Universidade de Brasília

Uma Solução Positiva para uma Equação de Schrödinger não Linear via "*The Monotonicity Trick*"

Victor Rodrigues Silva

Orientadora: Dra. Mayra Soares Costa Rodrigues

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília, 24 de Janeiro de 2025

Agradecimentos

Agradeço profundamente à minha mãe, que sempre me apoiou de forma incondicional e fez tudo ao seu alcance para que eu tivesse acesso à melhor educação possível. Seu esforço e dedicação me abriram portas e me inspiraram a trilhar caminhos que ela própria não teve a oportunidade de percorrer.

Ao meu pai, manifesto minha gratidão pelo suporte financeiro durante minha trajetória acadêmica e pelo incentivo contínuo a persistir em meus objetivos, mesmo diante das dificuldades.

Estendo também meus agradecimentos à minha irmã e aos meus amigos, cuja presença e palavras de encorajamento me deram forças para continuar nos momentos mais desafiadores.

Agradeço à minha orientadora, Mayra Soares, por sua dedicação ao longo de minha trajetória acadêmica, por sua disponibilidade em compartilhar seu conhecimento e pela confiança que depositou em meu potencial, fatores que foram fundamentais para meu crescimento pessoal e profissional.

Deixo, ainda, meus sinceros agradecimentos aos demais professores do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, que compartilharam comigo seu conhecimento e ajudaram a construir a base do meu aprendizado.

Por fim, registro minha gratidão ao CNPq pelo apoio financeiro, que foi essencial para viabilizar minha jornada acadêmica.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções positivas para a equação de Schrödinger não autônoma:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u),\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde V é um potencial contínuo e f é uma função contínua não linear. Assumindo apropriadas condições sobre f e V e usando uma abordagem variacional, aplicamos a técnica *"The Monotonicity Trick"* para limitar sequências de Palais-Smale e com um argumento de Splitting provamos a existência de uma solução positiva para a equação.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger; Princípio Variacional de Ekeland; Geometria do Passo da Montanha; Sequência de Palais-Smale; Splitting; *"The Monotonicity Trick"*.

Abstract

In this work, we study the existence of positive solutions for the non-autonomous Schrödinger equation:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

where V is a continuous potential and f is a continuous nonlinear function. Assuming appropriate conditions on f and V and using a variational approach, we apply the Monotonicity Trick technique to bound Palais-Smale sequences and using a Splitting argument we prove the existence of a positive solution for the equation.

Keywords: Schrödinger Equation; Ekeland's Variational Principle; Mountain Pass Geometry; Palais-Smale Sequence; Splitting; *"The Monotonicity Trick"*.

Lista de Notações

Notações Gerais

$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{se } 1 \leq p < N, \\ +\infty & \text{se } p \geq N. \end{cases}$	expoente crítico de Sobolev
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \langle \nabla u, \eta \rangle_{\mathbb{R}^N}$	derivada normal exterior de u na direção de η
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)}$	produto interno no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$
$\liminf_{n \to +\infty} f(u_n)$	limite inferior da função f aplicada na sequência (u_n) quando $n \to +\infty$
$\limsup_{n \to +\infty} f(u_n)$	limite superior da função f aplicada na sequência (u_n) quando $n \to +\infty$
$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$	semi-eixo real positivo
$\mid \Omega \mid$	medida de Lebesgue de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	gradiente de $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\partial \Omega$	fronteira de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
supp f	suporte da função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$B_R(x)$	bola aberta em $\mathbb{R}^N$ centrada em x e com raio R
$B_R[x]$	bola fechada em $\mathbb{R}^N$ centrada em x e com raio R
$B_R^C(x)$	complementar da bola aberta em $\mathbb{R}^N$ centrada em x e com raio R
$D^\alpha u = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u}{\partial x_1{}^{a_1} \cdots \partial x_N{}^{a_N}}$, com $\mid \alpha \mid = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$	derivada fraca de $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com multi-índice
$E_1 \hookrightarrow E_2$	imersão contínua de E_1 em E_2
$E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$	imersão compacta de E_1 em E_2
$p' = \frac{p}{p-1}$	conjugado do expoente holderiano p
$u^+ = \max\{u, 0\}$	parte positiva de $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$u^- = \max\{-u, 0\}$	parte negativa de $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$u_n \to u$	convergência forte (em norma) de u_n para u em $H^1(\mathbb{R}^N)$
$u_n \to u$, q.t.p. em Ω	convergência de u_n para u em quase todo ponto x de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$u_n \rightharpoonup u$	convergência fraca de u_n para u em $H^1(\mathbb{R}^N)$
$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$	derivada parcial de $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ em relação à sua i-ésima variável

Normas

$\lvert \cdot \rvert$	norma do $\mathbb{R}^N$
$\lVert u \rVert_V = \left(\lVert \nabla u \rVert_2^2 + \lVert V(x)u \rVert_2^2 \right)^{1/2}$	norma alternativa para $H^1(\mathbb{R}^N)$
$\lVert u \rVert_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \mid u(x) \mid$	norma usual de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\| u \|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2 \right)^{1/2}$	norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$
$\| u \|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mid u \mid^p dx \right)^{1/p}, \forall\ p \in [1, +\infty)$	norma usual de $L^p(\mathbb{R}^N)$

Espaços de Funções

$C(X,Y)$	espaço das funções contínuas de X em Y
$C^1(X,Y)$	espaço das funções continuamente diferenciáveis de X em Y
$H^1(\Omega)$	espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$
$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : \int_\Omega \mid f \mid^p < +\infty \right\}$	espaço de Lebesgue das funções p-integráveis
$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega') : \forall \Omega' \subset\subset \Omega) \}$	espaço de Lebesgue das funções localmente p-integráveis
$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \mid \alpha \mid \leq 1 \}$	espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$
X'	espaço dual de X

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **6**
1.1 Teorema do Passo da Montanha sem compacidade 6
1.2 Diferenciabilidade do funcional I 8

2 Estudo do problema autônomo **23**
2.1 O Nível de Energia Mínima 23
2.2 Estimativa inferior para a energia 25

3 Estudo do problema não autônomo **31**
3.1 A Técnica "The Monotonicity Trick" 33
3.2 Teorema de Splitting 52
3.3 Existência de uma Solução Positiva 83
3.4 Uma Solução de Energia Mínima 97

Apêndice A Resultados importantes **100**
A.1 Imersões de Sobolev 100
A.2 Identidade de Pohozaev 102
A.3 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 102
A.4 Desigualdade de Young 102
A.5 Desigualdade de Hölder 103
A.6 Desigualdade de Moser-Trundinger 103
A.7 Desigualdade de Jensen 104
A.8 Lema de Schwartz 104
A.9 Lema de Lions 105
A.10 Lema da Deformação 105
A.11 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 106
A.12 Teorema de Vainberg 106

A.13 Operador de Superposição 107
A.14 Princípio do Máximo Forte 107
A.15 Regularidade de Soluções 108

Bibliografia **109**

Introdução

Nesta dissertação, estudamos o resultado devido a Jeanjean-Tanaka [17] de existência de uma solução positiva para equações do tipo Schrödinger da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $N \geq 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não linear e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial contínuo.

Equações desta forma estão amplamente relacionadas a diversos problemas físicos e matemáticos. Por exemplo, as soluções da equação estão associadas à existência de soluções estacionárias para equações de Schrödinger não lineares da forma

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Delta \varphi + W(x)\varphi - g(|\varphi|)\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial fixo, g é uma função real apropriada e chamamos de soluções estacionárias as funções da forma $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, dadas por

$$\varphi(t,x) = e^{iEt}u(x),$$

com $E \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$. Mais detalhes podem ser encontrado em Berestick-Lions [6].

Se o potencial V é constante, ou seja, se o problema é autônomo, Berestycki-Lions [6] (para $N = 1$ e $N \geq 3$) e Berestycki-Gallouéet-Kavian [5] (para $N = 2$) forneceram um resultado de existência para uma classe muito ampla de não linearidades, onde apenas condições sobre f perto de 0 e $+\infty$ são necessárias. Apresentaremos alguns resultados sobre os problemas autônomos, que são cruciais para garantir a compacidade das sequências Palais-Smale limitadas.

Em seguida, partiremos para o estudo dos problemas não autônomos. Neste caso, até o artigo de Jeanjean-Tanaka [17], todos os resultados de existência exigiam algumas condições

globais sobre f, por exemplo, a condição superlinear global de Ambrosetti-Rabinowitz:

$$\exists\, \mu > 2 : 0 < \mu \int_0^s f(\tau)\, d\tau \leq s f(s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Porém, essa condição restringe bastante a classe de funções que podem ser utilizadas no problema. Neste trabalho, assumindo uma condição de decaimento sobre o gradiente de V, derivaremos um resultado de existência que não precisa de condições globais sobre f. O principal resultado desse trabalho diz que, sob determinadas condições, o problema estudado tem uma solução positiva. Este resultado será provado por uma abordagem variacional, conforme a referência citada.

Provaremos que o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ associado ao problema e definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx,$$

é de classe C^1 e qualquer ponto crítico de I é uma solução não negativa do problema (posteriormente será provado que essa solução é positiva). Veremos também que I tem a geometria do Passo da Montanha e que, portanto, o Teorema do Passo da Montanha sem Compacidade implica na existência de uma sequência de Palais-Smale no nível do Passo da Montanha c para I.

Um passo crucial para obter a existência de um ponto crítico é mostrar a limitação de uma sequência deste tipo, o que é desafiador sob nossas hipóteses, visto que não assumimos, sobre a não linearidade, condições do tipo não quadraticidade, Ambrosetti-Rabinowitz ou variações destas, que costumam ser utilizadas para garantir a limitação da sequência. Para superar essa dificuldade, usamos uma abordagem indireta desenvolvida no artigo de Jeanjean [14]. Consideramos a família de problemas

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda f(u),$$

para $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, e associamos a estes a família de funcionais $I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definida por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx.$$

Utilizaremos uma técnica importante, chamada *"The Monotonicity Trick"*, que garante que, dado um intervalo $J \subset \mathbb{R}^+$ e X um espaço de Banach, sob certas condições, para quase todo $\lambda \in J$, existe uma sequência $(v_n) \subset X$, tal que (v_n) é uma sequência de Palais-Smale limitada para o funcional I_λ. Este resultado, que já foi utilizado por diversos autores, uma vez que dá uma forma alternativa de limitar a sequência, remete ao truque de monotonicidade

desenvolvido por Struwe [24, Capítulo 1, Seção 7] e pode ser interpretado como uma generalização do mesmo. De fato, a fim de resolver um problema de minimização com vínculo, Struwe solucionou uma classe de problemas pertubados por um parâmetro $\varepsilon \in (0,1)$, de modo que, quando $\varepsilon \to 0$, recupera-se a solução do problema original. Generalizando este argumento, JeanJean [14] solucionou uma classe de problemas, pertubados por um parâmetro λ, para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Desde a publicação do artigo de Jeanjean [14], foram obtidos resultados similares que demonstram a existência de uma sequência de Palais-Smale limitada para quase todos os valores de um parâmetro, aplicados a famílias de funcionais com outras invariâncias sob homotopia. Um exemplo disso pode ser encontrado em Szulkin-Zou [25, Teorema 1.1], que trata de uma situação do tipo linking.

Mostraremos ainda que os funcionais I_λ têm a geometria do Passo da Montanha e, denotando por c_λ os correspondentes níveis de energia do Passo da Montanha, deduziremos do artigo de Jeanjean [14] que existe uma sequência $(\lambda_j) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, tal que $\lambda_j \to 1$ conforme $j \to +\infty$ e que I_{λ_j} tem uma sequência de Palais-Smale limitada no nível c_{λ_j}. Além disso, provaremos que para todo $j \in \mathbb{N}$, essa sequência de Palais-Smale converge fracamente para um ponto crítico não trivial u_j de I_{λ_j}.

Em seguida, provaremos que a sequência (u_j) é limitada, então, argumentando como no artigo de Jeanjean [14], veremos que (u_j) é uma sequência de Palais-Smale limitada para I. Para mostrar que (u_j) é limitada, precisaremos supor a existência de uma função $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$|x||\nabla V(x)| \leq \phi^2(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, como (u_j) é uma sequência de pontos críticos não triviais de I_{λ_j}, usaremos uma identidade do tipo Pohozaev para derivar a limitação de (u_j). A dominação de $|x||\nabla V(x)|$ pela função ϕ^2 nos permite aplicar a identidade e limitar o gradiente da sequência, com isso derivamos a limitação da sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, seguiremos um procedimento de aproximação para obter uma sequência de Palais-Smale limitada para I, em vez de considerar uma sequência de Palais-Smale arbitrária.

Para demonstrar que a sequência limitada (u_j) converge fracamente para um ponto crítico não trivial de I, o problema no infinito desempenha um papel importante, conforme conhecido desde os trabalhos [19, 20] de Lions. Definindo o funcional $I_\infty : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx$$

e

$$m_\infty = \inf\{I_\infty(u) \mid u \neq 0, (I_\infty)'(u) = 0\},$$

onde $V_\infty = \lim_{|x|\to+\infty} V(x)$, provaremos que (u_j) tem um limite fraco não trivial se $c < m_\infty$. Por sua vez, derivaremos que $c < c_\infty$ como consequência de um resultado geral sobre problemas autônomos em $\mathbb{R}^N$ estabelecido nos artigos [15, 16] de Jeanjean-Tanaka, onde

$$c_\infty = \inf_{\gamma\in\Gamma_\infty} \max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)).$$

A grosso modo, foi mostrado em [15, Teorema 1.2] para $N = 1$ e em [16, Teorema 0.2] para $N \geq 2$, que, sob suposições gerais sobre f, o nível do Passo da Montanha c_∞ para I_∞ coincide com o nível de menor energia m_∞, com

$$\Gamma_\infty = \{\gamma \in C([0,1],H) \mid \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\infty(\gamma(1)) < 0\}.$$

Além disso, também foi mostrado, nos mesmos teoremas, a existência de um caminho $\gamma_0 \in \Gamma_\infty$, tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma_0(t)) = c_\infty = m_\infty,$$

com $\gamma_0(t)(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\forall\, t \in (0,1]$.

A partir disso, utilizaremos o Teorema de Splitting para contornar o problema da falta de compacidade do $\mathbb{R}^N$ e obteremos que $u_j \rightharpoonup u \neq 0$, com $I'(u) = 0$, por meio de uma decomposição precisa da sequência, como uma soma de pontos críticos transladados, no espírito dos trabalhos pioneiros [19, 20] de Lions. Como só exigimos condições fracas sobre f, em particular, f pode não ser de classe C^1, e não podemos aplicar uma das várias decomposições disponíveis da literatura, como feito no artigo de Coti Zelati-Rabinowitz [8], por exemplo.

Em síntese, provaremos que I é de classe C^1 e que seus pontos críticos são soluções não negativas para o problema. A partir daí, nosso intuito será provar que I possui algum ponto crítico não trivial. Para isso, trabalharemos com o funcional I_λ, o qual mostraremos que possui a Geometria do Passo da Montanha e, portanto, possui uma sequência de Palais-Smale no nível c_λ. Em seguida, provaremos que essa sequência é limitada e satisfaz uma determinada condição, o que nos permitirá concluir que, a menos de subsequências, essa sequência converge fracamente para um ponto crítico não trivial de I. Por fim, mostraremos que tal ponto é uma solução positiva para o nosso problema.

A dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentaremos algumas definições importantes que serão utilizadas durante todo o trabalho, enunciaremos o Teorema

do Passo da Montanha sem Compacidade, provaremos que o funcional I é de classe C^1 e que seus pontos críticos são soluções não negativas do problema. No Capítulo 2, apresentaremos os resultados sobre soluções de menor energia para problemas autônomos. No Capítulo 3, resolveremos os problemas aproximados, faremos a decomposição das sequências de Palais-Smale e provaremos a existência de uma solução positiva e de uma solução de energia mínima para o problema. Além disso, a fim de facilitar a compreensão do trabalho, alguns resultados clássicos, que serão utilizados ao longo da dissertação, podem ser consultados no Apêndice A, ao final da dissertação. Para uma análise mais detalhada desses resultados, sugerimos consultar as referências correspondentes indicadas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos algumas definições e alguns resultados preliminares importantes que serão utilizados durante a dissertação.

1.1 Teorema do Passo da Montanha sem compacidade

Começaremos com a definição de geometria do Passo da Montanha para um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, em que X é um espaço de Banach e I é um funcional de classe C^1. Em seguida, definiremos uma sequência de Palais-Smale e veremos que o Princípio Variacional de Ekeland implica no Teorema do Passo da Montanha sem compacidade, o qual garante a existência de uma sequência de Palais-Smale no nível do Passo da Montanha c, desde que a geometria do Passo da Montanha seja satisfeita.

Definição 1.1. *(Geometria do Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que I possui a geometria do Passo da Montanha, quando existem dois pontos $v_1, v_2 \in X$, com $v_1 \neq v_2$, tais que, fixando*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \mid \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\},$$

temos

(i) $v_2 \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ *e* $I(v_2) < 0$*;*

(ii) $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > \max\{I(v_1), I(v_2)\}$.

Chamaremos o valor c de nível do Passo da Montanha de I.

Definição 1.2 (Sequência de Palais-Smale)**.** *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que uma sequência $(u_k) \subset X$ é uma sequência de Palais-Smale para I se ela satisfaz*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |I(u_k)| < +\infty \quad e \quad \lim_{k\to+\infty} I'(u_k) = 0. \tag{1.1}$$

Em particular, dizemos que uma sequência $(u_k) \subset X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c se ela satisfaz

$$\lim_{k\to+\infty} I(u_k) = c \quad e \quad \lim_{k\to+\infty} I'(u_k) = 0. \tag{1.2}$$

Definição 1.3 (Condição de Palais-Smale)**.** *Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale se toda sequência de Palais-Smale possui uma subsequência convergente. Em particular, dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c se toda sequência de Palais-Smale no nível c possui uma subsequência convergente.*

Agora, enunciaremos alguns teoremas importantes.

Teorema 1.1 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Seja (X,d) um espaço métrico completo e $I : X \to (-\infty,+\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponha que I seja limitado inferiormente, ou seja, $\inf_{u\in X} I(u) > -\infty$. Então, dados $\varepsilon > 0$ e $v_0 \in X$, tais que*

$$I(v_0) \leq \inf_{u\in X} I(u) + \varepsilon,$$

existe $u_\varepsilon \in X$, tal que:

(a) $I(u_\varepsilon) \leq I(v_0) \leq \inf_{u\in X} I(u) + \varepsilon$;

(b) $d(v_0,u_\varepsilon) \leq \sqrt{\varepsilon}$;

(c) para cada $w \in X$ com $w \neq u_\varepsilon$, vale que

$$I(u_\varepsilon) < I(w) + \sqrt{\varepsilon}\, d(u_\varepsilon,w).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no Teorema 1.1 do artigo de Ekeland [10] tomando $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$. Para uma versão mais detalhada em português, veja também [23, Teorema 1.1]. □

Teorema 1.2 (Teorema do Passo da Montanha sem compacidade)**.** *Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que possui a geometria do Passo da Montanha. Então, existe uma sequência de Palais-Smale $(u_n) \subset X$ no nível do Passo da Montanha c para I.*

Demonstração. A existência da sequência de Palais-Smale no nível do Passo da Montanha segue diretamente do Princípio Variacional de Ekeland. Para mais detalhes veja [27, Teorema 1.17] e também [23, Teorema 1.2], observando que toda sequência de Cerami é uma sequência de Palais-Smale. □

1.2 Diferenciabilidade do funcional I

Com o objetivo de aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem compacidade ao problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{1.3}$$

onde $N \geq 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não linear e $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, provaremos que seu funcional associado é de classe C^1.

Associamos ao problema (1.3) o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx, \tag{1.4}$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\,dt$. Considere em $H^1(\mathbb{R}^N)$ a norma padrão

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx.$$

Vamos provar que sob as condições descritas abaixo, I está bem definido, é um funcional de classe C^1 e qualquer ponto crítico de I é uma solução não negativa do problema (1.3).

Sobre o termo não linear $f \in C(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \mathbb{R})$, assumiremos as seguintes condições:

(f_1) $f(0) = 0$ e $f'_+(0)$ definida como $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s}$ existe;

(f_2) existe $1 < p < +\infty$ se $N = 2$ e $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, tal que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0$;

(f_3) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$.

Como procuramos uma solução positiva para o problema, vamos estender f para $\mathbb{R}$, de modo que $f(s) = 0$ para todo $s < 0$.

Sobre o potencial $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, assumiremos que:

(V_1) $f'_+(0) < \alpha_0 := \inf \sigma(-\Delta + V(x))$, onde $\sigma(-\Delta + V(x))$ denota o espectro do operador autoadjunto $-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\alpha_0 = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx}$$

(V_2) $V(x) \to V_\infty \in \mathbb{R}$ conforme $|x| \to +\infty$;

(V_3) $V(x) \leq V_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(V_4) existe uma função $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, tal que o $\nabla V(x)$ existe em quase todo ponto e

$$|x||\nabla V(x)| \leq \phi^2(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Observe que as hipóteses (V_1) e (V_2) implicam que $\alpha_0 \leq V_\infty$. Veja também que, pela definição de α_0, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx \geq \alpha_0 \|u\|_2^2, \quad \text{para todo } u \in H. \tag{1.5}$$

A classe de funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(s) = s\left(k_1 \log(s+1) + k_2\right),$$

onde k_1 e k_2 são constantes positivas apropriadas, fornece exemplos de funções que satisfazem as hipóteses $(f_1) - (f_3)$. De fato, temos que

$$f(0) = 0 \cdot (k_1 \cdot \log(1) + k_2) = 0 \cdot (k_1 \cdot 0 + k_2) = 0 \cdot k_2 = 0$$

e que

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s\to 0^+} \frac{s\left(k_1 \log(s+1) + k_2\right)}{s} = \lim_{s\to 0^+} k_1 \log(s+1) + k_2 \\ &= k_1 \cdot \log(1) + k_2 = k_1 \cdot 0 + k_2 = k_2. \end{aligned}$$

Portanto, vale (f_1). Além disso, como

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^p} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s\left(k_1 \log(s+1) + k_2\right)}{s^p} = \lim_{s\to+\infty} \frac{k_1 \log(s+1) + k_2}{s^{p-1}}$$

e $s \mapsto s^{p-1}$ cresce mais rápido para $+\infty$ do que $s \mapsto (k_1 \log(s+1)+k_2)$, então $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0$. Logo, vale (f_2). Por fim, temos que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s(k_1 \log(s+1)+k_2)}{s} = \lim_{s\to+\infty} (k_1 \log(s+1)+k_2) = +\infty.$$

Portanto, vale (f_3).

A classe de potenciais $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida por

$$V(x) = A - \frac{k_3|x|^2}{1+|x|^{2\beta}},$$

onde $A > k_2$, k_3 é uma constante positiva e $\beta > \frac{N+2}{2}$, fornece exemplos de potenciais que satisfazem as hipóteses $(V_1)-(V_4)$. De fato, podemos escolher k_2 de modo que

$$f'_+(0) = k_2 < \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx} = \alpha_0.$$

Portanto, vale (V_1).

Além disso, como $\beta > \frac{N+2}{2} > 1$, temos que

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = \lim_{|x|\to+\infty} A - \frac{k_3|x|^2}{1+|x|^{2\beta}} = \lim_{|x|\to+\infty} A - \frac{k_3}{|x|^{-2}+|x|^{2\beta-2}} = A \in \mathbb{R}.$$

Portanto, vale (V_2).

Temos também que

$$\frac{k_3|x|^2}{1+|x|^{2\beta}} \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$V(x) = A - \frac{k_3|x|^2}{1+|x|^{2\beta}} \leq A, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto, vale (V_3).

Por fim, para calcular $\nabla V(x)$, usamos a regra da derivação do quociente, logo

$$\begin{aligned}\nabla V(x) &= -\frac{(2k_3x)(1+|x|^{2\beta})-(k_3|x|^2)(2\beta|x|^{2\beta-2}x)}{(1+|x|^{2\beta})^2}\\ &= -\frac{x\left[2k_3(1+|x|^{2\beta})-2\beta k_3|x|^{2\beta-2}|x|^2\right]}{(1+|x|^{2\beta})^2} = -\frac{x\left[2k_3(1+|x|^{2\beta})-2\beta k_3|x|^{2\beta}\right]}{(1+|x|^{2\beta})^2}\\ &= -\frac{2k_3x\left[1+|x|^{2\beta}-\beta|x|^{2\beta}\right]}{(1+|x|^{2\beta})^2} = -\frac{2k_3x\left[1+(1-\beta)|x|^{2\beta}\right]}{(1+|x|^{2\beta})^2}\end{aligned}$$

Assim,

$$|x||\nabla V(x)| = \left|x\cdot\frac{-2k_3x\left[1+(1-\beta)|x|^{2\beta}\right]}{(1+|x|^{2\beta})^2}\right| = \frac{2k_3|x|^2\left[1+(1-\beta)|x|^{2\beta}\right]}{(1+|x|^{2\beta})^2}.$$

Para garantir a existência de ϕ tal que $|x||\nabla V(x)| \leq \phi^2(x)$, escolhemos

$$\phi(x) = C\frac{|x|}{\sqrt{1+|x|^{2\beta}}},$$

para $x \in \mathbb{R}^N$ e uma constante positiva C suficientemente grande. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}|x||\nabla V(x)| \leq \phi^2(x) &\Leftrightarrow \frac{2k_3|x|^2\left[1+(1-\beta)|x|^{2\beta}\right]}{(1+|x|^{2\beta})^2} \leq C^2\frac{|x|^2}{1+|x|^{2\beta}}\\ &\Leftrightarrow \frac{2k_3\left[1+(1-\beta)|x|^{2\beta}\right]}{1+|x|^{2\beta}} \leq C^2.\end{aligned}$$

Seja

$$\widehat{\phi}(x) := \frac{2k_3\left[1+(1-\beta)|x|^{2\beta}\right]}{1+|x|^{2\beta}}$$

Temos que

$$\lim_{|x|\to+\infty}\widehat{\phi}(x) = 2k_3(1-\beta),$$

isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $S > 0$, tal que, para todo $|x| > S$, vale que

$$|\widehat{\phi}(x)| < 2k_3(1-\beta)+\varepsilon.$$

Como $|\widehat{\phi}(x)|$ é contínua em $[0,S]$, segue do Teorema de Weierstrass, que $|\widehat{\phi}(x)|$ é limitada em $[0,S]$. Logo, existe $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$, tal que para todo $|x| \in [0,S]$, vale que

$$|\widehat{\phi}(x)| < C_\varepsilon.$$

Tomando $\widehat{C}_\varepsilon = \max\{2k_3(1-\beta)+\varepsilon, C_\varepsilon\}$, segue que

$$|\widehat{\phi}(x)| < \widehat{C}_\varepsilon, \quad \text{para todo } |x| \geq 0. \tag{1.6}$$

Portanto, escolhendo $C^2 = \widehat{C}_\varepsilon$, temos que $|x||\nabla V(x)| \leq \phi^2(x)$. Provemos que $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Consideramos a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^2 dx = C^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{1+|x|^{2\beta}} dx.$$

Em coordenadas esféricas, temos $dx = r^{N-1} dr d\Omega$, e a integral se torna

$$C^2 \int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^{2\beta}} r^{N-1} dr = C^2 \int_0^\infty \frac{r^{N+1}}{1+r^{2\beta}} dr = C^2 \int_0^\varepsilon \frac{r^{N+1}}{1+r^{2\beta}} dr + C^2 \int_\varepsilon^\infty \frac{r^{N+1}}{1+r^{2\beta}} dr,$$

para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Quando $r \to 0$, temos $1+r^{2\beta} \approx 1$, então a primeira integral se comporta como

$$\int_0^\varepsilon r^{N+1} dr,$$

que sempre converge para qualquer N. Para $r \to +\infty$, temos $1+r^{2\beta} \approx r^{2\beta}$, então a segunda integral se comporta como

$$\int_\varepsilon^{+\infty} r^{N+1-2\beta} dr.$$

A condição de convergência desta integral é que $N+1-2\beta < -1$, ou seja, $\beta > \frac{N+2}{2}$. Portanto, $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ se $\beta > \frac{N+2}{2}$. Agora, verifiquemos que $\phi(x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$\lim_{|x|\to+\infty} \phi(x) = \lim_{|x|\to+\infty} C|x|^{1-\beta} = 0 \quad \text{se} \quad \beta > 1.$$

Assim, utilizando o mesmo argumento desenvolvido para obter (1.6), temos que $\phi(x)$ é limitada se $\beta > 1$. Portanto, $\phi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ se $\beta > 1$. Além disso, o gradiente de $\phi(x)$ é dado por

$$\nabla\phi(x) = C\frac{x}{|x|}\frac{(1+|x|^{2\beta}) - \beta|x|^{2\beta}}{(1+|x|^{2\beta})^{3/2}}.$$

Observe que ϕ é derivável no sentido clássico, exceto no 0, logo tem derivada fraca. Temos que

$$\lim_{|x|\to 0} |\nabla\phi(x)| = C,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$, tal que, para todo $0 < x < \delta$, temos

$$|\nabla\phi(x)| < C + \varepsilon. \tag{1.7}$$

Temos ainda que

$$\lim_{|x|\to +\infty} |\nabla\phi(x)| = 0,$$

para $\beta > 0$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $S > 0$, tal que, para todo $|x| > S$, vale que

$$|\nabla\phi(x)| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Como $|\nabla\phi(x)|$ é contínua em $[\delta, S]$, segue do Teorema de Weierstrass, que $|\nabla\phi(x)|$ é limitada em $[\delta, S]$. Logo, existe $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$, tal que para todo $|x| \in [\delta, S]$, vale que

$$|\nabla\phi(x)| < C_\varepsilon. \tag{1.9}$$

Assim, tomando $\widetilde{C}_\varepsilon = \max\{C + \varepsilon, C_\varepsilon\}$, segue de (1.7), (1.8) e (1.9) que

$$|\nabla\phi(x)| < \widetilde{C}_\varepsilon, \quad \text{para todo } |x| > 0.$$

Consequentemente, temos que $\nabla\phi(x)$ é limitado para $\beta > 0$, o que implica $\nabla\phi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ nesse caso. Logo, $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ se $\beta > \frac{N+2}{2}$ e $\beta > 1$. Como $\beta > \frac{N+2}{2} > 1$, concluímos que a função $\phi(x)$ está em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, vale (V_4).

