



Universidade de Brasília

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Estrutura de grupos localmente compactos e totalmente desconexos

Patrícia Miranda Costa Salazar

Brasília

2024

Universidade de Brasília

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Patrícia Miranda Costa Salazar

**Estrutura de grupos localmente compactos e totalmente
desconexos**

Dissertação apresentada à Universidade
de Brasília como parte dos requisitos para
a obtenção do título de Mestre em Mate-
mática.

Orientador: Dr. Alex Carrazedo Dantas

Brasília

2024

Está página deverá ser substituída por uma folha contendo a ficha catalográfica.

*Está página deverá ser substituída por uma folha contendo as assinaturas dos
membros da banca, e deve ser colocada após a ficha catalográfica*

Abstract

In this work, we study the **tidy** subgroup theory developed by G. Willis in the paper [Wil94], about the structure of locally compact and totally disconnected groups. We also show that the integer valued function, s , called the scale function, is well defined and continuous. Finally, we use these results to show the conjecture proposed by Hoffman and Mukherjea in their paper, *Concentration Functions and a Class of Non-Compact Groups*, that says that a locally compact group is a **neat group**.

Keywords: Totally disconnected group; Locally compact group; Tidy; subgroup

Resumo

Neste trabalho estudamos a teoria de subgrupos tidy desenvolvida por G. Willis em [Wil94], sobre a estrutura de grupos localmente compactos e totalmente desconexos. Mostramos que a função s de valor inteiro, chamada de função escala é bem definida e é contínua. Por fim, usamos esses resultados para a demonstração da conjectura proposta por Hoffman e Mukherjea em *Concentration Functions and a Class of Non-Compact Groups* que diz que um grupo localmente compacto é um grupo neat.

Palavras-chave: Grupos Totalmente Desconexos; Grupos Localmente Compactos; Subgrupos Tidy.

Prefácio

Esta dissertação de mestrado foi submetida à Universidade de Brasília (UnB) como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A dissertação foi desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília (PPG/MAT), tendo como orientador o Prof. **Dr. Alex Carrazedo Dantas**.

Agradecimentos

Exalto com gratidão no coração em primeiro lugar, ao Deus vivo, onisciente, onipotente, onipresente, o supremo Criador dos mundos, tanto o visível quanto o invisível; agradeço ao meu Senhor Jesus Cristo, o Verbo que se fez carne e habitou entre nós, a fonte de água viva; e ao Espírito Santo, o Consolador. Sei que Eles são um só, e são o meu sustento e fortaleza, e estou aqui apenas porque Eles assim quiseram.

Sou muito grata ao meu marido e melhor amigo por sempre ter estado ao meu lado, tanto na bonança quanto na desventura, por sempre cuidar de tudo com muito amor, por me amparar, por me impulsionar e encorajar. Agradeço também por toda dedicação e por fazer parte da minha rede de apoio, cuidando da nossa filha, para que eu pudesse me empenhar e prosseguir.

Louvo ao Senhor por você minha princesa, minha filha amada, meu amor, que me faz sorrir em todos os momentos. Agradeço pelos seus sorrisos, que são os mais verdadeiros e radiantes. Você ilumina meus dias e torna tudo em minha vida mais leve, você me motiva a levantar todos os dias e avançar, você é meu pedacinho

de paraíso na terra, meu refúgio de amor. Glorifico a Deus pela sua vida.

Honro aos meus pais, Moacir de Jesus e Geralda Divina, por nunca terem desistido de mim, por sempre me apoiarem em tudo, pelo encorajamento dado em todo tempo, sobretudo quando eu quis desistir. Sou extremamente grata por tudo que vocês fizeram e fazem por mim. Agradeço por cuidarem tão bem da nossa princesa, com tanto amor e carinho, por sempre me proporcionarem segurança e tranquilidade e, principalmente, por serem minha maior referência. Pais eu os amo, e nenhuma palavra usada aqui poderia demonstrar tamanha gratidão e amor que sinto por vocês.

Aos meus irmãos e cunhadas que sempre acreditaram em mim e me fizeram acreditar também, vocês sempre me deram palavras de força e alento, cada um com seu jeitinho especial me motivou a continuar. Sou feliz por tê-los ao meu lado. Obrigada.

Agradeço ao meu professor e orientador, Alex Carrazedo Dantas, por ter aguardado pacientemente a finalização deste trabalho, por toda colaboração e cuidado. Agradeço por sempre ter sido educado e gentil, por ser respeitoso e por ter tratado todo o processo com seriedade. Sei do valor do seu tempo a mim dedicado e de todas as horas cedidas para as nossas reuniões, através delas tive preciosas contribuições para a conclusão desta etapa da minha vida.

Agradeço a toda a coordenação do curso, em especial à Cláudia, secretária da pós-graduação em Matemática da UnB; e também à CNPq pelo apoio financeiro.

*“Eu sou o Alfa e o Ômega, o
Primeiro e o Último, o Princípio e
o Fim. Bem-aventurados aqueles
que lavam as suas vestiduras [no
sangue do Cordeiro], para que lhes
assista o direito à árvore da vida, e
entrem na cidade pelas portas.”
—(Apocalipse 22:13,14)*

*“Se, com a tua boca, confessares
Jesus como Senhor e, em teu
coração, creres que Deus o
ressuscitou dentre os mortos, serás
salvo. Porque com o coração se crê
para justiça e com a boca se
confessa a respeito da salvação.”
—(Romanos 10:9,10)*

Sumário

Abstract	i
Resumo	ii
Prefácio	iii
Agradecimentos	iv
1 Introdução	1
2 Preliminares	6
2.1 Teoria de Grupos	6
2.2 Topologia	11
2.2.1 Espaços Topológicos	11
2.3 Grupos Topológicos	19
3 Subgrupos Tidy	27
3.1 Definição e exemplos de subgrupos tidy	27
3.2 A existência de subgrupos tidy	33

4	A Função Escala	64
4.1	Função Escala	65
4.2	Demonstração da Conjectura	77
	Referências	81

Capítulo 1

Introdução

O estudo de grupos tem sido um tópico importante da álgebra abstrata há bastante tempo, além disso, eles estão presentes em toda a matemática e proporcionam um vasto campo para novas pesquisas. Este trabalho se concentra no estudo de algumas estruturas dos grupos localmente compactos e totalmente desconexos, a referência principal para o desenvolvimento dessa dissertação foi o artigo G. Willis, 1994, The Structure of Totally Disconnected, Locally Compact Groups (citado apenas como [Wil94]). Entretanto, foram utilizados outros dois artigos para a conclusão deste trabalho; Karl H. Hofmann; Arunava Mukherjee, 1981, Concentration Functions and a Class of Non-Compact Groups (citado como [HM81]) W. Jaworski, J. Rosenblatt e G. Willis, 1996, Concentration functions in locally compact groups (citado como [JRW96]) .

Um grupo é dito totalmente desconexo se os únicos conjuntos conexos são o vazio e os conjuntos unitários. Já um grupo localmente compacto é um grupo em que cada

elemento possui uma vizinhança compacta. Consideremos G um grupo localmente compacto, então existe um subgrupo normal C de G que é maximal quanto a ser conexo tal que G/C é localmente compacto e totalmente desconexo (veja E. Hewitt e K. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Teorema 7.3, página 60).

Assim para entendermos a estrutura de um grupo localmente compacto podemos recorrer aos grupos C que é a componente conexa da identidade de G e G/C localmente compacto e totalmente desconexo. Contudo, se por um lado a estrutura de um grupo localmente compacto e conexo é mais ou menos entendida (veja [MD55], Teorema 4.6) por outro, a estrutura de um grupo localmente compacto e totalmente desconexo é ainda muito complexa.

Hoffman e Mukherjea, em [HM81], definiram que um grupo não compacto G localmente compacto possui um comportamento estranho se satisfaz as seguintes condições:

1. existe um subgrupo normal fechado N de G tal que G/N é compacto;
2. o subgrupo N contém um subgrupo U compacto;
3. existe um elemento x tal que para cada vizinhança V de U temos que $N \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} x^n V x^{-n}}$.

Os grupos que possuem um comportamento estranho foram chamados de *Strange Group* por Hoffman e Mukherjea, e aos grupos que não são estranhos deram o nome de *Neat Group*. No mesmo artigo, [HM81], eles conjecturaram que todo grupo localmente compacto não tem um comportamento ‘Estranho’. A conjectura diz que

um grupo localmente compacto é um Neat Group.

Para o caso localmente compacto conexo, Hoffman e Mukherjea provaram que a conjectura vale, reduzindo o problema para o caso totalmente desconexo, esse caso foi provado por Jaworski, Rosenblatt e Willis em [JRW96]. Para provar esse resultado eles utilizaram os seguintes teoremas:

Teorema A [Wil94]. *Para cada elemento x em um grupo localmente compacto e totalmente desconexo G , existe um subgrupo aberto compacto U de G tal que colocando*

$$K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n} \text{ e } K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n \text{ tem-se}$$

$$i) \ U = K_+ K_- = K_- K_+;$$

$$ii) \ \bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} \text{ e } \bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n \text{ são subgrupos fechados de } G.$$

Um subgrupo aberto compacto U possuindo as propriedades $i)$ e $ii)$ é chamado de subgrupo *tidy* para x .

Os subgrupos normais compactos e abertos são subgrupos tidy para x , no Capítulo 3 veremos esse e outros exemplos com mais detalhes.

Uma propriedade significativa dos subgrupos fechados e compactos K_+ e K_- é a relação de continência que existe entre os subgrupos K_+ e xK_+x^{-1} , e K_- e $x^{-1}K_-x$.

Essa propriedade nos diz que $K_+ \subseteq xK_+x^{-1}$ e $K_- \subseteq x^{-1}K_-x$, ver o Lema 3.2.3.

Teorema B [Wil94]. *Sejam $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ dois subgrupos tidy para x e sejam $K_+^{(1)} =$*

$$\bigcap_{n \geq 0} x^n U^{(1)} x^{-n} \text{ e } K_+^{(2)} = \bigcap_{n \geq 0} x^n U^{(2)} x^{-n}. \text{ Então}$$

$$[xK_+^{(1)}x^{-1} : K_+^{(1)}] = [xK_+^{(2)}x^{-1} : K_+^{(2)}] < +\infty.$$

A função $s : G \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $s(x) = [xK_+x^{-1} : K_+]$ está bem definida e é chamada

função escala de x .

Temos que a função escala é igual a 1 para qualquer elemento x de um subgrupo normal compacto e aberto U , o qual é tidy sob a conjugação de x , pois $xK_+x^{-1} = K_+ = U$.

Teorema C [Wil94]. *Seja U um subgrupo tidy para x . Então U é tidy para cada $y \in UxU$ e $s(y) = s(x)$. Mais do que isso, a função s é contínua, onde $\mathbb{N}$ é munido da topologia discreta.*

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar os Teoremas A, B e C, os quais foram usados para provar que a Conjectura de Hoffman e Mukherjea vale para grupos localmente compactos e totalmente desconexos.

Nas duas primeiras seções do Capítulo 2, abordaremos conceitos básicos de teoria de grupos e topologia. Já na Seção 2.3, apresentaremos algumas noções sobre grupos topológicos e brevemente será dado o conceito de subgrupos tidy. Além disso, incluiremos uma série de resultados técnicos que serão necessários para as demonstrações dos Teoremas A, B e C. O leitor que tem familiaridade com estes conceitos poderá saltar o capítulo e recorrer a ele quando supor necessário ou caso seja solicitado.

No Capítulo 3, temos os resultados de primazia deste trabalho, esses tiveram como base o artigo do [Wil94]. Aprofundaremos um pouco mais nosso estudo sobre subgrupos tidy e mostraremos a existência desses subgrupos, demonstrando assim o Teorema A; esse capítulo será um grande auxiliar para a compreensão dos resultados que serão expostos no Capítulo 4. Finalmente, no Capítulo 4, definiremos uma função de valor inteiro, cujo nome é função escala, e provaremos algumas proprieda-

des que nos auxiliarão na demonstração do Teorema B. Neste capítulo, demonstraremos também o Teorema C, e como uma consequência, obteremos a continuidade da função escala. E, por fim, utilizaremos estes resultados para a demonstração da conjectura de Hoffman e Mukherjea, (ver Teorema 1.8 em [JRW96]).

Capítulo 2

Preliminares

Aqui apresentaremos conceitos básicos de teoria de grupos, topologia e grupos topológicos. Apesar dos conceitos elementares, também exibiremos, neste capítulo, alguns resultados que serão importantes para uma melhor compreensão das demonstrações expostas nos próximos capítulos.

2.1 Teoria de Grupos

Nesta seção, estudaremos conceitos básicos de teoria de grupos que podem ser encontrados em qualquer livro de introdução à álgebra de grupos. O livro utilizado para o desenvolvimento desta seção foi o do Arnaldo Garcia e Yves [Leq14].

Definição 2.1.1. *Um grupo $(G, *)$ é um conjunto não vazio G munido de uma ope-*

ração binária

$$* : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$;
2. existe um elemento $e \in G$, chamado de elemento neutro em G com a operação $*$, tal que $a * e = e * a, \forall a \in G$;
3. para cada $a \in G$ existe um $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Exemplo 2.1.2. Seja F um grupo finito e $A = F^{\mathbb{Z}}$ munido da operação $f_1 *_A f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow F, n \mapsto f_1(n) *_F f_2(n), f_1, f_2 \in A$. Então A é grupo.

Demonstração. Notemos que A é um grupo, pois:

1. $(f_1 *_A f_2) *_A f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow F, n \mapsto (f_1(n) *_F f_2(n)) *_F f_3(n) = f_1(n) *_F (f_2(n)) *_F f_3(n)$, pois a operação é coordenada a coordenada e F é um grupo. Logo $(f_1 *_A f_2) *_A f_3 = f_1 *_A (f_2 *_A f_3)$.
2. O elemento neutro de A é $e_A : \mathbb{Z} \rightarrow F, n \mapsto e_F$ verifica que $f_1 *_A e_A = e_A *_A f_1$.
3. O elemento inverso de $f_1 = \mathbb{Z} \rightarrow F, n \mapsto f_1(n)$ é $f_1^{-1} = \mathbb{Z} \rightarrow F, n \mapsto f_1(n)^{-1}$

□

Definição 2.1.3. *Sejam $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Dizemos que $(H, *)$ é um subgrupo de G quando $(H, *)$ é um grupo, (notação: $H \leq G$).*

Definição 2.1.4. *Uma função $\sigma : (G_1, *_1) \rightarrow (G_2, *_2)$ tal que $\sigma(a *_1 b) = \sigma(a) *_2 \sigma(b)$, $\forall a, b \in G_1$, é chamada de homomorfismo de grupos. Um isomorfismo é um homomorfismo bijetivo cuja inversa também é um homomorfismo. Um isomorfismo $\sigma : (G, *) \rightarrow (G, *)$ é chamado de automorfismo de G .*

Exemplo 2.1.5. *Seja o conjunto de automorfismos de G , denotado por $\text{Aut}(G)$, munido da operação de composição. Então $(\text{Aut}(G), \circ)$ é um grupo.*

Exemplo 2.1.6. *Seja A como no exemplo 2.1.2 e defina a função $\alpha : A \rightarrow A$, $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (f(n+1))_{n \in \mathbb{Z}}$. Então α é um automorfismo.*

Seja $(G, *)$ um grupo e $g, h \in G$, denotaremos $g * h$ por gh .

Definição 2.1.7. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . Se $g \in G$, então o conjunto*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

é chamado de classe lateral à esquerda de H em G .

E o conjunto

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

é chamado de classe lateral à direita.

Esses conjuntos podem ser vistos da seguinte maneira:

Seja G um grupo e H um subgrupo de G , defina a relação de equivalência da seguinte

maneira

$$y \sim_E x \iff \exists h \in H; y = xh.$$

Então a classe de equivalência que contém o elemento $x \in G$ é

$$[x] = \{y \in G; y \sim_E x\} = \{y \in G; y = xh\} = \{xh; h \in H\},$$

denotaremos este conjunto por xH e ele será chamado de classe lateral à esquerda de H em G que contém x . Similarmente temos a classe lateral à direita.

Definição 2.1.8. *O índice de H em G , denotado por $(G : H)$, é a cardinalidade do conjunto de classes laterais à esquerda.*

Proposição 2.1.9. *Sejam G um grupo e $K \leq H \leq G$. Então $(G : K) = (G : H)(H : K)$.*

Demonstração. Ver Proposição V.3.12 do livro [Leq14]. □

Definição 2.1.10. *Um subgrupo H de um grupo G é dito normal se $gHg^{-1} = H$, para todo $g \in G$, e é denotado por $H \trianglelefteq G$,*

Definição 2.1.11. *Se H é um subgrupo normal de G , então o conjunto de classes laterais de H , chamado grupo quociente $G/H = \{gH, g \in G\}$, possui estrutura de grupo com a operação $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$.*

Definição 2.1.12. *Sejam H e K dois subgrupos de G . Dizemos que H é normalizado por K se $xHx^{-1} = H$, para todo $x \in K$.*

A definição a seguir será importante para definirmos uma coleção de exemplos importantes para este trabalho.

Definição 2.1.13. *Sejam K e H dois grupos e $\sigma : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ um homomorfismo de grupos. Consideremos o produto cartesiano $H \times K = \{(h, k) | h \in H, k \in K\}$ e a operação $*_\sigma : (H \times K) \times (H \times K) \rightarrow H \times K$, $((h_1, k_1) *_\sigma (h_2, k_2)) = (h_1(\sigma(k_1))h_2, k_1 k_2)$. O grupo $H \times K$ munido da operação $*_\sigma$ é chamado de produto semidireto de H com K e é denotado por $H \rtimes K$.*

Exemplo 2.1.14. *Sejam A como no exemplo 2.1.2 e o automorfismo α como no exemplo 2.1.6. Temos que o produto semidireto de A com $\mathbb{Z}$ é $A \rtimes \mathbb{Z} = \{(a, m); a \in A, m \in \mathbb{Z}\}$, com a operação de grupo definida por $(a, m) *_\alpha (b, n) = (a\alpha^m(b), m + n)$, com $a, b \in A$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então $A \times \{0\}$ é um subgrupo normal de $A \rtimes \mathbb{Z}$*

Demonstração. Sejam $A \times \{0\}$ um subgrupo de $A \rtimes \mathbb{Z}$ e $x \in A \rtimes \mathbb{Z}$. Considerando $x = (a, m)$, $x(y, 0)x^{-1} = (a, m) *_\alpha (y, 0) *_\alpha (a, m)^{-1} = (a\alpha^m(y), m) *_\alpha (\alpha^{-m}(a^{-1}), -m) = (a\alpha^m(y)\alpha^m(\alpha^{-m}(a^{-1})), m - m) = (a\alpha^m(y)a^{-1}, 0) \subset A \times \{0\}$, então $x(A \times \{0\})x^{-1} \subset A \times \{0\}$. Analogamente, obtemos que $A \times \{0\} \subset x(A \times \{0\})x^{-1}$, então $A \times \{0\} = x(A \times \{0\})x^{-1}$. Portanto, $A \times \{0\}$ é um subgrupo normal de $A \rtimes \mathbb{Z}$. $\square$

Proposição 2.1.15. *Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família arbitrária de subgrupos de G e $x \in G$. Então $x(\bigcap_{i \in I} A_i)x^{-1} = \bigcap_{i \in I} xA_i x^{-1}$.*

Demonstração. Tomemos $z \in x(\bigcap_{i \in I} A_i)x^{-1}$, então $z = xax^{-1}$, onde $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Isto é, $a \in A_i, \forall i \in I$, logo $z = xax^{-1} \in xA_i x^{-1}, \forall i \in I$. Portanto, $z \in \bigcap_{i \in I} xA_i x^{-1}$. Consideremos $z \in \bigcap_{i \in I} xA_i x^{-1}$, então $z \in xA_i x^{-1}, \forall i \in I$. Isto é, $z = xax^{-1}$, onde $a \in A_i, \forall i \in I$, logo $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$, e segue que $z \in x(\bigcap_{i \in I} A_i)x^{-1}$. $\square$

Proposição 2.1.16. *[Lei Modular de Dedekind] Sejam H, K e L subgrupos de um grupo e consideremos que $K \subset L$. Então $(HK) \cap L = (H \cap L)K$. Em particular, se H e K comutam $\langle H, K \rangle \cap L = \langle H \cap L, K \rangle$.*

Demonstração. Ver a afirmação 1.3.14 do livro do [Rob96]. □

2.2 Topologia

Esta seção aborda alguns conceitos de topologia como, por exemplo, espaços compactos e localmente compactos, espaços totalmente desconexos e outros, esses conceitos serão necessários ao longo deste trabalho. Além disso, também abordaremos alguns resultados técnicos, os quais serão de extrema relevância para as demonstrações dos resultados apresentados nos outros capítulos. Utilizamos o livro de Topologia do Munkres, [Mun00] como referência base para esta seção, contudo, os conceitos abordados aqui podem ser encontrados em qualquer outro livro de topologia geral.

2.2.1 Espaços Topológicos

Definição 2.2.1. *Uma topologia em um conjunto X , é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. a união arbitrária de elementos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$;
3. a interseção finita de elementos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados conjuntos abertos.

