



**ATTITUDE STABILIZATION AND ALTITUDE CONTROL OF A
TWIN-ENGINE TILTROTOR AERIAL WITH INHOMOGENEOUS
PROPULSION**

LEONARDO CARDOSO BOTELHO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ATTITUDE STABILIZATION AND ALTITUDE CONTROL OF A
TWIN-ENGINE TILTROTOR AERIAL WITH INHOMOGENEOUS
PROPULSION**

**ESTABILIZAÇÃO DE ATITUDE E CONTROLE DE ALTITUDE DE
UM TILTROTOR BIMOTOR COM PROPULSÃO NÃO HOMOGÊNEA**

LEONARDO CARDOSO BOTELHO

**ORIENTADOR: PROF. DR. GEOVANY ARAÚJO BORGES (ENE/UNB) E PROF.
DR. JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA (ENE/UNB)**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**

PUBLICAÇÃO: PPGENE.DM-826/25

BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO - 2024

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ATTITUDE STABILIZATION AND ALTITUDE CONTROL OF A
TWIN-ENGINE TILTROTOR AERIAL WITH INHOMOGENEOUS
PROPULSION**

LEONARDO CARDOSO BOTELHO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.**

APROVADA POR:

**Prof. Dr. Geovany Araújo Borges – ENE/UnB
Orientador**

**Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara – ENE/UnB
Co-Orientador**

**Prof. Dr. Hugo Tadashi Kussaba – ENE/UnB
Examinador interno**

**Prof. Dr. Atila Madureira Bueno – USP
Examinador externo**

BRASÍLIA, 10 DE DEZEMBRO DE 2024.

FICHA CATALOGRÁFICA

BOTELHO, LEONARDO CARDOSO

Attitude Stabilization and Altitude Control of a Twin-Engine Tiltrotor Aerial with Inhomogeneous Propulsion [Distrito Federal] 2024.

xiv, 68p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2024).

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Control Design

2. Tiltrotor

3. Space States

4. Artificial Intelligence

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BOTELHO, L. C. (2024). Attitude Stabilization and Altitude Control of a Twin-Engine Tiltrotor Aerial with Inhomogeneous Propulsion . DISSERTAÇÃO DE MESTRADO em Engenharia Elétrica, Publicação PPGENE.DM-826/25, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 68p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Leonardo Cardoso Botelho

TÍTULO: Attitude Stabilization and Altitude Control of a Twin-Engine Tiltrotor Aerial with Inhomogeneous Propulsion .

GRAU: Mestre ANO: 2024

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Leonardo Cardoso Botelho

Departamento de Engenharia Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, que me abençoou muito durante o desenvolvimento dessa pesquisa. Dedico também ao meu pai Antônio Lucas Botelho (em memória), a minha mãe Suzete, e a minha irmã Denise. Por fim, dedico a todos meus orientadores e professores colaboradores e ao departamento de engenharia elétrica da UnB por todo apoio durante essa jornada.

ACKNOWLEDGMENTS

I dedicate this work primarily to God, who blessed me greatly during the development of this research. I also dedicate it to my father Antônio Lucas Botelho (in memory), my mother Suzete, and my sister Denise. Finally, I dedicate it to all my advisors and collaborating professors and to the electrical engineering department at UnB for all their support during this journey.

RESUMO ESTENDIDO

Título: Estabilização de Atitude e Controle de Altitude de um Tiltrotor Bimotor com Propulsão não Homogênea

Autor: Leonardo Cardoso Botelho

Orientador: Prof. Dr. Geovany Araújo Borges (ENE/UnB) e Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara (ENE/UNB)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Brasília, 10 de dezembro de 2024

Palavras-chave: TD3, UAV, Optimal Control Design, Aerial Robotics.

O presente trabalho descreve um modelo dinâmico não linear de uma plataforma aérea tiltrotor bimotor e realiza a identificação dos seus parâmetros físicos com foco no sistema de propulsão não homogênea, situação na qual os motores de propulsão em conjunto com suas hélices não se comportam de maneira idêntica do ponto de vista físico. Além disso, também é desenvolvida duas propostas de sistemas de controle para atitude e altitude, além de um simulador no software Simulink.

A primeira proposta aplica a técnica de reinforcement learning TD3 para sintonizar controladores da família PID aplicados em um sistema dinâmico não linear de uma plataforma aérea tiltrotor bimotor com sistemas de propulsão homogêneo e não-homogêneo. O objetivo do projeto de controle é estabilizar a atitude do sistema e realizar o controle de altitude, além de avaliar diferentes funções de recompensa durante o processo de aprendizagem.

A segunda proposta de controle é uma aplicação da teoria do controle ótimo, utilizando-se LMI (Linear Matrix Inequality), onde se faz alocação robusta de polos para um controlador PI ideal. Ainda, é proposta uma arquitetura conveniente para mitigar o problema de propulsão não homogênea, onde se utiliza uma matriz de ponderação para lidar com a diferença de propulsão como dinâmica não modelada.

Por fim, desenvolve-se um conjunto de simulações em Matlab/Simulink para avaliar comparativamente as duas propostas utilizando-se índices de desempenho e gráficos de respostas dos controladores.

ABSTRACT

Title: Attitude Stabilization and Altitude Control of a Twin-Engine Tiltrotor Aerial with Inhomogeneous Propulsion

Author: Leonardo Cardoso Botelho

Supervisor: Prof. Dr. Geovany Araújo Borges (ENE/UnB) e Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara (ENE/UNB)

Graduate Program in Electrical Engineering

Brasília, AGO 10th, 2024

Keywords: TD3, UAV, Optimal Control Design, Aerial Robotics.

The present work describes a non-linear dynamic model of a twin-engine tiltrotor aerial platform and identifies its physical parameters with a focus on the non-homogeneous propulsion system, a situation in which the propulsion engines together with their propellers do not behave identically. from a physical point of view. In addition, two proposed control systems for attitude and altitude are also developed, as well as a simulator using the Simulink software.

The first proposal applies the TD3 reinforcement learning technique to tune PID family controllers applied to a non-linear dynamic system of a twin-engine tiltrotor aerial platform with homogeneous and non-homogeneous propulsion systems. The aim of control design is to stabilize the system's attitude and perform altitude control, as well as evaluate different reward functions during the learning process.

The second control proposal is an application of optimal control theory, using LMI (Linear Matrix Inequality), where a robust allocation of poles is made for an ideal PI controller. Furthermore, a convenient architecture is proposed to mitigate the inhomogeneous propulsion problem, where a weighting matrix is used to deal with the propulsion difference as unmodeled dynamics.

Finally, a set of simulations in Matlab/Simulink is developed to comparatively evaluate the two proposals using performance indices and controller response graphs.

SUMMARY

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO.....	1
1.2	MOTIVAÇÃO.....	3
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
1.3.1	MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS	5
1.3.2	CONTROLE UTILIZANDO REINFORCEMENT LEARNING.....	5
1.3.3	CONTROLE UTILIZANDO LMI'S	6
1.4	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES	6
2	QUADRO TEÓRICO	8
2.1	CINEMÁTICA E DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS	8
2.1.1	SISTEMA REFERENCIAL.....	8
2.1.2	EQUAÇÕES DE EULER PARA CINEMÁTICA INERCIAL.....	9
2.1.3	DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS	9
2.2	DESCRIÇÃO DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS	11
2.3	CONTROLADORES PID	12
2.4	DEEP REINFORCEMENT LEARNING ATRAVÉS DO ALGORITMO TD3	13
2.5	CONTROLE ROBUSTO VIA LMI	15
2.6	CRITÉRIOS DE DESEMPENHO PARA SISTEMAS DE CONTROLE.....	19
3	MODELO DINÂMICO	20
3.1	MODELO DINÂMICO	20
3.2	IMPLEMENTAÇÃO DA PLANTA EM SIMULINK.....	23
3.3	MODELO PARA PROPULSÃO.....	25
3.4	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA DO MOTOR DE PROPULSÃO	26
3.5	O PROBLEMA DA PROPULSÃO NÃO HOMOGÊNEA	28
4	PROJETO DE CONTROLE	30
4.1	PROJETO DE CONTROLE UTILIZANDO RL TD3	30
4.1.1	OBTENÇÃO DA INVERSA DO MODELO DINÂMICO	31
4.1.2	FUNÇÃO DE GANHO PARA CONVERSÃO DE ACELERAÇÕES EM FORÇA E MOMENTOS.....	34
4.2	UMA ABORDAGEM UTILIZANDO AS EQUAÇÕES DE EULER	34
4.2.1	PROJETO DE CONTROLADORES PID PARA ATITUDE E ALTITUDE	35
4.2.2	ALTERAÇÃO DO CONTROLADOR PARA PID SINTONIZADO POR TD3 ..	35
4.3	FUNÇÕES DE RECOMPENSA PARA O ALGORITMO DE APREDIZAGEM TD3 ..	36