Provaremos agora um resultado auxiliar, a respeito do ínfimo do espectro do operador autoadjunto $-\Delta + V(x) : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, que será utilizado para provar que o funcional é de classe C^1.

Proposição 1.1. *Dada uma constante $L \in \mathbb{R}$, defina $\widetilde{V}(s) := V(s) + L$ e $\widetilde{f}(s) := f(s) + L \cdot s$. Usando $\widetilde{V}$ e $\widetilde{f}$ em vez de V e f, obtém-se um problema equivalente a* (1.3)*. Portanto, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que*

(V_5) $\quad f \geq 0,\ f'_+(0) \geq 0,\ \alpha_0 \equiv \inf\sigma(-\Delta + V(x)) > 0$ *e* $0 \leq f'_+(0) < \alpha_0$.

Demonstração. De fato, por (f_1), para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\frac{f(s)}{s} > f'_+(0) - \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad 0 < s < \delta,$$

ou seja,

$$f(s)+(\varepsilon-f'_+(0))s>0, \quad \text{sempre que} \quad 0<s<\delta.$$

Além disso, por (f_3), para todo $M>0$, existe $S>0$, tal que

$$f(s)+Ms>0, \quad \text{sempre que} \quad s>S.$$

Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, $\dfrac{f(s)}{s}$ é limitada em $[\delta,S]$. Logo, existe $C_\varepsilon>0$, tal que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right|<C_\varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad \delta\leq s\leq S,$$

ou seja,

$$f(s)+C_\varepsilon s>0, \quad \text{sempre que} \quad \delta\leq s\leq S.$$

Assim, tomando $L=\max\{\varepsilon-f'_+(0),M,C_\varepsilon\}$, temos

$$\widetilde{f}(s):=f(s)+L\cdot s>0, \quad \text{sempre que} \quad s>0.$$

Como assumimos $f(s)=0$ para todo $s\leq 0$, o mesmo pode ser feito para $\widetilde{f}$ e, com isso, concluímos que $\widetilde{f}\geq 0$. Mias ainda, $\widetilde{f}(s)$ verifica claramente as hipóteses $(f_1)-(f_3)$. Analogamente, podemos verificar para $\widetilde{V}(x):=V(x)+L$, com $L\in\mathbb{R}$, que $\widetilde{V}(x)$ verifica as hipóteses $(V_1)-(V_4)$.

Desse modo, temos

$$\widetilde{f}'(0)=\lim_{s\to 0^+}\frac{\widetilde{f}(s)}{s}\geq 0,$$

e, por (V_1), temos

$$\widetilde{\alpha}_0\equiv\inf\sigma(-\Delta+\widetilde{V}(x))=\inf\sigma(-\Delta+V(x))+L>f'_+(0)+L=\widetilde{f}'(0)\geq 0.$$

Logo, se u é uma solução positiva do problema

$$-\Delta u+\widetilde{V}(x)u=\widetilde{f}(u), \quad u\in H^1(\mathbb{R}^N),$$

então

$$-\Delta u+V(x)u+Lu=f(u)+Lu, \quad u\in H^1(\mathbb{R}^N),$$

e, portanto, u também é uma solução positiva do problema (1.3). Assim, sem perda de generalidade, podemos denotar ainda por f a função $\widetilde{f}$ e por V o potencial $\widetilde{V}$, temos o resultado. □

Devido a Proposição 1.1, ao longo da dissertação, consideraremos que a condição (V_5) é satisfeita.

Veremos agora um resultado sobre as condições de crescimento da função f, que será utilizado ao longo desse trabalho.

Proposição 1.2. *As condições (f_1) e (f_2) implicam que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$, tal que*

$$|f(s)| < (f'_+(0) + \varepsilon)s + \widetilde{C}_\varepsilon s^p, \quad \textit{para todo } s \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

onde $1 < p < +\infty$ se $N = 2$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$.

Demonstração. Por (f_1), temos que

$$f'_+(0) = \lim_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s},$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo s com $0 < s < \delta$, temos

$$\left| \frac{f(s)}{s} - f'_+(0) \right| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\frac{|f(s)|}{s} < f'_+(0) + \varepsilon, \quad \text{para todo } 0 < s < \delta,$$

isto é,

$$|f(s)| < (f'_+(0) + \varepsilon)s, \quad \text{para todo } 0 < s < \delta. \tag{1.11}$$

Além disso, por (f_2), temos que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{|f(s)|}{s^p} = 0,$$

isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $S > 0$, tal que, para todo $s > S$, vale que

$$\frac{|f(s)|}{s^p} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$|f(s)| < \varepsilon s^p, \quad \text{para todo } s > S. \tag{1.12}$$

Como f e s^p são contínuas em $[\delta, S]$, então $\dfrac{|f(s)|}{s^p}$ também o é. Portanto, pelo Teorema de Weierstrass, $\dfrac{|f(s)|}{s^p}$ é limitada em $[\delta, S]$. Logo, existe $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$, tal que para todo $s \in [\delta, S]$, vale que

$$\frac{|f(s)|}{s^p} < C_\varepsilon,$$

isto é,

$$|f(s)| < C_\varepsilon s^p, \quad \text{para todo } s \in [\delta, S]. \tag{1.13}$$

Tomando $\widetilde{C}_\varepsilon = \max\{\varepsilon, C_\varepsilon\}$, segue de (1.11), (1.12) e (1.13) que

$$|f(s)| < (f'_+(0) + \varepsilon)s + \widetilde{C}_\varepsilon s^p, \quad \text{para todo } s > 0.$$

Como assumimos que $f(s) = 0$ para todo $s \leq 0$, então

$$|f(s)| < (f'_+(0) + \varepsilon)s + \widetilde{C}_\varepsilon s^p, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

□

Nosso próximo objetivo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 1.3. *Sob (f_1), (f_2), (V_1), (V_2) e (V_5), I está bem definido, é um funcional de classe C^1 e qualquer ponto crítico de I é uma solução não negativa do problema* (1.3)*.*

Iniciaremos definindo os funcionais auxiliares $\Phi, \Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dados por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx, \tag{1.15}$$

onde $V(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfaz as condições (V_1) e (V_2), e

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx, \tag{1.16}$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt$ e $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ satisfaz as condições (f_1) e (f_2).

A fim de provar a diferenciabilidade desses funcionais, será necessário apresentar algumas definições.

Definição 1.4. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\varphi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que φ possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X'$, tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\varphi(u+v) - \varphi(u) - T(v)}{\|v\|_X} = 0. \tag{1.17}$$

Quando existe, T é dita a Derivada de Fréchet de φ no ponto $u \in X$ e é o único funcional linear que satisfaz (1.17)*. Vamos denotar a Derivada de Fréchet por $\varphi'(u)$.*

Definição 1.5. *Seja A um subconjunto aberto de X, dizemos que um funcional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 em A, ou que $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$, quando existe a Derivada de Fréchet de φ para todo ponto $u \in A$, e a aplicação $\varphi' : A \to X'$ é contínua.*

Definição 1.6. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\varphi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que φ possui Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$, tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u) - T_0(v)}{t} = 0, \quad \forall\, v \in X. \tag{1.18}$$

Quando existe, T_0 é dita a Derivada de Gateaux de φ no ponto $u \in X$, e é o único funcional linear que satisfaz (1.18)*. Vamos denotar a Derivada de Gateaux por $D\varphi(u)$.*

Agora, utilizaremos o Lema de Schwartz (cf. Apêndice A.8) para provar que os funcionais auxiliares definidos em (1.15) e (1.16) são de classe C^1. A prova será realizada separadamente para cada um dos dois funcionais, em proposições distintas.

Proposição 1.3. *O funcional Φ, definido em* (1.15)*, pertence a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e possui derivada dada por*

$$\Phi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx, \quad \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Para mostrar que Φ é de classe C^1, vamos usar o Lema de Schwartz (cf. Apêndice A.8). Para mostrar o item (i) do referido lema, dados $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, e $t \in \mathbb{R}$, note que

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} &= \frac{1}{2t}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(u+tv)|^2 + V(x)|u+tv|^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx\right] \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V(x)v^2\right) dx + t\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx\right).\end{aligned}$$

Dessa forma, a Derivada de Gateaux $D\Phi(u)$ existe, e é dada por

$$D\Phi(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx.$$

Assim, dados $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue que $|D\Phi(u)v| = |\langle u, v\rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ representa o produto interno associado à norma $\|\cdot\|_V$, que, como veremos no Capítulo 3, é equivalente à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, segue que a aplicação Derivada de Gateaux $D\Phi(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é linear e limitada, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, o que prova (i). Para mostrar (ii), considere uma sequência arbitrária $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$,

quando $n \to +\infty$. Observe que

$$\begin{aligned}
\|D\Phi(u_n) - D\Phi(u)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))'} &= \sup_{\|v\|_V \leq 1} |D\Phi(u_n)v - D\Phi(u)v| \\
&= \sup_{\|v\|_V \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\nabla v\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u)v\, dx \right| \\
&= \sup_{\|v\|_V \leq 1} |D\Phi(u_n - u)v| \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|u_n - u\|_V \|v\|_V \\
&= \|u_n - u\|_V \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$. Com isso, mostramos que $D\Phi(u_n) \to D\Phi(u)$, quando $n \to +\infty$, e concluímos que o operador $D\Phi = \Phi'(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \to (H^1(\mathbb{R}^N))'$ é contínuo. Portanto, vale (ii) e podemos aplicar o Lema de Schwartz (cf. Apêndice A.8) para concluir que Φ é de classe C^1. □

Proposição 1.4. *O funcional Ψ, definido em* (1.16)*, pertence a $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, e possui derivada dada por*

$$\Psi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\, dx, \quad \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Vamos outra vez usar o Lema de Schwartz (cf. Apêndice A.8). Para encontrar a derivada de Gateaux de Ψ, dado $x \in \mathbb{R}^N$, e $t \in [0,1]$, defina $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(s) = F\left(u(x) + stv(x)\right).$$

Note que

$$\eta(0) = F(u(x)), \quad \eta(1) = F(u(x) + tv(x)) \quad \text{e} \quad \eta'(s) = f(u(x) + tsv(x))tv(x).$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda(x) \in (0,1)$, tal que

$$\frac{\eta(1) - \eta(0)}{t} = \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x) + t\lambda(x)v(x))v(x) \to f(u(x))v(x),$$

quando $t \to 0$. Portanto, vale que

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, pela Proposição 1.2, segue que

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}\right| &= |f(u(x)+t\lambda(x)v(x))v(x)| \\ &\leq (f'_+(0)+\varepsilon)|u(x)+t\lambda(x)v(x)||v(x)| \\ &\quad +\widetilde{C}_\varepsilon|u(x)+t\lambda(x)v(x)|^p|v(x)| \\ &\leq (f'_+(0)+\varepsilon)(|u(x)|+|v(x)|)|v(x)| \\ &\quad +2^p\widetilde{C}_\varepsilon\left(|u(x)|^p+|v(x)|^p\right)|v(x)| \\ &= (f'_+(0)+\varepsilon)\left[|u(x)v(x)|+|v(x)|^2\right] \\ &\quad +2^p\widetilde{C}_\varepsilon\left[|u(x)|^p|v(x)|+|v(x)|^{p+1}\right] \\ &:= \kappa(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Agora, como $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando a desigualdade de Hölder e a continuidade das imersões de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, com $q \in [2, 2^*]$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\kappa(x)|\,dx =&(f'_+(0)+\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u(x)v(x)|+|v(x)|^2\right)dx \\ &+2^p\widetilde{C}_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\left(|u(x)|^p|v(x)|+|v(x)|^{p+1}\right)dx \\ \leq&(f'_+(0)+\varepsilon)\left(\|u\|_2\|v\|_2+\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\ &+2^p\widetilde{C}_\varepsilon\left(\|u\|^p_{p+1}\|v\|_{p+1}+\|v\|^{p+1}_{p+1}\right) \\ \leq&C\left(\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\|u\|^p_{H^1(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\|v\|^{p+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right) \\ <&+\infty.\end{aligned}$$

Assim, $\kappa \in L^1(\mathbb{R}^N)$, e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\begin{aligned}D\Psi(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\lim_{t\to 0}\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}f(u(x))v(x)\,dx,\end{aligned}$$

o que garante a existência da Derivada de Gateaux de Ψ. Também, novamente pela Proposição 1.2, pela desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}|D\Psi(u)v| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)||v|\,dx \leq (f'_+(0)+\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}|u||v|\,dx + \widetilde{C}_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N}|u|^p|v|\,dx \\ &\leq (f'_+(0)+\varepsilon)\|u\|_2\|v\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|u\|^p_{p+1}\|v\|_{p+1} \\ &\leq C\left(\|u\|_V + \|u\|_V^p\right)\|v\|_V.\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que a aplicação Derivada de Gateaux $D\Psi(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é linear e limitada, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora, considere uma sequência arbitrária $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to +\infty$. A fim de mostrar a continuidade de $D\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \to (H^1(\mathbb{R}^N))'$, observe que, como a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ é contínua, e $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, segue da Proposição 1.2 que

$$|f(u)| \leq (f'_+(0)+\varepsilon)|u| + \widetilde{C}_\varepsilon |u|^p \leq C_0\left(|u| + |u|^p\right) = C_0\left(|u|^{2/2} + |u|^{q/q'}\right), \tag{1.20}$$

onde C_0 é uma constante real positiva, $q = p+1$ e $q' = \frac{p+1}{p}$, com $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Como f é contínua e $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, segue do Teorema A.13.1 (cf. Apêndice A.13) que, para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, vale que $f(u) \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ e $f(u_n) \to f(u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N) + L^{q'}(\mathbb{R}^N)$.

Por definição, a norma de $f(u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N) + L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$\|f(u)\|_{2\vee q'} := \inf\left\{\|f_1\|_2 + \|f_2\|_{q'} : f_1 \in L^2(\mathbb{R}^N), f_2 \in L^{q'}(\mathbb{R}^N),\ f(u) = f_1 + f_2\right\},$$

logo, tomando $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue das imersões de Sobolev que $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, então concluímos que

$$\|v\|_{2\vee q} = \|v\|_2 + \|v\|_q, \text{ onde } q = p+1.$$

Assim, dados $f_1^n, f_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $f_2^n, f_2 \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$, tais que $f(u_n) = f_1^n + f_2^n$ e $f(u) = f_1 + f_2$, aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}|D\Psi(u_n)v - D\Psi(u)v| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|f(u_n) - f(u)||v|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}|(f_1^n - f_1) + (f_2^n - f_2)||v|\,dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|(f_1^n - f_1)||v| + \int_{\mathbb{R}^N}|(f_2^n - f_2)||v|\,dx \\ &\leq \|f_1^n - f_1\|_2\|v\|_2 + \|(f_2^n - f_2)\|_{q'}\|v\|_q \\ &\leq \left(\|f_1^n - f_1\|_2 + \|(f_2^n - f_2)\|_{q'}\right)\|v\|_{2\vee q}.\end{aligned}$$

Utilizando mais uma vez as imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned}|D\Psi(u_n)v - D\Psi(u)v| &\leq \inf\left\{\|f_1^n - f_1\|_2 + \|f_2^n - f_2\|_{q'}\right\}\|v\|_{2\vee q}\\ &= \|(f_1^n - f_1) + (f_2^n - f_2)\|_{2\vee q'}(\|v\|_2 + \|v\|_q)\\ &\leq C\|f(u_n) - f(u)\|_{2\vee q'}\|v\|_V.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\|D\Psi(u_n) - D\Psi(u)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))'} = \sup_{\|v\|_V\leq 1}|D\Psi(u_n)v - D\Psi(u)v| \leq C\|f(u_n) - f(u)\|_{2\vee q'} \to 0,$$

quando $n \to +\infty$, mostrando que $D\Psi(u_n) \to D\Psi(u)$, quando $n \to +\infty$, e assim o operador $D\Phi = \Psi' : H^1(\mathbb{R}^N) \to (H^1(\mathbb{R}^N))'$ é contínuo. Portanto, pelo Lema de Schwartz (cf. Apêndice A.8), segue que Ψ é de classe C^1. □

Com as duas proposições estabelecidas, podemos provar o Teorema 1.3.

Prova do Teorema 1.3. Observando que o funcional I definido em (1.4) é tal que

$$I(u) = \Phi(u) - \Psi(u), \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

segue das Proposições 1.3 e 1.4 que I está bem definido e é de classe C^1.

Provemos agora que qualquer ponto crítico de I é uma solução não negativa de (1.3). Se u é ponto crítico de I, então para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, vale que

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + V(x)u\varphi)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta u + V(x)u - f(u))\varphi\,dx = 0,$$

logo

$$-\Delta u + V(x)u - f(u) = 0$$

no sentido fraco, e então

$$-\Delta u + V(x)u = f(u).$$

Portanto, qualquer ponto crítico de I é uma solução de (1.3). Para provar que essa solução é não negativa, usamos a extensão de f em $\mathbb{R}$ e escrevemos $u = u^+ - u^-$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}0 = I'(u)(u^-) &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\langle\nabla u, \nabla u^-\rangle + V(x)uu^-\right]dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^-\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\langle(\nabla u^+ - \nabla u^-), \nabla u^-\rangle + V(x)(u^+ - u^-)u^-\right]dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2\right)dx.\end{aligned}$$

Logo, segue de (1.5), que

$$\alpha_0 \|u^-\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2 \right) dx = 0.$$

Portanto, $u^- = 0$ e u é uma solução não negativa de (1.3). □

Dessa forma, concluímos o capítulo sabendo que o funcional I é de classe C^1 e que seus pontos críticos correspondem a soluções não negativas do problema. Além disso, provamos que se o funcional I possuir a geometria do Passo da Montanha, teremos, pelo Teorema do Passo da Montanha sem compacidade (Teorema 1.2), a existência de uma sequência de Palais-Smale no nível do Passo da Montanha c para I.

Capítulo 2

Estudo do problema autônomo

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre equações autônomas da forma

$$-\Delta u = g(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2.1}$$

onde estaremos supondo $N \geq 1$.

Associamos ao problema (2.1) o funcional natural $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx, \tag{2.2}$$

onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)\, d\tau$. Veremos que J possui a geometria do Passo da Montanha, logo seu nível do Passo da Montanha está bem definido. Nosso objetivo é relacionar o nível do Passo da Montanha com o nível crítico de energia mínima de J.

2.1 O Nível de Energia Mínima

Nessa seção, vamos mostrar que o funcional J definido em (2.2) é de classe C^1 e assegurar a existência de uma solução positiva para o problema (2.1) no nível de energia mínima, que coincide com o nível do Passo da Montanha.

Definição 2.1 (Solução de energia mínima)**.** *Uma solução fraca v de* (2.1) *é de energia mínima quando satisfaz*

$$J(v) = m, \text{ onde } m = \inf\{J(u) \mid u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ é solução de } (2.1)\}. \tag{2.3}$$

Observação 2.1. *Note que m está bem definido, pois já sabemos que existe uma solução para o problema* (2.1) *no nível do Passo da Montanha. Além disso, pela geometria do funcional J, qualquer solução não trivial de* (2.1) *tem energia positiva, portanto, $m > -\infty$.*

O seguinte resultado é devido a Berestycki-Lions [6] e Berestycki-Gallouët-Kavian [5].

Teorema 2.1. *Suponha que*

(g_0) $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *é contínuo e ímpar;*

(g_1) *quando* $N = 1$ *ou* $N = 2$*:* $\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = -\zeta \in (-\infty, 0)$*;*
quando $N \geq 3$*:* $-\infty < \liminf_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = -\zeta < 0$*;*

(g_2) *quando* $N = 2$*: para qualquer* $\alpha > 0$*, existe* $C_\alpha > 0$*, tal que* $|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}$ *para todo* $s \geq 0$*;*
quando $N \geq 3$*:* $\lim_{s\to+\infty} \frac{|g(s)|}{s^{(N+2)/(N-2)}} = 0$*;*

(g_3) *quando* $N = 1$*: existe* $\xi_0 > 0$*, tal que* $G(\xi) < 0$ *para todo* $\xi \in (0, \xi_0)$*,* $G(\xi_0) = 0$ *e* $g(\xi_0) > 0$*;*
quando $N \geq 2$*: existe* $\xi_0 > 0$*, tal que* $G(\xi_0) > 0$*.*

Então, J está bem definido e é de classe C^1*. Além disso,* $m > 0$ *e existe uma solução de energia mínima* ω *de* (2.1) *que é uma solução clássica e satisfaz* $\omega > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$*.*

Demonstração. A demonstração de que J está bem definido e é de classe C^1 para todo N pode ser encontrada no artigo de Berestycki-Lions [6, Teorema $A.VI$]. A demonstração de que $m > 0$ e de que existe uma solução de energia mínima ω de (2.1) que é uma solução clássica e satisfaz $\omega > 0$ em $\mathbb{R}^N$, pode ser encontrada no artigo de Berestycki-Lions [6, Teorema 5] para $N = 1$, no artigo de Berestycki-Gallouët-Kavian [5, Teorema 1] para $N = 2$ e no artigo de Berestycki-Lions [6, Teorema 1] para $N \geq 3$. □

Observemos que m constitui um nível crítico para o funcional J, visto que J é de classe C^1, logo cada solução de (2.1) é um ponto crítico para J (Veja o Capítulo 1, para mais detalhes). Este resultado pode ser complementado com uma caracterização mais detalhada da geometria do funcional J, relacionando o nível do Passo da Montanha ao nível de energia mínima, como mostrado por Jeanjean-Tanaka [15, 16] no teorema a seguir.

Teorema 2.2. *Suponha* $(g_0) - (g_3)$*. Então, o funcional J possui a Geometria do Passo da Montanha. Definindo*

$$\Gamma_J = \left\{ \gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) \mid \gamma(0) = 0 \; e \; J(\gamma(1)) < 0 \right\},$$

temos $\Gamma_J \neq \emptyset$ *e* $b = m$*, com*

$$b = \inf_{\gamma\in\Gamma_J} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) > 0.$$

Além disso, para qualquer solução de energia mínima ω *de* (2.1) *como dada pelo Teorema 2.1, existe um caminho* $\gamma \in \Gamma$*, tal que* $\gamma(t)(x) > 0$ *para todo* $(t,x) \in (0,1]\times\mathbb{R}^N$*,* $\omega \in \gamma([0,1])$ *e*

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = b.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Jeanjean-Tanaka [15, Teorema 1.2] para $N = 1$ e em Jeanjean-Tanaka [16, Teorema 0.2] para $N \geq 2$. Para uma versão mais detalhada em português, veja também [23, Teorema 0.1]. □

Dessa forma, J possui a geometria do Passo da Montanha, e seu nível do Passo da Montanha é igual ao seu nível de energia mínima para J.

2.2 Estimativa inferior para a energia

A seguir estabelecemos uma estimativa inferior para o funcional J, em termos da norma de u no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 2.1. *Sob as hipóteses* $(g_0)-(g_2)$*, existem* $c_1 > 0$*,* $\delta_0 > 0$*, tais que*

$$J(u) \geq c_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \textit{quando} \quad \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta_0.$$

Demonstração. Para $N = 1$, por (g_1), dado $\varepsilon = \dfrac{\zeta}{2}$, existe $\rho_0 > 0$, tal que

$$\frac{g(s)}{s} + \zeta < \frac{\zeta}{2}, \quad \text{para } 0 < s < 2\rho_0,$$

então

$$-g(s) \geq \frac{\zeta}{2}s, \quad \text{para } 0 \leq s < 2\rho_0.$$

Logo,

$$-G(s) \geq \frac{\zeta}{4}s^2, \quad \text{para } 0 \leq s < 2\rho_0.$$

Agora, como por (g_0) g é ímpar, então $G(s)$ é par, isto é, $G(s) = G(-s)$, e assim

$$-G(s) \geq \frac{\zeta}{4}s^2, \quad \text{para } |s| \leq \rho_0.$$

A imersão contínua de $H^1(\mathbb{R})$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ (cf. Apêndice A.1), garante que uma norma pequena em $H^1(\mathbb{R})$ implica uma norma pequena em $L^\infty(\mathbb{R})$, assim podemos escolher $\delta_0 > 0$ de modo que $\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \delta_0$ implique $\|u\|_\infty \leq \rho_0$. Logo,

$$\begin{aligned}\inf_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq\delta_0} J(u) &\geq \inf_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq\delta_0} \left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\zeta}{4}\|u\|_2^2\right) \\ &\geq \inf_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq\delta_0} \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\zeta}{4}\right\}\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right) \\ &= \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\zeta}{4}\right\}\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 = c_1\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 > 0.\end{aligned}$$

Assim, para $\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \delta_0$, temos que $J(u) \geq c_1\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2$.

