phi(q, p) = 0,$$

que ainda pode ser escrita em termos do operador-estrela $p \star$, tomando a seguinte forma

$$\frac{1}{m} (p \star)^2 \phi(q, p) + \alpha(T) \phi(q, p) + \beta |\phi(q, p)|^2 \phi(q, p) = 0. \quad (4.19)$$

Reconhecemos então, a primeira equação simplética de Ginzburg-Landau, na ausência de um campo externo. E ainda, o campo $\phi(q, p)$ como a quase amplitude de probabilidade e parâmetro de ordem da teoria nesta representação simplética.

A densidade Lagrangiana apresentada acima, Eq. (4.17), nos possibilita escrever a den-

sidade de corrente de Noether,

$$\begin{aligned}
j(q, p) &= i\phi^\dagger(q, p) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_q \phi^\dagger(q, p)]} \right\} - \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_q \phi(q, p)]} \right\} i\phi(q, p) \\
&= -\frac{\hbar}{2m} \left\{ \phi^\dagger(q, p) [p \star \phi(q, p)] + [\phi^\dagger(q, p) \star p] \phi(q, p) \right\}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

a qual reconhecemos como a segunda equação simplética de Ginzburg-Landau na ausência de um campo externo. Esta expressão possui divergência nula na coordenada q , a saber

$$\begin{aligned}
\partial_q j(q, p) &= -\frac{\hbar}{2m} \partial_q \left\{ \phi^\dagger(q, p) [p \star \phi(q, p)] + [\phi^\dagger(q, p) \star p] \phi(q, p) \right\} \\
&= -\frac{i}{m} \left[i\hbar p (\partial_q \phi^\dagger) - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi^\dagger) \right] \phi - \frac{i}{m} \phi^\dagger \left[i\hbar p (\partial_q \phi) + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi) \right].
\end{aligned}$$

Aqui, podemos reconhecer as equações de Euler-Lagrange para os campos $\phi(q, p)$ e $\phi^\dagger(q, p)$, onde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} (p \star)^2 \phi + \alpha(T) \phi + \beta |\phi|^2 \phi &= 0, \\
i\hbar p (\partial_q \phi) + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi) &= m \left[\frac{p^2}{m} + \alpha(T) + \beta |\phi|^2 \right] \phi,
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \phi^\dagger (\star p)^2 + \phi^\dagger \alpha(T) + \beta \phi^\dagger |\phi|^2 &= 0, \\
i\hbar p (\partial_q \phi^\dagger) - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi^\dagger) &= -m \left[\frac{p^2}{m} + \alpha(T) + \beta |\phi|^2 \right] \phi^\dagger.
\end{aligned}$$

As quais são substituídas na divergência da densidade de corrente, obtendo

$$\begin{aligned}
\partial_q j(q, p) &= i \left[\frac{p^2}{m} + \alpha(T) + \beta |\phi|^2 \right] |\phi|^2 - i \left[\frac{p^2}{m} + \alpha(T) + \beta |\phi|^2 \right] |\phi|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que a densidade de corrente simplética, Eq. (4.20), é conservada.

A seguir, a simetria de calibre abeliano é levada em consideração e resultados equivalentes da teoria de Ginzburg-Landau original serão obtidos.

Capítulo 5

Calibre Abeliano

A teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau para supercondutividade tem sua importância e aplicabilidade já bem estabelecida. O parâmetro de ordem estabelecido pela teoria desempenha o papel principal e é um campo. Neste capítulo, testaremos a invariância de calibre local da equação diferencial e da Lagrangiana simplética. Neste contexto, exploraremos a atuação do invariante da álgebra térmica euclidiana no campo $\phi(q, p)$, considerado o parâmetro de ordem da teoria fenomenológica simplética. Desenvolveremos a teoria de calibre inserindo o campo A^k , o qual compõe um tensor de campo anti-simétrico F^{kl} , análogo ao descrito por Seiberg e Witten [56], conforme será mostrado. A densidade Lagrangiana invariante obtida, servirá para derivação da equivalente simplética. Deduziremos as equações Ginzburg-Landau a partir da representação euclidiana em uma variedade simplética com conteúdo de espaço de fase, as quais serão chamadas equações simpléticas de Ginzburg-Landau.

5.1 Invariância da equação diferencial

Iniciaremos nossa avaliação da equação diferencial proveniente do invariante da álgebra de Lie térmica, Eq. (4.15), considerando uma possível transformação da calibre local, a saber

$$\phi(q, p) \rightarrow e^{-i\Lambda} \star \phi(q, p),$$

onde $\Lambda = \Lambda(q, p)$. Assumindo $\Lambda \ll 1$, escrevemos a variação infinitesimal do campo,

$$\delta [\phi(q, p)] = -i\Lambda(q, p) \star \phi(q, p).$$

A Eq. (4.15), sobre a transformação de calibre, fica assim escrita

$$0 = (p\star)^2 \delta [\phi(q, p)], \quad (5.1)$$

e então

$$\begin{aligned} 0 &= (p\star)^2 (-i\Lambda \star \phi) \\ 0 &= \left(p^2 - i\hbar p \partial_q - \frac{\hbar^2}{4} \partial_q^2 \right)^2 (-i\Lambda \star \phi), \\ 0 &= -ip^2(\Lambda \star \phi) - \hbar p \partial_q(\Lambda \star \phi) + \frac{i\hbar^2}{4} \partial_q^2(\Lambda \star \phi). \end{aligned}$$

Usando a propriedade do produto-estrela $p(f \star g) = f \star (pg) - \frac{i\hbar}{2} (\partial_q f) \star g$, reescrevemos

$$\begin{aligned} 0 &= -ip \left[\Lambda \star (p\phi) - \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \Lambda) \star \phi \right] - \hbar p [(\partial_q \Lambda) \star \phi + \Lambda \star (\partial_q \phi)] + \frac{i\hbar^2}{4} \partial_q [(\partial_q \Lambda) \star \phi + \Lambda \star (\partial_q \phi)], \\ 0 &= -i \left[\Lambda \star (p^2 \phi) - \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \Lambda) \star (p\phi) \right] - \frac{3}{2} p \hbar [(\partial_q \Lambda) \star \phi] - \hbar \left[\Lambda \star p (\partial_q \phi) - \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \Lambda) \star (\partial_q \phi) \right] \\ &\quad + \frac{i\hbar^2}{4} [(\partial_q^2 \Lambda) \star \phi] + \frac{i\hbar^2}{2} [(\partial_q \Lambda) \star (\partial_q \phi)] + \frac{i\hbar^2}{4} [\Lambda \star (\partial_q \phi)], \\ 0 &= -i\Lambda \star \left[p^2 \phi - i\hbar p (\partial_q \phi) - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi) \right] - \frac{\hbar}{2} (\partial_q \Lambda) \star (p\phi) - \frac{3}{2} \hbar p [(\partial_q \Lambda) \star \phi] + i\hbar^2 [(\partial_q \Lambda) \star (\partial_q \phi)] \\ &\quad + \frac{i\hbar^2}{4} [(\partial_q^2 \Lambda) \star \phi], \\ 0 &= -i\Lambda \star \left[p^2 \phi - i\hbar p (\partial_q \phi) - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi) \right] - 2\hbar [(\partial_q \Lambda) \star (p\phi)] + i\hbar^2 [(\partial_q^2 \Lambda) \star \phi]. \end{aligned}$$

Como pode ser observado, o operador-estrela $(p\star)^2$ está atuando no campo $\phi(q, p)$, mas ainda há outros dois termos dependentes das derivadas de $\Lambda(q, p)$ em primeira e segunda ordem, com isso a variação da equação diferencial, Eq. (5.1), fica dada por

$$0 = -i\Lambda \star [(p\star)^2 \phi] - 2\hbar [(\partial_q \Lambda) \star (p\phi)] + i\hbar^2 [(\partial_q^2 \Lambda) \star \phi].$$

O resultado acima, demonstra que o termo do operador-estrela $(p\star)^2$, atuante no campo $\phi(q, p)$, é invariante pela transformação de calibre local proposta, e isso é o que esperamos que aconteça com toda a equação. Na busca de tornar a equação diferencial invariante por transformação de calibre em sua totalidade, inserimos um campo de calibre $A(q, p)$, de forma que o operador-estrela $p\star$ será acrescido do termo $bA\star$, tornando-se o operador-estrela

$D\star$, a saber

$$p\star \rightarrow D\star = p\star + bA\star,$$

onde b é uma constante a ser determinada na ocasião em que a invariância da equação será requerida. O campo $A(q, p)$, deve se transformar de uma maneira específica, dada por

$$A \rightarrow A' = A + i\{A, \Lambda\}_M + k(\partial_q \Lambda),$$

onde k é também uma constante a ser determinada, e $\{A, \Lambda\}_M = A \star \Lambda - \Lambda \star A$, o já citado parênteses de Moyal. Dessa forma, a Eq. (4.15) com a mudança proposta, passa a ser escrita como

$$0 = (D\star)^2 \phi(q, p),$$

e sua variação

$$\begin{aligned} 0 &= \delta [(D\star)^2 \phi(q, p)], \\ 0 &= \delta \{[(p\star + bA\star) \cdot (p\star + bA\star)] \phi(q, p)\}, \\ 0 &= \delta \{(p\star)^2 \phi + b[p\star (A\star \phi) + A\star (p\star \phi)] + b^2 (A\star)^2 \phi(q, p)\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A partir deste ponto passaremos a calcular cada termo da variação da equação diferencial simplética separadamente. O primeiro termo, $T_1 = \delta [(p\star)^2 \phi(q, p)]$, já conhecemos o resultado, pois corresponde à equação original que propomos a variação. Resta-nos obter a variação dos outros três termos, que serão designados por T_2 , T_3 e T_4 respectivamente, como segue

$$\begin{aligned} T_2 &= \delta [p\star (A\star \phi)], \\ &= p\star [\delta (A\star \phi)], \\ &= p\star \{[i\{A, \Lambda\}_M + k(\partial_q \Lambda)] \star \phi + A\star (-i\Lambda \star \phi)\}, \\ &= i[p\star (A\star \Lambda) \star \phi] - i[p\star (\Lambda \star A) \star \phi] + p\star [k(\partial_q \Lambda)] \star \phi - i[p\star (A\star \Lambda) \star \phi], \\ &= -i[p\star (\Lambda \star A) \star \phi] + p\star [k(\partial_q \Lambda)] \star \phi. \end{aligned}$$

Passamos a usar a definição do operador-estrela $p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q$,

$$T_2 = -i \left[p(\Lambda \star A \star \phi) - \frac{i\hbar}{2} \partial_q (\Lambda \star A \star \phi) \right] + p\star [k(\partial_q \Lambda)] \star \phi.$$