4.4	IMPLEMENTAÇÃO EM SIMULINK DO PROJETO DE CONTROLE E TREINO DO TD3	37
4.5	CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS UTILIZANDO LMI'S	40
4.6	MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS	41
4.7	ARQUITETURA DE CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS	44
4.7.1	CONTROLE H_{∞} COM AÇÃO INTEGRAL.....	45
4.8	IMPLEMENTAÇÃO EM AMBIENTE DE SIMULAÇÃO.....	48
5	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	50
5.1	CONFIGURAÇÕES DE SIMULAÇÃO PARA SINTONIA COM TD3	50
5.1.1	AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO DE RECOMPENSA PARA O CASO EM ESTUDO	50
5.1.2	CONTROLE DE ALTITUDE	53
5.1.3	ESTABILIZAÇÃO DE ATITUDE.....	53
5.2	RESULTADOS DO CONTROLE POR LMI.....	55
5.2.1	DESEMPENHO DO CONTROLADOR EM ESPAÇO DE ESTADOS PARA PROPULSÃO NÃO HOMOGÊNEA	56
5.3	ANÁLISE COMPARATIVA DOS DOIS CONTROLES UTILIZANDO ISE, IAE, IE, ITAE E ITSE	58
6	CONCLUSÕES	60
6.1	TRABALHOS FUTUROS	63
6.2	LISTA DE PUBLICAÇÕES.....	64
	REFERENCES	64

LIST OF FIGURES

1.1	Tiltrotor Bimotor - Movimentação de tilt dos motores de propulsão	1
1.2	Aeronave VTOL Tiltrotor Bimotor do LARA/Aerolab - versão em desenvolvimento	2
1.3	Aeronaves VTOL que se destacaram no mercado nos últimos anos	2
1.4	Comparativo de curvas de tração	4
2.1	Sistema de referência descrito com ângulos de EULER	8
2.2	Descrição em espaço de estados (adaptado de Ogata, 2010).....	11
2.3	Característica da resposta ao degrau de um Sistema de 2ª ordem (adaptado do OGATA, 1997)	19
3.1	Diagrama de corpo livre do Tiltrotor	21
3.2	Inércias da Plataforma fornecidas pelo SolidWorks.....	23
3.3	Diagrama da planta do Tiltrotor feita em Simulink	24
3.4	Coefficientes de tração e momento devido ao arrasto da hélice	25
3.5	Forças referentes ao empuxo da Hélice (Fonte: [1])	26
3.6	Gráfico da tração da hélice	27
3.7	Curvas de propulsão	29
4.1	Diagrama de blocos do projeto de controle	30
4.2	Função de ganho (Conversão de acelerações para Momentos e Força)	34
4.3	TD3 implementado no Simulink.....	37
4.4	Observações	38
4.5	Recompensas	38
4.6	Redes Critica e Ator (fc (Fully Conected), relu (Rectified Linear Unit) e concat (concatenação)).....	39
4.7	Diagrama de simulação implementado em Simulink para treino da rede para sintonia do controlador.....	39
4.8	Proposta de controle em espaço de estados	40
4.9	Diagrama de blocos - Referencial fixo ao corpo	41
4.10	Sistema de controle onde a planta é ampliada com um integrador (Ogata, 2010)	44
4.11	Diagrama de simulação implementado em Simulink para treino da rede para sintonia do controlador.....	47
4.12	Implementação em Simulink do controle utilizando LMI	49
5.1	Comparativo da resposta de acordo com a recompensa (motores iguais) - transitório/regime permanente.....	50

5.2	Comparativo da resposta de acordo com a recompensa (motores iguais) - foco na ultrapassagem percentual	51
5.3	Recompensa para a função exponencial	52
5.4	Resposta ao degrau da altitude	53
5.5	Resposta ao sinal periódico senoidal com ruído branco contínuo normal- mente distribuído	54
5.6	Autovalores do sistema em malha fechada.....	55
5.7	Traction constant variation	56
5.8	Altitude	56
5.9	phi	57
5.10	Inputs	57
5.11	Comparativo de controle par altitude	58
5.12	Comparativo de controle para ϕ , θ e ψ	59

LIST OF TABLES

1.1	Velocidades de rotação e constantes de tração	4
2.1	Definições de parâmetros para sintonia de PID's	12
2.2	Definições de parâmetros de desempenho temporal	19
3.1	Estimativa de parâmetros da plataforma	23
3.2	Especificações dos componentes do sistema.....	26
3.3	Tabela da força de tração de uma hélice através do ensaio estático	27
3.4	Relação de sinal PWM com as rotações dos motores.....	28
3.5	Relação entre PWM e Tração dos Motores	29
4.1	Valores dos coeficientes do sistema	43
4.2	Limites de saturação para velocidade de rotação dos motores e ângulos de tilt.	49
5.1	Configurações dos Hyperparâmetros	50
5.2	Ganhos e Desempenho dos Controladores - Altitude.....	51
5.3	Comparação de métricas de recompensa para diferentes funções	52
5.4	Ganhos e Desempenho dos Controladores - Atitude - Recompensa Função Exponencial.....	54
5.5	Primal and Dual Residuals for Matrix Inequality Constraints	55
5.6	Comparação de índices de desempenho para variáveis de controle com métodos TD3 e LMI.....	58

LIST OF SYMBOLS AND NOTATIONS

SOME NOTATIONS

$X_{(i)}$	Denotes the i -th row of matrix X
$\mathbf{diag}(v)$	A diagonal matrix composed of the elements of the vector v
$He\{X\}$	Notation that stands for $X + X^T$
I_n	The identity matrix of order n
X^{-1}	Inverse of a square matrix X
$\mathcal{L}_2^n[0, \infty)$	Denotes the space of square-integrable vectors of n functions over $[0, \infty)$
$X_{(ij)}$	Denotes the i -th row and the j -th column of matrix X
$\mathbb{R}^{n \times m}$	The space of real matrices with dimension $n \times m$
$X \ll 0$	Indicates that all entries of matrix X are negative
$\mathbf{1}_m$	Stands for a vector of ones of dimension m
\otimes	Denotes the Kronecker product
X_\perp	Matrix whose columns form a basis for the null space of X
$X \gg 0$	Indicates that all entries of matrix X are positive
$X < 0$	Indicates that matrix X is negative definite
\star	Denotes symmetric blocks in partitioned matrices
$X > 0$	Indicates that matrix X is positive definite
X^T	Transpose of matrix X
\mathbb{R}_+^n	The space of vectors of dimension n with real positive entries
$0_{m \times n}$	The null matrix of $m \times n$ order

LIST OF ACRONYMS AND ABBREVIATIONS

DQN Deep Q-Network. 7

LMI Linear Matrix Inequalities. 7

MAS Multi-Agent System. 7

TD Twin Delayed. 7

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será feita uma breve contextualização sobre aeronaves VTOL (Vertical Take Off and Landing), destacando-se os modelos comerciais atuais. Em seguida, discorrerá sobre a motivação do trabalho além de fazer uma revisão bibliográfica sobre o tema. Por fim, descreve-se o que é tratado em cada capítulo e quais são as contribuições dessa pesquisa.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A tecnologia dos VANT's (Veículos Aéreos Não Tripulados) é utilizada para a realização de tarefas que antes só podiam ser realizadas por aeronaves tripuladas. As vantagens estão por conta do melhor custo benefício, escalabilidade, versatilidade e usabilidade, conforme descrito em [2] e [3], advindas principalmente da não necessidade de um piloto a bordo da aeronave.

Entre os tipos de VANT's, destaca-se o Tiltrotor Bimotor, uma aeronave que possui dois motores de propulsão que são movimentados por dois servos motores a fim de realizar a estabilização e manobrabilidade da aeronave. Um exemplo desse tipo de aeronave está sendo desenvolvida no LARA¹ e no Aerolab². Duas versões da plataforma podem ser vistas nas figuras 1.1, 1.2 e 3.1. O desenvolvimento atual busca atualizar vários aspectos construtivos e de software da versão anterior, a fim de tornar essa plataforma robusta e de fácil replicação. O presente trabalho trata-se de uma continuação do trabalho de final de graduação [1], onde foi realizado a modelagem e uma proposta de controle para esta aeronave.



