



Universidade de Brasília

**Produto entrelaçado como subgrupo de
autômata-grupo**

Junio Rocha de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Alex Carrazedo Dantas

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática

Dezembro 2024

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R048pp Rocha de Oliveira, Junio
Produto entrelaçado como subgrupo de autômata-grupo /
Junio Rocha de Oliveira; orientador Alex Carrazedo Dantas.
-- Brasília, 2024.
72 p.

Tese(Doutorado em Matemática) -- Universidade de
Brasília, 2024.

1. Automorfismos de árvore. 2. Representações
autossimilares. 3. Representações finitas por estado. 4.
Produto entrelaçado. 5. Grupos do tipo Lamplighter.. I.
Carrazedo Dantas, Alex, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço à minha família pelo apoio e incentivo em cada etapa dessa jornada, por todas as conversas reconfortantes e motivadoras. Cada retorno para casa simbolizava um momento de alívio e de renovação das energias. Em especial, agradeço aos meus pais, Josias e Ivolene, aos meus irmãos, Raihane e Thiago, e aos meus sobrinhos, Vitor e Rafaela.

Aos amigos que fiz durante a graduação, Lilian, Nathan, Nádia e Pâmella pelo companheirismo, pela torcida e por todos os momentos ímpares que lembro sempre com carinho.

Aos amigos que fiz no período de pós-graduação, em especial, Carla, Carlos, Catherine, Cláudia, Dan, João Paulo, Kelvin John, Maria Edna e Pablo, pelo apoio, amizade, momentos de descontração, preocupação, convivência agradável e por vibrarem com as minhas conquistas.

Aos professores da graduação que me impulsionaram neste caminho, destaco, em especial, Francislaine, por me incentivar a escrever com clareza e detalhes; Eunice, por despertar em mim o fascínio em estudar teoria de grupos; e Clayton, pelas orientações nos seminários de iniciação científica.

Aos professores da pós-graduação com quem tive a oportunidade de aprender e que contribuíram com todo o processo, dos quais destaco Daniele Nantes, Igor dos Santos, Mauricio Ayala e Raimundo Bastos.

Ao Túlio, pela colaboração nos resultados do trabalho, pelas discussões, sugestões e por disponibilizar o tempo para assistir a diversos seminários.

Ao meu orientador, Alex Carrazedo Dantas, pelo tempo dedicado a me orientar durante o período de mestrado e doutorado, pela paciência, gentileza nas correções, didática nas explicações, compreensão, confiança e por todo o incentivo ao longo desses anos.

Aos membros da banca examinadora, Dessislava Hristova Kochloukova, Luis Augusto de Mendonça, Said Najati Sidki e Martino Garonzi, pelas correções, sugestões e comentários realizados.

Ao CAPES pelo apoio financeiro a este trabalho.

Resumo

O grupo de automorfismos \mathcal{A}_m da árvore m -regular com uma raiz \mathcal{T}_m é identificado com o produto entrelaçado $\mathcal{A}_m \wr_Y S_m$, onde $Y = \{1, \dots, m\}$. Um subgrupo G de \mathcal{A}_m é finito por estado se dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \sigma \in G$, $Q(\alpha)$ é finito, onde $Q(\alpha) = \{\alpha\} \cup Q(\alpha_1) \cup \dots \cup Q(\alpha_m)$ é o conjunto de estados de α . E G é autossimilar se para todo $\alpha \in G$, tivermos $Q(\alpha) \subset G$. Um grupo finitamente gerado é um autômata-grupo se for autossimilar e finito por estado. Desenvolveremos resultados para obtenção de imersões em autômata-grupos de grupos do tipo $A \wr G$, onde A é um grupo abeliano finitamente gerado e G é um subgrupo de um autômata-grupo. Em particular, obtemos representações dos grupos $C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$, $C_2 \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ e $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$. Para o caso do grupo $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$, provamos que ele é subgrupo de um autômata-grupo gerado por um alfabeto de duas letras, respondendo afirmativamente o Problema 15.19 - (b) do Kourovka Notebook propostos por A. M. Brunner e S. Sidki em 2002. [6, 17]

Palavras-chave: Automorfismos de árvore, representações autossimilares, representações finitas por estado, produto entrelaçado, grupos do tipo Lamplighter.

Abstract

The group of automorphisms \mathcal{A}_m of the one-rooted regular m -tree \mathcal{T}_m is identified with the wreath product $\mathcal{A}_m \wr_Y S_m$, where $Y = \{1, \dots, m\}$. A subgroup G of \mathcal{A}_m is said to be finite-state if given $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma \in G$, $Q(\alpha)$ is finite, where $Q(\alpha) = \{\alpha\} \cup Q(\alpha_1) \cup \dots \cup Q(\alpha_m)$. And G is self-similar if for every $\alpha \in G$ we have $Q(\alpha) \subset G$. A finitely generated group is said to be an automata group if it admits a faithful self-similar finite-state representation on some regular m -tree. We prove that if G is a subgroup of an automata group, then for each finitely generated abelian group A , the wreath product $A \wr G$ is a subgroup of an automata group. We obtain, for example, that $C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$, $C_2 \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$, and $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ are subgroups of automata groups. In the particular case $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$, we prove that it is a subgroup of a two-letters automata group; this solves Problem 15.19 - (b) of the Kourovka Notebook proposed by A. M. Brunner and S. Sidki in 2000 [8, 17].

Keywords: Tree-automorphisms, self-similar representation, finite-state representation, automata group, wreath product, Lamplighter groups.

Notação

| | |
|---|--|
| $H \leq G$ | H é subgrupo de G |
| $H \triangleleft G$ | H é subgrupo normal de G |
| $G \simeq H$ | G é isomorfo a H |
| G/N | grupo quociente de G pelo subgrupo normal N |
| x^y | $y^{-1}xy$ |
| X^Y | $\langle x^y \mid x \in X, y \in Y \rangle$ |
| $[x, y]$ | $x^{-1}y^{-1}xy$ |
| $[A, B]$ | $\langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ |
| G' | $[G, G]$ |
| $G^{(n)}$ | n -ésima derivada de G |
| $\langle X \rangle$ | grupo gerado pelo conjunto X |
| $(x)g$ | ação à direita de g em x |
| $G_1 \times \cdots \times G_n$ | produto direto dos grupos G_1, \dots, G_n |
| $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ | produto cartesiano dos grupos $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$ |
| $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ | produto direto dos grupos $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$ |
| $H \rtimes K$ | produto semidireto dos grupos H e K |
| $H \wr K$ | produto entrelaçado $\bigoplus_{k \in K} H_k \rtimes K$ |
| X^* | conjunto de todas as palavras finitas sobre o conjunto X |
| \mathcal{T}_m | árvore uni-raíz m -regular |
| \mathcal{A}_m | grupo de automorfismos de \mathcal{T}_m |
| $\mathcal{G}(A)$ | subgrupo de \mathcal{A}_m gerado pelo autômato A |
| S_n | grupo de todas as permutações entre n elementos |
| $Sym(X)$ | conjunto de todas as bijeções de X em X |
| $Q(\beta)$ | conjunto de estados de β , onde β é um automorfismo da árvore \mathcal{T}_m ou um autômato |
| $\mathcal{F}(Y)$ | subgrupo de todos os automorfismos de estado finito de \mathcal{A}_m , onde $ Y = m$ |

Sumário

| | |
|---|-------------|
| Notação | ix |
| Lista de Figuras | xiii |
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 7 |
| 1.1 A árvore uni-raiz m -regular \mathcal{T}_m | 7 |
| 1.2 O produto entrelaçado de grupos | 10 |
| 1.3 O grupo de automorfismos \mathcal{A}_m | 14 |
| 1.4 Grupos finitos por estado | 16 |
| 1.5 Grupos autossimilares | 18 |
| 2 Representação de grupos em \mathcal{A}_m | 21 |
| 2.1 Endomorfismos virtuais | 21 |
| 2.2 Inflação e deflação de grau | 27 |
| 2.3 Concatenação geral | 31 |
| 2.4 Autômata-grupo | 32 |
| 3 O subgrupo parabólico | 37 |
| 3.1 O subgrupo parabólico | 37 |
| 3.2 Subgrupos parabólicos de grupos autossimilares transitivos | 39 |
| 3.3 Demonstração do Teorema A | 40 |
| 3.4 O grupo $B \wr \mathbb{Z}$ | 44 |
| 4 Representações autossimilares de produtos semidiretos | 47 |
| 4.1 Produto semidireto autossimilar do tipo $A^{(\mathbf{H})} \rtimes G^S$ com A abeliano e $\mathbf{H} = (H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G)$ | 47 |
| 4.2 Representações finitas por estado de grupos do tipo $A \wr (B \wr \mathbb{Z})$ | 54 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.2.1 | Representação de $C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$ | 54 |
| 4.2.2 | Representação de $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$ | 56 |
| 5 | Representações finitas por estado | 59 |
| 5.1 | Grupo do tipo $A \wr G$ finito por estado | 59 |
| 5.2 | Representação finita por estado de grau 2 do grupo $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ | 63 |
| | Bibliografia | 69 |
| | Índice | 71 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Loop | 7 |
| 1.2 | Arestas paralelas | 8 |
| 1.3 | Caminho abed | 8 |
| 1.4 | Ciclo abe | 9 |
| 1.5 | Árvore binária | 10 |
| 1.6 | Sub-árvore $11\mathcal{T}_2$ | 10 |
| | | |
| 2.1 | Transição de estados | 32 |
| 2.2 | Transição de estados em A^{-1} | 33 |
| 2.3 | Autômata β | 34 |
| 2.4 | Autômata α | 35 |

Introdução

O *Problema Geral de Burnside*, formulado em 1902 por William Burnside, questiona se um grupo finitamente gerado periódico é necessariamente um grupo finito. Esse problema obteve uma resposta negativa em 1964 através de um contra-exemplo formulado por Evgeny Golod e Igor Shafarevich.

Posteriormente, no ano de 1980, Rostislav Grigorchuk forneceu, em [12], um contra-exemplo para o *Problema Geral de Burnside*, o grupo de Grigorchuk, respondendo também o *Problema de Milnor* como sendo o primeiro grupo de crescimento intermediário, isto é, com crescimento entre o polinomial e o exponencial. Em 1983, Narain Gupta e Said Najati Sidki forneceram outro contra-exemplo em [15] para o problema em questão, que se destacou pela elegância em sua construção. O grupo de Gupta-Sidki é um 3-grupo infinito gerado por 2 elementos que ocorre como um subgrupo de \mathcal{A}_3 .

Em 1976, Michael Francis Atiyah utiliza em [1] os l^2 - números de Betti $b_{(2)}^i(M)$ de uma variedade Riemanniana compacta M , com $i \geq 0$ inteiro. Definindo $fin^{-1}(G)$ como o subgrupo do grupo aditivo dos números racionais \mathbb{Q} gerado por todos os inversos das ordens de todos elementos de ordens finitas do grupo G , Atiyah conjectura: *seja M é uma variedade compacta e $\pi(M)$ é o seu grupo fundamental. Então $b_{(2)}^i(M) \in fin^{-1}(\pi(M))$, para todo inteiro i .* Essa conjectura foi respondida negativamente em [13] através de uma representação autossimilar em \mathcal{A}_2 do grupo *Lamplighter* $C_2 \wr \mathbb{Z}$, veja também [16].

O grupo \mathcal{A}_m , com sua estrutura recursiva e por abrigar grupos que são utilizados para responder problemas importantes ao longo da história, vem ganhando destaque ao longo dos anos. Após a resposta ao problema de Atiyah, surgiram vários artigos sobre generalizações do grupo *Lamplighter* do tipo $B \wr \mathbb{Z}$, com B abeliano finito, donde destacamos [23], onde os autores exibem representações transitivas fechadas por estados de grau $|B|$.

Em [6, 2002], Brunner e Sidki constroem uma operação denominada *tree-wreathing* de H por K , denotada por $H \bar{\wr} K$, que permite obter o grupo $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ como um grupo finito por estado na árvore de grau 2. Neste mesmo artigo, os autores questionam se $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ é finito por estado. Em [10], Dantas e Sidki mostram que não existe uma representação transitiva

fechada por estado de $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$. Posteriormente, em [8], Dantas, Santos e Sidki expõem uma representação de $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ fechada e finita por estado de grau 3.

Temos como objetivo demonstrar que $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ possui uma representação finita por estados em \mathcal{A}_2 . Para demonstrar tal questão, utilizamos uma ferramenta de construção de representações envolvendo subgrupos parabólicos e, posteriormente, uma ferramenta de trivialização de grupos parabólicos com o intuito de obter uma representação fiel.

Para tanto, iniciamos com o estudo de árvores uni-raízes m -regulares \mathcal{T}_m , que são grafos cujos vértices são palavras finitas em um alfabeto Y de tamanho m , a palavra vazia \emptyset é designada como vértice raiz e as arestas conectam dois vértices u e v se, e somente se, $u = yv$ ou $v = yu$, onde $y \in Y$. Sua estrutura é de tal forma que cada vértice é raiz de uma sub-árvore isomorfa a própria árvore, conseqüentemente, os grupos de automorfismos das árvores em questão são isomorfos ao grupo de automorfismos \mathcal{A}_m da própria árvore. Deste último fato, podemos inferir que um automorfismo de \mathcal{T}_m é da forma $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1})\sigma_\alpha$, onde $\sigma_\alpha \in S_m$ e α_i são automorfismos de \mathcal{T}_m agindo a partir do vértice indexado por i , onde $i = 1, \dots, m$.

Os automorfismos de \mathcal{T}_m estão intimamente relacionados com uma máquina de Mealy, que consiste de uma 4-upla $A = (Q, Y, f, l)$, onde Y é um alfabeto finito, Q é um conjunto de estados, $f : Q \times Y \rightarrow Q$ é uma função de transição de estados e $l : Q \times Y \rightarrow Y$ é uma função de saída. Este conceito advém da teoria da computação, mais especificamente, é um caso particular de autômato.

O autômato supracitado sobre um alfabeto de tamanho m é dito invertível se para cada $q \in Q$ fixado, a restrição $f(q, -) : Y \rightarrow Y$ da função de saída é invertível, neste caso, podemos interpretá-lo como um automorfismo de \mathcal{T}_m . Dado um autômato invertível $A = (Q, Y, f, l)$ satisfazendo $f(q, i) = q_i$ e $l(q, i) = j$, podemos associá-lo com o automorfismo $\alpha_q = (\alpha_{q_1}, \dots, \alpha_{q_m})\sigma_{\alpha_q}$, onde $i^{\sigma_{\alpha_q}} = j$. Por outro lado, um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}_m$ pode ser interpretado como uma máquina de Mealy, para isto, tomamos Y como alfabeto de entrada e de saída, definimos recursivamente o conjunto de estados como $Q(\alpha) = \{\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_m\} \cup Q(\alpha_1) \cup \dots \cup Q(\alpha_m)$, $f(\beta, y) = \beta_y$ e $l(\beta, y) = y^\beta$, onde $\beta \in Q(\alpha)$. Deste modo, podemos construir um grupo gerado por autômatos dentro do grupo de automorfismos \mathcal{A}_m do grafo \mathcal{T}_m . Além disso, se o conjunto $Q(\alpha)$ de um automorfismo α for finito, dizemos que o automorfismo α é de *estado finito*.

O subconjunto de todos os automorfismos de estado finito de \mathcal{A}_m , denotado por $\mathcal{F}(Y)$, possui estrutura de grupo e recebe um destaque especial. Em [3, página 120, 2010], verifica-se que grupos gerados por máquinas de Mealy com número finito de estados possuem o problema da palavra solúvel, conseqüentemente, obtemos através da correspondência entre automorfismos de \mathcal{A}_m e máquinas de Mealy que o problema da palavra é solúvel para todo

subgrupo gerado por máquinas de Mealy em $\mathcal{F}(Y)$. Vale ressaltar que nem todo grupo finitamente gerado por automorfismos de estado finito é um grupo gerado por uma máquina de Mealy de estado finito.

No Capítulo 1, expomos os temas que cerceiam o grupo de automorfismos da árvore m -regular \mathcal{A}_m . Temos como objetivo relacionar o produto entrelaçado com o grupo \mathcal{A}_m , definir grupos finitos por estados e fechados por estados (autossimilares) bem como expor os principais resultados sobre os temas em questão.

O Capítulo 2 tem como objetivo estabelecer ferramentas para obter representações de grupos em \mathcal{A}_m , bem como determinar sob quais condições podemos obter representações com graus menores ou maiores a partir de uma representação dada. Neste capítulo, apresentamos a ferramenta utilizada para criar representações fechadas por estado não necessariamente transitivas, para tal, utilizamos uma tripla

$$(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F}) = ((m_1, \dots, m_s), (H_1, \dots, H_s), (f_1, \dots, f_s))$$

juntamente com os transversais T_1, \dots, T_s que induzem a representação fechada por estado

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \mathcal{A}_m \\ g &\mapsto g^\varphi = (\theta_i(g, t)^{f_i \varphi} \mid 1 \leq i \leq s, t \in T_i) \sigma_{g_1} \dots \sigma_{g_s} \end{aligned}$$

com

$$\ker \varphi = \mathbf{F} - \text{core}(\mathbf{H}) = \langle K \leq \cap_{i=1}^s H_i \mid K \triangleleft G, K^{f_i} \leq K, \forall i = 1, \dots, s \rangle$$

e $\theta_i(g, t_j) = t_j g t_{(j)}^{-1} \sigma_{g_i}$. Caso o $\ker \varphi$ seja trivial, diremos que a tripla associada a representação é simples.

No Capítulo 3, iremos definir e determinar resultados sobre o subgrupo parabólico. O subgrupo parabólico H_ω de G segundo a tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ é definido por $H_\omega = \cap_{k=0}^\infty W_k$, onde

$$W_0 = G, W_1 = \cap_{i=1}^s W_0^{f_i^{-1}}, W_2 = \cap_{i=1}^s W_1^{f_i^{-1}}, \dots, W_k = \cap_{i=1}^s W_{k-1}^{f_i^{-1}}, \dots$$

Destacamos um resultado onde, dada uma tripla simples, obtemos uma nova tripla simples com subgrupo parabólico trivial. Para tal, considere H_G o core do subgrupo $\cap_{i=1}^s H_i$ em G , r o índice de H_G em G e a tripla

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1) = (\underbrace{(r, \dots, r)}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{(H_G, \dots, H_G)}_{s \text{ vezes}}, (f_1, f_2, \dots, f_s)).$$

Teorema A. *Uma G -tripla simples $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ induz uma G -tripla simples $(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ com subgrupo parabólico trivial. Além disso, se a representação induzida pela G -tripla $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$ for finita por estado, então a G -tripla $(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ também será finita por estado.*

Destinamos o Capítulo 4 para estudar grupos do tipo $\mathcal{G} = B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$ e $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$, onde G é um grupo fechado por estado, B é um grupo abeliano finito e um elemento $a \in A^{((H_1 \setminus G) \times \cdots \times (H_n \setminus G))}$ é dado por

$$a = a_1^{(H_1 k_{11}, \dots, H_n k_{1n})} \dots a_l^{(H_1 k_{l1}, \dots, H_n k_{ln})} = \prod_{i=1}^l a_i^{(H_1 k_{i1}, \dots, H_n k_{in})}.$$

Em [2], Bartoldi e Sidki mostraram que se B é um grupo abeliano finito e a G -tripla $((m), (H \leq G), (f : H \rightarrow G))$ é simples com subgrupo parabólico H_ω , então $\mathcal{G} = B^{(H_\omega \setminus G)} \rtimes G$ é autossimilar com grau $|B| \cdot m$, onde $(H_\omega \setminus G)$ é o conjunto das classes laterais à esquerda $\{H_\omega g \mid g \in G\}$. O Teorema a seguir estende o resultado de Bartoldi e Sidki e corrige o Teorema E de [8]. Para enunciar o resultado, considere G um grupo fechado por estado com respeito a tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, onde

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s), \mathbf{H} = (H_1, \dots, H_s), \text{ e } \mathbf{F} = (f_1, \dots, f_s)$$

e

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1) = ((m, \dots, m), (H, \dots, H), (f_1, \dots, f_s)),$$

onde $H = \cap_{i=1}^s H_i$ e $m = [G : \cap_{i=1}^s H_i]$. Denote por H_{ω_i} o subgrupo parabólico de H com relação ao endomorfismo virtual $f_i : H \rightarrow G$.

Teorema B. *Com as hipóteses acima temos*

(i) *Se B é um grupo abeliano finito, então*

$$\mathcal{G} = B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo orbital $(\underbrace{|B| \cdot m^s, \dots, |B| \cdot m^s}_{s \text{ vezes}})$;

(ii) *Se G não é de torção, então*

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo orbital $(\underbrace{m^s, \dots, m^s}_{s \text{ vezes}}, 1)$.

Além disso, se G é finito por estado segundo a tripla $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$, então \mathcal{G} também o é.

Como consequência do Teorema B, demonstramos no Teorema 4.2.1 que os grupos $C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$ e $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$ são finitos por estado.

Por fim, no Capítulo 5, definimos o produto entrelaçado k -iterado de k cópias de \mathbb{Z} indutivamente por $W_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $W_l(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \wr W_{l-1}(\mathbb{Z})$ para $l \geq 1$. Posteriormente, usamos o Teorema A para obter o resultado a seguir.

Teorema C. *Seja A um grupo abeliano finitamente gerado infinito e G um grupo autossimilar finito por estado com relação à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$. Suponha que G não é de torção, então $A \wr G$ é finito por estado.*

Utilizamos o Teorema C para mostrar que os grupos $C_2 \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ e $W_k(\mathbb{Z})$ ($k \geq 1$) são finitos por estado. Para $k = 3$, o Teorema C responde afirmativamente a pergunta de Brunner and Sidki em [6]. A representação de $W_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ no Teorema C é de grau 10, ou seja, $W_3(\mathbb{Z})$ nesta representação é um subgrupo de \mathcal{F}_{10} . Usamos o processo de deflação no grau da árvore e obtemos o resultado seguinte.