Exemplo 2.2.2. *Seja um conjunto X , a topologia discreta é o conjunto $\mathcal{T}_1$ de todos os subconjuntos de X . O conjunto $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset\}$ também é uma topologia e é chamada topologia trivial.*

Definição 2.2.3. *Se X é um conjunto, uma base de abertos ou, simplesmente, uma base em um espaço topológico X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X , chamados abertos básicos ou elementos básicos, tal que*

1. *para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ que contém x ;*
2. *se x pertence à interseção de dois elementos básicos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então existe um $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Definimos a topologia $\mathcal{T}$ gerada pela base $\mathcal{B}$ como segue: Um subconjunto $U \subset X$ pertence à topologia $\mathcal{T}$, e será chamado de aberto em X , se para cada $x \in U$, existe um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Exemplo 2.2.4. *Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido da topologia gerada pela base cujos abertos básicos são as bolas de centro em $x = (x_1, x_2)$ e raio $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \epsilon\}$. Esta base satisfaz as condições 1 e 2 da definição 2.2.3 e a topologia gerada é chamada de topologia usual em $\mathbb{R}^2$.*

Definição 2.2.5. *Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ dois espaços topológicos. Definimos a topologia produto em $X \times Y$ pela topologia cuja base é $\mathcal{B} = \{U \times V; U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$*

Definição 2.2.6. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto $F \subseteq X$ é dito fechado na topologia $\mathcal{T}$ se $X - F$ é aberto, isto é, se $X - F \in \mathcal{T}$.*

Definição 2.2.7. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X . Definimos o fecho de A , denotado por $\overline{A}$, como a interseção de todos os fechados que contém A . E dizemos que A é denso em X se $\overline{A} = X$.*

Proposição 2.2.8. *Seja F um subconjunto de X . $F \subset X$ é fechado se, e somente se, ele é igual ao seu fecho, isto é, $F = \overline{F}$.*

Demonstração. Pela definição (2.2.7) temos que $\overline{F} = \bigcap_i F_i$, onde F_i são os fechados que contém F com $i \in I$. Logo $F \subseteq \overline{F}$. Se F é fechado, então $\overline{F} = \bigcap_i F_i \subseteq F$. Portanto, $F = \overline{F}$. Por outro lado, como $F \subseteq \bigcap_i F_i = \overline{F}$, temos que F é fechado, pois o complementar $F^c = \bigcup_i F_i^c$ é aberto por ser união arbitrária de abertos. $\square$

Definição 2.2.9. *Um subconjunto L de um espaço topológico X é dito localmente fechado em um ponto $x \in L$ se existe uma vizinhança V de $x \in X$ tal que $L \cap V$ é um subconjunto fechado do subespaço V . O subconjunto L é dito localmente fechado em X se é localmente fechado em cada $x \in L$.*

Definição 2.2.10. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X . Definimos o interior de A , denotado por $\text{int}(A)$, como a união de todos os abertos contidos em A .*

Proposição 2.2.11. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X . Então A é aberto se, e somente se, $A = \text{int}(A)$.*

Demonstração. Pela definição (2.2.10) temos que $\text{int}(A)$ é a união dos abertos contidos em A , logo $\text{int}(A) \subseteq A$. Se A é aberto, então $A \subseteq \text{int}(A)$. Portanto, $A = \text{int}(A)$. Por outro lado, se $A = \text{int}(A)$, assim, A é aberto, pois por definição $\text{int}(A)$ é igual à união de abertos contidos em A , e como união arbitrária de abertos é aberta, segue que $A = \text{int}(A)$ é aberto. $\square$

Definição 2.2.12. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de A se qualquer aberto de X que contém x intersecta o conjunto A em um ponto diferente de x .*

Definição 2.2.13. *Uma cobertura por abertos de um subconjunto K de um espaço topológico X é uma família $\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$, onde I é um conjunto de índices, de abertos tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.*

Definição 2.2.14. *Um subconjunto, K , de um espaço topológico, X , é dito compacto se qualquer cobertura por abertos admite uma subcobertura finita.*

Proposição 2.2.15. *Sejam X um espaço topológico, K um subconjunto compacto de X e A um subconjunto fechado de K . Então A é compacto.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$, onde I é um conjunto de índices, uma cobertura por abertos de A , isto é, $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Como A é fechado, temos que $X - A$ é aberto e $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \cup (X - A)$. E como K é compacto, então toda cobertura por abertos possui uma subcobertura finita, sendo assim, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \cup (X - A)$, logo temos que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ é uma subcobertura por abertos finita. Portanto, A é compacto. $\square$

Proposição 2.2.16. *Sejam $K_i, i = 1, 2, \dots, n$ conjuntos compactos de um espaço topológico X . Então $\bigcup_{i=1}^n K_i$ é um conjunto compacto em X .*

Demonstração. Sejam $\{K_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ um conjunto finito de compactos e $A = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Seja $\{A_i, i \in I\}$, onde I é um conjunto de índices, uma cobertura por abertos de A , isto é, $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Como cada $K_j \subseteq A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, então existem finitos $A_1^j, A_2^j, \dots, A_{n_j}^j$ tais que $K_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_j} A_i^j$, portanto, $A = \bigcup_{i=1}^n K_i \subseteq \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{n_j} A_i^j$ é uma cobertura por abertos finita, logo A é compacto. $\square$

Definição 2.2.17. *Um espaço topológico X é dito um espaço de Hausdorff se para cada par de pontos distintos $x_1, x_2 \in X$ existem abertos U_1 e U_2 disjuntos que contém esses pontos.*

Proposição 2.2.18. *Sejam H um espaço de Hausdorff e K um subconjunto compacto de H . Então K é fechado.*

Demonstração. Consideremos um elemento $x \in H - K$, como H é um espaço de Hausdorff, para cada elemento $y \in K$, existem vizinhanças disjuntas $U_y \subset H$ de x e $V_y \subset H$ de y . Observemos que $\{V_y\}_{y \in K}$ é uma cobertura por abertos de K , ou seja:

$$K \subset \bigcup_{y \in K} V_y.$$

Como K é compacto, temos que existe uma subcobertura finita, isto é, existem $V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_n}$ tais que

$$K \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cdots \cup V_{y_n},$$

logo podemos considerar $V_x = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cdots \cap U_{y_n}$, vizinhança aberta de x e disjunta de K , portanto, $H - K$ é aberto e assim K é fechado. $\square$

Observação 2.2.19. *Observe que este resultado não acontece se considerarmos um espaço topológico qualquer. Por exemplo, considere $X = \{a, b\}$ e a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Note que $\{a\}$ é um conjunto compacto, pois qualquer cobertura aberta possui uma subcobertura finita. Mas não é um conjunto fechado, pois o complementar de $\{a\}$ é $\{b\}$ que não é um aberto de X , pois não pertence a $\mathcal{T}$. Isso acontece pois o conjunto X com a topologia dada não é um espaço de Hausdorff.*

Proposição 2.2.20. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço de Hausdorff e $K \subseteq X$ um conjunto compacto. Se $F \subseteq X$ é um subconjunto fechado, então a interseção $F \cap K$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Sabemos que K é fechado pela Proposição 2.2.18. Como F é fechado, então $F \cap K$ é fechado. E segue, pela Proposição 2.2.15, que $F \cap K$ é compacto, pois $F \cap K \subseteq K$. $\square$

Corolário 2.2.21. *A interseção finita de compactos contidos em um espaço de Hausdorff é um conjunto compacto.*

Demonstração. Sejam $K_1, K_2, \dots, K_n$ conjuntos compactos contidos em um espaço Hausdorff pela Proposição (2.2.18) são fechados. Como a interseção finita de fechados é um conjunto fechado, temos que $\bigcap_{i=1}^n K_i$ é um conjunto fechado contido

no compacto K_1 , assim, pela Proposição (2.2.20), $\bigcap_{i=1}^n K_i \cap K_1 = \bigcap_{i=1}^n K_i$ é um conjunto compacto. $\square$

O resultado a seguir, conhecido como Teorema de Tychonoff, garante que o produto arbitrário de espaços compactos é compacto na topologia produto. Uma demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [Mun00], Teorema 37.3, página 234.

Teorema 2.2.22. *(Teorema de Tychonoff) Um produto arbitrário de espaços compactos é compacto na topologia produto.*

Definição 2.2.23. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço localmente compacto se cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança compacta, isto é, existe um aberto U e um compacto K tal que $x \in U \subset K$.*

Definição 2.2.24. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X . Uma cisão de A é um par de abertos disjuntos tais que $A = B_1 \cup B_2$, onde $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Se B_1 ou B_2 são vazios, esta cisão é dita trivial. O subconjunto A é dito conexo se a única cisão que admite é a trivial.*

Definição 2.2.25. *A componente conexa de $x \in X$ é a união de todos os conjuntos conexos que contém x . Um espaço topológico é dito totalmente desconexo se todas as componentes conexas são conjuntos unitários ou, equivalentemente, se os únicos conjuntos conexos são o vazio e os conjuntos unitários.*

Exemplo 2.2.26. *Sejam F um grupo finito e $A = F^{\mathbb{Z}}$ como no exemplo 2.1.2. Considere F munido da topologia discreta e o grupo A munido da topologia produto. Um*

aberto básico da topologia em A é dado por $B = \prod_{i \in \mathbb{Z}} F_i$, onde

$$F_i = \begin{cases} D, & \text{se } i = i_0 \\ F, & \text{se } i \neq i_0 \end{cases}$$

onde D é um aberto de F . Então A é um grupo localmente compacto e totalmente desconexo.

Demonstração. $A = F^{\mathbb{Z}}$ é localmente compacto, pois pelo Teorema 2.2.22 temos que A é um grupo compacto, porque é produto de compactos F . Notemos que A é totalmente desconexo, pois seja $S \subset A$ com pelo menos dois elementos distintos $f, g \in S$. Então existe uma coordenada $i \in \mathbb{Z}$ tal que $f(i) \neq g(i)$. Consideremos $f(i) = x \in F$ e sejam $S_1 = \{s \in S | s(i) = f(i) = x\}$ e $S_2 = \{s \in S | s(i) \neq x\}$, observemos que estes conjuntos são não vazios, porque $f \in S_1$ e $g \in S_2$. Definamos

$B_1 = \prod_{i \in \mathbb{Z}} F_j$, onde

$$F_j = \begin{cases} \{x\}, & \text{se } i = i_0 \\ F, & \text{se } i \neq i_0 \end{cases}$$

e $B_2 = \prod_{i \in \mathbb{Z}} F_j$, onde

$$F_j = \begin{cases} F - \{x\}, & \text{se } i = i_0 \\ F, & \text{se } i \neq i_0 \end{cases}$$

Notemos também que B_1 e B_2 são abertos disjuntos e $S_1 \subset B_1$ e $S_2 \subset B_2$, porém, $S = S_1 \cup S_2 = (S_1 \cap B_1) \cup (S_2 \cap B_2)$. Portanto, os únicos conjuntos conexos são os conjuntos unitários, ou seja, A é totalmente desconexo. $\square$

Definição 2.2.27. *Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ dois espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita contínua se para cada aberto $B \in \mathcal{T}_2$ a imagem inversa $f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\} \in \mathcal{T}_1$.*

2.3 Grupos Topológicos

Abordaremos aqui algumas definições e resultados que são alguns preliminares importantes para este trabalho, porém, não exporemos a demonstração de todos os resultados. Os livros *Elements of Mathematics: General Topology*, [Bou66], e *Topological transformation groups*, [MD55] foram as referências principais para a produção desta seção.

Definição 2.3.1. *Seja G um conjunto que é um grupo e também um espaço topológico.*

Suponha que

1. *a aplicação $(x, y) \mapsto xy$ de $G \times G$ em G é uma aplicação contínua.*
2. *a aplicação $x \mapsto x^{-1}$ de G em G é contínua.*

Então G é chamado de grupo topológico.

Proposição 2.3.2. *Todo grupo topológico G totalmente desconexo é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Ver o Teorema 10.3.2 de [Maj90]. □

A proposição a seguir pode ser encontrada na Proposição 4 do Capítulo III do livro *Elements of Mathematics: General Topology* [Bou66].

Proposição 2.3.3. *Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo de G localmente fechado em um ponto de H . Então H é fechado em G .*

Proposição 2.3.4. *Seja H um subgrupo de G e suponha que exista uma vizinhança U de $e \in G$ de modo que $\overline{U} \cap H$ é fechado em G . Então H é fechado em G .*

Demonstração. Consideremos um elemento $x \in \overline{H}$. Seja V uma vizinhança de e tal que $VV^{-1} \subseteq U$. Como Vx é uma vizinhança aberta de x temos que $x \in \overline{H \cap Vx}$. Tomemos $y \in H \cap Vx$, então $xy^{-1} \in \overline{Hy^{-1} \cap Vxy^{-1}}$. Observemos que $H = Hy^{-1}$, pois H é um subgrupo e $y \in H$. Como $y \in Vx$, então $xy^{-1} \in V^{-1}$, logo temos $Vxy^{-1} \subseteq VV^{-1} \subseteq U$. Sendo assim,

$$xy^{-1} \subseteq \overline{H \cap U} \subseteq \overline{H \cap \overline{U}} \subseteq H \cap \overline{U}.$$

Então $xy^{-1} \in H$, e como $y \in H$ temos que $x \in H$. Portanto, H é fechado em G . $\square$

Proposição 2.3.5. *Seja G um grupo topológico, e $\mathcal{U}$ base aberta de e . Então*

- (i) *para cada $U \in \mathcal{U}$, existe um $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$;*
- (ii) *para cada $U \in \mathcal{U}$, existe um $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$;*
- (iii) *para cada $U \in \mathcal{U}$ e cada $x \in U$, existe um $V \in \mathcal{U}$ tal que $xV \subset U$;*
- (iv) *para cada $U \in \mathcal{U}$ e $x \in G$, existe um $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$.*

Demonstração. Ver o Teorema 4.5 de [EH63]. $\square$

Proposição 2.3.6. *Se G é um grupo topológico e H é um subgrupo de G . Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. Se H é aberto, então H é fechado.
2. Se H é fechado e $[G : H]$ é finito, então H é aberto.
3. Se H é aberto e G é compacto, então $[G : H]$ é finito

Demonstração. Consideremos a relação de equivalência definida em $G \times G$ dada por $g_1 \sim g_2$ se, e somente se $g_1^{-1}g_2 \in H$. As classes de equivalência desta relação são as classes laterais gH . Sejam $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ representantes de diferentes classes laterais. Observemos que $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda H$ e

$$G - H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda, g_\lambda H \neq H} g_\lambda H.$$

Se H é aberto, então $g_\lambda H$ é aberto por ser um deslocamento de um aberto. Assim, $G - H$ é união de abertos, logo H é fechado.

Se H é fechado e $[G : H]$ é finito, então $G - H$ é união finita de fechados $g_\lambda H$, logo $G - H$ é fechado, sendo assim, H é aberto.

Se H é aberto e G é compacto, então existe uma subcobertura finita de $G - H$, isto é, o número de classes laterais de H em G é finito, portanto, $[G : H]$ é finito. $\square$

Proposição 2.3.7. *Sejam G um grupo topológico e $f_x : G \rightarrow G$ definida por $f_x(y) = xy$, a multiplicação à esquerda por x . Então f_y é um homeomorfismo.*

Demonstração. Para mostrarmos que f_x é um homeomorfismo provaremos que f_x e f_x^{-1} são contínuas. Como G é um grupo topológico, segue que $p : G \times G \rightarrow G$ definida por $p(x, y) = xy$ é contínua. Consideremos x fixo, logo temos que $p(x, y) = xy = f_x(y)$, sendo assim, f_x é contínua em y . Analogamente, temos a continuidade

de $f_x^{-1}(y) = x^{-1}y$, pois pode ser escrita como composição das funções contínuas produto p e inversa $i(x) = x^{-1}$. $\square$

Os próximos resultados serão úteis para a demonstração do Lema (3.2.2).

Corolário 2.3.8. *Sejam G um grupo topológico, $x \in G$ e V um subgrupo aberto de G . Então xVx^{-1} , xV e Vx são abertos.*

Demonstração. Pela proposição 2.3.7 temos que a multiplicação pela esquerda é um homeomorfismo, analogamente, a multiplicação pela direita também é um homeomorfismo. Como a composição de homeomorfismos é um homeomorfismo, segue que $f_x(y) = xy$, $g_x(y) = yx$ e $h_x(y) = xyx^{-1}$ são homeomorfismos. Se V é um aberto, então $f(V) = xV$, $g(V) = Vx$ e $h(V) = xVx^{-1}$ são conjuntos abertos. $\square$

Proposição 2.3.9. *Sejam $f : A \rightarrow B$ uma função contínua e K um subconjunto compacto de A . Então $f(K)$ é um subconjunto compacto de B .*

Demonstração. Teorema 26.5 do livro [Mun00]. $\square$

Corolário 2.3.10. *Seja A um subconjunto compacto de um grupo topológico G e $y \in G$, então yA é compacto.*

Demonstração. Consideremos a função $f_y : A \rightarrow G$ definida por $f_y(x) = yx$. Pela Proposição 2.3.7 temos que essa função é contínua. Portanto, $f(A) = yA$ é compacto, pela Proposição 2.3.9. $\square$

Corolário 2.3.11. *Sejam G um grupo topológico, $x \in G$ e V um subgrupo compacto de G . Então xVx^{-1} é compacto.*

Corolário 2.3.12. *Se V é um subgrupo aberto e compacto de G , então x^nVx^{-n} é compacto, para $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 2.3.13. *Sejam V um subgrupo aberto e compacto de G e $V_k = \bigcap_{0 \leq n \leq k} x^nVx^{-n}$. Então $V \cap xV_kx^{-1} = V_{k+1}$*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} xV_kx^{-1} &= x\left(\bigcap_{0 \leq n \leq k} x^nVx^{-n}\right)x^{-1} \\ &= \left(\bigcap_{0 \leq n \leq k} xx^nVx^{-n}x^{-1}\right) \\ &= \left(\bigcap_{0 \leq n \leq k} x^{n+1}Vx^{-n-1}\right) \end{aligned}$$

Notemos que $0 \leq n \leq k$, então $0 + 1 \leq n + 1 \leq k + 1$, consideremos $n + 1 = i$, logo $1 \leq i \leq k + 1$, e segue que

$$xV_kx^{-1} = \bigcap_{1 \leq i \leq k+1} x^iVx^{-i}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} V \cap xV_kx^{-1} &= V \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k+1} x^iVx^{-i}\right) \\ &= x^0Vx^{-0} \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k+1} x^iVx^{-i}\right) \\ &= \left(\bigcap_{0 \leq i \leq k+1} x^iVx^{-i}\right) = V_{k+1} \end{aligned}$$

□

Lema 2.3.14. *Seja G um grupo totalmente desconexo e localmente compacto, suponha que exista um subgrupo aberto e compacto, V , de G , tal que $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n V x^{-n}$, e $x \in G$. Então xK_+x^{-1} é um subgrupo de $x^{j+1}K_+x^{-j-1}$, para $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos verificar que xK_+x^{-1} é subgrupo de $x^{j+1}K_+x^{-j-1}$.

Temos

$$\begin{aligned} K_+ &= \bigcap_{n \geq 0} x^n V x^{-n} \\ \Rightarrow xK_+x^{-1} &= x\left(\bigcap_{n \geq 0} x^n V x^{-n}\right)x^{-1} = \bigcap_{n \geq 0} x^{n+1} V x^{-n-1} \\ \Rightarrow xK_+x^{-1} &= (x^1 V x^{-1}) \cap (x^2 V x^{-2}) \cap \dots \cap (x^{j+1} V x^{-j-1}) \cap (x^{j+2} V x^{-j-2}) \cap \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

e

$$\begin{aligned} x^{j+1}K_+x^{-j-1} &= x^{j+1}\left(\bigcap_{n \geq 0} x^n V x^{-n}\right)x^{-j-1} = \left(\bigcap_{n \geq 0} x^{n+j+1} V x^{-n-j-1}\right) \\ \Rightarrow x^{j+1}K_+x^{-j-1} &= (x^{j+1} V x^{-j-1}) \cap (x^{j+2} V x^{-j-2}) \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Logo, por (3.1) e (3.2), segue que $xK_+x^{-1} \leq x^{j+1}K_+x^{-j-1}$. $\square$

Lema 2.3.15. *Sejam K um subgrupo compacto e V um subgrupo aberto e compacto de G . Então existe um subgrupo aberto, W , de V o qual é normalizado por K . O conjunto KW é então um subgrupo aberto e compacto de G o qual contém K .*

Demonstração. Como V é um subgrupo aberto de G , temos que $K \cap V$ é um subgrupo aberto de K , na topologia relativa em K . Pela Proposição (2.3.6) temos que $K \cap V$ tem índice finito em K , isto é, o número de classes laterais de $K \cap V$ em K ,

$[K : K \cap V]$, é finito. Escolhamos $z_1, z_2, \dots, z_k \in K$ tais que $K = \bigcup_{i=1}^k z_i(K \cap V)$.

Agora, se $v \in K \cap V$, então $vVv^{-1} = V$, pois $v \in V$. Consequentemente,

$$\bigcap_{z \in K} zVz^{-1} = \bigcap_{z \in \bigcup_{i=1}^k z_i(K \cap V)} zVz^{-1} = \bigcap_{i=1}^k z_iVz_i^{-1},$$

a última igualdade decorre do fato de se dois elementos $w_1, w_2 \in z_i(K \cap V)$, assim

$w_1Vw_1^{-1} = w_2Vw_2^{-1}$, pois $w_1 = z_ia, w_2 = z_ib$, com $a, b \in K \cap V$, então $w_1Vw_1^{-1} =$

$(z_ia)V(z_ia)^{-1} = z_i(aVa^{-1})z_i^{-1} = z_iVz_i^{-1}$, pois $a \in V$. Analogamente, $w_2Vw_2^{-1} =$

$(z_ib)V(z_ib)^{-1} = z_i(bVb^{-1})z_i^{-1} = z_iVz_i^{-1}$, pois $b \in V$. Logo $w_1Vw_1^{-1} = w_2Vw_2^{-1}$. Esse

fato faz com que a interseção arbitrária infinita se torne finita. Como V é compacto,

pelo Corolário (2.3.11) temos que $z_iVz_i^{-1}$ é compacto, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Sendo assim, segue que $\bigcap_{z \in K} zVz^{-1} = \bigcap_{i=1}^k z_iVz_i^{-1}$ é compacto. Pelo Corolário

(2.3.8) sabemos também que o conjunto $\bigcap_{z \in K} zVz^{-1} = \bigcap_{i=1}^k z_iVz_i^{-1}$ é aberto e

ainda é um subgrupo de G normalizado por K , pois para qualquer $w \in K$ temos

$$w\left(\bigcap_{z \in K} zVz^{-1}\right)w^{-1} = \bigcap_{z \in K} (wzVz^{-1}w^{-1}) = \bigcap_{z' = wz \in K} (z')V(z')^{-1}.$$

Portanto, considerando $W = \bigcap_{i=1}^k z_iVz_i^{-1}$, temos que KW é um grupo aberto con-

tendo K que satisfaz as condições do lema. $\square$

Lema 2.3.16. *Sejam K um subgrupo compacto de um grupo localmente compacto H ,*

$h \in H$ satisfazendo que $hKh^{-1} \supseteq K$, e o subgrupo gerado por h tem fecho compacto.