Figure 1.1 – Tiltrotor Bimotor - Movimentação de tilt dos motores de propulsão

¹Laboratório de Automação e Robótica da UnB

²Laboratório de Robótica Aérea



Figure 1.2 – Aeronave VTOL Tiltrotor Bimotor do LARA/Aerolab - versão em desenvolvimento

Entre os interesses desse projeto, está a possibilidade de no futuro ser adicionado uma asa fixa ao corpo da aeronave, possibilitando que ela decole como um helicóptero, e posteriormente, alterando-se o posicionamento dos motores, mudar a configuração da aeronave para um modelo de aeronave tradicional de asa fixa, visando aumentar sua autonomia de voo. Comercialmente, temos aeronaves VTOL na figura 1.3 que se destacam comercialmente nas áreas de cinegrafia, agronomia e transporte urbano.



Figure 1.3 – Aeronaves VTOL que se destacaram no mercado nos últimos anos

Impulsionado pelo emergente mercado dos “carros voadores”, o projeto de veículos eVTOL (Electronic Vertical Take Off and Landing) tem aumentado consideravelmente nos últimos anos, como pode ser visto em texto publicado pela Embraer, [4]. A demanda por uma nova alternativa que auxilie na mitigação da sobrecarga da malha de transporte terrestre é estudada pelos grandes centros urbanos, como pode ser visto no estudo realizado em [5].

Para o projeto deste tipo de aeronave, podemos citar a etapa de modelagem dinâmica, que envolve o desenvolvimento de representações matemáticas do comportamento físico do sistema. Uma abordagem presente na literatura sobre UAV é o formalismo de Newton-Euler, que utiliza diagramas e convenções convenientes para descrever a translação e a rotação de um corpo rígido em relação a um referencial terrestre. Para a parte de controle, projetos baseados em modelo se mostram interessantes para esse problema, como o controle em Espaço de Estados, a técnica denominada Feedback Linearization e projeto de controle utilizando-se Reinforcement Learning.

1.2 MOTIVAÇÃO

Ao utilizar motores de propulsão de baixo custo para produção de drones, em especial nesse trabalho do tiltrotor bimotor, observamos o seguinte cenário:

- Os motores brushless de baixo custo não possuem controle em malha fechada da sua velocidade de rotação;
- Existe uma variação significativa do desempenho de uma unidade de propulsão para outra, mesmo que sejam do mesmo modelo. Isso se deve aos limites de tolerância mais flexíveis em suas produções;
- Não se conhecer com precisão o comportamento dos propulsores quando instalados na plataforma aérea;

A situação de propulsão não homogênea caracteriza-se pela diferença das curvas de tração que descrevem o comportamento de cada propulsor. Um exemplo pode ser visto no exemplo da figura 1.4 e na tabela 1.1, onde há a diferença de 10% da constante de tração entre dois propulsores. Note que para uma velocidade típica de operação, em torno de 700 rad/s, a diferença de tração é de aproximadamente 1 kgf, o que é considerado muito no contexto deste trabalho.

Comparativo de duas curvas de tração (conjunto motor + hélice) com 10% de diferença no valor da constante de tração

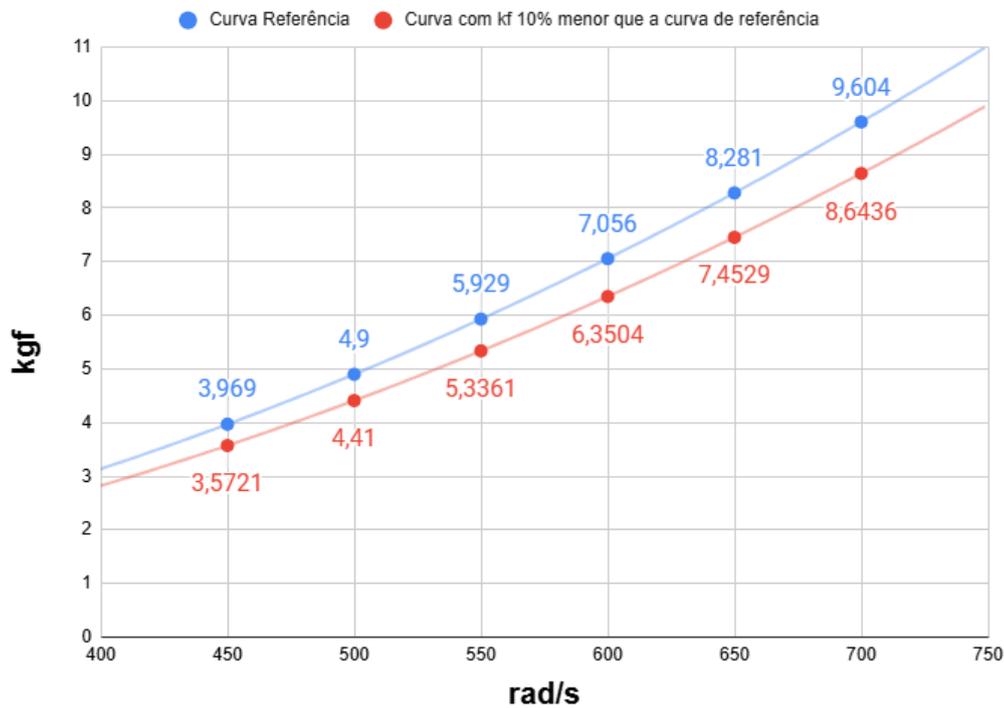


Figure 1.4 – Comparativo de curvas de tração

Velocidade de rotação (rad/s)	Tração referência (kgf) $k_{ref}: 1,96 \times 10^{-5}$	Tração 2 (kgf) $0,9 \times k_{ref}: 1,764 \times 10^{-5}$
450	3,969	3,5721
500	4,9	4,41
550	5,929	5,3361
600	7,056	6,3504
650	8,281	7,4529
700	9,604	8,6436

Table 1.1 – Velocidades de rotação e constantes de tração

Para a situação de propulsão não homogênea, é necessário que o controle compense o desequilíbrio das forças de propulsão causado por esta situação. Controles não lineares como em [6], ou controles adaptativos como em [7], [8] e [9], são abordagens robustas que mitigam imprecisões da modelagem. No entanto, eles exigem um poder computacional considerável e são complexos de desenvolver. Para o problema em estudo, buscamos uma solução para hardware embarcado de baixo custo, como um Arduino, ESP32 ou STM32. Desta maneira, o foco deste trabalho será em controles lineares em vista da pouca exigência que esses controladores exigem de processamento para sua implementação.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.3.1 Modelagem de sistemas dinâmicos

Para o projeto desse tipo de aeronave, podemos citar a etapa de modelagem dinâmica, que consiste em desenvolver representações matemáticas do comportamento físico do sistema. Uma abordagem presente na literatura de VANT's é o formalismo de Newton-Euler, que utiliza diagramas e convenções convenientes para descrição da translação e da rotação de um corpo rígido em um referencial terrestre, como pode ser visto nos trabalhos [10] e [11].

Uma vez obtido o modelo, uma etapa importante é de estimar ou identificar os parâmetros físicos do sistema. No trabalho de [12] é utilizado o método estatístico de Monte Carlo para esse tipo de estimativa. Já no trabalho de [13], é feita a comparação do método de análise no domínio da frequência com o método CIPHER. Essas abordagens necessitam a posteriori da elaboração de um projeto de controle mais complexo, que por sua vez, gera grande demanda de processamento do software embarcado. Uma alternativa para esse problema é de realizar a identificação individualizada dos parâmetros físicos, como em [2].

1.3.2 Controle utilizando Reinforcement Learning

Entre as abordagens para projeto de controle desse tipo de aeronave, tem surgido nos últimos anos aplicações de Reinforcement Learning. Dessas aplicação, podemos citar [14], um projeto de controle que adapta em tempo real os ganhos de um controlador SNI (Strictly Negative Imaginary) via Q-learning fuzzy para um quadrotor.

Proposto por [15], o TD3 é uma modificação do método ator-crítico para controle contínuo (DDPG), proposto por [16]. O TD3 se baseia em Double Q-learning, que toma o valor mínimo entre um par de críticos para limitar a superestimação durante a aprendizagem. A conexão entre as redes-alvo e o viés de superestimação é moderada através do atraso das políticas de redução de erros por atualização, que por fim, trazem melhorias ao desempenho de rastreamento.