Teorema D. *O grupo $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ é finito por estado de grau 2.*

Com o Teorema D, mostramos que $W_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ é um subgrupo de um grupo gerado por autômatos sobre um alfabeto de duas letras, o que responde afirmativamente o Problema 15.19 - (b) do Kourovka Notebook [17] proposto por Brunner e Sidki em [6]. Os resultados aqui apresentados estão no preprint [7].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos os conceitos primordiais para a compreensão dos resultados deste texto. Iniciamos com as definições de árvore uni-raiz m -regular \mathcal{T}_m e produto entrelaçado. Posteriormente, definimos o grupo de automorfismos \mathcal{A}_m de \mathcal{T}_m e estabelecemos a correlação entre este grupo com o produto entrelaçado. Por fim, definimos importantes subgrupos de \mathcal{A}_m , os grupos finitos por estado e os fechados por estado (autossimilares).

1.1 A árvore uni-raiz m -regular \mathcal{T}_m

Destinamos esta seção para definir a estrutura que dá origem aos principais objetos de estudos deste texto, um tipo particular de grafo chamado de árvore uni-raiz m -regular. As definições de grafos são provenientes de [4]. Os conceitos relacionados as árvores m -regulares podem ser encontrados em [21]

Definição 1.1.1. *Um grafo G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ consistindo de um conjunto $V(G)$ de vértices e um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de arestas, munidos com uma função de incidência ψ_G que associa a cada aresta de G um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G .*

A definição acima admite a existência de arestas l de modo que $(l)\psi_G = (v, v)$, chamadas de *loops*.

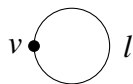


Figura 1.1 Loop

Também podemos ter arestas distintas e_1 e e_2 de modo que $(e_1)\psi_G = (e_2)\psi_G = (u, v)$, neste caso, dizemos que e_1 e e_2 são *paralelas*.

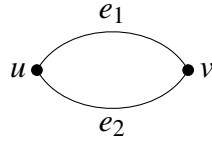


Figura 1.2 Arestas paralelas

Diremos que um grafo é *simplex* se ele não possuir loops e nem arestas paralelas, neste caso, iremos omitir o nomeamento das arestas e a função de incidência.

Definição 1.1.2. Um grafo F é um subgrafo de um grafo G se $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$ e $\psi_F = \psi_G|_{E(F)}$.

Um *caminho* P em um grafo é um subgrafo simplex cujos vértices podem ser organizados em sequência linear v_1, \dots, v_n de modo que $(v_i, v_{i+1}) \in E(P)$, para cada $i < n$. Caso $n > 1$ e $v_n = v_1$ diremos que o caminho é um *ciclo*.

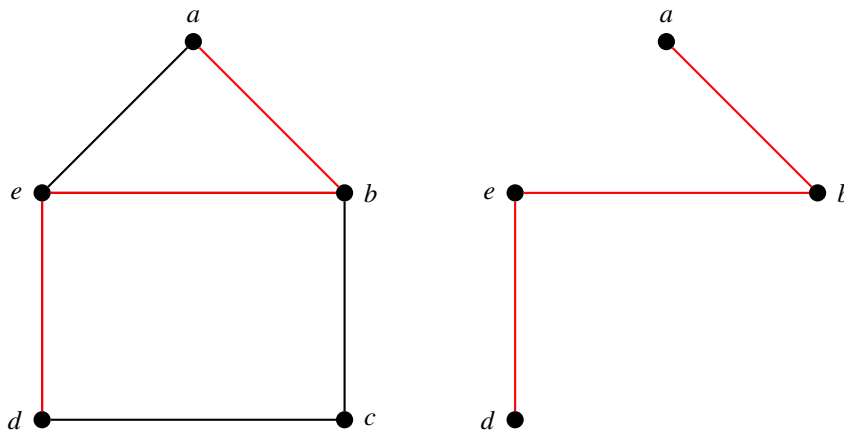


Figura 1.3 Caminho abed

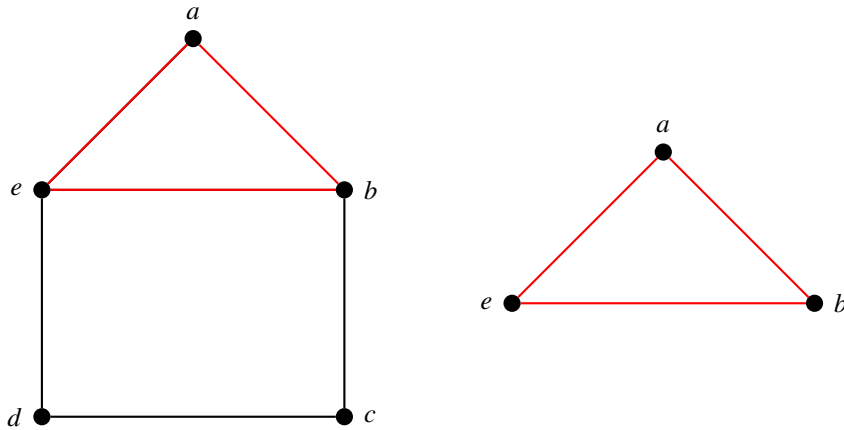


Figura 1.4 Ciclo abc

Um grafo é *conexo* se existe um caminho entre quaisquer dois vértices. Um grafo conexo sem ciclos será denominado *árvore*. Se a árvore possuir um único vértice destacado, chamado raiz, diremos que ela é *uni-raiz*. Dado um grafo G , o grau $\partial(v)$ de um vértice v de G é a cardinalidade do conjunto $\{(v_1, v_2) \in E(G) \mid v = v_1 \text{ ou } v = v_2, v_1, v_2 \in V(G)\}$.

Definição 1.1.3. Uma árvore uni-raiz T , com raiz r , é chamada m -regular se $\partial(r) = m$ e $\partial(v) = m + 1$ para todo $v \in V(T) \setminus \{r\}$.

Não é difícil ver que duas árvores uni-raiz m -regulares são isomorfas. Considere m um inteiro positivo e Y o alfabeto $\{1, \dots, m\}$. Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}(Y)$ o conjunto de todas as palavras finitas formadas por elementos de Y . Com a operação de concatenação de palavras, \mathcal{M} assume estrutura de *monóide*, isto é, um conjunto com uma operação associativa e um elemento neutro segundo a operação. Neste caso, o elemento neutro é a palavra vazia \emptyset .

Definição 1.1.4. A árvore uni-raiz m -regular \mathcal{T}_m é o grafo $(V(\mathcal{T}_m), E(\mathcal{T}_m))$, com raiz a palavra vazia \emptyset , onde $V(\mathcal{T}_m) = \mathcal{M}$ e um par não ordenado (u, v) pertence a $E(\mathcal{T}_m)$ se, e somente se, $v = uy$ ou $u = vy$, para algum $y \in Y$, com $u, v \in \mathcal{M}$.

Em resumo, a árvore uni-raiz m -regular \mathcal{T}_m é um grafo sobre um alfabeto $Y = \{1, \dots, m\}$, cujos vértices são palavras finitas e as arestas conectam duas palavras se, e somente se, uma delas é prefixo da outra. Além disso, omitimos a função de incidência por se tratar de um grafo simples.

Definição 1.1.5. Denominaremos por nível n da árvore \mathcal{T}_m o conjunto de todas as palavras de comprimento n , isto é, $\{u \in \mathcal{M} \mid u = y_1 y_2 \dots y_n, y_i \in Y\}$.

Para o caso em que $m = 2$, a árvore \mathcal{T}_2 será denominada árvore binária e pode ser representada graficamente por:

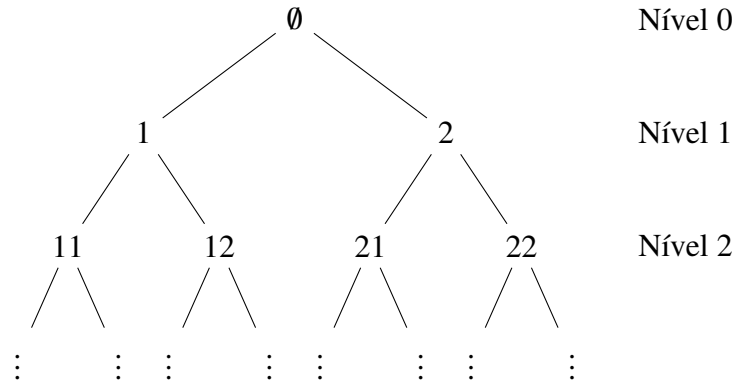


Figura 1.5 Árvore binária

Definição 1.1.6. Chamamos de $u\mathcal{T}_m$ a sub-árvore de \mathcal{T}_m cujo conjunto de vértices $V(u\mathcal{T}_m)$ é o conjunto

$$\{uv \mid v \in \mathcal{M}\}.$$

Considerando a árvore binária \mathcal{T}_2 , a sub-árvore $11\mathcal{T}_2$ é descrita por

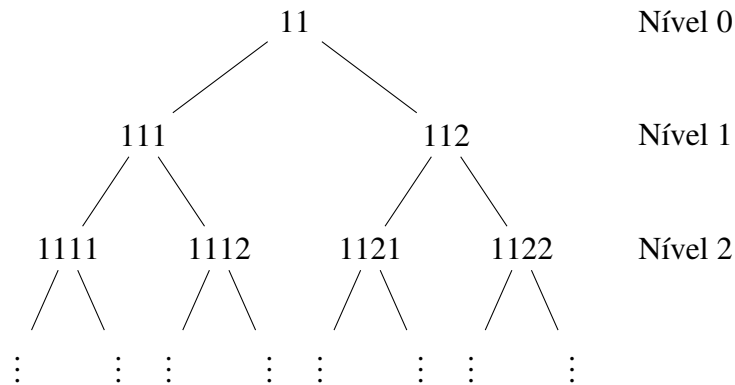


Figura 1.6 Sub-árvore $11\mathcal{T}_2$

Note que a seguinte função $uv \mapsto v$, para todo $v \in \mathcal{M}$, é um isomorfismo entre as árvores $u\mathcal{T}_m$ e \mathcal{T}_m .

1.2 O produto entrelaçado de grupos

Nesta seção, utilizamos [19] como referencial para definir o produto direto, produto semi-direto e produto entrelaçado de grupos.

Definição 1.2.1. *Sejam H e K grupos. Definiremos o conjunto $H \times K = \{(h, k) \mid h \in H \text{ e } k \in K\}$ como o produto direto de H e K .*

O produto direto de grupos é um grupo com a operação

$$(h, k)(h', k') = (hh', kk').$$

A definição anterior é uma versão *externa* do produto direto. Se, por simplicidade, escrevemos $(h, k) = hk$, obtemos uma versão *interna* do produto direto anterior e denotamos por HK . Note que, deste modo, em um produto direto os elementos de H comutam com os de K . Podemos ampliar o conceito de produto de dois grupos para um produto onde os elementos de um grupo não necessariamente comutam com os elementos de outro.

Definição 1.2.2. *Sejam N e H grupos e $\alpha : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ um homomorfismo. O produto semidireto de N por H é o grupo*

$$N \rtimes H = \{(n, h) \mid n \in N \text{ e } h \in H\}$$

com operação $(n, h)(n', h') = (n(n')^{(h^{-1})^\alpha}, hh')$.

Em sua versão interna, escrevemos a operação de dois elementos do grupo NH por $nhn'h' = n(n')^{(h^{-1})^\alpha} hh'$.

O conceito de produto direto pode também ser estendido para uma quantidade arbitrária de grupos

Definição 1.2.3. *Sejam I um conjunto índices e $\{G_i \mid i \in I\}$ uma família de grupos. O produto cartesiano dos grupos G_i 's*

$$\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i\}$$

onde $(g_i)_{i \in I}$ é um vetor com entradas indexadas por I , é um grupo com a operação

$$(g_i)_{i \in I}(g'_i)_{i \in I} = (g_i g'_i)_{i \in I}.$$

Usaremos a notação $G^{[I]}$ para representar o produto cartesiano $\prod_{i \in I} G_i$.

Definiremos como *suporte* de um elemento $g = (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$ como o conjunto

$$\text{Supp}((g_i)_{i \in I}) = \{g_i \in G_i \mid g_i \neq e\},$$

isto é, o conjunto contendo todas as entradas não-triviais do elemento g .

Definição 1.2.4. *Sejam I um conjunto de índices e $\{G_i \mid i \in I\}$ uma família de grupos. O produto direto dos grupos G_i 's é o conjunto*

$$\bigoplus_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \text{ e } (g_i)_{i \in I} \text{ tem suporte finito}\}.$$

O conjunto acima é um subgrupo do produto cartesiano de grupos e, quando o conjunto I é finito, as noções de produto direto e produto cartesiano coincidem. Usaremos a notação $G^{(I)}$ para representar o produto direto $\bigoplus_{i \in I} G_i$.

Utilizando as noções de produto cartesiano e de uma ação permutacional, podemos definir um tipo especial de produto semidireto. Sejam K um grupo, I um conjunto e Q um grupo que age em I .

Definição 1.2.5. *O produto entrelaçado irrestrito de K por Q é definido por*

$$Kwr_I Q = \left(\prod_{i \in I} K_i \right) \rtimes_{\varphi} Q$$

onde $K_i = K$ para todo $i \in I$ e a ação é definida por

$$\begin{aligned} \varphi : Q &\longrightarrow \text{Aut} \left(\prod_{i \in I} K_i \right) \\ q &\longmapsto \varphi_q : \prod_{i \in I} K_i \longrightarrow \prod_{i \in I} K_i \\ &\quad (k_i)_{i \in I} \longmapsto (k_{i \cdot q^{-1}})_{i \in I} = (k_i)_{i \cdot q \in I}. \end{aligned}$$

O produto entrelaçado restrito de K por Q é definido por

$$K \wr_I Q = \left(\bigoplus_{i \in I} K_i \right) \rtimes_{\varphi} Q$$

com a ação definida por

$$\begin{aligned} \varphi : Q &\longrightarrow \text{Aut} (\bigoplus_{i \in I} K_i) \\ q &\longmapsto \varphi_q : \bigoplus_{i \in I} K_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} K_i \\ &\quad (k_i)_{i \in I} \longmapsto (k_{i \cdot q^{-1}})_{i \in I} = (k_i)_{i \cdot q \in I}. \end{aligned}$$

O subgrupo $\bigoplus_{i \in I} K_i$ é chamado de *base* do produto entrelaçado.

Quando $I = Q$, iremos simplificar a notação para $K \wr Q$. Neste caso, $K \wr Q = K^{(Q)} \rtimes Q$, onde um elemento $x \in K^{(Q)}$ pode ser denotado por

$$x = k_1^{q_1} k_2^{q_2} \dots k_n^{q_n} = (k_q)_{q \in Q} = \begin{cases} k_q = k_i, & \text{se } q = q_i, \\ k_q = e, & \text{se } q \neq q_i. \end{cases}$$

Assim $x^q = k_1^{q_1 q} k_2^{q_2 q} \dots k_n^{q_n q}$, isto é, o índice aparece como uma conjugação.

Para o resultado seguinte, consideramos $H_i \leq G$, $H_i \backslash G = \{H_i g \mid g \in G\}$, para $i = 1, \dots, n$, e o produto entrelaçado $\mathcal{G} = A \wr_{(H_1 \backslash G) \times \dots \times (H_n \backslash G)} G^n = A^{((H_1 \backslash G) \times \dots \times (H_n \backslash G))} \rtimes_{\varphi} G^n$, onde um elemento $a \in A^{((H_1 \backslash G) \times \dots \times (H_n \backslash G))}$ é dado por

$$a = a_1^{(H_1 k_{11}, \dots, H_n k_{1n})} \dots a_l^{(H_1 k_{l1}, \dots, H_n k_{ln})} = \prod_{i=1}^l a_i^{(H_1 k_{i1}, \dots, H_n k_{in})}$$

e a ação $\varphi : G \rightarrow \text{Aut} \left(A^{((H_1 \backslash G) \times \dots \times (H_n \backslash G))} \right)$ é dada por

$$(a)\varphi_{(g_1, \dots, g_n)} = a^{(g_1, \dots, g_n)} = \prod_{i=1}^l a_i^{(H_1 k_{i1} g_1, \dots, H_n k_{in} g_n)}$$

Teorema 1.2.6. *Sejam G e A grupos e H um subgrupo de G . Considere $H_1, \dots, H_n \leq G$ e $H_i \backslash G = \{H_i g \mid g \in G\}$. Defina*

$$\mathcal{G} = A^{((H_1 \backslash G) \times \dots \times (H_n \backslash G))} \rtimes_{\varphi} G^n.$$

Se $H \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \{e\}$, então

$$A \wr H \hookrightarrow \mathcal{G}.$$

Em particular, se $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{e\}$, então $A \wr G \hookrightarrow \mathcal{G}$.

Demonstração. Defina a função

$$\theta : A \wr H \rightarrow \mathcal{G}$$

$$\left(\prod_{i=1}^l a_i^{h_i} \right) h \mapsto \prod_{i=1}^l a_i^{(H_1 h_i, \dots, H_n h_i)} (h, \dots, h),$$

então

$$\begin{aligned}
\left(\left(\prod_{i=1}^l a_i^{h_i} \right) h \right)^\theta \left(\left(\prod_{i=1}^l b_i^{k_i} \right) k \right)^\theta &= \prod_{i=1}^l a_i^{(H_1 h_i, \dots, H_n h_i)}(h, \dots, h) \prod_{i=1}^l b_i^{(H_1 k_i, \dots, H_n k_i)}(k, \dots, k) \\
&= \prod_{i=1}^l a_i^{(H_1 h_i, \dots, H_n h_i)} \prod_{i=1}^l b_i^{(H_1 k_i h^{-1}, \dots, H_n k_i h^{-1})}(hk, \dots, hk) \\
&= \left(\left(\prod_{i=1}^l a_i^{h_i} \prod_{i=1}^l b_i^{k_i h^{-1}} \right) hk \right)^\theta \\
&= \left(\left(\prod_{i=1}^l a_i^{h_i} \right) h \left(\prod_{i=1}^l b_i^{k_i} \right) k \right)^\theta
\end{aligned}$$

Suponha que $(a_1^{h_1} \dots a_l^{h_l} h)^\theta = e_{\mathcal{G}}$ então $a_1^{(H_1 h_1, \dots, H_n h_1)} \dots a_l^{(H_1 h_l, \dots, H_n h_l)}(h, \dots, h) = e_{\mathcal{G}}$ e h é trivial, então $(a_1^{h_1} \dots a_l^{h_l})^\theta = a_1^{(H_1 h_1, \dots, H_n h_1)} \dots a_l^{(H_1 h_l, \dots, H_n h_l)} = e_{\mathcal{G}}$. Se dados $x, y \in H$ tivermos $(H_1 x, \dots, H_n x) = (H_1 y, \dots, H_n y)$, então $xy^{-1} \in H_i$ para cada $i = 1, \dots, n$, mas $H \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \{e\}$ o que implica $x = y$. Daí

$$a_i^{(H_1 h_i, \dots, H_n h_i)} = e$$

e $a_i^{h_i} = e_{A(H)}$ para todo $i = 1, \dots, l$. O resultado segue. \square

Quando não houver confusão em relação a ação em \mathcal{G} , a aplicação φ será suprimida.

1.3 O grupo de automorfismos \mathcal{A}_m

Iremos definir o grupo de automorfismos de \mathcal{T}_m , explorar sua estrutura e estabelecer sua relação com o produto entrelaçado. As definições presentes nesta seção são provenientes de [21].

Definição 1.3.1. *Um automorfismo de \mathcal{T}_m é uma bijeção $\varphi : \mathcal{T}_m \rightarrow \mathcal{T}_m$ que preserva arestas, isto é, se (u, v) é uma aresta de \mathcal{T}_m então $(\varphi(u), \varphi(v))$ também o é.*

Com a operação de composição de funções, o conjunto

$$\text{Aut}(\mathcal{T}_m) = \{ \alpha : \mathcal{T}_m \rightarrow \mathcal{T}_m \mid \alpha \text{ é automorfismo} \}$$

é um grupo, denominado *grupo de automorfismos de \mathcal{T}_m* . Usamos a notação \mathcal{A}_m para denotar o grupo $\text{Aut}(\mathcal{T}_m)$.

Como consequência de um automorfismo de \mathcal{T}_m preservar o grau de cada vértice, um automorfismo age fixando a raiz e permutando os níveis da árvore. Portanto, podemos estender "rigidamente" uma permutação do conjunto $Y = \{1, \dots, m\}$ para um automorfismo de \mathcal{T}_m fazendo

$$\sigma : yu \mapsto y^\sigma u, \quad \forall y \in Y, \quad \forall u \in \mathcal{M},$$

o que nos fornece uma imersão de S_m em \mathcal{A}_m . Por outro lado, dado um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}_m$, a restrição

$$\sigma_\alpha = \alpha : Y \rightarrow Y$$

ao primeiro nível da árvore induz uma permutação em Y . Consequentemente, α e σ_α possuem a mesma ação no primeiro nível e $\alpha\sigma_\alpha^{-1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, onde α_i é um automorfismo da sub-árvore $i\mathcal{T}_m$. Além disso, através da aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : u\mathcal{T}_m &\longrightarrow \mathcal{T}_m \\ uv &\longmapsto v \end{aligned}$$

onde v é um vértice de \mathcal{T}_m , podemos identificar uma sub-árvore $u\mathcal{T}_m$ com a árvore \mathcal{T}_m e, consequentemente, um automorfismo de $u\mathcal{T}_m$ com um de \mathcal{T}_m , o que nos confere a descrição de um elemento de \mathcal{A}_m como

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma_\alpha$$

onde $\alpha_i \in \mathcal{A}_m$ e $\sigma_\alpha \in S_m$. Então a ação de um $\alpha \in \mathcal{A}_m$ em uma palavra $yu \in \mathcal{T}_m$, com $y \in Y$, é dada por

$$(yu)^\alpha = y^{\sigma_\alpha} u^{\alpha_y},$$

e a ação de um $\alpha \in \mathcal{A}_m$ em uma palavra uv , com $u = y_1y_2y_3\dots y_n, v \in \mathcal{M}$, é determinada recursivamente por

$$\begin{aligned} (uv)^\alpha &= y_1^{\sigma_\alpha} (y_2y_3\dots y_nv)^{\alpha_{y_1}} \\ &= (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3\dots y_nv)^{\alpha_{y_1y_2}} \\ &\quad \vdots \\ &= (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} \dots (y_n)^{\sigma_{\alpha_{y_1\dots y_{n-1}}}} (v)^{\alpha_u}. \end{aligned}$$

Assim a estrutura recursiva de \mathcal{T}_m confere uma estrutura recursiva ao grupo de automorfismos \mathcal{A}_m que nos permite representar este grupo como o produto entrelaçado

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m^{(Y)} \rtimes S_m = \mathcal{A}_m \wr_Y S_m,$$

onde S_m age através de permutação sobre Y .