Então $hKh^{-1} = K$.

Demonstração. Vamos provar por indução que $h^nKh^{-n} \supseteq hKh^{-1} \supseteq$

$hKh^{-1}hKh^{-1} = hKh^{-1}$. Para $n = 1$ o resultado é claro. Vamos supor que

o resultado vale para um certo número natural $n \geq 1$, então $h^{n+1}Kh^{-n-1} = h(h^nKh^{-n})h^{-1} \supseteq h(hKh^{-1})h^{-1} = h^2Kh^{-2} \supseteq hKh^{-1}$.

Pela compacidade de $\overline{\langle h \rangle}$, temos que para cada vizinhança, V , de $e \in H$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $h^n \in V$, logo para cada vizinhança W de K existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $h^nKh^{-n} \subseteq W$. Em particular se $W = K$, temos que $K \subseteq hKh^{-1} \subseteq h^nKh^{-n} \subseteq K$, e o resultado segue. $\square$

Um conceito fundamental que veremos com mais detalhes adiante é o de subgrupos tidy, é importante destacarmos que eles são subgrupos abertos e compactos. Pelo Teorema de van Dantzig, ver [van31], temos que todo grupo localmente compacto e totalmente desconexo contém um subgrupo aberto e compacto. Exploraremos mais o conceito de subgrupos tidy no Capítulo 3, onde mostraremos a existência desses subgrupos, apresentaremos sua definição e exibiremos alguns exemplos.

Capítulo 3

Subgrupos Tidy

Neste capítulo, provaremos que para cada elemento de um grupo localmente compacto e totalmente desconexo existe um subgrupo tidy associado, para isso, demonstraremos o Teorema A.

3.1 Definição e exemplos de subgrupos tidy

O intuito desta seção é explorar um pouco mais os subgrupos tidy, sendo assim, aqui apresentaremos a definição desses subgrupos e exibiremos alguns exemplos.

Definição 3.1.1. *Sejam G um grupo topológico localmente compacto e totalmente desconexo e x um elemento de G . Um subgrupo aberto e compacto U de G tal que colocando $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$ satisfaz as propriedades:*

$$(i) \ U = K_+ K_- = K_- K_+;$$

$$(ii) \ \bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} \text{ e } \bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n \text{ são subgrupos fechados de } G,$$

será chamado de **subgrupo tidy para x** ou **subgrupo tidy sob a conjugação por x** .

Os subgrupos tidy geralmente não são únicos. Observemos também que um subgrupo aberto e compacto que é normalizado por x é tidy sob a conjugação de x , e temos, neste caso, $K_+ = U = K_-$.

O próximo exemplo é apenas uma simples ilustração para familiarizarmos com a definição de subgrupo tidy.

Exemplo 3.1.2. *Sejam G um grupo topológico localmente compacto e totalmente desconexo, $x \in G$ e U um subgrupo normal aberto e compacto de G . Então $U \subseteq G$ será um subgrupo tidy sob a conjugação por x .*

Demonstração. Seja $U \trianglelefteq G$ um subgrupo aberto e compacto de G . Então U é fechado, pela Proposição 2.3.6. Como U é normal, segue que $x^n U x^{-n} = x^n U (x^n)^{-1} = U$ e $x^{-n} U x^n = x^{-n} U (x^{-n})^{-1} = U$. Logo $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n} = \bigcap_{n \geq 0} U = U$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n = \bigcap_{n \geq 0} U = U$. Assim, $U = K_+ K_- = U U = K_- K_+ = U$, isso prova o item (i) da definição 3.1.1

Agora mostraremos o item (ii) da definição 3.1.1. Como $K_+ = K_- = U$, então $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} = \bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n} = \bigcup_{n \geq 0} U = U$. Logo $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$ é fechado, pois U é fechado. Analogamente, $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n$ também é fechado. Portanto, concluímos que $U \trianglelefteq G$ é um subgrupo tidy sob a conjugação por x . $\square$

Agora exibiremos alguns exemplos um pouco mais interessantes de subgrupos tidy. Recorreremos, para isso, ao grupo topológico totalmente desconexo e compacto A ,

que já foi mencionado algumas vezes neste capítulo. Sendo assim, consideremos F um grupo finito e $A = F^{\mathbb{Z}} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} F$ munido da operação

$$f_1 *_{A} f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow F,$$

$$n \mapsto f_1(n) *_{F} f_2(n)$$

para todos $f_1, f_2 \in A$, como no Exemplo 2.1.2. Pelo Exemplo 2.2.26, temos que A é localmente compacto e totalmente desconexo. Definamos o automorfismo $\alpha : A \rightarrow A$, $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (f(n+1))_{n \in \mathbb{Z}}$ como no Exemplo 2.1.6. Observemos que o automorfismo α é um deslocamento à esquerda de $f \in F^{\mathbb{Z}}$.

Agora para cada $m \in \mathbb{Z}$ definamos

$$B_m = \{f \in A; f(n) = e, n \leq m\} \text{ e } C_m = \{f \in A; f(n) = e, n \geq m\}.$$

Esses conjuntos são fechados, pois são produtos infinitos de F com $\{e\}$, e $\alpha(B_m) = B_{m-1}$ e $\alpha(C_m) = C_{m-1}$, pelo fato de α ser um deslocamento à esquerda. Consideremos $B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n = \bigcup_{n \geq 0} \alpha^n(B_0)$ e $C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n = \bigcup_{n \geq 0} \alpha^{-n}(C_0)$. B e C são subgrupos densos em A e também localmente compactos na topologia produto.

Exemplo 3.1.3. *Seja $A = F^{\mathbb{Z}}$ como no Exemplo 2.1.2. Então temos que um subgrupo tidy para $x = (a, m)$ arbitrário no grupo localmente compacto e totalmente desconexo $A \rtimes \mathbb{Z} = \{(a, m); a \in A, m \in \mathbb{Z}\}$ é $A \times \{0\}$. Além disso, $A \times \{0\}$ é um subgrupo normal de $A \rtimes \mathbb{Z}$, com a operação no grupo definida por $(a, m) *_{\alpha} (b, n) = (a\alpha^m(b), m+n)$, com $a, b \in A$ e $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Sejam $A \times \{0\}$ um subgrupo de $A \rtimes \mathbb{Z}$ e $x \in A \rtimes \mathbb{Z}$. Considerando $x = (a, m)$, $x(y, 0)x^{-1} = (a, m) *_{\alpha} (y, 0) *_{\alpha} (a, m)^{-1} = (a\alpha^m(y), m) *_{\alpha} (\alpha^{-m}(a^{-1}), -m) =$

$(a\alpha^m(y)\alpha^m(\alpha^{-m}(a^{-1})), m-m) = (a\alpha^m(y)a^{-1}, 0) \subset A \times \{0\}$, então $x(A \times \{0\})x^{-1} \subset A \times \{0\}$. Analogamente, obtemos que $A \times \{0\} \subset x(A \times \{0\})x^{-1}$, então $A \times \{0\} = x(A \times \{0\})x^{-1}$, sendo assim, $K_+ = K_- = A \times \{0\}$. Como $\bigcup_{n \geq 0} x^n A \times \{0\}x^{-n}$ e $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} A \times \{0\}x^n$ são subgrupos fechados de $A \rtimes \mathbb{Z}$, segue que $A \times \{0\}$ é tidy para x . $\square$

Notemos que $A \rtimes \mathbb{Z}$ é um grupo localmente compacto, pois temos que A é compacto pelo Teorema de Tychonoff e para qualquer elemento $(a, m) \in A \rtimes \mathbb{Z}$ existe um compacto $A \times \{m\}$ que contém (a, m) .

Exemplo 3.1.4. *Sejam $A = F^\mathbb{Z}$ um grupo compacto e topológico totalmente desconexo e $B_m = \{f \in A; f(n) = e, n \leq m\}$ munido da operação $(a, m) *_\alpha (b, n) = (a\alpha^m(b), m+n)$, com $a, b \in A$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então um subgrupo tidy para $x = (e, 1)$ no grupo localmente compacto e totalmente desconexo $B \rtimes \mathbb{Z}$ é $B_0 \times \{0\}$.*

Demonstração. $B_0 \times \{0\}$ é um subgrupo tidy para $x = (e, 1) \in B \rtimes \mathbb{Z}$, pois $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n(B_0 \times \{0\})x^{-n} = B_0 \times \{0\}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n}(B_0 \times \{0\})x^n = \{e_A\} \times \{0\}$. Considerando $(y, 0) \in B_0 \times \{0\}$ arbitrário, temos $x^n(y, 0)x^{-n} = (e_A, 1)^n(y, 0)(e_A, 1)^{-n} = (e_A, n)(y, 0)(e_A, -n) = (e_A\alpha^n(y), n)(e_A, -n) = (\alpha^n(y)\alpha^n(e_A), n-n) = (\alpha^n(y), 0)$. Assim, $x^n(B_0 \times \{0\})x^{-n} = \{((\alpha^n(y), 0), y \in B_0\} = B_{-n} \times \{0\}$, pois $\alpha^n(y)$ é um deslocamento à esquerda de y em n posições. Logo temos que $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n(B_0 \times \{0\})x^{-n} = B_0 \times \{0\}$. Analogamente, temos que $x^{-n}(y, 0)x^n = (e_A, 1)^{-n}(y, 0)(e_A, 1)^n = (e_A, -n)(y, 0)(e_A, n) = (e_A\alpha^{-n}(y), -n)(e_A, n) = (\alpha^{-n}(y)\alpha^{-n}(e_A), -n+n) = (\alpha^{-n}(y), 0)$. Logo $x^{-n}(B_0 \times \{0\})x^n = \{((\alpha^{-n}(y), 0), y \in$

$b_0\} = B_n \times 0$, pois $\alpha^n(y)$ é um deslocamento à esquerda de y em n posições. Portanto, temos que $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n}(B_0 \times \{0\})x^n = \{e_A\} \times \{0\}$. $\square$

Exemplo 3.1.5. *Sejam A como no exemplo anterior e $C_m = \{f \in A; f(n) = e, n \geq m\}$. Então um subgrupo tidy para $x = (e_A, 1) \in C \rtimes \mathbb{Z}$ é $C_0 \times \{0\}$.*

Demonstração. $C_0 \times \{0\}$ é um subgrupo tidy para $x = (e_A, 1) \in C \rtimes \mathbb{Z}$, pois $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n(C_0 \times \{0\})x^{-n} = \{e_A\} \times \{0\}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n}(C_0 \times \{0\})x^n = C_0 \times \{0\}$. Considerando $(y, 0) \in C_0 \times \{0\}$ arbitrário, temos $x^n(y, 0)x^{-n} = (e_A, 1)^n(y, 0)(e_A, 1)^{-n} = (e_A, n)(y, 0)(e_A, -n) = (e_A\alpha^n(y), n)(e_A, -n) = (\alpha^n(y)\alpha^n(e_A), n - n) = (\alpha^n(y), 0)$. Assim, $x^n(C_0 \times \{0\})x^{-n} = \{((\alpha^n(y), 0), y \in C_0\} = C_{-n} \times \{0\}$, pois $\alpha^n(y)$ é um deslocamento à esquerda de y em n posições. Logo temos que $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n(C_0 \times \{0\})x^{-n} = \{e_A\} \times \{0\}$. Analogamente, temos que $x^{-n}(y, 0)x^n = (e_A, 1)^{-n}(y, 0)(e_A, 1)^n = (e_A, -n)(y, 0)(e_A, n) = (e_A\alpha^{-n}(y), -n)(e_A, n) = (\alpha^{-n}(y)\alpha^{-n}(e_A), -n + n) = (\alpha^{-n}(y), 0)$. Então $x^{-n}(C_0 \times \{0\})x^n = \{((\alpha^{-n}(y), 0), y \in C_0\} = C_n \times 0$, pois $\alpha^n(y)$ é um deslocamento à esquerda de y em n posições. Portanto, temos que $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n}(C_0 \times \{0\})x^n = C_0 \times \{0\}$. $\square$

A seguir estudaremos dois exemplos de subgrupos que não são tidy.

Exemplo 3.1.6. *Seja o grupo localmente compacto e totalmente desconexo $B \rtimes \mathbb{Z}$ como no Exemplo 3.1.4. Consideremos o subconjunto $B' = \{f \in B : f(n) = e, \text{ se } n < 0 \text{ ou } n = 5\} \times \{0\}$ de $B \rtimes \mathbb{Z}$ o qual é um subgrupo, pois se $(f_1(n), 0), (f_2(n), 0) \in B'$, então $(f_1(n), 0) *_{\alpha} (f_2(n), 0)^{-1} = (f_1(n) *_{\alpha} \alpha^0(f_2(n)^{-1}), 0) = (f_1(n) *_{\alpha} (f_2(n)^{-1}), 0) \in B'$, pois $f_1(n) = f_2(n)^{-1} = e$ se $n < 0$ ou $n = 5$. Temos que o conjunto $B' \times \{0\}$ é*

um subgrupo aberto, pois B' é união de produtos de $\{e\}$ com F , os quais são abertos na topologia discreta. E é um subgrupo compacto de $B \rtimes \mathbb{Z}$, pois $\{e\}$ é fechado e B' é produto de $\{e\}$ com F , assim, é compacto pelo Teorema de Tychonoff.

Contudo, esse subgrupo não é tidy para $(e_A, 1)$. Pois, consideremos $y \in B'$ arbitrário, então $x^n(y, 0)x^{-n} = (e_A, 1)^n(y, 0)(e_A, 1)^{-n} = (e_A, n)(y, 0)(e_A, -n) = (e_A \alpha^n(y), n)(e_A, -n) = (\alpha^n(y) \alpha^n(e_A), n - n) = (\alpha^n(y), 0)$, como a quinta coordenada de y sempre tem e , e $\alpha^n(y)$ é um deslocamento à esquerda, temos que a interseção $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n(B' \times \{0\})x^{-n} = B_5$. Analogamente, $K_- = (e_A, \{0\})$, e temos que $B' \neq K_+ K_-$. Portanto, B' não é um subgrupo tidy para x .

Exemplo 3.1.7. Seja $A \rtimes \mathbb{Z}$ um grupo localmente compacto e totalmente desconexo como no Exemplo 3.1.3. Um subgrupo aberto e compacto de $A \rtimes \mathbb{Z}$ que não é tidy sob a conjugação de x é $A' = \{f \in A : f(n) = e, -5 \leq n \leq 3\} \times \{0\}$. Nesse caso temos que $K_+ = B_3 \times \{0\}$, $K_- = C_{-5} \times \{0\}$ e $A' = K_+ K_- = K_- K_+$, pois $B_3 \times \{0\}$ e $C_{-5} \times \{0\}$ são subgrupos de A' , então $(B_3 \times \{0\})(C_{-5} \times \{0\})$ e $(C_{-5} \times \{0\})(B_3 \times \{0\})$ são subgrupos de A' e se $f \in A'$, assim,

$$\begin{aligned}
 f &= ((\cdots, f(-7), \underbrace{f(-6)}_{-6^\circ}, e, e, e, e, e, \underbrace{e}_{0^\circ}, e, e, e, \underbrace{f(4)}_{4^\circ}, f(5), \cdots), 0) = \\
 &((\cdots, e, e, \underbrace{e}_{0^\circ}, e, e, e, \underbrace{f(4)}_{4^\circ}, f(5), \cdots), 0) *_{A} \\
 &((\cdots, f(-7), \underbrace{f(-6)}_{-6^\circ}, \cdots, \underbrace{e}_{0^\circ}, e, e, e, \underbrace{e}_{4^\circ}, e, \cdots), 0) = \\
 &((\cdots, e, e, e, \underbrace{e}_{0^\circ}, e, e, e, \underbrace{f(4)}_{4^\circ}, f(5), \cdots) *_{A} \\
 &(\cdots, f(-7), \underbrace{f(-6)}_{-6^\circ}, e, e, e, \underbrace{e}_{0^\circ}, e, e, e, \underbrace{e}_{4^\circ}, e, \cdots), 0) \in (B_3 \times \{0\})(C_{-5} \times \{0\}) = K_+ K_-.
 \end{aligned}$$

Analogamente, $f \in (C_{-5} \times \{0\})(B_3 \times \{0\}) = K_-K_+$. Contudo, temos que $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$ é a união de deslocamentos à esquerda de B_3 , ou seja, $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} = B$, que não é fechado. Portanto, A' não é tidy para x .

3.2 A existência de subgrupos tidy

Nesta seção, mostraremos a existência de subgrupos tidy, para tal finalidade, provaremos o Teorema A, cujo enunciado é lembrado a seguir.

Teorema A [Wil94]. *Para cada elemento x em um grupo localmente compacto e totalmente desconexo G , existe um subgrupo aberto compacto U de G tal que colocando $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$ tem-se*

$$i) \ U = K_+ K_- = K_- K_+;$$

$$ii) \ \bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} \text{ e } \bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n \text{ são subgrupos fechados de } G.$$

Uma outra maneira de definirmos os subgrupos tidy é a partir do Teorema A, dizemos que os subgrupos abertos e compactos U satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema A são ditos tidy sob a conjugação de x ou tidy para x .

Antes de demonstrarmos o Teorema A, provaremos 14 resultados distribuídos na maior parte em lemas. Alguns lemas serão utilizados apenas nos resultados seguintes, sendo assim, em muitos casos, não há comentários entre os resultados. Quando nada for dito, consideraremos as seguintes hipóteses: o grupo G é um grupo localmente compacto e totalmente desconexo; x é um elemento de G .

Lema 3.2.1. *Sejam G um grupo localmente compacto e totalmente desconexo, x um elemento de G , V um subgrupo aberto e compacto de G . Considere $V_k = \bigcap_{0 \leq n \leq k} x^n V x^{-n}$, $k \in \mathbb{N}$, $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n V x^{-n}$, $U = V_k$, $U_j = V_{k+j} = \bigcap_{0 \leq m \leq j} x^m U x^{-m}$, $j \in \mathbb{N}^*$ e $y \in U$. Defina para cada inteiro positivo j ,*

$$C_j = \{z \in K_+ \mid x^j y x^{-j} \in x^j z x^{-j} U_j\},$$

então $C_{j+1} \subseteq C_j$.

Demonstração. Observemos que $C_{j+1} = \{z \in K_+ \mid x^{j+1} y x^{-j-1} \in x^{j+1} z x^{-j-1} U_{j+1}\}$,

e seja $z \in C_{j+1}$. Então $z \in K_+$ e existe $u_{j+1} \in U_{j+1}$, tal que

$$\begin{aligned} x^{j+1} y x^{-j-1} &= x^{j+1} z x^{-j-1} u_{j+1} \\ x(x^j y x^{-j}) x^{-1} &= x(x^j z x^{-j}) x^{-1} u_{j+1} \\ x^j y x^{-j} &= (x^j z x^{-j})(x^{-1} u_{j+1} x), \end{aligned}$$

onde $x^{-1} u_{j+1} x = u_j \in U_j$. Pois temos $u_{j+1} \in U_{j+1} = V_{k+j+1} = \bigcap_{0 \leq m \leq j+1} x^m U x^{-m}$,

logo $u_{j+1} \in x^m U x^{-m}$, para cada m , com $0 \leq m \leq j+1$. Então temos que para cada

$m = 0, \dots, j+1$, existe $w_i \in U$, com $i = 0, \dots, j+1$ tal que

$$u_{j+1} = x^0 w_0 x^{-0}, u_{j+1} = x^1 w_1 x^{-1}, u_{j+1} = x^2 w_2 x^{-2}, \dots, u_{j+1} = x^{j+1} w_{j+1} x^{-j-1}.$$

Sendo assim,

$$x^{-1} u_{j+1} x^1 = x^0 w_1 x^{-0} \Rightarrow x^{-1} u_{j+1} x^1 \in x^0 U x^{-0} = U$$

$$x^{-1} u_{j+1} x^1 = x^1 w_2 x^{-1} \Rightarrow x^{-1} u_{j+1} x^1 \in x^1 U x^{-1}$$

$$\vdots$$

$$x^{-1}u_{j+1}x^1 = x^j w_{j+1} x^{-j} \Rightarrow x^{-1}u_{j+1}x^1 \in x^j U x^{-j}.$$

Então $x^{-1}u_{j+1}x^1 \in \bigcap_{0 \leq m \leq j} x^m U x^{-m} = U_j$, isto é, $x^{-1}u_{j+1}x^1 = u_j \in U_j$ como queríamos mostrar, logo $z \in C_j$. Portanto, $C_{j+1} \subseteq C_j$. $\square$

Lema 3.2.2. *Sejam G um grupo localmente compacto e totalmente desconexo, $x \in G$ e V um subgrupo aberto e compacto de G . Então existe um k inteiro tal que, colocando $U = \bigcap_{0 \leq n \leq k} x^n V x^{-n}$, temos*

$$U = K_+ K_- = K_- K_+,$$

onde $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$.