Para $N = 2$, por (g_1), dado $\varepsilon = \dfrac{\zeta}{2}$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\frac{g(s)}{s} + \zeta < \frac{\zeta}{2}, \quad \text{para } 0 < s < \delta,$$

então

$$-g(s) \geq \frac{\zeta}{2}s, \quad \text{para } 0 \leq s < \delta.$$

Por (g_2), obtemos que

$$|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \leq C_\alpha s^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall\, s \geq 1,$$

logo,

$$-g(s) \geq -C_\alpha s^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall\, s \geq 1.$$

Mais ainda, considerando, sem perda de generalidade, $0 < \delta < 1$, segue que $[\delta, 1] \neq \emptyset$ é compacto, e portanto, como a função $s \mapsto \dfrac{|g(s)|}{s^4 e^{\alpha s^2}}$ é contínua por (g_0), ela atinge seu máximo M no compacto $[\delta, 1]$. Assim, obtemos que

$$-g(s) \geq -Ms^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall\, s \in [\delta, 1].$$

Dessa forma, fazendo $C'_\alpha = \max\{M, C_\alpha\}$, segue que

$$-g(s) \geq \frac{1}{2}\zeta s - C'_\alpha s^4 e^{\alpha s^2}, \quad \forall\, s \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}-G(s) &= -\int_0^s g(t)\,dt \geq \frac{\zeta}{4}s^2 - C'_\alpha \int_0^s t^4 e^{\alpha t^2}\,dt \\ &= \frac{\zeta}{4}s^2 - C'_\alpha \left(\frac{1}{2\alpha}s^3(e^{\alpha s^2}-1) - \frac{3}{2\alpha}\int_0^s t^2(e^{\alpha t^2}-1)\,dt\right) \\ &\geq \frac{\zeta}{4}s^2 - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}s^3(e^{\alpha s^2}-1), \quad \forall\, s \geq 0.\end{aligned}$$

Novamente usando que $G(s) = G(-s)$, temos que

$$-G(s) \geq \frac{\zeta}{4}s^2 - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}s^3(e^{\alpha s^2}-1), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Com isso, aplicando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5) e novamente utilizando as imersões de Sobolev (cf. Apêndice A.1), obtemos que existe $C''_\alpha > 0$, tal que

$$\begin{aligned}J(u) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\zeta}{4}\|u\|_2^2 - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^2} u^3(e^{\alpha u^2}-1)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\zeta}{4}\|u\|_2^2 - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}\left(\|u^3\|_2\|e^{\alpha u^2}-1\|_2^3\right) \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\zeta}{4}\|u\|_2^2 - \frac{C'_\alpha}{2\alpha}\|u\|_6^3\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha u^2}-1)^2\,dx\right)^{1/2} \\ \geq \min\left\{\frac{1}{2},\frac{\zeta}{4}\right\}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} &- \frac{C''_\alpha}{2\alpha}\|u\|^3_{H^1(\mathbb{R}^2)}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha u^2}-1)^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Vamos analisar o último termo da desigualdade. Veja que

$$\begin{aligned}-\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha u^2}-1)^2\,dx\right)^{1/2} &= -\left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha u^2}(e^{\alpha u^2}-1) - (e^{\alpha u^2}-1)\,dx\right)^{1/2} \\ &\geq -\left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha u^2}(e^{\alpha u^2}-1)\,dx\right)^{1/2} = -\left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\alpha u^2} - e^{\alpha u^2}\,dx\right)^{1/2} \\ &\geq -\left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\alpha u^2} - 1\,dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Logo, por (2.4), temos que

$$J(u) \geq \min\left\{\frac{1}{2},\frac{\zeta}{4}\right\}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{2\alpha u^2}-1)\,dx\right)^{1/2}. \qquad (2.5)$$

Pela desigualdade de Moser-Trundinger (cf Apêndice A.6), como $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, existem $\sigma_0 > 0$, $\widetilde{M} > 0$, tais que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\sigma_0 u^2} - 1 \right) dx \leq \widetilde{M}, \text{ para todo } u\text{tal que } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq 1.$$

Assim, para qualquer $C > 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\sigma_0 u^2/C^2} - 1 \right) dx \leq \widetilde{M}, \text{ para todo } u \text{ tal que } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C.$$

Desse modo, escolhendo $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que $0 < \delta_0 < \sqrt{\dfrac{\sigma_0}{2\alpha}}$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{2\alpha u^2} - 1 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{(\sigma_0 u^2 2\alpha/\sigma_0)} - 1 \right) dx \leq \widetilde{M},$$

para todo u, tal que $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \delta_0 < \sqrt{\dfrac{\sigma_0}{2\alpha}}$. Logo, segue de (2.5) que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\zeta}{4} \right\} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha} \widetilde{M}^{1/2} \|u\|^3_{H^1(\mathbb{R}^2)} \\ &= \left(\min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\zeta}{4} \right\} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha} \widetilde{M}^{1/2} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \right) \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

para $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, tal que $0 < \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < \delta_0$. Dessa forma, diminuindo $\delta_0 > 0$, se necessário, para que satisfaça

$$\min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\zeta}{4} \right\} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha} \widetilde{M}^{1/2} \delta_0 > 0,$$

concluímos que, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, com $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \delta_0$, vale que

$$J(u) \geq \left(\min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\zeta}{4} \right\} - \frac{C''_\alpha}{2\alpha} \widetilde{M}^{1/2} \delta_0 \right) \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} = c_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} > 0.$$

Portanto, para $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq \delta_0$, temos que $J(u) \geq c_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}$.

Para $N \geq 3$, por (g_1), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que

$$\frac{g(s)}{s} - \varepsilon < \liminf_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} \leq -\zeta, \quad \text{para } 0 < s < \delta_\varepsilon,$$

e então

$$-g(s) \geq (\zeta - \varepsilon)s, \quad \text{para } 0 \leq s < \delta_\varepsilon.$$

Por (g_2), dado $\varepsilon > 0$, existe $A_\varepsilon > 1$, tal que

$$\frac{|g(s)|}{s^{(N+2)/(N-2)}} \leq \varepsilon, \quad \text{para } s > A_\varepsilon > 1,$$

logo,

$$-g(s) \geq -\varepsilon s^{(N+2)/(N-2)}, \quad \text{para } s > A_\varepsilon > 1.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $0 < \delta_\varepsilon < 1$, temos que $[\delta_\varepsilon, A_\varepsilon] \neq \emptyset$ é compacto, e como por (g_0), a função $s \mapsto \dfrac{|g(s)|}{s^{(N+2)/(N-2)}}$ é contínua, então ela atinge seu máximo M_ε no compacto $[\delta_\varepsilon, A_\varepsilon]$, ou seja

$$-g(s) \geq -M_\varepsilon s^{(N+2)/(N-2)}, \quad \forall\, s \in [\delta_\varepsilon, A_\varepsilon].$$

Portanto, fazendo $C_\varepsilon = \max\{M_\varepsilon, \varepsilon\}$, segue que

$$-g(s) \geq (\zeta - \varepsilon)s - C_\varepsilon s^{(N+2)/(N-2)}, \quad \forall\, s \geq 0.$$

Assim, lembrando que o expoente crítico de Sobolev é $2^* = \frac{2N}{N-2}$, vale que

$$-G(s) = \int_0^s g(t)\,dt \geq \frac{1}{2}(\zeta - \varepsilon)s^2 - \frac{C_\varepsilon}{2^*}s^{2^*}, \quad \forall\, s > 0.$$

Usando mais uma vez que $G(s) = G(-s)$ e fazendo $C'_\varepsilon = \dfrac{C_\varepsilon}{2^*}$, segue que

$$-G(s) \geq \frac{1}{2}(\zeta - \varepsilon)|s|^2 - C'_\varepsilon |s|^{2^*}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Então pelas imersões contínuas de Sobolev (cf. Apêndice A.1), temos que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, logo existe $C''_\varepsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}(\zeta - \varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx - C'_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{1, \zeta - \varepsilon\}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - C'_\varepsilon \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^2)} \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{1, \zeta - \varepsilon\}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - C''_\varepsilon \|u\|^{2^*}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\min\{1, \zeta - \varepsilon\} - C''_\varepsilon \|u\|^{4/(N-2)}_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right)\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Assim, tomando $\delta_0 > 0$, suficientemente pequeno, de modo que

$$\frac{1}{2}\min\{1, \zeta - \varepsilon\} - C''_\varepsilon \delta_0^{4/(N-2)} > 0,$$

concluímos que, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \delta_0$, segue que

$$J(u) \geq \left(\frac{1}{2}\min 1, \zeta - \varepsilon - C''_\varepsilon \delta_0^{4/(N-2)}\right) \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})} = c_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})} > 0.$$

Logo, para $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})} \leq \delta_0$, temos que $J(u) \geq c_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})}$. □

Com essa estimativa, concluímos este capítulo, estabelecendo algumas bases necessárias para os próximos resultados sobre a solução do problema (1.3).

Capítulo 3

Estudo do problema não autônomo

Neste capítulo, investigaremos a existência de soluções positivas para os casos não autônomos do problema (1.3). Para isso, assumiremos as condições $(f_1)-(f_3)$ e $(V_1)-(V_5)$ introduzidas na Seção 2 do Capítulo 1.

Nosso objetivo é provar o resultado central desta dissertação, dado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Assuma $N \geq 2$, $(f_1)-(f_3)$ e $(V_1)-(V_4)$. Então,* (1.3) *tem uma solução positiva.*

Primeiro, façamos uma observação sobre o caso autônomo.

Observação 3.1. *No caso em que $V(x) \equiv V_\infty$, ou seja, quando* (1.3) *é autônoma, o Teorema 3.1 segue do Teorema 2.1. Para ver isto, basta observar que as hipóteses do Teorema 3.1 implicam nas hipóteses $(g_0)-(g_2)$ apresentadas no Capítulo 2, como demonstrado na prova do Lema 3.3.*

Provaremos agora um resultado que compara o ínfimo do espectro do operador autoadjunto $\sigma(-\Delta+V(x))$ com os valores extremos para V.

Proposição 3.1. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1,* $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) \leq \alpha_0 \leq V_\infty$.

Demonstração. De fato, como V é limitado por (V_2), então $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x)$ está bem definido, e temos, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, que

$$\left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x)\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^2\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx.$$

Logo,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) < \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx}, \quad \text{para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}.$$

Portanto,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) \leq \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx} = \alpha_0.$$

Por outro lado, segue de (V_3) que

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx} \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx} \\ &\leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty u^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx} + V_\infty, \quad \text{para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Em particular, considerando $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ e definindo $v_\theta(x) := u(\theta x)$, com $\theta \in \mathbb{R}$, então $v_\theta \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$. Além disso, temos $\nabla = \theta\nabla u(\theta x)$. Realizando a mudança de variável $y = \theta x$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\theta(x)|^2 dx = \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\theta x)|^2 dx = \theta^2\theta^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_\theta(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u(\theta x)|^2 dx = \theta^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy.$$

Dessa forma, tomando $v_\theta \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ em (3.1), obtemos:

$$\alpha_0 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\theta|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |v_\theta|^2 dx} + V_\infty = \frac{\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 dy}{\int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy} + V_\infty.$$

Logo, fazendo $\theta \to 0$ na desigualdade acima, temos $\alpha_0 \leq V_\infty$, conforme desejado. Portanto, segue o resultado. □

Observe que as hipóteses $(V_1) - (V_3)$ implicam que $\alpha_0 \leq V_\infty$. Além disso, caso $\alpha_0 < V_\infty$, podemos inferir que α_0 é um autovalor de multiplicidade finita para o operador $-\Delta + V(x)$, abaixo do espectro essencial $[V_\infty, +\infty)$, conforme [21, Teorema 8.2.1].

Dividiremos o capítulo em 3 seções. Na primeira seção, apresentaremos a técnica *"The Monotonicity Trick"*. Na segunda seção, demonstraremos o Teorema de Splitting, que é um importante resultado a respeito da decomposição das sequências de Palais-Smale. Por fim, na terceira seção, provaremos o nosso teorema principal, garantindo a existência de solução positiva para o problema (1.3).

3.1 A Técnica "The Monotonicity Trick"

Consideramos agora a classe de problemas

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

para $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, e associamos a estes problemas a família de funcionais $I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx.$$

O objetivo desta seção é mostrar que, para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, I_λ possui uma sequência de Palais-Smale limitada no nível c_λ. Para isso, utilizaremos a técnica desenvolvida no artigo de Jeanjean [14], chamada *"The Monotonicity Trick"*. Observamos que a condição para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ é essencial, para mais detalhes veja [14, Seção 2].

Teorema 3.2 (The Monotonicity Trick)**.** *Seja X um espaço de Banach equipado com uma norma $\|\cdot\|_X$ e $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo. Consideremos a família $(I_\lambda)_{\lambda\in J}$ de funcionais C^1 em X da forma*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \forall\, \lambda \in J,$$

onde $A, B : X \to \mathbb{R}$ são de classe C^1 e $B(u) \geq 0$, para todo $u \in X$ e tal que $A(u) \to +\infty$ ou $B(u) \to +\infty$ conforme $\|u\|_X \to +\infty$. Suponhamos que existem dois pontos $v_1, v_2 \in X$, tais que

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}, \quad \forall\, \lambda \in J,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}.$$

Então, para quase todo $\lambda \in J$, existe uma sequência $(v_n) \subset X$ (independente de λ), tal que

(i) (v_n) *é limitada,*

(ii) $I_\lambda(v_n) \to c_\lambda$,

(iii) $I'_\lambda(v_n) \to 0$ *no dual* X'.

Observação 3.2. *No artigo de Jeanjean-Toland [18, Teorema 2.1], foi demonstrado que a condição $B(u) \geq 0$, para todo $u \in X$, pode ser dispensada. Porém, nesse caso, não há mais uma relação monotônica entre c_λ e λ em J, ao contrário do Teorema 3.2,* "The Monotonicity Trick"*, onde a função $\lambda \mapsto c_\lambda$ é não crescente.*

Para provar o teorema, necessitamos de alguns resultados preliminares.

Proposição 3.2. *Seja $\lambda \in J$ um valor arbitrário fixado e $(\lambda_n) \subset J$ uma sequência estritamente crescente, tal que $\lambda_n \to \lambda$. Suponha ainda que existe c'_λ, a função derivada de c_λ com respeito a λ. Então, sob as hipóteses do Teorema 3.2, existe uma sequência de caminhos $(\gamma_n) \subset \Gamma$ que verifica:*

(i) $\max\limits_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma_n(t)) \leq \max\limits_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_n)$;

(ii) se $\gamma_n(t)$ satisfaz

$$I_\lambda(\gamma_n(t)) \geq c_\lambda - (\lambda - \lambda_n), \tag{3.3}$$

então existe $K = K(c'_\lambda) > 0$, independente de λ, tal que $\|\gamma_n(t)\| \leq K$.

Demonstração. Como $c_{\lambda_n} = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma(t))$ e $\lambda - \lambda_n > 0$, pela definição de ínfimo, existe uma sequência $(\gamma_n) \subset \Gamma$, tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n). \tag{3.4}$$

Para provar (i), observe que como c_λ é derivável, existe $n(\lambda) \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \geq n(\lambda)$,

$$-c'_\lambda - 1 \leq \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda - \lambda_n} \leq -c'_\lambda + 1. \tag{3.5}$$

A partir de (3.5), temos que

$$c_{\lambda_n} \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 1)(\lambda - \lambda_n), \quad \forall\, n \geq n(\lambda). \tag{3.6}$$

Como $\lambda_n \leq \lambda$, temos que $I_{\lambda_n}(v) \geq I_\lambda(v)$, para todo $v \in X$. Dessa forma, usando (3.4) e (3.6), obtemos

$$I_\lambda(\gamma_n(t)) \leq I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) \leq c_\lambda + (-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_n),$$

o que prova (i). Se $\gamma_n(t)$ satisfaz (3.3), segue de (3.4) que

$$\begin{aligned} \frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} &\leq \frac{c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) - c_\lambda + (\lambda - \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} \\ &= \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda + 2(\lambda - \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \frac{c_{\lambda_n} - c_\lambda}{\lambda - \lambda_n} + 2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, usando (3.5) e (3.7) temos que, para todo $n \geq n(\lambda)$, vale que

$$B(\gamma_n(t)) = \frac{I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) - I_\lambda(\gamma_n(t))}{\lambda - \lambda_n} \leq -c'_\lambda + 3 \leq C_1, \tag{3.8}$$

onde C_1 é uma constante real positiva independente de n e de λ. Logo, segue de (3.4) e (3.8) que

$$A(\gamma_n(t)) = I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) + \lambda_n B(\gamma_n(t)) \leq c_{\lambda_n} + (\lambda - \lambda_n) + \lambda_n(-c'_\lambda + 3) \leq C_2,$$

onde C_2 é uma constante real positiva independente de n e de λ. Usando nossa hipótese de que ou $A(u) \to +\infty$ ou $B(u) \to +\infty$, quando $\|u\|_X \to +\infty$, a limitação uniforme de $A(\gamma_n(t))$ e $B(\gamma_n(t))$ nos dá que $\|\gamma_n(t)\|_X \leq K$, onde K é uma constante real positiva independente de n e de λ, o que prova (ii). □

De forma geral, a Proposição 3.2 afirma que existe uma sequência de caminhos $(\gamma_n) \subset \Gamma$, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, a partir de um nível estritamente abaixo de c_λ, $\gamma_n(t)$ pertence à bola centrada na origem com raio fixo $K = K(c'_\lambda) > 0$, para todo $t \in [0,1]$ e

$$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma_n(t)) \to c_\lambda, \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, para $\alpha > 0$, definimos

$$F_\alpha = \{u \in X : \|u\|_X \leq K+1 \text{ e } |I_\lambda(u) - c_\lambda| \leq \alpha\}$$

onde a constante $K > 0$ é dada no item (ii) da Proposição 3.2. Assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.3. *Seja $\lambda \in J$ um valor arbitrário fixado. Sob as hipóteses do Teorema 3.2, para todo $\alpha > 0$,*

$$\inf\{\|I'_\lambda(u)\|_{X'} : u \in F_\alpha\} = 0. \tag{3.9}$$

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Assumindo que não vale (3.9), podemos obter $\alpha > 0$, suficientemente pequeno, tal que para qualquer $u \in F_\alpha$, temos

$$\|I'_\lambda(u)\|_{X'} \geq \alpha. \tag{3.10}$$

De fato, desde que não vale (3.9), temos que $\|I'_\lambda(u)\|_{X'} \geq \varepsilon$, para todo $u \in F_{\widetilde{\alpha}}$, para algum $\widetilde{\alpha} > 0$ e para algum $\varepsilon > 0$. Como, para todo $0 < \alpha < \widetilde{\alpha}$, temos $F_\alpha \subset F_{\widetilde{\alpha}}$, então tomando $0 < \alpha < \min\{\varepsilon, \widetilde{\alpha}\}$, vale que $\|I'_\lambda(u)\|_{X'} \geq \varepsilon > \alpha$, em particular, para todo $u \in F_\alpha$.

Dessa forma, o Lema da Deformação (cf. Apêndice A.10), nos garante que existe $\varepsilon \in (0, \alpha)$ e um homeomorfismo $\eta : X \to X$, tal que

$$\eta(u) = u, \text{ se } |I_\lambda(u) - c_\lambda| \geq \alpha \tag{3.11}$$

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq I_\lambda(u), \forall\, u \in X \tag{3.12}$$

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq c_\lambda - \varepsilon, \forall\, u \in X, \text{ com } \|u\|_X \leq K \text{ e } I_\lambda(u) \leq c_\lambda + \varepsilon. \tag{3.13}$$

Seja $(\gamma_n) \subset \Gamma$ a sequência obtida na Proposição 3.2. Escolhemos e fixamos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que

$$(-c'_\lambda + 2)(\lambda - \lambda_m) \leq \varepsilon < \alpha. \tag{3.14}$$

Considere $u = \gamma_m(t)$, para algum $t \in [0,1]$, se u satisfaz $I_\lambda(u) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m)$ então a equação (3.12) implica que

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m). \tag{3.15}$$

Por outro lado, se u satisfaz

$$I_\lambda(u) > c_\lambda - (\lambda - \lambda_m)$$

então o item (ii) da Proposição 3.2 e (3.14) implicam que u é tal que $\|u\| \leq K$ com $I_\lambda(u) \leq c_\lambda + \varepsilon$. Assim, aplicando (3.13), temos que

$$I_\lambda(\eta(u)) \leq c_\lambda - \varepsilon \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m). \tag{3.16}$$

Diminuindo α, se necessário, podemos assumir que

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}\left(c_\lambda - \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}\right). \tag{3.17}$$

Por (3.17), temos que

$$\alpha < 2\alpha < |I_\lambda(v_i) - c_\lambda|, \text{ para } i = 1,2,$$

logo, por (3.11) temos $\eta(\gamma_m(0)) = \gamma_m(0) = v_1$ e $\eta(\gamma_m(1)) = \gamma_m(1) = v_2$. Portanto, pela continuidade de η, segue que $\eta(\gamma_m) \in \Gamma$. Combinando (3.15) e (3.16), obtemos

$$c_\lambda \leq \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\eta(\gamma_m(t))) \leq c_\lambda - (\lambda - \lambda_m),$$

gerando uma contradição. Portanto, a proposição está provada. □

Agora, estamos em condições de provar o Teorema 3.2.

Demonstração do Teorema 3.2. Seja $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$, com $\alpha_n \to 0$. Pela Proposição 3.3 existe $v_n \in F_{\alpha_n}$, com $I_\lambda(v_n) \to c_\lambda$ e $\|I'_\lambda(v_n)\|_{X'} < 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para quase todo $\lambda \in J$. Portanto, (v_n) é uma sequência de Palais-Smale para I_λ no nível $c_\lambda \in \mathbb{R}$, isto é, $I_\lambda(v_n) \to c_\lambda$ e $\|I'_\lambda(v_n)\|_{X'} \to 0$, o que prova (ii) e (iii). Além disso, pela definição de F_{α_n}, concluímos

também que (v_n) é uma sequência que está contida na bola de raio $K+1$ centrada na origem, logo é limitada, o que prova (i). □

Temos também o seguinte resultado a respeito da função $\lambda \mapsto c_\lambda$.

Lema 3.1. *Sob as hipóteses do teorema 3.2, a função $\lambda \mapsto c_\lambda$ é contínua pela esquerda.*

Demonstração. Suponha que existem $\lambda_0 \in J$ e $(\lambda_n) \subset J$ com $\lambda_n < \lambda_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_n \to \lambda_0$. Como a função $\lambda \mapsto c_\lambda$ é não crescente e limitada inferiormente por zero, sabemos que o limite $\lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n}$ existe e, além disso, satisfaz $c_{\lambda_0} \leq \lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n}$. Suponha, por contradição, que

$$c_{\lambda_0} < \lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n}. \tag{3.18}$$

Seja $\delta = \lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n} - c_{\lambda_0} > 0$. Pela definição de ínfimo, existe $\gamma_0 \in \Gamma$, tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \frac{\delta}{3}.$$

Usando o fato de que $I_\lambda(u) = I_{\lambda_0}(u) + (\lambda_0 - \lambda)B(u)$, para $\lambda \in J$ e $u \in X$, obtemos, para todo $\lambda < \lambda_0$, que

$$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma_0(t)) = \max_{t\in[0,1]} \{I_{\lambda_0}(\gamma_0(t)) + (\lambda_0 - \lambda)B(\gamma_0(t))\} < c_{\lambda_0} + \frac{\delta}{3} + (\lambda_0 - \lambda) \max_{t\in[0,1]} B(\gamma_0(t)).$$

Como B é contínua e $[0,1]$ compacto, segue do Teorema de Weierstrass que B é limitada nesse intervalo, logo $\max_{t\in[0,1]} B(\gamma_0(t)) \leq C$, para alguma constante real $C > 0$. Portanto, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $C(\lambda_0 - \lambda) \leq \delta/3$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_0(t)) < c_{\lambda_0} + \frac{2\delta}{3}. \tag{3.19}$$

Por outro lado, pela definição de c_{λ_n}, temos que

$$c_{\lambda_n} \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_0(t)). \tag{3.20}$$

Usando (3.19) e (3.20), segue que

$$c_{\lambda_n} < c_{\lambda_0} + \frac{2\delta}{3}.$$

Passando a desigualdade ao limite e usando a definição de δ, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n} - \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n} \leq c_{\lambda_0} - \frac{2}{3}c_{\lambda_0}, \text{ logo } \lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n} \leq c_{\lambda_0},$$

o que contradiz (3.18). Portanto, a função $\lambda \to c_\lambda$ é contínua pela esquerda. □

Com o intuito de aplicar o Teorema 3.2, vamos verificar que suas hipóteses são satisfeitas. Para isso, será necessário recorrer a alguns lemas.

Lema 3.2. *Suponha que (V_1) e (V_2) sejam satisfeitas. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$, tal que*

$$c_\varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + (\alpha_0 - \varepsilon)\|u\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx, \quad \textit{para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, sob as condições (V_2) e (V_5),

$$\|u\|_V^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx$$

é equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$.

Demonstração. Para $\delta \in (0,1)$, consideramos o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned}
\mu_\delta &:= \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(1-\delta)|\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\|u\|_2^2} \\
&= \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(1-\delta)|\nabla u|^2\,dx}{\|u\|_2^2} + \frac{\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx}{\|u\|_2^2} \right) \\
&\geq \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx}{\|u\|_2^2} = \left(\inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} V(x) \right) \frac{\|u\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > -\infty.
\end{aligned}$$

Mostremos que $\lim_{\delta\to 0} \mu_\delta \geq \alpha_0$. Pela definição de μ_δ, existe $u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|u_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$, tal que

$$(1-\delta)\|\nabla u_\delta\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_\delta^2\,dx \leq (\mu_\delta + \delta)\|u_\delta\|_2^2. \tag{3.21}$$

De (1.5) e (3.21), segue que

$$\begin{aligned}
\alpha_0\|u_\delta\|_2^2 - \delta\|\nabla u_\delta\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\delta|^2 + V(x)u_\delta^2\,dx - \delta\|\nabla u_\delta\|_2^2 \\
&= (1-\delta)\|\nabla u_\delta\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_\delta^2\,dx \leq (\mu_\delta + \delta)\|u_\delta\|_2^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\alpha_0 - \mu_\delta - \delta)\|u_\delta\|_2^2 \leq \delta\|\nabla u_\delta\|_2^2 \leq \delta \to 0, \quad \text{quando} \quad \delta \to 0.$$

Assim, se $\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta < \alpha_0$, temos na equação acima que $(\alpha_0 - \mu_\delta - \delta) \nrightarrow 0$ quando $\delta \to 0$, logo $\|u_\delta\|_2 \to 0$ e, portanto, por (3.21), $\|\nabla u_\delta\|_2 \to 0$. Isso é uma contradição com $\|u_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$ e, portanto, vale que $\lim_{\delta\to 0}\mu_\delta \geq \alpha_0$. Logo, pela definição de limite, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $c'_\varepsilon > 0$, tal que $\mu_\delta \geq \alpha_0 - \varepsilon$ quando $0 < \delta < c'_\varepsilon$, ou seja,

$$\alpha_0 - \varepsilon \leq \mu_\delta = \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(1-\delta)|\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\|u\|_2^2} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N}(1-\delta)|\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx}{\|u\|_2^2},$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$. Então,

$$(\alpha_0 - \varepsilon)\|u\|_2^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx - \delta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\right),$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente,

$$\delta\|\nabla u\|_2^2 + (\alpha_0 - \varepsilon)\|u\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx,$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e para todo $\delta \in (0, c_{\varepsilon'})$. Portanto, escolhendo $\delta = c_\varepsilon$, temos o resultado.

Provemos agora a equivalência das normas. Suponha que valem (V_2) e (V_5). Por (V_2), como $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$, tal que $V(x) < \varepsilon + V_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, com $|x| > r$. Como V é contínua, ela atinge seu máximo M no compacto $B_r[0] \subset \mathbb{R}^N$. Definindo $\widetilde{V} = \max\{\varepsilon + V_\infty, M\}$, temos que

$$V(x) < \widetilde{V}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.22}$$

Por (V_5), temos que $\alpha_0 > 0$, e então podemos aplicar o Lema tomando $\varepsilon = \dfrac{\alpha_0}{2} > 0$. Assim, existe $c_\varepsilon = c_{\alpha_0}$, tal que

$$c_{\alpha_0}\|\nabla u\|_2^2 + \left(\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{2}\right)\|u\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx, \quad \text{para todo } u \in H. \tag{3.23}$$

Seja $\widehat{C}_{\alpha_0} = \min\left\{c_{\alpha_0}, \frac{\alpha_0}{2}\right\}$. Usando (3.22) e (3.23), temos

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{\alpha_0}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \widehat{C}_{\alpha_0}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+u^2\right)dx \leq c_{\alpha_0}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx+\frac{\alpha_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u^2\,dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+V(x)u^2\,dx = \|u\|^2_V \leq \int_{\mathbb{R}^N}(V(x)+1)\left(|\nabla u|^2+u^2\right)dx\\ &\leq (\widetilde{V}+1)\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

e, portanto, as normas são equivalentes. □

O seguinte lema garante que, para todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, I_λ possui a geometria do Passo da Montanha, com o nível de Passo da Montanha denotado por c_λ.

Lema 3.3. *Suponha que $(f_1)-(f_3)$, $(V_1)-(V_3)$ e (V_5) são satisfeitas. Então, I_λ possui a geometria do Passo da Montanha, com o nível de Passo da Montanha c_λ, isto é,*

(i) existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ com $I_\lambda(v)<0$, para todo $\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

(ii) $c_\lambda = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(0), I_\lambda(v)\}$, para todo $\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^N)) \mid \gamma(0)=0, \gamma(1)=v\}$.