Destaca-se ainda que o TD3 tem a capacidade de lidar com incertezas, como descrito em [15]. Em [17], ele é aplicado no controle de transporte de carga útil com dois quadrotores, adicionando durante o treinamento ruído gaussiano e variando-se a carga útil em uma faixa de 10%. Em [18], são realizados treinamentos com diferentes políticas de recompensas, sendo um dos casos, a de maior recompensa para orientação constante. Por fim, em [19], temos uma versão da implementação do TD3 aplicado ao controle de trajetória de um UAV, onde é aprimorado o processo de aprendizagem utilizando repetição de experimento priorizado (TD3-PER).

Uma das aplicações do TD3 é a sintonia de controladores. Vários autores da literatura es-

pecializada em sintonia de controladores tratam sobre o tema, como por exemplo, o trabalho de [20]. Alguns outros, por sua vez, tratam de como realizar a sintonia de controladores da família PID. Em [21], é realizado a sintonia de um controlador PI para um Unmanned Surface Vehicles (USVs) sob condições de vento e ondas. Já em [22], é realizada a sintonia de um controlador PID para controle de frequência de um sistema de potência elétrica. Para quadcopteros, os trabalhos [23] e [24] propõem sintonia de controladores PID para controle de referência e rastreamento de trajetória.

1.3.3 Controle utilizando LMI's

Uma vez estabelecido o modelo de um sistema, uma abordagem interessante é rerealizar o projeto de controle baseado em modelo. Na literatura de controle aplicada a VANTs, o trabalho [25] utiliza abordagens LQG e LQR para um quadricóptero com quatro motores articulados. Em [26], o critério de desempenho de posicionamento de pólos é aplicado em um setor cônico, onde uma região de interesse para alocação de um sistema em malha fechada é definida através de desigualdades matriciais lineares (LMI), com algoritmos de busca aplicados para encontrar o controlador. Finalmente, uma descrição detalhada do método mencionado pode ser encontrada em [27].

1.4 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 2 - Quadro Teórico:** Apresenta-se todo ferramental teórico envolvido nas soluções proposta para este trabalho. Entre os temas abordados, estão a modelagem da plataforma, descrição do sistema dinâmico em espaço de estados, controle PID, sintonia de PID's por Reinforcement Learning e controle em espaço de estados utilizando LMI (Linear Matrix Inequality);
- **Capítulo 3 - Modelo Dinâmico:** Obtém-se o Modelo Dinâmico da plataforma aplicando-se o formalismo de Newton-Euler e matrizes de rotação para descrever o movimento translacional e rotacional da plataforma. Propõe-se em seguida uma descrição linear do sistema utilizando Espaço de Estados.
- **Capítulo 4 - Projeto de Controle:** É proposta duas soluções de controle. A primeira proposta trata-se de uma evolução do trabalho desenvolvido em [1], em que se atualiza a solução com controles PID em tempo discreto, além de individualizar as constantes de tração para cada propulsor. Por fim, realiza-se a sintonia dos controladores utilizado-se TD3. A segunda proposta é uma arquitetura de controle que utiliza uma

modelagem em espaço de estados em conjunto com equações não lineares, aplicando-se conceitos de controle ótimo para obter os ganhos de um controlador PI através alocação robusta de polos.

- **Capítulo 5 - Simulações e Resultados:** Realizam-se simulações e avalia-se o desempenho dos controladores individualmente e comparativamente.
- **Capítulo 6 - Conclusão:** Delimita-se pontos positivos e negativos das soluções, propondo-se por fim melhoras a serem desenvolvidas no futuro.

As principais contribuições que pretende-se com esse trabalho são:

- Desenvolver soluções para o problema da não homogeneidade dos propulsores do Tiltrotor Bimotor;
- Obtenção de ganhos de controladores PID através de uma solução que combina a inversa do modelo dinâmico do Tiltrotor Bimotor e reinforcement learning;
- Desenvolver projeto de controle ótimo através de um controlador proporcional-integral utilizando alocação robusta de polos que mitigue o desequilíbrio de forças causado pela situação de propulsão não homogênea.

2 QUADRO TEÓRICO

2.1 CINEMÁTICA E DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

2.1.1 Sistema Referencial

Sistema Referencial é uma convenção criada para descrição de fenômenos físicos. Um Sistema Referencial Inercial por sua vez é aquele que descreve um objeto em que a primeira lei de Newton é válida. Para este trabalho, utilizaremos ângulos de Euler, como em [28], além de um segundo sistema de referencial cartesiano fixo ao corpo. A figura 2.1 descreve o sistema referencial de Euler.

Para obter uma relação entre os dois sistemas de referências aplicados a um mesmo objeto, é utilizada uma operação chamada matrizes de rotação, que possibilita obter as coordenadas de um sistema referencial fixo no corpo em termos de coordenadas de um referencial inercial. A matriz de rotação utilizada neste trabalho pode ser vista em 2.1. Os eixos X_0 , Y_0 e Z_0 se referem aos eixos do referencial inercial (figura 2.1). Os eixos ϕ , θ e ψ se referem ao movimento angular no eixos X_0 , Y_0 e Z_0 .

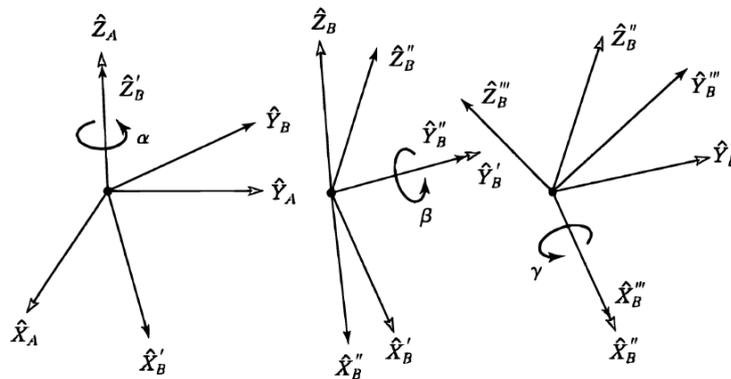


Figure 2.1 – Sistema de referência descrito com ângulos de EULER

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\theta + c_\psi s_\theta s_\phi & s_\psi s_\theta + c_\psi s_\theta c_\phi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\theta + s_\psi s_\theta s_\phi & -c_\psi s_\theta + s_\psi s_\theta c_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

2.1.2 Equações de Euler para cinemática Inercial

As velocidades dos ângulos de atitude de um referencial inercial descrito pelos ângulos de Euler podem ser obtidas através das equações 2.2, 2.3 e 2.4. Essas equações são úteis para uma descrição não linear do sistema, tornando a análise da dinâmica mais próxima da realidade. O superescrito b nas equações se refere a variáveis relacionadas ao referencial fixo no corpo. A variável ω^b representa a velocidade angular medida no sistema de referência acoplado ao corpo. Para a representação das derivadas temporais, utiliza-se um ponto acima da variável. Existem limitações na abordagem por ângulos de Euler devido às singularidades no ângulo θ nas equações (2.2) e (2.4). Entretanto, essas limitações não geram impacto relevante especificamente para as tarefas de estabilização e controle de atitude e altitude.

$$\dot{\phi} = w_x^b + (\sin \phi \tan \theta)w_y^b + (\cos \phi \tan \theta)w_z^b \quad (2.2)$$

$$\dot{\theta} = (\cos \phi)w_y^b - (\sin \phi)w_z^b \quad (2.3)$$

$$\dot{\psi} = (\sin \phi / \cos \theta)w_y^b + (\cos \phi / \cos \theta)w_z^b \quad (2.4)$$

2.1.3 Dinâmica de corpos rígidos

O formalismo de Newton-Euler é uma convenção para desenvolvimento de modelos dinâmicos de corpos rígidos em dois ou mais sistemas referenciais. Sua aplicação se dá utilizando-se a segunda lei de Newton escrita nos termos de um vetor R (matriz de rotação) em conjunto com as forças presentes no corpo do objeto. As equações que descrevem os momentos em determinado eixo de rotação é dado pelo produto vetorial entre a matriz de inércia do objeto pelo produto vetorial de velocidades nos eixos fixos ao corpo.