Dados $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma_\alpha$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)\sigma_\beta$, a estrutura de produto entrelaçado de \mathcal{A}_m resulta em

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma_\alpha(\beta_1, \dots, \beta_m)\sigma_\beta \\ &= (\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}(\beta_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}^{\sigma_\alpha^{-1}}\sigma_\alpha\sigma_\beta \\ &= (\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}(\beta_{(i)\sigma_\alpha})_{i \in \{1, \dots, m\}}\sigma_\alpha\sigma_\beta \\ &= (\alpha_i\beta_{(i)\sigma_\alpha})_{i \in \{1, \dots, m\}}\sigma_\alpha\sigma_\beta \\ &= (\alpha_1\beta_{(1)\sigma_\alpha}, \dots, \alpha_m\beta_{(m)\sigma_\alpha})\sigma_\alpha\sigma_\beta \end{aligned}$$

e

$$\alpha^{-1} = \sigma_\alpha^{-1}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}) = \left(\alpha_{(1)\sigma_\alpha^{-1}}^{-1}, \dots, \alpha_{(m)\sigma_\alpha^{-1}}^{-1} \right) \sigma_\alpha^{-1}.$$

1.4 Grupos finitos por estado

Grupos finitos por estado representam uma importante classe de subgrupos de \mathcal{A}_m e configuram nosso principal objeto de estudo. Utilizamos [21] e [5] como referências para as definições presentes nesta seção.

Definição 1.4.1. *Dado um automorfismo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma \in \mathcal{A}_m$, definimos o conjunto de estados de α por*

$$Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in \mathcal{M}\},$$

ou recursivamente por

$$Q(\alpha) = \{\alpha\} \cup Q(\alpha_1) \cup \dots \cup Q(\alpha_m).$$

Os elementos $\alpha_u \in Q(\alpha)$ são chamados de estados de α .

Por definição de inverso e produto de automorfismos, temos que $Q(\alpha^{-1}) = Q(\alpha)^{-1}$ e $Q(\alpha\beta) \subseteq Q(\alpha)Q(\beta)$. Deste modo, o conjunto de todos os automorfismos de \mathcal{A}_m que

possuem um número finito de estados formam um subgrupo enumerável ([21]), denotado por \mathcal{F}_m .

Definição 1.4.2. *Um subgrupo $G \leq \mathcal{A}_m$ é finito por estado se todos os seus elementos possuem um número finito de estados, isto é, se $Q(\alpha)$ é finito para todo $\alpha \in G$.*

Alguns exemplos de grupos finitos por estado são

- $G = \langle \alpha = (e, \alpha)(12) \rangle \simeq \mathbb{Z}$ (Máquina de adição binária);
- $G = \langle \gamma = ((\gamma, \alpha), (e, e)), \alpha = ((e, e), (\alpha, e))(12) \rangle \simeq \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ (veja [6]).

Os grupos anteriores são subgrupos de \mathcal{F}_2 . Brunner e Sidki então questionam em [17], Problema 15.19 - (b), se $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ possui uma representação finita por estado.

Proposição 1.4.3. *O produto direto de dois grupos H e K finitos por estado, onde $H \leq \mathcal{A}_m$ e $K \leq \mathcal{A}_n$, é um grupo finito por estado em \mathcal{A}_{m+n} .*

Demonstração. Sejam $H \leq \mathcal{A}_m$ e $K \leq \mathcal{A}_n$ grupos finitos por estado. Sejam $\phi_1 : H \rightarrow \mathcal{A}_{m+n}$ a aplicação definida por

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma \mapsto (\alpha_1^{\phi_1}, \dots, \alpha_m^{\phi_1}, \underbrace{e, \dots, e}_{n \text{ vezes}})\sigma^{\phi_1},$$

onde $i^{\sigma^{\phi_1}} = j$ e $(i+n)^{\sigma^{\phi_1}} = i$ se, e somente se, $i^\sigma = j$, com $i, j \in \{1, \dots, m\}$ e $\phi_2 : K \rightarrow \mathcal{A}_{m+n}$ por

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\sigma \mapsto (\underbrace{e, \dots, e}_{n \text{ vezes}}, \alpha_1^{\phi_2}, \dots, \alpha_n^{\phi_2})\sigma^{\phi_2},$$

onde $i^{\sigma^{\phi_2}} = j$ e $(i+n)^{\sigma^{\phi_2}} = j+n$ se, e somente se, $i^\sigma = j$, com $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Para $h = (h_1, \dots, h_m)\sigma_h$ e $k = (k_1, \dots, k_n)\sigma_k$, tome

$$h^{\phi_1}k^{\phi_2} = (h_1^{\phi_1}, \dots, h_m^{\phi_1}, k_1^{\phi_2}, \dots, k_n^{\phi_2})\sigma_h^{\phi_1}\sigma_k^{\phi_2} \in H^{\phi_1}K^{\phi_2} \leq \mathcal{A}_{m+n}.$$

Então

$$Q(h^{\phi_1}k^{\phi_2}) = \{h^{\phi_1}k^{\phi_2}\} \cup Q(h_1^{\phi_1}) \cup \dots \cup Q(h_m^{\phi_1}) \cup Q(k_1^{\phi_2}) \cup \dots \cup Q(k_n^{\phi_2}).$$

Por hipótese, $Q(h_i) = Q(h_i^{\phi_1})$ e $Q(k_j) = Q(k_j^{\phi_2})$ são conjuntos finitos para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, portanto, $Q(h^{\phi_1}k^{\phi_2})$ também é finito para todo $h^{\phi_1}k^{\phi_2} \in H^{\phi_1}K^{\phi_2}$. \square

Exemplo 1.4.4. *Sejam $H = \langle \alpha = (e, e)(12) \rangle \simeq C_2$ e $K = \langle \beta = (e, e, e)(123) \rangle \simeq C_3$. Então*

$$H \times K = \langle (e, e, e, e)(12)(345) \rangle \simeq C_6.$$

Exemplo 1.4.5. *Considere a máquina de adição binária $G = \langle \alpha = (e, \alpha)(12) \rangle$. O produto direto $G \times G$ é representado por*

$$\langle \alpha_1 = (e, \alpha_1, e, e)(12), \alpha_2 = (e, e, \alpha_2, e)(34) \rangle.$$

1.5 Grupos autossimilares

Os grupos autossimilares constituem outra importante classe de subgrupos de \mathcal{A}_m , os quais estudaremos nesta seção.

Definição 1.5.1. *Um subgrupo G de \mathcal{A}_m é chamado de fechado por estado se $Q(\alpha) \subset G$ para todo $\alpha \in G$. Se H possui uma representação $\varphi : H \rightarrow \mathcal{A}_m$, onde $H^\varphi \leq \mathcal{A}_m$ é fechado por estado, dizemos que H é autossimilar.*

No que se refere a uma representação concreta em \mathcal{A}_m , podemos utilizar tanto o termo fechado por estado quanto autossimilar.

Exemplo 1.5.2. *A máquina de adição binária $\langle \alpha = (e, \alpha)(12) \rangle$ é um grupo fechado por estado, pois $Q(\alpha) = \{\alpha, e\} \subset G$.*

Exemplo 1.5.3. *O grupo $G = \langle \gamma = ((\gamma, \alpha), (e, e)), \alpha = ((e, e), (e, \alpha))(12) \rangle \simeq \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ não é fechado por estado, pois $Q(\alpha) = \{\alpha, (e, e), (e, \alpha)\} \cup Q((e, e)) \cup Q((e, \alpha))$ e $(e, \alpha) \notin G$.*

Proposição 1.5.4. *O produto direto de dois grupos fechados por estado é um grupo fechado por estado.*

Demonstração. Sejam $H \leq \mathcal{A}_m$ e $K \leq \mathcal{A}_n$ grupos finitos por estado. Defina ϕ_1 e ϕ_2 tal como na Proposição 1.4.3. Seja

$$h^{\phi_1} k^{\phi_2} = (h_1^{\phi_1}, \dots, h_m^{\phi_1}, k_1^{\phi_2}, \dots, k_n^{\phi_2}) \sigma_h^{\phi_1} \sigma_k^{\phi_2} \in H^{\phi_1} K^{\phi_2} \leq \mathcal{A}_{m+n}.$$

Note que

$$Q(h\phi_1 k^{\phi_2}) = \{h\phi_1 k^{\phi_2}\} \cup Q(h_1\phi_1) \cup \dots \cup Q(h_m\phi_1) \cup Q(k_1^{\phi_2}) \cup \dots \cup Q(k_n^{\phi_2}).$$

Por hipótese, $Q(h) \subset H$ e $Q(k) \subset K$ para quaisquer $h \in H$ e $k \in K$, o que implica $Q(h^{\phi_1}) \subset H$ e $Q(k^{\phi_2}) \subset K$. Concluimos então que $Q(h^{\phi_1} k^{\phi_2}) \subset H^{\phi_1} \times K^{\phi_2}$. \square

Se H e K são grupos autossimilares, onde $H^{\phi_1} \leq \mathcal{A}_m$ e $K^{\phi_2} \leq \mathcal{A}_n$, então $(H \times K)^\varphi = H^{\phi_1} \phi_1 K^{\phi_2} \phi_2$ é fechado por estado. Consequentemente, o produto direto de dois grupos autossimilares é um grupo autossimilar.

Exemplo 1.5.5. *Observe que a máquina de adição binária $G = \langle \alpha = (e, \alpha)(12) \rangle$ é um grupo fechado por estado e o produto direto $G \times G$*

$$\langle \alpha = (e, \alpha, e, e)(12), \beta = (e, e, \beta, e)(34) \rangle$$

também é fechado por estado.

CAPÍTULO 2

Representação de grupos em \mathcal{A}_m

A estrutura recursiva de uma árvore uni-raiz m -regular naturalmente é associada com produtos entrelaçados. Motivados por este fato, buscamos entender sob quais condições podemos determinar imersões de produtos entrelaçados no grupo de automorfismos \mathcal{A}_m . Ao longo deste capítulo veremos algumas ferramentas para a produção de representações de diversos grupos como subgrupos de \mathcal{A}_m .

2.1 Endomorfismos virtuais

O conceito de endomorfismo virtual compõe um dos elementos utilizados em uma importante ferramenta de produção de representações fechadas por estado de grupos em \mathcal{A}_m . Nesta seção, definimos o endomorfismo virtual e damos sua relação com representações de grupos em \mathcal{A}_m .

Definição 2.1.1. *Um endomorfismo virtual de um grupo G é um homomorfismo $f : H \rightarrow G$, onde H é um subgrupo de G com índice finito m .*

Chamamos a sequência de informações $(m, H \leq G, f : H \rightarrow G) = (m, H, f)$ de tripla ou G -tripla. Utilizamos a tripla anterior em conjunto com uma aplicação recursiva para produzir representações fechadas por estado em árvores de grau m .

Seja $T = \{t_1 = e, t_2, \dots, t_m\}$ um transversal de H em G . Defina $\sigma : G \rightarrow S_m$ a aplicação de G no grupo das permutações de $\{1, \dots, m\}$ de modo que

$$i^{\sigma_g} = j \text{ se, e somente se } Ht_i g = Ht_j.$$

Definição 2.1.2. *Um grupo permutacional $G \leq \text{Sym}(X)$ é transitivo se, para quaisquer $x, y \in X$, existe uma permutação $\pi \in \text{Sym}(X)$ de modo que $x\pi = y$. Para $G \leq \mathcal{A}_m$, dizemos*

que G é transitivo de grau m se o grupo de permutações de G no primeiro nível da árvore $P(G)$ é transitivo.

Considere $\theta : G \times T \rightarrow H$ a aplicação de Schreier definida por $\theta(g, t_i) = t_i g (t_i \sigma(g))^{-1}$ e $\varphi : G \rightarrow \mathcal{A}_m$ definida recursivamente por

$$g \mapsto (\theta(g, t_1)^{f\varphi}, \dots, \theta(g, t_m)^{f\varphi}) \sigma_g.$$

Proposição 2.1.3. ([18, página 8]) *A função φ definida anteriormente é um homomorfismo, onde a representação G^φ é um grupo fechado por estado e transitivo de grau m , e φ possui núcleo*

$$\ker(\varphi) = \langle K \leq H \mid K \triangleleft H \text{ e } K^f \leq K \rangle$$

denominado f -core(H).

Quando $\ker(\varphi) = \{1\}$, obtemos uma representação fiel de G em \mathcal{A}_m e dizemos que o endomorfismo virtual f é simples.

Exemplo 2.1.4. *Sejam $G = \mathbb{Z} = \langle a \rangle$, $H = \langle a^2 \rangle$ e*

$$\begin{aligned} f : H &\rightarrow G \\ a^2 &\mapsto a \end{aligned}$$

Então $[G : H] = 2$ e $T = \{t_1 = e, t_2 = a\}$ um transversal de H em G . Note que $(He)a = Ha$ e $(Ha)a = He$, então o gerador a induz a permutação $\sigma = (12)$ nos índices dos transversais. Além disso,

$$(t_1 a t_{1\sigma}^{-1})^f = (e a a^{-1})^f = e$$

e

$$(t_2 a t_{2\sigma}^{-1})^f = (a a e^{-1})^f = (a^2)^f = a.$$

Portanto, fazendo $a^\varphi = \alpha$,

$$\alpha = (e, \alpha)\sigma$$

é o elemento gerador da representação G^φ de \mathbb{Z} em \mathcal{A}_2 .

Observe que a escolha do transversal pode alterar a representação. Considere agora $T = \{t_1 = e, t_2 = a^3\}$ outro transversal de H em G . Como $(He)a = Ha = Ha^3$ e $(Ha^3)a = Ha^4 = He$, então o gerador a induz a permutação $\sigma = (12)$ nos índices dos transversais. Além disso,

$$(t_1 a t_{1\sigma}^{-1})^f = (e a a^{-3})^f = a^{-1}$$

e

$$(t_2 a t_2^{-1})^f = (a^3 a e^{-1})^f = (a^4)^f = a^2.$$

Portanto, fazendo $a^\varphi = \alpha$,

$$\alpha = (\alpha^{-1}, \alpha^2) \sigma$$

é o elemento gerador da representação G^φ de \mathbb{Z} em \mathcal{A}_2 .

Nem todo grupo autossimilar possui uma representação fiel fechada por estado transitiva, isto é, nem toda representação fechada por estado de um grupo autossimilar pode ser obtida através de um único endomorfismo virtual. Um exemplo é o grupo $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ que não possui uma representação fiel fechada por estado transitiva, mas possui representação fechada por estado não-transitiva (veja [10, Theorem 1] e Proposição 2.1.6).

Sejam G um grupo, $H_1, \dots, H_s \leq G$, com índices $[G : H_1] = m_1, \dots, [G : H_s] = m_s$ e endomorfismos virtuais $f_1 : H_1 \rightarrow G, \dots, f_s : H_s \rightarrow G$. Considere

$$T_i = \{t_{(m_1 + \dots + m_{i-1} + 1)} = e, t_{(m_1 + \dots + m_{i-1} + 2)}, \dots, t_{(m_1 + \dots + m_{i-1} + m_i)}\}.$$

Para cada $i = 1, \dots, s$ e cada $g \in G$, considere

$$\sigma_{gi} \in \text{Sym}(\{m_1 + \dots + m_{i-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_{i-1} + m_i\}) \simeq S_{m_i}.$$

Dado

$$(j)\sigma_{gi} = l \iff H_i t_j g = H_i t_l.$$

Note que $\sigma_g = \sigma_{g1}, \dots, \sigma_{gs} \in S_{m_1 + \dots + m_s} = S_m$. Com o que foi colocado acima, a tripla

$$(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F}) = ((m_1, \dots, m_s), (H_1, \dots, H_s), (f_1, \dots, f_s))$$

e os transversais T_1, \dots, T_s induzem a representação fechada por estado

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \mathcal{A}_m \\ g &\mapsto g^\varphi = (\theta_i(g, t)^{f_i \varphi} \mid 1 \leq i \leq s, t \in T_i) \sigma_{g1} \dots \sigma_{gs} \end{aligned}$$

com

$$\ker \varphi = \mathbf{F} - \text{core}(\mathbf{H}) = \langle K \leq \bigcap_{i=1}^s H_i \mid K \triangleleft G, K^{f_i} \leq K, \forall i = 1, \dots, s \rangle$$

e $\theta_i(g, t_j) = t_j g t_{(j)\sigma_{gi}}^{-1}$. Temos assim o seguinte teorema.

Teorema 2.1.5. ([9, página 5]) *Um grupo G possui uma representação fiel fechada por estado $\varphi : G \rightarrow \mathcal{A}_m$ se, e somente se, existem subgrupos $H_1, \dots, H_s \leq G$, com $[G : H_1] + \dots + [G :$*

$H_s] = m$, e endomorfismos virtuais $f_1 : H_1 \rightarrow G, \dots, f_s : H_s \rightarrow G$ tais que

$$\langle K \leq \bigcap_{i=1}^s H_i \mid K \triangleleft G, K^{f_i} \leq K, \forall i = 1, \dots, s \rangle = 1.$$

Veja mais informações em [9] e [20].

Chamamos a s -upla (m_1, \dots, m_s) de *tipo orbital* da representação.

Proposição 2.1.6. ([8, página 6]) *O grupo $G = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ é fechado por estado de grau 3.*

Seja $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \langle y \rangle \wr \langle x \rangle$. Assumindo a tripla $((2, 1), (H = \langle y \rangle \langle x^2 \rangle, G), (f_1, f_2))$, onde

$$\begin{array}{ll} f_1 : H \rightarrow G & f_2 : G \rightarrow G \\ y^{x^2} \mapsto y^x & y \mapsto x \\ y^x \mapsto e & x \mapsto e, \\ x^2 \mapsto x & \end{array}$$

obtemos uma representação fiel de G gerada por $\alpha = (e, \alpha, e)(12)$ e $\beta = (\beta, e, \alpha)$.

Lema 2.1.7. *Seja G um grupo autossimilar com respeito a G -tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$. Se K_i é um subgrupo de H_i com $[H_i : K_i] = n_i$, então a tripla $(\mathbf{n}, \mathbf{K}, \bar{\mathbf{F}})$, onde*

$$\mathbf{n} = (m_1 n_1, \dots, m_s n_s), \mathbf{K} = (K_1, \dots, K_s), \bar{\mathbf{F}} = (f_1|_{K_1}, \dots, f_s|_{K_s}),$$

produz uma representação autossimilar de G .

Demonstração. Como $\bar{\mathbf{F}}\text{-core}(\mathbf{K}) \leq \mathbf{F}\text{-core}(\mathbf{H}) = 1$, o grupo G é autossimilar em relação a G -tripla $(\mathbf{n}, \mathbf{K}, \bar{\mathbf{F}})$. □

Anteriormente, definimos que um grupo finito por estado segundo sua representação em \mathcal{A}_m . Enunciaremos a seguir a definição de um conjunto ser finito por estado com relação aos endomorfismos virtuais de uma tripla.