Demonstração. Para qualquer $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, temos que

$$I_\lambda(u) \leq I_{\frac{1}{2}}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+V(x)u^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\,dx = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2_V - \int_{\mathbb{R}^N}F(u)\,dx\right). \tag{3.24}$$

Por (f_3), temos que $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(s)}{s} = +\infty$, ou seja, para todo $M>0$, existe $S_M>0$, tal que se $s>S_M$ vale que $\dfrac{f(s)}{s} > M$. Logo, $f(s)>Ms$, o que implica que

$$F(s) = \int_0^s f(t)\,dt > \int_0^s Mt\,dt = \frac{Ms^2}{2}, \text{ para todo } s>S_M, \tag{3.25}$$

e então

$$-F(s) < -\frac{Ms^2}{2}, \text{ para todo } s>S_M. \tag{3.26}$$

Por (V_2) e (V_3), temos que $\widehat{V} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) < +\infty$, assim tomando $M>8\widehat{V}$, segue que

$$-\frac{M}{2} < -4\widehat{V}. \tag{3.27}$$

Conforme provado na Proposição 3.1, temos que

$$\inf_{v\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_2^2} = 0.$$

Portanto, podemos escolher $v = v_\theta$, com $|\theta|$ suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_2^2} < \widehat{V}.$$

Além disso, vamos escolher v, de modo que

$$\int_{|v|\le S_M} v^2\,dx < \int_{|v|>S_M} v^2\,dx.$$

Portanto,

$$\|\nabla v\|_2^2 < \widehat{V}\|v\|_2^2 = \widehat{V}\left(\int_{|v|\le S_M} v^2\,dx + \int_{|v|>S_M} v^2\,dx\right) < 2\widehat{V}\int_{|v|>S_M} v^2\,dx. \tag{3.28}$$

Usando (3.24), (3.26), (3.27) e (3.28), e lembrando que por (V_5) temos $f>0$, segue que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(v) &\le \frac{1}{2}\left(\|v\|_V^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(v)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\|v\|_V^2 - \int_{|v|\le S_M} F(v)\,dx - \int_{|v|>S_M} F(v)\,dx\right)\\
&< \frac{1}{2}\left(\|v\|_V^2 - \int_{|v|>S_M} F(v)\,dx\right) < \frac{1}{2}\left(\|v\|_V^2 - \int_{|v|>S_M} \frac{Mv^2}{2}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2\,dx - \int_{|v|>S_M} \frac{Mv^2}{2}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{|v|\le S_M} V(x)v^2\,dx + \int_{|v|>S_M} V(x)v^2\,dx - \int_{|v|>S_M} \frac{Mv^2}{2}\,dx\right)\\
&< \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,dx + 2\widehat{V}\int_{|v|>S_M} v^2\,dx - \int_{|v|>S_M} \frac{Mv^2}{2}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,dx + \left(2\widehat{V} - \frac{M}{2}\right)\int_{|v|>S_M} v^2\,dx\right)\\
&< \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,dx + (2\widehat{V} - 4\widehat{V})\int_{|v|>S_M} v^2\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_2^2 - 2\widehat{V}\int_{|v|>S_M} v^2\,dx\right) < 0.
\end{aligned}$$

Assim, temos (i). Para provar (ii), como por (V_1) temos $\alpha_0 > f'_+(0)$, podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\alpha_0 - \varepsilon_0 > f'_+(0)$. Pelo Lema 3.2, existe $c_{\varepsilon_0} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}c_{\varepsilon_0}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha_0-\varepsilon_0)\|u\|_2^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}c_{\varepsilon_0}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha_0-\varepsilon_0)\|u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx. \end{aligned}$$

Seja

$$J_0(u) \coloneqq \frac{1}{2}c_{\varepsilon_0}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha_0-\varepsilon_0)\|u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx,$$

então, $J_0(u) = c_{\varepsilon_0}J(u)$, onde

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\,dx.$$

Além disso, como

$$G(u) = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}\left(F(u) - \frac{1}{2}(\alpha_0-\varepsilon_0)|u|^2\right),$$

então,

$$g(s) = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}(f(s) - (\alpha_0-\varepsilon_0)s).$$

De modo a aplicar a Proposição 2.1, afirmamos que nossas hipóteses implicam em $(g_0)-(g_2)$. Como f é contínua, segue que g também o é. Além disso, como f só está definida em $\mathbb{R}^+$, podemos estender f para todo $\mathbb{R}$ definindo $f(s) = -f(-s)$ se $s < 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} g(-s) &= \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}(f(-s) - (\alpha_0-\varepsilon_0)(-s)) = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}((\alpha_0-\varepsilon_0)s + f(-s)) \\ &= \frac{1}{c_{\varepsilon_0}}((\alpha_0-\varepsilon_0)s - f(s)) = -g(s), \end{aligned}$$

e portanto g é ímpar, o que prova (g_0). Observe agora que

$$\begin{aligned} -\infty < \liminf_{s\to 0}\frac{g(s)}{s} &= \limsup_{s\to 0}\frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{c_{\varepsilon_0}s}(f(s) - (\alpha_0-\varepsilon_0)s) \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{c_{\varepsilon_0}}(f'_+(0) - (\alpha_0-\varepsilon_0)). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, temos $f'_+(0) < \alpha_0 - \varepsilon_0$ e $c_{\varepsilon_0} > 0$, então

$$\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = -\nu \in (-\infty, 0),$$

para $N \geq 1$, o que prova (g_1).

Para $N = 2$, temos por (f_2) que existe $1 < p < +\infty$, tal que $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0$. Logo, para todo $\alpha > 0$, existe $S > 0$, tal que se $s > S$, vale que $\frac{|f(s)|}{s^p} < \alpha$. Considere s suficientemente grande, de modo que se $s > M_\alpha$, vale que $s^p < e^{\alpha s^2}$, onde M_α é uma constante positiva. Seja $\widehat{M}_\alpha = \max\{M_\alpha, S\}$ e tome $s > \widehat{M}_\alpha$, então temos que $\frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} < \frac{|f(s)|}{s^p} < \alpha$, logo

$$|f(s)| < \alpha e^{\alpha s^2}, \text{ para todo } s > \widehat{M}_\alpha. \tag{3.29}$$

Seja $C_\alpha = \max\left\{ \max_{s\in[0,\widehat{M}_\alpha]} \left\{ \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} \right\}, 1 \right\}$. Se $C_\alpha = 1$, então $\max_{s\in[0,\widehat{M}_\alpha]} \left\{ \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} \right\} < 1$, logo

$$|f(s)| < e^{\alpha s^2} = C_\alpha e^{\alpha s^2}, \text{ para todo } s \in [0, \widehat{M}_\alpha]. \tag{3.30}$$

Se $C_\alpha = \max_{s\in[0,\widehat{M}_\alpha]} \left\{ \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} \right\}$, então $\frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} \leq C_\alpha$, para todo $s \in [0, \widehat{M}_\alpha]$, logo

$$|f(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}, \text{ para todo } s \in [0, \widehat{M}_\alpha]. \tag{3.31}$$

Portanto, segue de (3.29), (3.30) e (3.31) que $|f(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$.

Para $N \geq 3$, temos por (f_2) que existe $1 < p < \beta$, tal que $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0$, onde $\beta = \frac{N+2}{N-2}$. Logo, como $p < \beta$, temos que $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^\beta} = 0$. Uma vez que $\beta - 1 > 0$, Veja ainda que,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{s}{s^\beta} = \lim_{s\to+\infty} s^{1-\beta} = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s^{\beta-1}} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|g(s)|}{s^\beta} = \lim_{s\to+\infty} \frac{|f(s) - (\alpha_0 - \varepsilon_0)s|}{c_{\varepsilon_0} s^\beta} = \frac{1}{c_{\varepsilon_0}} \lim_{s\to+\infty} \left| \frac{f(s)}{s^\beta} - \frac{(\alpha_0 - \varepsilon_0)s}{s^\beta} \right| = 0,$$

o que conclui a prova de (g_2).

Seja $\gamma \in \Gamma$ e $\varphi_\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi_\gamma(t) = \|\gamma(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Então φ_γ é contínua, e como, por hipótese, temos que $\varphi_\gamma(0) = \|\gamma(0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$ e $\varphi_\gamma(1) = \|\gamma(1)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} =$

$\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, segue do Teorema do Valor Intermediário que, para todo $\delta_0 \in (0, \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)})$, existe $t_0 \in (0,1)$, tal que $\varphi_\gamma(t_0) = \|\gamma(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \delta_0$. Aplicando a Proposição 2.1, podemos escolher $\widetilde{\delta}_0 \in (0,1)$ suficientemente pequeno, tal que

$$J_0(u) \geq c_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{quando} \quad \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \widetilde{\delta}_0 \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

para algum $c_1 > 0$. Tomando $\delta_0 = \widetilde{\delta}_0 \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, temos

$$J_0(\gamma(t_0)) \geq c_1 \|\gamma(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{quando} \quad \|\gamma(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \delta_0 < \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \geq J_0(\gamma(t_0)) \geq c_1 {\delta_0}^2 > 0, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Assim, temos

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) > 0.$$

Portanto,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \geq \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) > 0.$$

□

Agora, podemos aplicar os lemas anteriores para garantir que as hipóteses do Teorema 3.2 são atendidas, permitindo a aplicação do teorema para provar o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *I_λ tem uma sequência de Palais-Smale limitada, no nível c_λ, para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.*

Demonstração. De fato, pela equivalência das normas provada no Lema 3.2, temos que

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_V - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx = A(u) - \lambda B(u)$$

satisfaz $\frac{1}{2}\|u\|^2_V = A(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to +\infty$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx = B(u) \geq 0$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $f(u) \geq 0$ por (V_5). Além disso, pelo Lema 3.3, sabemos que I_λ possui a geometria do Passo da Montanha para todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, cujo nível correspondente é c_λ. Logo, tomando $X = H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $J = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, o resultado segue do Teorema 3.2. □

Para encerrar a seção, provemos agora que a norma de qualquer ponto crítico não trivial de I_λ é limitada inferiormente.

Lema 3.4. *Assuma* (f_1), (f_2), $(V_1)-(V_3)$. *Então, existe* $\delta_0 > 0$, *independente de* $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, *tal que* $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \delta_0$ *para qualquer ponto crítico não trivial u de* I_λ.

Demonstração. Como u é ponto crítico não trivial de I_λ, então

$$I'_\lambda(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)\, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi\, dx = 0,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\varphi\, dx. \tag{3.32}$$

Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de pontos críticos não triviais de I_λ e suponha por absurdo que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$ quando $n \to +\infty$. Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ a sequência definida por

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}.$$

Como $\|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$, então v_n converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e fortemente em $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $v_n \rightharpoonup v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \to v \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Usando a equação (1.5) e tomando $u = u_n$ e $\varphi = \frac{v}{\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}$ na equação (3.32), segue que

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \|v\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)\, dx &= \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_n \frac{\nabla v}{\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}} + V(x)u_n \frac{v}{\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}} \right) dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} u_n \frac{v}{\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}\, dx \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} v_n v\, dx.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Afim de aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11), vamos checar que suas hipóteses são satisfeitas. Veja primeiro que, pela extensão de f em $\mathbb{R}$, só faz sentido calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)}{u_n}$ para $x \in \mathbb{R}^N$, tal que $u_n(x) \geq 0$. Como $u_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo, por (f_1), temos que

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \to f'_+(0), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $v_n \to v$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, logo $v_n v \to v^2$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Portanto,

$$\frac{f(u_n)}{u_n} v_n v \to f'_+(0)v^2, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.34}$$

Agora, pela Proposição 1.2, temos que

$$|f(u_n)| \leq (f'_+(0)+\varepsilon)|u_n| + \widetilde{C}_\varepsilon |u_n|^p \text{ logo, } \left|\frac{f(u_n)}{u_n}\right| \leq (f'_+(0)+\varepsilon) + \widetilde{C}_\varepsilon |u_n|^{p-1}.$$

Portanto,

$$\left|\frac{f(u_n)}{u_n} v_n v\right| \leq (f'_+(0)+\varepsilon)|v_n v| + \widetilde{C}_\varepsilon |u_n|^{p-1}|v_n v| =: h_n. \tag{3.35}$$

Provemos agora que $h_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, aplicando a Desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |h_n(x)|\,dx &= (f'_+(0)+\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} |v_n v|\,dx + \widetilde{C}_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-1}|v_n v|\,dx \\
&\leq (f'_+(0)+\varepsilon)\|v_n\|_2\|v\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|u_n^{p-1}\|_{\frac{2^*}{p-1}} \|v_n v\|_{\left(\frac{2^*}{p-1}\right)'} \\
&= (f'_+(0)+\varepsilon)\|v_n\|_2\|v\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|u_n\|_{2^*}^{p-1} \|v_n v\|_{\left(\frac{2^*}{p-1}\right)'}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Note que usamos

$$\left(\frac{2^*}{p-1}\right)' = \frac{\left(\frac{2^*}{p-1}\right)}{\left(\frac{2^*}{p-1}-1\right)} = \left(\frac{2^*}{p-1}\right)\cdot\left(\frac{p-1}{2^*-p+1}\right) = \frac{2^*}{2^*-p+1} > 1,$$

uma vez que $p>1$ implica que $2^*-p+1<2^*$, logo $\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}>2$. Por outro lado, como $p<2^*-1$, então

$$1<2^*-p \Rightarrow 2<2^*-p+1 \Rightarrow \frac{2}{2^*-p+1}<1 \Rightarrow \frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}<2^*.$$

Portanto, aplicando novamente a Desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5), temos

$$\|v_n v\|_{\left(\frac{2^*}{p-1}\right)'} = \|v_n v\|_{\frac{2^*}{2^*-p+1}} \leq \|v_n^{\frac{2^*}{2^*-p+1}}\|_2^{\frac{2^*-p+1}{2^*}} \|v^{\frac{2^*}{2^*-p+1}}\|_2^{\frac{2^*-p+1}{2^*}} = \|v_n\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}} \|v\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}.$$

Substituindo na equação (3.36), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h_n(x)|\,dx \leq (f'_+(0)+\varepsilon)\|v_n\|_2\|v\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|u_n\|_{2^*}^{p-1} \|v_n\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}} \|v\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}. \tag{3.37}$$

Como $2<\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}<2^*$, temos a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, para alguma constante $C>0$, segue que:

- $v_n \in H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, logo $v_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\|v_n\|_2 < C$;
- $v_n \rightharpoonup v \in H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, logo $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\|v\|_2 < C$;
- $u_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, logo $u_n \to 0$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_n\|_{2^*}^{p-1} \to 0$ e $\|u_n\|_{2^*}^{p-1} < C$;
- $v_n \in H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}(\mathbb{R}^N)$, logo $v_n \in L^{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\|v_n\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}} < C$;
- $v_n \rightharpoonup v \in H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}(\mathbb{R}^N)$, logo $v \in L^{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\|v\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}} < C$.

Portanto, segue de (3.37) que $h_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Afirmamos agora que $h_n \to (f'_+(0)+\varepsilon)v^2 := h \in L^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, como $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, então $v_n \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, pela caracterização de convergência fraca de v_n em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $v_n v \to v^2$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, como $u_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to 0$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Lembrando que $\|v_n\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}} < C$ e $\|v\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}} < C$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|h_n-h|\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left|(f'_+(0)+\varepsilon)|v_nv|+\widetilde{C}_\varepsilon|u_n|^{p-1}|v_nv|-(f'_+(0)+\varepsilon)v^2\right|dx\\
&\le |(f'_+(0)+\varepsilon)|\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left||v_nv|-v^2\right|dx+\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{C}_\varepsilon|u_n|^{p-1}|v_nv|\,dx\\
&\le 0+\lim_{n\to+\infty}\widetilde{C}_\varepsilon\|u_n\|_{2^*}^{p-1}\|v_n\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}\|v\|_{\frac{2\cdot 2^*}{2^*-p+1}}=0.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $h_n \to h$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, pelo Teorema de Vainberg (cf. Apêndice A.12), existe $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $h_n \le \psi$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Portanto, segue de (3.35) que

$$\left|\frac{f(u_n)}{u_n}v_nv\right| \le \psi, \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{3.38}$$

Assim, por (3.34) e (3.38), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11) na equação (3.33) e concluir que

$$\alpha_0\|v\|_2^2 \le \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)}{u_n}v_nv\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\lim_{n\to+\infty}\frac{f(u_n)}{u_n}v_nv\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}f'_+(0)v^2\,dx=f'_+(0)\|v\|_2^2.$$

Note que se $v \neq 0$, então $\alpha_0 \le f'_+(0)$. Mas, por (V_1), temos que $f'_+(0) < \alpha_0$, logo $\alpha_0 \le f'_+(0) < \alpha_0$, o que é uma contradição. Portanto, $v = 0$. Como $\|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$, concluímos que $v_n \rightharpoonup v = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, mas $v_n \not\to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Provemos que $v_n \not\to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$.

Por (1.14), temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)}{u_n}{v_n}^2\,dx\right| \leq (f'_+(0)+\varepsilon)\int_{|u_n|<\delta}{v_n}^2\,dx+\widetilde{C}_\varepsilon\int_{|u_n|\geq\delta}{u_n}^{p-1}{v_n}^2\,dx. \tag{3.39}$$

Pela Desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5), temos que

$$\begin{aligned}\int_{|u_n|\geq\delta}{u_n}^{p-1}{v_n}^2\,dx &\leq \left(\int_{|u_n|\geq\delta}({u_n}^{p-1})^{\frac{p+1}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int_{|u_n|\geq\delta}({v_n}^2)^{\frac{p+1}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\\ &= \left(\int_{|u_n|\geq\delta}{u_n}^{p+1}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int_{|u_n|\geq\delta}{v_n}^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}}.\end{aligned}$$

Suponha por absurdo que $v_n\to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, com $2<p+1<2^*$, então temos também que $u_n\to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\left(\int_{|u_n|\geq\delta}{v_n}^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}\to 0 \quad \text{e} \quad \left(\int_{|u_n|\geq\delta}{u_n}^{p+1}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\to 0,$$

portanto

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)}{u_n}{v_n}^2\,dx\right| \leq (f'_+(0)+\varepsilon)\int_{|u_n|<\delta}{v_n}^2\,dx. \tag{3.40}$$

Mas, como por (V_1) temos $f'_+(0)<\alpha_0$, podemos escolher $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno de modo que $f'_+(0)<\alpha_0-\varepsilon$. Assim, usando as equações (1.5), (3.40) e (3.32), respectivamente, segue que

$$0<[(\alpha_0-\varepsilon)-f'_+(0)]\int_{\mathbb{R}^N}v_n^2\,dx\leq\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_n|^2+V(x)v_n^2)\,dx-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(u_n)}{u_n}{v_n}^2\,dx\leq 0.$$

O que é um absurdo, portanto $v_n\nrightarrow 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Então, aplicando o Lema de Lions (cf. Apêndice A.9), como $v_n\rightharpoonup 0$ também em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que ou $v_n\to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, para $2<p+1<2^*$, ou existem $R>0$, $(y_n)\subset\mathbb{R}^N$ e $\tau>0$, tais que

$$\int_{B_R(y_n)}{v_n}^2\,dx\geq\tau>0.$$

Vamos usar a notação $\widetilde{v}_n(\cdot):=v_n(\cdot+y_n)$ para definir $\widetilde{v}_n$ como uma translação de v_n por y_n. Assim, temos que

$$\int_{B_R(0)}{\widetilde{v}_n}^2\,dx=\int_{B_R(y_n)}{v_n}^2\,dx\geq\tau>0.$$

Como v_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, em $L^2(\mathbb{R}^N)$, então $\widetilde{v}_n$ também o é, logo sabemos que $\widetilde{v}_n \rightharpoonup \widetilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\widetilde{v}_n \to \widetilde{v} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, logo $\widetilde{v} \neq 0$, já que $\displaystyle\int_{B_R(0)} \widetilde{v}^2\,dx \geq \tau > 0$. Veja que a sequência (y_n) não pode ser limitada. De fato, se isso acontecesse teríamos que

$$\int_{B_{CR}(0)} {v_n}^2\,dx \geq \int_{B_R(y_n)} {v_n}^2\,dx \geq \tau > 0$$

implicaria que $\displaystyle\int_{B_{CR}(0)} v^2\,dx > 0$, para algum $C > 0$, tal que $B_R(y_n) \subset B_{CR}(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo já que $v = 0$. Portanto, (y_n) é ilimitada e podemos considerar que $|y_n| \to +\infty$, a menos de subsequências. Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n \varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(u_n)}{u_n} u_n \varphi\,dx,$$

tomando $\varphi = \frac{\widetilde{v}(\cdot - y_n)}{\|\widetilde{u}_n\|_2}$ e considerando as translações

$$\widetilde{u}_n(\cdot) := u_n(\cdot + y_n), \quad \widetilde{V}_n(\cdot) := V(\cdot + y_n) \quad \text{e} \quad \widetilde{\varphi}_n(\cdot) := \varphi(\cdot + y_n) = \frac{\widetilde{v}}{\|\widetilde{u}_n\|_2},$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \widetilde{u}_n \frac{\nabla \widetilde{v}}{\|\widetilde{u}_n\|_2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{V}_n(x) \widetilde{u}_n \frac{\widetilde{v}}{\|\widetilde{u}_n\|_2}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{u}_n \frac{\widetilde{v}}{\|\widetilde{u}_n\|_2}\,dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \widetilde{v}_n \nabla \widetilde{v} + \widetilde{V}_n(x) \widetilde{v}_n \widetilde{v})\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{v}_n \widetilde{v}\,dx. \tag{3.41}$$

Analogamente ao que foi feito nas equações (3.34) e (3.38), temos que

$$\frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{v}_n \widetilde{v} \to f'_+(0) \widetilde{v}^2, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e que existe $\widetilde{\psi} := \psi(\cdot + y_n) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\left| \frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{v}_n \widetilde{v} \right| \leq \widetilde{\psi}, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Usando a caracterização de convergência fraca de $\widetilde{v}_n$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11), temos que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{v}_n \widetilde{v}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \to +\infty} \frac{f(\widetilde{u}_n)}{\widetilde{u}_n} \widetilde{v}_n \widetilde{v}\,dx = f'_+(0) \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{v}^2\,dx. \tag{3.42}$$

Por outro lado, temos que $\widetilde{v}_n \rightharpoonup \widetilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, pela caracterização de convergência fraca de $\nabla\widetilde{v}_n$ e de $\widetilde{v}_n$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que $|\nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v}| \to |\nabla\widetilde{v}|^2$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e que $\widetilde{v}_n\widetilde{v} \to \widetilde{v}^2$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $\nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v} \to \nabla\widetilde{v}^2$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, e $\widetilde{v}_n\widetilde{v} \to \widetilde{v}^2$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, por (V_2), temos que $\widetilde{V}_n(x) = V(x+y_n) \to V_\infty$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, com $V_\infty \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v} + \widetilde{V}_n(x)\widetilde{v}_n\widetilde{v} \to |\nabla\widetilde{v}|^2 + V_\infty\widetilde{v}^2, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \tag{3.43}$$

e, usando (V_3),

$$|\nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v} + \widetilde{V}_n(x)\widetilde{v}_n\widetilde{v}| \leq \nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v} + V_\infty\widetilde{v}_n\widetilde{v} := \widetilde{h}_n \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.44}$$

Usando novamente que $|\nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v}| \to |\nabla\widetilde{v}|^2$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\widetilde{v}_n\widetilde{v} \to \widetilde{v}^2$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $|\widetilde{h}_n| \leq \widetilde{h}$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Portanto, por (3.44), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11) para ver que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v} + \widetilde{V}_n(x)\widetilde{v}_n\widetilde{v})\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\lim_{n\to+\infty}(\nabla\widetilde{v}_n\nabla\widetilde{v} + \widetilde{V}_n(x)\widetilde{v}_n\widetilde{v})\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\widetilde{v}|^2 + V_\infty\widetilde{v}^2)\,dx.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Logo, passando a equação (3.41) ao limite e usando (3.42) e (3.45), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\widetilde{v}|^2 + V_\infty\widetilde{v}^2)\,dx = f'_+(0)\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{v}^2\,dx. \tag{3.46}$$

Agora, usando (1.5), (3.46) e as hipóteses (V_1) e (V_3), concluímos que

$$\begin{aligned}\alpha_0\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{v}^2\,dx &\overset{(1.5)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\widetilde{v}|^2 + V(x)\widetilde{v}^2)\,dx \overset{(V_3)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\widetilde{v}|^2 + V_\infty\widetilde{v}^2)\,dx \\ &\overset{(3.46)}{=} f'_+(0)\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{v}^2\,dx \overset{(V_1)}{<} \alpha_0\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{v}^2\,dx,\end{aligned}$$

um absurdo. Portanto, $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \not\to 0$ quando $n \to +\infty$. Assim, existe $\delta_0 > 0$, independente de $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, tal que $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \delta_0$ para qualquer ponto crítico $u \neq 0$ de I_λ. □

Observação 3.3. *Note que no Lema 3.4 não utilizamos a equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|_V$. Caso tivéssemos assumido que as normas são equivalentes, a demonstração do resultado seguiria de maneira mais simples e utilizando apenas as hipóteses (f_1), (f_2) e (V_1), conforme a proposição a seguir.*

Proposição 3.4. *Suponha que* (f_1), (f_2) *e* (V_1) *sejam satisfeitas e que as normas* $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ *e* $\|\cdot\|_V$ *sejam equivalentes. Então, existe* $\delta_0 > 0$*, independente de* $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$*, tal que* $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \delta_0$ *para qualquer ponto crítico não trivial u de* I_λ*.*

Demonstração. De fato, como u é ponto crítico não-trivial de I_λ, com $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, então u satisfaz

$$\|u\|_V^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx. \tag{3.47}$$

Conforme visto na Proposição 1.2, por (f_1) e (f_2), temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq (f'(0) + \varepsilon)|s| + \widetilde{C}_\varepsilon |s|^p, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.48}$$

Além disso, por (V_1), temos que

$$f'(0) < \alpha_0 = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_V^2}{\|u\|_2^2}.$$

Assim, existe $\beta > 0$, tal que

$$f'(0) + \beta \leq \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_V^2}{\|u\|_2^2} \leq \frac{\|v\|_V^2}{\|v\|_2^2}, \quad \text{para todo } v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\},$$

ou, equivalentemente,

$$\|v\|_2^2 \leq \frac{\|v\|_V^2}{f'(0) + \beta}, \quad \text{para todo } v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}. \tag{3.49}$$

Consequentemente, usando (3.47), (3.48), (3.49) e a imersão contínua de Sobolev de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ (cf. Apêndice A.1), temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_V^2 &\overset{(3.47)}{=} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx \overset{(3.48)}{\leq} (f'(0) + \varepsilon)\|u\|_2^2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\overset{(3.49)}{\leq} \frac{f'(0) + \varepsilon}{f'(0) + \beta}\|u\|_V^2 + C\widetilde{C}_\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1} \end{aligned} \tag{3.50}$$

onde $C > 0$ é a constante de imersão. Agora, tomando $\varepsilon > 0$, tal que

$$C_1 = 1 - \frac{f'(0) + \varepsilon}{f'(0) + \beta} > 0,$$

segue de (3.50) que

$$C_1\|u\|_V^2 = \|u\|_V^2 - \frac{f'(0)+\varepsilon}{f'(0)+\beta}\|u\|_V^2 \leq C\widetilde{C}_\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1}.$$

Por fim, usando a equivalência das normas $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, obtemos que

$$C_2C_1\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C\widetilde{C}_\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1},$$

onde $C_2 > 0$ é a constante de equivalência das normas. Portanto,

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \geq \frac{C_2C_1}{C\widetilde{C}_\varepsilon},$$

ou seja,

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \left(\frac{C_2C_1}{C\widetilde{C}_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}} =: \delta_0 > 0,$$

como desejávamos. □

3.2 Teorema de Splitting

Consideramos funcionais $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ da forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx.$$

Assumimos que $f \in C(\mathbb{R})$ e que $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfazem (V_2), (V_3) e

$(f_1)'$ $f(0) = 0$ e $\lim\limits_{s\to 0^+} \dfrac{f(s)}{s} = 0$;

$(f_2)'$ Existe $1 < p < +\infty$ se $N = 1,2$ e $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, tal que $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(s)}{|s|^p} = 0$;

$(V_1)'$ $\alpha_0 = \inf\sigma(-\Delta + V(x)) > 0$.

O objetivo desta seção é derivar uma descrição das sequências de Palais-Smale limitadas de I através do Teorema de Splitting, seguindo o mesmo espírito dos artigos [19] e [20] de Lions. Trabalhamos em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com a norma

$$\|u\|_V^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx,$$

que, sob as hipóteses $(V_1)'$ e (V_2), é equivalente à norma padrão de $H^1(\mathbb{R}^N)$, conforme provado no Lema 3.2. Para demonstrarmos o Teorema de Splitting, necessitamos do seguinte resultado.