A variável τ e o subscrito b nas equações se referem aos momentos devido às forças presentes no corpo. Segue o desenvolvimento do formalismo de Newton-Euler:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{\omega}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_b \times mv_b \\ \omega_b \times I\omega_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ \tau_b \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A modelagem por sua vez é feita usando o referencial terrestre. Dessa maneira, a forças de Coriolis para translação são nulas:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{\omega}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_b \times I\omega_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rf_b \\ \tau_b \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Considerará que a plataforma possui simetria em relação ao sistema de referência fixo na plataforma, tendo sua matriz de Inércia diagonal:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

A matriz produto vetorial das velocidades no referencial do corpo é dada por:

$$[\omega^b] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^b & \omega_y^b \\ \omega_z^b & 0 & -\omega_x^b \\ -\omega_y^b & \omega_x^b & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Por fim, para a obtenção do modelo dinâmico que descreva o movimento linear e rotacional de um corpo rígido em um sistema inercial em termos de equações, utiliza-se as equações na forma de 2.9 a 2.17:

$$m\dot{v}_x^e = R(\phi) \sum F_x^b, \quad (2.9)$$

$$m\dot{v}_y^e = R(\theta) \sum F_y^b, \quad (2.10)$$

$$m\dot{v}_z^e = -mg + R(\psi) \sum F_z^b, \quad (2.11)$$

$$I_{xx}\dot{\omega}x^b = \omega y^b \omega_z^b (I_{yy} - I_{zz}) + \sum \tau_x^b, \quad (2.12)$$

$$I_{yy}\dot{\omega}y^b = \omega z^b \omega_x^b (I_{zz} - I_{xx}) + \sum \tau_y^b, \quad (2.13)$$

$$I_{z\bar{\alpha}}\dot{\omega}z^b = \omega x^b \omega_y^b (I_{xx} - I_{yy}) + \sum \tau_z^b, \quad (2.14)$$

$$\dot{\phi} = \omega_x^b + (\sin \phi \tan \theta) \omega_y^b + (\cos \phi \tan \theta) \omega_z^b, \quad (2.15)$$

$$\dot{\theta} = \cos \phi \omega_y^b - \sin \phi \omega_z^b, \quad (2.16)$$

$$\dot{\psi} = (\sin \phi / \cos \theta) \omega_y^b + (\cos \phi / \cos \theta) \omega_z^b. \quad (2.17)$$

2.2 DESCRIÇÃO DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS

Segundo [29], uma descrição de um sistema em espaço de estados envolve três tipos de variáveis: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. Um sistema dinâmico deve conter elementos que memorizem valores de entrada para $t \geq t_1$, medidas de um intervalo de tempo. Os elementos que realizam esse papel de memória são os integradores. A descrição em espaço de estados de sistema dinâmicos consiste em representar as equações diferenciais na forma das equações 2.18 e 2.19.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (2.18)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (2.19)$$

em que:

$x(t)$ = estado do vetor da planta (vetor n-dimensional),

$u(t)$ = sinal de controle,

$y(t)$ = sinal de saída,

$A(t)$ = matriz de estado,

$B(t)$ = matriz de entrada,

$C(t)$ = matriz de saída,

$D(t)$ = matriz de transmissão direta.

O diagrama de blocos que representa essas equações pode ser visto na figura a seguir.

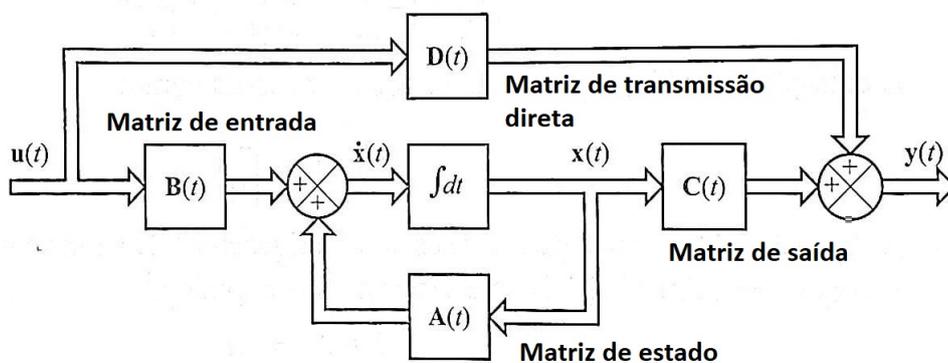


Figure 2.2 – Descrição em espaço de estados (adaptado de Ogata, 2010)

2.3 CONTROLADORES PID

O controle PID (Proporcional Integral Derivativo) é uma técnica que atua com uma composição de ações a fim de minimizar o erro de uma determinada variável de controle. A depender das especificações de projeto e da dinâmica do sistema, uma ou mais dessas ações podem ser anuladas conforme a conveniência. Uma típica configuração do controle PID pode ser vista na equação 2.20, com a ação de controle sendo descrita pela seguinte equação:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.20)$$

onde K_p é o ganho proporcional, K_i o ganho integral, K_d o ganho derivativo, $e(t)$ o erro e t o tempo. A equação do controlador PID em tempo discreto é dada por:

$$U(z) = K_p E(z) + K_i \frac{T_s}{1 - z^{-1}} E(z) + K_d \frac{1}{T_s} \frac{z - 1}{z} E(z) \quad (2.21)$$

em que $U(z)$ é a transformada Z do sinal de controle, e $E(z)$ é a transformada Z do erro.

Um método tradicional de sintonia de PID é o de Ziegler-Nichols. Ele considera inicialmente como nulo os ganhos integrais e derivativos, aumentando-se o ganho proporcional gradualmente até que o sistema atinja uma condição oscilatória periódica de amplitude constante. Registra-se então o ganho obtido e o período da oscilação. Utilizando-se das relações presentes na Tabela 2.1, obtêm-se os outros ganhos. O ganho para oscilação periódica de amplitude constante denominamos K_u e seu período de oscilação denominamos P_u :

Controlador	K_p	T_d	$1 / T_i$
P	$0,5 K_u$	0	0
PD	$0,6 K_u$	$P_u/8$	0
PI	$0,45 K_u$	0	$1,2 P_u$
PID	$0,6 K_u$	$P_u/8$	$2 P_u$

Table 2.1 – Definições de parâmetros para sintonia de PID's

Outra estratégia de ajuste de um controlador PID pode ser utilizando os seguintes passos:

1. Ajustar os ganhos K_d e K_i para zero. Em seguida, ajustar K_p até que o sistema alcance o tempo de subida desejado;
2. Ajustar o ganho K_p em conjunto com o ganho K_d de maneira a alcançar um compromisso entre o tempo de subida e o sobressinal da resposta;
3. Ajustar o ganho K_i a fim de anular o erro em estado estacionário, finalizando com ajustes finos do controlador.

2.4 DEEP REINFORCEMENT LEARNING ATRAVÉS DO ALGORITMO TD3

O aprendizado por reforço consiste em um agente que durante a fase de treinamento aprende sobre determinado sistema baseando-se em variáveis de interesse e ações realizadas por ele em consequência de determinadas entradas. O objeto de aprendizado é uma tarefa estabelecida dentro de um contexto controlado de incertezas. A cada interação com o ambiente, é avaliado o desempenho da tarefa, atribuindo-se uma recompensa. As variáveis de ambiente chamamos por convenção de observações, as quais são utilizadas para compor a equação que define a recompensa da tarefa.

Um agente possui dois componentes na sua estrutura, sendo eles uma política e um algoritmo de aprendizado. A política é uma relação entre o conjunto de observações e uma distribuição de probabilidades das ações a serem feitas, sendo implementada por um aproximador de função e uma rede neural. Um algoritmo por sua vez atualiza continuamente os parâmetros aprendidos a fim de encontrar uma política ótima que maximize a recompensa.

Um algoritmo que se destaca nas aplicações de controle é o Deep Deterministic Policy Gradient (DDPG), proposto por [16]. Ele aprende simultaneamente uma função Q e uma política. Ele utiliza a equação de Bellman para aprender a função Q, com Q sendo utilizado para aprender a política, sendo $Q^*(s, a)$ a função de valor de ação ideal. A ação ideal $a^*(s)$ pode ser encontrada resolvendo a equação 2.22.

$$a^*(s) = \arg \max_a Q^*(s, a) \quad (2.22)$$

Apesar do DDPG atingir ótimo desempenho em um grande número de aplicações, ele apresenta dificuldades em relação a ajustes de hiperparâmetros. Um problema que se destaca é de a função Q aprendida superestimar os valores de Q, levando-se a quebra da política, como explicado em [30]. Em vista disso, o TD3 (Twin-Delayed Deep Deterministic), proposto por [15], é uma evolução do DDPG (Deep Deterministic Policy Gradient). Um agente estima o valor mínimo de duas funções do valor de Q. Um segundo agente atualiza a política e os alvos com menor frequência do que as funções Q. Por fim, um terceiro agente adiciona ruído à ação alvo. Isso soluciona problemas de superestimação e oscilações para sistemas de controle contínuo.