E agora a propriedade do produto-estrela $p(f \star g) = f \star (pg) - \frac{i\hbar}{2} (\partial_q f) \star g$, reescrevendo o termo T_2 , como

$$\begin{aligned} T_2 &= -i \left\{ \Lambda \star [p(A \star \phi)] - \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \Lambda) \star (A \star \phi) - \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \Lambda) \star (A \star \phi) - \frac{i\hbar}{2} \Lambda \star \partial_q (A \star \phi) \right\} \\ &\quad + p \star [k(\partial_q \Lambda)] \star \phi, \\ &= -i\Lambda \star [p \star (A \star \phi)] - \hbar (\partial_q \Lambda) \star (A \star \phi) + p \star [k(\partial_q \Lambda)] \star \phi. \end{aligned}$$

Novamente percebemos que um dos constituintes do termo T_2 é invariante à transformação de calibre proposta, mas há outros dois termos que não o são. Veremos mais adiante, que estes últimos se cancelarão, mediante a escolha acertada das constantes b e k . Passaremos agora ao cálculo da variação do terceiro termo da Eq. (5.2),

$$\begin{aligned} T_3 &= \delta [A \star (p \star \phi)], \\ &= (\delta A) \star (p \star \phi) + A \star \delta (p \star \phi), \\ &= [i\{A, \Lambda\}_M + k(\partial_q \Lambda)] \star (p \star \phi) + A \star p \star (-i\Lambda \star \phi), \\ &= i[A \star \Lambda \star (p \star \phi)] - i\Lambda \star [A \star (p \star \phi)] - i[A \star p \star (\Lambda \star \phi)] + k(\partial_q \Lambda) \star (p \star \phi). \end{aligned}$$

Já é possível perceber o termo invariante pela transformação de calibre, o qual será movido para esquerda. E, de forma análoga ao cálculo do termo T_2 , usaremos a definição do operador-estrela $p \star$ e a mesma propriedade do produto-estrela, como segue

$$\begin{aligned} T_3 &= -i\Lambda \star [A \star (p \star \phi)] + i[A \star \Lambda \star (p \star \phi)] - i \left\{ A \star \left[p(\Lambda \star \phi) - \frac{i\hbar}{2} \partial_q (\Lambda \star \phi) \right] \right\} \\ &\quad + k(\partial_q \Lambda) \star (p \star \phi), \\ &= -i\Lambda \star [A \star (p \star \phi)] + i[A \star \Lambda \star (p \star \phi)] - i[A \star \Lambda \star (p \star \phi)] - \hbar [A \star (\partial_q \Lambda) \star \phi] \\ &\quad + k(\partial_q \Lambda) \star (p \star \phi), \\ &= -i\Lambda \star [A \star (p \star \phi)] - \hbar [A \star (\partial_q \Lambda) \star \phi] + k(\partial_q \Lambda) \star (p \star \phi). \end{aligned}$$

O quarto termo da Eq. (5.2), fica

$$\begin{aligned}
T_4 &= \delta [(A\star)^2 \phi(q, p)], \\
&= \delta [A \star (A \star \phi)], \\
&= (\delta A) \star A \star \phi + A \star (\delta A) \star \phi + A \star A \star (\delta \phi), \\
&= [i\{A, \Lambda\}_M + k(\partial_q \Lambda)] \star A \star \phi + A \star [i\{A, \Lambda\}_M + k(\partial_q \Lambda)] \star \phi + A \star A \star (-i\Lambda \star \phi), \\
&= -i\Lambda \star [A \star (A \star \phi)] + k(\partial_q \Lambda) \star (A \star \phi) + A \star [k(\partial_q \Lambda)] \star \phi.
\end{aligned}$$

Tendo calculado todos os termos, substituindo na Eq. (5.2), temos

$$\begin{aligned}
0 &= -i\Lambda \star [(p\star)^2 \phi] - 2\hbar [(\partial_q \Lambda) \star (p\phi)] + i\hbar^2 [(\partial_q^2 \Lambda) \star \phi] - i\Lambda \star [p \star (bA \star \phi)] - b\hbar (\partial_q \Lambda) \star (A \star \phi) \\
&\quad + p \star [bk(\partial_q \Lambda)] \star \phi - i\Lambda \star [bA \star (p \star \phi)] - b\hbar [A \star (\partial_q \Lambda) \star \phi] + bk(\partial_q \Lambda) \star (p \star \phi) \\
&\quad - i\Lambda \star [bA \star (bA \star \phi)] + bk(\partial_q \Lambda) \star (bA \star \phi) + bA \star [bk(\partial_q \Lambda)] \star \phi.
\end{aligned}$$

E que pode ser reescrita, como

$$\begin{aligned}
0 &= -i\Lambda \star [(p\star)^2 \phi + p \star (bA \star \phi) + bA \star (p \star \phi) + bA \star (bA \star \phi)] + (kb^2 - b\hbar)(\partial_q \Lambda) \star (A \star \phi) \\
&\quad + (kb^2 - b\hbar)A \star (\partial_q \Lambda) \star \phi + 2(bk - \hbar)(\partial_q \Lambda) \star (p \star \phi) + i(\hbar^2 - bk\hbar)(\partial_q^2 \Lambda) \star \phi.
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
0 &= -i\Lambda \star [(D\star) \phi] \\
&\quad + b(kb - \hbar)(\partial_q \Lambda) \star (A \star \phi) \\
&\quad + b(kb - \hbar)A \star (\partial_q \Lambda) \star \phi \\
&\quad + 2(kb - \hbar)(\partial_q \Lambda) \star (p \star \phi) \\
&\quad + i\hbar(\hbar - bk)(\partial_q^2 \Lambda) \star \phi.
\end{aligned}$$

Tomando a condição $k = \frac{\hbar}{b}$, a equação diferencial torna-se apenas

$$0 = -i\Lambda \star [(D\star)^2 \phi],$$

e, assim, invariante pela transformação de calibre local proposta. Com isso, há uma certa liberdade na escolha da constante b , que compõe o operador-estrela $D\star$. A escolha que nos pareceu mais acertada para recuperarmos os resultados usuais da teoria fenomenológica de

Ginzburg-Landau mais adiante, foi $b = -\frac{e}{c}$, onde e é carga do elétron e c a velocidade da luz no vácuo. Ou seja, $D\star$ será escrito como

$$D\star = p\star - \frac{e}{c}A\star.$$

A demonstração que a equação diferencial, deduzida a partir da álgebra térmica, é invariante por transformações de calibre locais constitui o primeiro passo para deduzirmos as equações simpléticas de Ginzburg-Landau. Na seção seguinte, exigiremos que densidade lagrangiana, apresentada no capítulo anterior, seja igualmente invariante por transformações de calibre locais.

5.2 Invariância da Densidade Lagrangiana

Inicialmente verificaremos a invariância da densidade Lagrangiana frente à transformações de calibre locais propostas anteriormente na primeira seção. Não nos preocuparemos, por hora, com outras dimensões da variedade simplética euclidiana, bastando (q, p) . A densidade Lagrangiana tratada no capítulo anterior, foi

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{m}(p\star\phi)^\dagger(p\star\phi), \quad (5.3)$$

a qual tem o produto-estrela trivializado na integração sobre toda variedade simplética

$$\begin{aligned} S &= \int \mathcal{L}_0 dpdq \\ &= \int \frac{1}{m} [(p\star\phi)^\dagger \star (p\star\phi)] dpdq. \end{aligned}$$

Utilizando-se das transformações de calibre locais exatamente iguais as da seção anterior,

$$\begin{aligned} \phi(q, p) &\rightarrow e^{-i\Lambda} \star \phi(q, p), \\ \phi^\dagger(q, p) &\rightarrow \phi^\dagger(q, p) \star e^{i\Lambda}, \end{aligned}$$

com $\Lambda = \Lambda(q, p)$, e assumindo novamente $\Lambda \ll 1$, escrevemos as variações infinitesimais dos campos,

$$\begin{aligned} \delta\phi &= -i\Lambda \star \phi, \\ \delta\phi^\dagger &= i\phi^\dagger \star \Lambda. \end{aligned}$$

A variação da densidade Lagrangiana, fica dada por

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{m}\delta[(p\star\phi)^\dagger\star(p\star\phi)] \\ &= \frac{1}{m}[\delta(p\star\phi)^\dagger\star(p\star\phi) + (p\star\phi)^\dagger\star\delta(p\star\phi)],\end{aligned}$$

onde $\delta(p\star\phi) = -ip\star\Lambda\star\phi$. Aplicando o operador-estrela $p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q$, temos

$$\begin{aligned}\delta(p\star\phi) &= -i\left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right)(\Lambda\star\phi) \\ &= -i\left[p(\Lambda\star\phi) - \frac{i\hbar}{2}(\partial_q\Lambda)\star\phi - \frac{i\hbar}{2}\Lambda\star(\partial_q\phi)\right].\end{aligned}$$

Usando a propriedade do produto-estrela $p(f\star g) = f\star(pg) - \frac{i\hbar}{2}(\partial_q f)\star g$, reescrevemos

$$\begin{aligned}\delta(p\star\phi) &= -i\left[\Lambda\star(p\phi) - \frac{i\hbar}{2}(\partial_q\Lambda)\star\phi - \frac{i\hbar}{2}(\partial_q\Lambda)\star\phi - \frac{i\hbar}{2}\Lambda\star(\partial_q\phi)\right] \\ &= -i\Lambda\star\left[\left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right)\phi\right] - (\partial_q\Lambda)\star\phi \\ &= -i\Lambda\star(p\star\phi) - \hbar(\partial_q\Lambda)\star\phi.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Analogamente procedemos com o cálculo do termo $\delta(\phi^\dagger\star p)$, dessa forma

$$\begin{aligned}\delta(\phi^\dagger\star p) &= \delta(\phi^\dagger)\star p \\ &= i\phi^\dagger\star\Lambda\star p.\end{aligned}$$

Aplicando o operador adjunto $\star p = p + \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_q$, temos

$$\begin{aligned}\delta(\phi^\dagger\star p) &= i(\phi^\dagger\star\Lambda)\left(p + \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_q\right) \\ &= i\left[(\phi^\dagger\star\Lambda)p + \frac{i\hbar}{2}(\partial_q\phi^\dagger)\star\Lambda + \frac{i\hbar}{2}\phi^\dagger\star(\partial_q\Lambda)\right],\end{aligned}$$

e usando a propriedade do produto-estrela similar à aplicada anteriormente $p(f \star g) = (pf) \star g + \frac{i\hbar}{2} f \star (\partial_q g)$, reescrevemos

$$\begin{aligned}
\delta(\phi^\dagger \star p) &= i \left[(\phi^\dagger p) \star \Lambda + \frac{i\hbar}{2} \phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda) + \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \phi^\dagger) \star \Lambda + \frac{i\hbar}{2} \phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda) \right] \\
&= i\phi^\dagger \star p \star \Lambda - \hbar [\phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda)] \\
&= i(p \star \phi)^\dagger \star \Lambda - \hbar [\phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda)].
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Substituindo os resultados das Eq. (5.4) e Eq. (5.5) na expressão dada pela Eq. (5.4),