Demonstração. Sejam $V_k = \bigcap_{0 \leq n \leq k} x^n V x^{-n}$ e $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n V x^{-n} = \bigcap_{k \geq 0} V_k$. Então $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \cdots \supseteq V_{k-1} \supseteq V_k$, e pelo Corolário 2.3.12 temos que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $x^n V x^{-n}$ é compacto, e como a interseção finita de conjuntos compactos contidos em um espaço Hausdorff é um compacto, pelo Corolário 2.2.21, segue que V_k é compacto, $\forall k \geq 0$. Além disso, V_k é um subgrupo aberto, então é fechado pela Proposição 2.3.6 item (1), e a interseção arbitrária de conjuntos fechados é fechada, então, pela Proposição 2.2.15, segue que $K_+ = \bigcap_{k \geq 0} V_k$ é um subgrupo compacto de V . Temos $x K_+ x^{-1} = \bigcap_{k \geq 0} x V_k x^{-1}$, onde $\{x V_k x^{-1}\}_{k \geq 0}$ é uma sequência decrescente de subgrupos abertos e compactos, os dois últimos fatos decorrem dos resultados dos Corolários 2.3.8 e 2.3.11, respectivamente, e é decrescente, porque $V_k \supseteq V_{k+1}$, então $x V_k x^{-1} \supseteq x V_{k+1} x^{-1}$. Como V é um subgrupo aberto de G , segue que os conjuntos $(x K_+ x^{-1}) V$ e $V (x K_+ x^{-1})$ são vizinhanças abertas de $x K_+ x^{-1}$, logo existe

um inteiro, k , tal que xV_kx^{-1} está contido em $(xK_+x^{-1})V$ e $V(xK_+x^{-1})$. Sendo assim, considere $y \in xV_kx^{-1}$, então existem $z \in xK_+x^{-1}$ e $v \in V$ tais que $y = zv$. Segue que $v = z^{-1}y$ pertence a $V \cap xV_kx^{-1} = V_{k+1}$. Logo $xV_kx^{-1} \subseteq (xK_+x^{-1})V_{k+1}$, ver Proposição 2.1.16. Como xK_+x^{-1} e V_{k+1} são subgrupos de xV_kx^{-1} , segue que $(xK_+x^{-1})V_{k+1} \subseteq xV_kx^{-1}$, então $xV_kx^{-1} = (xK_+x^{-1})V_{k+1}$.

Agora $xV_{k+j}x^{-1}$ também está contido em $(xK_+x^{-1})V$, pois $xV_{k+j}x^{-1} \subseteq xV_kx^{-1}$ e $xV_kx^{-1} \subseteq (xK_+x^{-1})V$, então o mesmo argumento mostra que

$$xV_{k+j}x^{-1} = (xK_+x^{-1})V_{k+j+1}, \quad (j \geq 0) \quad (2.1)$$

Suponha que para algum $j \geq 0$ temos $x^jV_kx^{-j} = (x^jK_+x^{-j})V_{k+j}$. Então

$$\begin{aligned} x x^j V_k x^{-j} x^{-1} = x^{j+1} V_k x^{-j-1} &= x \left((x^j K_+ x^{-j}) V_{k+j} \right) x^{-1} \\ &= (x^{j+1} K_+ x^{-j}) (V_{k+j} x^{-1}) \\ &= (x^{j+1} K_+ x^{-j} x^{-1}) (x V_{k+j} x^{-1}) \\ &= (x^{j+1} K_+ x^{-j-1}) (x V_{k+j} x^{-1}) \\ &= (x^{j+1} K_+ x^{-j-1}) (x K_+ x^{-1}) V_{k+j+1}, \text{ pela Equação (2.1),} \\ &= (x^{j+1} K_+ x^{-j-1}) V_{k+j+1}, \end{aligned}$$

pois xK_+x^{-1} é subgrupo de $x^{j+1}K_+x^{-j-1}$.

Como pela Equação (2.1) temos que $xV_kx^{-1} = (xK_+x^{-1})V_{k+1}$, e segue por indução que, para todo $j \geq 0$,

$$x^j V_k x^{-j} = (x^j K_+ x^{-j}) V_{k+j}, \quad (2.2)$$

pois como K_+ é um subgrupo de V_k , temos que $V_k = (K_+)V_k$, quando $j = 0$.

De maneira análoga, usamos o fato de $xV_kx^{-1} \subseteq V(xK_+x^{-1})$ e encontramos que,

$\forall j \geq 0$,

$$x^j V_k x^{-j} = V_{k+j}(x^j K_+ x^{-j}). \quad (2.3)$$

Agora sejam $U = V_k$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$. Então K_- é um subgrupo compacto de U . Colocando $U_j = V_{k+j} = \bigcap_{0 \leq m \leq j} x^m U x^{-m}$, cada U_j é um subgrupo aberto e compacto de U e $\bigcap_{j \geq 0} U_j = K_+$, segue que K_+ é subgrupo de U . Portanto, $K_+ K_- \leq U$.

Segue pelas Equações (2.2) e (2.3) que

$$x^j U x^{-j} = (x^j K_+ x^{-j}) U_j = U_j (x^j K_+ x^{-j}). \quad (2.4)$$

Seja $y \in U$, e para cada inteiro j não negativo, definamos

$$C_j = \{z \in K_+; x^j y x^{-j} \in x^j z x^{-j} U_j\}.$$

Logo C_j é um subconjunto compacto de K_+ e não vazio por (2.4). C_j é compacto, pois se $x^j y x^{-j} \in x^j z x^{-j} U_j$, temos que $z = y x^{-j} u_j^{-1} x^j$, onde $u_j \in U_j$. Então C_j pode ser escrito como $C_j = \{y x^{-j} u_j^{-1} x^j, u_j \in U_j\} = y x^{-j} U_j x^j$, como $U_j = V_{k+j}$ é compacto e a conjugação de compactos é compacta, pelo Corolário 2.3.11. Temos que C_j é compacto por ser a translação de um compacto por um elemento y , ver Corolário 2.3.10. Como $C_{j+1} \subseteq C_j$, pelo Lema 3.2.1, e pelo Teorema dos compactos encaixados segue que $\bigcap_{j \geq 0} C_j \neq \emptyset$. Tomemos z nessa interseção, então $z \in C_j$, para cada $j > 0$. Então, para $u_j \in U_j$ e $z \in K_+$, temos $x^j y x^{-j} = x^j z x^{-j} u_j$, logo $x^j z^{-1} y x^{-j} = u_j \in U_j \subseteq U$. Sendo assim, temos que $u_j = x^j z^{-1} y x^{-j} \in U$, então $z^{-1} y = x^{-j} u_j x^j = r \in \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n = K_-$, logo $y = zr \in U$, e segue que $U \leq K_+ K_-$. Portanto, $U = K_+ K_-$. Analogamente, $U = K_- K_+$ $\square$

É importante ressaltarmos, apesar de termos mencionado isso anteriormente, que o intuito deste estudo é explorar um pouco mais sobre a estrutura de grupos localmente compactos e totalmente desconexos, assim, mesmo que não enfatizemos em todos os resultados, é válido evidenciarmos que o grupo G é um grupo topológico localmente compacto e totalmente desconexo e x é um elemento de G .

O próximo lema nos fornece um resultado que, diversas vezes, será utilizado ao longo deste trabalho.

Lema 3.2.3. *Sejam U um subgrupo aberto e compacto de G e $x \in G$. Considere $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$. Então $K_+ \subseteq x K_+ x^{-1}$ e $K_- \subseteq x^{-1} K_- x$.*

Demonstração. Tome $a \in K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, então $a \in x^n U x^{-n}, \forall n \geq 0$. Isto é, para cada n existe $u_n \in U$ tal que $a = x^n u_n x^{-n} = x x^{n-1} u_n x^{-n+1} x^{-1}$, logo $a \in x x^{n-1} U x^{-n+1} x^{-1}$. Sendo assim, temos $a = x x^n u_{n+1} x^{-n} x^{-1}, \forall n \geq 0$, e segue que $a \in x x^n U x^{-n} x^{-1}$. Então $a \in \bigcap_{n \geq 0} x x^n U x^{-n} x^{-1} = x (\bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}) x^{-1} = x K_+ x^{-1}$. Portanto, $K_+ \subseteq x K_+ x^{-1}$. Analogamente, podemos provar que $K_- \subseteq x^{-1} K_- x$. $\square$

Daqui até o final dessa seção, vamos supor que $U = \bigcap_{0 \leq n \leq k} x^n V x^{-n}$, $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$.

Lema 3.2.4. *Suponha que $w \in G$ seja tal que $x^m w x^{-m}$ e $x^n w x^{-n}$ pertencem a U , onde $m \leq n$. Então $w = yz$, onde*

$$x^k y x^{-k} \in U \text{ para } k \leq m \text{ e } k \geq n$$

$$e$$

$$x^k z x^{-k} \in U \text{ para } m \leq k \leq n.$$

Demonstração. Como $x^mwx^{-m} \in U = K_+K_-$, temos $x^mwx^{-m} = uv$, onde u está em K_+ e v em K_- . Como $m \leq n$, então existe $j \geq 0$, tal que $j = n - m \geq 0$. Logo temos que $x^jx^mwx^{-m}x^{-j} = (x^jux^{-j})(x^jvx^{-j}) = x^nw x^{-n}$, então $x^jux^{-j} = (x^nw x^{-n})(x^jv^{-1}x^{-j})$. Como $x^nw x^{-n}$ está em U por hipótese, e $x^jv^{-1}x^{-j}$ em $K_- \subseteq U$, pois $v \in K_-$, logo $v^{-1} \in K_-$, e pelo Lema 3.2.3, segue que $v^{-1} \in x^{-j}K_-x^j$, sendo assim, $x^jv^{-1}x^{-j} \in K_-$. Consequentemente, $x^jux^{-j} = st \in U = K_-K_+$, onde s está em K_- e t em K_+ .

Coloquemos $y = x^{-n}sx^n$ e $z = (x^{-n}tx^n)(x^{-m}vx^m)$. Como $x^mwx^{-m} = uv$ e $u = x^{-j}stx^j$, segue que $w = yz$. Além disso,

$$x^myx^{-m} = x^{-j}sx^j = ux^{-j}t^{-1}x^j,$$

onde u e t pertencem a K_+ , então x^myx^{-m} está em K_+ , pois $u \in K_+$, e $x^{-j}t^{-1}x^j \in K_+$, pois $t^{-1} \in K_+ \subseteq x^jK_+x^{-j}$. E segue que x^kyx^{-k} está em U sempre que $k \leq m$. De maneira semelhante, seja $x^nyx^{-n} = s$ pertencente a $K_- \subseteq x^{-i}K_-x^{-i}$, onde $i \in \mathbb{N}$, implica que $x^{n+i}yx^{-n-i} \in K_- \subseteq U$. Considerando $k = n + i$ temos que x^kyx^{-k} está em U para todo $k \geq n$.

Finalmente, se $m \leq k \leq n$, então

$$\begin{aligned} x^kzx^{-k} &= x^k(x^{-n}tx^n)(x^{-m}vx^m)x^{-k} \\ &= x^k(x^{-n}tx^n)(x^{-k}x^{+k})(x^{-m}vx^m)x^{-k} \\ &= (x^{-(n-k)}tx^{n-k})(x^{k-m}vx^{-(k-m)}), \end{aligned}$$

onde $x^{-(n-k)}tx^{n-k}$ está em K_+ , e $x^{k-m}vx^{-(k-m)}$ está em K_- . Portanto, x^kzx^{-k} encontra-se em $K_+K_- = U$. □

A seguir demonstraremos um lema que apesar de ter uma demonstração extensa pode ser considerado, neste trabalho, o lema com a prova mais bonita estruturalmente.

Lema 3.2.5. *a) O subgrupo $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$ é fechado se, e somente se,*

$$(\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}) \cap U = K_+.$$

b) O subgrupo $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$ é fechado se, e somente se, $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n$ é fechado.

Demonstração. a) Se $(\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}) \cap U = K_+$ e K_+ é um grupo compacto de um grupo topológico em um espaço Hausdorff, pela Proposição 2.2.18 temos que K_+ é fechado. Como o elemento neutro, e , do subgrupo K_+ pertence ao subgrupo $(\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n})$, e U é vizinhança de e , segue que $(\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n})$ é localmente fechado em e , pois $(\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}) \cap U = K_+$ é fechado, ver definição 2.2.9. Consequentemente, o subgrupo $\bigcup_{n \geq 0} (x^n K_+ x^{-n})$ é fechado pela Proposição 2.3.3.

Se $(\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}) \cap U \neq K_+$, logo existe pelo menos um elemento $g \in (\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}) \cap U$ tal que $g \notin K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$. Como $g \in \bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$, então existem um número natural i e um $w \in K_+$ tais que $g = x^i w x^{-i} \in U$, e existe um número natural j tal que $g = x^i w x^{-i} \notin x^j U x^{-j}$, pois $g \notin K_+$. Sendo assim, $x^{i-j} w x^{j-i} \notin U$.

Notemos que $m = i - j > 0$, pois se $i = j$ teríamos que $w \notin U$, mas $w \in K_+$. Agora se $i - j < 0$ teríamos $x^{i-j} w x^{j-i} \in K_+ \subseteq U$, pelo Lema

3.2.3, pois $w \in K_+$, contudo, $x^{i-j}wx^{j-i} \notin U$. Sendo assim, temos $m > 0$ e $x^mwx^{-m} \notin U$, com $w \in K_+ \subseteq U$. Como $x^iwx^{-i} \in U$ e $x^0wx^{-0} \in U$, temos pelo Lema 3.2.4 que $w = yz$ com $x^kyx^{-k} \in U$ para $k \leq 0$ e $k \geq i$ e $x^kzx^{-k} \in U$, para $0 \leq k \leq i$, além disso, decorre da demonstração do mesmo lema que $y \in K_+$ e $x^iyx^{-i} \in K_-$. Observemos que $x^myx^{-m} \notin U$, pois temos $x^mwx^{-m} = x^myzx^{-m} = (x^myx^{-m})(x^mzx^{-m})$, e $x^mwx^{-m} \notin U$, como $m = i - j < i$, pelo Lema 3.2.4, segue que $x^mzx^{-m} \in U$, logo $x^myx^{-m} \notin U$.

Temos que a sequência $S = \{y(x^iyx^{-i})(x^{2i}yx^{-2i}) \cdots (x^{li}yx^{-li})\}_{l \geq 0}$ está contida em $(\bigcup_{k \geq 0} x^kK_+x^{-k}) \cap U$. Como U é compacto, a sequência possui um ponto de acumulação, u , pertencente a U . Considere uma subsequência a_l de S que converge para u . Seja q tal que $m = il_0 - q$, q existe, pois $0 < m < i$, com $q \geq 0$, e $l_0 > i - m$ fixado. Então

$$\begin{aligned} x^{-q}a_lx^q &= x^{-q} \left(y(x^iyx^{-i})(x^{2i}yx^{-2i}) \cdots (x^{li}yx^{-li}) \right) x^q \\ &= \underbrace{(x^{-q}yx^q)}_{\in U} \underbrace{(x^{-q+i}yx^{q-i})}_{\in U} \underbrace{(x^{2i-q}yx^{-2i+q})}_{\in U} \cdots \underbrace{(x^{l_0i-q}yx^{-l_0i+q})}_{\notin U} \cdots \underbrace{(x^{li-q}yx^{-li+q})}_{\in U} \end{aligned}$$

onde $x^{-q}yx^q, x^{-q+i}yx^{q-i}, \dots, x^{l_0(i-1)-q}yx^{-l_0(i-1)+q} \in U$ e

$x^{l_0(i+1)-q}yx^{-l_0(i+1)+q}, \dots, x^{li-q}yx^{-li+q} \in U$, pelo Lema 3.2.4, e o elemento

$x^{l_0i-q}yx^{-l_0i+q} = x^myx^{-m} \notin U$. Logo $x^{-q}a_lx^q \notin U$, para l suficientemente

grande. Como $a_l \rightarrow u$ e U é aberto, temos uma sequência de elementos

$x^{-q}a_lx^q$ contidos no fechado U^c . Logo temos que o limite da sequência $x^{-q}a_lx^q$,

quando $l \rightarrow +\infty$, é $x^{-q}ux^q$ e não pertence a U , para infinitos valores de q

quando $q \rightarrow \infty$. Consequentemente, u não pertence a $\bigcup_{k \geq 0} x^kK_+x^{-k}$, pois

suponhamos que $u \in \bigcup_{k \geq 0} x^kK_+x^{-k}$, logo existe $p \geq 0$ tal que $u \in x^pK_+x^{-p}$,

isto é, $x^{-p}ux^p = k_+ \in K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, então $x^{-p-n}ux^{p+n} \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mas isso não pode acontecer, pois existem infinitos valores de q com $q \rightarrow +\infty$ com $x^{-q}ux^q \notin U$. Sendo assim, existe um ponto de acumulação de uma sequência de elementos de $\bigcup_{k \geq 0} x^k K_+ x^{-k}$ que não pertence ao conjunto, portanto, $\bigcup_{k \geq 0} x^k K_+ x^{-k}$ não é fechado.

b) Provaremos que se $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n$ é fechado, então $\bigcup_{k \geq 0} x^k K_+ x^{-k}$ é fechado.

Se $\bigcup_{k \geq 0} x^k K_+ x^{-k}$ não é fechado, então pelo item anterior sabemos que $(\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}) \cap U$ contém propriamente K_+ , e aplicando o Lema 3.2.4 temos que existe um $y \in K_+$ tal que $x^m y x^{-m} \notin U$ e $x^n y x^{-n} \in K_-$, para algum $n > m > 0$, então $y \in x^{-n} K_- x^n$, logo $y \in (\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n) \cap U$, mas $y \notin K_-$, pois se $y \in K_-$ teríamos que $x^m y x^{-m} \in K_-$, o que é uma contradição, pois $x^m y x^{-m} \notin U$. Logo $(\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n) \cap U$ contém propriamente K_- . Logo existe pelo menos um elemento $h \in (\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n) \cap U$ tal que $h \notin K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$. Como $h \in \bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n$, então existem um número natural i e um $\omega \in K_-$ tais que $h = x^{-i} \omega x^i \in U$, e existe um número natural j tal que $h = x^{-i} \omega x^i \notin x^{-j} U x^j$, pois $h \notin K_-$. Sendo assim, $x^{-i+j} \omega x^{i-j} \notin U$. Notemos que $m' = -i + j < 0$, pois se $i = j$ teríamos que $\omega \notin U$, mas $\omega \in K_-$. Agora se $-i + j > 0$ teríamos $x^{-i+j} \omega x^{i-j} \in K_- \subseteq U$, pelo Lema 3.2.3, pois $\omega \in K_-$, contudo, $x^{-i+j} \omega x^{i-j} \notin U$. Como $x^{-i} \omega x^i \in U$ e $x^{-0} \omega x^0 \in U$, temos pelo Lema 3.2.4 que $\omega = y_\omega z_\omega$ com $x^{-r} y_\omega x^r \in U$ para $r \leq -i$ e $r \geq 0$ e $x^r z_\omega x^{-r} \in U$, para $-i \leq r \leq 0$, além disso, decorre da demonstração do mesmo lema que $x^{-i} y_\omega x^i \in K_+$ e $y_\omega \in K_-$.

Observemos que $x^{m'}y_\omega x^{-m'} \notin U$, pois temos $x^{m'}\omega x^{-m'} = x^{m'}y_\omega z_\omega x^{-m'} = (x^{m'}y_\omega x^{-m'})(x^{m'}z_\omega x^{-m'})$, e $x^{m'}\omega x^{-m'} \notin U$, como $m' = -i + j < 0$, temos $-i \leq m' \leq 0$, e pelo Lema 3.2.4, segue que $x^{m'}z_\omega x^{-m'} \in U$, logo $x^{m'}y_\omega x^{-m'} \notin U$. Sendo assim, temos a sequência $S = \{y_\omega(x^{-i}y_\omega x^i)(x^{-2i}y_\omega x^{2i}) \cdots (x^{-li}y_\omega x^{li})\}_{l \geq 0}$ contida em $(\bigcup_{k \geq 0} x^{-k}K_-x^k) \cap U$. Como U é compacto, essa sequência possui ponto de acumulação, digamos $u \in U$. Consideremos uma subsequência a_l de S que convirja para u , e seja $k = m' + il_0$, com $l_0 \in \mathbb{N}$, $l_0 > -m'$ e $l_0 > m' + i$ fixado. Então

$$\begin{aligned} x^k a_l x^{-k} &= x^k (y_\omega(x^{-i}y_\omega x^i)(x^{-2i}y_\omega x^{2i}) \cdots (x^{-li}y_\omega x^{li})) x^{-k} = \\ &= (x^k y_\omega x^{-k})(x^{k-i}y_\omega x^{-k+i})(x^{-2i+k}y_\omega x^{2i-k}) \cdots (x^{-l_0 i+k}y_\omega x^{l_0 i-k}) \cdots (x^{-li+k}y_\omega x^{li-k}) \end{aligned}$$

onde $x^k y_\omega x^{-k}, x^{k-i}y_\omega x^{-k+i}, \dots, x^{-l_0(i-1)+k}y_\omega x^{l_0(i-1)-k} \in U$, e $x^{-l_0(i+1)+k}y_\omega x^{l_0(i+1)-k}, \dots, x^{-li+k}y_\omega x^{li-k} \in U$, pelo Lema 3.2.4. Como apenas o elemento $x^{-l_0 i+k}y_\omega x^{l_0 i-k} = x^{-m'}y_\omega x^{m'} \notin U$, segue que $x^k a_l x^{-k} \notin U$, para l suficientemente grande. Como $a_l \rightarrow u$ e U é um subgrupo aberto, então existe uma sequência de elementos $x^k a_l x^{-k}$ contidos em U^c , o qual é um conjunto fechado. Logo temos que o limite da sequência $x^k a_l x^{-k}$, quando $l \rightarrow +\infty$, é $x^k u x^{-k}$, e não pertence a U , para infinitos valores de k quando $k \rightarrow \infty$. Sendo assim, temos que u não pertence a $\bigcup_{k \geq 0} x^{-k}K_-x^k$, logo existe um ponto de acumulação de elementos de $\bigcup_{k \geq 0} x^{-k}K_-x^k$ que não está no conjunto, portanto, $\bigcup_{k \geq 0} x^{-k}K_-x^k$ não é fechado. Assim concluímos que $\bigcup_{k \geq 0} x^k K_+ x^{-k}$ é fechado.