As funções aprendidas são denominadas Q_{ϕ_1} e Q_{ϕ_2} , utilizando o algoritmo de minimização do erro quadrático métrico de Bellman. As ações são baseadas na política $\mu_{\theta_{\text{targ}}}$, adicionando-se ruído em cada dimensão da ação. A ação destino por sua vez, é tratada a fim de satisfazer $a_{\text{Low}} \leq a \leq a_{\text{High}}$, em que as ações destino são descritas por 2.23:

$$a'(s') = \text{clip}(\mu_{\theta_{\text{targ}}}(s') + \text{clip}(\epsilon, -c, c), a_{\text{Low}}, a_{\text{High}}), \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \quad (2.23)$$

Para que o aproximador da função Q não desenvolva picos agudos, tendo comportamento incorreto, utiliza-se duas funções Q , priorizando a função de um valor de alvo menor, conforme 2.24.

$$y(r, s', d) = r + \gamma(1 - d) \min_{i=1,2} Q_{\phi_i, \text{targ}}(s', a'(s')). \quad (2.24)$$

Em seguida, o aprendizado é realizado utilizando as equações 2.25 e 2.26:

$$L(\phi_1, \mathcal{D}) = \mathbb{E}_{(s,a,r,s',d) \sim \mathcal{D}} \left[(Q_{\phi_1}(s, a) - y(r, s', d))^2 \right], \quad (2.25)$$

$$L(\phi_2, \mathcal{D}) = \mathbb{E}_{(s,a,r',d) \sim \mathcal{D}} \left[(Q_{\phi_2}(s, a) - y(r, s', d))^2 \right], \quad (2.26)$$

Essa abordagem ajuda a evitar a superestimação da função Q . A política aprendida então, por sua vez, passa a ser de obter o máximo de Q_{ϕ_1} , como na equação 2.27:

$$\max_{\theta} \mathbb{E}_{s \sim \mathcal{D}} [Q_{\phi_1}(s, \mu_{\theta}(s))]. \quad (2.27)$$

O Algoritmo 1 descreve os passos do TD3.

Algorithm 1 - TD3

- 1: Inicializar redes críticas $Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}$ e rede de ator π_{ϕ} com parâmetros aleatórios θ_1, θ_2, ϕ
 - 2: Inicializar redes alvo $\theta_{1_0} \leftarrow \theta_1, \theta_{2_0} \leftarrow \theta_2, \phi_0 \leftarrow \phi$
 - 3: Inicializar buffer de replay B
 - 4: **for** $t \leftarrow 1$ **to** T **do**
 - 5: Selecionar ação com ruído de exploração $a \sim \pi_{\phi}(s) + \epsilon, \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ e observar recompensa r e novo estado s'
 - 6: Armazenar tupla de transição (s, a, r, s') em B
 - 7: Amostrar mini-lote de N transições (s, a, r, s') de B
 - 8: $a' \sim \pi_{\phi_0}(s') + \epsilon, \epsilon \sim \text{clip}(\mathcal{N}(0, \sigma'), -c, c)$
 - 9: $y \leftarrow r + \gamma \min_{i=1}^2 Q'_{\theta_i}(s', a')$
 - 10: Atualizar críticos $\theta_i \leftarrow \arg \min_{\theta_i} \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (y - Q_{\theta_i}(s, a))^2$
 - 11: **if** $t \bmod d = 0$ **then**
 - 12: Atualizar ϕ pelo gradiente de política determinística:
 - 13: $r_{\phi} J(\phi) = \frac{1}{N-1} \sum_r a Q_{\theta_1}(s, a) | a = \pi_{\phi}(s) r_{\phi} \pi_{\phi}(s)$
 - 14: Atualizar redes alvo:
 - 15: $\theta'_i \leftarrow \tau \theta_i + (1 - \tau) \theta_{i_0}$
 - 16: $\phi' \leftarrow \tau \phi + (1 - \tau) \phi_0$
 - 17: **end if**
 - 18: **end for**
-

2.5 CONTROLE ROBUSTO VIA LMI

Para um conhecimento introdutório do assunto, o livro [31] é uma ótima referência na apresentação do assunto de LMI's, discorrendo pelos principais resultados, e dispõe de apresentação da base teórica de maneira didática. Segundo [32], define-se como desigualdade de matriz linear (LMI), na variável $x \in \mathbf{R}^n$, uma desigualdade na forma:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n \geq 0 \quad (2.28)$$

com F_0, \dots, F_n matrizes simétricas $m \times m$ semi definidas positivas, e $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$ sendo uma função afim da variável x . Essa caracterização por sua vez consiste em uma restrição convexa, em que:

$$x \mid F(x) \geq 0.$$

Dado um sistema na forma de $\dot{x} = Ax + Bu$, podemos aplicar a desigualdade de Lyapunov generalizada, conforme [32] e [33]. Essa aplicação denominamos como programação semidefinida (SDP), sendo esse um problema de otimização convexo, no seguinte formato:

$$\begin{cases} \min_{P \in \text{Sym}(n)} \text{tr}\{P\} \\ \text{sujeito a: } (A'P + PA) < -Q. \end{cases} \quad (2.29)$$

em que:

P = Matriz de estabilidade simétrica,

Q = Matriz simétrica e positiva definida, que descreve a restrição do problema,

$\text{Sym}(n)$ = conjunto das matrizes simétricas $n \times n$.

Podemos resolver SDPs de forma global e eficiente encontrando um ótimo global ou determinarmos que não há satisfação das restrições LMI e de igualdade. Tendo que

$$A^T P + P A + Q \leq 0, \quad P \geq 0,$$

em que P denota que a função de Lyapunov quadrática $V(z) = z^T P z$ satisfaz a desigualdade

$$\int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt \leq x(0)^T P x(0),$$

e considerando que $x(0)$ esteja fixo, pode se encontrar o melhor limite possível através da solução da SDP. Utilizando os resultados de [34], pode-se definir que uma região LMI é

qualquer subconjunto \mathcal{D} do plano complexo que pode ser definido como

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\},$$

onde L e M são matrizes reais tais que $L^T = L$. A função de valor matricial

$$f_{\mathcal{D}}(z) = L + zM + \bar{z}M^T$$

é chamada de função característica de \mathcal{D} . Abaixo estão alguns exemplos de regiões LMI:

- semi-plano $\text{Re}(z) < -\alpha$: $f_{\mathcal{D}}(z) = z + \bar{z} + 2\alpha < 0$;
- disco centrado em $(-q, 0)$ com raio r :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0;$$

- setor cônico com ápice na origem e ângulo interno 2θ :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(z + \bar{z}) & \cos \theta(z - \bar{z}) \\ \cos \theta(z - \bar{z}) & \sin \theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0.$$

Em vista do que foi descrito, aplicando-se o resultado a um sistema na forma de 2.18, podemos obter uma região LMI \mathcal{D} com função característica

$$f_{\mathcal{D}}(z) = L + zM + \bar{z}M^T < 0, \quad L, M \in \mathbb{R}^{p \times p},$$

com

$$M = M_1^T M_2,$$

onde M_1 e M_2 tem posto completo de colunas. Se M tem posto k , tanto M_1 quanto M_2 são matrizes $k \times p$. Pode-se então dizer, que um sistema com incerteza (no caso, o deslocamento dos polos do sistema fora da região \mathcal{D}) na forma de

$$\Delta \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \sigma_{\max}(\Delta) \leq \gamma^{-1}$$

é quadraticamente \mathcal{D} -estável se existirem matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P \in \mathbb{R}^{k \times k}$, simétricas, tais que $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(X, P)$ seja definida como:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(X, P) := \begin{bmatrix} M_{\mathcal{D}}(A, X) & M_1^T \otimes (XB) & (M_2^T P) \otimes C^T \\ M_1 \otimes (B^T X) & -\gamma P \otimes I & P \otimes D^T \\ (PM_2) \otimes C & P \otimes D & -\gamma P \otimes I \end{bmatrix} < 0,$$

com

$$P > 0, \quad X > 0,$$

e

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) := L \otimes X + M \otimes (XA) + M^T \otimes (A^T X).$$

Os resultados apresentados acima são amplamente utilizados em diversos projetos de controle para sistema dinâmicos. A utilização de controle robusto para controle de UAVS é amplamente encontrada na literatura científica. O motivo se deve a este tipo de controle rejeitar perturbações e dinâmicas não modeladas do projeto de controle. Como exemplo, temos o trabalho [35], um controle que utiliza observador Thau de modo deslizante adaptativo (ASMT0), usando a técnica de desigualdades de matrizes lineares (LMI's). Controles mais complexos, como em [36], utilizam uma lei de controle de compensação distribuída paralela (PDC) com restrições de D-estabilidade para melhorar a resposta transitória de malha fechada, utilizando-se LMI's. Um trabalho muito relevante sobre alocação robusta de polos está presente em [34], onde se discute técnicas de análise relevantes para esse tema, entre elas aplicações para projeto de controle H_2 e H_{inf} e obtenção de conjuntos realistas de especificações de projeto.