Definição 2.1.8. *Nas condições da observação logo antes do Teorema 2.1.5, o grupo G é dito finito por estado segundo a tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ e com relação a sequência de trasversais $T = (T_1, \dots, T_s)$ se para cada $g \in G$ existe um subconjunto finito $U_g \subset G$ contendo g de modo que $U_g^T \subset U_g$, onde*

$$U_g^T = \{\theta_i(x, t)^{f_i} \mid t \in T_i, i = 1, \dots, s, x \in U_g\}.$$

Para o próximo resultado, considere G um grupo autossimilar finito por estado com respeito a G -tripla

$$\left(\underbrace{(m, \dots, m)}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{(H, \dots, H)}_{s \text{ vezes}}, (f_1, \dots, f_s) \right).$$

Considere as G^s -triplas $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$ e $(\mathbf{m}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{F}_2)$ dadas respectivamente por

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1) = \left(\underbrace{(m^s, \dots, m^s)}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{(H^s, \dots, H^s)}_{s \text{ vezes}}, (\rho_1, \dots, \rho_s) \right)$$

onde $\rho_{(1)\sigma^i} : H^s \rightarrow G^s$ estende a aplicação

$$\rho_{(1)\sigma^i} : (h_1, \dots, h_s) \mapsto (h_1^{f_{(1)\sigma^i}}, \dots, h_s^{f_{(s)\sigma^i}}),$$

$\sigma = (12 \dots s) \in \text{Sym}(\{1, 2, \dots, s\})$, e $i \in \{1, 2, \dots, s\}$;

$$(\mathbf{m}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{F}_2) = ((m^s, 1), (H^s, G^s), (\rho, \tau)),$$

onde $\rho : H^s \rightarrow G^s$ and $\tau : G^s \rightarrow G^s$ estende, respectivamente, as aplicações

$$\rho : (h_1, \dots, h_s) \mapsto (h_1^{f_1}, \dots, h_s^{f_s}),$$

$$\tau : (g_1, \dots, g_s) \mapsto (g_2, g_3 \dots, g_s, g_1).$$

Lema 2.1.9. *Sob as hipóteses acima, ambas as G^s -triplas $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$ e $(\mathbf{m}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{F}_2)$ produzem representações autossimilares finitas por estado de G^s .*

Demonstração. Iniciamos provando que G^s é um grupo autossimilar com respeito a tripla $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$. Seja $K \leq H^s$, $K \triangleleft G^s$ e $K^{\rho_i} \leq K$, $i = 1, \dots, s$. Defina $\pi_i : H^s \rightarrow H$ como a projeção da i -ésima coordenada de H^s . Então

$$K_i := K^{\pi_i} = \{h \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, h, x_{i+1}, \dots, x_s) \in K\}$$

é um subgrupo de H que é normal em G . Como K é ρ_i -invariante para todo $i = 1, \dots, s$, K_i é f_i -invariante para todo $i = 1, \dots, s$. Pela autossimilaridade de G , concluímos que $K_i = \{e\}$ para todo $i = 1, \dots, s$. De $K \leq K_1 \times \dots \times K_s = 1$, obtemos que G^s é autossimilar. Agora, provamos que se G é finito por estado, então G^s também é finito por estado. Considere $\varphi : G \rightarrow \mathcal{A}_{sm}$ uma representação finita por estado de G segundo à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ com respeito a sequência de transversais $T = (T_1, \dots, T_s)$, onde

$$T_i = \{t_{(m_1 + \dots + m_{i-1} + 1)} = e, t_{(m_1 + \dots + m_{i-1} + 2)}, \dots, t_{(m_1 + \dots + m_{i-1} + m_i)}\},$$

ou seja, para cada $g \in G$ existe um subconjunto finito $U_g \subset G$ contendo g de modo que $U_g^T \subset U_g$, onde $U_g^T = \{\theta_i(x, t)^{f_i} \mid t \in T_i, i = 1, \dots, s, x \in U_g\}$. Então,

$$g^\varphi = ((\theta_i(g, t)^{f_i})^\varphi \mid t \in T_i, 1 \leq i \leq s) \sigma_g.$$

Observe que $R = (R_1, \dots, R_s) = (T_1 \times \dots \times T_s, \dots, T_1 \times \dots \times T_s)$ é uma sequência de transversais de H^s em G^s . Com respeito a esses transversais, temos que G^s possui a seguinte representação

$$\dot{\varphi} : G^s \rightarrow \mathcal{A}_{sm^s}$$

onde

$$(g_1, \dots, g_s)^{\dot{\varphi}} = (\theta_i((g_1, \dots, g_s), (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}))^{\rho_i \dot{\varphi}} \mid (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}) \in R_i, 1 \leq i \leq s) \sigma_{(g_1, \dots, g_s)}$$

e $t_{ij_u} = t_{m_1 + \dots + m_{i-1} + j_u}$, $1 \leq u \leq s$. Mas

$$\theta_i((g_1, \dots, g_s), (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}))^{\rho_i} = (\theta_i(g_1, t_{m_1 + \dots + m_{i-1} + j_1})^{f_1}, \dots, \theta_i(g_s, t_{m_1 + \dots + m_{i-1} + j_s})^{f_s})$$

Tomando $U_{(g_1, \dots, g_s)} = U_{g_1} \times \dots \times U_{g_s}$ temos que $U_{(g_1, \dots, g_s)}^R$ é igual a

$$\{\theta_i((x_1, \dots, x_s), (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}))^{\rho_i} \mid (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}) \in R_i, 1 \leq i \leq s, (x_1, \dots, x_s) \in U_{(g_1, \dots, g_s)}\}$$

que está contido em $U_{g_1}^T \times \dots \times U_{g_s}^T \subseteq U_{g_1} \times \dots \times U_{g_s} = U_{(g_1, \dots, g_s)}$. O que mostra que G^s na representação $\dot{\varphi}$ é finito por estado.

Considere agora a G^s -tripla $(\mathbf{m}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{F}_2)$, $K \leq H^s$, $K \triangleleft G^s$, $K^\rho \leq K$ e $K^\tau \leq K$. Seja $K_i = K^{\tau_i}$. Como K é ρ -invariante segue que K_i é f_i -invariante. Além disso, de K ser τ -invariante segue que $K_i \leq K_j$, para $i, j \in \{1, \dots, s\}$, donde concluímos que K_i é f_j -invariante. Da autossimilaridade de G temos que $K_i = \{e\}$. Uma vez que $K \leq K_1 \times \dots \times K_s$ segue que $K = \{e\}$ e G_s é autossimilar.

Demonstramos agora que G^s é finito por estado sob a hipótese que G é finito por estado. A representação $\phi : G^s \rightarrow \mathcal{A}_{m^s+1}$ segundo a tripla $(\mathbf{m}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{F}_2)$ e a sequência de transversais $S = (T_1 \times \dots \times T_s, \{(e, \dots, e)\})$ é dada por $(g_1, \dots, g_s)^\phi$ que é igual a

$$\begin{aligned} & ((\theta_i((g_1, \dots, g_s), (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}))^{\rho_i \phi})_{1 \leq i \leq m^s, 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq m}, \\ & \theta_{m^s+1}((g_1, \dots, g_s), (e, \dots, e))^{\tau \phi}) \sigma_{(g_1, \dots, g_s)}, \end{aligned}$$

onde $t_{ij_u} \in T_i$, com $1 \leq u \leq s$. Segue que

$$\theta_i((g_1, \dots, g_s), (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}))^p = (\theta_i(g_1, t_{m_1+\dots+m_{i-1}+j_1})^{f_1}, \dots, \theta_i(g_s, t_{m_1+\dots+m_{i-1}+j_s})^{f_s})$$

para $1 \leq i \leq m^s$, $1 \leq j_1, \dots, j_s \leq m$ e

$$\theta_{m^s+1}((g_1, \dots, g_s), (e, \dots, e))^\tau = (g_1, \dots, g_s)^\tau = (g_2, g_3, \dots, g_s, g_1)$$

Tomando $U_{(g_1, \dots, g_s)} = \cup_{i=1}^s U_{g_i} \times \dots \times \cup_{i=1}^s U_{g_i}$ temos que $U_{(g_1, \dots, g_s)}^S$ é igual a

$$\{\theta_i((x_1, \dots, x_s)^{\tau^j}, (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}))^p, (x_1, \dots, x_s)^{\tau^j} \mid (t_{ij_1}, \dots, t_{ij_s}) \in T_1 \times \dots \times T_s, \\ 1 \leq i \leq m^s, 1 \leq j \leq s, (x_1, \dots, x_s) \in U_{(g_1, \dots, g_s)}\}$$

que está contido em $(\cup_{i=1}^s U_{g_i})^T \times \dots \times (\cup_{i=1}^s U_{g_i})^T \subseteq \cup_{i=1}^s U_{g_i} \times \dots \times \cup_{i=1}^s U_{g_i} = U_{(g_1, \dots, g_s)}$.
O que mostra que G^S na representação ϕ é finito por estado. □

2.2 Inflação e deflação de grau

Definição 2.2.1. *Uma inflação de grau é um homomorfismo injetor $\iota : \mathcal{A}_m \rightarrow \mathcal{A}_{m+n}$, onde $n \geq 1$. Para $G \leq \mathcal{A}_m$, dizemos que a imagem G^ι é uma inflação de grau.*

Exemplo 2.2.2. *Sejam $\phi_1 : \mathcal{A}_m \rightarrow \mathcal{A}_{m+n}$ a aplicação definida recursivamente por*

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma \mapsto (\alpha_1^{\phi_1}, \dots, \alpha_m^{\phi_1}, \underbrace{e, \dots, e}_{n \text{ vezes}})\sigma^{\phi_1},$$

onde $i^{\sigma^{\phi_1}} = j$ se, e somente se, $i^\sigma = j$, com $i, j \in \{1, \dots, m\}$, e $\phi_2 : \mathcal{A}_m \rightarrow \mathcal{A}_{m+n}$ por

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma \mapsto (\underbrace{e, \dots, e}_{n \text{ vezes}}, \alpha_1^{\phi_2}, \dots, \alpha_m^{\phi_2})\sigma^{\phi_2},$$

onde $(i+n)^{\sigma^{\phi_2}} = j+n$ se, e somente se, $i^\sigma = j$, com $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Utilizamos estas aplicações nas Proposições 1.4.3 e 1.5.4 para mostrar, respectivamente, que o produto direto de dois grupos finitos por estado é finito por estado e que o produto direto de dois grupos fechados por estado é fechado por estado.

Vamos definir abaixo uma importante inflação de grau.

Definição 2.2.3. Seja $G \leq \mathcal{A}_m$. Defina a seguinte inflação de grau $\psi : G \rightarrow \mathcal{A}_{m^2}$ por

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma \mapsto (\alpha_{11}^\psi, \dots, \alpha_{1m}^\psi, \dots, \alpha_{m1}^\psi, \dots, \alpha_{mm}^\psi)\sigma^\psi,$$

onde $\alpha_{(ir)\sigma_\psi} = \alpha_{js}$ se, e somente se, $(i)\sigma = j$ e $(r)\sigma_{\alpha_i} = s$, ou seja, $(ir)\sigma_\psi = (i)\sigma(r)\sigma_{\alpha_i}$.

Exemplo 2.2.4. Considere o grupo $G = \langle \gamma = ((\gamma, \alpha), e), \alpha = (e, (\alpha, e))(12) \rangle \leq \mathcal{A}_2$, com $G \simeq \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ (veja [6] e [8]). Temos a inflação $\psi : G \rightarrow \mathcal{A}_4$ definida por $\gamma^\psi = (\gamma^\psi, \alpha^\psi, e, e)$ e $\alpha^\psi = (e, e, \alpha^\psi, e)(13)(24)$.

Chamaremos de k -inflação de nível a inflação de nível ψ aplicada k vezes.

Proposição 2.2.5. Seja $G \leq \mathcal{A}_m$. A inflação de grau $\psi : G \rightarrow \mathcal{A}_{m^2}$, da Definição 2.2.3, é um homomorfismo injetor.

Demonstração. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)\delta \in G$. Então

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^\psi &= ((\alpha_1\beta_{(1)\sigma_\alpha}, \dots, \alpha_m\beta_{(m)\sigma_\alpha})\sigma_\alpha\sigma_\beta)^\psi \\ &= ((\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im})\sigma_{\alpha_i}(\beta_{(i)\sigma_\alpha 1}, \dots, \beta_{(i)\sigma_\alpha m})\sigma_{\beta_{(i)\alpha_i}})_{i=1}^m \sigma_\alpha\sigma_\beta)^\psi \\ &= ((\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im})(\beta_{(i)\sigma_\alpha(1)\sigma_{\alpha_i}}, \dots, \beta_{(i)\sigma_\alpha(m)\sigma_{\alpha_i}})\sigma_{\alpha_i}\sigma_{\beta_{(i)\alpha_i}})_{i=1}^m \sigma_\alpha\sigma_\beta)^\psi \\ &= ((\alpha_{ik}\beta_{(i)\sigma_\alpha(k)\sigma_{\alpha_i}})_{k=1}^m)_{i=1}^m \sigma_\alpha^\psi \sigma_\beta^\psi \\ &= ((\alpha_{ik}\beta_{(ik)\sigma_\alpha^\psi})_{k=1}^m)_{i=1}^m \sigma_\alpha^\psi \sigma_\beta^\psi \\ &= ((\alpha_{ik})_{k=1}^m)_{i=1}^m \sigma_\alpha^\psi ((\beta_{ik})_{k=1}^m)_{i=1}^m \sigma_\beta^\psi \\ &= \alpha^\psi \beta^\psi \end{aligned}$$

Logo, ψ é um homomorfismo. Como claramente

$$\alpha^\psi = (\alpha_{11}^\psi, \dots, \alpha_{1m}^\psi, \dots, \alpha_{m1}^\psi, \dots, \alpha_{mm}^\psi)\sigma^\psi = e,$$

implica $\alpha = e$, segue que ψ é uma aplicação injetiva. \square

Para re-indexar as coordenadas, podemos fazer $\alpha_{ij} = \alpha_l$, onde $l = (i-1) \times m + j$. Como $\alpha_{(ij)\sigma_\psi}^\psi = \alpha_{(i)\sigma(j)\sigma_{\alpha_i}}^\psi$, a ação no re-indexamento é descrita por $(l)\sigma^\psi = ((i)\sigma - 1) \times m + (j)\sigma_{\alpha_i}$

Exemplo 2.2.6. Seja $G = \langle \alpha = (e, (\alpha, e)(12))(12) \rangle$. Note que

$$\alpha = ((e, e), (\alpha, e)(12))(1, 2) = ((\alpha_{11}, \alpha_{12}), (\alpha_{21}, \alpha_{22})(12))(1, 2),$$

Utilizando a inflação ψ , da Definição 2.2.3, e chamando $\alpha^\psi = \gamma$, temos

$$\alpha^\psi = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)\sigma^\psi.$$

Para determinar a ação de σ^ψ , fazemos

$$(1)\sigma^\psi = ((1-1) \times 2 + 1)\sigma^\psi = ((1)\sigma - 1) \times 2 + (1)\sigma_{\alpha_1} = (2-1) \times 2 + 1 = 3;$$

$$(2)\sigma^\psi = ((1-1) \times 2 + 2)\sigma^\psi = ((1)\sigma - 1) \times 2 + (2)\sigma_{\alpha_1} = (2-1) \times 2 + 2 = 4;$$

$$(3)\sigma^\psi = ((2-1) \times 2 + 1)\sigma^\psi = ((2)\sigma - 1) \times 2 + (1)\sigma_{\alpha_2} = (1-1) \times 2 + 2 = 2;$$

$$(4)\sigma^\psi = ((2-1) \times 2 + 2)\sigma^\psi = ((2)\sigma - 1) \times 2 + (2)\sigma_{\alpha_2} = (1-1) \times 2 + 1 = 1.$$

Portanto,

$$G^\psi = \langle \gamma = (e, e, \gamma, e)(1324) \rangle$$

e, pela Proposição 2.2.5, $G \simeq G^\psi$.

Definição 2.2.7. Dizemos que um grupo $G \leq \mathcal{A}_m$ é fechado por estado no k -ésimo nível se, ao aplicarmos a inflação de nível k vezes, o grupo resultante for fechado por estado.

Exemplo 2.2.8. Seja $\alpha = (e, (e, (\alpha, e)\sigma)) = ((e, e), (e, (\alpha, e)\sigma))$, onde $\sigma = (12)$. Defina $G = \langle \alpha \rangle$. Aplicando uma primeira inflação de nível, obtemos $\alpha^\psi = (e, e, e, (e, e, \alpha^\psi, e)(34))$, na segunda inflação temos

$$\alpha^{\psi^2} = (e, e, e, e, e, e, \alpha^{\psi^2}, e)(7\ 8),$$

isto é, G é fechado por estado no nível 2.

Definição 2.2.9. Seja $G \leq \mathcal{A}_m$. Uma deflação de grau de G é um homomorfismo injetor $\delta : G \rightarrow \mathcal{A}_n$, onde $n < m$.

Proposição 2.2.10. Seja $\varphi : G \rightarrow \mathcal{A}_m$ uma representação autossimilar de G em \mathcal{A}_m , onde $P(G^\varphi) \leq S_m$ é o grupo de permutações de G^φ induzido no primeiro nível da árvore \mathcal{T}_m . Se $\rho : P(G) \rightarrow W(n, r)$ é uma imersão, onde $W(n, 1) = S_n$ e $W(n, i) = W(n, i-1) \wr_{\{1, \dots, n\}} S_n$, então existe uma deflação $\phi : G \rightarrow \mathcal{A}_n$, para $n < m$.

Demonstração. Seja $\alpha \in G^\varphi$ um elemento arbitrário e considere $\sigma_\alpha \in P(G^\varphi)$ a permutação de α no primeiro nível. Suponha que $\rho : P(G^\varphi) \rightarrow W(n, r)$ é uma imersão. Para todo $\alpha \in G^\varphi$, $\sigma_\alpha^\rho \in W(n, r)$, para algum $r \geq 1$, então $\sigma_\alpha^\rho \leq \mathcal{A}_n$. Como G é autossimilar, então $\alpha_i \in G^\varphi$,

com $i \in \{1, \dots, m\}$ e, por hipótese, $\sigma_{\alpha_i}^p \leq \mathcal{A}_n$. Portanto, $\sigma_\alpha^p \in \mathcal{A}_n$ para todo $\alpha \in G^p$. Para $g \in G$ tal que $g^p = \alpha$, defina

$$g^\psi = \alpha^\psi = (\beta_1 = (\alpha_1^\psi, \dots, \alpha_r^\psi), \dots, \beta_n = (\alpha_s^\psi, \dots, \alpha_m^\psi)) \sigma_\alpha^\psi,$$

onde $\sigma_\alpha^\psi = \sigma_\alpha^p$ e o agrupamento β_k , com $k \in \{1, \dots, n\}$, é formado de modo que a ação fique bem definida, isto é, se $\alpha_i \sigma_\alpha = \alpha_j$, então $\alpha_i, \alpha_j \in B_k$. Segue da autossimilaridade de G que todo elemento $\alpha_i \in G^p$ induz uma ação bem definida em relação ao bloco B_k , consequentemente, a ação fica bem definida em toda a árvore. Como ρ é uma imersão, segue que ψ produz uma imersão de G em \mathcal{A}_n . \square

Exemplo 2.2.11. Sejam $G_1 = \langle \alpha = (\alpha, e, e, e)(12) \rangle$ e $G_2 = \langle \beta = (\beta, e, e, e)(14) \rangle$ subgrupos de \mathcal{A}_4 . Note que

$$\begin{aligned} \rho : P(G_1) &\rightarrow W(2, 2) \\ (12) &\mapsto ((12), e). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho : P(G_2) &\rightarrow W(2, 2) \\ (14) &\mapsto ((12), (12))(12). \end{aligned}$$

Portanto, existe deflação ϕ de modo que $G_1^\phi = \langle (\alpha^\phi = ((\alpha^\phi, e)(12), e)) \rangle \leq \mathcal{A}_2$ e $G_2^\phi = \langle (\beta^\phi = ((\beta^\phi, e)(12), (12))(12)) \rangle \leq \mathcal{A}_2$.

Exemplo 2.2.12. Seja $G = \langle \beta = (\beta, e, \alpha), \alpha = (e, \alpha, e)(12) \rangle \leq \mathcal{A}_3$. Observe que G é fechado por estado e que a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : P(G) &\rightarrow W(2, 2) \\ (12) &\mapsto ((12), e) \end{aligned}$$

é uma imersão, segue que

$$G^\phi = \langle \beta^\phi = ((\beta^\phi, e), \alpha^\phi), \alpha^\phi = ((e, \alpha^\phi(12)), e) \rangle \leq \mathcal{A}_2.$$

2.3 Concatenação geral

Sejam $G_1 = A_1 \rtimes U$ e $G_2 = A_2 \rtimes U$ e $G = (A_1 \oplus A_2) \rtimes U$. Para $i = 1, 2$, defina as triplas $(\mathbf{m}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{F}_i)$ referentes a G_i , onde $\mathbf{m}_i = (m_{i1}, \dots, m_{is_i})$, $\mathbf{H}_i = (H_{1i}, \dots, H_{is_i})$ e $\mathbf{F}_i = (f_{i1}, \dots, f_{is_i})$. Seja $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ a tripla referente a G , onde \mathbf{m} é a concatenação $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$, \mathbf{H} é a concatenação

$$(\tilde{H}_{1j} = A_2 \cdot H_{1j} \ (1 \leq j \leq s_1), \tilde{H}_{2k} = A_1 \cdot H_{2k} \ (1 \leq k \leq s_2)),$$

e

$$\mathbf{F} = (f_{11}, \dots, f_{1s_1}, f_{21}, \dots, f_{2s_2})$$

onde $\tilde{f}_{1j} : \tilde{H}_{1j} \rightarrow G$, $1 \leq j \leq s_1$, é definido por

$$\tilde{f}_{1j} : ah \mapsto h^{f_{1j}}, \text{ para } a \in A_2, h \in H_{1j}$$

e $\tilde{f}_{2k} : \tilde{H}_{2k} \rightarrow G$, $1 \leq k \leq s_2$, é definido por

$$\tilde{f}_{2k} : ah \mapsto h^{f_{2k}}, \text{ para } a \in A_1, h \in H_{2k}.$$

Proposição 2.3.1. ([8, página 11]) *Com a notação acima, para $i = 1, 2$, seja G_i em sua representação fechada por estado com respeito a tripla $(\mathbf{m}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{F}_i)$. Considere também G em sua representação fechada por estado com respeito a $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$. Suponha que as representações fechadas por estado de G_1 e G_2 são fiéis. Então a representação fechada por estado de G também é fiel. Além disso, de G_1 e G_2 são finitos por estado, então G também é.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [8, Proposition 5.2]. Observe que se $G = H \wr K = (\oplus_{k \in K} H) \rtimes K$ possui a propriedade de ser fechado ou finito por estado, então pelo processo de concatenação segue que

$$H^2 \wr K = \oplus_{k \in K} H^2 \rtimes K = \left(\oplus_{k \in K} H \oplus \oplus_{k \in K} H \right) \rtimes K$$

também terá tais propriedades. Sucessivas aplicações da concatenação nos resultam em $H^l \wr K$ herdando as propriedades fechado por estado ou finito por estado de $G = H \wr K$. Destacamos então que, como descrito em [8, Theorem C], $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}^l$ é um grupo fechado por estado e finito por estado de grau 4.

2.4 Autômata-grupo

Um autômata é um modelo matemático de computador caracterizado pela função de reconhecimento de linguagem, recebe a informação através de uma fita de entrada em formato de *string*, isto é, uma cadeia de caracteres. O autômata, ao receber uma *string*, irá ler cada símbolo e transicionar para um estado que depende apenas do estado atual e do símbolo que acabou de ser lido. Nesta seção, utilizamos [11] como referência e trabalhamos com um tipo específico de autômata, a Máquina de Mealy.

Definição 2.4.1. *Uma máquina de Mealy é uma sêxtupla $A_q = (Q, \Sigma, \Gamma, f, l, q_0)$ onde*

- Q é um conjunto de estados;
- Σ é o alfabeto de entrada;
- Γ é o alfabeto de saída;
- $f : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ é a função de transição de estados;
- $l : Q \times \Sigma \rightarrow \Gamma$ é a função de saída;
- q_0 é o estado denominado inicial.