Para provarmos que se $\bigcup_{k \geq 0} x^k K_+ x^{-k}$ é fechado, então $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n$ é fechado, é suficiente trocar x por x^{-1} na demonstração acima.

□

Lema 3.2.6. *O subgrupo $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_- x^{-n}$ é fechado se, e somente se, $(\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_+ x^n) \cap U = K_-$.*

Demonstração. A demonstração é similar a do Lema 3.2.5, basta substituir x por x^{-1} .

□

Agora definiremos o subgrupo $\mathcal{L}$ de G , esse nos auxiliará no processo de construção da prova do Teorema A.

Definição 3.2.7. *Define-se o conjunto $\mathcal{L}$ por*

$$\mathcal{L} = \{z \in G \mid \exists m, n \in \mathbb{Z} \text{ tais que } x^k z x^{-k} \in U \text{ sempre que } k \leq m \text{ ou } k \geq n\}$$

A condição definindo $\mathcal{L}$ em 3.2.7 é equivalente à existência de inteiros m e n tais que $x^m z x^{-m} \in K_+$ e $x^n z x^{-n} \in K_-$.

Lema 3.2.8. *Sejam G um grupo totalmente desconexo e localmente compacto, $x \in G$ e $\mathcal{L}$ como na Definição 3.2.7. Então*

- (i) *O conjunto $\mathcal{L}$ é subgrupo de G ;*
- (ii) *O conjunto $\mathcal{L}$ é invariante sob a conjugação de x .*

Demonstração.

(i) Sejam $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$, então $\exists m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $x^{m_1}z_1x^{-m_1} \in K_+$ e $x^{n_1}z_1x^{-n_1} \in K_-$, $x^{m_2}z_2x^{-m_2} \in K_+$ e $x^{n_2}z_2x^{-n_2} \in K_-$. Então $x^{m_2}z_2^{-1}x^{-m_2} \in K_+$ e $x^{n_2}z_2^{-1}x^{-n_2} \in K_-$, pois K_+ e K_- são subgrupos de U .

Consideremos $m_1 < m_2$ e $n_1 < n_2$. Como $m_1 < m_2$, então $x^{m_1}z_2^{-1}x^{-m_1} \in K_+$, pois $x^{-1}K_+x \subset K_+$. Então

$$x^{m_1}z_1x^{-m_1}x^{m_1}z_2^{-1}x^{-m_1} = x^{m_1}z_1z_2^{-1}x^{-m_1} \in K_+$$

e como $n_1 < n_2$, segue que $x^{n_2}z_1x^{-n_2} \in K_-$, pois $xK_-x^{-1} \subset K_-$. Logo

$$x^{n_2}z_1x^{-n_2}x^{n_2}z_2^{-1}x^{-n_2} = x^{n_2}z_1z_2^{-1}x^{-n_2} \in K_-$$

Portanto, existem m_1 e $n_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $x^{m_1}z_1z_2^{-1}x^{-m_1} \in K_+$ e $x^{n_2}z_1z_2^{-1}x^{-n_2} \in K_-$.

Analogamente, se $m_1 < m_2$ e $n_2 < n_1$, $m_2 < m_1$ e $n_1 < n_2$, $m_2 < m_1$ e $n_2 < n_1$.

Segue que $\mathcal{L}$ é subgrupo de G .

(ii) Provaremos que $\mathcal{L}$ é invariante sob a conjugação de x , isto é $x^{-1}\mathcal{L}x = \mathcal{L}$. Se $z \in x^{-1}\mathcal{L}x$, então $xzx^{-1} \in \mathcal{L}$, sendo assim, existem m e $n \in \mathbb{Z}$ tais que $x^m(xzx^{-1})x^{-m} \in K_+$ e $x^n(xzx^{-1})x^{-n} \in K_-$. Então, $x^{m+1}zx^{-m-1} \in K_+$ e $x^{n+1}zx^{-n-1} \in K_-$, logo existem inteiros $m+1$ e $n+1$ tais que $x^{m+1}zx^{-m-1} \in K_+$ e $x^{n+1}zx^{-n-1} \in K_-$, então $z \in \mathcal{L}$. Portanto, $x^{-1}\mathcal{L}x \subset \mathcal{L}$. Além disso, temos $\mathcal{L} \subset x^{-1}\mathcal{L}x$, pois se $z \in \mathcal{L}$, logo existem m e $n \in \mathbb{Z}$ tais que $x^mzx^{-m} \in K_+$ e $x^nzx^{-n} \in K_-$, então $x^{m-1}(xzx^{-1})x^{-m+1} \in K_+$ e $x^{n-1}(xzx^{-1})x^{-n+1} \in K_-$. Considerando $m' = m-1 \in \mathbb{Z}$ e $n' = n-1 \in \mathbb{Z}$, segue que $xzx^{-1} \in \mathcal{L}$, logo $z \in x^{-1}\mathcal{L}x$. Portanto, $\mathcal{L} \subset x^{-1}\mathcal{L}x$. $\square$

O resultado a seguir é um corolário do Lema 3.2.5, o qual é crucial para a demonstração do Teorema A.

Corolário 3.2.9. *Se $\mathcal{L} = K_+ \cap K_-$, então U é tidy.*

Demonstração. Temos que $U = K_+K_- = K_-K_+$, logo para provarmos que U é tidy, será suficiente mostrarmos que $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$ e $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n$ são subgrupos fechados de G . Pelo Lema 3.2.5 isso é equivalente a provarmos que $\bigcup_{n \geq 0} (x^n K_+ x^{-n}) \cap U = K_+$. Sendo assim, suponhamos que $\bigcup_{n \geq 0} (x^n K_+ x^{-n}) \cap U \neq K_+$, pela demonstração do Lema 3.2.5 temos que existe $y \in K_+$ com $x^m y x^{-m} \notin U$, mas $x^n y x^{-n} \in K_-$, onde $n > m > 0$, então $y \in \mathcal{L}$. Temos pela hipótese que $\mathcal{L} = K_+ \cap K_-$, portanto, $y \in K_-$, isso quer dizer $x^m y x^{-m} \in K_-$, $\forall m \in \mathbb{N}$, contudo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m y x^{-m} \notin U$. Logo temos uma contradição, e segue que $\bigcup_{n \geq 0} (x^n K_+ x^{-n}) \cap U = K_+$. De maneira similar mostramos que $\bigcup_{n \geq 0} (x^{-n} K_- x^n)$ é fechado. Portanto, U é tidy. $\square$

Definição 3.2.10. *Para cada $z \in \mathcal{L}$ o **exposure** de z é o menor inteiro $e(z) = n - m - 1$, onde $n > m$, $x^m z x^{-m} \in K_+$ e $x^n z x^{-n} \in K_-$.*

Definição 3.2.11. *Define-se o conjunto ε por $\varepsilon = (xK_+x^{-1} \setminus K_+) \cap \mathcal{L}$*

Proposição 3.2.12. *Cada elemento de $\mathcal{L} \setminus (K_+ \cap K_-)$ é conjugado por uma potência de x a um único elemento de ε .*

Demonstração. Seja $z \in \mathcal{L} \setminus (K_+ \cap K_-)$. Então $z \in \mathcal{L}$, logo existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $x^m z x^{-m} \in K_+$ e $x^n z x^{-n} \in K_-$. Como $z \notin (K_+ \cap K_-)$, temos três casos: $z \in K_+$ e $z \notin K_-$, $z \in K_-$ e $z \notin K_+$, e $z \notin K_+$ e $z \notin K_-$.

Consideremos $z \in K_+$ e $z \notin K_- = \bigcap_{i \geq 0} x^{-i} U x^i$, então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \notin x^{-i_0} U x^{i_0}$, assim $x^{i_0} z x^{-i_0} \notin U$, logo $x^{i_0} z x^{-i_0} \notin K_+$. Como $x^m z x^{-m} \in K_+$, pois $z \in \mathcal{L}$, pelo Lema 3.2.3 segue que $m < i_0$.

Sejam $A = \{i \in \mathbb{N} : x^i z x^{-i} \notin K_+\}$ e $k = \min\{i \in \mathbb{N} : x^i z x^{-i} \notin K_+\}$, k existe, pois o conjunto A é limitado inferiormente, por m , e é não vazio, pois $x^{i_0} z x^{-i_0} \notin K_+$. Então $x^k z x^{-k} \notin K_+$ e $x^{k-1} z x^{-(k-1)} \in K_+$, logo $x x^{k-1} z x^{-(k-1)} x^{-1} \in x K_+ x^{-1}$, isto é, $x^k z x^{-k} \in x K_+ x^{-1}$. Assim $x^k z x^{-k} \in x K_+ x^{-1} \setminus K_+$. Como $z \in \mathcal{L}$, e $\mathcal{L}$ é invariante por conjugação, ver Lema 3.2.8 item (ii), segue que $x^k z x^{-k} \in \mathcal{L}$. Portanto, $x^k z x^{-k} \in \varepsilon$.

A unicidade do elemento $x^k z x^{-k} \in \varepsilon$ decorre da unicidade de k , pois se existisse outro elemento $l \neq k$ tal que $x^l z x^{-l} \in \varepsilon$, teríamos que $x^l z x^{-l} \in x K_+ x^{-1} \setminus K_+$, isto é, $x^{l-1} z x^{-(l-1)} \in K_+$ e $x^l z x^{-l} \notin K_+$, mas pela definição k é o menor valor natural que satisfaz a condição $x^k z x^{-k} \notin K_+$, então, necessariamente, $l > k$, contudo, $x^{l-1} z x^{-(l-1)} \in K_+$ implica que $x^k z x^{-k} \in K_+$ tendo uma contradição. Portanto, o elemento $x^k z x^{-k} \in \varepsilon$ é único.

Analogamente, segue o resultado para o caso $z \in K_-$ e $z \notin K_+$. O caso $z \notin K_-$ e $z \notin K_+$ se reduz a um dos casos anteriores por conjugação de z por x^m ou por x^n . □

Proposição 3.2.13. *Se $z \in \varepsilon$ e $y \in K_+ \cap K_-$ ou $y = x^{-k} w x^k$, com $w \in \varepsilon$ e $k > 0$, então $yz \in \varepsilon$ e as classes laterais $K_+ z$ e $K_+ y z$ são iguais. ($yz \in K_+ z$)*

Demonstração. 1. Se $y \in K_+ \cap K_-$, temos que $y \in K_+$. Logo as classes laterais

$K_+ z$ e $K_+ y z$ são iguais.

2. Se $y = x^{-k}wx^k$, com $w \in \varepsilon$, temos que $w = x^k y x^{-k} \in \varepsilon = (xK_+x^{-1} \setminus K_+) \cap L$, então $x^{k-1}yx^{-k+1} \in K_+$, com $k-1 \geq 0$ e $w = x^k y x^{-k} \notin K_+$. Logo $y \in K_+$, portanto, as classes laterais K_+z e K_+yz são iguais.

□

Lema 3.2.14. *Sejam $z_1, z_2 \in \varepsilon$ e suponha que $z_1 \in K_+z_2$. Então $z_1 = yz_2$ onde ou $y \in K_+ \cap K_-$, ou $y = x^{-k}wx^k$, para algum $k > 0$ e $w \in \varepsilon$ com $e(w) < \max\{e(z_1), e(z_2)\}$.*

Demonstração. Como $z_1, z_2 \in \varepsilon$, temos que $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$. Contudo, $z_1, z_2 \notin K_+$, logo existem $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $x^{m_1}z_1x^{-m_1} \in K_+$ e $x^{n_1}z_1x^{-n_1} \in K_-$, $x^{m_2}z_2x^{-m_2} \in K_+$ e $x^{n_2}z_2x^{-n_2} \in K_-$, com $m_1 < 0$ e $m_2 < 0$. Observemos que $x^{m_2}z_2^{-1}x^{-m_2} \in K_+$ e $x^{n_2}z_2^{-1}x^{-n_2} \in K_-$, pois K_+ e K_- são subgrupos. Suponhamos $z_1 \in K_+z_2$, então existe $y \in K_+$, tal que $z_1 = yz_2$. Consideremos $e(z_1) = \max\{e(z_1), e(z_2)\} = n_1 - m_1 - 1 = n \geq n_1$, pois $-m_1 - 1 \geq 0$. Logo $n = n_1 - m_1 - 1 \geq n_2 - m_2 - 1 \geq n_2$, pois $-m_2 - 1 \geq 0$. Assim temos $x^n y x^{-n} \in K_-$, pois

$$\begin{aligned} y &= z_1 z_2^{-1} \\ x^n y x^{-n} &= (x^n z_1 x^{-n})(x^n z_2^{-1} x^{-n}) \\ x^n y x^{-n} &= \underbrace{(x^{n_1-m_1-1} z_1 x^{-n_1+m_1+1})}_{\in K_-} \underbrace{(x^{n_1-m_1-1} z_2^{-1} x^{-n_1+m_1+1})}_{\in K_-}. \end{aligned}$$

Como $x^n y x^{-n} \in K_-$ e $x^0 y x^{-0} = y \in K_+$, segue que $y \in \mathcal{L}$ e $e(y) \leq n - 0 - 1$. Então $e(y) \leq n - 0 - 1 < n = e(z_1) \leq \max\{e(z_1), e(z_2)\}$. O caso $e(z_2) = \max\{e(z_1), e(z_2)\} = n_2 - m_2 - 1 = n$ é análogo.

Decorre da definição 3.2.10 que o exposure do conjugado de y , $x^k y x^{-k} = w$ é igual ao exposure de y . Portanto, $e(w) < \max\{e(z_1), e(z_2)\}$.

Como $y \in \mathcal{L} \cap K_+$, temos que $y \in K_+ \cap K_-$ ou $y \in \mathcal{L} \setminus (K_+ \cap K_-)$, pela Proposição 3.2.12 existe um inteiro $k > 0$ tal que $x^k y x^{-k} \in \varepsilon$ e o resultado segue. $\square$

Corolário 3.2.15. *Sejam $z_1, z_2 \in \varepsilon$ e suponha que $z_1 \in K_+ z_2$ e que $e(z_1) = \min\{e(z) : z \in \varepsilon\} = e(z_2)$. Então $z_1 = y z_2$, onde $y \in K_+ \cap K_-$.*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in \varepsilon$. Temos $e(z_1) = \min\{e(z) : z \in \varepsilon\} = e(z_2)$, logo não existe $w \in \varepsilon$ tal que $e(w) < \max\{e(z_1), e(z_2)\}$. Como $z_1 \in K_+ z_2$, então $\exists y \in K_+$ tal que $z_1 = y z_2$, e segue pelo Lema 3.2.14 que $y \in K_+ \cap K_-$. $\square$

Observação 3.2.16. *i) Se $g \in (xK_+x^{-1}) \setminus K_+$, então $K_+ g \subset (xK_+x^{-1}) \setminus K_+$. De fato, pondo $g = x k x^{-1}$, com $k \in K_+$, então*

$$K_+ g = K_+ x k x^{-1} = x x^{-1} K_+ x k x^{-1} \subset x K_+ k x^{-1} = x K_+ x^{-1};$$

ii) Seja N a quantidade de Classes laterais de K_+ em $(xK_+x^{-1}) \setminus K_+$, tais que intersectam ε . De cada uma dessas Classes escolha um representante g_i , com $i = 1, 2, \dots, N$, tal que g_i pertença a ε e $e(g_i) = \min\{e(z) : z \in \varepsilon \cap K_+ g_i\}$. Como $K_+ = (xK_+x^{-1}) \cap U$ é um subgrupo aberto do compacto, xK_+x^{-1} , pela Proposição 2.3.6, existe um número finito de classes laterais, logo podemos escolher apenas um número finito de representantes para cada uma dessas classes escolhidas.

Lema 3.2.17. *Cada $z \in \varepsilon$ pode ser escrito como um produto*

$$z = w(x^{-k_j}g_{i_j}x^{k_j}) \cdots (x^{-k_1}g_{i_1}x^{k_1})(x^{-0}g_{i_0}x^0),$$

onde $w \in K_+ \cap K_-$ e $0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_j$.

Demonstração. Seja $z \in \varepsilon = (xK_+x^{-1} \setminus K_+) \cap \mathcal{L}$. Então $z \notin K_+$, sendo assim, z pertence a alguma das classes laterais $K_+g_{i_0}$, para algum $i_0 \in \mathbb{N}$ e $g_{i_0} \in \varepsilon$, um representante de uma das classes laterais de K_+ em $(xK_+x^{-1}) \setminus K_+$ que intersectam ε e $e(g_{i_0}) = \min\{e(z); z \in \varepsilon \cap K_+g_{i_0}\}$, e pelo Lema 3.2.14 temos $z = yg_{i_0}$, com $y \in K_+$, onde ou $y \in K_+ \cap K_-$ ou $y = x^{-k_1}z'x^{k_1}$ com $k_1 > 0$ e $z' \in \varepsilon$ com $e(z') < \max\{e(z), e(g_{i_0})\}$. Como $z \in K_+g_{i_0}$ e $e(g_{i_0}) = \min\{e(z); z \in \varepsilon \cap K_+g_{i_0}\}$, segue que $\max\{e(z), e(g_{i_0})\} = e(z)$, logo temos $e(y) = e(z') < e(z)$. Como existe um número finito de classes laterais, podemos escolher um número finito de representantes para essas classes, então, sem perda de generalidade, podemos considerar $e(z') < e(g_{i_0})$. Se $y \in K_+ \cap K_-$ e considerando $y = w$, segue que $z = yg_{i_0} = wx^{-0}g_{i_0}x^0$, como queríamos.

Agora se $y = x^{-k_1}z'x^{k_1}$ com $k_1 > 0$ e $e(z') < \max\{e(z), e(g_{i_0})\} = e(z)$.

Notemos que ou z' estará na mesma classe que g_{i_0} ou z' estará em alguma outra classe, necessariamente, distinta à classe de g_{i_0} . Entretanto, estamos considerando o caso $e(z') < e(g_{i_0})$, logo $z' \notin K_+g_{i_0}$. Então aplicando o mesmo raciocínio para $z' = x^{k_1}yx^{-k_1} \in \varepsilon$, temos que z' pertence a alguma das classes laterais $K_+g_{i_1}$, para algum $i_1 \in \mathbb{N}$ e um representante $g_{i_1} \in \varepsilon$. E, pelo Lema 3.2.14, segue que $z' = y_1g_{i_1}$, com $y_1 \in K_+$.

Assim temos

$$\begin{aligned}
 z = yg_{i_0} &= x^{-k_1} z' x^{k_1} g_{i_0} \\
 &= (x^{-k_1} y_1 g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0} \\
 &= (x^{-k_1} y_1 x^{k_1}) (x^{-k_1} g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0}
 \end{aligned}$$

onde ou $y_1 \in K_+ \cap K_-$ ou $y_1 = x^{-k_2} z'' x^{k_2}$ com $k_2 > 0$, $z'' \in \varepsilon$.

Se $y_1 \in K_+ \cap K_- = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} x^n U x^{-n}$, então $w = x^{-k_1} y_1 x^{k_1} \in K_+ \cap K_-$

$$\begin{aligned}
 z &= yg_{i_0} \\
 &= w(x^{-k_1} g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0},
 \end{aligned}$$

e o resultado segue.

Agora se temos $y_1 = x^{-k_2} z'' x^{k_2}$ com $k_2 > 0$ e $e(z'') < \max(e(z'), e(g_{i_1})) = e(z')$.

Observemos que se $e(z'') < g(i_0)$, então garantimos que $z'' \notin K_+ g_{i_0}$. Contudo, se $e(z'') \geq g(i_0)$, teremos que repetir o processo até obtermos algum $z^* < g(i_0)$ para garantirmos que existe um z^* que não está na mesma classe de g_{i_0} . Para entendermos o processo indutivo desta prova, consideremos $z^* = z''$.

Sendo assim, temos $z'' = x^{k_2} y_1 x^{-k_2} \in \varepsilon$, então $z'' \in K_+ g_{i_2} \neq K_+ g_{i_0}$, e pelo Lema 3.2.14 segue que $z'' = y_2 g_{i_2}$ onde ou $y_2 \in K_+ \cap K_-$ ou $y_2 = x^{-k_3} z''' x^{k_3}$ com $k_3 > 0$,

$z''' \in \varepsilon$ e $e(z''') < \max\{e(z''), e(g_{i_0})\}$.

$$\begin{aligned}
z = yg_{i_0} &= x^{-k_1} z' x^{k_1} g_{i_0} \\
&= (x^{-k_1} y_1 x^{k_1}) (x^{-k_1} g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0} \\
&= (x^{-k_1} (x^{-k_2} z'' x^{k_2}) x^{k_1}) (x^{-k_1} g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0} \\
&= x^{-(k_1+k_2)} (y_2 g_{i_2}) x^{(k_1+k_2)} (x^{-k_1} g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0} \\
&= (x^{-(k_1+k_2)} y_2 x^{(k_1+k_2)}) (x^{-(k_1+k_2)} g_{i_2} x^{(k_1+k_2)}) (x^{-k_1} g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0}
\end{aligned}$$

Se $y_2 \in K_+ \cap K_- = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} x^n U x^{-n}$, então $w = x^{-k_1-k_2} y_2 x^{k_1+k_2} \in K_+ \cap K_-$.

Portanto,

$$z = yg_{i_0} = w(x^{-(k_1+k_2)} g_{i_2} x^{(k_1+k_2)}) (x^{-k_1} g_{i_1} x^{k_1}) g_{i_0}.$$

Caso contrário, podemos repetir este processo e escolher um z'''' que não está em uma classe lateral diferente à classe do g_{i_2} . Como o número de Classes laterais é finito, teremos o resultado, considerando $k'_1 = k_1, k'_2 = k_1 + k_2, \dots, k'_j = \sum_{i=1}^j k_i$. $\square$

Consideremos $L = \overline{\mathcal{L}}$.