Lema 3.5. *Sob as hipóteses $(f_1)'$, $(f_2)'$, $(V_1)'$, (V_2) e (V_3), existe $\delta_0 > 0$, tal que, para qualquer ponto crítico não trivial u de I, temos $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \delta_0$.*

Demonstração. De fato, conforme observado na Proposição 1.1, considerando que $(f_1)'$, $(f_2)'$ e $(V_1)'$ valem para $\widetilde{f}$ e $\widetilde{V}$, temos que (f_1), (f_2) e (V_1) valem para f. Portanto, o resultado segue do Lema 3.4. □

Agora, podemos enunciar o resultado central desta seção.

Teorema 3.4 (Teorema de Splitting)**.** *Suponha que $(f_1)'$, $(f_2)'$, $(V_1)'$, (V_2) e (V_3) sejam satisfeitas e que $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ seja uma sequência de Palais-Smale limitada para I. Então, existe uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), um inteiro $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sequências $(y_n^k) \subset \mathbb{R}^N$ e funções $w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq k \leq l$, tais que,*

(i) $u_n \rightharpoonup u_0$ *com* $I'(u_0) = 0$;

(ii) $|y_n^k| \to +\infty$ *e* $|y_n^k - y_n^{k'}| \to +\infty$, *para* $k \neq k'$, *quando* $n \to \infty$;

(iii) $w^k \neq 0$ *e* $I'_\infty(w^k) = 0$, *para* $1 \leq k \leq l$;

(iv) $$\left\| u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|_V \to 0;$$

(v) $$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k);$$

onde no caso $l = 0$, os itens acima ainda são verdadeiros sem w^k e (y_n^k).

Demonstração. Vamos dividir a prova em cinco etapas:

Etapa 1: Mostraremos que, extraindo uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com u_0 sendo um ponto crítico de I.

De fato, como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, podemos supor que, a menos de subsequências, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Afim de provar que $I'(u_0) = 0$, notemos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em

$H^1(\mathbb{R}^N)$, logo, basta verificar que $I'(u_0)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Veja que

$$\begin{aligned} I'(u_n)\varphi - I'(u_0)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n)\nabla\varphi + V(x)(u_n)\varphi\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\varphi\,dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_0)\nabla\varphi + V(x)(u_0)\varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\varphi\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u_0)\nabla\varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u_0)\varphi\,dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u_0))\varphi\,dx. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0$, então $u_n - u_0 \rightharpoonup 0$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u_0)\nabla\varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u_0)\varphi\,dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Portanto, segue de (3.51) que

$$I'(u_n)\varphi - I'(u_0)\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u_0))\varphi\,dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Uma vez que (u_n) é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I, então $I'(u_n) \to 0$, e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n) - f(u_0))\varphi\,dx - I'(u_0)\varphi \to 0, \text{ quando } n \to +\infty. \tag{3.52}$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$. Como (u_n) é limitada, a compacidade da imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ (cf. Apêndice A.1), implica que

$$u_n \to u_0 \text{ em } L^{p+1}(\Omega),$$

pois $p+1 \geq 2$ se $N = 1$ ou $N = 2$, e $p+1 \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right)$ se $N \geq 3$. Dessa forma, a menos de subsequência, existe $g \in L^{p+1}(\Omega)$, tal que $u_n(x) \to u_0(x)$, q.t.p. em Ω, implicando que

$$f(u_n(x))\varphi(x) \to f(u_0(x))\varphi(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.53}$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.54}$$

Além disso, pela Proposição 1.2, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + \widetilde{C}_\varepsilon|s|^p, \quad \text{para todo } s \geq 0. \tag{3.55}$$

Assim, usando a desigualdade triangular e as equações (3.55) e (3.54), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}|[f(u_n(x))-f(u_0(x))]\varphi(x)| =& |f(u_n(x))\varphi(x)-f(u_0(x))\varphi(x)| \\ \leq& |f(u_n(x))\varphi(x)|+|f(u_0(x))\varphi(x)| \\ \leq& \varepsilon(|u_n(x)|+|u_0(x)|)|\varphi(x)|+\widetilde{C}_\varepsilon(|u_n(x)|^p+|u_0(x)|^p)|\varphi(x)| \\ \leq& \varepsilon g(x)|\varphi(x)|+\widetilde{C}_\varepsilon g(x)^p|\varphi(x)| \\ &+\varepsilon|u_0(x)||\varphi(x)|+\widetilde{C}_\varepsilon|u_0(x)|^p|\varphi(x)| =: h(x).\end{aligned} \tag{3.56}$$

Afirmamos que $h \in L^1(\Omega)$. De fato, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e, como $2 < p+1 < 2^*$, temos que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, assim, usando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h(x)|\,dx =& \varepsilon\int_\Omega |g(x)||\varphi(x)|\,dx+\widetilde{C}_\varepsilon\int_\Omega |g(x)|^p|\varphi(x)|\,dx \\ &+\varepsilon\int_\Omega |u_0(x)||\varphi(x)|\,dx+\widetilde{C}_\varepsilon\int_\Omega |u_0(x)|^p|\varphi(x)|\,dx \\ \leq& \varepsilon\|g\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\widetilde{C}_\varepsilon\|g\|^p_{L^{p+1}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega)} \\ &+\varepsilon\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\widetilde{C}_\varepsilon\|u_0\|^p_{L^{p+1}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\Omega)} < +\infty.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Assim, por (3.53), (3.56) e (3.57), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11), para concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(f(u_n)-f(u_0))\varphi\,dx = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty}(f(u_n)-f(u_0))\varphi\,dx = 0.$$

Portanto, segue de (3.52) que $I'(u_0)=0$.

Etapa 2: Defina $v_n^1 = u_n - u_0$ e suponha que

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(z)}|v_n^1|^2\,dx \to 0. \tag{3.58}$$

Vamos provar que $u_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, o Teorema de Splitting se aplica com $l=0$.

De fato, como $u_n = v_n^1 + u_0$, segue que

$$\begin{aligned} I'(u_n)v_n^1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n^1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n v_n^1 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v_n^1 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla (v_n^1 + u_0) \nabla v_n^1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(v_n^1 + u_0) v_n^1 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v_n^1 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n^1 \nabla v_n^1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n^1|^2 \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 v_n^1 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v_n^1 \, dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|v_n^1\|_V^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^1|^2 + V(x)|v_n^1|^2 \, dx \\ &= I'(u_n)v_n^1 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 v_n^1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v_n^1 \, dx. \end{aligned}$$

Como, pela Etapa 1, u_0 é ponto crítico de I, então $I'(u_0)v_n^1 = 0$, logo

$$0 = I'(u_0)v_n^1 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 v_n^1 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0) v_n^1 \, dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0) v_n^1 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v_n^1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 v_n^1 \, dx.$$

Portanto,

$$\|v_n^1\|_V^2 = I'(u_n)v_n^1 + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v_n^1 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0) v_n^1 \, dx. \tag{3.59}$$

Agora, como $v_n^1 = u_n - u_0$ e $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, então $(v_n^1) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada. Além disso, como (u_n) é uma sequência de Palais-Smale para I, então $I'(u_n) \to 0$. Logo $I'(u_n)v_n^1 \to 0$. Pela Proposição 1.2, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon |s| + \widetilde{C}_\varepsilon |s|^p, \quad \text{para todo } s \geq 0,$$

logo,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v_n^1 \, dx \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n||v_n^1| \, dx + \widetilde{C}_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n^1| \, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v_n^1 \, dx \right| &\leq \varepsilon \|u_n\|_2 \|v_n^1\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|u_n^p\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)} \|v_n^1\|_{p+1} \\ &= \varepsilon \|u_n\|_2 \|v_n^1\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|u_n\|_{p+1}^p \|v_n^1\|_{p+1}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada e pelas imersões contínuas de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, temos que $\|u_n\|_2 \leq K_1$ e $\|u_n\|_{p+1}^p \leq K_2$, onde K_1 e K_2 são constantes reais positivas. Além disso, como (v_n^1) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então existe uma constante real K_3, tal que $\|v_n^1\|_2 \leq K_3$ e, como vale (3.58), o Lema A.9.1 garante que $\|v_n^1\|_{p+1} \to 0$. Usando a equação (3.60), isso mostra que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n)v_n^1|\,dx \leq \limsup_{n\to+\infty} \varepsilon\|u_n\|_2\|v_n^1\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon\|u_n\|_{p+1}^p\|v_n^1\|_{p+1} \leq \varepsilon C, \tag{3.61}$$

onde C é uma constante real positiva. Como ε é arbitrário, segue que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v_n^1\,dx \to 0$. De maneira análoga, temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)v_n^1\,dx \to 0$. Assim, pela equação (3.59), temos que $v_n^1 \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o que implica que $u_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, $\|u_n - u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$ e, como I é um funcional contínuo, temos que $I(u_n) \to I(u_0)$. Portanto, o Teorema de Splitting continua válido para $l = 0$ e a Etapa 2 está completa.

Etapa 3: Suponha que exista uma sequência $(z_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que, para algum $d > 0$,

$$\int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2\,dx \to d.$$

Então, após extrair uma subsequência, se necessário, temos para algum $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, que

(i) $|z_n| \to +\infty$;

(ii) $u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w \neq 0$;

(iii) $I'_\infty(w) = 0$.

Para provar o item (i), vamos supor, por absurdo, que $(z_n) \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, isto é, que existe $K > 0$, tal que $|z_n| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definindo $r = 1 + K$, temos que $B_1(z_n) \subset B_r(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $y \in B_1(z_n)$, então

$$|y| - |z_n| \leq |y - z_n| \leq 1, \text{ ou seja, } |y| \leq 1 + |z_n| \leq 1 + K = r,$$

logo, $y \in B_r(0)$. Dessa forma, temos que

$$0 \leq \int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2\,dx \leq \int_{B_r(0)} |v_n^1|^2\,dx.$$

Por outro lado, como $(v_n^1) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada e $v_n^1 = u_n - u_0 \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que, extraindo uma subsequência se necessário, $v_n^1 \to 0$ em $L^2(B_r(0))$. Assim, usando a

desigualdade acima, temos que

$$\int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2 \, dx \to 0,$$

o que contradiz nossa hipótese. Portanto, $|z_n| \to +\infty$ e o item (i) está provado.

Para provar (ii), vamos mostrar primeiramente que $\|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0$ quando $n \to +\infty$. De fato, temos que

$$\int_{B_1(z_n)} u_0^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0^2 \chi_{B_1(z_n)} \, dx, \tag{3.62}$$

onde

$$\chi_{B_1(z_n)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_1(z_n), \\ 0, & \text{se } x \notin B_1(z_n). \end{cases}$$

Afim de aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11) na equação (3.62), note que, como $|z_n| \to +\infty$ pelo item (i), temos que

$$u_0^2(x)\chi_{B_1(z_n)}(x) \to 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$|u_0^2(x)\chi_{B_1(z_n)}(x)| \leq u_0^2(x),$$

e, como $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então $u_0^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11), segue de (3.62) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_1(z_n)} u_0^2 \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_0^2 \chi_{B_1(z_n)} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} u_0^2 \chi_{B_1(z_n)} \, dx = 0,$$

ou seja, $\|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0$, como queríamos provar. Observe ainda que, pela desigualdade triangular, temos

$$\|v_n^1\|_{L^2(B_1(z_n))} = \|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \leq \|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} + \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))},$$

isto é,

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \|v_n^1\|_{L^2(B_1(z_n))} - \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))}. \tag{3.63}$$

Como, por hipótese,

$$\int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2 \, dx \to d,$$

então $\|v_n^1\|_{L^2(B_1(z_n))} \to d^{1/2} > 0$. Dessa forma, como $\|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0$ e $\|v_n^1\|_{L^2(B_1(z_n))} \to d^{1/2} > 0$, segue da equação (3.63) que, para n suficientemente grande, existe um $\delta > 0$, tal

que

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \delta,$$

assim, usando a mudança de variável $x = y + z_n$, temos

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 \, dy = \int_{B_1(z_n)} |u_n|^2 \, dx \geq \delta^2. \tag{3.64}$$

Definimos agora $\widetilde{u}_n := u_n(\cdot + z_n)$. Como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, usando a mudança de variável $y = x + z_n$, temos que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \widetilde{u}_n(x)|^2 + \widetilde{u}_n^2(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n(x+z_n)|^2 + u_n^2(x+z_n)\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n(y)|^2 + u_n^2(y)\right) dy = \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq K.\end{aligned}$$

Logo, $(\widetilde{u}_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada. Portanto, a menos de subsequências, temos que

$$\widetilde{u}_n \rightharpoonup w \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Resta provar que $w \neq 0$. De fato, se $w = 0$ então $\widetilde{u}_n \to w = 0$ em $L^2(B_1(0))$, isto é,

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 \, dy = \int_{B_1(0)} |\widetilde{u}_n|^2 \, dx \to 0,$$

o que contradiz (3.64). Portanto, $u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w \neq 0$, o que prova (ii).

Agora, vamos mostrar (iii). Consideramos novamente $\widetilde{u}_n = u_n(\cdot + z_n)$ e observamos que, argumentando como na Etapa 1, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$I'_\infty(\widetilde{u}_n)\varphi - I'_\infty(w)\varphi \to 0.$$

Vamos mostrar que $I'_\infty(\widetilde{u}_n)\varphi \to 0$. Para isso, note que

$$\begin{aligned}I'(u_n)\varphi(\cdot - z_n) = &\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x) \nabla \varphi(x - z_n) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n(x) \varphi(x - z_n) \, dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(x)) \varphi(x - z_n) \, dx,\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, fazendo a mudança de variável $y = x - z_n$,

$$\begin{aligned} I'(u_n)\varphi(\cdot - z_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(y+z_n)\nabla\varphi(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(y+z_n)u_n(y+z_n)\varphi(y)\,dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n(y+z_n))\varphi(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_n(y)\nabla\varphi(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(y+z_n)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_n(y))\varphi(y)\,dy. \end{aligned}$$

Como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência de Palais-Smale para I, então $I'(u_n) \to 0$. Além disso, como, por uma mudança de variável, $\|\varphi(\cdot - z_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, então $(\varphi(\cdot - z_n))$ é limitada. Logo, $I'(u_n)\varphi(\cdot - z_n) \to 0$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_n(y)\nabla\varphi(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(y+z_n)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_n(y))\varphi(y)\,dy \to 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_n(y)\nabla\varphi(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} (V(y+z_n) - V_\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} f\widetilde{u}_n(y))\varphi(y)\,dy \to 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$I'_\infty(\widetilde{u}_n)\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (V(y+z_n) - V_\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy \to 0.$$

Desta forma, para provar que $I'_\infty(\widetilde{u}_n)\varphi \to 0$, é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(y+z_n) - V_\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy \to 0. \tag{3.65}$$

Para isso, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado, com $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$. Como, por (ii), $\widetilde{u}_n \rightharpoonup w \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $\widetilde{u}_n \to w$ em $L^2(\Omega)$. Assim, a menos de subsequências, existe $h \in L^2(\Omega)$, tal que $\widetilde{u}_n(y) \to w(y)$, q.t.p. em Ω e $|\widetilde{u}_n(y)| \leq h(y)$, q.t.p. em Ω. Por outro lado, como $|z_n| \to +\infty$ pelo item (i), então, para um $y \in \mathbb{R}^N$ fixo, temos $|y+z_n| \to +\infty$ e por (V_2), segue que

$$V(y+z_n) - V_\infty \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ quando } n \to \infty,$$

logo,

$$(V(y+z_n) - V_\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Agora, como por (V_2) e pela continuidade de V, temos que V é limitado, então

$$|(V(y+z_n) - V_\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)| \leq K|h(y)||\varphi(y)| =: g(y).$$

Temos que $g \in L^1(\Omega)$ pois, pela desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5),

$$\int_\Omega |g(y)|\,dy = K\int_\Omega |h(y)||\varphi(y)|\,dy \leq K\|h\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11), donde obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(V(y+z_n)-V_\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty}(V(y+z_n)-V_\infty)\widetilde{u}_n(y)\varphi(y)\,dy = 0,$$

o que prova (3.65). Logo, $I'_\infty(w)\varphi = 0$, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então para qualquer função $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existe uma sequência de funções $(\phi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $\|\phi_n - \psi\|_{H^1} \to 0$, quando $n \to +\infty$. Assim, como ${I_\infty}'(w)\phi_n = 0$, temos que $I'_\infty(w)\psi = \lim_{n\to+\infty} I'_\infty(w)\phi_n = 0$. Como a escolha de $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ foi arbitrária, podemos concluir que

$$I'_\infty(w)\psi = 0, \quad \text{para toda } \psi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, $I'_\infty(w) = 0$. Portanto, (iii) está provado e a Etapa 3 está completa.

Etapa 4: Suponha que existam $m \geq 1$, sequências $(y_n^k) \subset \mathbb{R}^N$ e funções $w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq k \leq m$, tais que:

(a) $|y_n^k| \to +\infty$ e $|y_n^k - y_n^{k'}| \to +\infty$, se $k \neq k'$;

(b) $u_n(\cdot + y_n^k) \rightharpoonup w^k \neq 0$, para todo $1 \leq k \leq m$,

(c) $I'_\infty(w^k) = 0$, para todo $1 \leq k \leq m$.

Vamos provar que

(1) se

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(z)}\left|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)\right|^2 dx \to 0, \tag{3.66}$$

então

$$\left\|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)\right\|_V \to 0;$$

(2) se existe uma sequência $(z_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que, para algum $d > 0$,

$$\int_{B_1(z_n)}\left|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)\right|^2 dx \to d, \tag{3.67}$$

então, após extrair uma subsequência se necessário, ocorre o seguinte:

(i) $|z_n| \to +\infty, \quad |z_n - y_n^k| \to +\infty$, para todo $1 \leq k \leq m$;

(ii) $u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w^{m+1} \neq 0$;

(iii) $I'_\infty(w^{m+1}) = 0$.

Suponha que (3.66) ocorre. Definimos $\xi_n = u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)$ e observamos que, por uma mudança de variável, $\|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, obtemos que

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \left\| u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq K,\end{aligned}$$

para alguma constante real positiva K. Logo, $(\xi_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada. Dessa forma, se (3.66) ocorre, então, pelo Lema de Lions (cf. Apêndice A.9), temos que $\xi_n \to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $2 < p+1 < 2^*$. Observe ainda que $u_n = \xi_n + u_0 + \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)$, com isso,

$$\begin{aligned}I'(u_n)\xi_n &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left(\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right) \nabla \xi_n dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\xi_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx,\end{aligned}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|_V^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\xi_n^2 dx \\ &= I'(u_n)\xi_n + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 \xi_n dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left(\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right) \nabla \xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Pela Etapa 1, temos que $I'(u_0)\xi_n = 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 \xi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx.$$

Logo, podemos reescrever (3.68) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|_V^2 = I'(u_n)\xi_n + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w^k(\cdot - y_n^k)\nabla\xi_n dx \\ + \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Agora, usando a hipótese que $I'_\infty(w^k) = 0$, para todo $1 \le k \le m$, temos

$$\sum_{k=1}^{m} I'_\infty(w^k)\xi_n(\cdot - y_n^k) = 0,$$

o que implica que

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot - y_n^k)dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w^k(\cdot - y_n^k)\nabla\xi_n dx + \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx.$$

Assim, a equação (3.69) fica

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|_V^2 = I'(u_n)\xi_n + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot - y_n^k)dx \\ + \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx.\end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito nas equações (3.60) e (3.61) com $\|v_n^1\|_{p+1}$, usando repetidamente o fato de que $\|\xi_n\|_{p+1} \to 0$, obtemos que

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot - y_n^k)dx \to 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx \to 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx \to 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\|\xi_n\|_V^2 - I'(u_n)\xi_n - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)\xi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)\xi_n dx - \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N} f(w^k)\xi_n(\cdot - y_n^k)dx \to 0.\end{aligned}$$

Como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência de Palais-Smale para I e $(\xi_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, temos $I'(u_n)\xi_n \to 0$. Portanto, pelo resultado acima, para provar que

$$\|\xi_n\|_V = \|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|_V \to 0,$$

é suficiente mostrar que

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx \to 0,$$

onde as convergências acima são todas quando $n \to \infty$. Para provar este fato, note que como o potencial V é limitado e como por (V_2), para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que, considerando $B_R = B_R(0)$, temos $|V_\infty - V(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in B_R^C$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx &\leq \int_{B_R} |V_\infty - V(x)||w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n| dx \\ &\quad + \int_{B_R^C} |V_\infty - V(x)||w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n| dx \\ &\leq C_1 \int_{B_R} |w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n| dx + \varepsilon \int_{B_R^C} |w^k(\cdot - y_n^k)||\xi_n| dx.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Além disso, desde que $\xi_n, w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue pelas imersões contínuas de Sobolev (cf. Apêndice A.1) que $\xi_n, w^k \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, então temos que $\xi_n, w^k \in L^{p+1}(B_R) \subset L^2(B_R) \subset L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)$. Assim, usando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5), a limitação de ξ_n em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e que $\|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{p+1} = \|w^k\|_{p+1}$, concluímos da equação (3.70) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx &\leq C_1 \|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^{p+1}(B_R)} \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \\ &\quad + \varepsilon \|w^k(\cdot - y_n^k)\|_{L^2(B_R^C)} \|\xi_n\|_{L^2(B_R^C)} \\ &\leq C_1 \|w^k\|_{p+1} \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} + \varepsilon \|w^k\|_2 \|\xi_n\|_2 \\ &\leq C_2 \|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} + \varepsilon C_3.\end{aligned} \tag{3.71}$$

Como $\xi_n \to 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\|\xi_n\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \to 0$. Consequentemente, por (3.71), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx \to 0, \text{ para todo } 1 \leq k \leq m,$$

ou ainda,

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^N}(V_\infty - V(x))w^k(\cdot - y_n^k)\xi_n dx \to 0,$$

como desejávamos.

Assuma agora que (3.67) ocorre. Vamos dividir a prova de (i) em dois passos.

Passo 1: Vamos provar que $|z_n| \to +\infty$. Suponha, por contradição, que $(z_n) \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, isto é, existe $M > 0$, tal que $|z_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|z_n - y_n^k| = |y_n^k - z_n| \geq |y_n^k| - |z_n| \geq |y_n^k| - M,$$

e como, por hipótese, $|y_n^k| \to +\infty$, para todo $1 \leq k \leq m$, temos $|z_n - y_n^k| \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Defina $\widetilde{w}^k(\cdot) = w^k(\cdot - y_n^k)$ e tome $\xi_n = u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)$. Note que

$$\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} = \left\| u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|_{L^2(B_1(z_n))} \leq \|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} + \sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))},$$

isto é,

$$\|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} - \sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))}. \tag{3.72}$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^k$, obtemos

$$\|\widetilde{w}^k\|^2_{L^2(B_1(z_n))} = \int_{B_1(z_n)} |w^k(x - y_n^k)|^2 dx = \int_{B_1(z_n - y_n^k)} |w^k(z)|^2 dz = \|w^k\|^2_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))}, \tag{3.73}$$

ou seja,

$$\|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))}, \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq m.$$

Como $w^k \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e temos que $|z_n - y_n^k| \to +\infty$, analogamente ao que foi feito no item (ii) da Etapa 3, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11) que

$$\|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))} \to 0, \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq m,$$

e assim,

$$\sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0. \tag{3.74}$$

Consequentemente, visto que, por (3.67), $\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \to d^{1/2} > 0$, combinando (3.72) e (3.74), concluímos que para n suficientemente grande, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|u_n - u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \delta,$$

ou ainda,

$$\int_{B_1(z_n)} |u_n - u_0|^2 dx \geq \delta^2 > 0. \tag{3.75}$$

Como estamos admitindo $|z_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos, como no item (i) da Etapa 3, que existe $r > 0$, com $r = 1 + M$, tal que $B_1(z_n) \subset B_r(0)$. Logo,

$$0 \leq \int_{B_1(z_n)} |u_n - u_0|^2 dx \leq \int_{B_r(0)} |u_n - u_0|^2 dx.$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to u_0$ em $L^2(B_r(0))$, logo $u_n - u_0 \to 0$ em $L^2(B_r(0))$. Assim, concluímos da desigualdade acima que

$$\int_{B_1(z_n)} |u_n - u_0|^2 dx \to 0,$$

o que contradiz (3.75). Portanto, $|z_n| \to +\infty$ e o Passo 1 está provado.

Passo 2: $|z_n - y_n^k| \to +\infty$, para todo $1 \leq k \leq m$. Suponha, por contradição, que existe $k' \in \{1, \ldots, m\}$, tal que $(z_n - y_n^{k'}) \subset \mathbb{R}^N$ é limitada, isto é, existe $M > 0$, tal que $|z_n - y_n^{k'}| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $k \neq k'$, obtemos que

$$|z_n| = |y_n^{k'} + z_n - y_n^{k'}| \geq |y_n^{k'}| - |z_n - y_n^{k'}| \geq |y_n^{k'}| - M,$$

e que

$$|z_n - y_n^k| = |z_n - y_n^{k'} + y_n^{k'} - y_n^k| \geq |y_n^{k'} - y_n^k| - |z_n - y_n^{k'}| \geq |y_n^{k'} - y_n^k| - M.$$

Como, por hipótese, $|y_n^k| \to +\infty$, para todo $1 \leq k \leq m$, e $|y_n^k - y_n^{k'}| \to +\infty$ se $k \neq k'$, quando $n \to +\infty$, temos que $|z_n - y_n^k| \to +\infty$, para todo $k \neq k'$. Note ainda que por (3.67),

$$\int_{B_1(z_n)} \left| u_n(x) - u_0(x) - w^{k'}(x - y_n^{k'}) - \sum_{k=1}^{k'-1} w^k(x - y_n^k) - \sum_{k=k'+1}^{m} w^k(x - y_n^k) \right|^2 dx \to d > 0,$$

e, fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^{k'}$, obtemos

$$\int_{B_1(z_n - y_n^{k'})} |u_n(z + y_n^{k'}) - u_0(z + y_n^{k'}) - w^{k'}(z) - \sum_{k=1}^{k'-1} w^k(z + y_n^{k'} - y_n^k) - \sum_{k=k'+1}^{m} w^k(z + y_n^{k'} - y_n^k)|^2 dz \to d > 0.$$

Definindo $\widehat{w}^k(\cdot) := w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k)$, $\widehat{u}_n(\cdot) := u_n(\cdot + y_n^{k'})$, $\widehat{u}_0(\cdot) := u_0(\cdot + y_n^{k'})$ e $v_n := \widehat{u}_n - \widehat{u}_0 - w^{k'} - \sum_{k=1}^{k'-1} \widehat{w}^k - \sum_{k=k'+1}^{m} \widehat{w}^k$, segue do resultado acima que

$$\|v_n\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \to d^{1/2} > 0. \tag{3.76}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \leq & \|\widehat{u}_n - w^{k'}\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} + \|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \\ & + \sum_{k=1}^{k'-1} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} + \sum_{k=k'+1}^{m} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}_n - w^{k'}\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \geq & - \sum_{k=1}^{k'-1} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} - \sum_{k=k'+1}^{m} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \\ & + \|v_n\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} - \|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Analogamente ao que foi feito na equação (3.73), usando a definição de $\widehat{w}^k$ e fazendo a mudança de variável $x = z + y_n^{k'} - y_n^k$, obtemos

$$\|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))}.$$

Como $w^k \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e temos $|z_n - y_n^k| \to +\infty$ se $k \neq k'$, de analogamente ao item (ii) da Etapa 3, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11) que

$$\|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} = \|w^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^k))} \to 0, \quad \text{para todo } k \neq k' \quad (1 \leq k \leq m).$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{k'-1} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \to 0, \quad \sum_{k=k'+1}^{m} \|\widehat{w}^k\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} \to 0. \tag{3.78}$$

Segue também pela definição de $\widehat{u}_0$ e pela mudança de variável $z = x - y_n^{k'}$ que

$$\|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} = \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))}.$$

Novamente, como na prova do item (ii) da Etapa 3, usando que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e que $|z_n| \to +\infty$, concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11) que

$$\|\widehat{u}_0\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} = \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0. \tag{3.79}$$

Desta forma, combinando (3.76)–(3.79), segue que, para n suficientemente grande, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|\widehat{u}_n - w^{k'}\|_{L^2(B_1(z_n - y_n^{k'}))} > \delta,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{B_1(z_n - y_n^{k'})} |\widehat{u}_n - w^{k'}|^2 \, dx > \delta^2 > 0. \tag{3.80}$$

Como estamos supondo $|z_n - y_n^{k'}| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue como no item (i) da Etapa 3 que existe $r > 0$, com $r = 1 + M$, tal que $B_1(z_n - y_n^{k'}) \subset B_r(0)$. Logo,

$$0 \leq \int_{B_1(z_n - y_n^{k'})} |\widehat{u}_n - w^{k'}|^2 \, dx \leq \int_{B_r(0)} |u_n - u_0|^2 \, dx.$$

Por outro lado, temos por hipótese que $\widehat{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + y_n^k)$, e $w^k \neq 0$, para todo $1 \leq k \leq m$, donde segue que $\widehat{u}_n - w^{k'} \to 0$ em $L^2(B_r(0))$. Assim, concluímos da desigualdade acima que

$$\int_{B_1(z_n - y_n^{k'})} |\widehat{u}_n - w^{k'}|^2 \, dx \to 0,$$

o que contradiz (3.80). Portanto, $|z_n - y_n^k| \to +\infty$, para todo $1 \leq k \leq m$, o que conclui o Passo 2 e, assim, (i) está provado.