A função de transição de estados faz uma leitura do estado atual e de um símbolo do alfabeto de entrada e, após isso, produz um novo estado. Já a função de saída faz uma leitura do estado atual com o símbolo de entrada e produz como resultado um símbolo do alfabeto de saída. Por exemplo, se q é um estado atual, a é o símbolo do alfabeto de entrada, $(q, a)f = p$ e $(q, a)l = b$, então podemos ilustrar essa transição através do diagrama de Moore

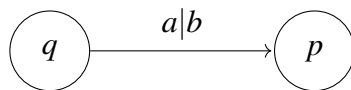


Figura 2.1 Transição de estados

Para um elemento $a \in \Sigma$ fixado, chamamos a aplicação $f_a : Q \rightarrow Q$ definida por $(q)f_a = (q, a)f$ de *função de estado*.

Definição 2.4.2. *Dizemos que um autômata A é invertível se cada função de estado é uma bijeção.*

Dado um autômata invertível A , denotaremos seu autômata inverso por A^{-1} e a correspondência entre seus estados é dada pela aplicação $p \mapsto p^{-1}$. Além disso, se em A temos a relação $(q, a)f = p$ e $(q, a)l = b$, então em A^{-1} teremos a relação

$$(q^{-1}, b)f = p^{-1} \text{ e } (q^{-1}, b)l = a,$$

que pode ser representada através do diagrama de Moore

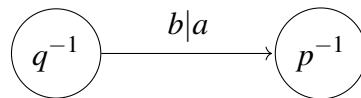
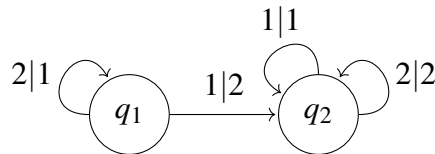


Figura 2.2 Transição de estados em A^{-1}

Concluimos que o diagrama de A^{-1} é obtido de A ao trocar um estado p pelo correspondente p^{-1} e invertendo os símbolos de entrada e saída do alfabeto. Consideramos o mesmo alfabeto para o alfabeto de entrada e o de saída, além disso, suprimos o estado inicial. Deste modo, consideramos apenas o autômata $A = (Q, \Sigma, f, l)$.

Exemplo 2.4.3. *Considere o autômata*



Neste caso, $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{1, 2\}$, a função de estados é dada por

| | | |
|-------|-------|-------|
| f | 1 | 2 |
| q_1 | q_2 | q_1 |
| q_2 | q_2 | q_2 |

e a função l de saída de estados é dada por

| | | |
|-------|---|---|
| l | 1 | 2 |
| q_1 | 2 | 1 |
| q_2 | 1 | 2 |

Cada estado de um autômata invertível $A = (Q, Y, f, l)$, onde $|Y| = m$, pode ser visto como um elemento de \mathcal{A}_m . Para tal, faremos a correspondência de um estado q com um automorfismo

$$\gamma_q = (\gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{q_m}) \sigma_{\gamma_q}$$

onde $(q, i)f = q_i$ e $(q, i)l = j$ se, e somente se, $(i)\sigma_{\gamma_q} = j$.

Por outro lado, um automorfismo $\beta \in \mathcal{A}_m$ possui uma interpretação como autômata, para tal, definimos $\Sigma = \Gamma = Y$, $Q = Q(\beta)$, $q = \beta$, $(\theta, y)f = \theta_y$ e $(\theta, y)l = y^\theta$, onde Y é o alfabeto da árvore uni-raiz m -regular e $\theta \in Q(\beta)$.

Exemplo 2.4.4. *Seja $\beta = (e, \beta)(12)$ um automorfismo da árvore binária. Então $Y = \{1, 2\}$, $Q(\beta) = \{\beta, e\}$*

$$\begin{aligned} (\beta, 1)f &= e & (\beta, 1)l &= 2 \\ (\beta, 2)f &= \beta & (\beta, 2)l &= 1 \\ (e, 1)f &= e & (e, 1)l &= 1 \\ (e, 2)f &= e & (e, 2)l &= 2 \end{aligned}$$

e o diagrama correspondente é

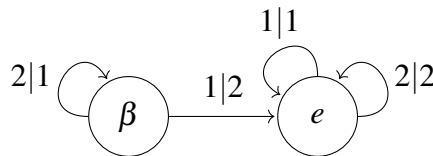
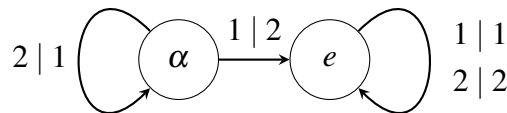


Figura 2.3 Autômata β

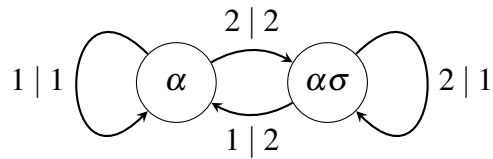
Deste modo, dado um autômata invertível A , podemos olhar seu conjunto de estados Q como um subconjunto de \mathcal{A}_m e definir $\mathcal{G}(A) = \langle \gamma_q \mid q \in Q \rangle$ como o autômata-grupo gerado pelo autômata A .

Destacaremos alguns grupos gerados por autômata e seu autômata gerador

- $G = \langle \alpha = (e, \alpha)(12) \rangle \simeq \mathbb{Z}$ (Máquina de adição binária)



- $G = \langle \sigma = (12), \alpha = (\alpha, \alpha\sigma) \rangle \simeq C_2 \wr \mathbb{Z}$ (Grupo lamplighter)



- $G = \langle \gamma = ((\gamma, \alpha), (e, e)), \alpha = ((e, e), (\alpha, e))(12) \rangle \simeq \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \text{ ([6])}$

Por definição, um autômata-grupo é fechado por estado. Se o autômata considerado for finito, isto é, possui um número finito de estados, então o autômata-grupo correspondente também é finitamente gerado e finito por estado.

Temos ainda que todo grupo finito por estado pode ser imerso em um grupo fechado e finito por estado ao considerar o autômata-grupo gerado pelos estados do grupo finito por estado.

Exemplo 2.4.5. Considere o grupo $G = \langle \alpha = (e, (e, \alpha))\sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}$, onde $\sigma = (12)$. O grupo em questão é finito por estado, mas não é fechado por estado pois (e, α) é um estado que não pertence a G . Entretanto, o grupo G ocorre como um subgrupo de $\mathcal{G}(\alpha) = \langle \alpha, (e, \alpha) \rangle$ que é um grupo finito por estado e fechado por estado gerado pelo autômata α . Este autômata e o grupo gerado por ele foram estudados em [14]. O elemento α também aparece em [6], onde foi utilizado para definir o produto tree-wreathing.

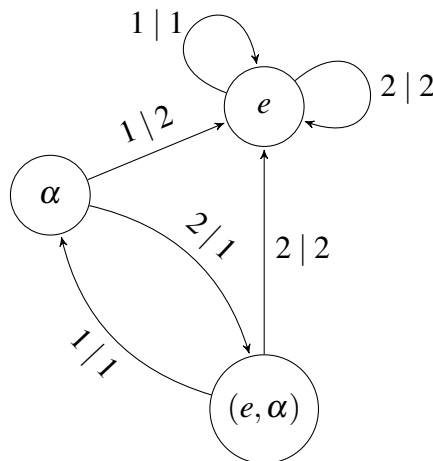


Figura 2.4 Autômata α

Proposição 2.4.6. O produto direto de dois autômata-grupos é um autômata-grupo.

Demonstração. Segue imediatamente das Proposições 1.4.3 e 1.5.4.

□

CAPÍTULO 3

O subgrupo parabólico

Neste capítulo, vamos estender a definição de subgrupo parabólico, dada por Bartholdi e Sidki em [2], e provamos, como resultado principal, que dada uma tripla simples é possível obter uma outra tripla simples com parabólico trivial.

3.1 O subgrupo parabólico

Nesta seção, consideramos G um grupo autossimilar segundo a tripla

$$(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F}) = ((m_1, m_2, \dots, m_s), (H_1, H_2, \dots, H_s), (f_1, f_2, \dots, f_s))$$

e denotamos $L^{f_i^{-1}}$ para o subconjunto $\{h \in H \mid h^{f_i} \in L\}$ de H_i . Bartholdi e Sidki em [2], definiram o subgrupo parabólico de uma tripla simples com apenas um endomorfismo virtual. A definição a seguir estende esse conceito para uma tripla simples com s endomorfismos virtuais.

Definição 3.1.1. *O subgrupo parabólico H_ω de G segundo a tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ é definido por $H_\omega = \bigcap_{k=0}^{\infty} W_k$, onde*

$$W_0 = G, W_1 = \bigcap_{i=1}^s W_0^{f_i^{-1}}, W_2 = \bigcap_{i=1}^s W_1^{f_i^{-1}}, \dots, W_k = \bigcap_{i=1}^s W_{k-1}^{f_i^{-1}}, \dots$$

Com relação ao subgrupo parabólico vale a seguinte proposição.

Proposição 3.1.2. *Com as notações acima, temos*

$$H_\omega = \langle K \leq \bigcap_{i=1}^s H_i \mid K^{f_i} \leq K, \text{ para todo } i = 1, \dots, s \rangle.$$

Demonstração. Tome $x \in H_\omega = \bigcap_{k=1}^\infty W_k$. Então $x^{f^i} \in H_\omega$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Logo H_ω é f_i -invariante para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, consequentemente, $H_\omega \subset \langle K \leq \bigcap_{i=1}^s H_i \mid K^{f^i} \leq K, \text{ para todo } i = 1, \dots, s \rangle$. Agora, tome $x \in \langle K \leq \bigcap_{i=1}^s H_i \mid K^{f^i} \leq K, \text{ para todo } i = 1, \dots, s \rangle$, então $x \in \bigcap_{i=1}^s H_i$ e $x^{f^i} \in K$ para todo $i = 1, \dots, s$, isto é, $x \in W_1$. Aplicando o argumento k vezes, obtemos que $x \in W_k$ para todo $k = 1, 2, 3, \dots$. Logo $x \in H_\omega$ e o resultado segue. \square

Exemplo 3.1.3. *Sejam $G = C_2 \wr \mathbb{Z} = \langle a \rangle \wr \langle x \rangle$ e o endomorfismo simples*

$$\begin{aligned} f : H = G \wr \langle x \rangle &\rightarrow G \\ [a, x] &\mapsto a \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Observe que $\langle x \rangle$ é o maior subgrupo f -invariante de H , consequentemente, $H_\omega = \langle x \rangle$. Note que se $T = \{1, a\}$ é um transversal de H em G , então a representação autossimilar induzida de G pela tripla (m, H, f) e T é tal que $G^\varphi = \langle \sigma = (12), \alpha = (\alpha, \sigma\alpha) \rangle$ e

$$H_\omega^\varphi = \langle x \rangle^\varphi = \langle \alpha \rangle = \text{Stab}_{G^\varphi}(\{1\}^*) = \{g^\varphi \in G^\varphi \mid (u)g^\varphi = u, \forall u \in \{1\}^*\},$$

onde $S^* = \{u = y_1 \dots y_n \mid y_i \in S \subset Y\}$.

Em [22], Sidki considera um subgrupo K de \mathcal{A}_2 finito por estado tal que $\text{Stab}_K(\{1\}^*)$ é trivial. Se K é um grupo autossimilar segundo a tripla (m, H, f) e um transversal $T = \{t_1 = e, t_2, \dots, t_m\}$ de H em K , então não é difícil ver que seu subgrupo parabólico H_ω é tal que

$$H_\omega^{\varphi, f, T} = \text{Stab}_{K^{\varphi, f, T}}(\{1\}^*).$$

Na proposição seguinte, determinamos a imagem do parabólico de uma representação induzida por uma tripla simples com s endomorfismos.

Proposição 3.1.4. *Sejam $T_i = \{t_{m_1 + \dots + m_{i-1} + 1} = e, t_{m_1 + \dots + m_{i-1} + 2}, \dots, t_{m_{i+1}}\}$ transversal de H_i em G , para cada $i = 1, \dots, s$, e $\varphi : G \rightarrow \mathcal{A}_m$ a representação autossimilar induzida pela tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ e os transversais T_1, \dots, T_s e considere*

$$S = \{r_1 = 1, r_2 = m_1 + 1, r_3 = m_1 + m_2 + 1, \dots, r_s = m_1 + m_2 + \dots + m_{s-1} + 1\}.$$

Então o subgrupo parabólico H_ω de G é tal que

$$H_\omega^\varphi = \text{Stab}_{G^\varphi}(S^*) = \{g^\varphi \in G^\varphi \mid (u)g^\varphi = u, \forall u \in S^*\}.$$

Demonstração. Se $h \in H_\omega$, então $h^\varphi \in \text{Stab}_{G^\varphi}(S)$ e $(t_{r_i} h t_{r_i}^{-1})^{f_i} = h^{f_i} \in H_\omega$. Segue por indução que $H_\omega^\varphi \subset \text{Stab}_{G^\varphi}(S^*)$.

Agora se $h^\varphi \in \text{Stab}_{G^\varphi}(S^*)$, então $h \in H^{f_{i_1}^{-1} \dots f_{i_n}^{-1}}$ para todos $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, s\}$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $h \in H_\omega$ e $\text{Stab}_{G^\varphi}(S^*) \subset H_\omega$. \square

Como comentário final dessa seção, em [22], Sidki ao considerar um subgrupo K de \mathcal{A}_2 com $\text{Stab}_K(\{1\}^*) = 1$ e H um subgrupo abeliano finito por estado de \mathcal{A}_2 , ele provou, dentre outras coisas, que o produto entrelaçado $H \wr K$ também é um subgrupo finito por estado de \mathcal{A}_2 .

3.2 Subgrupos parabólicos de grupos autossimilares transitivos

Para as duas proposições seguintes, fixaremos as hipóteses de que G é um grupo fechado por estado transitivo de grau m , $f : H \rightarrow G$ um endomorfismo simples, $T = \{t_0 = e, t_1, \dots, t_{m-1}\}$ um transversal de H em G e $\mathcal{K} = H_G$ o maior subgrupo normal em G contido em H .

Proposição 3.2.1. *Seja $S = \{l_0 = e, l_1, \dots, l_{s-1}\}$ um transversal de \mathcal{K} em G . Então*

$$\begin{aligned} f_i &= l_i^{-1} f l_i : \mathcal{K} \rightarrow G \\ k &\mapsto k^{l_i^{-1} f l_i} \end{aligned}$$

é um endomorfismo simples.

Demonstração. Suponha $L \triangleleft G$ e f_i -invariante. Se $x \in L$, então

$$x^f = x^{l_i^{-1} f l_i} = ((x^{l_i})^{f_i})^{l_i^{-1}} \in L$$

Assim L é f -invariante e $L = \{e\}$. \square

A proposição anterior é um mecanismo de criação de endomorfismos simples através de conjugação. A seguir, iremos estudar como os subgrupos parabólicos das representações resultantes se relacionam.

Proposição 3.2.2. *Defina $\mathcal{K}_{\omega_i} = \mathcal{K}_{\omega_{f_i}}$ como o subgrupo parabólico de \mathcal{K} em relação ao endomorfismo virtual simples $f_i|_{\mathcal{K}}$ definido na proposição anterior. Então $\mathcal{K}_{\omega_i} = \mathcal{K}_{\omega}^{l_i}$, onde $i = 0, \dots, s-1$.*

Demonstração. Note que

$$\mathcal{K}_\omega^{l_i f_i} = \mathcal{K}_\omega^{l_i l_i^{-1} f_i} = \mathcal{K}_\omega^{f_i} = \mathcal{K}_\omega^{l_i}.$$

Assim $\mathcal{K}_\omega^{l_i}$ é f_i -invariante e $\mathcal{K}_\omega^{l_i} \leq \mathcal{K}_\omega$.

Tome $x \in \mathcal{K}_\omega^{l_i}$. Como $x \in \mathcal{K}$, existe $y \in \mathcal{K}$ tal que $x = y^{l_i}$. Deste modo,

$$x^{f_i^n} = x^{l_i^{-1} f_i^n l_i} = y^{f_i^n l_i}$$

e $y \in \mathcal{K}_\omega$, isto é, $x \in \mathcal{K}_\omega^{l_i}$. □

3.3 Demonstração do Teorema A

Para a demonstração do Teorema A, considere H_G o core do subgrupo $\cap_{i=1}^s H_i$ em G , r o índice de H_G em G e a tripla

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1) = (\underbrace{(r, \dots, r)}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{(H_G, \dots, H_G)}_{s \text{ vezes}}, (f_1, f_2, \dots, f_s)).$$

Teorema A. *Uma G -tripla simples $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ induz uma G -tripla simples $(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ com subgrupo parabólico trivial. Além disso, se a representação induzida pela G -tripla $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$ for finita por estado, então a G -tripla $(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ também será finita por estado.*

Demonstração. Pelo Lema 2.1.7, o grupo G é autossimilar com relação a tripla $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$. Sejam T_1, \dots, T_s transversais de H_G em G , onde $T_i = \{t_{i1} = e, t_{i2}, \dots, t_{ir}\}$. Defina os endomorfismos

$$\begin{aligned} f_{ij} : H_G &\rightarrow G \\ h &\mapsto h^{t_{ij} f_i} = (t_{ij}^{-1} h t_{ij})^{f_i} \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, s$ e $j = 1, 2, \dots, r$, e a G -tripla $(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ por

$$(\underbrace{(r, \dots, r)}_{sr \text{ vezes}}, \underbrace{(H_G, \dots, H_G)}_{sr \text{ vezes}}, (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1r}, \dots, f_{s1}, f_{s2}, \dots, f_{sr})).$$

O subgrupo parabólico K_ω da tripla $(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ é

$$K_\omega = \langle K \leq H_G \mid K^{f_{ij}} \leq K, \forall (i, j) \in \{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, r\} \rangle.$$

Sejam $x \in K_\omega$ e $g \in G$. Então existem $t_{ij} \in T_i$ e $h \in H_G$ tais que $g = ht_{ij}$. Para cada $i = 1, \dots, s$ temos que

$$(x^g)^{f_i} = (x^{ht_{ij}})^{f_i} = x^{hf_{ij}} = (x^{f_{ij}})^{h^{f_{ij}}} = y^{g_1},$$

onde $x^{f_{ij}} = y \in K_\omega$ e $h^{f_{ij}} = g_1$. Assim, K_ω^G é f_i -invariante para cada $i = 1, \dots, s$ e como a tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ é simples, segue que $K_\omega = 1$. Portanto, a tripla $(\mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ induz uma representação autossimilar de G com subgrupo parabólico trivial.

Agora, por hipótese, podemos assumir que os transversais T_1, \dots, T_s de H_G em G induzem uma representação autossimilar finita por estado de G com relação a f_1, \dots, f_s , respectivamente. Para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, defina $T_{ij} = x_j T_i$, onde $x_j \in T_i$, e $j \in \{1, \dots, r\}$. Afirmamos que os transversais $T_{11}, \dots, T_{1r}, \dots, T_{s1}, \dots, T_{sr}$ de H_G em G induz uma representação autossimilar finita por estado de G com relação a $f_{11}, \dots, f_{1r}, \dots, f_{s1}, \dots, f_{sr}$, respectivamente. Sejam

$$\varphi : G \rightarrow \mathcal{A}_{sr}$$

$$g \mapsto g^\varphi = ((\theta_i(g, t)^{f_i})^\varphi \mid t \in T_i, 1 \leq i \leq s) \sigma_g$$

e

$$\dot{\varphi} : G \rightarrow \mathcal{A}_{sr^2}$$

$$g \mapsto g^{\dot{\varphi}} = ((\theta_{ij}(g, t)^{f_{ij}})^{\dot{\varphi}} \mid t \in T_{ij}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r) \dot{\sigma}_g$$

as representações de G com relação as G -tripas $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$ e $(\mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$, respectivamente. Observe que se $t \in T_{ij}$, então $t = x_j t_l$ para algum $t_l \in T_i$, conseqüentemente

$$\theta_{ij}(g, t) = \theta_{ij}(g, x_j t_l) = x_j t_l g (x_j t_l \sigma_g)^{-1} = (t_l g t_l^{-1})^{x_j^{-1}}.$$

De fato, existem $h \in H_G$ tais que $t_l g = ht_l \sigma_g$, e então

$$x_j t_l g = x_j h t_l \sigma_g = h^{x_j^{-1}} x_j t_l \sigma_g \in H_G x_j t_l \sigma_g.$$

Assim, a permutação de T_i induzida por g é a mesma permutação de T_{ij} induzida por g , e então

$$\begin{aligned} g^{\dot{\varphi}} &= ((\theta_{ij}(g, t)^{f_{ij}})^{\dot{\varphi}} \mid t \in T_{ij}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r) \dot{\sigma}_g \\ &= (((t_l g t_l^{-1})^{x_j^{-1}})^{x_j f_i})^{\dot{\varphi}} \mid x_j t_l \in T_{ij}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r) \dot{\sigma}_g \\ &= (((t_l g t_l^{-1})^{f_i})^{\dot{\varphi}} \mid t_l \in T_{ij}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r) \dot{\sigma}_g \\ &= ((\theta_i(g, t)^{f_i})^{\dot{\varphi}} \mid t \in T_{ij}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r) \dot{\sigma}_g. \end{aligned}$$

Como G é finito por estado segundo a tripla $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$ e com relação à sequência de transversais $T = (T_1, \dots, T_s)$, para cada $g \in G$, existe U_g subconjunto finito de G tal que $g \in U_g$ e

$$U_g^T = \{\theta_i(x, t)^{f_i} \mid t \in T_i, i = 1, \dots, s, x \in U_g\} \subset U_g.$$

Assim,

$$\begin{aligned} U_g^S &= \{\theta_{ij}(x, t)^{f_{ij}} \mid t \in T_{ij}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r, x \in U_g\} = \\ &= \{\theta_i(x, t)^{f_i} \mid t \in T_{ij}, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r, x \in U_g\} = U_g^T \subset U_g, \end{aligned}$$

ou seja, G é finito por estado segundo a tripla $(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E})$ e com relação à sequência de transversais $S = (T_{ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r}$. \square

Exemplo 3.3.1. Considere o grupo $G = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \langle y \rangle \wr \langle x \rangle$. A G -tripla

$$(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F}) = ((2, 1), (H, G), (f_1, f_2))$$

onde $H = \langle y \rangle^{\langle x \rangle} \langle x^2 \rangle$ e os homomorfismos $f_1 : H \rightarrow G$ e $f_2 : G \rightarrow G$ estendem respectivamente as aplicações

$$y^{t^{2n}} \mapsto y^{t^n}, y^{t^{2n+1}} \mapsto 1, x^{2n} \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z},$$

e

$$y \mapsto x, x \mapsto 1$$

induzem uma representação autossimilar finita por estado

$$G \simeq \langle \gamma = (\gamma, e, \alpha), \alpha = (e, \alpha, e)(01) \rangle \leq \mathcal{A}_3,$$

veja em [8]. Observe que o subgrupo parabólico H_ω da G -tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ não é trivial, pois

$$1 = (y^{x^3-x})f_1 = (y^{x^3-x})f_2.$$

Como H é normal em G , $T = \{1, x\}$ é um transversal de H em G , e $f_2|_H = xf_2|_H$, aplicando o Teorema A temos a G -tripla

$$(\mathbf{l}, \mathbf{K}, \mathbf{E}) = ((2, 2, 2), (K_1 = H, K_2 = H, K_3 = H), (f_1, xf_1, f_2|_H))$$

tem subgrupo parabólico trivial K_ω e induz uma representação fiel autossimilar finita por estado

$$G \simeq \langle \gamma_1 = (\gamma_1, e, e, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_1), \alpha_1 = (e, \alpha_1, e, \alpha_1, e, e)(01)(23) \rangle \leq \mathcal{A}_6.$$

Para finalizar essa seção, demonstramos duas proposições que são importantes na demonstração do Teorema C.