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{m} \{ i(p \star \phi)^\dagger \star \Lambda \star (p \star \phi) - \hbar [\phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda)] \star (p \star \phi) \} \\
&+ \frac{1}{m} \{ -i [(p \star \phi)^\dagger \star \Lambda \star (p \star \phi)] - \hbar (p \star \phi)^\dagger \star (\partial_q \Lambda) \star \phi \} \\
&= -\frac{\hbar}{m} \{ \phi^\dagger \star [p \star (\partial_q \Lambda)] \star \phi + \phi^\dagger \star [(\partial_q \Lambda) \star p] \star \phi \} \\
&= -\frac{2\hbar}{m} [\phi^\dagger \star p (\partial_q \Lambda) \star \phi].
\end{aligned}$$

O resultado acima demonstra que a densidade lagrangiana na Eq. (5.3) não é invariante sobre as transformações de calibre locais propostas, considerando a derivada parcial $\partial_q \Lambda$ não nula. Adotando o procedimento padrão, inserimos um campo de calibre $A(q, p)$ na densidade Lagrangiana, Eq. (5.3), exigindo que o mesmo se transforme, como

$$A \rightarrow A' = A + i\{A, \Lambda\}_M - \frac{c\hbar}{e} (\partial_q \Lambda),$$

onde e é a constante de acoplamento do campo de calibre e c a velocidade da luz no vácuo, e ainda $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$ o, já anteriormente mencionado, parêntesis de Moyal. Com isso, na expressão da densidade Lagrangiana inicial, Eq. (5.3), fazemos a substituição dos operadores $p \star$ por $D \star$ e $\star p$ por $\star D$, como segue

$$D \star = p \star - \frac{e}{c} A \star \quad e \quad \star D = \star p - \star A \frac{e}{c}.$$

A densidade Lagrangiana fica assim reescrita,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{0+I} &= \frac{1}{m} [(D \star \phi)^\dagger \star (D \star \phi)], \\
&= \frac{1}{m} [(\phi^\dagger \star D) \star (D \star \phi)], \\
&= \frac{1}{m} \left\{ \left[(\phi^\dagger \star p) - \frac{e}{c} (\phi^\dagger \star A) \right] \star \left[(p \star \phi) - \frac{e}{c} (A \star \phi) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

De forma que temos as seguintes variações,

$$\begin{aligned}
\delta(D \star \phi) &= \delta \left[(p \star \phi) - \frac{e}{c} (A \star \phi) \right], \\
&= \delta(p \star \phi) - \frac{e}{c} [\delta(A \star \phi)], \\
&= -i\Lambda \star p \star \phi - (\partial_q \Lambda) \star \phi - \frac{e}{c} [\delta(A) \star \phi + A \star \delta(\phi)], \\
&= -i\Lambda \star p \star \phi - \hbar (\partial_q \Lambda) \star \phi - \frac{e}{c} \left[i\{A, \Lambda\}_M - \frac{c\hbar}{e} (\partial_q \Lambda) \right] \star \phi - i^2 e A \star \Lambda \star \phi, \\
&= -i\Lambda \star p \star \phi - \hbar (\partial_q \Lambda) \star \phi - \frac{ie}{c} A \star \Lambda \star \phi + \frac{ie}{c} \Lambda \star A \star \phi + \hbar (\partial_q \Lambda) \star \phi \\
&\quad + \frac{ie}{c} A \star \Lambda \star \phi, \\
&= -i\Lambda \star (D \star \phi).
\end{aligned}$$

E, de forma análoga, a variação do termo adjunto

$$\begin{aligned}
\delta(D \star \phi)^\dagger &= \delta \left[(\phi^\dagger \star p) - \frac{e}{c} (\phi^\dagger \star A) \right], \\
&= i\phi^\dagger \star p \star \Lambda - \hbar [\phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda)] - \frac{ie}{c} \phi^\dagger \star \Lambda \star A - \frac{e}{c} \phi^\dagger \star \left[i\{A, \Lambda\}_M - \frac{c\hbar}{e} (\partial_q \Lambda) \right], \\
&= i\phi^\dagger \star p \star \Lambda - \hbar [\phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda)] - \frac{ie}{c} \phi^\dagger \star \Lambda \star A - \frac{ie}{c} \phi^\dagger \star A \star \Lambda + \frac{ie}{c} \phi^\dagger \star \Lambda \star A \\
&\quad + \hbar [\phi^\dagger \star (\partial_q \Lambda)], \\
&= i(D \star \phi)^\dagger \star \Lambda.
\end{aligned}$$

A variação da densidade Lagrangiana, fica

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{L}_{0+I}) &= \frac{1}{m} [\delta(D \star \phi)^\dagger \star (D \star \phi) + (D \star \phi)^\dagger \star \delta(D \star \phi)], \\
&= \frac{1}{m} [i(D \star \phi)^\dagger \star \Lambda \star (D \star \phi) - i(D \star \phi)^\dagger \star \Lambda \star (D \star \phi)], \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então, obtemos o resultado $\delta(\mathcal{L}_{0+I}) = 0$, onde fica claro a sua invariância frente às transformações calibre locais.

A partir desse ponto, acrescentaremos seguindo o procedimento padrão, o termo cinético do campo de calibre $\mathcal{L}_{II} = F^{jl}F_{jl}$, onde F^{jl} é definido, como

$$F^{jl} = \partial_{qj} A^l - \partial_{ql} A^j + g\{A^l, A^j\}_M,$$

com g sendo uma constante a ser determinada quando imposta a invariância do termo. O tensor F^{jl} deve ser transformar, como

$$\delta(F^{jl}) = \delta(\partial_{qj} A^l) - \delta(\partial_{ql} A^j) + g\delta\{A^l, A^j\}_M. \quad (5.6)$$

Calculando a variação de cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned} \delta(\partial_{qj} A^l) &= \partial_{qj} [\delta(A^l)], \\ &= \partial_{qj} [i\{A^l, \Lambda\}_M + k(\partial_{ql} \Lambda)], \\ &= -i\Lambda \star (\partial_{qj} A^l) + i(\partial_{qj} A^l) \star \Lambda + iA^l \star (\partial_{qj} \Lambda) - i(\partial_{qj} \Lambda) \star A^l + k\partial_{qj} (\partial_{ql} \Lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\partial_{ql} A^j) &= \partial_{ql} [\delta(A^j)], \\ &= -i\Lambda \star (\partial_{ql} A^j) + i(\partial_{ql} A^j) \star \Lambda + iA^j \star (\partial_{ql} \Lambda) - i(\partial_{ql} \Lambda) \star A^j + k\partial_{ql} (\partial_{qj} \Lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(g\{A^l, A^j\}_M) &= g [\delta(A^l) \star A^j + A^l \star \delta(A^j) - \delta(A^j) \star A^l - A^j \star \delta(A^l)], \\ &= g [-i\Lambda \star (A^l \star A^j) + i(A^l \star A^j) \star \Lambda + k(\partial_{ql} \Lambda) \star A^j + kA^l \star (\partial_{qj} \Lambda)] \\ &\quad -g [-i\Lambda \star (A^j \star A^l) + i(A^j \star A^l) \star \Lambda + k(\partial_{qj} \Lambda) \star A^l + kA^j \star (\partial_{ql} \Lambda)] \end{aligned}$$

Agrupando os termos na Eq.(5.6), chegamos em

$$\begin{aligned} \delta(F^{jl}) &= -i(\Lambda \star F^{jl} - F^{jl} \star \Lambda) \\ &\quad + (i + gk)A^l \star (\partial_{qj} \Lambda) \\ &\quad - (i + gk)(\partial_{qj} \Lambda) \star A^l \\ &\quad - (i + gk)A^j \star (\partial_{ql} \Lambda) \\ &\quad + (i + gk)(\partial_{ql} \Lambda) \star A^j. \end{aligned}$$

E ao assumir $g = -ik$, escrevemos F^{jl} , como

$$F^{jl} = \partial_{qj} A^l - \partial_{ql} A^j + i \frac{\hbar c}{e} \{A^l, A^j\}_M.$$

E variação do tensor sobre a transformação de calibre, fica dada por

$$\delta(F^{jl}) = i \{F^{jl}, \Lambda\}_M.$$

Usando a propriedade do produto-estrela que trivializa o produto-estrela sobre a integração em toda variedade simplética, temos

$$\int i \{F^{jl}, \Lambda\}_M dpdq = 0.$$

A invariância da densidade Lagrangiana sobre as transformações de calibre locais é alcançada e escrevemos sua forma completa, a saber

$$\mathcal{L} = \frac{1}{m} (D^j \star \phi)^\dagger (D_j \star \phi) + F^{jl} F_{jl}. \quad (5.7)$$

Esse resultado demonstra um comportamento análogo aos campos não comutativos encontrados na teoria Seiberg-Witten ^[56].

A seguir, usaremos a densidade Lagrangiana invariante por transformações de calibre locais, que acabamos de deduzir, para chegar nas equações simpléticas da representação euclidiana da teoria de Ginzburg-Landau.

5.3 Equações Simpléticas de Ginzburg-Landau

A densidade lagrangiana, invariante por transformações de calibre locais, discutida na seção anterior, Eq. (5.7), acrescida do termo de massa e um outro do tipo $\lambda\phi^4$ sugerido, representam o fenômeno supercondutor; constituem assim a densidade Lagrangiana simplética de Ginzburg-Landau, a saber

$$\mathcal{L}_{SGL} = \frac{1}{m} (D^k \star \phi)^\dagger (D_k \star \phi) - \frac{1}{c} F^{kl} F_{kl} + \alpha(T) \phi^\dagger \phi + \frac{\beta}{2} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (5.8)$$

com $D\star = p\star - \frac{e}{c} A\star$, $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ e $F_{kl} = \partial_{qk} A_l - \partial_{ql} A_k + i \frac{\hbar c}{e} \{A_l, A_k\}_M$. A seguir deduziremos as equações diferenciais de Ginzburg-Landau na representação simplética.