Para (ii), continuemos denotando $\widetilde{w}_k(\cdot) := w^k(\cdot - y_n^k)$ e $\xi_n := u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)$. Como $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $|z_n| \to +\infty$ pelo (i) desta etapa, segue como na prova de (ii) da Etapa 3 que

$$\|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0. \tag{3.81}$$

Observe que por (3.67),

$$\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \to d^{1/2} > 0. \tag{3.82}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} &= \left\| u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|_{L^2(B_1(z_n))} \\ &\leq \|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} + \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} + \sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}_k\|_{L^2(B_1(z_n))}.\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \|\xi_n\|_{L^2(B_1(z_n))} - \|u_0\|_{L^2(B_1(z_n))} - \sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}_k\|_{L^2(B_1(z_n))}. \tag{3.83}$$

Desde que $w^k \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $|z_n - y_n^k| \to +\infty$, segue como na prova do Passo 1 que

$$\sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{w}_k\|_{L^2(B_1(z_n))} \to 0. \tag{3.84}$$

Portanto, combinando (3.81)–(3.84), temos, para n suficientemente grande, a existência de um $\delta > 0$, tal que

$$\|u_n\|_{L^2(B_1(z_n))} \geq \delta,$$

ou, equivalentemente, usando a mudança de variável $x = y + z_n$,

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 \, dy = \int_{B_1(z_n)} |u_n|^2 \, dx \geq \delta^2 > 0. \tag{3.85}$$

Consideremos agora $\widetilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + z_n)$. Como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, então $(\widetilde{u}_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, assim, a menos de subsequência, temos

$$\widetilde{u}_n \rightharpoonup w^{m+1}, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Afirmamos que $w^{m+1} \neq 0$. De fato, se $w^{m+1} = 0$, teríamos $\widetilde{u}_n \to w^{m+1} = 0$ em $L^2(B_1(0))$, isto é,

$$\int_{B_1(0)} |u_n(\cdot + z_n)|^2 \, dy = \int_{B_1(0)} |\widetilde{u}_n|^2 \, dx \to 0,$$

contradizendo assim (3.85). Portanto, $u_n(\cdot + z_n) \rightharpoonup w^{m+1} \neq 0$, o que conclui a prova de (ii).

Para provar (iii), consideramos $\widetilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + z_n)$ e observamos que, argumentando como na Etapa 1, temos

$$I'_\infty(\widetilde{u}_n)\varphi - I'_\infty(w^{m+1})\varphi \to 0, \quad \text{para qualquer } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Assim, para provar que $I'_\infty(w^{m+1}) = 0$, é suficiente mostrar que

$$I'_\infty(\widetilde{u}_n)\varphi \to 0, \quad \text{para qualquer } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ fixada,}$$

e isto é feito de forma análoga ao item (iii) da Etapa 3. Portanto, a Etapa 4 está concluída.

Etapa 5: Conclusão

Pela Etapa 1 temos que $u_n \rightharpoonup u_0$ com $I'(u_0) = 0$ e assim o item (i) do teorema fica provado. Além disso, se a hipótese da Etapa 2 ocorre, então $u_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e o teorema vale para $l = 0$. Caso contrário, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |v_n^1|^2\,dx \geq \varepsilon_0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e assim, pela definição de supremo, existe $(z_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que

$$\int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2\,dx \geq \varepsilon_0, \text{ o que implica que } \int_{B_1(z_n)} |v_n^1|^2\,dx \to d > 0.$$

Portanto, se a hipótese da Etapa 2 não ocorre, a hipótese da Etapa 3 deve ocorrer. Desse modo, fazendo $(y_n^1) = (z_n)$ e $w^1 = w$, da tese da Etapa 3, temos que valem (ii) e (iii) desse teorema para $k = 1$. Além disso, a tese da Etapa 3 nos coloca nas hipóteses da Etapa 4 no caso $m = 1$. Assim, se (3.66) ocorre, obtemos (iv) desse teorema, com $l = 1$. Caso contrário, temos que (3.67) deve ocorrer e fazendo $(y_n^2) = (z_n)$ e $w^{1+1} = w^2$, como consequência de (3.67), obtemos (ii) e (iii) desse teorema para $k = 2$ e recaímos nas hipóteses da Etapa 4 com $m = 2$, e assim, repetimos o argumento da Etapa 4. Caso não ocorra (3.66) para $m = 2$, (3.67) nos leva a repetir o argumento para $m = 3$ e assim sucessivamente. Portanto, para concluir a prova de (iv) desse teorema, basta mostrar que (3.66) deve ocorrer após um número finito de repetições. Para isto, provaremos primeiro a seguinte afirmação: Para todo $m \geq 1$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq 0.$$

De fato, como o funcional I_∞ está associado a um problema autônomo e w^k são pontos críticos não-triviais de I_∞, para todo $1 \leq k \leq m$, segue que w^k tem decaimento exponencial no infinito (veja Berestycki-Lions [6, Teorema 1]) e, consequentemente,

$$\lim_{|x|\to+\infty} w^k(x) = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq m. \tag{3.86}$$

Definamos $\widetilde{w}_n^k(\cdot) = w^k(\cdot - y_n^k)$. Fazendo a mudança de variável $z = \cdot - y_n^k$, temos que

$$\|\widetilde{w}_n^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|w^k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

então $(\widetilde{w}_n^k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada. Assim, tomando uma subsequência se necessário,

$$w^k(\cdot - y_n^k) = \widetilde{w}_n^k \rightharpoonup \widetilde{w}^k \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad w^k(x - y_n^k) = \widetilde{w}_n^k(x) \to \widetilde{w}^k(x) \text{ em } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N),$$

logo

$$w^k(x - y_n^k) = \widetilde{w}_n^k(x) \to \widetilde{w}^k(x), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Pelo item (a) da Etapa 4, temos que $|y_n^k| \to +\infty$, para todo $1 \leq k \leq m$, logo, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, $|x - y_n^k| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Consequentemente, usando as convergências acima, obtemos de (3.86) que

$$\widetilde{w}^k(x) = \lim_{n\to+\infty} w^k(x - y_n^k) = \lim_{|x-y_n^k|\to+\infty} w^k(x - y_n^k) = 0, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Desta forma,

$$w^k(\cdot - y_n^k) = \widetilde{w}_n^k \rightharpoonup \widetilde{w}^k = 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq m. \tag{3.87}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
\left\| u_n - u_0 - \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \|u_n - u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - 2\left\langle u_n - u_0, \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \left\| \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - 2\langle u_n, u_0 \rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad - 2\left\langle u_n, \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + 2\left\langle u_0, \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \left\| \sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k) \right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0$ pela Etapa 1, temos $\langle u_n, u_0\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to \langle u_0, u_0\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Além disso, usando (3.87) e a caracterização de convergência fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\left\langle u_0, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Portanto, para provar nossa afirmação, é suficiente mostrar que

(a) $\left\langle u_n, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}$,

(b) $\left\| \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}$.

Primeiro, fazendo a mudança de variável $z = \cdot - y_n^k$ para cada $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, temos que

$$\langle u_n, w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \langle u_n(\cdot + y_n^k), w^k\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{para cada } k \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Assim, usando o fato que $u_n(\cdot + y_n^k) \rightharpoonup w^k \neq 0$, para todo $1 \leq k \leq m$ pelo item (b) da Etapa 4 e a caracterização de convergência fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle u_n, \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \langle u_n(\cdot + y_n^1), w^1\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \cdots + \langle u_n(\cdot + y_n^m), w^m\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\to \|w^1\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \cdots + \|w^m\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{k=1}^{m} \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

e isto nos fornece (a). Para provar (b), observemos inicialmente que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \left\langle \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k), \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \langle w^k(\cdot - y_n^k), w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \sum_{\substack{k,k'=1 \\ k\neq k'}}^{m} \langle w^k(\cdot - y_n^k), w^{k'}(\cdot - y_n^{k'})\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis $z = \cdot - y_k^n$ para cada $k \in \{1,2,\dots,m\}$ e $y = \cdot - y_{k'}^n$ para $k \neq k'$ e $k,k' \in \{1,2,\dots,m\}$, temos

$$\langle w^k(\cdot - y_n^k), w^k(\cdot - y_n^k)\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \langle w^k, w^k\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

e

$$\langle w^k(\cdot - y_n^k), w^{k'}(\cdot - y_n^{k'})\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

e, consequentemente,

$$\left\|\sum_{k=1}^m w^k(\cdot - y_n^k)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{k=1}^m \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \sum_{\substack{k,k'=1\\ k\neq k'}}^m \langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k)), w^{k'}\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Logo, tudo que temos de fazer para provar (b) é mostrar que

$$\sum_{\substack{k,k'=1\\ k\neq k'}}^m \langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0, \text{ ou ainda, } \langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ se } \quad k \neq k'.$$

Desde que $|y_n^k - y_n^{k'}| \to +\infty$ se $k \neq k'$ conforme a Etapa 4, segue de modo análogo ao que foi feito para obter (3.87) que

$$w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k) = w^k(\cdot - (y_n^k - y_n^{k'})) \rightharpoonup 0 \quad \text{se} \quad k \neq k', \tag{3.88}$$

onde obtemos, usando a caracterização de convergência fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$, que

$$\langle w^k(\cdot + y_n^{k'} - y_n^k), w^{k'}\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{se} \quad k \neq k',$$

como desejávamos. Portanto, nossa afirmação está provada. Assim, como $I'_\infty(w^k) = 0$ para $1 \leq k \leq m$ e $w^k \neq 0$ pela hipótese (c) da Etapa 4, usando o fato que $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, a equivalência das normas $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e o Lema 3.5, segue que existem $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e $\delta_0 > 0$, tais que

$$\begin{aligned} C_1 &\geq \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \sum_{k=1}^m \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \sum_{k=1}^m \|w^k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq C_2 \sum_{k=1}^m \|w^k\|^2_V \\ &\geq C_2\delta_0 m, \end{aligned}$$

isto é,

$$m \leq \frac{C_1}{C_2 \delta_0} < +\infty.$$

Portanto, m é limitado e existe um valor máximo $l \in \mathbb{N}$, tal que (3.66) deve ocorrer.

Para concluir a prova do teorema, resta somente provar (v), ou seja, mostrar que

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k).$$

Escrevendo $u_n = u_0 + (u_n - u_0)$, afirmamos inicialmente que

$$I(u_n) - I_\infty(u_n - u_0) \to I(u_0). \tag{3.89}$$

De fato,

$$\begin{aligned} I(u_n) =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla(u_0 + (u_n - u_0))|^2 + V(x)(u_0 + (u_n - u_0))^2\right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx \\ =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u_0)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 (u_n - u_0) dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u_0)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} I(u_n) =& I(u_0) + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0)\, dx + I_\infty(u_n - u_0) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty (u_n - u_0)^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n - u_0)\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 (u_n - u_0)\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_n - u_0)^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)\, dx \\ =& I(u_0) + I_\infty(u_n - u_0) + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 (u_n - u_0)\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)(u_n - u_0)^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n - u_0)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)\, dx. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Por outro lado, desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $u_n - u_0 \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, usando a caracterização de convergência fraca em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11) como em (3.45), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla(u_n - u_0)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_0 (u_n - u_0)\, dx \to 0.$$

Além disso, como o potencial V é contínuo, então é limitado. Usando a limitação de V, que por (V_2), para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $|V_\infty - V(x)| < \varepsilon$, para todo $|x| \geq R$, a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ e a limitação da sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)(u_n - u_0)^2 \, dx \\
&\leq \int_{B_R} |(V(x) - V_\infty)(u_n - u_0)^2| \, dx + \int_{B_R^C} |(V(x) - V_\infty)(u_n - u_0)^2| \, dx \\
&\leq K \int_{B_R} (u_n - u_0)^2 \, dx + \varepsilon \int_{B_R^C} (u_n - u_0)^2 \, dx \\
&\leq K \|u_n - u_0\|^2_{L^2(B_R)} + C_1 \varepsilon \|u_n - u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq K \|u_n - u_0\|^2_{L^2(B_R)} + C_2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Desde que, a menos de uma subsequência, $u_n - u_0 \to 0$ em $L^2(B_R)$ e pela arbitrariedade de ε, concluímos ao passar o limite na desigualdade acima que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)(u_n - u_0)^2 \, dx \to 0.$$

Desta forma, usando (3.90), para provar (3.89) resta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(u_n - u_0) + F(u_0) - F(u_n)] \, dx \to 0,$$

ou ainda, escrevendo $v_n^1 = u_n - u_0$, é suficiente verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(v_n^1) + F(u_0) - F(v_n^1 - u_0)] \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} [F(v_n^1 + u_0) - F(v_n^1) - F(u_0)] \, dx \to 0. \quad (3.91)$$

Primeiro, observemos que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F(v_n^1 + u_0) - F(v_n^1) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(v_n^1 + t u_0) \, dt = \int_0^1 f(v_n^1 + t u_0) u_0 \, dt. \quad (3.92)$$

Em virtude da Proposição 1.2, dado $\varepsilon > 0$ existe $\widetilde{C}_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon |s| + \widetilde{C}_\varepsilon |s|^p, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \quad (3.93)$$

aqui estamos usando o fato que $f(s)=0$ sempre que $s\leq 0$. Consequentemente, usando (3.92), (3.93) e a desigualdade de Jensen (cf. Apêndice A.7), obtemos

$$\begin{aligned}|F(v_n^1+u_0)-F(v_n^1)| &\leq \int_0^1 |f(v_n^1+tu_0)||u_0|\,dt \leq \int_0^1 (\varepsilon|v_n^1+tu_0|+\widetilde{C}_\varepsilon|v_n^1+tu_0|^p)|u_0|\,dt\\ &\leq \int_0^1 \left[\varepsilon(|v_n^1|+t|u_0|)|u_0|+\widetilde{C}_\varepsilon 2^{p-1}\left(|v_n^1|^p+t^p|u_0|^p\right)|u_0|\right]dt\\ &\leq \varepsilon|v_n^1||u_0|+\frac{\varepsilon}{2}|u_0|^2+\widetilde{C}_\varepsilon 2^{p-1}|v_n^1|^p|u_0|+\widetilde{C}_\varepsilon\frac{2^{p-1}}{p}|u_0|^{p+1}.\end{aligned}$$

Além disso, usando (3.93), temos que

$$|F(u_0)|\leq \frac{\varepsilon}{2}|u_0|^2+\frac{\widetilde{C}_\varepsilon}{p+1}|u_0|^{p+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}|F(v_n^1+u_0)-F(v_n^1)-F(u_0)| &\leq |F(v_n^1+u_0)-F(v_n^1)|+|F(u_0)|\\ &\leq \varepsilon|v_n^1||u_0|+\frac{\varepsilon}{2}|u_0|^2+C_1(\varepsilon)|v_n^1|^p|u_0|+C_2(\varepsilon)|u_0|^{p+1}\\ &\leq C\left(|v_n^1||u_0|+|u_0|^2+|v_n^1|^p|u_0|+|u_0|^{p+1}\right),\end{aligned}$$

onde estamos considerando $\varepsilon=1$ e $C=\max\{1,C_1,C_2\}$. Agora, usando a desigualdade de Young (cf. Apêndice A.4), para cada $\rho>0$, temos

$$|v_n^1||u_0|\leq \rho|v_n^1|^2+C_{\rho_1}|u_0|^2,$$

e

$$|v_n^1|^p|u_0|\leq \rho(|v_n^1|^p)^{\frac{p+1}{p}}+C_{\rho_2}|u_0|^{p+1}=\rho|v_n^1|^{p+1}+C_{\rho_2}|u_0|^{p+1},$$

onde $r=s=2$ na primeira desigualdade e $r=\dfrac{p+1}{p}, s=p+1$ na segunda. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}|F(v_n^1+u_0)-F(v_n^1)-F(u_0)| &\leq C\left[\left(\rho|v_n^1|^2+C_{\rho_1}|u_0|^2\right)+|u_0|^2\right]\\ &\quad +C\left[\left(\rho|v_n^1|^{p+1}+C_{\rho_2}|u_0|^{p+1}\right)+|u_0|^{p+1}\right]\\ &= C\left[\left(\rho|v_n^1|^2+C_{\rho_3}|u_0|^2\right)+\left(\rho|v_n^1|^{p+1}+C_{\rho_4}|u_0|^{p+1}\right)\right].\end{aligned}\tag{3.94}$$

Então, definindo

$$f_{\rho,n}(x):=\max\left\{|F(v_n^1+u_0)-F(v_n^1)-F(u_0)|(x)-C\rho|v_n^1|^2(x)-C\rho|v_n^1|^{p+1}(x),0\right\},$$

como $v_n^1 = u_n - u_0$ e $u_n \rightharpoonup u_0$, a menos de uma subsequência, temos $v_n^1 \to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, o que implica que

$$F(v_n^1 + u_0) - F(v_n^1) - F(u_0) \to 0, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Desse modo, pela definição de $f_{\rho,n}$ e por (3.94), segue que

(i) $f_{\rho,n}(x) \to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$;

(ii) $0 \leq f_{\rho,n}(x) \leq C_3|u_0|^2(x) + C_4|u_0|^{p+1}(x) =: h(x)$ com $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

já que $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $2 < p+1 < +\infty$ se $N = 1,2$ e $2 < p+1 < 2^*$ se $N \geq 3$ e temos a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq q < +\infty$ se $N = 1,2$ e para $2 \leq q \leq 2^*$ se $N \geq 3$. Portanto, usando (i) e (ii) juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Apêndice A.11), obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_{\rho,n}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} f_{\rho,n}(x)\,dx \ = 0. \tag{3.95}$$

Observe ainda que pela definição de $f_{\rho,n}$, que

$$|F(v_n^1 + u_0) - F(v_n^1) - F(u_0)| - C\rho|v_n^1|^2 - C\rho|v_n^1|^{p+1} \leq f_{\rho,n},$$

ou ainda,

$$|F(v_n^1 + u_0) - F(v_n^1) - F(u_0)| \leq C\rho|v_n^1|^2 + C\rho|v_n^1|^{p+1} + f_{\rho,n}.$$

Consequentemente, usando a imersão contínua dada acima e a limitação da sequência v_n^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (já que $v_n^1 = u_n - u_0$, e $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ limitada), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |F(v_n^1 + u_0) - F(v_n^1) - F(u_0)|\,dx &\leq C\rho\|v_n^1\|_2^2 + C\rho\|v_n^1\|_{p+1}^{p+1} + \int_{\mathbb{R}^N} f_{\rho,n}(x)\,dx \\ &\leq C_5\rho\|v_n^1\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + C_6\rho\|v_n^1\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1} + \int_{\mathbb{R}^N} f_{\rho,n}(x)\,dx \\ &\leq \widetilde{C}\rho + \int_{\mathbb{R}^N} f_{\rho,n}(x)\,dx,\end{aligned} \tag{3.96}$$

donde segue, por (3.95), (3.96) e da arbitrariedade de ρ, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(v_n^1 + u_0) - F(v_n^1) - F(u_0)|\,dx \to 0,$$

como desejávamos. Agora, usando (3.89), tudo que nos resta para provar o item (v) do teorema é mostrar que

$$I_\infty(u_n - u_0) \to \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k). \tag{3.97}$$

Para isto, observemos inicialmente que, usando (V_5) e a Proposição 3.1, temos que $V_\infty > 0$ e, consequentemente, a norma

$$\|u\|_{V_\infty}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2\right) dx$$

é equivalente à norma usual do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, podemos reescrever $I_\infty(u)$ do seguinte modo

$$I_\infty(u) = \|u\|_{V_\infty}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx.$$

Note que, fazendo $v_n^1 = u_n - u_0$ e $\widetilde{\chi}_n = \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_n^1\|_{V_\infty}^2 - \|\widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty}^2 &= |(\|v_n^1\|_{V_\infty} - \|\widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty})(\|v_n^1\|_{V_\infty} + \|\widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty})| \\ &\leq \|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty}(\|v_n^1\|_{V_\infty} + \|\widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty}). \end{aligned} \tag{3.98}$$

Além disso, usando o item (iv) deste teorema e a equivalência das normas $\|\cdot\|_{V_\infty}$ e $\|\cdot\|_V$, temos

$$\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty} = \left\| u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|_{V_\infty} \to 0. \tag{3.99}$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^k$ para $1 \leq k \leq l$, segue que

$$\|w^k(x - y_n^k)\|_{V_\infty} = \|w^k\|_{V_\infty},$$

e, consequentemente, $(\widetilde{\chi}_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada. Temos também que $(v_n^1) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, pois $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada. Daí, usando (3.98), concluímos que

$$\|v_n^1\|_{V_\infty}^2 - \|\widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty}^2 \to 0, \text{ ou ainda, } \frac{1}{2}\|u_n - u_0\|_{V_\infty}^2 - \frac{1}{2}\left\| \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|_{V_\infty}^2 \to 0.$$

Agora, usando argumentos semelhantes aos utilizados para provar o item (b) na página 66, obtemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k) \right\|_{V_\infty}^2 \to \sum_{k=1}^{l} \|w^k\|_{V_\infty}^2.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2}\|u_n-u_0\|_{V_\infty}^2 \to \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\|w^k\|_{V_\infty}^2,$$

ou, equivalentemente,

$$I_\infty(u_n-u_0)+\int_{\mathbb{R}^N}F(u_n-u_0)\,dx \to \sum_{k=1}^{l}I_\infty(w^k)+\sum_{k=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^N}F(w^k)\,dx. \tag{3.100}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[F(u_n-u_0)-F\left(\sum_{k=1}^{l}w^k(\cdot-y_n^k)\right)\right]dx \to 0. \tag{3.101}$$

De fato, considerando novamente $v_n^1=u_n-u_0$ e $\widetilde{\chi}_n=\sum_{k=1}^{l}w^k(\cdot-y_n^k)$, temos

$$F(v_n^1)-F(\widetilde{\chi}_n)=\int_0^1\frac{d}{dt}F(\widetilde{\chi}_n+t(v_n^1-\widetilde{\chi}_n))\,dt=\int_0^1 f(\widetilde{\chi}_n+t(v_n^1-\widetilde{\chi}_n))(v_n^1-\widetilde{\chi}_n)\,dt.$$

Daí, usando (3.93), obtemos

$$\begin{aligned}
|F(v_n^1)-F(\widetilde{\chi}_n)| &\le \int_0^1 |f(\widetilde{\chi}_n+t(v_n^1-\widetilde{\chi}_n))||v_n^1-\widetilde{\chi}_n|\,dt\\
&\le \int_0^1\left(\varepsilon|\widetilde{\chi}_n+t(v_n^1-\widetilde{\chi}_n)|+\widetilde{C}_\varepsilon|\widetilde{\chi}_n+t(v_n^1-\widetilde{\chi}_n)|^p\right)|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|\,dt\\
&\le \int_0^1\Big[\varepsilon(|\widetilde{\chi}_n|+t|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|)|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|\\
&+\widetilde{C}_\varepsilon 2^{p-1}\left(|\widetilde{\chi}_n|^p+t^p|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|^p\right)|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|\Big]\,dt\\
&\le \varepsilon|\widetilde{\chi}_n||v_n^1-\widetilde{\chi}_n|+\frac{\varepsilon}{2}|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|^2+\widetilde{C}_\varepsilon 2^{p-1}|\widetilde{\chi}_n|^p|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|\\
&+\widetilde{C}_\varepsilon\frac{2^{p-1}}{p+1}|v_n^1-\widetilde{\chi}_n|^{p+1}.
\end{aligned}$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder (cf. Apêndice A.5), as imersões contínuas de Sobolev (cf. Apêndice A.1), a limitação da sequência $(\widetilde{\chi}_n)\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e a equivalência das normas

$\|\cdot\|_{V_\infty}$ e $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |F(v_n^1) - F(\widetilde{\chi}_n)|\,dx &\leq C_1(\varepsilon)\|\widetilde{\chi}_n\|_2\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_2 + C_2(\varepsilon)\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_2 \\ &\quad + C_3(\varepsilon)\|\widetilde{\chi}_n\|_{p+1}^p\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{p+1} + C_4(\varepsilon)\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{p+1} \\ &\leq \widetilde{C}_1(\varepsilon)\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty} + \widetilde{C}_2(\varepsilon)\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty} \\ &\quad + \widetilde{C}_3(\varepsilon)\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty} + \widetilde{C}_4(\varepsilon)\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty} \leq C_5(\varepsilon)\|v_n^1 - \widetilde{\chi}_n\|_{V_\infty},\end{aligned}$$

onde $C_5(\varepsilon) = \max\{\widetilde{C}_1(\varepsilon), \widetilde{C}_2(\varepsilon), \widetilde{C}_3(\varepsilon), \widetilde{C}_4(\varepsilon)\} > 0$. Portanto, segue de (3.99) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(v_n^1) - F(\widetilde{\chi}_n)|\,dx \to 0,$$

e assim obtemos (3.101). Agora, combinando (3.100) e (3.101), temos que

$$I_\infty(u_n - u_0) + \int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx \to \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k) + \sum_{k=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^N} F(w^k)\,dx,$$

ou ainda,

$$I_\infty(u_n - u_0) + \int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right) - \sum_{k=1}^{l} F(w^k)\right] dx \to \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k).$$

Desta forma, para provar (3.97) é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right) - \sum_{k=1}^{l} F(w^k)\right] dx \to 0. \tag{3.102}$$

Faremos a prova por indução. Inicialmente, seja $l = 1$. Fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^1$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)\right) - \sum_{k=1}^{l} F(w^k)\right] dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(w^1(\cdot - y_n^1)\right) - F(w^1)\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F\left(w^1\right) dz - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^1)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F\left(w^1\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^1)\,dx = 0,\end{aligned}$$

donde segue que o resultado vale para $l = 1$.

Suponhamos agora que o resultado vale para $l = m \in \mathbb{N}$, ou seja, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k) \right) - \sum_{k=1}^{m} F(w^k) \right] dx \to 0.$$

Provemos que o resultado também vale para $l = m+1$, isto é, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{m+1} w^k(\cdot - y_n^k) \right) - \sum_{k=1}^{m+1} F(w^k) \right] dx \to 0. \tag{3.103}$$

De fato, fazendo a mudança de variável $z = x - y_n^{m+1}$ e escrevendo

$$g_n^m = \sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot + y_n^{m+1} - y_n^k),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{m+1} w^k(\cdot - y_n^k) \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} F\left(w^1(x - y_n^1) + w^2(x - y_n^2) + \cdots + w^{m+1}(x - y_n^{m+1}) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F(w^{m+1} + g_n^m)\, dz, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{m+1} w^k(\cdot - y_n^k) \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^{m+1})\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(w^{m+1} + g_n^m) - F(w^{m+1}) - F(g_n^m) \right] dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^m)\, dx. \end{aligned}$$

Em virtude de (3.88), temos que $g_n^m \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e assim, usando argumentos análogos aos utilizados para obter (3.91), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[F(w^{m+1} + g_n^m) - F(w^{m+1}) - F(g_n^m) \right] dx \to 0,$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{m+1} w^k(\cdot - y_n^k) \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(w^{m+1})\, dx = o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^m)\, dx.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{m+1} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{m+1} F(w^k)\, dx \\
=&o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(g_n^m)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{m+1} F(w^k)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(w^{m+1})\, dx \qquad (3.104)\\
=&o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot + y_n^{m+1} - y_n^k)\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{m} F(w^k)\, dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x + y_n^{m+1}$ em (3.104) e usando a hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_{k=1}^{m+1} w^k(\cdot - y_n^k)\right) dx - \sum_{k=1}^{m+1} \int_{\mathbb{R}^N} F(w^k)\, dx \\
&= o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \left[F\left(\sum_{k=1}^{m} w^k(\cdot - y_n^k)\right) - \sum_{k=1}^{m} F(w^k)\right] dx = o(1).
\end{aligned}$$

Portanto, vale (3.103) e o teorema está provado. □

A fim de facilitar a aplicação do Teorema de Splitting, apresentamos o seguinte resultado.