Lema 3.2.18. (i) O conjunto L é um subgrupo compacto de G invariante sob a conjugação por x ;

(ii) $\{z \in G : \exists m_1 \leq 0 < m_2 < \dots < m_p < \dots \text{ tais que } x^{m_p} z x^{-m_p} \in U\} \subseteq LK_-$;

(iii) $\{z \in G : \exists m_1 \leq 0 < m_2 < \dots < m_p < \dots \text{ tais que } x^{-m_p} z x^{m_p} \in U\} \subseteq LK_+$.

(iv) $\{z \in G : x^m z x^{-m} \in U \text{ para infinitos valores de } m \rightarrow \pm\infty\} \subseteq L$.

Demonstração. i) Seja $z \in \mathcal{L}$. Então ou $z \in K_+ \cap K_-$ ou $z \in \mathcal{L} \setminus (K_+ \cap K_-)$.

Se $z \in \mathcal{L} \setminus (K_+ \cap K_-)$, então temos que ou z pertence a K_+ ou z não per-

tence a K_+ . Consideremos $z \notin K_+$, aplicando a Proposição 3.2.12 para o caso $z \notin K_+$, temos $x^{k'}zx^{-k} = y \in \varepsilon$ e $k' \leq 0$. Sendo assim, temos que $z = x^kyx^{-k}$, onde $y \in \varepsilon$ e $k \geq 0$. Pelo lema anterior temos que $y = w(x^{k'_j}g_{i_j}x^{-k'_j}) \cdots (x^{k'_1}g_{i_1}x^{-k'_1})(x^0g_{i_0}x^{-0})$, com $w \in K_+ \cap K_-$ e $0 < k'_1 < k'_2 < \cdots < k'_j$. Logo temos

$$\begin{aligned} z &= x^kw(x^{-k'_j}g_{i_j}x^{k'_j}) \cdots (x^{-k'_1}g_{i_1}x^{k'_1})(g_{i_0})x^{-k} \\ &= (x^kwx^{-k})(x^{k-k'_j}g_{i_j}x^{k'_j-k}) \cdots (x^{k-k'_1}g_{i_1}x^{k'_1-k})(x^kg_{i_0}x^{-k}), \end{aligned}$$

onde $w \in K_+ \cap K_-$, logo $\omega = (x^{-k}wx^k) \in K_+ \cap K_-$, pois $K_+ \cap K_-$ é um conjunto invariante por conjugação.

Observemos que cada elemento $g_i \in \varepsilon = (xK_+x^{-1} \setminus K_+) \cap \mathcal{L} \subseteq xK_+x^{-1} \subseteq x^jK_+x^{-j}$, para todo $j \geq 1$ e $i = 1, 2, \dots, N$.

Tomemos $p \geq \max\{k, k - k'_1, \dots, k - k'_j, 1\}$, logo temos que $g_i \in x^pK_+x^{-p}$ e $g_i = x^ph_ix^{-p}$, para $h_i \in K_+$. Assim

$$\begin{aligned} z &= (x^kwx^{-k})(x^{k-k'_j}g_{i_j}x^{k'_j-k}) \cdots (x^{k-k'_1}g_{i_1}x^{k'_1-k})(x^kg_{i_0}x^{-k}), \\ &= (x^kwx^{-k})(x^{k-k'_j}(x^ph_{i_j}x^{-p})x^{k'_j-k}) \cdots (x^{k-k'_1}(x^ph_{i_1}x^{-p})x^{k'_1-k})(x^k(x^ph_{i_0}x^{-p})x^{-k}) \\ &= (x^kwx^{-k})x^{2p}(x^{k-k'_j-p}h_{i_j}x^{k'_j-k+p})x^{-2p} \cdots x^{2p}(x^{k-p}h_{i_0}x^{-k+p})x^{-2p} \\ &\subseteq (K_+ \cap K_-)x^{2p}K_+x^{-2p} \subseteq K_-x^{2p}K_+x^{-2p}, \end{aligned}$$

pois cada um dos elementos $x^{k-k'_l-p}h_{i_l}x^{k'_l-k+p}$, com $l = 1, \dots, j$, pertencem a K_+ , pois $k - k'_l - p < 0$ e $h_{i_l} \in K_+$. Sendo assim, temos que cada elemento de $\mathcal{L}$ pertence a $K_-x^{2p}K_+x^{-2p}$. Logo $\overline{\mathcal{L}} \subseteq \overline{K_-(x^{2p}K_+x^{-2p})}$, implica $L \subseteq K_-(x^{2p}K_+x^{-2p})$, pois $K_-(x^{2p}K_+x^{-2p})$ é fechado. Como $K_-(x^{2p}K_+x^{-2p})$

é um subconjunto compacto de G , pois é produto de compactos, e $\overline{\mathcal{L}} = L$ é fechado. Segue, pela Proposição 2.2.15, que o fecho de $\mathcal{L}$, denotado por L , é um subgrupo compacto. Além disso, L é invariante sob a conjugação de x , pois pelo Lema 3.2.8 temos $\mathcal{L} = x\mathcal{L}x^{-1}$, então $\overline{\mathcal{L}} = \overline{x\mathcal{L}x^{-1}} = x\overline{\mathcal{L}}x^{-1}$. Logo $L = xLx^{-1}$, portanto, L é invariante sob a conjugação de x .

- ii) Seja $z \in G$ tal que existem $m_1 \leq 0 < m_2 < \dots < m_p < \dots$, tais que $x^{m_p}zx^{-m_p} \in U$, para cada p . Agora para cada $p \geq 1$ aplicaremos o Lema 3.2.4. Consideremos $m = m_1$ e $n = m_p$, então existem elementos $y_1, y_2, \dots$ e $z_1, z_2, \dots$ tais que $z = y_p z_p$, onde $x^k y_p x^{-k} \in U$, para $k \leq m_1$ e $k \geq m_p$. Logo temos $y_p \in \mathcal{L} \subseteq \overline{L}$, para todo $p > 1$. E $x^k z_p x^{-k} = x^k y_p^{-1} z x^{-k} \in U$ para $0 \leq k \leq m_p$. Como L é fechado e compacto, segue que $\{y_1, y_2, \dots\} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \overline{L}$ tem um ponto de acumulação, digamos w , em L . Como U é fechado e $x^k y_p^{-1} z x^{-k} \in U$, então $x^k w^{-1} z x^{-k} \in U$, para cada $k \geq 0$. Assim $w^{-1} z \in x^{-k} U x^k$, para todo $k \geq 0$, e segue que $w^{-1} z \in K_-$. Portanto, z pertence a LK_- . Isso prova (ii).
- iii) Consideremos $z \in G$ tal que existem $m_1 \leq 0 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ tais que $x^{-m_p} z x^{m_p}$ está em U , para cada p . Temos $-m_1 \geq 0 > -m_2 > \dots > -m_p > \dots$. Para cada $p \geq 1$ aplicaremos o Lema 3.2.4 considerando $n = -m_1$ e $m = -m_p$, então existem elementos $y_1, y_2, \dots$ e $z_1, z_2, \dots$ tais que $z = y_p z_p$, onde $x^k y_p x^{-k} \in U$, para $k \leq -m_p$ e $k \geq -m_1$, então $y_p \in \mathcal{L}$ para todo $p \geq 1$, e $x^k z_p x^{-k} = x^k y_p^{-1} z x^{-k} \in U$ para $0 \geq k \geq m_p$. Como L é compacto, $\{y_1, y_2, \dots\} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \overline{L}$ tem um ponto de acumulação, digamos w , em L . E como U é fechado $x^k w^{-1} z x^{-k} \in U$, para cada $k \leq 0$. Sendo assim, temos

$w^{-1}z \in K_+$. Portanto, z pertence a LK_+ . Isso prova (iii).

- iv) Se $z \in G$ é tal que $x^m z x^{-m} \in U$ para infinitos valores de $m \rightarrow \pm\infty$, então aplicando o item (ii) desse lema temos que $z \in LK_-$, e aplicando o item (iii) segue que $z \in LK_+$. Portanto, $z \in (LK_+) \cap (LK_-) \subseteq L$.

□

Os resultados apresentados até aqui nos proporcionaram condições suficientes para demonstrar o Teorema A, o qual garante a existência dos subgrupos tidy.

Teorema A. *Sejam G um grupo totalmente desconexo e localmente compacto e $x \in G$. Então existe um subgrupo aberto e compacto U de G tal que colocando $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ e $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$, temos:*

$$(i) \ U = K_+ K_- = K_- K_+$$

$$(ii) \ \bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} \text{ e } \bigcup_{n \geq 0} x^{-n} K_- x^n \text{ são subgrupos fechados de } G.$$

Demonstração do Teorema A. Escolhamos um subgrupo aberto e compacto, V , de G e apliquemos a construção do Lema 3.2.2 para a produção dos subgrupos U' , K'_+ e K'_- , com $U' = K_+ K_- = K_- K_+$. Colocando

$$\mathcal{L}' = \{z \in G : x^n z x^{-n} \in U', \text{ se } |n| \text{ é suficientemente grande}\}, \quad (2.5)$$

de modo que $L = \overline{\mathcal{L}'}$, pelo Lema 3.2.18, é um grupo compacto e é invariante sob a conjugação de x . Para obtermos um subgrupo tidy, L deve de alguma forma ser adicionado a U' , mas não é claro que L e U' geram um subgrupo compacto de G .

Entretanto, usando o Lema 2.3.15, podemos escolher um subgrupo aberto, W , de U' tal que LW é um subgrupo aberto e compacto de G contendo L . Não é claro se LW é tidy. Contudo, se a construção do Lema 3.2.2 é aplicada para LW , o qual é aberto e compacto pelo Lema 2.3.15, nós obtemos um subgrupo, U , o qual é tidy. Para vermos que U é tidy, notemos primeiro que $U = K_+K_- = K_-K_+$, pelo Lema 3.2.2. Coloquemos

$$\mathcal{L} = \{z \in G : x^n z x^{-n} \in U, \text{ se } |n| \text{ é suficientemente grande}\}.$$

Então pelo Corolário 3.2.9 é suficiente mostrarmos que $\mathcal{L} = K_+ \cap K_-$. Para isso, basta provarmos que $\mathcal{L} \subseteq L$, já que $L \subseteq K_+ \cap K_-$, pois L é um subgrupo de LW e invariante sob a conjugação de x contido em $K_+ \cap K_-$. Para mostrarmos que $\mathcal{L} \subseteq L$, consideremos $U \cap U'$, o qual é um subgrupo aberto de U , e $U = L(U \cap U')$, pois $U \subseteq LW$ e $W \subseteq U'$. Consequentemente, como U é compacto, $U \cap U'$ é aberto, e decorre da definição de L que $\mathcal{L}'$ é denso em L , podemos escolher $z_1, z_2, \dots, z_n$ em $\mathcal{L}'$ tais que $U = \bigcup_{k=1}^n z_k(U \cap U')$. Tendo feito isso, escolhamos um inteiro, $N \geq 0$, tal que $x^{-k} z_i x^k$ e $x^k z_i x^{-k}$ pertençam a U' , para $i = 1, 2, \dots, n$ sempre que $k \geq N$, veja (2.5). Seja $y \in \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ e L são invariantes sob a conjugação de x , nós podemos supor, conjugando, se necessário, que $y \in K_+$. Além disso, aumentando N , se necessário, podemos supor que $x^N y x^{-N}$ está em K_- . Então nós temos que $x^k y x^{-k}$ pertence a K_+ , para todo $k \leq 0$ e a K_- , para todo $k \geq N$.

Construamos agora a seguinte sequência $\{y_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathcal{L}'$ tal que $x^{jN} y_k^{-1} y x^{-jN}$ pertença a $U \cap U'$, para $-k \leq j \leq k$. Essa sequência pode ser definida por indução.

Notemos que y pertence a K_+ , o qual está contido em U , além disso, y per-

tence a $z_i(U \cap U')$ para algum i . Coloquemos $y_0 = z_i$. Agora suponhamos que y_k tenha sido definido para algum k . Então $x^{(k+1)N}y_k^{-1}yx^{-(k+1)N}$ pertence a U , pois $x^{(k+1)N}y_k^{-1}x^{-(k+1)N}$ está em $\mathcal{L}'$ e $x^{(k+1)N}yx^{-(k+1)N}$ está em K_- . Assim $x^{(k+1)N}y_k^{-1}y^{-(k+1)N}$ pertence a $z_i(U \cap U')$, para algum i .

Definamos $v = y_kx^{-(k+1)N}z_ix^{(k+1)N}$, então v está em $\mathcal{L}'$. E, para $-k \leq j \leq k$, $x^{jN}v^{-1}y^{-jN} = (x^{-(k+1-j)N}z_i^{-1}x^{(k+1-j)N})(x^{jN}y_k^{-1}yx^{-jN})$ pertence a $U \cap U'$, pois $x^{jN}y_k^{-1}yx^{-jN}$ e a escolha de N implicam que o primeiro termo está em $\mathcal{L}' \cap U'$. Além disso, $x^{(k+1)N}v^{-1}yx^{-(k+1)N} = z_i^{-1}x^{(k+1)N}y_k^{-1}yx^{-(k+1)N}$ e também pertence a $U \cap U'$. Agora $x^{-(k+1)N}yx^{(k+1)N}$ está em K_+ , o qual está contido em U , então $x^{-(k+1)N}v^{-1}yx^{(k+1)N}$ pertence a $z_j(U \cap U')$, para algum j . Colocando $y_{k+1} = vx^{(k+1)N}z_jx^{-(k+1)N}$. Segue que, y_{k+1} está em $\mathcal{L}'$ e $x^{jN}y_{k+1}^{-1}x^{-jN}$ pertence a $U \cap U'$, para $-k-1 \leq j \leq k+1$.

Sendo assim, seja w um ponto de acumulação da sequência $\{y_k\}_{k=0}^\infty$. Então w pertence a L e, como $U \cap U'$ é fechado, $x^{jN}w^{-1}yx^{-jN}$ está em $U \cap U'$ para cada inteiro j . Consequentemente, pelo Lema 3.2.18 item (iv), aplicado para U' , $w^{-1}y$ pertence a L , logo y está em L . Portanto, $\mathcal{L} \subseteq L$ como queríamos mostrar. $\square$

Podemos dizer que, em geral, os subgrupos tidy são mais complicados do que os exemplos apresentados anteriormente. Entretanto, algumas das propriedades possuídas pelos exemplos são compartilhadas por todos os subgrupos tidy. Algumas dessas propriedades serão descritas nos próximos resultados.

Proposição 3.2.19. *Seja U um subgrupo aberto e compacto de G o qual é tidy sob a conjugação de x . Então $\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ e $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$ são subconjuntos abertos e*

fechados de G .

Demonstração. Como $x^n U x^{-n}$ é aberto e fechado, para cada n , e sabemos que a união arbitrária de abertos é aberta, segue que $\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ é aberto. Para mostrarmos que $\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ é fechado, vamos supor que z pertença ao fecho de $\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, $z \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}}$, mas que não pertença ao conjunto $\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$. Como cada elemento do $\overline{\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}}$ é um ponto de acumulação de uma sequência de pontos do conjunto $\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, logo existem elementos $z_k \in \bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, tais que $z_k \in x^{n_k} U x^{-n_k}$ com $n_k \rightarrow \infty$ e $k \rightarrow \infty$, e $z_k \rightarrow z$ com $k \rightarrow \infty$.

Seja $\mathcal{V}$ uma vizinhança aberta de e , e escolha $\mathcal{W}$ sendo uma vizinhança aberta e simétrica de e tal que $\mathcal{W}^2 \subseteq \mathcal{V}$, pela Proposição 2.3.5. Então z_k pertence a $z\mathcal{W}$ para todo k suficientemente grande. Temos $x^{n_k} K_+ x^{-n_k} \subseteq x^{n_k} U x^{-n_k}$ e $\bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n} \subseteq x^{n_k} U x^{-n_k}$, logo $(x^{n_k} K_+ x^{-n_k})(\bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n}) \subseteq x^{n_k} U x^{-n_k}$, e como $x^{n_k} U x^{-n_k} = x^{n_k} K_+ K_- x^{-n_k} = x^{n_k} K_+ x^{-n_k} x^{n_k} K_- x^{-n_k} \subseteq (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})(\bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n})$, pois $x^{n_k} K_- x^{-n_k} = x^{n_k} \bigcap_{n \geq 0} (x^{-n} U x^n) x^{-n_k} \subseteq \bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n}$. Assim $x^{n_k} U x^{-n_k} = (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})(\bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n})$. Além disso, $(\bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n}) \subseteq K_+ \mathcal{W}$, para todo k suficientemente grande, porque $\bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n}$ é uma sequência decrescente de compactos, e quando $n_k \rightarrow +\infty$ a sequência tende a K_+ . Como z_k está em $x^{n_k} U x^{-n_k} = (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})(\bigcap_{n=0}^{n_k} x^n U x^{-n}) \subseteq (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})(K_+ \mathcal{W})$, e como $K_+ \subseteq (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})$, pelo Lema 3.2.3, segue que $z_k \in (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})\mathcal{W}$. Sendo assim, $z \in z_k \mathcal{W} \subseteq (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})\mathcal{W}^2$. Logo z pertence a $(x^{n_k} K_+ x^{-n_k})\mathcal{W}^2 \subseteq (x^{n_k} K_+ x^{-n_k})\mathcal{V}$ para todo k suficientemente grande. Consequentemente, $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$ intersecta $z\mathcal{V}$. Como $z\mathcal{V}$ é uma vizinhança arbitrária de z , segue que z está no fecho do

$\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$, mas esse é um conjunto fechado, pois U é tidy. Então z pertence a $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} \subseteq \bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$. Logo $z \in \bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, mas isso é uma contradição. Portanto, $\bigcup_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$ é fechado.

De maneira similar podemos mostrar que $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$ é um subconjunto aberto e fechado de G . $\square$

Lema 3.2.20. *Seja x um elemento G o qual está contido em um subgrupo compacto K_1 , e seja U um subgrupo aberto e compacto de G o qual é tidy para x . Então x normaliza U .*

Demonstração. Seja K um subgrupo fechado de G gerado por x , como $x \in K_1$ e K_1 é um subgrupo. Então $K = \langle x \rangle \subseteq K_1$. Logo, pelo Lema 2.2.15, K é um subgrupo compacto de G , pois é um fechado contido em um compacto. Temos que $\{x^n : n \geq 0\}$ é denso em K . Consequentemente, $zK_+z^{-1} \supseteq K_+$, para todo $z \in K$. Em particular, quando $z = x^{-1}$, temos $x^{-1}K_+x \supseteq K_+$, assim $xK_+x^{-1} \subseteq K_+$. Por outro lado, pelo Lema 3.2.3, sabemos que $K_+ \subseteq xK_+x^{-1}$. Então $K_+ = xK_+x^{-1}$, logo x normaliza K_+ . Analogamente, $\{x^{-n} : n \geq 0\}$ é denso em K . Consequentemente, $z^{-1}K_-z \supseteq K_-$, para todo $z \in K$. Em particular, $xK_-x^{-1} \supseteq K_-$, logo $x^{-1}K_-x \subseteq K_-$. Contudo, pelo Lema 3.2.3, temos $K_- \subseteq x^{-1}K_-x$. Então $K_- = xK_-x^{-1}$, sendo assim, x normaliza K_- . Como $U = K_+K_-$, segue que x normaliza U , pois $xUx^{-1} = xK_+K_-x^{-1} = (xK_+x^{-1})(xK_-x^{-1}) = K_+K_- = U$. $\square$

Lema 3.2.21. *Seja U um subgrupo aberto e compacto de G o qual é tidy para x . Então um elemento z de U pertence a K_+ (respectivamente, para K_-) se, e somente*

se, $\{x^{-n}zx^n\}_{n \geq 0}$ (respectivamente $\{x^n zx^{-n}\}_{n \geq 0}$) tem um ponto de acumulação.

Demonstração. Se z pertence a $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, então $z \in x^n U x^{-n}$, para todo $n \geq 0$. Assim temos que $x^{-n}zx^n$ está em U , para todo n . Como U é compacto, segue que o conjunto de elementos $\{x^{-n}zx^n\}_{n \geq 0}$ tem um ponto de acumulação. Pela Proposição 3.2.19, $\bigcup_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$ é fechado, e pela hipótese temos que a sequência $\{x^{-n}zx^n\}_{n \geq 0}$ tem um ponto de acumulação, digamos w . Logo $w \in \bigcup_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$. Sendo assim, w pertence a $x^{-m} U x^m$, para algum m . E segue pela conjugação por x^m que existe um ponto de acumulação em U . Consequentemente, $x^{-n}zx^n$ pertence a U , para infinitos valores de n . O Lema 3.2.18 item (iii) mostra que $z \in K_+$.

A prova de que z pertence a K_- se, e somente se, $\{x^n zx^{-n}\}_{n \geq 0}$ tem um ponto de acumulação segue de maneira similar. $\square$

Proposição 3.2.22. *Seja U um subgrupo aberto de G o qual é tidy sob a conjugação de x e seja $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$. Então o subgrupo de G gerado por K_+ e x é fechado e é ou compacto ou igual ao produto semidireto de $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$ e o grupo gerado por x .*

Demonstração. Seja $N = \bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n}$, e seja H o grupo gerado por K_+ e x . Notemos que N é normalizado por x , pois $xNx^{-1} = \bigcup_{n \geq 0} x^{n+1} K_+ x^{-n-1} = \bigcup_{n \geq 1} x^n K_+ x^{-n} \subseteq N$. E temos $K_+ \subseteq xK_+x^{-1}$, pelo Lema 3.2.3. Assim $N = \bigcup_{n \geq 0} x^n K_+ x^{-n} = (x^0 K_+ x^{-0}) \cup (\bigcup_{n \geq 1} x^n K_+ x^{-n}) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} x^n K_+ x^{-n} = xNx^{-1}$. Então $xNx^{-1} = N$. Consideremos $H = N\langle x \rangle$, onde $\langle x \rangle$ denota o subgrupo gerado por x . Suponhamos que x^k pertença a N para algum k não negativo, então x^k está em

$x^m K_+ x^{-m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo temos $x^{-m} x^k x^m \in K_+$, o qual é um subgrupo compacto de U . Sendo assim, $\langle x^k \rangle \subseteq K_+$ tem o fecho compacto, pois é um fechado contido no compacto. Assim $\overline{\langle x \rangle} = \overline{\langle x^k \rangle} \cup \overline{x \langle x^k \rangle} \cup \overline{x^2 \langle x^k \rangle} \cup \dots \cup \overline{x^{k-1} \langle x^k \rangle}$ é compacto, porque é união finita de compactos, pela Proposição 2.2.16. Agora, pelo Lema 3.2.20, temos que U é normalizado por x , então $xUx^{-1} = U$, e implica $K_+ = U$ e $N = U$. Logo H define uma extensão finita de U , e segue que H é compacto. Sendo assim, se H não é compacto, $x^k \in N$, então $\langle x \rangle \cap N = \{e\}$, logo H é o produto semidireto de N e $\langle x \rangle$.