Em [37], temos uma proposta de controle para um quadricóptero com uma carga útil suspensa utilizando um controlador misto H_2/H_{inf} com restrições. Utiliza-se LMI's para obtenção dos ganhos do controlador para obtenção de bons desempenhos de equilíbrio e movimentações no regime transitório. No trabalho [38] temos duas proposta para controle de trajetória de um quadricóptero via abordagens LQR e H_{inf} realizando alocação de polos via LMI's. Esses resultados se mostram interessantes do ponto de vista de desempenho, e também, de viabilidade de demanda de processamento, podendo ser implementado em hardware embarcado de baixo custo.

Em [39], temos uma discussão sobre estabilização de quadricóptero, um sistema subatuado, utilizando LQG e integrador para realização de controle translacional com desempenho ideal. O trabalho [40], por sua vez, propõe um controlador PI obtido através de LMIs e determinante de Hurwitz, utilizando condições de estabilidade robusta com técnicas de particionamento de domínios. Apesar da simplicidade desses controladores, o acoplamento dos ganhos em conjunto com essas abordagens permitem um desempenho destacável destes controles. Em [41], temos um método de controle para posição nos eixos X e Y, usando estrutura-generator tracker command (CGT), utilizando-se LMI's segundo o desempenho H_{inf} . Um destaque deste trabalho é do controle seguir automaticamente o caminho com um erro de cruzamento médio $X = 0,5$ m e $Y = 0,2$ m. Em [42], temos um D-LQI aplicado a um tanque duplo linear com restrições obtidas por meio de critérios simples de controle clássico. Em vista do descrito até aqui, avalia-se que as técnicas LMI's tem ótimas qualidade de controle, com custo computacional relativamente baixo, e com vasta literatura de aplicações, o

que o torna um tipo de controlador interessante para a aplicação do presente trabalho. Esses resultados permitem encontrar soluções para estabilização e controle de sistemas em espaço de estados, assunto que será tratado em tópicos seguintes para o caso em estudo.

2.6 CRITÉRIOS DE DESEMPENHO PARA SISTEMAS DE CONTROLE

Uma maneira de avaliar o desempenho de um sistema de controle é avaliar sua resposta como de um sistema de segunda ordem na forma da equação 2.30, com ω_n sendo a frequência natural e ζ o fator de amortecimento do sistema. Na figura 2.3 e na tabela 2.2 podemos ver parâmetros de desempenho para resposta a um degrau de referência.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.30)$$

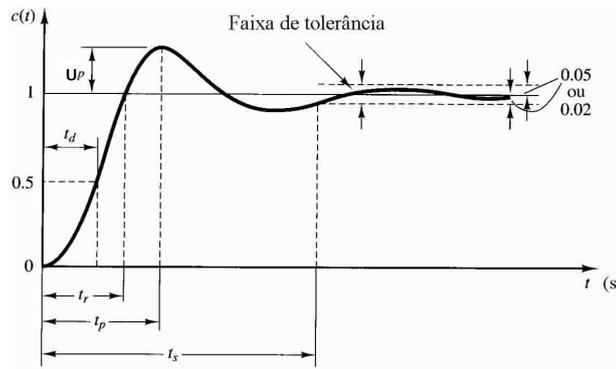


Figure 2.3 – Característica da resposta ao degrau de um Sistema de 2ª ordem (adaptado do OGATA, 1997)

Símbolo	Descrição
U_p	Máximo overshoot percentual: $U_p = \left[\frac{c(t_p) - c(t_\infty)}{c(t_\infty)} \right] \cdot 100\%$
t_r	Tempo de subida 90% (rise time)
t_s	Tempo de assentamento (settling time)
t_d	Tempo de atraso (delay time)
t_p	Tempo do pico (peak time)

Table 2.2 – Definições de parâmetros de desempenho temporal

Além das variáveis de desempenho descritas, pode-se avaliar o desempenho de um sistema de controle utilizando-se os seguintes índices:

$$\text{IAE} = \int_0^\infty |e(t)| dt \quad (\text{Integral of Absolute Error}) \quad (2.31)$$

$$\text{IE} = \int_0^\infty e(t) dt \quad (\text{Integral Error}) \quad (2.32)$$

$$\text{ISE} = \int_0^\infty e(t)^2 dt \quad (\text{Integral of Squared Error}) \quad (2.33)$$

$$\text{ITSE} = \int_0^\infty t \cdot e(t)^2 dt \quad (\text{Integral of Time-weighted Squared Error}) \quad (2.34)$$

$$\text{ITAE} = \int_0^\infty t \cdot |e(t)| dt \quad (\text{Integral of Time-weighted Absolute Error}) \quad (2.35)$$

3 MODELO DINÂMICO

Nesta etapa é realizada a descrição do modelo dinâmico através de equações de força, de momentos e de cinemática da plataforma.

3.1 MODELO DINÂMICO

Nesse trabalho, conforme a figura 3.1, utiliza-se o referencial inercial composto pelos eixos X_0, Y_0, Z_0 (Referencial Inercial Terrestre) e outro sistema referencial fixo ao corpo composto pelos eixos x_b, y_b, z_b (em todo texto, o sub-escrito b refere-se a palavra body). As forças de propulsão são denotadas como P_d e P_e , com suas respectivas decomposições (em todo texto, para todas as variáveis, o subíndice 'd' refere-se ao lado direito da plataforma e o subíndice 'e' refere-se ao lado esquerdo). Os ângulos ϕ, θ e ψ são respectivamente os ângulos de arfagem, rolagem e guinada da plataforma nos eixos X_0, Y_0 e Z_0 .

Foram feitas as seguintes considerações na concepção do modelo dinâmico da plataforma.

- **Estrutura como corpo rígido:** Na modelagem do sistema, optou-se por considerar a estrutura da plataforma como corpo rígido. As torções e flexões envolvidas não afetam significativamente a cinemática e a dinâmica da plataforma;
- **Tempo de resposta dos servos:** Os servos motores utilizados nesse trabalho possuem tempo de resposta de 0.22 segundos para um deslocamento de 0 a 60 graus. Dessa maneira, optou-se então por desprezar esse tempo de resposta, considerando para fins de modelagem que o seu comportamento é instantâneo para mudança de posição;
- **Graus de liberdade dos movimentos dos motores:** Os motores de propulsão possuem apenas um grau de liberdade em relação a plataforma, fazendo movimentações angulares em uma linha colinear ao eixo y da plataforma. As decomposição de forças decorrentes da propulsão sempre estarão no eixo Z e X do referencial fixo da plataforma. Isso pode ser visto no diagrama da Figura 3.1;
- **Momento de Inércia dos motores durante a movimentação pelos servo motores:** Considera-se que o momento de inércia dos motores em relação a plataforma é nula. Os motivo para isso se deve ao maior momento de inércia da plataforma em relação aos motores;
- **Centro de gravidade e centro de massa coincidentes:** Considera-se nesse trabalho

que o centro de massa e o centro de gravidade são coincidentes. Ele está em um ponto em que existe simetria da plataforma nos eixos x, y e z;

- **Sentidos dos giros dos motores:** O sentido de giro dos motores de propulsão foi colocado em oposição (um motor girando no sentido horário e o outro girando em sentido anti-horário). Isso é necessário para que os momentos oriundos do giro dos motores sejam cancelados possibilitando que seja possível a estabilização do sistema;