Proposição 3.5. *A decomposição fornecida pelo Teorema de Splitting ainda é válida substituindo-se as hipóteses $(f_1)'$ e $(V_1)'$ por (f_1) e (V_1), respectivamente.*

Demonstração. Para ver isso, vamos escrever I na forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + (V(x) - f'_+(0))u^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(u) - \frac{1}{2}f'_+(0)u^2\right) dx. \qquad (3.105)$$

Agora, consideremos $\widetilde{f}(s) = f(s) - f'_+(0)s$ e $\widetilde{V}(x) = V(x) - f'_+(0)$. Vamos provar que $\widetilde{f}$ e $\widetilde{V}$ satisfazem $(f_1)'$, $(f_2)'$, $(V_1)'$ e (V_2). De fato, como por (f_1) temos que $f(0) = 0$, então $\widetilde{f}(0) = f(0) - f'_+(0).0 = 0$ e

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\widetilde{f}(s)}{s} = \lim_{s\to 0^+} \frac{f(s) - f'_+(0)s}{s} = \lim_{s\to 0^+} \left(\frac{f(s)}{s} - f'_+(0)\right) = f'_+(0) - f'_+(0) = 0,$$

donde se obtém que $(f_1)'$ é válida para $\widetilde{f}$. Além disso, como estamos assumindo $f(s) = 0$, para todo $s < 0$, segue por $(f_2)'$ que

$$\lim_{s\to +\infty} \frac{\widetilde{f}(s)}{|s|^p} = \lim_{s\to +\infty} \frac{f(s) - f'_+(0)s}{|s|^p} = \lim_{s\to +\infty} \left(\frac{f(s)}{|s|^p} - \frac{f'_+(0)s}{|s|^p}\right) = 0 - 0 = 0,$$

e, portanto, $(f_2)'$ é satisfeita por $\widetilde{f}$. Agora, como por (V_1) temos que $\alpha_0 > f'_+(0)$, obtemos que

$$\widetilde{\alpha}_0 \equiv \inf\sigma(-\Delta+\widetilde{V}(x)) = \inf\sigma(-\Delta+V(x)) - f'_+(0) = \alpha_0 - f'_+(0) > 0,$$

e assim temos que $(V_1)'$ vale para $\widetilde{f}$. Por fim, segue de (V_2) que

$$\widetilde{V}(x) = V(x) - f'_+(0) \to V_\infty - f'_+(0) := \widetilde{V}(\infty) \in \mathbb{R}, \text{ quando } |x| \to +\infty,$$

e, então, $\widetilde{f}$ satisfaz (V_2). Desta forma, as hipóteses do teorema são válidas para $\widetilde{f}$ e $\widetilde{V}$. Portanto, conforme observado na Proposição 1.1, a decomposição obtida pelo Teorema de Splitting ainda é verdadeira. □

Com a demonstração do Teorema de Splitting, que será fundamental para a prova do nosso teorema principal, podemos avançar para a próxima etapa.

3.3 Existência de uma Solução Positiva

Nesta seção, nosso objetivo é demonstrar o Teorema 3.1 e concluir nossa investigação de soluções positivas para o problema (1.3). O primeiro passo nessa direção será provar que para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, I_λ possui um ponto crítico não trivial u_λ, tal que $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$. Para isso, temos o seguinte resultado sobre a convergência das sequências Palais-Smale limitadas.

Lema 3.6. *Suponha que $(f_1)-(f_3)$, (V_2), (V_3) e (V_5) são satisfeitas e deixe $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ser arbitrário mas fixo. Então, qualquer sequência de Palais-Smale limitada $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ para I_λ satisfazendo $\limsup_{n\to+\infty} I_\lambda(u_n) \leq c_\lambda$ e $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$, após extrair uma subsequência, converge fracamente para um ponto crítico não trivial u_λ de I_λ com $I_\lambda(u_\lambda) \leq c_\lambda$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.5, como valem (f_1), (f_2), (V_2) e (V_5), e como $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, podemos aplicar o Teorema de Splitting. Logo, existe uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), um inteiro $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sequências $(y_n^k) \subset \mathbb{R}^N$ e funções $w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq k \leq l$, tais que

(i) $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ com $I'(u_\lambda) = 0$,

(iii) $w_\lambda^k \neq 0$ e $I'_\infty(w_\lambda^k) = 0$ para $1 \leq k \leq l$,

(iv) $\left\| u_n - u_\lambda - \sum_{k=1}^{l} w_\lambda^k(\cdot - y_n^k) \right\|_V \to 0$,

(v) $I_\lambda(u_n) \to I(u_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} I_{\infty,\lambda}(w_\lambda^k)$,

onde no caso $l = 0$, os itens acima ainda são verdadeiros sem w_λ^k e (y_n^k), sendo $I_{\infty,\lambda}$: $H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{\infty,\lambda}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)\,dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx$$

e os w_λ^k, para $k = 1,\dots,\ell$, são pontos críticos não triviais de $I_{\infty,\lambda}$. Pelo item (i), temos que $u_n \rightharpoonup u_\lambda$, com $I'(u_\lambda) = 0$, ou seja, que (u_n) converge fracamente para um ponto crítico u_λ de I_λ. Logo, falta provar que $I_\lambda(u_\lambda) \le c_\lambda$ e que $u_\lambda \neq 0$. Como qualquer solução de

$$-\Delta u + V_\infty u = \lambda f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{3.106}$$

é não negativa, podemos considerá-la como uma solução de (2.1) com

$$g(s) := \begin{cases} -V_\infty s + \lambda f(s), & \text{para } s \ge 0, \\ -g(-s), & \text{para } s < 0. \end{cases}$$

Observamos que uma solução de energia mínima para (2.1) - que podemos assumir ser positiva - também é uma solução de energia mínima para (3.106) e o contrário também é verdadeiro. Dessa forma, a fim de aplicar o Teorema 2.1 na função g acima, vamos mostrar que ela satisfaz as hipóteses do teorema. De fato, por definição, temos que g é contínua e ímpar, e então temos (g_0). Pela definição de g e usando (f_1), temos

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{g(s)}{s} = -V_\infty + \lambda f'_+(0).$$

Pela Proposição 3.1 e por (V_5), temos

$$V_\infty \ge \alpha_0 > f'_+(0) \ge \lambda f'_+(0), \text{ logo, } \lim_{s\to 0^+}\frac{g(s)}{s} \in (-\infty, 0),$$

o que prova (g_1). Quando $N = 2$, por (f_2), existe $1 < p < +\infty$, tal que

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{s^p} = 0,$$

e, argumentando como na demonstração do Lema 3.3, temos que

$$|g(s)| \le C_\alpha e^{\alpha s^2}, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Já quando $N \geq 3$, por (f_2), existe $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, tal que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0.$$

Desse modo, para todo $\alpha > 0$, existe $S > 1$, tal que, se $s > S > 1$, então

$$f(s) < \alpha s^p < \alpha s^{\frac{N+2}{N-2}}, \text{ ou seja, } \lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = 0.$$

Assim temos,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|g(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = \lim_{s\to+\infty} \frac{|-V_\infty s + \lambda f(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = \lim_{s\to+\infty} \left| \frac{-V_\infty}{s^{\frac{N+2}{N-2}-1}} + \lambda \frac{f(s)}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} \right| = 0.$$

Portanto, g satisfaz (g_2). Por fim, por (f_3), para todo $M > 0$, existe $S > 0$, tal que

$$f(s) > Ms, \quad \text{sempre que } s > S.$$

Logo,

$$G(s) = \int_0^s g(t)\,dt = \int_0^s (-V_\infty t + \lambda f(t))\,dt > -V_\infty \frac{s^2}{2} + \lambda M \frac{s^2}{2} = \frac{s^2}{2}(-V_\infty + \lambda M),$$

sempre que $s > S$. Portanto, tomando $M > \frac{V_\infty}{\lambda}$, existe $s_0 > 0$, com $s_0 > S$, tal que $G(s_0) > 0$, o que prova (g_3). Dessa forma, podemos aplicar o Teorema 2.1, o qual nos dá que

$$0 < m_{\infty,\lambda} = \inf\{I_{\infty,\lambda}(u) \mid u \in H \setminus \{0\} \text{ e } I'_{\infty,\lambda}(u) = 0\},$$

e assim, qualquer ponto crítico não-trivial w_λ de $I_{\infty,\lambda}$ satisfaz $I_{\infty,\lambda}(w_\lambda) \geq m_{\infty,\lambda} > 0$. Como, por hipótese, $\limsup_{n\to+\infty} I_\lambda(u_n) \leq c_\lambda$, segue, pelos itens (iii) e (v) acima, que

$$c_\lambda \geq \limsup_{n\to+\infty} I_\lambda(u_n) = I_\lambda(u_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} I_{\infty,\lambda}(w_\lambda^k) \geq I_\lambda(u_\lambda). \tag{3.107}$$

Para finalizar a prova, resta mostrar que $u_\lambda \neq 0$. Suponha, por absurdo que $u_\lambda = 0$, então $I_\lambda(u_\lambda) = 0$. Vamos mostrar primeiro que $\ell \geq 1$. De fato, se $\ell = 0$, segue de (iv) que $\|u_n\|_V = \|u_n - u_\lambda\|_V \to 0$. Como valem $(V_1)'$ e (V_2), então as normas $\|.\|_V$ e $\|.\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ são equivalentes, logo $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$, o que é um absurdo, portanto $\ell \geq 1$. Pelo item (iii),

temos que $w_\lambda^k \neq 0$ e $I'_{\infty,\lambda}(w_\lambda^k) = 0$, para $1 \leq k \leq \ell$, isto implica que

$$0 < \inf\{I_{\infty,\lambda}(u) \mid u \neq 0, I'_{\infty,\lambda}(u) = 0\} = m_{\infty,\lambda} \leq I_{\infty,\lambda}(w_\lambda^k), \text{ para todo } 1 \leq k \leq \ell.$$

Logo, usando a equação (3.107), temos que

$$m_{\infty,\lambda} \leq \ell m_{\infty,\lambda} \leq \sum_{k=1}^{l} I_{\infty,\lambda}(w_\lambda^k) = I_\lambda(u_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} I_{\infty,\lambda}(w_\lambda^k) = c_\lambda. \tag{3.108}$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.1, existe uma solução de energia mínima $\omega_\lambda > 0$ para (3.106). Aplicando o Teorema 2.2 ao funcional $I_{\infty,\lambda}$, podemos encontrar um caminho $\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N))$,, tal que $\gamma(t)(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in (0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $I_{\infty,\lambda}(\gamma(1)) < 0$, $\omega_\lambda \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\infty,\lambda}(\gamma(t)) = I_{\infty,\lambda}(\omega_\lambda).$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $V \not\equiv V_\infty$ em (V_3), caso contrário, recairíamos no caso autônomo. Assim, existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tal que $V(x_0) < V_\infty$ e, pela continuidade de V, existe $\delta > 0$, tal que

$$V(x) < V_\infty, \text{ para todo } x \in B_\delta(x_0). \tag{3.109}$$

Por (V_3), temos $V(x) \leq V_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, logo

$$\int_{B_\delta^C(x_0)} [V(x) - V_\infty] u^2 \, dx \leq 0. \tag{3.110}$$

Portanto, segue de (3.109) e (3.110), que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) - I_{\infty,\lambda}(u) &= \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)\, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx\right) = \int_{\mathbb{R}^N} [V(x) - V_\infty] u^2 \, dx \\ &= \int_{B_\delta(x_0)} [V(x) - V_\infty] u^2 \, dx + \int_{B_\delta^C(x_0)} [V(x) - V_\infty] u^2 \, dx < 0, \end{aligned}$$

para todo $u \not\equiv 0$ em $B_\delta(x_0)$. Assim, em particular, como $\gamma(t)(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in (0,1]$, obtemos

$$I_\lambda(\gamma(t)) < I_{\infty,\lambda}(\gamma(t)), \text{ para todo } t \in]0,1].$$

Consequentemente,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) < \max_{t\in[0,1]} I_{\infty,\lambda}(\gamma(t)) = m_{\infty,\lambda},$$

contradizendo assim (3.108). Portanto, $u_\lambda \neq 0$, o que conclui a prova do Lema. □

Aplicando o lema anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5. *I_λ tem um ponto crítico não trivial para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3, para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, temos a existência de uma sequência de Palais-Smale limitada (u_n) para I_λ, no nível c_λ, com $I_\lambda(u_n) \to c_\lambda \neq 0$, o que implica que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \nrightarrow 0$. Portanto, podemos aplicar o Lema 3.6 e concluir que I_λ tem um ponto crítico não trivial para quase todo $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. □

Observação 3.4. *Como caso especial do Teorema 3.5, obtemos a existência de uma sequência $(\lambda_j, u_j) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\lambda_j \to 1$ e $u_j \neq 0$, satisfazendo $I'_{\lambda_j}(u_j) = 0$ e $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j}$.*

A ideia da prova do Teorema 3.1 é mostrar que essa sequência (u_j) de pontos críticos não triviais de I_{λ_j} é uma sequência de Palais-Smale limitada para I satisfazendo as hipóteses do Lema 3.6. Para mostrar a limitação de $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, usaremos o resultado a seguir, devido a De Figueiredo-Lions-Nussbaum.

Proposição 3.6 (Identidade do tipo Pohozaev)**.** *Seja u um ponto crítico de I_λ com $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ arbitrário, então u satisfaz*

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla V(x), x\rangle_{\mathbb{R}^N}\, u^2\,dx - N\lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx = 0. \tag{3.111}$$

Demonstração. Para o problema (3.2), temos que $g(x,u) = \lambda f(u) - V(x)u$, então

$$G(x,u) = \int_0^u g(t)\,dt = \lambda F(u) - \frac{V(x)u^2}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} x_i \frac{\partial G(x,u)}{\partial x_i}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} x_i \lambda \frac{\partial F(u)}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} x_i \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}u^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} x_i V(x)\frac{\partial u^2}{\partial x_i}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f(u) - V(x)u)\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}x_i u^2\,dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i \frac{\partial G(x,u)}{\partial x_i}\,dx &= \sum_{i=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f(u) - V(x)u)\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}u^2 x_i\,dx\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f(u) - V(x)u)\langle \nabla u, x\rangle_{\mathbb{R}^N}\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla V(x), x\rangle_{\mathbb{R}^N}\, u^2\,dx\end{aligned}$$

Observe que $\langle \nabla u, x\rangle_{\mathbb{R}^N} = 0$, uma vez que o vetor posição x tem a direção do vetor normal, que é ortogonal ao vetor gradiente, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda f(u) - V(x)u)\langle \nabla u, \eta\rangle_{\mathbb{R}^N}\, dx = 0.$$

Portanto, segue do Teorema A.2.1 (cf. Apêndice A.2) que

$$\begin{aligned}
&2N\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,dx + 2\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x,u)\,dx = (N-2)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\\
\Rightarrow\ &2N\int_{\mathbb{R}^N}\left(\lambda F(u) - \frac{V(x)u^2}{2}\right)dx - 2\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla V(x)xu^2\,dx\right) = (N-2)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\\
\Rightarrow\ &\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle \nabla V(x), x\rangle_{\mathbb{R}^N}\, u^2\,dx - N\lambda\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\,dx = 0,
\end{aligned}$$

como queríamos provar. □

Agora aplicamos a proposição anterior a sequência $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ obtida na Observação 3.4.

Proposição 3.7. *Assuma que $(f_1)-(f_3)$, $(V_1)-(V_5)$ são válidos. Então $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada.*

Demonstração. Como, pelo Lema 3.6,

$$I_{\lambda_j}(u_j) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_j|^2 + V(x){u_j}^2)\,dx - \lambda_j\int_{\mathbb{R}^N}F(u_j)\,dx \le c_{\lambda_j} \le c_{\frac{1}{2}},$$

então

$$\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x){u_j}^2\,dx - N\lambda_j\int_{\mathbb{R}^N}F(u_j)\,dx \le Nc_{\frac{1}{2}}.$$

Pela Proposição 3.6, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_j^2\,dx - N\lambda\int_{\mathbb{R}^N}F(u_j)\,dx\\
=&\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle \nabla V(x), x\rangle_{\mathbb{R}^N}\, u_j^2\,dx,
\end{aligned}$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla V(x)||x|u_j^2\,dx + Nc_{\frac{1}{2}}.$$

Assim, levando em conta (V_4), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx + c_{\frac{1}{2}}N, \quad \text{com } \phi \in L^2(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N). \tag{3.112}$$

Também, como u_j é ponto crítico não trivial de I'_{λ_j}, segue que $I'_{\lambda_j}(u_j)(\phi^2 u_j) = 0$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\phi^2 u_j)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_j^2\phi^2\,dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\phi^2\,dx. \tag{3.113}$$

Agora, segue de (f_3) que, para qualquer $L > 0$, existe $S > 0$, tal que, para todo $s > S$, vale que

$$\frac{f(s)}{s} > L, \quad \text{ou seja,} \quad f(s)s > Ls^2,$$

e, portanto, como f é contínua em $[0,S]$, temos

$$f(s)s \geq Ls^2 - C(L), \quad \text{para todo} \quad s \geq 0.$$

Deduzimos então que, para um $\widetilde{C}(L) > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\phi^2\,dx \geq L\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\phi^2\,dx - C(L)\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2\,dx = L\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\phi^2\,dx - \widetilde{C}(L). \tag{3.114}$$

Também temos, para um $C > 0$, usando (3.112), que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_j \nabla(\phi^2 u_j)\,dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j||\nabla(\phi^2 u_j)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|\left(|\phi^2||\nabla u_j| + 2|\phi||\nabla\phi||u_j|\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2\phi^2\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j||u_j||\phi||\nabla\phi|\,dx.\end{aligned} \tag{3.115}$$

Note que

$$0 \leq \left(|\nabla u_j||\nabla\psi| - |u_j||\psi|\right)^2 = |\nabla u_j|^2|\nabla\psi| - 2|\nabla u_j||\nabla\psi||u_j||\psi| + |u_j|^2|\psi|^2,$$

logo,

$$2|\nabla u_j||\nabla\psi||u_j||\psi| \leq |\nabla u_j|^2|\nabla\psi| + |u_j|^2|\psi|^2. \tag{3.116}$$

Assim, segue de (3.112), (3.115) e (3.116), que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j\nabla(\phi^2u_j)\,dx\right| &\overset{(3.115)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\phi^2\,dx+2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j||u_j||\phi||\nabla\phi|\,dx\\
&\overset{(3.116)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\phi^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2|\nabla\phi|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx.\\
&\leq \sup|\phi^2|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx+\sup|\nabla\phi|^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx\\
&= (\|\phi\|_\infty^2+\|\nabla\phi\|_\infty^2)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx\\
&\overset{(3.112)}{\leq} (\|\phi\|_\infty^2+\|\nabla\phi\|_\infty^2)\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx+c_{\frac{1}{2}}N\right)+\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx\\
&= \left(\frac{\|\phi\|_\infty^2+\|\nabla\phi\|_\infty^2}{2}+1\right)\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx\\
&+\left(\|\phi\|_\infty^2+\|\nabla\phi\|_\infty^2\right)c_{\frac{1}{2}}N\leq C\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx+C,
\end{aligned}\tag{3.117}$$

onde tomamos $C>0$, tal que

$$C\geq\max\left\{\frac{\|\phi\|_\infty^2+\|\nabla\phi\|_\infty^2}{2}+1,\left(\|\phi\|_\infty^2+\|\nabla\phi\|_\infty^2\right)c_{\frac{1}{2}}N\right\}.$$

E que, por (V_3),

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_j^2\phi^2\,dx\leq V_\infty\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx.\tag{3.118}$$

Finalmente, combinando (3.113)-(3.118), obtemos

$$\begin{aligned}
L\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx-\widetilde{C}(L) &\overset{(3.114)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N}f(u_j)u_j\phi^2\,dx\overset{(3.113)}{=}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_j\nabla(\phi^2u_j)\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_j^2\phi^2\,dx\\
&\overset{(3.117)+(3.118)}{\leq}\left(C\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx+C\right)+\left(V_\infty\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx\right)\\
&= (C+V_\infty)\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx+C.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$L-(C+V_\infty)\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx\leq\widetilde{C}(L)+C,\text{ isto é, }\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx\leq\frac{\widetilde{C}(L)+C}{L-(C+V_\infty)}.$$

Tomando $L>0$ suficientemente grande, isso mostra que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\phi^2\,dx$ é limitada e assim, por (3.112), segue que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_j|^2\,dx$ é limitada. Agora, vamos mostrar que $\|u_j\|_2^2=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}u_j^2\,dx$ é

limitada. Suponha, por absurdo, que $\|u_j\|_2^2$ é ilimitada, isto é, que, a menos de subsequência, temos $\|u_j\|_2^2 \to +\infty$. Então, $r_j := \|u_j\|_2^{2/N} \to +\infty$. Definindo $\widetilde{u}_j(x) := u_j(r_j x)$, temos

$$\|\nabla \widetilde{u}_j\|_2^2 = r_j^{2-N}\|\nabla u_j\|_2^2, \quad \|\widetilde{u}_j\|_2^2 = 1. \tag{3.119}$$

De fato, fazendo a substituição $y = r_j x$, temos que $\frac{dy}{dx} = \frac{d(r_j x)}{dx} = {r_j}^N$, logo, $dx = {r_j}^{-N} dy$. Portanto,

$$\|\nabla \widetilde{u}_j\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{u}_j(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |r_j \nabla u_j(r_j x)|^2 dx = {r_j}^{2-N}\|\nabla u_j\|_2^2,$$

e

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_j\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}_j(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_j(r_j x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_j(y)^2 {r_j}^{-N} dy \\ &= {r_j}^{-N}\|u_j\|_2^2 = \left(\|u_j\|_2^{\frac{2}{N}}\right)^{-N}\|u_j\|_2^2 = 1.\end{aligned}$$

Em particular, $(\widetilde{u}_j)$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Podemos também observar que $\widetilde{u}_j(x)$ satisfaz

$$-\frac{1}{r_j^2}\Delta \widetilde{u}_j + V(r_j x)\widetilde{u}_j = \lambda_j f(\widetilde{u}_j) \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{3.120}$$

De fato,

$$\nabla \widetilde{u}_j(x) = \nabla(u_j(r_j x)) = r_j \nabla u_j(r_j x),$$

e

$$\Delta \widetilde{u}_j(x) = \nabla(\nabla \widetilde{u}_j(x)) = \nabla(r_j \nabla u_j(r_j x)) = r_j \nabla(\nabla u_j(r_j x)) = {r_j}^2 \Delta u_j(r_j x),$$

logo,

$$\Delta u_j(r_j x) = \frac{\Delta \widetilde{u}_j(x)}{{r_j}^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&-\Delta u_j(r_j x) + V(r_j x)u_j(r_j x) = \lambda_j f(u_j(r_j x)) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{{r_j}^2}\Delta \widetilde{u}_j(x) + V(r_j x)\widetilde{u}_j = \lambda_j f(\widetilde{u}_j(x)).\end{aligned}$$

Agora, afirmamos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|\widetilde{u}_j\|_{L^2(B_1(x))}^2 \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} \widetilde{u}_j^2 dx \to 0, \text{ conforme } j \to +\infty, \tag{3.121}$$

onde $B_1(x) = \{y \in \mathbb{R}^N; |y-x| \leq 1\}$. Para provar a afirmação, é suficiente mostrar que

$$\widetilde{u}_j(\cdot + y_j) \rightharpoonup 0, \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \tag{3.122}$$

para qualquer sequência $(y_j) \subset \mathbb{R}^N$, pois assim teremos que $\widetilde{u}_j(\cdot + y_j) \to 0$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e, em particular, em $L^2(B_1(x))$. Assumimos que $\widetilde{u}_j(\cdot + y_j) \rightharpoonup \widetilde{u}$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ após extrair uma subsequência. Observamos que segue de (V_2) que $V(r_j x + y_j) \to V_\infty$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Então, por (3.120), temos $V_\infty \widetilde{u} = f(\widetilde{u})$ em $\mathbb{R}^N$. Como $\widetilde{u}(x) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\xi = 0$ é uma solução isolada de $V_\infty \xi = f(\xi)$, temos $\widetilde{u} \equiv 0$. Isso implica (3.122) e, portanto, (3.121).

Pelo Lema de Lions (cf. Apêndice A.9), para o p dado em (f_2), segue que $\|\widetilde{u}_j\|_{p+1} \to 0$ conforme $j \to +\infty$. Pelos itens $(f_1) - (f_2)$, temos para qualquer $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$, tal que

$$|f(\xi) - f'_+(0)\xi||\xi| \leq \delta\xi^2 + C_\delta|\xi|^{p+1}, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Assim, tomando $\xi = \widetilde{u}_j$ e integrando, temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(\widetilde{u}_j) - f'_+(0)\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j\,dx\right| \leq \delta\|\widetilde{u}_j\|_2^2 + C_\delta\|\widetilde{u}_j\|_{p+1}^{p+1} \to \delta, \text{ conforme } j \to +\infty.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(\widetilde{u}_j) - f'_+(0)\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j\,dx \to 0. \tag{3.123}$$

Observamos que $f'_+(0) < V_\infty$ segue de (V_5) e da Proposição 1.1. Multiplicando (3.120) por $\widetilde{u}_j$ e integrando, e usando (3.119) e (3.123), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_j^2}\|\nabla\widetilde{u}_j\|_2^2 = \frac{1}{r_j^2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{u}_j{}^2\,dx &\overset{(*)}{=} -\frac{1}{r_j^2}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}_j\Delta\widetilde{u}_j\,dx \\
&\overset{(3.120)}{=} -\int_{\mathbb{R}^N} V(r_j x)\widetilde{u}_j^2\,dx + \lambda_j\int_{\mathbb{R}^N} f(\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} (V(r_j x) - \lambda_j f'_+(0))\widetilde{u}_j^2\,dx + \lambda_j\int_{\mathbb{R}^N} (f(\widetilde{u}_j) - f'_+(0)\widetilde{u}_j)\widetilde{u}_j\,dx \\
&\overset{(3.123)}{\to} -(V_\infty - f'_+(0))\|\widetilde{u}_j\|_2^2 \\
&\overset{(3.119)}{\to} -(V_\infty - f'_+(0)) < 0, \text{ quando } j \to +\infty.
\end{aligned}$$

Isso é uma contradição e, portanto, $\|\widetilde{u}_j\|_2^2$ é limitada conforme $j \to +\infty$ e, portanto, $\|u_j\|_2^2$ também o é.

Dessa forma, como $\|u_j\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_j\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\,dx$, segue que $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, como queríamos provar. □

Observe ainda que quando $N \geq 3$, a prova da limitação da sequência é mais simples, conforme provado a seguir.

Proposição 3.8. *Quando $N \geq 3$, podemos mostrar diretamente a limitação de $\|u_j\|_2^2$.*

Demonstração. Observe que $I'_{\lambda_j}(u_j)u_j = 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 + V(x)u_j^2\,dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\,dx \tag{3.124}$$

Por $(f_1)-(f_2)$, para qualquer $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$, tal que

$$f(s) \leq (f'_+(0)+\delta)s + C_\delta s^{\frac{N+2}{N-2}}, \text{ para todo } s \geq 0. \tag{3.125}$$

Assim, por (1.5), (3.124) e (3.125), segue que

$$\begin{aligned}\alpha_0 \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 + V(x)u_j^2\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)u_j\,dx \\ &\leq (f'_+(0)+\delta)\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\,dx + C_\delta \int_{\mathbb{R}^N} u_j^{2^*} \\ &= (f'_+(0)+\delta)\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\,dx + C_\delta \|u_j\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}\,dx.\end{aligned}$$

Como $N \geq 3$, podemos aplicar a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (cf. Apêndice A.3), para concluir que

$$\alpha_0 \int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\,dx \leq (f'_+(0)+\delta)\int_{\mathbb{R}^N} u_j^2\,dx + C_\delta C \|\nabla u_j\|_2^{2^*}.$$

Escolhendo $f'_+(0)+\delta < \alpha_0$, temos que

$$[\alpha_0 - (f'_+(0)+\delta)]\|u_j\|_2^2 \leq C_\delta C \left\|\nabla u_j\right\|_2^{2^*}, \text{ logo } \|u_j\|_2^2 \leq \frac{C_\delta C \left\|\nabla u_j\right\|_2^{2^*}}{\alpha_0 - (f'_+(0)+\delta)},$$

o que mostra que $\|u_j\|_2^2$ é limitada. □

Provada a limitação da sequência (u_j), devemos mostrar que (u_j) satisfaz as hipóteses do Lema 3.6. Para isso, demonstraremos o lema a seguir.