As equações de Ginzburg-Landau simpléticas serão deduzidas através das equações de Euler-Lagrange para os campos. A equação de Euler-Lagrange para o campo $\phi(q, p)$,

considerando apenas uma dimensão nas coordenadas q e p , é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial \phi^\dagger} - \partial_q \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_q \phi^\dagger)} \right] - \partial_p \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_p \phi^\dagger)} \right] = 0. \quad (5.9)$$

Calculando as derivadas em relação ao campo $\phi^\dagger(q, p)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial \phi^\dagger} &= \frac{1}{m} \left\{ p^2 \phi - \frac{i\hbar}{2} p (\partial_q \phi) - \frac{e}{c} p (A \star \phi) - \frac{e}{c} p \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] \phi \right\} \\ &\quad + \frac{1}{m} \left\{ \frac{ei\hbar}{2c} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] (\partial_q \phi) + \frac{e^2}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] (A \star \phi) \right\} \\ &\quad + \alpha(T)\phi + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi, \\ \partial_q \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_q \phi^\dagger)} \right] &= \frac{1}{m} \left\{ \partial_q \left[\frac{i\hbar}{2} p \phi + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q \phi) - \frac{ei\hbar}{2c} (A \star \phi) \right] \right\}, \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \frac{i\hbar}{2} p (\partial_q \phi) + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi) - \frac{ei\hbar}{2c} [\partial_q (A \star \phi)] \right\}, \\ \partial_p \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_p \phi^\dagger)} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo na Eq. (5.9), escrevemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{m} \left\{ p^2 \phi - i\hbar p (\partial_q \phi) - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi) - \frac{e}{c} p (A \star \phi) + \frac{ei\hbar}{2c} [\partial_q (A \star \phi)] - \frac{e}{c} p \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] \phi \right\} \\ &\quad + \frac{1}{m} \left\{ \frac{ei\hbar}{2c} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] (\partial_q \phi) + \frac{e^2}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] (A \star \phi) \right\} + \alpha(T)\phi + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi. \end{aligned}$$

Podendo ser melhor estruturada usando o operador-estrela $p \star = p - \frac{i\hbar}{2} \partial_q$, a saber

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{m} \left\{ (p \star)^2 \phi - \frac{e}{c} [p \star (A \star \phi)] - \frac{e}{c} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] (p \star \phi) + \frac{e^2}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) \right] (A \star \phi) \right\} \\ &\quad + \alpha(T)\phi + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi. \end{aligned}$$

Calculando a derivada do produto-estrela, $\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} (\phi^\dagger \star A) = A \star$, reescrevemos a equação diferencial acima, como

$$\frac{1}{m} \left\{ (p \star)^2 \phi - \frac{e}{c} [p \star (A \star \phi)] - \frac{e}{c} [A \star (p \star \phi)] + \frac{e^2}{c^2} [A \star (A \star \phi)] \right\} + \alpha(T)\phi + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi = 0,$$

a qual se mostra constituída do quadrado de um operador-estrela,

$$\frac{1}{m} \left\{ \left[\left(p \star -\frac{e}{c} A \star \right) \cdot \left(p \star -\frac{e}{c} A \star \right) \right] \phi \right\} + \alpha(T)\phi + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi = 0.$$

Identificamos o operador-estrela $D\star = p \star -\frac{e}{c} A \star$ anteriormente definido, possibilitando reescrever a equação diferencial em termos desse operador,

$$\frac{1}{m} [(D\star)^2 \phi(q, p)] + \alpha(T)\phi(q, p) + \beta[\phi^\dagger(q, p)\phi(q, p)] \phi(q, p) = 0. \quad (5.10)$$

Esta equação é a primeira equação simplética de Ginzburg-Landau para o campo $\phi(q, p)$.

De forma análoga obteremos a equação diferencial para o campo $\phi^\dagger(q, p)$. Partindo da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial \phi} - \partial_q \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_q \phi)} \right] - \partial_p \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_p \phi)} \right] = 0, \quad (5.11)$$

Calculando as derivadas da densidade Lagrangiana, Eq. (5.8), em relação ao campo $\phi(q, p)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial \phi^\dagger} &= \frac{1}{m} \left\{ p^2 \phi^\dagger + \frac{i\hbar}{2} p (\partial_q \phi^\dagger) - \frac{e}{c} p (\phi^\dagger \star A) - \frac{e}{c} p \phi^\dagger \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{m} \left\{ -\frac{ei\hbar}{2c} (\partial_q \phi^\dagger) \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] + \frac{e^2}{c^2} (\phi^\dagger \star A) \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] \right\} \\ &\quad + \alpha(T)\phi^\dagger + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi^\dagger, \\ \partial_q \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_q \phi^\dagger)} \right] &= \frac{1}{m} \left\{ \partial_q \left[-\frac{i\hbar}{2} p \phi^\dagger + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q \phi^\dagger) + \frac{ei\hbar}{2c} (\phi^\dagger \star A) \right] \right\}, \\ &= \frac{1}{m} \left\{ -\frac{i\hbar}{2} p (\partial_q \phi^\dagger) + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi^\dagger) - \frac{ei\hbar}{2c} [\partial_q (\phi^\dagger \star A)] \right\}, \\ \partial_p \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_p \phi^\dagger)} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo na Eq. (5.11), escrevemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{m} \left\{ p^2 \phi^\dagger + i\hbar p (\partial_q \phi^\dagger) - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_q^2 \phi^\dagger) - \frac{e}{c} p (\phi^\dagger \star A) - \frac{ei\hbar}{2c} [\partial_q (\phi^\dagger \star A)] - \frac{e}{c} p \phi^\dagger \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{m} \left\{ -\frac{ei\hbar}{2c} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] (\partial_q \phi^\dagger) + \frac{e^2}{c^2} (A \star \phi) \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] \right\} + \alpha(T)\phi^\dagger + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi^\dagger, \end{aligned}$$

que fica melhor estruturada usando o operador-estrela $\star p = p + \frac{i\hbar}{2}\partial_q$, a saber

$$0 = \frac{1}{m} \left\{ \phi^\dagger (\star p)^2 - \frac{e}{c} [(\phi^\dagger \star A) \star p] - \frac{e}{c} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] (\phi^\dagger \star p) + \frac{e^2}{c^2} (\phi^\dagger \star A) \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) \right] \right\} + \alpha(T)\phi^\dagger + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi^\dagger.$$

Calculando a derivada do produto-estrela, $\frac{\partial}{\partial \phi} (A \star \phi) = \star A$, reescrevemos a equação diferencial acima, como

$$\frac{1}{m} \left\{ \phi^\dagger (\star p)^2 - \frac{e}{c} [(\phi^\dagger \star A) \star p] - \frac{e}{c} [(\phi^\dagger \star p) \star A] + \frac{e^2}{c^2} [(\phi^\dagger \star A) \star A] \right\} + \alpha(T)\phi^\dagger + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi^\dagger = 0,$$

novamente, identificamos o quadrado de um operador-estrela,

$$\frac{1}{m} \left\{ \phi^\dagger \left[(\star p - \star A \frac{e}{c}) \cdot (\star p - \star A \frac{e}{c}) \right] \right\} + \alpha(T)\phi^\dagger + \beta(\phi^\dagger \phi)\phi^\dagger = 0.$$

E, então, reconhecendo o operador-estrela $\star D$, chegamos na equação diferencial para o campo $\phi^\dagger(q, p)$,

$$\frac{1}{m} \phi^\dagger(q, p) (\star D)^2 + \alpha(T)\phi^\dagger(q, p) + \beta|\phi(q, p)|^2 \phi^\dagger(q, p) = 0. \quad (5.12)$$

As equações, Eq. (5.10) e Eq. (5.12), são as primeiras equações simpléticas de Ginzburg-Landau para os campos $\phi(q, p)$ e $\phi^\dagger(q, p)$, respectivamente.

A segunda equação simplética de Ginzburg-Landau é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre $A^k(q, p)$, a qual pode ser escrita, como

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial A^k} - \partial_{q^l} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_{q^l} A^k)} \right] - \partial_{p^l} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial (\partial_{p^l} A^k)} \right] = 0. \quad (5.13)$$

Calculando a derivada da densidade Lagrangiana, Eq. (5.8), em relação ao campo A^k , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial A^k} &= -\frac{e}{mc} \left\{ \left[(\phi^\dagger \star p^k) - \frac{e}{c} \phi^\dagger A^k \right] \phi + \phi^\dagger \left[(p^k \star \phi) - \frac{e}{c} A^k \phi \right] \right\} \\ &= -\frac{e}{mc} \left[(\phi^\dagger \star p^k) \phi + \phi^\dagger (p^k \star \phi) - \frac{2e}{c} A^k |\phi|^2 \right] \\ &= -\frac{e}{mc} [(\phi^\dagger \star D^k) \phi + \phi^\dagger (D^k \star \phi)] \end{aligned}$$

Nesse ponto, se fez necessário estabelecer a atuação do campo A^\star através do produto-estrela, ou seja, como podemos assumir $A \star \phi$ e $\phi^\dagger \star A$. De forma geral, o que temos é $A^\star = A(q^\star, p^\star)$, uma combinação dos operadores p^\star e q^\star . Contudo, em primeira análise, vamos assumir $A^\star = A$ e $\star A = A$, o que implica que o parêntesis de Moyal na definição do tensor anti-simétrico F^{kl} se anula. Prosseguindo para obtenção da equação de Euler-Lagrange para o campo A^k , calculamos o segundo termo da Eq. (5.13), temos

$$\partial_{q^l} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{GLS}}{\partial (\partial_{q^l} A^k)} \right] = \partial_{q^l} \left(-\frac{1}{c} F^{kl} \right).$$

Então, reescrevemos a equação de Euler-Lagrange para o campo A^k , como

$$\partial_{q^l} F^{kl}(q, p) = \mathcal{J}^k(q, p),$$

com $\mathcal{J}^k(q, p)$, dado por

$$\mathcal{J}^k(q, p) = \frac{e}{m} [(\phi^\dagger \star D^k) \phi + \phi^\dagger (D^k \star \phi)]. \quad (5.14)$$

A expressão acima para a densidade de corrente $\mathcal{J}^k(q, p)$ se configura como a segunda equação simplética de Ginzburg-Landau. Esta densidade de corrente possui divergência nula, para tanto, basta verificar que, sendo o tensor F^{kl} anti-simétrico, implica imediatamente em $\partial_{q^k} \partial_{q^l} F^{kl} = \partial_{q^k} \mathcal{J}^k = 0$. Contudo, para uma melhor compreensão faremos a divergência da Eq. (5.14),

$$\begin{aligned} \partial_{q^k} \mathcal{J}^k(q, p) &= \frac{e}{m} \partial_{q^k} [(\phi^\dagger \star D^k) \phi + \phi^\dagger (D^k \star \phi)] \\ &= \frac{e}{m} \{ \partial_{q^k} [(\phi^\dagger \star D^k) \phi] + \partial_{q^k} [\phi^\dagger (D^k \star \phi)] \} \\ &= \frac{e}{m} [(\partial_{q^k} \phi^\dagger) (p^k \star \phi) + \phi^\dagger \partial_{q^k} (p^k \star \phi) + \partial_{q^k} (\phi^\dagger \star p^k) \phi + (p^k \star \phi) (\partial_{q^k} \phi)] \\ &\quad - \frac{2e^2}{mc} [(\partial_{q^k} A^k) |\phi|^2 + A^k (\partial_{q^k} |\phi|^2)] \\ &= \left[i\hbar p^k (\partial_{q^k} \phi^\dagger) - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_{q^k}^2 \phi^\dagger) \right] \phi + \frac{2e}{i\hbar m} \phi^\dagger \left[i\hbar p^k (\partial_{q^k} \phi) + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_{q^k}^2 \phi) \right] \\ &\quad - \frac{2e^2}{mc} [(\partial_{q^k} A^k) |\phi|^2 + A^k (\partial_{q^k} |\phi|^2)]. \end{aligned}$$