Seja n um inteiro positivo e $\sigma = (12\dots s) \in \text{Sym}(\{1, 2, \dots, s\})$. Para $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \{1, \dots, s\}^n$ considere $W_{\delta,0} = G$ e

$$\begin{aligned} W_{\delta,1} &= \bigcap_{i=1}^s W_{\delta,0}^{f_{(i)(\sigma\delta_n)}^{-1} f_{(i)(\sigma\delta_{n-1})}^{-1} \dots f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}}, \\ W_{\delta,2} &= \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,1})^{f_{(i)(\sigma\delta_n)}^{-1} f_{(i)(\sigma\delta_{n-1})}^{-1} \dots f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}}, \\ W_{\delta,3} &= \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,2})^{f_{(i)(\sigma\delta_n)}^{-1} f_{(i)(\sigma\delta_{n-1})}^{-1} \dots f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}}, \\ &\vdots \\ W_{\delta,k} &= \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,k-1})^{f_{(i)(\sigma\delta_n)}^{-1} f_{(i)(\sigma\delta_{n-1})}^{-1} \dots f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}}. \end{aligned}$$

Proposição 3.3.2. *Com as notações acima, $W_{\delta,\omega} = \bigcap_{k=0}^{\infty} W_{\delta,k}$ é igual a H_ω .*

Demonstração. Claramente $H_\omega \leq W_{\delta,\omega}$. Por outro lado, $W_{\delta,0} = W_0$ e

$$\begin{aligned} W_{\delta,1} &= \bigcap_{i=1}^s W_{\delta,0}^{f_{(i)(\sigma\delta_n)}^{-1} f_{(i)(\sigma\delta_{n-1})}^{-1} \dots f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}} \leq \bigcap_{i=1}^s W_0^{f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}} = \bigcap_{i=1}^s W_0^{f_i^{-1}} = W_1, \\ W_{\delta,2} &= \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,1})^{f_{(i)(\sigma\delta_n)}^{-1} f_{(i)(\sigma\delta_{n-1})}^{-1} \dots f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}} \leq \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,1})^{f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}} = \\ &= \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,1})^{f_i^{-1}} \leq \bigcap_{i=1}^s W_1^{f_i^{-1}} = W_2, \\ &\vdots \\ W_{\delta,k} &= \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,k-1})^{f_{(i)(\sigma\delta_n)}^{-1} f_{(i)(\sigma\delta_{n-1})}^{-1} \dots f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}} \leq \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,k-1})^{f_{(i)(\sigma\delta_1)}^{-1}} = \\ &= \bigcap_{i=1}^s (W_{\delta,k-1})^{f_i^{-1}} \leq \bigcap_{i=1}^s W_{k-1}^{f_i^{-1}} = W_k. \end{aligned}$$

Assim $W_{\delta, \omega} = \bigcap_{k=0}^{\infty} W_{\delta, k} \leq \bigcap_{k=0}^{\infty} W_k = H_{\omega}$ e o resultado segue. \square

Agora, para cada inteiro positivo n e cada n -upla $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ com $0 \leq \delta_1, \dots, \delta_n \leq s-1$ considere a aplicação

$$\begin{aligned} \lambda_{n, \delta} : \Delta((H_{\omega} \setminus W_{\delta, 1})^s) &\rightarrow (H_{\omega} \setminus G)^s \\ (H_{\omega} h)_{i=1}^s &\mapsto (H_{\omega} h^{f_{(i)(\sigma^{\delta_1})} f_{(i)(\sigma^{\delta_2})} \dots f_{(i)(\sigma^{\delta_n})}})_{i=1}^s \end{aligned}$$

onde $\Delta((H_{\omega} \setminus W_{\delta, 1})^s) = \{(H_{\omega} h)_{i=1}^s \mid h \in W_{\delta, 1}\}$.

Proposição 3.3.3. Para cada inteiro positivo n e cada n -upla δ a aplicação $\lambda_{n, \delta}$ é injetora.

Demonstração. Se existem $h, k \in W_{n, 1}$ tais que $((H_{\omega} h)_{i=1}^s)^{\lambda_{n, \delta}} = ((H_{\omega} k)_{i=1}^s)^{\lambda_{n, \delta}}$, então

$$H_{\omega} h^{f_{(i)(\sigma^{\delta_1})} f_{(i)(\sigma^{\delta_2})} \dots f_{(i)(\sigma^{\delta_n})}} = H_{\omega} k^{f_{(i)(\sigma^{\delta_1})} f_{(i)(\sigma^{\delta_2})} \dots f_{(i)(\sigma^{\delta_n})}}$$

para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Então

$$(hk^{-1})^{f_{(i)(\sigma^{\delta_1})} f_{(i)(\sigma^{\delta_2})} \dots f_{(i)(\sigma^{\delta_n})}} \in H_{\omega}$$

para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ e como

$$H_{\omega} = \langle K \leq W_{n, 0} \mid K^{f_{(i)(\sigma^{\delta_1})} f_{(i)(\sigma^{\delta_2})} \dots f_{(i)(\sigma^{\delta_n})}} \leq K, i = 1, \dots, s \rangle$$

temos $H_{\omega} h = H_{\omega} k$. \square

3.4 O grupo $B \wr \mathbb{Z}$

Em [23], Silva e Steinberg realizaram uma construção através de autômatas e obtiveram uma representação autossimilar transitiva do grupo Lamplighter $B \wr \mathbb{Z}$, onde B é um grupo abeliano finito. No próximo resultado, chegamos nesta mesma representação através de um endomorfismo virtual f .

Proposição 3.4.1. *Seja B um grupo abeliano finito. Então $B \wr \mathbb{Z}$ é um grupo autossimilar finito por estado.*

Demonstração. Considere $G = B \wr \mathbb{Z}$, onde $B = \{b_1 = e, \dots, b_n\}$ e $\mathbb{Z} = \langle x \rangle$, $H = G' \langle x \rangle$, $[G : H] = n$ e o endomorfismo virtual simples

$$\begin{aligned} f : H = G' \langle x \rangle &\rightarrow G \\ [b, x] &\mapsto b^{-1} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Defina agora

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \mathcal{A}_n \\ g &\mapsto (\theta(g, b_1)^{f\varphi}, \dots, \theta(g, b_n)^{f\varphi}) \sigma_g. \end{aligned}$$

Note que $\ker \varphi \leq H_\omega = \langle x \rangle$. Como H_ω não possui subgrupo normal em G , segue que φ produz uma representação fiel autossimilar de G em \mathcal{A}_n . Agora, iremos expor a representação de G em relação a φ . Para $\theta(b_j, b_i) = b_j b_i b_j^{-1}$, com $i, j = 1, \dots, n$, temos

$$H b_i b_j b_j^{-1} = H,$$

isto é, $b_i^{-1} = b_i^{-1} = (b_i b_j)^{-1}$ e $\theta(b_j, b_i) = e$. No caso $\theta(x, b_i) = b_i x b_i^{-1}$, segue que

$$H b_j x = H [b_j, x] x b_j = H b_j = H b_j \sigma_x,$$

donde concluímos que $\theta(x, b_i) = b_i x b_i^{-1} = [b_i^{-1}, x^{-1}] x$. Deste modo, $\theta(x, b_i)^f = b_i x$.

A representação de G é dada através dos seus geradores por

$$b_i^\varphi = (e, \dots, e) \sigma_{b_i}$$

e

$$x^\varphi = (\sigma_{b_1} x^\varphi, \dots, \sigma_{b_n} x^\varphi).$$

Por fim, $Q(b_i^\varphi) = \{b_i^\varphi, e\} \subset G^\varphi$ e $Q(x^\varphi) = \{x^\varphi, e\} \subset G^\varphi$ são finitos, isto é, G^φ é autossimilar finito por estado. \square

A partir de cada $b \in B$, definimos um novo endomorfismo virtual $f_b = b^{-1} f b$ (como na Proposição 3.2.1) e concluímos que a interseção dos parabólicos das triplas $(|B|, H, f_{b_1} = f)$, $(|B|, H, f_{b_2})$, ..., $(|B|, H, f_{b_n})$ é trivial, onde $B = \{b_1 = 1, b_2, \dots, b_n\}$.

CAPÍTULO 4

Representações autossimilares de produtos semidiretos

Neste capítulo, demonstramos o Teorema B e como aplicação provamos que grupos do tipo $A \wr (B \wr \mathbb{Z})$ são finitos por estado, onde A é um grupo abeliano finitamente gerado e B é um grupo abeliano finito. O Teorema B corrige e estende o Teorema E de [8] e o Teorema J de [20].

4.1 Produto semidireto autossimilar do tipo $A^{(\mathbf{H})} \rtimes G^s$ com A abeliano e $\mathbf{H} = (H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G)$

Seja G um grupo fechado por estado com respeito a tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, onde

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s), \mathbf{H} = (H_1, \dots, H_s), \text{ e } \mathbf{F} = (f_1, \dots, f_s).$$

Pelo Lema 2.1.7, o grupo G é também fechado por estado com respeito a tripla

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1) = ((m, \dots, m), (H, \dots, H), (f_1, \dots, f_s)),$$

onde $H = \bigcap_{i=1}^s H_i$ e $m = [G : \bigcap_{i=1}^s H_i]$. Denote por H_{ω_i} o subgrupo parabólico de H com relação ao endomorfismo virtual $f_i : H \rightarrow G$.

Teorema B. *Com as hipóteses acima temos*

(i) *Se B é um grupo abeliano finito, então*

$$\mathcal{G} = B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo orbital $(\underbrace{|B| \cdot m^s, \dots, |B| \cdot m^s}_{s \text{ vezes}})$;

(ii) Se G não é de torção, então

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo orbital $(\underbrace{m^s, \dots, m^s}_{s \text{ vezes}}, 1)$.

Além disso, se G é finito por estado segundo a tripla $(\mathbf{m}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_1)$, então \mathcal{G} também o é.

Demonstração. Considere a aplicação definida pela s -upla de classes laterais

$$\begin{aligned} \lambda : \prod_{i=1}^s \left(H_{\omega_i} \setminus \bigcap_{i=1}^s H_i \right) &\rightarrow \prod_{i=1}^s (H_{\omega_i} \setminus G) \\ (H_{\omega_1} h_1, \dots, H_{\omega_s} h_s) &\mapsto (H_{\omega_1} h_1^{f_1}, \dots, H_{\omega_s} h_s^{f_s}). \end{aligned}$$

Se $(H_{\omega_i} h_i)^\lambda = (H_{\omega_i} h'_i)^\lambda$, então $(h_i (h'_i)^{-1})^{f_i} \in H_{\omega_i}$ para cada $1 \leq i \leq s$; portanto λ é injetiva.

Para provar (i), defina

$$\mathcal{H} = \langle [B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))}, G^s] \rangle \rtimes H^s.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $B = \langle b \rangle$ é cíclico. Observe que o índice $[G : \mathcal{H}]$ é igual a $|B|m^s$. Seja $\sigma = (12 \cdots s) \in \text{Sym}(\{1, 2, \dots, s\})$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ defina o homomorfismo $\rho_{(1)\sigma^i} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ que estende a aplicação

$$\begin{aligned} \rho_{(1)\sigma^i} : [b^{(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s})}, (g_1, \dots, g_s)] &= b^{-(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s}) + (H_{\omega_1} g_1, \dots, H_{\omega_s} g_s)} \mapsto \\ \mapsto \begin{cases} b^{-(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s}) + (H_{\omega_1} g_1^{f_{(1)\sigma^i}}, \dots, H_{\omega_s} g_s^{f_{(s)\sigma^i}})}, & \text{se } (g_1, \dots, g_s) \in H \times \cdots \times H \\ b^{-(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s})}, & \text{se } (g_1, \dots, g_s) \notin H \times \cdots \times H \end{cases} \\ (h_1, \dots, h_s) &\mapsto (h_1^{f_{(1)\sigma^i}}, \dots, h_s^{f_{(s)\sigma^i}}), (h_1, \dots, h_s) \in H \times \cdots \times H. \end{aligned}$$

Como exemplo, temos $\rho_{(1)\sigma^2} = \rho_{(2)\sigma} = \rho_3$ e se $(k_1, \dots, k_s), (h_1, \dots, h_s) \in H^s$, então

$$\begin{aligned} &(b^{-(H_{\omega_1}, H_{\omega_2}, \dots, H_{\omega_s}) + (H_{\omega_1} k_1, H_{\omega_2} k_2, \dots, H_{\omega_{s-2}} k_{s-2}, H_{\omega_{s-1}} k_{s-1}, H_{\omega_s} k_s)} (h_1, h_2, \dots, h_{s-2}, h_{s-1}, h_s))^{\rho_3} = \\ &= b^{-(H_{\omega_1}, H_{\omega_2}, \dots, H_{\omega_s}) + (H_{\omega_1} k_1^{f_3}, H_{\omega_2} k_2^{f_4}, \dots, H_{\omega_{s-2}} k_{s-2}^{f_s}, H_{\omega_{s-1}} k_{s-1}^{f_1}, H_{\omega_s} k_s^{f_2})} (h_1^{f_3}, h_2^{f_4}, \dots, h_{s-2}^{f_s}, h_{s-1}^{f_1}, h_s^{f_2}). \end{aligned}$$

Afirmamos que a representação fechada por estado de \mathcal{G} definida pela tripla

$$((|B|m^s, \dots, |B|m^s), (\mathcal{H}, \dots, \mathcal{H}), \{\rho_1, \dots, \rho_s\})$$

é fiel.

Considere $K \leq \mathcal{H}$ com $K \triangleleft \mathcal{G}$ e $K^{\rho_i} \leq K$, $i = 1, 2, \dots, s$. Primeiramente, como G^s é fechado por estado com relação a tripla

$$((m^s, \dots, m^s), (H, \dots, H), \{\rho_1|_H, \dots, \rho_s|_H\})$$

então $K \leq \langle [B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))}, G^s] \rangle$. Seja

$$y = b^{n_1(H_{\omega_1}h_{11}, \dots, H_{\omega_s}h_{1s}) + n_2(H_{\omega_1}h_{21}, \dots, H_{\omega_s}h_{2s}) + \cdots + n_r(H_{\omega_1}h_{r1}, \dots, H_{\omega_s}h_{rs})}$$

um elemento de $K \setminus 1$ com $|y| = r > 1$ minimal. Pela normalidade de K podemos assumir que $h_{11} = \cdots = h_{1s} = 1$. Como λ é injetiva e r é minimal segue que $y^{\rho_1^t} \neq 1$ e

$$|y^{\rho_1^n}| = |b^{n_1(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s}) + n_2(H_{\omega_1}k_{2,1}, \dots, H_{\omega_s}k_{2,s}) + \cdots + n_r(H_{\omega_1}k_{r,1}, \dots, H_{\omega_s}k_{r,s})}| = r$$

para quaisquer $n = 0, 1, 2, \dots$. Então

$$(h_{21}, \dots, h_{2s}), \dots, (h_{r1}, \dots, h_{rs}) \in H_{\omega_1} \times \cdots \times H_{\omega_s};$$

uma contradição.

Para provar (ii), usamos a mesma estratégia de (i), mas um endomorfismo a mais definimos. Seja $\mathcal{H} = \mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes H^s$, com $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$, e note que $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = m^s$. Seja $\sigma = (12 \cdots s) \in \text{Sym}(\{1, 2, \dots, s\})$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, defina o homomorfismo $\rho_{(1)\sigma^i} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ que estende as aplicações

$$\rho_{(1)\sigma^i} : a^{(H_{\omega_1}g_1, \dots, H_{\omega_s}g_s)} \mapsto \begin{cases} e, & \text{se } (g_1, \dots, g_s) \notin H^s \\ a^{(H_{\omega_1}g_1^{f_{(1)\sigma^i}}, \dots, H_{\omega_s}g_s^{f_{(s)\sigma^i}})}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(h_1, \dots, h_s) \mapsto (h_1^{f_{(1)\sigma^i}}, \dots, h_s^{f_{(s)\sigma^i}}), (h_1, \dots, h_s) \in H^s$$

e o homomorfismo $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ que estende as aplicações

$$\begin{aligned} \mu : a^{(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s})} &\mapsto (x, \dots, x) \text{ onde } o(x) = \infty \text{ e } x \in G \\ (g_1, \dots, g_s) &\mapsto e, (g_1, \dots, g_s) \in G^s. \end{aligned}$$

Afirmamos que a representação fechada por estado de \mathcal{G} definida pela tripla

$$((m^s, \dots, m^s, 1), (\mathcal{H}, \dots, \mathcal{H}, \mathcal{G}), \{\rho_1, \dots, \rho_s, \mu\})$$

é fiel. Considere $K \leq \mathcal{H}$ com $K \triangleleft \mathcal{G}$, $K^{\rho_i} \leq K$, $i = 1, 2, \dots, s$, e $K^\mu \leq K$. Como G^s é fechado por estado com relação a tripla

$$((m^s, \dots, m^s), (H, \dots, H), \{\rho_1|_H, \dots, \rho_s|_H\})$$

então $K \leq \mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \dots \times (H_{\omega_s} \setminus G))}$. Seja

$$y = a^{n_1(H_{\omega_1}h_{11}, \dots, H_{\omega_s}h_{1s}) + n_2(H_{\omega_1}h_{21}, \dots, H_{\omega_s}h_{2s}) + \dots + n_r(H_{\omega_1}h_{r1}, \dots, H_{\omega_s}h_{rs})}$$

um elemento de $K \setminus 1$. Pela definição de μ , temos $n_1 + n_2 + \dots + n_r = 0$. Podemos considerar $r > 1$ minimal. Pela normalidade de K , podemos assumir que $h_{11} = \dots = h_{1s} = 1$. Como λ é injetiva e r é minimal, segue que $y^{\rho_1^r} \neq 1$ e

$$|y^{\rho_1^n}| = |a^{n_1(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s}) + n_2(H_{\omega_1}k_{2,1}, \dots, H_{\omega_s}k_{2,s}) + \dots + n_r(H_{\omega_1}k_{r,1}, \dots, H_{\omega_s}k_{r,s})}| = r$$

para quaisquer $n = 0, 1, 2, \dots$. Então

$$(h_{21}, \dots, h_{2s}), \dots, (h_{r1}, \dots, h_{rs}) \in H_{\omega_1} \times \dots \times H_{\omega_s};$$

uma contradição.

Agora, provamos que \mathcal{G} é finito por estado. Pelo Lema 2.1.9, o grupo G^s é finito por estado segundo segundo a tripla

$$((m^s, \dots, m^s), (H^s, \dots, H^s), (\rho_1|_{H^s}, \dots, \rho_s|_{H^s}))$$

com relação a uma sequência de transversais

$$T = \underbrace{(T_1 \times \dots \times T_s, \dots, T_1 \times \dots \times T_s)}_{s \text{ vezes}}$$

Então, para cada $g \in G^s$, existe um subconjunto finito $U_g \subset G$ contendo g de modo que $U_g^T \subset U_g$, onde $U_g^T = \{\theta_i(x, t)^{\rho_i} \mid t \in T_1 \times \dots \times T_s, i = 1, \dots, s, x \in U_g\}$.

Primeiro provamos o caso

$$\mathcal{G} = B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \dots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s,$$

onde B é um grupo abeliano finito.