Lema 3.7. *Assumindo que $(f_1)-(f_3)$ e $(V_1)-(V_5)$ são satisfeitas, então a sequência $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I satisfazendo $\limsup_{j\to+\infty} I(u_j) \leq c$ e $\|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \not\to 0$.*

Demonstração. O fato de $\|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \not\to 0$ segue do Lema 3.4. Agora, pela definição de $I(u_j)$ e de $I_{\lambda_j}(u_j)$, temos que

$$I(u_j) = I_{\lambda_j}(u_j) + (\lambda_j - 1)\int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\,dx. \tag{3.126}$$

Como, pela Proposição 3.7, $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, segue que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_j)|\,dx \leq C_1$, onde C_1 é uma constante real positiva. Dessa forma, (3.126) implica em

$$I(u_j) \geq c_{\lambda_j} - \frac{1}{2}C_1.$$

Também lembramos que $I_{\lambda_j}(u_j) \leq c_{\lambda_j}$, que $\lambda_j \to 1$ e que, pelo Lema 3.1, a função $\lambda_j \to c_{\lambda_j}$ é contínua pela esquerda, então $\lim\limits_{j\to+\infty} c_{\lambda_j} = c$. Assim, a sequência (u_j) é limitada, além disso, por (3.126) obtemos

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to+\infty} I(u_j) &= \limsup_{j\to+\infty} I_{\lambda_j}(u_j) + (\lambda_j - 1)\int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\,dx \\ &\leq \limsup_{j\to+\infty} c_{\lambda_j} + (\lambda_j - 1)\int_{\mathbb{R}^N} F(u_j)\,dx = c.\end{aligned}$$

Por outro lado, no dual de $H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$I'(u_j) = I'_{\lambda_j}(u_j) + (\lambda_j - 1)\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)\,dx.$$

Como $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, então $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u_j)\,dx$ é limitada, logo $\lim\limits_{j\to+\infty} I'(u_j) = 0$. Portanto, (u_j) é uma sequência de Palais-Smale. □

Agora, estamos em condições de provar o resultado principal desta dissertação.

Demonstração do Teorema 3.1. Pela Proposição 3.7 e pelo Lema 3.7, temos que $(u_j) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência de Palais-Smale limitada que satisfaz

$$\limsup_{j\to+\infty} I(u_j) \leq c \quad \text{e} \quad \|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \not\to 0.$$

Assim, (u_j) satisfaz as hipóteses do Lema 3.6 para $\lambda = 1$ e, portanto, I possui um ponto crítico não trivial. Pelo Teorema 1.3, temos que esse ponto crítico é uma solução não negativa do problema (1.3). A fim de provar que essa solução é positiva. Primeiro, consideraremos o caso em que f é Hölder contínua. Nesse caso, concluiremos que toda solução fraca do

problema é uma solução clássica e aplicaremos o Princípio do Máximo Forte (cf. Apêndice A.14).

De fato, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe $C^{2,\alpha}$. Vamos supor inicialmente que $N \geq 3$ e usar um argumento conhecido como *"bootstrap"*. O primeiro passo é usar as imersões de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ para concluir que $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Por outro lado, segue da Proposição 1.2 que

$$|f(s)| < (f'_+(0)+\varepsilon)s + \widetilde{C}_\varepsilon s^p, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R},$$

logo,

$$|f(s)|^{\frac{2^*}{p}} \leq \left((f'_+(0)+\varepsilon)|s| + \widetilde{C}_\varepsilon |s|^p\right)^{\frac{2^*}{p}} \leq c_3|s|^{\frac{2^*}{p}} + c_4|s|^{2^*} \leq c_5 + c_6|s|^{2^*}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Como Ω é limitado e $u \in L^{2^*}(\Omega)$, segue da expressão acima que $f(\cdot,u) \in L^{p_1}(\Omega)$, com $p_1 = \frac{2^*}{p}$, então podemos aplicar o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg (cf. Apêndice A.15) para concluir que $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$. Temos então dois casos a considerar:

Caso 1: $2p_1 > N$.

Pelas imersões de Sobolev (cf. Apêndice A.1), temos

$$u \in W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{1-\left[\frac{N}{p_1}\right],\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Como f é Hölder contínua, temos que $|f(x,s)-f(y,t)| \leq c_7|(x,s)-(y,t)|^\beta$, para todo $x,y \in \Omega$, $s,t \in \mathbb{R}$ para algum $\beta \in (0,1]$. Então, para x e y próximos em Ω, vale que

$$|f(x,u(x))-f(y,u(y))| \leq c_7\left(|x-y|+|u(x)-u(y)|\right)^\beta \leq c_7\left(|x-y|+c_8|x-y|^\gamma\right)^\beta.$$

Logo,

$$|f(x,u(x))-f(y,u(y))| \leq c_8\left(|x-y|^\beta + |x-y|^{\gamma\beta}\right).$$

Assim, temos

$$\frac{|f(x,u(x))-f(y,u(y))|}{|x-y|^{\gamma\beta}} \leq c_9\left(|x-y|^{\beta-\gamma\beta+1}\right) \leq c_{10},$$

visto que Ω é limitado e $\beta \geq \gamma\beta$. Esta expressão implica que $f(\cdot,u) \in C^{0,\gamma\beta}(\overline{\Omega})$. Segue então, pelo Teorema de Schauder (cf. Apêndice A.15), que $u \in C^{2,\gamma\beta}(\overline{\Omega})$, sendo, portanto, uma solução clássica do problema.

Caso 2: $2p_1 \leq N$.

Pelas imersões de Sobolev (cf. Apêndice A.1), obtemos $u \in W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$, para $q_1 = \dfrac{Np_1}{N-2p_1}$. Assim, devido ao crescimento de f, concluímos que $f(\cdot,u) \in L^{p_2}(\Omega)$, com

$$p_2 = \frac{q_1}{p} = \frac{Np_1}{p(N-2p_1)},$$

e, portanto, segue do Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg (cf. Apêndice A.15) que $u \in W^{2,p_2}(\Omega)$. Se $2p_2 > N$, podemos argumentar como no Caso 1 e provar que u é uma solução clássica. Caso contrário, podemos iterar esse processo k vezes para obter p_m, q_m, com $m = 1,\dots,k$, tais que

$$p_1 = \frac{2^*}{p}, \quad p_{m+1} = \frac{q_m}{p}, \quad q_m = \frac{Np_m}{N-2p_m},$$

e, além disso, $u \in W^{2,p_m}(\Omega)$, para todo $m = 1,2,\dots,k$. Afirmamos que, para algum $k \in \mathbb{N}$, vale $2p_k > N$ e então, pelo Caso 1, $u \in W^{2,p_k}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma_k}(\Omega)$, sendo uma solução clássica. Para verificar a afirmação, notemos que, como $p < 2^* - 1$, temos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q_1}{2^*} = \frac{N}{Np - 2\cdot 2^*} > \frac{N}{N(2^*-1) - 2\cdot 2^*} = 1, \text{ e, portanto, } \frac{p_2}{p_1} = 1+\delta, \text{ para algum } \delta > 0.$$

Como

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{N-2p_1}{N-2p_2}\right) > \frac{p_2}{p_1} = 1+\delta,$$

obtemos $p_3 > p_2(1+\delta) = (1+\delta)2p_1$. Iterando esse processo, concluímos que $p_k > (1+\delta)^{k-1}p_1$. Logo, $2p_k > N$ para algum k suficientemente grande, o que conclui a prova para $N \geq 3$.

Quando $N \leq 2$, podemos usar somente o Caso 1. De fato, pelas imersões de Sobolev (cf. Apêndice A.1), sabemos que $u \in L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq +\infty$. Assim, basta escolher $p_1 = \dfrac{q}{p}$, para q suficientemente grande, e garantir que $2p_1 > N$. Como o argumento é local, podemos aplicá-lo em bolas $B_R(x)$ de raio R e centradas em cada ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, $u \in C^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e u é uma solução clássica do problema. Portanto, pelo Princípio do Máximo Forte (cf. Apêndice A.14), temos que u é uma solução positiva do problema (1.3).

Agora, consideremos o caso em que f não é Hölder contínua. Argumentando como no Caso 2, aplicamos recursivamente o Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg (cf. Apêndice A.15) até obter um índice p_k suficientemente grande tal que $p_k > N$. Isso nos garante que $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$, para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Portanto, $u \in C^{1,\gamma}(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, definindo $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : u \geq 0\}$, dada uma função teste $v \in C_0^1(\Omega)$ não negativa, existe uma constante

$\alpha_u \geq 0$, tal que $v - \alpha_u u \perp u$ no produto interno associado a norma $\|\cdot\|_V$. Logo,

$$\mathcal{L}(u,v) := \langle u, v\rangle_V = \langle u, \alpha_u u\rangle_V = \alpha_u \|u\|_V^2 > 0.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema A.15.3 (cf. Apêndice A.15) para obter que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ = 0,$$

pois $u = 0$ em $\partial\Omega$. Como Ω é o domínio onde a solução u é positiva, isto nos leva a uma contradição, a menos que $\partial\Omega$ seja vazia. Portanto, $\Omega = \mathbb{R}^N$ e concluímos que u é uma solução positiva em todo $\mathbb{R}^N$. □

3.4 Uma Solução de Energia Mínima

Como resultado adicional, terminaremos esta dissertação mostrando a existência de uma solução de energia mínima sob as hipóteses do Teorema 3.1. Para isso, utilizaremos o resultado provado anteriormente de que I possui um ponto crítico não trivial.

Teorema 3.6. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, a equação* (1.3) *possui uma solução de energia mínima. Ou seja, existe uma solução $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $I(u_0) = m$, onde*

$$m = \inf\{I(u); u \neq 0, I'(u) = 0\}.$$

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de pontos críticos não triviais de I, tal que $I(u_n) \to m$. Pelo Lema 3.4, sabemos que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \not\to 0$. Além disso, como $(I(u_n))$ é limitada superiormente, podemos usar um raciocínio análogo ao da demonstração da Proposição 3.7 para concluir que (u_n) é limitada, isto é, existe $C > 0$, tal que $\|u_n\|_V \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando a Proposição 1.2 e usando a equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|_V$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n)|\,dx \leq C_1\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_2\|u_n\|^{p+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_3\|u_n\|^2_V + C_4\|u_n\|^{p+1}_V \leq C_5,$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 são constantes positivas. Como consequência, segue que

$$|I(u_n)| = \left|\frac{1}{2}\|u_n\|^2_V - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\|u_n\|^2_V + \int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n)|\,dx \leq C_4.$$

Dessa forma, $m > -\infty$ e $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência de Palais-Smale limitada para o funcional I. Pelo Teorema 3.2 e pela Observação 3.5, existe uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), um inteiro $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sequências $(y_n^k) \subset \mathbb{R}^N$ e funções $w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq k \leq l$, tais que

(i) $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ com $I'(u_\lambda) = 0$,

(iii) $w_\lambda^k \neq 0$ e $I'_\infty(w_\lambda^k) = 0$ para $1 \leq k \leq l$,

(iv) $\left\| u_n - u_\lambda - \sum_{k=1}^{l} w_\lambda^k(\cdot - y_n^k) \right\|_V \to 0$,

(v) $I_\lambda(u_n) \to I(u_\lambda) + \sum_{k=1}^{l} I_{\infty,\lambda}(w_\lambda^k)$,

onde no caso $l = 0$, os itens acima ainda são verdadeiros sem w_λ^k e (y_n^k).

Agora, considere o problema limite dado por

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

O funcional $I_\infty : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ associado a este problema é dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_\infty u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx.$$

Seja m_∞ o nível de energia mínima para I_∞, ou seja,

$$m_\infty = \inf\{I_\infty(u) \mid u \neq 0, I'_\infty(u) = 0\}.$$

Assim como na prova do Lema 3.6, assumimos $V \not\equiv V_\infty$, caso contrário, não há nada o que demonstrar. Logo, $c < m_\infty$. Além disso, na prova do Teorema 3.1 obtemos um ponto crítico não trivial u de I satisfazendo $I(u) \leq c$. Desse modo, temos que

$$m \leq I(u) \leq c < m_\infty. \tag{3.127}$$

Afirmamos que $u_0 \neq 0$. De fato, se $u_0 = 0$, então $I(u_0) = 0$. Supondo que $l = 0$, pelo item (iv) acima e pelo fato de que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \not\to 0$, chegamos a uma contradição, logo $l \geq 1$. Utilizando a definição de m_∞ e os itens (iii) e (v) acima, obtemos

$$m = \lim_{n\to+\infty} I(u_n) = I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k) = \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k) \geq l m_\infty \geq m_\infty,$$

o que contradiz a equação (3.127). Portanto, $u_0 \neq 0$, como desejávamos.

Usando o item (v) e a definição de m, podemos concluir, por um lado, que $m \leq I(u_0)$. Por outro lado, também procedendo como na prova do Lema 3.6 e tomando o caso $\lambda = 1$, temos que $m_\infty > 0$. Consequentemente, $I_\infty(w^k) \geq m_\infty > 0$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Portanto, pelo item (v), temos que

$$m = I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I_\infty(w^k) \geq I(u_0),$$

o que implica que $I(u_0) = m$, concluindo assim a prova do teorema. □

Apêndice A

Resultados importantes

Neste Apêndice, apresentamos alguns resultados importantes que serão usados diversas vezes ao longo do trabalho. Para um estudo mais aprofundado de tais resultados, indicamos suas respectivas referências.

A.1 Imersões de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, com fronteira suave. Então o Espaço de Sobolev dado por

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq 1 \right\},$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Definição A.1.1 (Imersão contínua)**.** *Sejam E_1, E_2 espaços normados, tais que $E_1 \subset E_2$. Dizemos que E_1 está imerso continuamente em E_2, e denotamos $E_1 \hookrightarrow E_2$, quando a aplicação inclusão $i : E_1 \to E_2$, dada por $i(x) = x$, é contínua.*

Definição A.1.2 (Imersão compacta)**.** *Sejam E_1, E_2 espaços normados, tais que $E_1 \subset E_2$. Dizemos que E_1 está imerso compactamente em E_2, e denotamos $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$, quando a aplicação inclusão $i : E_1 \to E_2$, dada por $i(x) = x$, é compacta.*

Teorema A.1.1 (Imersões Contínuas de $H^1(\Omega)$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, com fronteira suave. Então as seguintes Imersões de Sobolev são contínuas:*

- *para $N \geq 3$ e $q \in [2, 2^*]$, vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;*

- *para $N = 1,2$ e $q \in [2,+\infty)$, vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

E como consequência, dado q para o qual vale a continuidade da imersão, existe $C_q > 0$ constante, tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Haim Brezis [7, Seção 9.3]. □

Teorema A.1.2 (Imersões Compactas de $H^1(\Omega)$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira suave. Então as seguintes imersões de Sobolev são compactas:*

- *para $N \geq 3$ e $q \in [2,2^*)$ vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$;*
- *para $N = 1,2$ e $q \in [2,+\infty)$, vale que $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Haim Brezis [7, Seção 9.3]. □

Consideremos agora o Espaço de Sobolev geral dado por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha, \text{ tal que } |\alpha| \leq k\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, $1 \leq p \leq +\infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Temos o seguinte resultado:

Teorema A.1.3 (Imersões Contínuas de $W^{k,p}(\Omega)$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado, de classe C^1 e $k \in \mathbb{N}$. Então as seguintes Imersões de Sobolev são contínuas:*

(i) se $kp < N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$;

(ii) se $kp = N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < +\infty$;

(iii) se $kp > N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - 1,\gamma}(\Omega)$, onde:

$$\gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{para todo } \gamma \in (0,1), & \text{se } \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

e $\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{N}{p}$.

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Adams [2, Teorema 5.4]. □

A.2 Identidade de Pohozaev

Teorema A.2.1 (Identidade de Pohozaev)**.** *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ é solução da equação $-\Delta u = g(x,u)$, onde $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então u satisfaz:*

$$2N \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,dx + 2\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x,u)\,dx = (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx,$$

onde $G(x,u) = \displaystyle\int_0^u g(x,s)\,ds$ e assumindo que G e $|\nabla G|$ pertencem a $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. A demonstração se encontra no artigo de De Figueiredo-Lions-Nussbaum [9, Lema 1.1]. □

A.3 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Teorema A.3.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Se $1 \leq p < N$, então existe $C = C(N,p) > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, onde $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$.

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Haim Brezis [7, Teorema 9.9]. □

A.4 Desigualdade de Young

Definição A.4.1. *Dado $1 < r < +\infty$, dizemos que $s \in \mathbb{R}$ é o expoente conjugado de s, se*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

E convencionamos $s = +\infty$, quando $r = 1$. Também é comum usar a notação p' para o expoente conjugado de p.

Teorema A.4.1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $a \geq 0$ e $b \geq 0$ números reais, então vale a desigualdade:*

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^s}{s},$$

onde s é o expoente conjugado de r.

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Haim Brezis [7, Teorema 4.6]. □

Observação A.4.1. *Como caso particular da Desigualdade de Young, para todo $\rho > 0$, tomando $\hat{a} = a\sqrt[r]{\rho r}$ e $\hat{b} = \frac{b}{\sqrt[r]{\rho r}}$, temos a desigualdade*

$$ab = \hat{a}\hat{b} \leq \frac{\hat{a}^r}{r} + \frac{\hat{b}^s}{s} = \rho a^r + C_\rho b^s,$$

onde

$$C_\rho = \frac{1}{(\rho r)^{s/r} s}.$$

A.5 Desigualdade de Hölder

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável, e $1 \leq p \leq +\infty$. O espaço de Lebesgue dado por

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |u|^p \, dx < +\infty \right\},$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Teorema A.5.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Dado $1 \leq p \leq +\infty$, considere $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Haim Brezis [7, Teorema 4.6]. □

A.6 Desigualdade de Moser-Trundinger

Teorema A.6.1 (Desigualdade de Moser-Trundinger)**.** *Suponha que $N \geq 2$. Então, para qualquer $\alpha \in (0, \alpha_N)$, onde α_N é dado por $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é a área da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$, existe uma constante $C_\alpha > 0$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_N \left(\alpha \left(\frac{|u(x)|}{\|\nabla u\|_N} \right)^{\frac{N}{N-1}} \right) dx \leq C_\alpha \frac{\|u\|_N^N}{\|\nabla u\|_N^N},$$

para $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

Demonstração. A demonstração se encontra no artigo de Adachi-Tanaka [1, Teorema 0.1]. □

A.7 Desigualdade de Jensen

Definição A.7.1 (Função convexa)**.** *Uma função φ é dita convexa em um intervalo I se dados $x_1, x_2 \in I$ e $\lambda \in (0,1)$, vale que*

$$\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2).$$

Teorema A.7.1 (Desigualdade de Jensen)**.** *Se φ é uma função convexa em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ são pontos no intervalo, então para quaisquer coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ e $\lambda_i \geq 0$ para todo i, temos a seguinte desigualdade:*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i).$$

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Wheeden e Zygmund [26, Teorema 7.35]. □

Corolário A.7.1. *Se $a_j \geq 0$ para $1 \leq j \leq n$ e $p \geq 1$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^{n} a_j^p.$$

Demonstração. Aplicando a desigualdade de Jensen a função convexa $\varphi(x) = x^p$, com $\lambda_j = \dfrac{1}{n}$ para cada j, temos

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^p = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} a_j\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\varphi(a_j)\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^p.$$

□

A.8 Lema de Schwartz

Lema A.1 (Lema de Schawrtz)**.** *Suponha que um funcional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ satisfaz:*

(i) para todo $u \in X$, a Derivada de Gateaux $D\varphi(u) : X \to \mathbb{R}$ existe, e é um operador linear limitado;

(ii) o operador diferencial $D\varphi : X \to X'$ é contínuo.

Então φ é de classe C^1. Nesse caso, a Derivada de Gateaux de φ coincide com a Derivada de Fréchet de φ.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no livro de Schwartz [22, Lema 1.15]. □

A.9 Lema de Lions

Lema A.9.1 (Lema de Lions)**.** *Assuma que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e que*

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |v_n|^2 \, dx \to 0.$$

Então, $\|v_n\|_r \to 0$ para $r \in]2, 2^*[$ quando $N \geq 3$ e para $r \in]2, +\infty[$ quando $N = 1, 2$. Aqui, $B_1(z) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y - z| \leq 1\}$.

Demonstração. A demonstração para o caso $N \geq 3$ se encontra no artigo de Lions [20, Lema 1.1]. Para os casos $N = 1$ e $N = 2$, a demonstração é a mesma trocando 2^* por $+\infty$, conforme observado por Lions no mesmo artigo. □

A.10 Lema da Deformação

Lema A.2 (Lema de Deformação)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e $I^c = \{u \in X : I(u) \leq c\} \subset X$. Se*

$$\|I'(u)\| \geq 4\varepsilon,$$

para todo $u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$, então existe $\eta \in C(X, X)$, tal que:

(i) $\eta(u) = u, \quad \forall u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(ii) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Demonstração. A demonstração do Lema de Deformação é um caso particular do Lema de Deformação Quantitativo, cujo enunciado e prova podem ser encontrados no livro de Willem [27, Lema 2.3]. Para deduzir o Lema de Deformação a partir do resultado geral, basta tomar $S = X$ e $\delta = 1$. Além disso, no Lema de Deformação Quantitativo, a deformação é parametrizada por $t \in [0, 1]$, representando o processo contínuo de deformação. No Lema

de Deformação, consideramos diretamente o estado final dessa deformação, correspondente ao instante $t = 1$, onde a função $\eta : X \to X$ satisfaz as propriedades desejadas. □

A.11 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Teorema A.11.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue-mensurável, e (f_n) uma sequência de funções Lebesgue-mensuráveis e integráveis, definidas sobre Ω. Suponha que exista uma função Lebesgue-mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que*

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Suponha também que exista uma função integrável $g : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que

$$|f_n| \leq g, \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então f é integrável e vale que

$$\int_\Omega f\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,dx.$$

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Gerald Folland [12, Teorema 2.24]. □

A.12 Teorema de Vainberg

Teorema A.12.1 (Teorema de Vainberg)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue-mensurável, (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$, e $f \in L^p(\Omega)$, tal que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Então existem uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$, tais que:

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$, q.t.p. em Ω;

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, q.t.p. em Ω, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Haim Brezis [7, Teorema 4.9]. □

A.13 Operador de Superposição

Teorema A.13.1. *Suponha que* $1 \leq p,q,r,s < +\infty$, $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ *e*

$$|f(x,u)| \leq c(|u|^{p/r} + |u|^{q/s}).$$

Então, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *temos que* $f(\cdot,u) \in L^r(\Omega) + L^s(\Omega)$ *e que o operador*

$$\begin{aligned} A : L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) &\to L^r(\Omega) + L^s(\Omega) \\ u &\to f(x,u) \end{aligned}$$

é contínuo.

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Willem [27, Teorema A.4]. □

A.14 Princípio do Máximo Forte

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $u \in C^2(\Omega)$ e os coeficientes $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ funções dadas. O operador diferencial elíptico de segunda ordem

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u$$

é dito uniformemente elíptico em Ω se existe uma constante $\theta_0 > 0$, tal que a função

$$\theta(x) := \inf_{\xi \in \mathbb{R}^N, |\xi|=1} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

satisfaz $\theta(x) \geq \theta_0$ para todo $x \in \Omega$.

Teorema A.14.1 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto conexo, L um operador uniformemente elíptico em* Ω *com* $c \equiv 0$ *e* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$. *Então:*

(i) se $Lu \geq 0$ *em* Ω *e u atinge um máximo em* Ω, *então u é constante em* Ω;

(ii) se $Lu \leq 0$ *em* Ω *e u atinge um mínimo em* Ω, *então u é constante em* Ω.

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Evans [11, Teorema 3, Capítulo 6]. □

A.15 Regularidade de Soluções

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, valem os seguintes resultados.

Teorema A.15.1 (Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg)**.** *Se Ω é de classe C^2, $\partial\Omega$ é limitada e $f \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < +\infty$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$, tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. A demonstração se encontra nos artigos de Agmon [3] e de Agmon-Douglis-Nirenberg [4]. □

Teorema A.15.2 (Teorema de Schauder)**.** *Se Ω é limitado e de classe $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e existe uma constante $C = C(\Omega, \alpha) > 0$, tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Demonstração. A demonstração se encontra no artigo de Agmon [3, Teorema 8.2] e no artigo de Agmon-Douglis-Nirenberg [4, Teorema 6.1]. □

Considere o operador diferencial elíptico de segunda ordem

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x)u_{x_j} + b_i(x)u)_{x_i} + \sum_{i=1}^{N} c_i(x)u_{x_i} + d(x)u,$$

cujos coeficientes $a_{ij}, b_i, c_i, d : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis.

Teorema A.15.3. *Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo que $Lu \geq 0$ em (Ω). Então,* $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$.

Demonstração. A demonstração se encontra no livro de Gilbarg-Trudinger [13, Teorema 8.1]. □

Bibliografia

[1] Adachi, S. and Tanaka, K. (2000). *Trudinger Type Inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their Best Exponents*. Proc. Amer. Math. Soc., 128:2051–2057.

[2] Adams, R. (1975). *Sobolev Spaces*. Academic Press.

[3] Agmon, S. (1959). *The L_p approach to the Dirichlet problem, part I, Regularity theorems*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13(3):405–448.

[4] Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L. (1959). *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, part I*. Comm. Pure Appl. Math., 12:623–727.

[5] Berestycki, H., Gallouët, T., and Kavian, O. (1983). *Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 297(5):307–310.

[6] Berestycki, H. and Lions, P. L. (1983). *Nonlinear scalar field equations I: Existence of a ground state*. Arch. Rat. Mech. Anal., 82:313–346.

[7] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.

[8] Coti Zelati, V. and Rabinowitz, P. H. (1992). *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$*. Comm. Pure Appl. Math., 45:1217–1269.

[9] de Figueiredo, D. G., Lions, P. L., and Nussbaum, R. D. (1982). *A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations*. J. Math. Pures Appl. (9), 61(1):41–63.

[10] Ekeland, I. (1974). *On the variational principle*. J. Math. Anal. Appl., 47:324–353.

[11] Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.

[12] Folland, G. B. (1984). *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*. John Wiley & Sons, Inc.

[13] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer.

[14] Jeanjean, L. (1999). *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on $\mathbb{R}^N$*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 129:787–809.

[15] Jeanjean, L. and Tanaka, K. (2003a). *A note on a mountain pass characterization of least energy solutions*. Advanced Nonlinear Studies, 3:445–455.

[16] Jeanjean, L. and Tanaka, K. (2003b). *A remark on least energy solutions in* $\mathbb{R}^N$. Proc. Amer. Math. Soc., 131:2399–2408.

[17] Jeanjean, L. and Tanaka, K. (2005). *A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on* $\mathbb{R}^N$. Indiana University Mathematics Journal, 54(2):443–464.

[18] Jeanjean, L. and Toland, J. F. (1998). *Bounded Palais-Smale mountain-pass sequences*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 327(1):23–28.

[19] Lions, P. L. (1984a). *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part I*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1:109–145.

[20] Lions, P. L. (1984b). *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part II*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1:223–283.

[21] Pankov, A. (2008). *Lecture Notes on Schrödinger Equations*. Nova Science Publishers, New York.

[22] Schwartz, J. (1964). *Nonlinear Funcional Analysis*. Courant Institute, New York.

[23] Soares, M. (2016). *Um Problema Elíptico no* $\mathbb{R}^N$ *Assintoticamente Linear e Autônomo no Infinito*. Master's thesis, Universidade de Brasília, Departamento de Matemática.

[24] Struwe, M. (1996). *Variational Methods*, volume 34. Springer-Verlag, Berlin.

[25] Szulkin, A. and Zou, W. (2001). *Homoclinic orbits for asymptotically linear Hamiltonian systems*. J. Funct. Anal., 187(1):25–41.

[26] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. (1977). *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*. CRC Press, New York.

[27] Willem, M. (1996). *Minimax Theorems*. Birkhäuser, Boston.