Nesse ponto da demonstração, se faz necessário usar as equações de Euler-Lagrange para os campos ϕ e ϕ^\dagger , Eq. (5.10) e Eq. (5.12), respectivamente. Lembrado que, devemos igualmente

considerar $A \star \phi = A\phi$ e $\phi^\dagger \star A = \phi^\dagger A$, dessa forma

$$\begin{aligned} \partial_{q^k} \mathcal{J}^k(q, p) &= \frac{2e}{i\hbar m} \left[-\phi^\dagger (p^k)^2 + \frac{2e}{c} \phi^\dagger p^k A^k + \frac{ie\hbar}{c} (\partial_{q^k} \phi^\dagger) A^k + \frac{ie\hbar}{2c} \phi^\dagger (\partial_{q^k} A^k) - \frac{e^2}{c^2} \phi^\dagger (A^k)^2 \right] \phi \\ &+ \frac{2e}{i\hbar m} \phi^\dagger \left[(p^k)^2 \phi - \frac{2e}{c} p^k A^k \phi + \frac{ie\hbar}{c} A^k (\partial_{q^k} \phi) + \frac{ie\hbar}{2c} (\partial_{q^k} A^k) \phi + \frac{e^2}{c^2} (A^k)^2 \phi \right] \\ &- \frac{2e^2}{mc} [(\partial_{q^k} A^k) |\phi|^2 + A^k (\partial_{q^k} |\phi|^2)]. \end{aligned}$$

É possível observar que alguns termos são cancelados, restando-nos

$$\begin{aligned} \partial_{q^k} \mathcal{J}^k(q, p) &= \frac{2e}{i\hbar m} \left[\frac{ie\hbar}{c} (\partial_{q^k} \phi^\dagger) A^k + \frac{ie\hbar}{2c} \phi^\dagger (\partial_{q^k} A^k) \right] \phi + \frac{2e}{i\hbar m} \phi^\dagger \left[\frac{ie\hbar}{c} A^k (\partial_{q^k} \phi) + \frac{ie\hbar}{2c} (\partial_{q^k} A^k) \phi \right] \\ &- \frac{2e^2}{mc} [(\partial_{q^k} A^k) |\phi|^2 + A^k (\partial_{q^k} |\phi|^2)] \end{aligned}$$

E, então, obtemos o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} \partial_{q^k} \mathcal{J}^k(q, p) &= \frac{2e^2}{mc} [(\partial_{q^k} A^k) |\phi|^2 + A^k (\partial_{q^k} |\phi|^2)] - \frac{2e^2}{mc} [(\partial_{q^k} A^k) |\phi|^2 + A^k (\partial_{q^k} |\phi|^2)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

demonstrando a conservação de $\mathcal{J}^k(q, p)$.

No próximo capítulo, identificaremos a densidade de corrente crítica simplética, e a equivalente fenomenologia simplética.

Capítulo 6

Fenomenologia de Ginzburg-Landau Simplética

Na teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau encontramos duas equações diferenciais, assim chamadas primeira e segunda equação, deduzidas aplicando-se o princípio de extremo à energia livre do sistema. Na resolução e obtenção de suas respectivas soluções, em condições adequadas, é possível deduzir as principais características do estado supercondutor, conforme discutido em maiores detalhes no Capítulo 2. Grandezas características, tais como o comprimento de coerência e penetração magnética, ou mesmo, a densidade de corrente crítica são apresentadas. A estrutura geral dos diamagnetos perfeitos supercondutores pode ser inferida.

Neste capítulo, seguiremos os procedimentos usuais para obtenção da fenomenologia do estado supercondutor. Inicialmente descreveremos a densidade de corrente crítica a partir da densidade Lagrangiana simplética de Ginzburg-Landau. Em seguida, sugerindo um *ansatz*, encontraremos uma solução particular para primeira equação simplética de Ginzburg-Landau do campo $\phi(q, p)$, ou quase amplitude de probabilidade. Esta mesma solução, permiti-nos chegar no comprimento de coerência, e no comportamento funcional esperado para um supercondutor. Prosseguindo, fazendo considerações similares à teoria fenomenológica usual, deduziremos o efeito Meissner-Ochsenfeld e o comprimento de penetração magnética. A função de quase distribuição de probabilidade, vinculada à solução particular citada acima, é calculada, e resultados interessantes emergem da representação.

6.1 Densidade de Corrente Crítica

A partir da densidade Lagrangiana, Eq. (5.8), reescrevemos os termos de forma que seu novo formato evidencie a dependência com o módulo ao quadrado do campo $\phi(q, p)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SGL} = & \left(p - \frac{e}{c}A\right) \frac{i\hbar}{2m} [(\partial_q \phi^\dagger) \phi - \phi^\dagger (\partial_q \phi)] + \left[\alpha(T) + \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c}A\right)^2\right] |\phi|^2 \\ & + \frac{\beta}{2} (|\phi|^2)^2, \end{aligned}$$

onde, novamente, escolhemos a relação mais simples de $A \star$, ou seja, $A \star \phi = A\phi$ e $\phi^\dagger \star A = \phi^\dagger A$. Derivando em relação a $|\phi|^2$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SGL}}{\partial |\phi|^2} = \alpha(T) + \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c}A\right)^2 + \beta |\phi|^2.$$

Igualando a zero para obter o valor de $|\phi|^2$, que torna a densidade Lagrangiana mínima, obtemos

$$\alpha(T) + \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c}A\right)^2 + \beta |\phi|^2 = 0.$$

E, tomando o regime supercondutor, onde $\alpha(T) = -|\alpha(T)|$,

$$|\phi|^2 = \frac{|\alpha(T)|}{\beta} \left[1 - \frac{mv_\phi^2}{|\alpha(T)|}\right],$$

com v_ϕ sendo a velocidade do fluxo de campo na direção perpendicular à coordenada q , dada por $v_\phi = \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c}A\right)$. A expressão para a densidade de corrente, Eq. (5.14), pode ser escrita como

$$\mathcal{J}(q, p) = -\frac{ie\hbar}{2m} [\phi^\dagger (\partial_q \phi) - (\partial_q \phi^\dagger) \phi] + \frac{2e}{m} \left(p - \frac{e}{c}A\right) |\phi|^2. \quad (6.1)$$

Entendemos que a variação do campo ϕ ocorre na direção perpendicular do *momentum* p , algo semelhante ao que encontramos no escoamento laminar estacionário de um fluido viscoso. Nesse contexto, o módulo quadrático do campo $|\phi(q, p)|^2$, que é interpretado na teoria original de Ginzburg-Landau como sendo a densidade de portadores de carga, representa o perfil de velocidade do fluxo de campo $\phi(q, p)$. O fluxo, porém, é estabelecido na direção perpendicular ao perfil de velocidade e é representado pela coordenada p , com contribuição da resposta ao campo magnético externo, caso exista. Assim, na Eq. (6.1) acima, podemos

desprezar a variação desse perfil ao observar a variação do escoamento. Reescrevendo a densidade de corrente simplética em função da velocidade do fluxo do campo, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(v_\phi) &= 2ev_\phi|\phi|^2, \\ &= 2e\frac{|\alpha(T)|}{\beta}\left[1 - \frac{mv_\phi^2}{|\alpha(T)|}\right]v_\phi.\end{aligned}$$

Em geral, as duas variações estão interligadas, mas podem ser convenientemente dissociadas, e o comportamento "competitivo" entre a densidade de portadores de carga e a densidade de corrente, é grafado na Figura 6.1. Para obter o valor máximo da densidade de

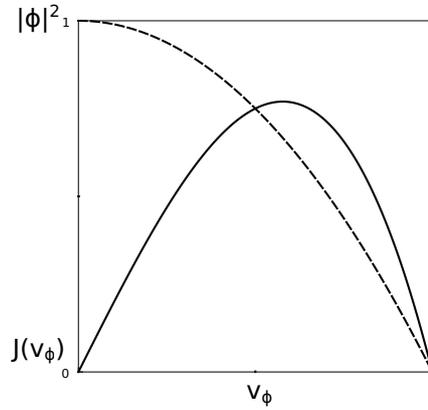


Figura 6.1: Densidade de corrente simplética, $J(v_\phi)$ (linha sólida), e densidade usual de portadores de carga supercondutora, $|\phi|^2$ (linha tracejada), em função da velocidade do fluxo de campo v_ϕ .

corrente, derivamos em relação à velocidade de fluxo de campo v_ϕ , chegando ao seguinte resultado apontado pela teoria fenomenológica original, $\frac{1}{2}m^*v_\phi^2 = \frac{|\alpha(T)|}{3}$, onde $m^* = 2m$. Substituindo na expressão da densidade de corrente, obtemos a densidade de corrente máxima suportada pelo supercondutor, resultado também encontrado pela teoria original, conhecida como corrente de quebra de par, a saber

$$\mathcal{J}_c(T) = \frac{4e}{3\beta\sqrt{3}m}|\alpha(T)|^{\frac{3}{2}}.$$

Nesse último resultado, é possível observar a proporcionalidade usual com a temperatura da densidade de corrente crítica, $\propto |\alpha(T)|^{\frac{3}{2}}$, demonstrando a consistência da representação

simplética. Considerando ainda, a relação entre a velocidade do fluxo de campo e o momento, podemos calcular momento máximo do campo, assumindo a ausência da resposta do campo magnético externo, dado por

$$p_c = \frac{\hbar}{2\xi(T)\sqrt{3}}. \quad (6.2)$$

A representação simplética possibilita determinar a densidade de corrente crítica e o *momentum* associado, descrevendo o comportamento característico do estado supercondutor, nas proximidades da temperatura crítica. A seguir, resolveremos a primeira equação simplética de Ginzburg-Landau na ausência de campo externo, obtendo uma solução particular.