Defina

$$\dot{B} = \{b^{(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s})} \mid b \in B\}.$$

Daí $S = \underbrace{(\dot{B} \cdot (T_1 \times \cdots \times T_s), \dots, \dot{B} \cdot (T_1 \times \cdots \times T_s))}_{s \text{ vezes}}$ é uma sequência de transversais de \mathcal{H} em \mathcal{G} . Como $\mathcal{G} = \langle \dot{B}, G^s \rangle$, para mostrar que \mathcal{G} é finito por estado, basta avaliar nos elementos geradores. Sejam $b \in \dot{B}$, $g \in G^s$, $t, l \in T_1 \times \cdots \times T_s$, tais que $tgl^{-1} \in \mathcal{H}$ ($gt = hl$, $h \in H^s$). Observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}ctb &= \mathcal{H}cb^{t^{-1}}t \\ &= \mathcal{H}b^{-1}b^{t^{-1}}cbt \\ &= \mathcal{H}cbt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}ctdgd^{-1} &= \mathcal{H}cd^{t^{-1}}d^{-g^{-1}t^{-1}}tg \\ &= \mathcal{H}cd^{t^{-1}}d^{-g^{-1}t^{-1}}hl \\ &= \mathcal{H}cdd^{-1}d^{t^{-1}}d^{-1}dd^{-g^{-1}t^{-1}}l \\ &= \mathcal{H}cl. \end{aligned}$$

logo

$$\theta_i(b, ct)^{\rho_i} = (ctbt^{-1}b^{-1}c^{-1})^{\rho_i} = (b^{-1}b^{t^{-1}})^{\rho_i} = b^{-1}$$

e para $d \in \dot{B}$

$$\begin{aligned} \theta_i(dgd^{-1}, ct)^{\rho_i} &= (ctdgd^{-1}l^{-1}c^{-1})^{\rho_i} \\ &= (cd^{t^{-1}}tgl^{-1}d^{-l}c^{-1})^{\rho_i} \\ &= (d^{-1}d^{t^{-1}}cd(cd)^{-(tgl^{-1})^{-1}}tgl^{-1}dd^{-l})^{\rho_i} \\ &= d^{-1}cd(cd)^{-(tgl^{-1})^{\rho_i}}(tgl^{-1})^{\rho_i}d \\ &= c(tgl^{-1})^{\rho_i}c^{-1} \\ &= c\theta_i(g, t)c^{-1}. \end{aligned}$$

Tomando $V_b = \dot{B}$, temos que

$$V_b^S = \dot{B}^S = \{\theta_i(d, t)^{\rho_i} = d^{-1} \mid t \in T_1 \times \cdots \times T_s, i = 1, \dots, s, d \in \dot{B}\} = \dot{B} = V_b$$

e tomando $V_g = U_g^{\dot{B}}$, temos que

$$\begin{aligned} V_g^S &= \left(U_g^{\dot{B}} \right)^S = \\ &= \{ \theta_i(dx d^{-1}, t)^{\rho_i} = c \theta_i(x, t)^{\rho_i} c^{-1} \mid t \in T_1 \times \cdots \times T_s, i = 1, \dots, s, dx d^{-1} \in U_g^{\dot{B}}, c \in \dot{B} \} \subset \\ &\subset U_g^{\dot{B}} = V_g. \end{aligned}$$

Como $V_b = \dot{B}$ e $V_g = U_g^{\dot{B}}$ são finitos, segue que \mathcal{G} é finito por estado.

Vamos provar agora que

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^S$$

é finito por estado.

Defina

$$\dot{\mathbb{Z}} = \{ a^{(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s})} \mid a \in \mathbb{Z} \}$$

e tome $S = \underbrace{(T_1 \times \cdots \times T_s, \dots, T_1 \times \cdots \times T_s, \{e\})}_{s \text{ vezes}}$. Como $\mathcal{G} = \langle \dot{\mathbb{Z}}, G^S \rangle$, para mostrar que \mathcal{G} é

finito por estado, basta avaliar os elementos geradores. Sejam $\dot{a} \in \dot{\mathbb{Z}}$, $g \in G^S$, $t, l \in T_1 \times \cdots \times T_s$, tais que $tgl^{-1} \in \mathcal{H}$ ($gt = hl$, $h \in H^s$). Observe que $\mathcal{H}t\dot{a} = \mathcal{H}\dot{a}t^{-1}t = \mathcal{H}t$ e $\mathcal{H}tg = \mathcal{H}hl = \mathcal{H}l$, logo

$$\begin{aligned} \theta_i(\dot{a}, t)^{\rho_i} &= (t\dot{a}t^{-1})^{\rho_i} = (\dot{a}t^{-1})^{\rho_i} = e, \\ \theta(\dot{a}, e)^\mu &= (t\dot{a}t^{-1})^\mu = (\dot{a}t^{-1})^\mu = (x, \dots, x) = \mathbf{x} \end{aligned}$$

e

$$\theta(g, e)^\mu = g^\mu = e.$$

Tomando $V_{\dot{a}} = \{\dot{a}\} \cup U_{\mathbf{x}}$, temos que $V_{\dot{a}}^S = U_{\mathbf{x}}^S \subset U_{\mathbf{x}} \subset \{\dot{a}\} \cup U_{\mathbf{x}} = V_b$ e tomando $V_g = U_g$, temos que $V_g^S = (U_g)^S \subset U_g = V_g$. Como $V_{\dot{a}} = U_{\mathbf{x}}$ e $V_g = U_g$ são finitos, o resultado segue. \square

Observação 4.1.1. Na demonstração do (i), obtemos um elemento

$$y = b^{(n_1 + \cdots + nr)(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s})}$$

que não pertence a $\mathcal{H} = \langle [B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))}, G^S] \rangle \times H^s$, onde concluímos nosso absurdo. Em relação ao item (ii), o elemento obtido é

$$y = a^{(n_1 + \cdots + nr)(H_{\omega_1}, \dots, H_{\omega_s})}$$

4.1 Produto semidireto autossimilar do tipo $A^{(\mathbf{H})} \rtimes G^s$ com A abeliano e

$$\mathbf{H} = (H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G)$$

53

que pertence a $\mathcal{H} = \mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \times H^s$, portanto, precisamos justificar que a soma dos elementos n_i é 0, isto é, $n_1 + \cdots + n_r = 0$. Quando aplicamos μ e obtemos

$$(x^{n_1 + \cdots + n_r}, \dots, x^{n_1 + \cdots + n_r}),$$

se G for de torção, então podemos ter $x^{n_1 + \cdots + n_r} = 1$ sem que a soma dos n_i seja nula. Logo, é fundamental para a demonstração podermos escolher x em G de modo que $o(x) = \infty$.

O próximo corolário estende o Teorema B para um grupo da forma $A^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$, onde A é um grupo abeliano infinito finitamente gerado e G é um grupo autossimilar que não é de torção.

Corolário 4.1.2. *Seja G um grupo autossimilar que não é de torção com tipo orbital (m, \dots, m) , $m = [G : \cap_{i=1}^s H_i]$, e $A = \mathbb{Z}^l \times B$ um grupo abeliano finitamente gerado infinito, onde $l \geq 1$ e $B = \text{Tor}(A)$. Então o grupo*

$$A^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo orbital $(\underbrace{|B| \cdot m^s, \dots, |B| \cdot m^s}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{m^s, \dots, m^s}_{sl \text{ vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{l \text{ vezes}})$.

Demonstração. Pelo Teorema B, $\mathbb{Z}^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$ é um grupo autossimilar de tipo orbital $(\underbrace{m^s, \dots, m^s}_{s \text{ vezes}}, 1)$. Aplicando o processo de concatenação da Proposição 2.3.1, segue que

$$(\mathbb{Z}^2)^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é um grupo autossimilar de tipo orbital $(\underbrace{m^s, \dots, m^s}_{2s \text{ vezes}}, 1, 1)$.

Agora, aplicando esse argumento novamente $l - 1$ vezes, obtemos que

$$(\mathbb{Z}^l)^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

é autossimilar com tipo orbital $(\underbrace{m^s, \dots, m^s}_{sl \text{ vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{l \text{ vezes}})$. Finalmente, aplicando a concatenação com o grupo $B^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$ obtemos

$$A^{((H_{\omega_1} \setminus G) \times \cdots \times (H_{\omega_s} \setminus G))} \rtimes G^s$$

com tipo orbital $(\underbrace{|B| \cdot m^s, \dots, |B| \cdot m^s}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{m^s, \dots, m^s}_{sl \text{ vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{l \text{ vezes}})$

□

4.2 Representações finitas por estado de grupos do tipo

$$A \wr (B \wr \mathbb{Z})$$

O próximo teorema segue do Teorema 1.2.6, da Proposição 3.4.1 e do Teorema B.

Teorema 4.2.1. *Sejam A um grupo abeliano finitamente gerado e B um grupo abeliano finito. Então $A \wr (B \wr \mathbb{Z})$ é um grupo finito por estado.*

Demonstração. Sejam $G = B \wr \mathbb{Z}$ um grupo autossimilar finito por estado e A um grupo abeliano finitamente gerado, onde $B = \{b_1 = 1, b_2, \dots, b_n\}$ é um grupo abeliano finito. Pela Proposição 3.4.1, temos que G é autossimilar com respeito a tripla

$$((n, \dots, n), (f_{b_1} = f, f_{b_2}, \dots, f_{b_n}), (H, \dots, H)),$$

onde $G = B \wr \langle x \rangle$, $H = G' \langle x \rangle$,

$$\begin{aligned} f : H = G' \langle x \rangle &\rightarrow G \\ [b, x] &\mapsto b^{-1} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

e $H_{\omega_b} = H_{\omega_{b_1}} = H_{\omega}^b = \langle b^{-1}x \rangle$. Pelo Corolário 4.1.2, o grupo

$$\mathcal{G} = A^{(H_{\omega_{b_1}} \setminus G) \times (H_{\omega_{b_2}} \setminus G) \times \dots \times (H_{\omega_{b_n}} \setminus G)} \rtimes G^n$$

é autossimilar. Pelo parágrafo logo após a Proposição 3.4.1, segue que $\prod_{i=1}^n H_{\omega_{b_i}} = 1$, e pelo Teorema 1.2.6, o grupo $A \wr G$ é um subgrupo de \mathcal{G} e o resultado segue. \square

4.2.1 Representação de $C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$

Sejam $G = C_2 \wr \mathbb{Z} = \langle a \rangle \wr \langle x \rangle$, $H = G' \langle x \rangle$ e $T = \{e, a\}$ um transversal de H em G . Sejam f e f_a os endomorfismos virtuais simples da Proposição 3.2.1.

Proposição 4.2.2. O grupo $C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$ é finito por estado de grau 9.

Demonstração. Segue da Proposição 3.2.2 que $H_{\omega_a} = H_{\omega}^a = \langle x \rangle^a = \langle [a, x]x \rangle$, então $H_{\omega} \cap H_{\omega_a} = \{e\}$. Temos pelo Teorema 2.1.5 que G possui uma representação autossimilar finita por estado de grau 4 segundo a tripla

$$((2, 2), (H, H), (f, f_a)).$$

Utilizando o Teorema B, obtemos

$$\mathcal{G} = C_2^{(H_\omega \setminus G) \times (H_{\omega_a} \setminus G)} \rtimes G^2$$

como um grupo finito por estado de grau 9. Por fim, seja $C_2 \wr \mathbb{Z} \simeq L \leq G^2$, como $L \cap H_\omega \cap H_{\omega_a} = \{e\}$, segue do Teorema 1.2.6 que

$$C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z}) \simeq \langle (b, (1, 1)), (1, (g, g)) \mid g \in G \rangle \leq \mathcal{G}.$$

□

Para obter uma representação do grupo anterior, podemos fazer

- $G = (C_2 \wr \mathbb{Z}) = (\langle a \rangle \wr \langle x \rangle)$
- $H_1 = H_2 = \langle [a, x]^{(x)} \langle x \rangle \rangle$
- $\mathcal{G} = C_2^{(H_\omega \setminus G) \times (H_{\omega_a} \setminus G)} \rtimes G^2 = \langle \sigma \rangle^{(H_\omega \setminus G) \times (H_{\omega_a} \setminus G)} \rtimes G^2$
- $\mathcal{H} = \langle [\sigma^{(H_\omega, H_{\omega_a})}, g], H_1 \times H_2 \mid g \in G^2 \rangle$
- $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = 8$
- $\mathcal{G} = \langle (\sigma^{(H_\omega, H_{\omega_a})}, (e, e)), (e^{(H_\omega, H_{\omega_a})}, (a, e)), (e^{(H_\omega, H_{\omega_a})}, (e, a)), (e^{(H_\omega, H_{\omega_a})}, (x, e)), (e^{(H_\omega, H_{\omega_a})}, (e, x)) \rangle$
- $\sigma = (e, e, \sigma \sigma^{[a_1, x_1]}, \sigma \sigma^{[a_1, x_1]}, \sigma \sigma^{[a_2, x_2]}, \sigma \sigma^{[a_2, x_2]}, \sigma \sigma^{[a_1, x_1][a_2, x_2]}, \sigma \sigma^{[a_1, x_1][a_2, x_2]}, \sigma)(12)(34)(56)(78)$
- $a_1 = (e, e, e, e, e, e, e, e, a_2)(13)(24)(57)(68)$
- $a_2 = (e, e, e, e, e, e, e, e, a_1)(15)(26)(37)(48)$
- $x_1 = (x_1, x_1, a_1 x_1, a_1 x_1, x_1, x_1, a_1 x_1, a_1 x_1, x_2)$
- $x_2 = (a_2^{x_2} x_2, \sigma a_2^{x_2} x_2, a_2^{x_2} x_2, \sigma a_2^{x_2} x_2, a_2 a_2^{x_2} x_2, \sigma a_2 a_2^{x_2} x_2, a_2 a_2^{x_2} x_2, \sigma a_2 a_2^{x_2} x_2, x_1)$

Assim

$$C_2 \wr (C_2 \wr \mathbb{Z}) = \langle \sigma, a_1 a_2, x_1 x_2 \rangle$$

4.2.2 Representação de $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$

Sejam $G = C_2 \wr \mathbb{Z} = \langle a \rangle \wr \langle x \rangle$, $H = G' \langle x \rangle$ e $T = \{e, a\}$ um transversal de H em G . Sejam f e f_a e os endomorfismos virtuais simples da Proposição 3.2.1.

Proposição 4.2.3. O grupo $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$ é finito por estado de grau 2.

Demonstração. Na demonstração da Proposição 4.2.2, vimos que G^2 possui uma representação transitiva autossimilar finita por estado de grau 4.

Pelo Teorema B

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}^{(H_\omega \times H_{\omega_a} \setminus G^2)} \rtimes G^2 = \mathbb{Z}^{((H_\omega \setminus G) \times (H_{\omega_a} \setminus G))} \rtimes G^2$$

é um grupo autossimilar finito por estado de grau 5. Defina

$$D = \langle (e^{(H_{\omega_1}, H_{\omega_2})}, (g, g)) \mid g \in G \rangle$$

e

$$W = \langle (y^{(H_{\omega_1} \times H_{\omega_2})}, (e, e)), D \rangle \leq \mathcal{G}.$$

Observe que $D \cap (H_{\omega_1} \times H_{\omega_2}) = 1$, então segue do Teorema 1.2.6 que $W \simeq \mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$.

Fazendo $\mathbb{Z} = \langle y \rangle$ e $G^2 = (\langle a_1 \rangle \wr \langle x_1 \rangle) \times (\langle a_2 \rangle \wr \langle x_2 \rangle)$, obtemos uma representação de $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z}) \simeq \langle y, a_1 a_2, x_1 x_2 \rangle$ em \mathcal{A}_5 , onde

- $y = (y, e, e, e, x_1)$
- $a_1 = (e, e, e, e, e)(01)(23)$
- $a_2 = (e, e, e, e, e)(02)(13)$
- $x_1 = (x_1, a_1 x_1, x_1, a_1 x_1, e)$
- $x_2 = (a_2^{x_2} x_2, a_2^{x_2} x_2, a_2 a_2^{x_2} x_2, a_2 a_2^{x_2} x_2, e)$.

Utilizando uma deflação, podemos escrever os elementos anteriores como elementos de \mathcal{A}_2 na forma

- $y = (((y, e), (e, e)), x_1)$
- $a_1 = (((e, e)\sigma, (e, e)\sigma), e)$
- $a_2 = (((e, e), (e, e))\sigma, e)$

- $x_1 = (((x_1, a_1x_1), (x_1, a_1x_1)), e)$
- $x_2 = (((a_2^{x_2}x_2, a_2^{x_2}x_2), (a_2a_2^{x_2}x_2, a_2a_2^{x_2}x_2)), e)$

Portanto, $\mathbb{Z} \wr (C_2 \wr \mathbb{Z})$ também possui uma representação finita por estado de grau 2. \square

CAPÍTULO 5

Representações finitas por estado

Neste capítulo, demonstramos o Teorema C e o Teorema D. Dado um grupo G que não é de torção, autossimilar e finito por estado, provamos que grupos do tipo $A \wr G$, onde A é um grupo abeliano finitamente gerado, é um grupo finito por estado. Como consequência, respondemos afirmativamente o Problema 15.19 - (b) do Kourovka Notebook proposto por A. M. Brunner e S. Sidki em 2002 [6, 17], que questiona a existência de uma representação finita por estado de $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ em \mathcal{A}_2 . Além disso, mostramos que existe uma representação finita por estado de $W_l(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \wr W_{l-1}(\mathbb{Z})$, onde $l \geq 0$ e $W_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

5.1 Grupo do tipo $A \wr G$ finito por estado

Provaremos o Teorema C para o caso especial onde $A = \mathbb{Z}$. Aqui, consideramos G um grupo que não é de torção, autossimilar e finito por estado com respeito a tripla

$$(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F}) = ((m, \dots, m), (H, \dots, H), (f_1, \dots, f_s)),$$

onde $H = (\cap_{i=1}^s H_i)_G$ é o core de $\cap_{i=1}^s H_i$ em G e $m = [G : H]$. Considere \mathcal{G} o produto semidireto

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}^{(H_\omega \backslash G \times \dots \times H_\omega \backslash G)} \rtimes G^s,$$

e seu subgrupo

$$\mathcal{H} = \mathbb{Z}^{(H_\omega \backslash G \times \dots \times H_\omega \backslash G)} \rtimes (H \times \dots \times H)$$

com índice $[G : H]^s$. Considere os homomorfismos $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$, $\tau : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, e $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ que estendem as aplicações

$$\rho : a^{(H\omega g_1, \dots, H\omega g_s)} \mapsto \begin{cases} a^{(H\omega g_1^{f_1}, \dots, H\omega g_s^{f_s})}, & \text{se } (g_1, \dots, g_s) \in H \times \dots \times H \\ e, & \text{se } (g_1, \dots, g_s) \notin H \times \dots \times H. \end{cases}$$

$$(h_1, \dots, h_s) \mapsto (h_1^{f_1}, \dots, h_s^{f_s}), (h_1, \dots, h_s) \in H \times \dots \times H;$$

$$\tau : a^{(H\omega g_1, H\omega g_2, \dots, H\omega g_s)} \mapsto a^{(H\omega g_s, H\omega g_1, \dots, H\omega g_{s-1})}, (g_1, \dots, g_s) \in G^s,$$

$$(g_1, \dots, g_s) \mapsto (g_s, g_1, \dots, g_{s-1}), (g_1, \dots, g_s) \in G^s;$$

e

$$\mu : a^{(H\omega, \dots, H\omega)} \mapsto (x, \dots, x) \text{ onde } o(x) = \infty \text{ e } x \in G$$

$$(g_1, \dots, g_s) \mapsto e, (g_1, \dots, g_s) \in G^s.$$

Considere a representação $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}_n$ induzida pela tripla $((n, 1, 1), (\mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{G}), (\rho, \tau, \mu))$, onde $n = m^s$ e $m = [G : H]$. Então φ é uma representação autossimilar de \mathcal{G} onde K é o \mathbf{F} -core de \mathcal{H} .

Note que $\mathbb{Z}^{(H\omega \setminus G)} \rtimes G$ é isomorfo a um subgrupo de \mathcal{G} ; de fato, é suficiente considerar o homomorfismo

$$\delta : \mathbb{Z}^{(H\omega \setminus G)} \rtimes G \rightarrow D = \left\langle a^{(H\omega, \dots, H\omega)}, (g, \dots, g) \mid g \in G \right\rangle \leq \mathcal{G}$$

$$a^{H\omega g_1 + \dots + H\omega g_n} g \mapsto a^{(H\omega g_1, \dots, H\omega g_1) + \dots + (H\omega g_n, \dots, H\omega g_n)} (g, \dots, g).$$

Teorema 5.1.1. O grupo $\mathbb{Z}^{(H\omega \setminus G)} \rtimes G$ é um subgrupo de \mathcal{G}^φ . Mais do que isso, se G é finito por estado com relação à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, então \mathcal{G}^φ é finito por estado.

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}_n$ uma representação autossimilar de \mathcal{G} induzidos pela tripla $(\overline{\mathbf{m}}, \overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{F}}) = ((n, 1, 1), (\mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{G}), (\rho, \tau, \mu))$ com $\overline{\mathbf{F}}\text{-core}(\overline{\mathbf{H}}) = K$. Primeiramente, provaremos que $\mathbb{Z}^{(H\omega \setminus G)} \rtimes G$ é um subgrupo de \mathcal{G}^φ . Para isto, é suficiente mostrar que $D \cap K = 1$.

Se $y \in D \cap K$ então

$$y = a^{n_1(H\omega h_1, \dots, H\omega h_1) + \dots + n_r(H\omega h_r, \dots, H\omega h_r)} (h, \dots, h).$$

Como G é um grupo autossimilar e K é normal em G podemos assumir que $h_1 = e$ e por aplicações de ρ, τ podemos tomar $(h, \dots, h) = (e, \dots, e)$. Assim

$$y = a^{n_1(H_\omega, \dots, H_\omega) + \dots + n_r(H_\omega h_r, \dots, H_\omega h_r)}.$$

Suponha que $r > 1$ é minimal. Pela Proposição 3.3.3

$$y^{\tau^{\varepsilon_1} \rho \tau^{\varepsilon_2} \rho \dots \tau^{\varepsilon_n} \rho}$$

é não trivial para qualquer inteiro positivo n e quaisquer $0 \leq \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \leq s-1$. Reordenado os índices se necessário, sejam n o inteiro positivo tal que

$$y^{\tau^{\varepsilon_1} \rho \tau^{\varepsilon_2} \rho \dots \tau^{\varepsilon_n} \rho} = a^{n_1(H_\omega, \dots, H_\omega) + n_2(H_\omega h_{2,1}, \dots, H_\omega h_{2,s}) + \dots + n_l(H_\omega h_{l,1}, \dots, H_\omega h_{l,s})}$$

e $l > 1$ minimal com relação a $(h_{2,1}, \dots, h_{2,s}), \dots, (h_{l,1}, \dots, h_{l,s}) \notin H_\omega^s$. Então

$$|(y^{\tau^{\varepsilon_1} \rho \tau^{\varepsilon_2} \rho \dots \tau^{\varepsilon_n} \rho})^{\tau^{\varepsilon_{n+1}} \rho \tau^{\varepsilon_{n+2}} \rho \dots \tau^{\varepsilon_{n+k}} \rho}| = l,$$

para qualquer inteiro positivo k e qualquer $0 \leq \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{n+k} \leq s-1$. Assim

$$h_{2,1}, \dots, h_{2,s}, \dots, h_{l,1}, \dots, h_{l,s} \in H_\omega = \langle K \leq \bigcap_{i=1}^s H_i \mid K^{f_i} \leq K, \text{ para todo } i \rangle$$

e essa contradição final prova a primeira afirmação.