Para provarmos que H é fechado será suficiente mostrarmos que $H \cap U$ é fechado. Para isto, mostraremos que ou H é compacto ou $H \cap U = K_+$. Suponhamos que zx^k pertença a U , onde z está em N . Se k é zero, então z está em K_+ , então podemos supor que $k \neq 0$. Como U é tidy, $zx^k = rs$, onde $r \in K_+$ e s em K_- . Consequentemente, substituindo z por $r^{-1}z$ se necessário, nós podemos supor que de fato zx^k está em K_- . Agora $z = x^m z' x^{-m}$, para algum m e $z' \in K_+$. Para cada n , $x^n z' x^{-n} = x^{n-m} z x^k x^{-(n-m)} x^{-k}$, então $\{x^n z' x^{-n} : n \geq 0\}$ tem um ponto de acumulação, pois está contido em um compacto. Consequentemente, pelo Lema 3.2.21, z' pertence a K_- . Além disso, z' pertence a $K_+ \cap K_-$, como z' é igual a conjugação de z por x^m , e $K_+ \cap K_-$ é invariante por conjugações, segue que $z \in K_+ \cap K_-$, sendo assim, x^k está em U . Como $k \neq 0$, isso implica que $\langle x \rangle$ tem o fecho compacto, portanto, H é compacto como queríamos mostrar. $\square$

Proposição 3.2.23. *Seja G um grupo localmente compacto totalmente desconexo, seja $x \in G$ e seja $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$ onde U é algum subgrupo tidy sob a conjugação*

de x . Consideremos

$$S_x = \{z \in G; \{xzx^{-1}, x^2zx^{-2}, x^3zx^{-3} \dots\} \text{ tem um ponto de acumulação.}\}$$

Então:

i) para cada $z \in S_x$ existe um inteiro k tal que $x^kzx^{-k} = zy$, onde $y \in$

$$\bigcup_{n \geq 0} x^{-n}K_-x^n;$$

ii) $\{xzx^{-1}, x^2zx^{-2}, x^3zx^{-3}, \dots\}$ tem fecho compacto para cada $z \in S_x$; e

iii) S_x é um subgrupo fechado de G .

Demonstração. Se $z \in S_x$, então $z \in K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n}Ux^n$, pelo Lema 3.2.21, pois o conjunto $\{xzx^{-1}, x^2zx^{-2}, x^3zx^{-3}, \dots\}$ possui ponto de acumulação, w . Logo $z \in x^{-n}Ux^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, assim existem inteiros m e k , com $m < k$, tais que $x^mzx^{-m} \in U$ e $x^kzx^{-k} \in U$. Como U é um subgrupo, segue que $u = (x^mzx^{-m})^{-1}(x^kzx^{-k}) \in U$, e observemos que $x^mw^{-1}x^{k-m}wx^{-k}$ é um ponto de acumulação de $\{xux^{-1}, x^2ux^{-2}, x^3ux^{-3} \dots\}$. Pelo Lema 3.2.21, temos $u = (x^mzx^{-m})^{-1}(x^kzx^{-k}) \in K_-$, então $x^m(z^{-1}x^{-m+k}zx^{-k+m})x^{-m} \in K_-$. Sendo assim, $z^{-1}x^{k-m}zx^{m-k} \in \bigcup_{j \geq 0} x^{-j}K_-x^j$. Como $z \in S_x$, então $z \in K_-$, pelo Lema 3.2.21, e sabemos que K_- é um subgrupo aberto de $x^{-1}K_-x$, logo os elementos $x^i zx^{-i} \in K_-$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência $\{xzx^{-1}, x^2zx^{-2}, x^3zx^{-3} \dots\} \subset K_-$, e como K_- é compacto, segue que o fecho de $\{xzx^{-1}, x^2zx^{-2}, x^3zx^{-3} \dots\}$ é compacto. Além disso, S_x é um subgrupo, pois se $z'_1, z'_2 \in S_x$, então $z'_1, z'_2 \in K_-$. Como K_- é um subgrupo, segue que $z'^{-1}_1, z'^{-1}_2 \in K_-$, apliquemos o Lema 3.2.21, e o resultado segue. Agora consideremos $z_1, z_2, z_3, \dots$ pertencentes a S_x e que convirjam para z .

Logo $z_i \in K_- \forall i \in \mathbb{N}$, e $z \in K_-$, pois K_- é compacto. Sem perda de generalidade podemos supor que $z_1, z_2, z_3, \dots \in zU$. Notemos que $z_1, z_2, z_3, \dots \in zK_- \subset zU$. Então para cada n temos que $z_1^{-1}z_n = w_n \in U \cap S_x$. Pelo Lema 3.2.21, temos que $z_k = z_1 w_k$, onde $\{w_1, w_2, w_3, \dots\}$ é uma sequência convergente em K_- . Sendo assim, $z \in z_1 K_-$, logo está em S_x . Portanto, S_x é fechado. $\square$

Claramente há uma caracterização análoga para o grupo fechado $T_x = S_x \cap S_{x^{-1}}$. Também é claro que S_x contém o subgrupo gerado por x e por K_- . Portanto, pelo Lema 3.2.2, G é um grupo discreto a menos que pelo menos um dos grupos S_x e $S_{x^{-1}}$ não seja discreto.

Capítulo 4

A Função Escala

Neste capítulo, serão estabelecidas mais algumas propriedades dos subgrupos tidy e mostraremos também que a função escala é bem definida e é contínua. Além disso, apresentaremos os conceitos de grupo strange e grupo neat; esses dois últimos conceitos aparecem na conjectura proposta por Hoffman e Mukherjea (veja o artigo Concentration Functions and a Class of Non-Compact Groups,[HM81]). A conjectura diz que um grupo localmente compacto é um grupo neat. No artigo Concentration functions in locally compact groups, [JRW96], Jaworski, Rosenblatt e Willis demonstraram essa conjectura para o caso totalmente desconexo. Assim, o intuito da última seção deste capítulo é apresentar a demonstração do Teorema 4.2.3.

4.1 Função Escala

Nesta seção, provaremos que a função escala é bem definida e é contínua, e exibiremos alguns exemplos. Se nada for dito, as hipóteses assumidas aqui serão as mesmas do Teorema A do capítulo anterior.

Lema 4.1.1. *Sejam $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ subgrupos abertos e compactos de G os quais são tidy sob a conjugação de x . Então $U^{(1)} \cap U^{(2)}$ é tidy para x .*

Demonstração. Seja um elemento $z \in U^{(1)} \cap U^{(2)}$. Então $z = s_1 t_1 = s_2 t_2$, onde $s_i \in K_+^{(i)}$ e $t_i \in K_-^{(i)}$, para $i = 1, 2$. Logo $x^{-n} s_1 x^n \in U^{(1)}$, $x^{-n} s_2^{-1} x^n \in U^{(2)}$, $x^n t_1^{-1} x^{-n} \in U^{(1)}$ e $x^n t_2 x^{-n} \in U^{(2)}$, para todo $n \geq 0$.

Temos,

$$s_2^{-1} s_1 = t_2 t_1^{-1}. \quad (1.1)$$

Como $x^{-n} s_2^{-1} x^n x^{-n} s_1 x^n = x^{-n} s_2^{-1} s_1 x^n \in U^{(2)} U^{(1)}$, para todo $n \geq 0$, e $x^n t_2 x^{-n} x^n t_1^{-1} x^{-n} = x^n t_2 t_1^{-1} x^{-n} = x^n s_2^{-1} s_1 x^{-n} \in U^{(2)} U^{(1)}$, para todo $n \geq 0$, segue que $x^n s_2^{-1} s_1 x^{-n} \in U^{(2)} U^{(1)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, $\{x^n (s_2^{-1} s_1) x^{-n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tem fecho compacto, pela Proposição 2.2.15. Seja u um ponto de acumulação de $\{x^{-n} s_1 x^n\}_{n \geq 0}$. Então $x^n u x^{-n}$ pertence a $U^{(1)}$, para todo n . Isso implica que $u \in x^{-n} U^{(1)} x^n$, para todo n , isto é, $u \in K_-^{(1)}$. Sendo assim, temos que $u \in K_+^{(1)} \cap K_-^{(1)}$, que é invariante por conjugação. Agora escolhamos um inteiro N tal que $x^{-N} s_1 x^N$ pertença a $U^{(2)} u$ e coloquemos $v_1 = x^N u x^{-N}$, então v_1 pertence a $K_+^{(1)} \cap K_-^{(1)}$. Assim $x^{-N} (s_1 v_1^{-1}) x^N = x^{-N} s_1 x^N u^{-1}$ está em $U^{(2)}$. E como $\{x^{-n} (s_1 v_1^{-1}) x^n\}_{n \geq 0}$ tem ponto de acumulação, segue, pelo Lema 3.2.21, que $x^{-N} (s_1 v_1^{-1}) x^N$ pertence a $K_+^{(2)}$.

Consequentemente, $x^{-n}(s_1v_1^{-1})x^n$ pertence a $U^{(1)} \cap U^{(2)}$ para todo $n \geq N$.

Similarmente, existe um v_2 em $K_+^{(2)} \cap K_-^{(2)}$ tal que $x^{-n}(v_2s_2^{-1})x^n$ pertence a $U^{(1)} \cap U^{(2)}$ para n suficientemente grande. Consequentemente $x^{-n}(v_2s_2^{-1}s_1v_1^{-1})x^n$ está em $U^{(1)} \cap U^{(2)}$ para todo n suficientemente grande. Agora $\{x^n v_2 x^{-n}\}_{n \geq 0}$ e $\{x^n v_1^{-1} x^{-n}\}_{n \geq 0}$ tem fecho compacto, pois v_1 e v_2 pertencem, respectivamente, a $K_-^{(1)}$ e $K_-^{(2)}$, e $\{x^n s_2^{-1} s_1 x^{-n}\}_{n \geq 0}$ tem fecho compacto por (1.1), logo $\{x^n v_2 s_2^{-1} s_1 v_1^{-1} x^{-n}\}_{n \geq 0}$ também tem fecho compacto. Como $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ são tidy, segue pelo Lema 3.2.21 que $x^n v_2 s_2^{-1} s_1 v_1^{-1} x^{-n}$ está em $U^{(1)} \cap U^{(2)}$ para todo n .

Então temos que $s_1 v_1^{-1} = s_2 v_2^{-1} (v_2 s_2^{-1} s_1 v_1^{-1})$, onde $s_1 v_1^{-1}$ pertence a $U^{(1)}$, $s_2 v_2^{-1}$ pertence a $U^{(2)}$ e $v_2 s_2^{-1} s_1 v_1^{-1}$ está em $U^{(1)} \cap U^{(2)}$. Logo $s_1 v_1^{-1}$ está em $U^{(1)} \cap U^{(2)}$. O Lema 3.2.21 mostra que de fato $s_1 v_1^{-1}$ pertence a $K_+^{(1)} \cap K_+^{(2)}$ e, claramente, este conjunto está contido em $(U^{(1)} \cap U^{(2)})_+$. Como $s_1 t_1 = z$ está em $U^{(1)} \cap U^{(2)}$, segue que $v_1 t_1 = (s_1 v_1^{-1})^{-1} s_1 t_1$ também pertence a $U^{(1)} \cap U^{(2)}$. Portanto, $v_1 t_1$ de fato pertence a $(U^{(1)} \cap U^{(2)})_-$. Além disso,

$$z = (s_1 v_1^{-1}) v_1 t_1 \in (U^{(1)} \cap U^{(2)})_+ (U^{(1)} \cap U^{(2)})_-.$$

Similarmente, $U^{(1)} \cap U^{(2)} = (U^{(1)} \cap U^{(2)})_- (U^{(1)} \cap U^{(2)})_+$.

Claramente $(U^{(1)} \cap U^{(2)})_+ = K_+^{(1)} \cap K_+^{(2)}$. Assim, se z é um ponto de acumulação de $\bigcup_{n \geq 0} x^n (U^{(1)} \cap U^{(2)})_+ x^{-n}$, então esse também é um ponto de acumulação de $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+^{(1)} x^{-n}$ e $\bigcup_{n \geq 0} x^n K_+^{(2)} x^{-n}$. Como $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ são tidy, z pertence a $\bigcup_{n \geq 0} x^n (U^{(1)} \cap U^{(2)})_+ x^{-n}$, logo $U^{(1)} \cap U^{(2)}$ é tidy. $\square$

Lema 4.1.2. *Sejam $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ subgrupos abertos e compactos de G os quais são tidy*

para x e suponha que $U^{(2)} \subseteq U^{(1)}$. Então $K_+^{(2)} = K_+^{(1)} \cap U^{(2)}$ e $K_-^{(2)} = K_-^{(1)} \cap U^{(2)}$, onde $K_+^{(i)} = \bigcap_{n \geq 0} x^n U^{(i)} x^{-n}$ e $K_-^{(i)} = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U^{(i)} x^n$.

Demonstração. Temos $U^{(2)} \subseteq U^{(1)}$, então o $K_+^{(2)} = \bigcap_{n \geq 0} x^n U^{(2)} x^{-n} \subseteq \bigcap_{n \geq 0} x^n U^{(1)} x^{-n} = K_+^{(1)}$, e como $K_+^{(2)} \subseteq U^{(2)}$, segue que $K_+^{(2)} \subseteq K_+^{(1)} \cap U^{(2)}$. Seja z pertencente a $K_+^{(1)} \cap U^{(2)}$. Então z pertence a $K_+^{(1)}$, e pelo Lema 3.2.3 temos $x^{-n} z x^n$ pertence a $K_+^{(1)}$, para cada $n \geq 0$. Sendo assim, $\{x^{-n} z x^n\}_{n \geq 0}$ tem ponto de acumulação, como z está em $U^{(2)}$, segue, pelo Lema 3.2.21, que z pertence a $K_+^{(2)}$. Assim $K_+^{(2)} = K_+^{(1)} \cap U^{(2)}$.

Analogamente, temos $K_-^{(2)} \subseteq K_-^{(1)} \cap U^{(2)}$, pois $K_-^{(2)} \subset K_-^{(1)}$ e $K_-^{(2)} \subseteq U^{(2)}$. Seja z pertencente a $K_-^{(1)} \cap U^{(2)}$. Então z está em $K_-^{(1)}$, logo $x^n z x^{-n}$ pertence a $K_-^{(1)}$, para cada $n \geq 0$. Sendo assim, $\{x^n z x^{-n}\}_{n \geq 0}$ tem ponto de acumulação, e como z está em $U^{(2)}$, pelo Lema 3.2.21, segue que z pertence a $K_-^{(2)}$. Portanto, $K_-^{(2)} = K_-^{(1)} \cap U^{(2)}$. $\square$

Teorema B. *Sejam $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ subgrupos abertos e compactos de G os quais são tidy para x , e considere*

$$K_+^{(i)} = \bigcap_{n \geq 0} x^n U^{(i)} x^{-n}, i = 1, 2.$$

Então $[xK_+^{(1)}x^{-1} : K_+^{(1)}] = [xK_+^{(2)}x^{-1} : K_+^{(2)}]$ e esse índice é finito.

Demonstração. Segue do Lema 2.1.16 que $xU^{(i)}x^{-1} = (xK_+^{(i)}x^{-1})U_1^{(i)}$, onde $U_1^{(i)} = U^{(i)} \cap xU^{(i)}x^{-1}$, então $[xK_+^{(i)}x^{-1} : K_+^{(i)}] = [(xK_+^{(i)}x^{-1})U_1^{(i)} : K_+^{(i)}U_1^{(i)}] = [xU^{(i)}x^{-1} : U_1^{(i)}]$, o qual é finito, pela Proposição 2.3.6, pois $U_1^{(i)}$ é um subgrupo aberto do grupo compacto $xU^{(i)}x^{-1}$. Sabemos, pelo Lema 4.1.1, que $U^{(3)} = U^{(1)} \cap U^{(2)}$ é tidy para x , e temos $U^{(3)} \subseteq U^{(1)}$. Como, pelo Lema 4.1.2, temos

$K_+^{(3)} = K_+^{(1)} \cap U^{(3)}$, segue que $K_+^{(3)}$ é um subgrupo aberto e compacto de $K_+^{(1)}$, consequentemente, $[K_+^{(1)} : K_+^{(3)}]$ é finito. Como a conjugação por x é um automorfismo em G , temos $[xK_+^{(1)}x^{-1} : xK_+^{(3)}x^{-1}] = [K_+^{(1)} : K_+^{(3)}]$. O resultado segue, pois

$$\begin{aligned} [xK_+^{(1)}x^{-1} : K_+^{(3)}] &= [xK_+^{(1)}x^{-1} : xK_+^{(3)}x^{-1}] [xK_+^{(3)}x^{-1} : K_+^{(3)}] = \\ &= [xK_+^{(1)}x^{-1} : K_+^{(1)}] [K_+^{(1)} : K_+^{(3)}]. \end{aligned}$$

Logo $[xK_+^{(3)}x^{-1} : K_+^{(3)}] = [xK_+^{(1)}x^{-1} : K_+^{(1)}]$. Considerando que $U^{(3)} \subseteq U^{(2)}$ e repetindo o argumento temos que $[xK_+^{(3)}x^{-1} : K_+^{(3)}] = [xK_+^{(2)}x^{-1} : K_+^{(2)}]$. Portanto, temos o resultado. $\square$

Agora definiremos uma função s de valor inteiro que será chamada de função escala.

Definição 4.1.3. *Seja G um grupo totalmente desconexo e localmente compacto, e defina uma função de valores inteiro, s , em G da seguinte maneira.*

Para cada x em G escolha um subgrupo U compacto e aberto de G o qual é tidy sob conjugação por x e coloque $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$. Então defina

$$s(x) = [xK_+x^{-1} : K_+]. \quad (1.2)$$

Os Teoremas A e B mostram que s está bem definida. Notemos que se U é tidy para x , então é tidy para x^{-1} e $s(x^{-1}) = [x^{-1}K_-x : K_-]$

Exemplo 4.1.4. *Pelo exemplo 3.1.3, temos que um subgrupo tidy para $x = (e, 1)$ em $A \rtimes \mathbb{Z} = \{(a, m); a \in A, m \in \mathbb{Z}\}$ é $A \times \{0\}$. A função escala é $s(x) = 1$, pois $s(x) = [xK_+x^{-1} : K_+] = [x(A \times \{0\})x^{-1} : (A \times \{0\})] = [(A \times \{0\}) : (A \times \{0\})] = 1$.*

Exemplo 4.1.5. Considerando o exemplo 3.1.4 temos que um subgrupo tidy para $x = (e, 1) \in B \rtimes \mathbb{Z}$ é $B_0 \times \{0\}$. A função escala de x é $s(x) = [xK_+x^{-1} : K_+] = [x(B_0 \times \{0\})x^{-1} : B_0 \times \{0\}] = [B_{-1} : B_0] = |F|$, onde $|F|$ denota o número de elementos do grupo finito F .

Exemplo 4.1.6. Um subgrupo tidy para $x = (e_A, 1) \in C \rtimes \mathbb{Z}$ é $C_0 \times \{0\}$ pelo exemplo 3.1.5. A função escala de x é $s(x) = [xK_+x^{-1} : K_+] = [x(\{e_A\} \times \{0\})x^{-1} : \{e_A\} \times \{0\}] = 1$.

Posteriormente veremos algumas propriedades da função escala $s(x) = [xK_+x^{-1} : K_+]$, que como vimos é bem definida e $s(x^{-1}) = [x^{-1}K_-x : K_-]$, e também mostraremos que é uma função contínua. Além disso, temos que a conjugação por um elemento x distorce um grupo localmente compacto, expandindo na direção K_+ e contraindo na direção K_- . A função $s(x)$ mede a escala de expansão e contração e está relacionado a uma função modular em G , pois como $xUx^{-1} = (xK_+x^{-1})U_1$, onde U é tidy para x e $U_1 = U \cap (xUx^{-1})$, temos que $s(x) = [xUx^{-1} : U_1] = \frac{m(xUx^{-1})}{m(U_1)}$, onde m é a medida de Haar em G . E também temos que $s(x^{-1}) = \frac{m(U)}{m(U_1)}$, assim, a função modular $\Delta(x) = s(x)s(x^{-1})^{-1}$, $x \in G$, assume valores racionais.

Corolário 4.1.7. Seja G um grupo totalmente desconexo e localmente compacto. Então a função modular $\Delta(x) = s(x)s(x^{-1})^{-1}$, $x \in G$, assume valores racionais.

Demonstração. Como $s(x)$ é uma função que assume valores naturais não nulos, então $\Delta(x) = \frac{s(x)}{s(x^{-1})}$ é um número racional. □

Corolário 4.1.8. *Seja G um grupo totalmente desconexo e localmente compacto e $n \geq 0$. Então $s(x^n) = s(x)^n, x \in G$.*

Demonstração. Por definição $s(x^n) = [x^n K_+ x^{-n} : K_+]$. Como a conjugação por x^i é um automorfismo em G , temos que $[x^i x K_+ x^{-1} x^{-i} : x^i K_+ x^{-i}] = [x K_+ x^{-1} : K_+]$.