6.2 Solução particular da primeira equação simplética de Ginzburg-Landau

Para encontrar uma solução para a Eq. (4.19), inicialmente substituiremos o operador-estrela, p_* , a saber

$$\frac{1}{m} \left[p^2 \phi(q, p) - i\hbar \partial_q \phi(q, p) - \frac{\hbar^2}{4} \partial_q^2 \phi(q, p) \right] + \alpha(T) \phi(q, p) + \beta |\phi(q, p)|^2 \phi(q, p) = 0. \quad (6.3)$$

Assumindo o *ansatz* ,

$$\phi(q, p) = \exp\left(-\frac{2i}{\hbar}pq\right) F(p)\varphi(q), \quad (6.4)$$

calculamos as derivadas do campo $\phi(q, p)$ em relação à coordenada q ,

$$\begin{aligned} \partial_q \phi(q, p) &= \exp\left(-\frac{2i}{\hbar}pq\right) F(p) \left[\left(-\frac{2i}{\hbar}p\right) \varphi(q) + \frac{d}{dq} \varphi(q) \right], \\ \partial_q^2 \phi(q, p) &= \exp\left(-\frac{2i}{\hbar}pq\right) F(p) \left[\left(-\frac{4}{\hbar^2}p^2\right) \varphi(q) - 2\left(\frac{2i}{\hbar}p\right) \frac{d}{dq} \varphi(q) + \frac{d^2}{dq^2} \varphi(q) \right], \end{aligned}$$

Estas, substituídas na Eq. (6.3), ficam

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \frac{d^2}{dq^2} \varphi(q) + \alpha(T) \varphi(q) + \beta_p |\varphi(q)|^2 \varphi(q) = 0, \quad (6.5)$$

onde $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$, e $\beta_p = \beta |F(p)|^2$.

Seguindo o procedimento geralmente adotado ^[42] para resolução da equação diferencial

desse tipo, e considerando o material no regime supercondutor ($\alpha = -|\alpha|$), definido

$$\xi^2 \equiv \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}. \quad (6.6)$$

Faremos a seguinte substituição,

$$\frac{\beta_p}{|\alpha|} \varphi^2(q) = g^2(q).$$

E, então, reescrevemos a equação diferencial,

$$-\xi^2 \frac{d^2}{dq^2} g(q) - g(q) + g^3(q) = 0.$$

Multiplicando por $\frac{d}{dq} g(q)$, temos

$$\frac{d}{dq} \left[-\frac{\xi^2}{2} \left(\frac{d}{dq} g(q) \right)^2 - \frac{1}{2} g^2(q) + \frac{1}{4} g^4(q) \right] = 0.$$

Considerando a fronteira entre o material normal e o supercondutor em $q = 0$, esperamos $\frac{d}{dq} g(q)|_{q \rightarrow \infty} = 0$, ou seja, muito afastado da fronteira, e ainda que $g^2 = 1$, pois $\phi_l^2(q)|_{q \rightarrow \infty} = \frac{|\alpha|}{\beta}$. Então, podemos escrever

$$\xi^2 \left(\frac{d}{dq} g(q) \right)^2 = \frac{1}{2} [1 - g^2(q)]^2.$$

cuja solução é dada por

$$g(q) = \tanh \left[\frac{q}{\xi(T)\sqrt{2}} \right],$$

assim, a função $\varphi(q)$, fica

$$\varphi(q) = \sqrt{\frac{|\alpha(T)|}{\beta_p}} \tanh \left[\frac{q}{\xi(T)\sqrt{2}} \right]. \quad (6.7)$$

A solução completa para o campo $\phi(q, p)$ deve ser escrita, como segue

$$\phi(q, p) = \exp \left(-\frac{2i}{\hbar} pq \right) \frac{F(p)}{|F(p)|} \sqrt{\frac{|\alpha(T)|}{\beta}} \tanh \left[\frac{q}{\xi(T)\sqrt{2}} \right], \quad (6.8)$$

e o seu quadrado,

$$|\phi(q, p)|^2 = \frac{|\alpha(T)|}{\beta} \tanh^2 \left[\frac{q}{\xi(T)\sqrt{2}} \right]. \quad (6.9)$$

Notamos que a solução obtida indica a fenomenologia esperada do estado supercondutor, com o comprimento de coerência $\xi(T)$ dado pela Eq. (6.6) acima. Ainda precisamos estabelecer o papel desempenhado pela função $F(p)$, presente na solução particular. A integração da densidade de corrente supercondutora simplética no espaço dos *momenta* indicará sua forma funcional.

6.3 Efeito Meissner-Ochsenfeld

Considerado um importante efeito dos materiais supercondutores, o efeito Meissner-Ochsenfeld consiste na expulsão das linhas de campo magnético do interior da amostra do material supercondutor, quando sujeito a um campo magnético externo. A partir da expressão da densidade de corrente, Eq. (6.1), considerando o *ansatz* proposto na seção 6.2, a saber

$$\phi(q, p) = \exp \left(-\frac{2i}{\hbar} pq \right) F(p) \sigma(q),$$

as derivadas em relação à q dos campos $\phi(q, p)$ e $\phi^\dagger(q, p)$, ficam

$$\begin{aligned} \partial_q \phi(q, p) &= \exp \left(-\frac{2i}{\hbar} pq \right) F(p) \left[\left(-\frac{2i}{\hbar} p \right) \sigma(q) + \frac{d}{dq} \sigma(q) \right], \\ \partial_q \phi^\dagger(q, p) &= \exp \left(\frac{2i}{\hbar} pq \right) F^\dagger(p) \left[\left(\frac{2i}{\hbar} p \right) \sigma^\dagger(q) + \frac{d}{dq} \sigma^\dagger(q) \right]. \end{aligned}$$

E, ao serem substituídas na expressão da densidade de corrente simplética, temos

$$\mathcal{J}(q, p) = |F(p)|^2 \left\{ -\frac{ie\hbar}{2m} \left[\sigma^\dagger(q) \frac{d}{dq} \sigma(q) - \sigma(q) \frac{d}{dq} \sigma^\dagger(q) \right] - \frac{2e^2}{mc} A |\sigma(q)|^2 \right\}.$$

Ao considerarmos ainda, o módulo ao quadrado da função $F(p)$ como sendo a distribuição do tipo delta de Dirac, $|F(p)|^2 = \delta(p)$, integramos a densidade de corrente simplética sobre todo espaço dos *momenta*, e obtemos

$$J(q) = -\frac{ie\hbar}{2m} \left[\sigma^\dagger(q) \frac{d}{dq} \sigma(q) - \sigma(q) \frac{d}{dq} \sigma^\dagger(q) \right] - \frac{2e^2}{mc} A |\sigma(q)|^2,$$

a qual é reconhecida como a densidade de corrente usual de Ginzburg-Landau.

Deste ponto em diante, usando o procedimento estabelecido na literatura, tomamos

a variação da função $\sigma(q)$ pequena, e sendo assim o $|\sigma|$ uma constante. Reescrevemos a expressão da densidade de corrente, como

$$J(q) = -\frac{2e^2}{mc}A(q)|\sigma|^2.$$

E aplicando o rotacional dos dois lados, temos

$$\nabla \times \vec{J}(q) = -\frac{2e^2}{mc}|\sigma|^2\vec{B}(q),$$

e usando a lei de Ampère no sistema de unidades gaussiano, $\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$, chegamos a

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \left(\frac{8\pi e^2}{mc^2}|\sigma|^2\right)\vec{B} = 0,$$

conhecida como segunda equação de London. Agora fazendo uso da identidade vetorial $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ e lembrando que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, escrevemos a seguinte equação diferencial para o campo magnético \vec{B} ,

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\lambda_l^2} \vec{B} = 0,$$

onde λ_l é o chamado comprimento de penetração, escrito como

$$\lambda_l = \sqrt{\frac{mc^2}{8\pi e^2 |\sigma|^2}}.$$

Para o caso unidimensional, $q^1 = q$, a equação diferencial, torna-se

$$\frac{d^2}{dq^2} B(q) - \frac{1}{\lambda_l^2} B(q) = 0$$

para qual pode-se obter a seguinte solução

$$B(q) = B_0 \exp\left(-\frac{q}{\lambda_l}\right),$$

com B_0 sendo um campo externo ao material supercondutor. Ao integrar em relação à

posição q , chegamos na seguinte expressão para o potencial vetor $A(q)$,

$$A(q) = A_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{q}{\lambda_l}\right) \right].$$

É possível, por meio desses resultados, observar o comportamento dos campos $A(q)$ e $B(q)$

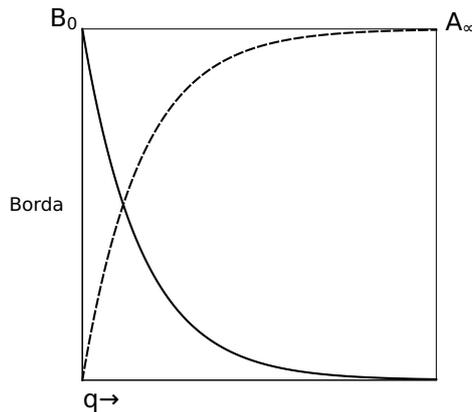


Figura 6.2: O potencial vetor magnético $A(q)$ (linha tracejada) e o campo magnético $B(q)$ (linha sólida) em função da posição à medida que adentra o material supercondutor a partir da borda.

no interior ($q > 0$) do supercondutor, próximo à fronteira. Na Figura 6.2 grafamos suas respectivas funções para melhor visualização.

Obtemos, dessa forma, o conhecido efeito Meissner-Ochsenfeld, com a expressão característica do comprimento de penetração magnética, λ_l . Nesse contexto, a forma funcional do módulo quadrado da função $F(p)$ foi determinada e será usada na seção seguinte para o cálculo, em primeira ordem de \hbar , da quase distribuição de probabilidade, $f(q, p)$.