Agora, provamos que o grupo \mathcal{G}^φ é finito por estado sempre que G o é. Seja

$$\mathcal{H} = \mathbb{Z}^{((H_\omega \setminus G) \times \dots \times (H_\omega \setminus G))} \rtimes H^s$$

Pela segunda parte do Lema 2.1.9, o grupo G^s é finito por estado segundo a tripla

$$((n, 1), (H^s, G^s), (\rho|_{H^s}, \tau|_{G^s}))$$

com relação a sequência de transversais $T = (T_1 \times \dots \times T_s, \{e\})$. Então, para cada $g \in G^s$, existe um subconjunto finito $U_g \subset G$ contendo g de modo que $U_g^T \subset U_g$, onde

$$U_g^T = \{\theta(x, t)^\rho, \theta(x, e)^\tau \mid t \in T_1 \times \dots \times T_s, i = 1, \dots, s, x \in U_g\}.$$

Defina

$$\dot{\mathbb{Z}} = \{a^{(H_\omega, \dots, H_\omega)} \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

e tome $S = (T_1 \times \cdots \times T_s, \{e\}, \{e\})$. Como $\mathcal{G} = \langle \mathbb{Z}, G^s \rangle$, para mostrar que \mathcal{G} é finito por estado, basta avaliar os elementos geradores. Sejam $\dot{a} \in \mathbb{Z}$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_{s-1}, g_s) \in G^s$, $t, l \in T_1 \times \cdots \times T_s$, tais que $tgl^{-1} \in \mathcal{H}$ ($gt = hl$, $h \in H^s$). Observe que $\mathcal{H}t\dot{a} = \mathcal{H}\dot{a}t^{-1}t = \mathcal{H}t$ e $\mathcal{H}tg = \mathcal{H}hl = \mathcal{H}l$, logo

$$\theta(\dot{a}, t)^\rho = (t\dot{a}t^{-1})^\rho = (\dot{a}t^{-1})^\rho = e, \quad \theta(\dot{a}, e)^\tau = \dot{a}^\tau = \dot{a}, \quad \theta(\dot{a}, e)^\mu = \dot{a}^\mu = (x, \dots, x) = \mathbf{x}$$

e

$$\theta(g, t)^\rho = (tgl^{-1})^\rho, \quad \theta(g, e)^\mu = g^\mu = e,$$

$$\theta((g_1, g_2, \dots, g_{s-1}, g_s), e)^\tau = (g_1, g_2, \dots, g_{s-1}, g_s)^\tau = (g_s, g_1, \dots, g_{s-2}, g_{s-1}).$$

Tomando $V_{\dot{a}} = \{\dot{a}\} \cup U_{\mathbf{x}}$, temos que $V_{\dot{a}}^S = U_{\mathbf{x}}^S \subset U_{\mathbf{x}} \subset \{\dot{a}\} \cup U_{\mathbf{x}} = V_{\dot{a}}$ e tomando $V_g = U_g$, temos que $V_g^S = (U_g)^S \subset U_g = V_g$. Como $V_{\dot{a}} = U_{\mathbf{x}}$ e $V_g = U_g$ são finitos, o resultado segue. \square

Dado um grupo K , defina recursivamente

$$W_0(\mathbb{Z}, K) = K, \quad W_1(\mathbb{Z}, K) = \mathbb{Z} \wr K, \quad W_l(\mathbb{Z}, K) = \mathbb{Z} \wr W_{l-1}(\mathbb{Z}, K), \quad l \geq 1.$$

Assim, o produto entrelaçado iterado de l -cópias de \mathbb{Z} é dado por

$$W_l(\mathbb{Z}) = W_l(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \wr W_{l-1}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \underbrace{\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr (\dots (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \dots)))}_{l \text{ cópias de } \mathbb{Z}}.$$

Corolário 5.1.2. Sejam G um grupo finito por estado com relação à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$ e $l \geq 0$. Então o grupo $W_l(\mathbb{Z}, G)$ tem uma representação finita por estado. Em particular, $W_l(\mathbb{Z})$ é finito por estado.

Demonstração. Uma vez que G é fechado por estado e finito por estado segundo a tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$, segue, pelo Teorema 5.1.1, que tripla $((n, 1, 1), (\mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{G}), (\rho, \tau, \mu))$ induz uma representação finita por estado \mathcal{G}^ρ de \mathcal{G} . Não é difícil ver que a tripla

$$((n^3, n^3), (\mathcal{H}^3, \mathcal{H}^3), (\rho_1, \tau_1))$$

induz uma representação finita por estado de \mathcal{G}^3 , onde

$$(h_1, h_2, h_3)^{\rho_1} = (h_1^\rho, h_2^\tau, h_3^\mu), \quad (h_1, h_2, h_3)^{\tau_1} = (h_2, h_3, h_1)$$

para todo $(h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{H}^3$. Como \mathcal{H}^3 é normal em \mathcal{G}^3 , pelo Teorema A, a tripla

$$((n^3, n^3), (\mathcal{H}^3, \mathcal{H}^3), (\rho_1, \tau_1))$$

induz uma tripla com parabólico trivial, que por sua vez, pelo Teorema 5.1.1, induz uma representação finita por estado de $\mathbb{Z} \wr \mathcal{G}^\varphi$. \square

É possível reformular o Teorema 5.1.1 substituindo a hipótese de um grupo A abeliano finitamente gerado que não é de torção por um grupo B abeliano finito.

Proposição 5.1.3. Sejam B um grupo abeliano finito e G um grupo autossimilar finito por estado com relação à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$. Então $B^{(H_\omega \setminus G)} \rtimes G$ é finito por estado.

Demonstração. Basta definir a tripla $((|B|n, 1), (\mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{G}), (\rho, \tau))$, onde

$$\rho : b^{-(H_\omega, \dots, H_\omega) + (H_\omega g_1, \dots, H_\omega g_s)} \mapsto \begin{cases} b^{-(H_\omega, \dots, H_\omega) + (H_\omega g_1^{f_1}, \dots, H_\omega g_s^{f_s})}, & \text{se } (g_1, \dots, g_s) \in H \times \dots \times H \\ b^{-(H_\omega, \dots, H_\omega)}, & \text{se } (g_1, \dots, g_s) \notin H \times \dots \times H. \end{cases}$$

$$(h_1, \dots, h_s) \mapsto (h_1^{f_1}, \dots, h_s^{f_s}), (h_1, \dots, h_s) \in H \times \dots \times H;$$

$$\tau : b^{(H_\omega g_1, H_\omega g_2, \dots, H_\omega g_s)} \mapsto a^{(H_\omega g_s, H_\omega g_1, \dots, H_\omega g_{s-1})}, (g_1, \dots, g_s) \in G^s,$$

$$(g_1, \dots, g_s) \mapsto (g_s, g_1, \dots, g_{s-1}), (g_1, \dots, g_s) \in G^s,$$

e fazer analogamente à demonstração do Teorema 5.1.1. \square

Teorema C. Seja A um grupo abeliano finitamente gerado infinito e G um grupo autossimilar finito por estado com relação à tripla $(\mathbf{m}, \mathbf{H}, \mathbf{F})$. Suponha que G não é de torção, então $A \wr G$ é finito por estado.

Demonstração. Segue pelo Teorema 5.1.1, pela Proposição 5.1.3 e pela concatenação geral. \square

5.2 Representação finita por estado de grau 2 do grupo $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$

A representação finita por estado de $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ dada no Corolário 5.1.2 é de grau 10. Usamos deflação de grau para obter o seguinte.

Teorema D. O grupo $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ é finito por estado de grau 2.

Demonstração. Segue do Exemplo 3.3.1 que $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ é autossimilar com tipo orbital $(2, 2, 2)$. Aplicando o Teorema 5.1.1 o grupo $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ é isomorfo a um subgrupo do grupo $(\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}))^\varphi$ que tem tipo orbital $(8, 1, 1)$, onde

$$\varphi : \mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})^3 = \langle a \rangle \wr \left(\prod_{i=1}^3 (\langle y_i \rangle \wr \langle x_i \rangle) \right) \rightarrow \mathcal{A}_{10}$$

é um homomorfismo induzido pelos homomorfismos

$$\rho : \mathcal{H} = \langle a \rangle^{\langle y_i, x_i | i=1,2,3 \rangle} \langle y_1, y_2, y_3 \rangle^{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle} \langle x_1^2, x_2^2, x_3^2 \rangle \rightarrow \mathcal{G},$$

$$\tau : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G},$$

que estendem as aplicações

$$\begin{aligned}
\rho : a^{y_1^{x_1^{2r}}} &\mapsto a^{y_1^{x_1^r}} \\
a^{y_2^{x_2^{2r}}} &\mapsto a \\
a^{y_1^{x_1^{2r+1}}} &\mapsto a \\
a^{y_2^{x_2^{2r+1}}} &\mapsto a^{y_2^{x_2^r}}, \\
a^{y_3} &\mapsto a^{x_3} \\
a^{x_1^{2r}} &\mapsto a^{x_1^r} \\
a^{x_1^{2r+1}} &\mapsto e \\
a^{x_2^{2r}} &\mapsto a \\
a^{x_2^{2r+1}} &\mapsto e \\
a^{x_3^{2r}} &\mapsto a \\
a^{x_3^{2r+1}} &\mapsto e \\
y_1^{x_1^{2r}} &\mapsto y_1^{x_1^{2r}} \\
y_1^{x_1^{2r+1}} &\mapsto e \\
y_2^{x_2^{2r+1}} &\mapsto y_2^{x_2^{2r}} \\
y_2^{x_2^{2r}} &\mapsto e \\
x_i^{2r} &\mapsto x_i^r, i = 1, 2 \\
x_3^{2r} &\mapsto e;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau : a^{y_i} &\mapsto a^{y(i)\sigma} \\
a^{x_i} &\mapsto a^{x(i)\sigma} \\
y_i &\mapsto y(i)\sigma \\
x_i &\mapsto x(i)\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu : a &\mapsto y_1 \\
y_i, x_j &\mapsto e, i, j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Considere o transversal $\mathcal{T}_1 = \{e, x_2, x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, x_1\}$ de \mathcal{H} em \mathcal{G} e $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3 = \{e\}$ transversais de \mathcal{G} in \mathcal{G} . Então o grupo \mathcal{G}^φ é o grupo gerado pelos elementos

$$a = (a, e, e, e, e, e, e, e, a, y_1)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= (y_1, x_1, y_1, y_1, e, e, e, e, y_3, e), \\
y_2 &= (x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, y_1, y_1), \\
y_3 &= (e, e, y_3, y_3, y_3, y_3, e, e, y_2, y_1), \\
x_1 &= (e, e, e, e, x_1, x_1, x_1, x_1, x_3, e)(18)(27)(36)(45), \\
x_2 &= (e, x_2, e, x_2, x_2, e, x_2, e, x_3, e)(12)(34)(56)(78), \\
x_3 &= (e, e, e, e, e, e, e, e, x_1, e)(13)(24)(57)(68).
\end{aligned}$$

Note que $P(\mathcal{G}^\varphi) \leq S_{10}$ é tal que

$$P(\mathcal{G}^\varphi) = \langle (18)(27)(36)(45), (12)(34)(56)(78), (13)(24)(57)(68) \rangle$$

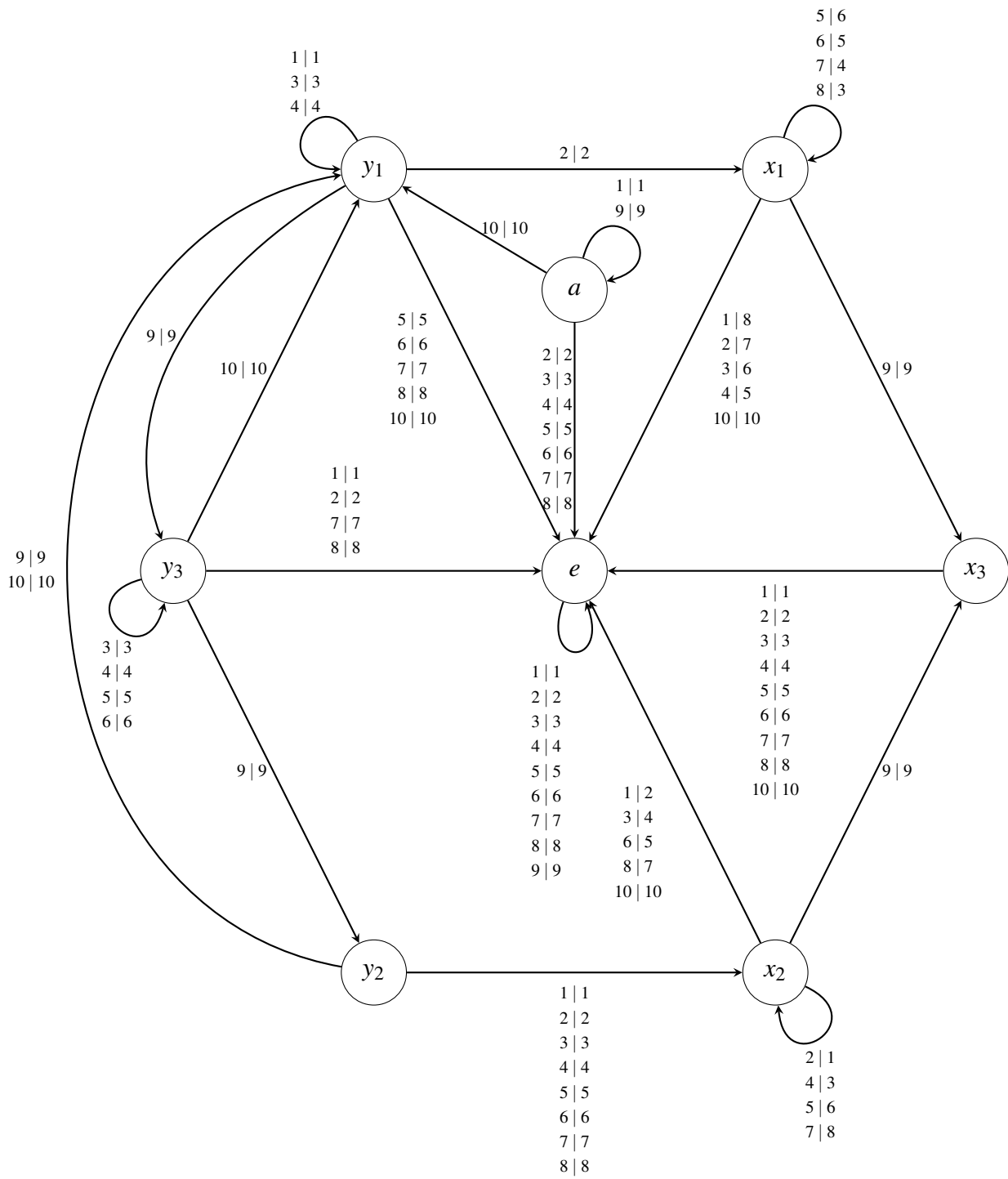
e é isomorfo ao subgrupo $\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$ de $W(4, S_2) = ((S_2 \wr S_2) \wr S_2) \wr S_2$, onde

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (((e, e)\sigma, (e, e)\sigma)\sigma, ((e, e), (e, e))\sigma, (e, e)), \\
\sigma_2 &= (((e, e)\sigma, (e, e)\sigma), ((e, e)\sigma, (e, e)\sigma), (e, e)), \\
\sigma_3 &= (((e, e), (e, e))\sigma, ((e, e), (e, e))\sigma), (e, e)),
\end{aligned}$$

com $\sigma = (1\ 2)$. Pela Proposição 2.2.10, o grupo \mathcal{G}^φ é isomorfo ao subgrupo de \mathcal{A}_2 gerado pelos elementos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (((\mathbf{a}, e), (e, e)), ((e, e), (e, e))), (\mathbf{a}, \mathbf{y}_1)), \\
\mathbf{y}_1 &= (((\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1), (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)), ((e, e), (e, e))), (\mathbf{y}_3, e)), \\
\mathbf{y}_2 &= (((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2), (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)), ((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2), (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2))), (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)), \\
\mathbf{y}_3 &= (((e, e), (\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_3)), ((\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_3), (e, e))), (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)), \\
\mathbf{x}_1 &= (((e, e)\sigma, (e, e)\sigma)\sigma, ((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1), (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1))\sigma, (\mathbf{x}_3, e)), \\
\mathbf{x}_2 &= (((e, \mathbf{x}_2)\sigma, (e, \mathbf{x}_2)\sigma), ((\mathbf{x}_2, e)\sigma, (\mathbf{x}_2, e)\sigma), (\mathbf{x}_3, e)), \\
\mathbf{x}_3 &= (((e, e), (e, e))\sigma, ((e, e), (e, e))\sigma), (\mathbf{x}_1, e)).
\end{aligned}$$

Assim $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) \simeq \langle a, y_1 y_2 y_3, x_1 x_2 x_3 \rangle \simeq \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_3, \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \rangle$ e o automata gerador de \mathcal{G}^φ é



□

Bibliografia

- [1] M. F. Atiyah. **Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras**. In *Colloque analyse et topologie*, number 32-33 in Astérisque, pages 43–72. Société mathématique de France, 1976.
- [2] L. Bartholdi and S. N. Sidki. **Self-similar products of groups**. *Groups Geometry and Dynamics*, 14:107–115, 2020.
- [3] L. Bartholdi and P. Silva. **Groups defined by automata**. *European Mathematical Society*, 2:871–911, 12 2010.
- [4] A. Bondy and U. Murty. **Graph theory**. Graduate texts in mathematics 244. Springer, 3rd corrected printing. edition, 2008.
- [5] A. M. Brunner and S. N. Sidki. **On the Automorphism Group of the One-Rooted Binary Tree**. *Journal of Algebra*, 195:465–486, 1997.
- [6] A. M. Brunner and S. N. Sidki. **Wreath operations in the group of automorphisms of the binary tree**. *Journal of Algebra*, 257:51–64, 11 2002.
- [7] A. C. Dantas, J. R. Oliveira, and T. M. G. Santos. **On wreath product occurring as subgroup of automata group**. arxiv.2405.16678, 2024.
- [8] A. C. Dantas, T. M. Santos, and S. N. Sidki. **Intransitive self-similar groups**. *Journal of Algebra*, 567:564–581, 2021.
- [9] A. C. Dantas, T. M. G. Santos, and S. N. Sidki. **Self-similar abelian groups and their centralizers**. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 17:577–599, 2023.
- [10] A. C. Dantas and S. N. Sidki. **On self-similarity of wreath products of abelian groups**. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 12:1061–1068, 2018.
- [11] S. Eilenberg. **Automata, languages, and machines**, volume Volume A of *Pure and applied mathematics a series of monographs and text books*, 58 [i.e. 59]. Academic Press, 1974.
- [12] R. I. Grigorchuk. **Burnside problem on periodic groups**. *Functional Analysis and Its Applications*, 14:41–43, 1980.
- [13] R. I. Grigorchuk, P. Linnell, T. Schick, and A. Zuk. **On a conjecture of Atiyah**. 10 2000.

-
- [14] R. I. Grigorchuk and A. Żuk. **On a Torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton.** *International Journal of Algebra and Computation*, 12:223–246, 2002.
- [15] N. Gupta and S. N. Sidki. **On the Burnside problem for periodic groups.** *Mathematische Zeitschrift*, 182:385–388, 1983.
- [16] V. A. Kaimanovich and A. M. Vershik. **Random Walks on Discrete Groups: Boundary and Entropy.** *The Annals of Probability*, 11(3):457 – 490, 1983.
- [17] E. I. Khukhro and V. D. Mazurov. **Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook**, 2014.
- [18] V. Nekrashevych and S. N. Sidki. **Automorphisms of the binary tree: State-closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms.** *Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects*, 311, 04 2004.
- [19] D. J. S. Robinson. **A Course in the Theory of Groups.** Graduate Texts in Mathematics 80. Springer-Verlag New York, 2nd edition, 1996.
- [20] T. M. G. Santos. **Grupos autossimilares intransitivos.** PhD thesis, Universidade de Brasília, 2021.
- [21] S. N. Sidki. **Regular trees and their automorphisms.** *Instituto de Matematica Pura e Aplicada. Monografias de Matemática*, 56, 01 1998.
- [22] S. N. Sidki. **Tree-wreathing Applied to Generation of Groups by Finite Automata.** *IJAC*, 15:1205–1212, 10 2005.
- [23] P. Silva and B. Steinberg. **On a Class of Automata Groups Generalizing Lamplighter Groups.** *IJAC*, 15:1213–1234, 10 2005.

Índice

- G -tripla, 21
- Automorfismo
 - da árvore \mathcal{T}_m , 14
- Autômata
 - autômata-grupo, 34
 - invertível, 32
 - máquina de Mealy, 32
- Deflação, 29
- Endomorfismo
 - simples, 22
- Endomorfismo virtual, 21
- Estados de um automorfismo, 16
- Função de estado, 32
- Grafo, 7
 - arestas paralelas, 8
 - caminho, 8
 - ciclo, 8
 - conexo, 9
 - grau de um vértice, 9
 - loop, 7
 - simples, 8
 - subgrafo, 8
- Grupo
 - autossimilar, 18
 - base, 12
 - de automorfismos de \mathcal{T}_m , 14
 - fechado por estado, 18
 - fechado por estado no k -ésimo nível, 29
 - finito por estado, 17
 - gerado por autômata, 34
 - transitivo, 21
- Inflação
 - k -inflação de nível, 28
 - de grau, 27
- Monóide, 9
- Produto
 - cartesiano, 11
 - direto, 11, 12
 - externo, 11
 - interno, 11
 - entrelaçado irrestrito, 12
 - entrelaçado restrito, 12
 - semi-direto
 - interno, 11
 - semidireto
 - externo, 11
- Suporte, 11
- Tipo orbital, 24
- Árvore, 9

binária, 10

nível, 9

uni-raiz, 9

uni-raiz m -regular, 9