Logo

$$\begin{aligned}
 [x^n K_+ x^{-n} : K_+] &= [x^n K_+ x^{-n} : x^{n-1} K_+ x^{-n+1}] [x^{n-1} K_+ x^{-n+1} : x^{n-2} K_+ x^{-n+2}] \cdots \\
 &\quad \cdots [x K_+ x^{-1} : K_+] . \\
 &= [x^{n-1} (x K_+ x^{-1}) x^{-n+1} : x^{n-1} K_+ x^{-n+1}] [x^{n-2} (x K_+ x^{-1}) x^{-n+2} : x^{n-2} K_+ x^{-n+2}] \cdots \\
 &\quad \cdots [x K_+ x^{-1} : K_+] . \\
 &= [x K_+ x^{-1} : K_+] \cdot [x K_+ x^{-1} : K_+] \cdots [x K_+ x^{-1} : K_+] \\
 &= s(x)^n
 \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.9. *Sejam G um grupo localmente compacto e totalmente desconexo e U um subconjunto aberto e compacto de G que é tidy para x , sejam V e W subgrupos de U tais que $K_+ \subseteq V$ e $K_- \subseteq W$, e consideremos $s, t \in U$. Então $(sV s^{-1})(tW t^{-1}) = U = (tW t^{-1})(sV s^{-1})$.*

Demonstração. Como U é invariante sob a conjugação por $s^{-1} \in U$, será suficiente mostrarmos que $V(tW t^{-1}) = U$, para cada $t \in U$. Considerando $t = zy, z \in K_+, y \in$

K_- , temos que:

$$\begin{aligned}
 V(tWt^{-1}) &= z(z^{-1}Vz)(yWy^{-1})z^{-1} \\
 &= z(VW)z^{-1}, \text{ pois } z \in V \text{ e } y \in W \\
 &= zUz^{-1}, \quad \text{pois } U = VW \\
 &= U, \quad \text{pois } z \in U.
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos $U = (tWt^{-1})(sVs^{-1})$. □

Lema 4.1.10. *Sejam U tidy em x e $w \in U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $U_n = \bigcap_{k=0}^n x^k U x^{-k}$ e $U'_n = \bigcap_{k=0}^n (wx)^k U (wx)^{-k}$. Para cada n existe um $s_n \in K_-$ tal que $U'_n = s_n U_n s_n^{-1}$.*

Demonstração. A prova será por indução em n . Se $n = 0$, temos que $U_0 = U = U'_0$, considerando $s_0 = e \in K_-$ podemos verificar que $U'_0 = s_0 U_0 s_0^{-1}$.

Consideremos que exista $s_n \in K_-$ tal que $U'_n = s_n U_n s_n^{-1}$, vamos usar o lema anterior considerando $V = U_n \supseteq K_+$ e $W = K_- \supseteq K_-$. Então para $t = e$ e $s = s_n$, temos que qualquer $w \in U = W(sVs^{-1}) = K_-(s_n U_n s_n^{-1})$ pode ser escrito como $w = zy$,

onde $z \in K_-$ e $y \in s_n U_n s_n^{-1} = U'_n$. Então

$$\begin{aligned}
 (xw)U'_n(xw)^{-1} &= (xzy)U'_n(y^{-1}z^{-1}x^{-1}) \\
 &= (xz)(yU'_n y^{-1})(z^{-1}x^{-1}) \\
 &= (xz)(s_n U_n s_n^{-1})(z^{-1}x^{-1}) \\
 &= (xzs_n x^{-1})(xU_n x^{-1})(xs_n^{-1}z^{-1}x^{-1}) \\
 &= s_{n+1}(xU_n x^{-1})s_{n+1}^{-1}.
 \end{aligned}$$

onde $s_{n+1} = xzs_n x^{-1}$ pertence a K_- , pois como z e s_n estão no subgrupo K_- , então o produto $ys_n \in K_-$. Logo $s_{n+1} = xzs_n x^{-1} \in K_-$, pois $xK_-x^{-1} \subseteq K_-$. Como $U'_{n+1} = U \cap \bigcap_{k=1}^{n+1} (xw)^k U (xw)^{-k} = U \cap ((xw)(\bigcap_{k=0}^n (xw)^k U (xw)^{-k})(xw)^{-1})$. Segue que

$$\begin{aligned}
 U'_{n+1} &= ((xw)U'_n(xw)^{-1}) \cap U \\
 &= (s_{n+1}(xU_n x^{-1})s_{n+1}^{-1}) \cap (s_{n+1}U_n s_{n+1}^{-1}) \\
 &= s_{n+1}((xU_n x^{-1}) \cap U)s_{n+1}^{-1} \\
 &= s_{n+1}U_{n+1}s_{n+1}^{-1}
 \end{aligned}$$

□

Embora o próximo lema seja estruturalmente semelhante ao lema acima, as provas não são exatamente as mesmas.

Lema 4.1.11. *Sejam U tidy em x e $w \in U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $U_{-n} = \bigcap_{k=0}^n x^{-k} U x^k$ e $U'_{-n} = \bigcap_{k=0}^n (wx)^{-k} U (wx)^k$. Para cada n existe um $t_n \in K_+$ tal que $U'_{-n} = t_n U_{-n} t_n^{-1}$.*

Demonstração. A prova será por indução em n . Se $n = 0$, temos que $U_0 = U = U'_0$ e considerando $t_0 = e \in K_+$ podemos verificar que $U'_0 = t_0 U_0 t_0^{-1}$.

Consideremos que exista $t_n \in K_+$ tal que $U'_{-n} = t_n U_{-n} t_n^{-1}$, vamos usar o Lema 4.1.9 considerando $V = K_+ \supseteq K_+$ e $W = (x^{-1} U_{-n} x \cap U) \supseteq K_-$, então para $t = x^{-1} t_n x \in U$ e $s = e$, temos que qualquer $w \in U = (t W t^{-1})(s V s^{-1}) = ((x^{-1} t_n x)(x^{-1} U_{-n} x \cap U)(x^{-1} t_n x)^{-1}) K_+ \subseteq ((x^{-1} t_n x)(x^{-1} U_{-n} x)(x^{-1} t_n x)^{-1}) K_+$ pode ser escrito como $w = yz$, onde $y \in (x^{-1} t_n x)(x^{-1} U_{-n} x)(x^{-1} t_n x)^{-1}$ e $z \in K_+$. Como

$$\begin{aligned}
 (xw)^{-1} U'_{-n} (xw) &= (xw)^{-1} (t_n U_{-n} t_n^{-1}) (xw) \\
 &= w^{-1} x^{-1} t_n (x x^{-1}) U_{-n} (x x^{-1}) t_n^{-1} x w \\
 &= w^{-1} (x^{-1} t_n x) (x^{-1} U_{-n} x) (x^{-1} t_n x)^{-1} w \\
 &= (yz)^{-1} [(x^{-1} t_n x) (x^{-1} U_{-n} x) (x^{-1} t_n x)^{-1}] (yz) \\
 &= z^{-1} y^{-1} [(x^{-1} t_n x) (x^{-1} U_{-n} x) (x^{-1} t_n x)^{-1}] y z \\
 &= z^{-1} [(x^{-1} t_n x) (x^{-1} U_{-n} x) (x^{-1} t_n x)^{-1}] z \\
 &= t_{n+1} (x^{-1} U_{-n} x) t_{n+1}^{-1},
 \end{aligned}$$

onde $t_{n+1} = z^{-1} x^{-1} t_n x \in K_+$, pois $z^{-1} \in K_+$, e como $t_n \in K_+$, segue, pelo Lema

3.2.3, que $x^{-1}t_n x \in K_+$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 U'_{-(n+1)} &= ((xw)^{-1}U'_{-n}(xw)) \cap U \\
 &= (t_{n+1}x^{-1}U_{-n}xt_{n+1}^{-1}) \cap U \\
 &= (t_{n+1}x^{-1}U_{-n}xt_{n+1}^{-1}) \cap (t_{n+1}Ut_{n+1}^{-1}) \\
 &= t_{n+1}((x^{-1}U_{-n}x) \cap U)t_{n+1}^{-1} \\
 &= t_{n+1}U_{-(n+1)}t_{n+1}^{-1}
 \end{aligned}$$

□

Teorema C. *Sejam G um grupo localmente compacto e totalmente desconexo, $x \in G$, U um subgrupo aberto e compacto de G que é tidy para x e $w \in U$. Então U é tidy sob a conjugação por xw e $s(xw) = s(x)$, e a função escala s é uma função contínua.*

Demonstração. Sejam $K_+ = \bigcap_{n \geq 0} x^n U x^{-n}$, $K_- = \bigcap_{n \geq 0} x^{-n} U x^n$, $K'_+ = \bigcap_{n \geq 0} (xw)^n U (xw)^{-n}$ e $K'_- = \bigcap_{n \geq 0} (xw)^{-n} U (xw)^n$, segue do Lema 4.1.10 que $K'_+ = (sK_+s^{-1})$, onde s é um ponto de acumulação de $s_n \in K_-$, e segue do Lema 4.1.11 que $K'_- = tK_-t^{-1}$, onde t é um ponto de acumulação de $t_n \in K_+$. Aplicando o Lema 4.1.9, considerando $V = K_+$ e $W = K_-$, segue que $U = (sK_+s^{-1})(tK_-t^{-1}) = (tK_-t^{-1})(sK_+s^{-1})$. Então $U = K'_+K'_- = K'_-K'_+$.

Podemos mostrar indutivamente que para cada $n \geq 0$ existe $u_n \in K_-$ tal que $(xw)^n K'_+ (xw)^{-n} = u_n (x^n K_+ x^{-n}) u_n^{-1}$. Do Lema 4.1.10 implicamos que $u_n K_+ u_n^{-1} = K'_+$, onde $u_n \in K_-$, logo $u_n^{-1} K'_+ u_n = K_+$.

Consideremos $z \in ((xw)^m K'_+ (xw)^{-m}) \cap U$, para algum m . Logo temos $z \in$

$(u_m(x^m K_+ x^{-m}) u_m^{-1}) \cap U$, para algum m , então $z \in (u_m(x^m K_+ x^{-m}) u_m^{-1}) \cap (u_m U u_m^{-1}) = u_m(x^m K_+ x^{-m} \cap U) u_m^{-1}$, logo $u_m^{-1} z u_m \in x^m K_+ x^{-m} \cap U \subseteq (\bigcup_{m \geq 0} x^m K_+ x^{-m}) \cap U = K_+$, pois U é tidy para x . Assim, $(xw)^m K'_+(xw)^{-m} \cap U \subset u_m K_+ u_m^{-1} = K'_+$, como $K'_+ \subseteq (xw)^m K'_+(xw)^{-m} \cap U$, temos que $(xw)^m K'_+(xw)^{-m} \cap U = K'_+$. Logo, pelo Lema 3.2.5, concluímos que $\bigcup_{m \geq 0} (xw)^m K'_+(xw)^{-m}$ é fechado. Portanto, U é tidy sob a conjugação por xw .

Finalmente, como existe $u_1 \in K_-$ tal que $u_1(x K_+ x^{-1}) u_1^{-1} = (xw) K'_+(xw)^{-1}$, e $u_1 K_+ u_1^{-1} = K'_+$, temos que $s(x) = [x K_+ x^{-1} : K_+] = [u_1(x K_+ x^{-1}) u_1^{-1} : u_1 K_+ u_1^{-1}] = [(xw) K'_+(xw)^{-1} : K'_+] = s(xw)$, e segue que $s(xw) = s(x)$.

Agora mostraremos que a função escala s é uma função contínua em G . De fato, a função escala é definida de G em $\mathbb{Z}^+$, e pelo Teorema A sabemos que para cada $x \in G$ existe um subgrupo U tidy para x , então para esse subgrupo vamos aplicar a primeira parte deste teorema.

Considerando $\mathbb{Z}^+$ munido da topologia discreta, temos que os abertos básicos são da forma $A = \{n, n \in \mathbb{Z}\}$ e considerando $s(x) = [x K_+ x^{-1} : K_+] = n_x$. Para cada vizinhança de n_x temos que existe uma vizinhança aberta de $W = Ux$ de $x \in G$ tal que para todo $w \in W$ temos que $s(w) = s(x) = n$. Logo s é contínua em x . Portanto, pela arbitrariedade de $x \in G$ concluímos que s é contínua em G . $\square$

Proposição 4.1.12. *Seja G um grupo localmente compacto e totalmente desconexo e $x \in G$ é o limite de uma sequência $\{y_n^{k_n}\}$, onde $k_n \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$, então existe um subgrupo aberto e compacto de G que é normalizado por x .*

Demonstração. Pela continuidade da função escala e pelo fato dos valores da função escala serem números inteiros positivos, temos que $s(x) = s(y_n^{k_n})$, para n suficientemente grande. Usando o Corolário 4.1.8 temos que $s(x) = s(y_n)^{k_n}$. Como k_n é arbitrário, temos que a última igualdade somente pode acontecer se $s(x) = s(y_n) = 1$, pois s é uma função que assume valores no conjunto dos inteiros positivos.

Como $x \in G$ é o limite de uma sequência $\{y_n^{k_n}\}$, onde $k_n \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$, pela continuidade da função inversa temos que $x^{-1} \in G$ é o limite de uma sequência $\{y_n^{-k_n}\}$, onde $k_n \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$. Analogamente, ao caso anterior, como s é uma função contínua que assume valores inteiros positivos temos que $s(x^{-1}) = s(y_n^{-k_n}) = s(y_n)^{-k_n}$, para n suficientemente grande, isso acontece somente se $s(x^{-1}) = s(y_n) = 1$. Sendo assim, temos que $s(x) = [xK_+x^{-1} : K_+] = 1$ e $s(x^{-1}) = [x^{-1}K_-x : K_-] = 1$, logo $xK_+x^{-1} = K_+$ e $x^{-1}K_-x = K_-$. Pelo Teorema A sabemos que existe um subgrupo aberto e compacto, U , de G o qual é tidy para x , isto é, $U = K_+K_-$, portanto, $xUx^{-1} = xK_+K_-x^{-1} = xK_+x^{-1}xK_-x^{-1} = K_+K_- = U$, e o resultado segue. $\square$

4.2 Demonstração da Conjectura

Nesta seção apresentaremos a prova da conjectura proposta por Hoffman e Mukherjea, no artigo [HM81], para o caso totalmente desconexo demonstrada no artigo [JRW96], a qual diz que um grupo localmente compacto é um neat group.

Definição 4.2.1. *Um grupo não compacto G localmente compacto possui um comportamento estranho se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Existe um subgrupo normal fechado N de G tal que G/N é compacto;*
2. *o subgrupo N contém um subgrupo U compacto;*
3. *existe um elemento x tal que para cada vizinhança V de U temos que $N \subseteq$*

$$\overline{\bigcup_{n \geq 1} x^n V x^{-n}}.$$

Os grupos que possuem um comportamento estranho foram chamados de *strange groups*. E aos grupos que não são estranhos deram o nome de *neat groups*.

A observação 3 do artigo [HM81] nos diz que qualquer grupo discreto é um neat group. E uma afirmação que pode ser encontrada no artigo [JRW96] na página 676, é que existem grupos topológicos estranhos que não são localmente compactos.

Aqui estamos interessados em mostrar que não existem grupos estranhos localmente compactos. É importante frisarmos que para o caso localmente compacto conexo, Hoffman e Mukherjea provaram que a conjectura vale. O caso reduzido para grupos totalmente desconexos, foi provado por Jaworski, Rosenblatt e Willis em [JRW96]. Apresentaremos aqui a demonstração do caso reduzindo o problema

para o caso totalmente desconexo. Os seguintes resultados podem ser encontrados no artigo [JRW96].

Da definição de função escala e dos teoremas demonstrados anteriormente decorrem as seguintes propriedades:

- I). $s(x) = 1 = s(x^{-1})$ se, e somente se, $xUx^{-1} = U$, para cada subgrupo U , o qual é tidy para x .
- II). $s(\alpha(x)) = s(x)$, para cada automorfismo contínuo, α , de G .

Apresentamos uma propriedade importante da função escala no Teorema C, a última parte do teorema nos diz que a função escala s é uma função contínua em G . E no lema a seguir exibiremos uma propriedade adicional da função de escala.

Lema 4.2.2. *Sejam N um subgrupo fechado e normal de G tal que G/N é compacto e $s(z) = 1$, para todo $z \in N$. Então $s(z) = 1$, para todo $z \in G$.*

Demonstração. Seja V um subgrupo aberto compacto de G . Como $N \trianglelefteq G$, então VN é um subgrupo aberto de G .

1. Suponha que $z \in VN$, então $z = vn$, com $v \in V$ e $n \in N$. Seja U um subgrupo aberto compacto de VN que é tidy para z . Note que U é aberto e $\{xU\}_{x \in V}$ é uma cobertura por abertos de V . Como V é compacto, existe uma subcobertura finita $\{x_i U\}_{i=1}^n$ de V , logo existe x_j tal que $x_j U \cap \{v^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é infinito. Tome k_1, k_2 tais que $v^{k_1} U = v^{k_2} U = x_j U$, então existe $k = |k_1 - k_2|$ tal que $v^k \in U$. Desde que N é normal $z^k = v^k w$, $v^k \in U$ e $w \in N$, como U é tidy para z^k e $v^{-k} \in U$, então U é tidy para $w = v^{-k} z^k$, pelo Teorema C.

Por hipótese $s(w) = 1 = s(w^{-1})$, então $wUw^{-1} = U$. Como $v^k \in U$ segue que $z^k U z^{-k} = v^k w U w^{-1} v^{-k} = v^k U v^{-k} = U$, ou seja, z^k normaliza U . Assim, $s(z^k) = 1$, então $s(z)^k = 1$. Portanto, $s(z) = 1$.

2. Agora suponha que $z \in G \setminus (VN)$. Como G/N é compacto e V é aberto, existe k tal que $z^k \in VN$, pois VN é aberto em G/N . Logo, pelo caso anterior, $s(z^k) = 1$, então $s(z)^k = 1$. Portanto, $s(z) = 1$ para todo $z \in G$.

□

Finalmente, mostraremos que não existem grupos *strange* localmente compacto e totalmente desconexos.

Teorema 4.2.3 (Conjectura [HM81]). *Um grupo G localmente compacto e totalmente desconexo é neat.*

Demonstração. Suponhamos que G é um grupo estranho (*strange group*). Então G é não compacto e existem N subgrupo normal e fechado de G , $H \leq N$ e $z \in G$ tais que G/N é compacto, H é compacto e se V é uma vizinhança de H , então $N \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} z^n V z^{-n}}$.

Como H é compacto, $s(ew) = s(w) = s(e) = [eK_+e^{-1} : K_+] = 1$, isto é, $s(w) = s(e) = 1$, para todo $w \in H$. Como s é contínua e de valores inteiros, pelo Teorema C, existe uma vizinhança V de H tal que $s(v) = 1$, para todo $v \in V$. Como $s(z^n v z^{-n}) = 1$, para todo n e todo $v \in V$, segue que $s(x) = 1$, para todo $x \in \bigcup_{n \geq 1} z^n V z^{-n}$. Pela continuidade da função escala e como $N \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} z^n V z^{-n}}$, temos que $s(x) = 1$, para todo $x \in N$.

Pelo Lema 4.2.2 temos que $s(g) = 1$, para todo $g \in G$, e pelo Teorema A existe um subgrupo aberto e compacto U de G que é tidy para z , então $zUz^{-1} = zK_+K_-z^{-1} = (zK_+z^{-1})(zK_-z^{-1}) = K_+K_- = U$, pois $s(z) = s(z^{-1}) = 1$, logo $zK_+z^{-1} = K_+$ e $zK_-z^{-1} = K_-$. Portanto, z normaliza U .

Como UH é uma vizinhança de H , então $N \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} z^n UH z^{-n}}$. Como $zUz^{-1} = U$, segue que

$$UN \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} z^n UH z^{-n}}.$$

Uma vez que UN/N é aberto no compacto G/N , existe $k \geq 1$ tal que $z^{kr} \in UN$ para todo r . Assim $z^{kr} \in z^n UH z^{-n}$ para algum n , e $z^{kr} \in UH$, para todo r . Então $\overline{\langle z \rangle}$ é um subgrupo compacto. Portanto,

$$N \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} z^n UH z^{-n}} \subseteq \overline{\langle z \rangle} UH \overline{\langle z \rangle},$$

é um subgrupo normal e fechado contido num compacto, pela Proposição 2.2.15 temos que N é compacto. Como G/N é compacto, temos que G é compacto, o que é uma contradição, pois G é estranho. $\square$

Referências

- [Bou66] Nicolas Bourbaki. *Elements of mathematics: General topology*. Hermann, 1966.
- [EH63] Kenneth A. Ross Edwin Hewitt. *Abstract Harmonic Analysis*. Springer-Verlag, 2^a edition, 1963.
- [HM81] Karl H Hofmann and Arunava Mukherjea. Concentration functions and a class of non-compact groups. *Mathematische Annalen*, 256:535–548, 1981.
- [JRW96] Wojciech Jaworski, Joseph Rosenblatt, and George Willis. Concentration functions in locally compact groups. *Mathematische Annalen*, 305:673–691, 1996.
- [Leq14] Arnaldo Garcia; Yves Lequain. *Álgebra: Um curso de Introdução*. Impa, 2014.
- [Maj90] Abdul Majeeda. *Elements of Topology and Functional Analysis*. Ilmi Kitab Khana, 1990.

-
- [MD55] Zippin L Montgomery D. *Topological transformation groups*. Interscience, 1^a edition, 1955.
- [Mun00] James Munkres. *Topology*. Perarson, 2^a edition, 2000.
- [Rob96] Derek J.S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. Springer-Verlag, 1^a edition, 1996.
- [van31] David van Dantzig. *Studien over topologische algebra*. PhD thesis, [Groningen], 1931. Relation: <http://www.rug.nl/> Rights: Paris.
- [Wil94] George Willis. The structure of totally disconnected, locally compact groups. *Mathematische Annalen*, 300:341–363, 1994.