6.4 Função de quase distribuição de probabilidade e o fator de negatividade

O campo $\phi(q, p)$, como tem sido denotado, é o parâmetro de ordem da teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau, que nesse contexto, possui conteúdo de espaço de fase. Esse campo está associado a uma função de quase distribuição de probabilidade $f(q, p)$ a ser determinada usando o produto-estrela,

$$f(q, p) = \phi(q, p) \star \phi^\dagger(q, p). \quad (6.10)$$

Na Seção 6.2, obtivemos uma solução particular para o campo $\phi(q, p)$ resolvendo a primeira equação simplética de Ginzburg-Landau na ausência de campo externo, que será usada para este cálculo da função quase distribuição de probabilidade. A primeira equação citada é dada por

$$\frac{1}{m} [(D\star)^2 \phi(q, p)] + \alpha(T)\phi(q, p) + \beta [\phi^\dagger(q, p)\phi(q, p)] \phi(q, p) = 0.$$

Tomando $A = 0$, no operador-estrela $D\star = p\star - \frac{\varepsilon}{c}A\star$, temos

$$\frac{1}{m} [(p\star)^2 \phi(q, p)] + \alpha(T)\phi(q, p) + \beta [\phi^\dagger(q, p)\phi(q, p)] \phi(q, p) = 0.$$

Esta, por sua vez, foi resolvida na Seção 6.2, com a seguinte solução particular,

$$\phi(q, p) = \exp\left(-\frac{2i}{\hbar}pq\right) \frac{F(p)}{|F(p)|} \sqrt{\frac{|\alpha(T)|}{\beta}} \tanh\left[\frac{q}{\xi(T)\sqrt{2}}\right].$$

Passaremos agora a determinar a função de quase distribuição de probabilidade, desta solução particular do campo $\phi(q, p)$, uma quase amplitude de probabilidade. Como não foi possível obter a função de quase distribuição de maneira exata, a expandiremos em termos de potências de \hbar , Eq. (3.11), a saber

$$f(q, p) = \phi(q, p) \left[1 + \frac{i\hbar}{2}\mathbf{\Lambda}_0 + \frac{1}{2!} \left(\frac{i\hbar}{2}\mathbf{\Lambda}_0\right)^2 + \dots \right] \phi^\dagger(q, p).$$

Dessa forma, considerando até a primeira ordem em \hbar , obtemos a função de quase distribuição de probabilidade aproximada, a qual chamaremos de $f_1(q, p)$, com o índice "1" se referindo à primeira ordem de \hbar e expressa por,

$$f_1(q, p) = \phi(q, p) \left(1 + \frac{i\hbar}{2}\mathbf{\Lambda}_0 \right) \phi^\dagger(q, p),$$

com $\mathbf{\Lambda}_0$ dado pela Eq. (3.7). Com isso, $f_1(q, p)$, adquire o seguinte formato

$$f_1(q, p) = \phi(q, p)\phi^\dagger(q, p) + \frac{i\hbar}{2} \{ [\partial_q \phi(q, p)] [\partial_p \phi^\dagger(q, p)] - [\partial_p \phi(q, p)] [\partial_q \phi^\dagger(q, p)] \}.$$

Calculando as derivadas dos campos, temos

$$\begin{aligned}\partial_q \phi(q, p) &= \exp\left(-\frac{2i}{\hbar}pq\right) F(p) \left[\left(-\frac{i}{\hbar}2p\right) \varphi(q) + \frac{d}{dq} \varphi(q) \right], \\ \partial_p \phi(q, p) &= \exp\left(-\frac{2i}{\hbar}pq\right) \varphi(q) \left[\left(-\frac{i}{\hbar}2q\right) F(p) + \frac{d}{dp} F(p) \right], \\ \partial_q \phi^\dagger(q, p) &= \exp\left(\frac{2i}{\hbar}pq\right) F^\dagger(p) \left[\left(\frac{i}{\hbar}2p\right) \varphi^\dagger(q) + \frac{d}{dq} \varphi^\dagger(q) \right], \\ \partial_p \phi^\dagger(q, p) &= \exp\left(\frac{2i}{\hbar}pq\right) \varphi^\dagger(q) \left[\left(\frac{i}{\hbar}2q\right) F^\dagger(p) + \frac{d}{dp} F^\dagger(p) \right].\end{aligned}$$

A partir desse ponto, identificamos $F(p)$, de tal forma que seu módulo quadrado $|F(p)|^2$ possa ser representado por uma distribuição do tipo delta de Dirac, em concordância com o requerido na seção anterior, quando usamos dessa representação para inferir a densidade de corrente usual de Ginzburg-Landau. Assumindo que esta representação, possa ser uma gaussiana, do tipo

$$|F(p)|^2 = \frac{\xi(T)}{\hbar\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\xi^2(T)}{\hbar^2}p^2\right]$$

com $\xi(T)$ correspondendo ao comprimento de coerência, Eq. (6.6). Esta representação da distribuição do tipo delta de Dirac somente é válida para o limite $\frac{\xi(T)}{\hbar} \rightarrow \infty$, o qual não se mostra fora de contexto. Sendo assim, sua divisão pelo módulo, que é a parte que se mostra na solução particular, é dada por

$$\frac{F(p)}{|F(p)|} = \exp\left[\frac{i\xi^2(T)}{\hbar^2}p^2\right],$$

com sua respectiva adjunta,

$$\frac{F^\dagger(p)}{|F(p)|} = \exp\left[-\frac{i\xi^2(T)}{\hbar^2}p^2\right].$$

Feita esta escolha conveniente, chegamos na seguinte expressão para a função de quase distribuição de probabilidade,

$$f_1(q, p) = |\varphi(q)|^2 - \left[q - \frac{\xi^2(T)}{\hbar}p \right] \frac{d}{dq} |\varphi(q)|^2. \quad (6.11)$$

Para analisar seu comportamento funcional, e sua dependência com a coordenada p , tomamos $|\alpha(T)| = \beta = \hbar = m = 1$, onde a expressão simplificada, fica

$$f_1(q, p) = \tanh^2(q\sqrt{2}) \left[1 - \frac{4\sqrt{2} \left(q - \frac{p}{4} \right)}{\sinh(2q\sqrt{2})} \right]. \quad (6.12)$$

O comportamento desta função quase distribuição é apresentado na Figura 6.3. Primeiro

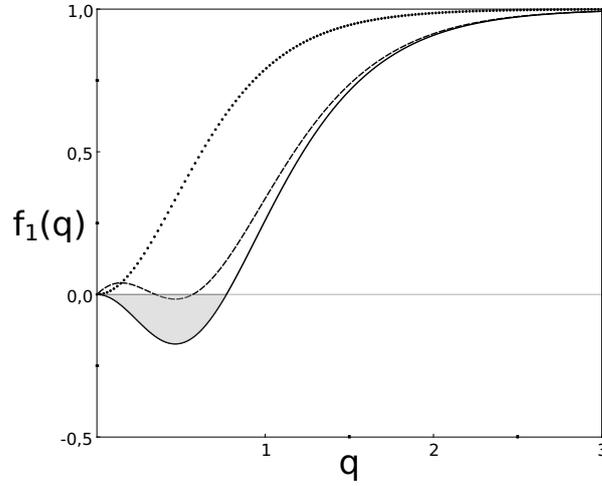


Figura 6.3: *Comportamento funcional de $f_1(q)$ para diferentes valores de p . A linha pontilhada: $|\varphi(q)|^2$, corresponde ao resultado usual para a densidade de Ginzburg-Landau. Linha sólida: $f_1(q, p = 0)$. Linha tracejada: $f_1(q, p = p_c)$.*

comparamos $f_1(q, p)$, para alguns valores fixos de p com a densidade padrão de Ginzburg-Landau, $|\phi(q)|^2$. Ou seja, o comportamento padrão para um supercondutor típico é obtido na ordem zero de \hbar (linha pontilhada). A função de quase distribuição deduzida atinge uma região negativa próxima à borda do supercondutor, mesmo com $p = 0$ (linha sólida), onde um comportamento não clássico do sistema é identificado como consequência do fator de negatividade^[33]. Geometricamente esse fator é representado aqui como a área cinza negativa indicada na Figura 6.3. Notamos, no entanto, que o fator de negatividade é máximo para $p = 0$ e se anula para

$$p = \frac{\hbar}{\xi(T)} \sqrt{2} \left[\cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \right],$$

ligeiramente acima de p_c , Eq. (6.2), apontando para a perda da não-classicalidade.

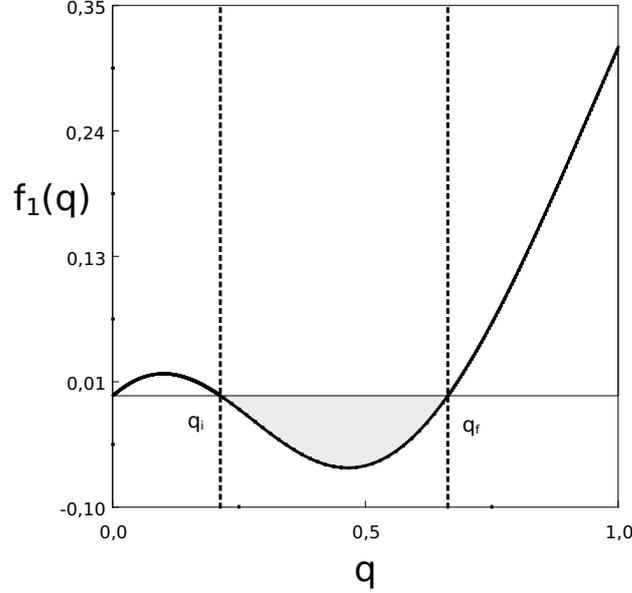


Figura 6.4: $f_1(q)$ para $p = 0,1$ com $N_{eg} = -0,20$.

Para o cálculo da área negativa acessada, temos

$$N_{eg} = \int_{q_i}^{q_f} f_1(q, p) dq.$$

Considerando $f_1(q, p)$, dado pela Eq. (6.11), chegamos a

$$N_{eg} = 2 \int_{q_i}^{q_f} |\varphi(q)|^2 dq - |\varphi(q)|^2 \left[q - \frac{\xi^2(T)}{\hbar} p \right]_{q_i}^{q_f}.$$

Ao usarmos $|\alpha(T)| = \beta = \hbar = m = 1$, somos capazes de escrever a seguinte expressão para o fator de negatividade N_{eg}

$$N_{eg} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[q - \tanh(q\sqrt{2}) \right]_{q_i}^{q_f} - \tanh^2(q\sqrt{2}) \left[q - \frac{\xi^2(T)}{\hbar} p \right]_{q_i}^{q_f}.$$

A Figura 6.4, demonstra graficamente como os limites q_i e q_f são determinado. Observamos as raízes da função de quase distribuição e então calculamos a integral. Além disso, também

é possível observar que a região negativa acessada está mais próxima da borda do material, indicando que o sistema, nesta região, apresenta comportamento não clássico. A região negativa acessada, no entanto, à medida que p aumenta, se desloca para o interior do material até desaparecer por completo.

Portanto, esses resultados mostram que a função de distribuição de quase probabilidade, uma função do tipo Wigner, indica dois outros aspectos importantes. O primeiro é que a região negativa, como é mostrada na Figura 6.3, está na fronteira do material supercondutor ($q = 0$), para o valor inicial da coordenada de momento $p = 0$. À medida que os valores da coordenada p aumentam, ou seja, à medida que o momento associado ao fluxo de campo aumenta, essa região negativa se afasta da fronteira, entrando no material supercondutor e reduz sua área. O segundo aspecto, digno de nota, é a anulação completa da região negativa para um momento específico. Tal valor é muito próximo daquele identificado na teoria original, para o qual há o desemparelhamento dos portadores de carga. Essas são duas contribuições notáveis da função de quase distribuição de probabilidade associada ao parâmetro de ordem da teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau.

Capítulo 7

Conclusões

Na presente tese de doutorado, uma representação Euclidiana para a teoria de Ginzburg-Landau é desenvolvida usando um espaço de Hilbert definido numa variedade simplética. Primeiro, com a abordagem da álgebra térmica e as regras de conjugação til, uma equação do tipo Liouville-Von-Neumann independente do tempo é derivada. Em seguida, identificamos o parâmetro de ordem da teoria fenomenológica como uma quase amplitude de probabilidade, que está associada a uma função de quase distribuição de probabilidade, ou seja, uma função do tipo Wigner. A primeira equação de Ginzburg-Landau no espaço de fase é, então, derivada na ausência de um campo externo.

Avançamos na construção do formalismo de forma mais robusta e escrevemos a teoria de calibre, da qual obtivemos a expressão para a densidade de corrente supercondutora. Mostramos também que a função quase distribuição, $f_\phi(q, p)$, associada à solução $\phi(q, p)$, apresenta um comportamento que não fica evidente na densidade usual de portadores de carga, a saber: $f_\phi(q, p)$ atinge regiões negativas próximas da borda do material supercondutor. Esta característica indica uma estrutura não clássica do estado supercondutor. Isso ocorre para certos valores do momento associado ao campo $\phi(q, p)$, cancelando-se para um valor específico da coordenada p . Esse valor limite para o momento associado ao campo é muito próximo do valor que determina o desemparelhamento dos portadores de carga supercondutores; na literatura chamado de momento crítico.

Cada passo da nossa abordagem enfatiza a preocupação com a construção de uma teoria de representação de grupos de simetria. A associação de uma função do tipo Wigner com o parâmetro de ordem da teoria de Ginzburg-Landau permite-nos estabelecer um paralelo geral com a teoria fenomenológica usual já bem estabelecida. De fato, os cálculos no espaço de fase identificam o comportamento típico de um supercondutor derivados do formalismo padrão de Ginzburg-Landau, incluindo comprimentos característicos e densi-

dade de corrente. Isso demonstra a consistência da representação. Por outro lado, a análise da função de quase distribuição de probabilidade apresenta aspectos que, embora muito importantes, não estão presentes no formalismo usual, como a não classicalidade do estado supercondutor.

Por fim, entendemos que a representação simplética da teoria de Ginzburg-Landau ainda apresenta setores a serem explorados. Esperamos determinar novas soluções para as equações simpléticas e verificar que novas informações podem ser obtidas. A representação não-abeliana também deve ser desenvolvida. A representação desse formalismo num espaço de Fock simplético (correspondente a uma quantização da teoria, equivalente a um formalismo de muitos corpos) e a determinação de funções de correlação merecem certamente ser exploradas. Esses aspectos serão apresentados em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- 1 H. Kamerlingh-Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden, **120b**, (1911). [1](#), [4](#)
- 2 F. London, H. London, Proceed. Royal Soc., **A149**, 71 (1935). [1](#), [5](#), [12](#), [13](#), [17](#)
- 3 W. Meissner, R. Ochsenfeld, Naturwissenschaften, **21**, 787 (1933). [1](#), [5](#), [13](#), [17](#)
- 4 V.L. Ginzburg, L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **20**, 1064 (1950). This paper was published in English in the volume: L.D. Landau Collected Papers (Oxford: Pergamon Press, 1965) p. 546. [1](#), [5](#), [9](#)
- 5 M. Tinkham, Introduction to Superconductivity (McGraw Hill, 2nd Edition, New York, 1996). [1](#), [10](#), [13](#)
- 6 E.A. Reis, G.X.A. Petronilo, R.G.G. Amorim, H. Belich, F.C. Khanna, A.E. Santana, *Symplectic Representation of The Ginzburg-Landau Theory*, arXiv:2406.13047, Em impressão no IJMPA (2024). [1](#), [29](#)
- 7 Y. Contoyiannis, et al, Phys. Scr., **96**, 075204 (2021). [1](#)
- 8 H. Korsch, M. Berry, Physica D, **3**, 627 (1981). [2](#)
- 9 J. Hutchinson, R. Wyatt, Chem. Phys. Lett., **72**, 378 (1980). [2](#)
- 10 B. Greenbaum, S. Habib, K. Shizume, B. Sundaram, Chaos, **15**, 033302 (2005). [2](#)
- 11 F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications (World Scientific, London, 2009). [2](#), [7](#), [29](#), [30](#), [32](#)
- 12 G. Torres-Vega, J.H. Frederick, J. Chem. Phys., **93**, 8862 (1990). [2](#)
- 13 J. Dito, J. Math. Phys., **33**, 791 (1992). [2](#)

- 14 M.A. de Gosson, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**, 9263 (2005). [2](#)
- 15 D. Chruściński, K. Mlodawski. *Phys. Rev. A*, **71**, 052104 (2005). [2](#)
- 16 M.A. de Gosson, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**, 095202 (2008). [2](#)
- 17 M.A. de Gosson, F. Luef, *J. Phys. A: Math. Theor. J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**, 315205 (2009). [2](#)
- 18 R.G.G. Amorim , M.C.B. Fernandes , F.C. Khanna , A.E. Santana, J.D.M. Vianna, *Phy. Lett. A*, **361**, 464 (2007). [2](#), [3](#), [26](#)
- 19 R.G.G. Amorim , F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, *Physica A*, **388**, 3771 (2009). [2](#), [26](#)
- 20 R.G.G. Amorim, F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E.Santana, *Int. J. Mod. Phys. A*, **34**, 1950037 (2019). [2](#)
- 21 H. Dessano, G.X.A. Petronilo, R.G.G. Amorim, A.E. Santana, *J. Math. Phys.*, **63**, 022101 (2022). [2](#)
- 22 R.R. Luz, G.X.A. Petronilo, A.E. Santana, C.S.R. Costa, R.G.G. Amorim, R.A.S. Paiva, *Adv. High Energy Physics* **2022** (2022). [2](#)
- 23 E.P. Wigner, *Z. Phys. Chem. B*, **19**, 749 (1932). [2](#), [18](#)
- 24 F.E. Schroeck, Jr., *Quantum Mechanics in Phase Space*, 6th Ed. (Springer, Berlin, 2010). [2](#)
- 25 D.K. Ferry, M. Nedjalkov, *The Wigner Function in Science and Technology* (IoP, Bristol, 2018). [2](#)
- 26 T.L Curtright, D.B Fairlie, C.K Zachos, *Quantum Mechanics In Phase Space: An Overview with Selected Papers* (W. Scientific, Singapore, 2005). [2](#)
- 27 H.M. Moya-Cessa, F. Soto-Eguibar, *Introduction to Quantum Optics* (Rinton Press, N. York, 2011). [2](#), [18](#), [20](#), [24](#)
- 28 Y.S. Kim, W.W. Zachary (Eds.) *The Physics of Phase Space: Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometric Quantization, and Wigner Function* (Springer, Berlin, 1986). [2](#)

- 29 Y.S. Kim, M.E. Noz, Phase Space Picture of Quantum Mechanics: Group Theoretical Approach (W. Scientific, Singapore, 1991). [2](#)
- 30 T.L. Curtright, D.B. Fairlie, C.K. Zachos, A Concise Treatise on Quantum Mechanics in Phase Space (W. Scientific and Imperial College Press, London, 2013). [2](#)
- 31 H. Weyl, Zeitschrift für Physik, **46**, 1 (1927). [2](#), [18](#)
- 32 M.D. Oliveira, M.C.B. Fernandes, F.C. Khanna, A.E. Santana, J.D.M. Vianna, Ann. Phys., **312**, 492 (2004). [2](#), [25](#)
- 33 A.E. Santana, F.C. Khanna, A.F. Santos, R.G.G. Amorim, S.C. Ulhoa, J.D.M. Vianna, Symplectic Quantum Field Theory (Cambridge Scholars, Cambridge, 2024). [2](#), [3](#), [65](#)
- 34 F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, Phys. Rep., **539**, 135 (2014). [3](#), [30](#), [31](#)
- 35 P. Mangin, R. Kahn, Superconductivity: an introduction (Springer Nature, Cham, 2017). [4](#)
- 36 A.A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP, **5**, 1174 (1957). [5](#)
- 37 L.D. Landau, Phys. Z. der Sowjet Union, **11**, 26 (1937). [5](#), [7](#)
- 38 L.N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956). [6](#)
- 39 J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 11175 (1957). [6](#)
- 40 S.R.A. Salinas, Introduction to statistical physics (Springer, Berlin, 2001). [6](#)
- 41 L.P. Gor'kov, Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz, **36**, 1918 (1959). [10](#)
- 42 J.B. Ketterson, S.N. Song, Superconductivity (Cambridge University Press, Cambridge, 1999). [10](#), [58](#)
- 43 W.J. Skocpol, Phys. Rev. **B14**, 1045 (1976). [15](#)
- 44 D. Henrich, P. Reichensperger, M. Hofherr, J.M. Meckbach, K. Il'in, M. Siegel, A. Semenov, A. Zotova, D.Yu. Vodolazov, Phys. Rev. B, **86**, 144504 (2012). [15](#)

- 45 V.V. Schmidt, *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications* (Springer, Berlin, 1997). [16](#)
- 46 L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996). [16](#), [17](#)
- 47 R.G.G. Amorim, M.C.B. Fernandes, A.R. Queiroz, A.E. Santana, J.D.M. Viana, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **35**, 3604 (2013). [18](#), [21](#), [26](#)
- 48 M.A. Marchioli, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **24**, 421 (2002). [20](#), [21](#), [23](#)
- 49 P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, (Pergamon Press, Fourth Edition, New York, 1958). [20](#)
- 50 R.G.G. Amorim, F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A. E. Santana, *Int. J. Mod. Phys. A*, **30**, 1550135 (2015).
- 51 R. G. G. de Amorim, *Geometria não-comutativa e teoria de campos simplética*, (Tese de Doutorado, IF-UnB, Brasília, 2009). [23](#), [25](#)
- 52 J. S. da Cruz Filho, *Teoria Quântica no Espaço de Fase: modelo de Hénon-Heiles e simetrias de calibre*, (Tese de Doutorado, IF-UnB, Brasília, 2016). [23](#), [25](#)
- 53 H. D. Farias, *Mecânica Quântica Simplética e Sistemas Dissipativos*, (Tese de Doutorado, IF-UnB, Brasília, 2019). [23](#), [25](#)
- 54 R. A. dos Santos Paiva, *Mecânica Quântica Simplética e Não-Classicalidade*, (Tese de Doutorado, IF-UnB, Brasília, 2019). [23](#), [25](#)
- 55 A. Kenfack, K. Zyczkowski, *J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt.*, **6**, 396 (2004). [22](#)
- 56 N. Seiberg, E. Witten, *J. High Energy Phys.*, **1999**, 032 (1999). [39](#), [49](#)
- 57 W. Koepf, *Hypergeometric Summation: Advanced Lectures in Mathematics* (Springer, New York, 1998).
- 58 M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (U.S. Government Printing Office, Washington, 1972).
- 59 A.S. Davydov, *Quantum Mechanics* (Clarendon Press Oxford, 2nd Edition, 1965).