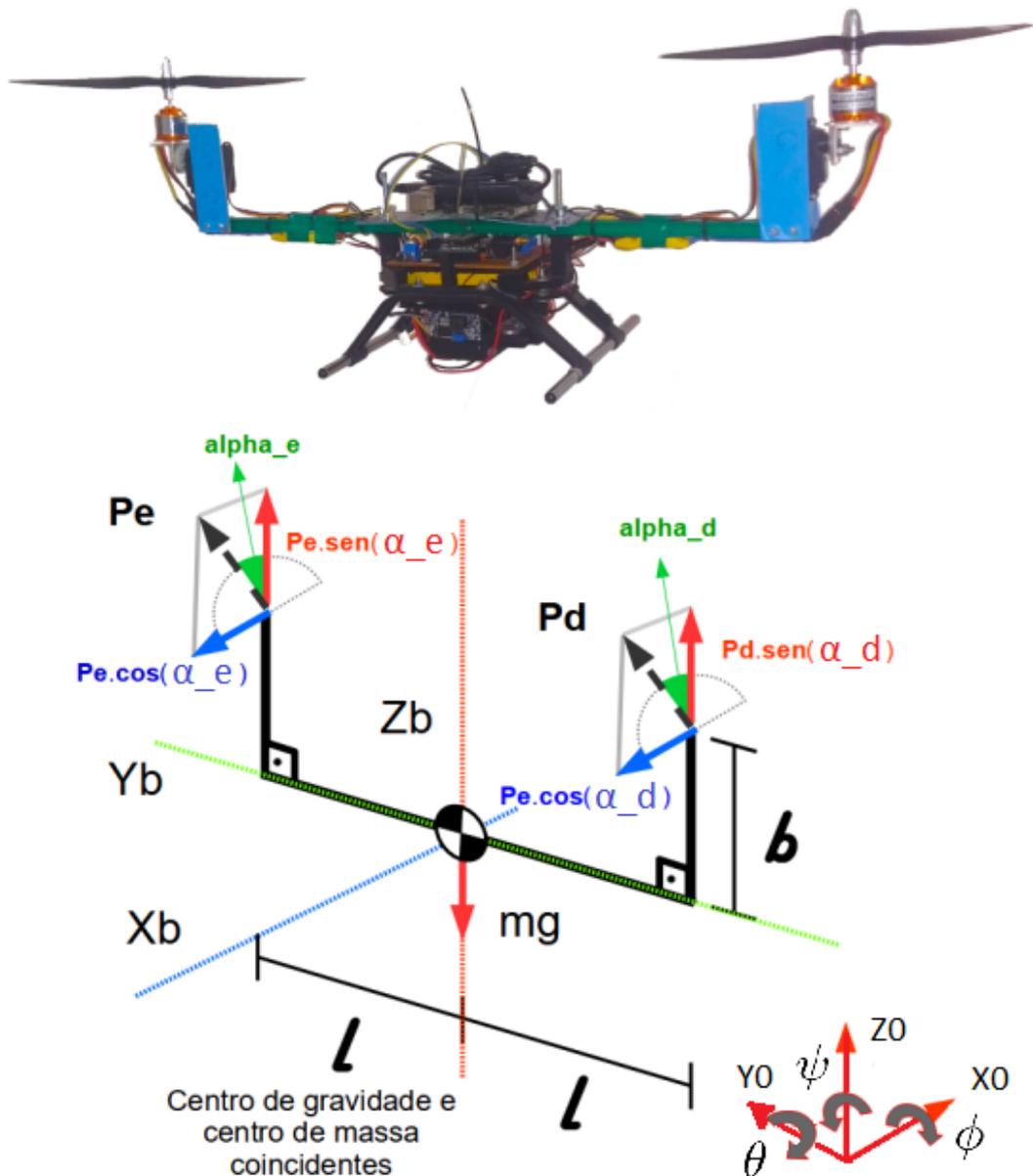


Figure 3.1 – Diagrama de corpo livre do Tiltrotor

O desenvolvimento do modelo dinâmico é realizado através das equações de 3.1 a 3.9.

Aplica-se a segunda lei de Newton em conjunto com um vetor R (Matriz de rotação) obtendo-se as forças presentes na plataforma. As equações que descrevem os momentos são dados pelo produto vetorial da matriz de Inércia com as velocidades angulares da plataforma em relação ao referencial fixo ao corpo. A variável τ nas equações se referem aos momentos devido as forças presentes no corpo.

As forças P_d e P_e (ver Figura 3.1) são provenientes do giro das hélices de cada motor. A força devido ao peso sempre tem sua orientação colinear ao eixo Z_0 do sistema referencial terrestre. As variáveis P_{dx} , P_{dz} , P_{ex} , P_{ez} denotam respectivamente as forças P_d e P_e decompostas nos eixos x e z .

$$P_{dz} = k_f \Omega_d^2 \cos \alpha_d, \quad (3.1)$$

$$P_{ez} = k_f \Omega_e^2 \cos \alpha_e, \quad (3.2)$$

$$P_{dx} = k_f \Omega_d^2 \sin \alpha_d, \quad (3.3)$$

$$P_{ex} = k_f \Omega_e^2 \sin \alpha_e, \quad (3.4)$$

$$P = mg. \quad (3.5)$$

O símbolo α denota o ângulo de posição dos propulsores. O símbolo Ω denota velocidade angular do giro da hélice e k_f a constante aerodinâmica referente a tração da hélice. A equação 3.6 descreve a resultante de forças no eixo Z_0 da plataforma.

$$m\dot{v}_z^e = -mg + (-\sin \theta)(P_{dx} + P_{ex}) + (\cos \phi \cos \theta)(P_{dz} + P_{ez}). \quad (3.6)$$

Os momentos τ_B inerentes as forças da plataforma estão descritos nas equações de 3.7 a 3.9:

$$I_{xx}\dot{w}_{bx} = w_{by}w_{bz}(I_{yy} - I_{zz}) + l(P_{dz} - P_{ez}), \quad (3.7)$$

$$I_{yy}\dot{w}_{by} = w_{bz}w_{bx}(I_{zz} - I_{xx}) + b(P_{dx} + P_{ex}), \quad (3.8)$$

$$I_{zz}\dot{w}_{bz} = w_{bx}w_{by}(I_{xx} - I_{yy}) + l(P_{dx} - P_{ex}). \quad (3.9)$$

Os momentos de Inércia da Plataforma foram obtidos através do software SolidWorks (Figura 3.2):

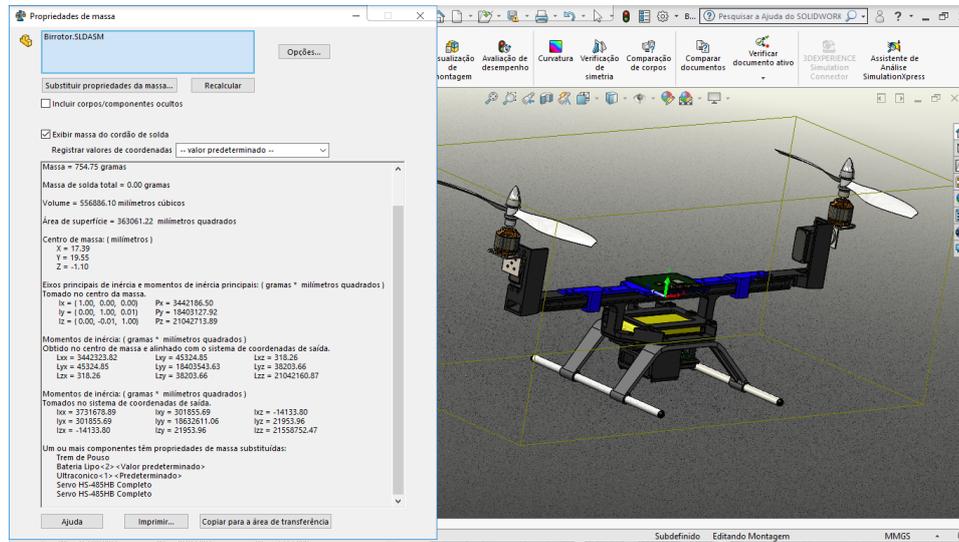


Figure 3.2 – Inércias da Plataforma fornecidas pelo SolidWorks

As constantes utilizadas nos sistemas foram determinadas através de simulação no Solidworks ou medidas com instrumentos de medição métricos (todos em unidades S.I.), conforme Tabela 3.1:

Table 3.1 – Estimativa de parâmetros da plataforma

Parâmetro	Valor	Obtenção
Massa (Kg)	1,112	Medido
I_{xx} (g x mm ²)	3731678,89	Software
I_{yy} (g x mm ²)	18632611,06	Software
I_{zz} (g x mm ²)	21558752,47	Software
l (m)	0,266	Medido
b (m)	0,06	Medido

3.2 IMPLEMENTAÇÃO DA PLANTA EM SIMULINK

Realizou-se a implementação da planta em simulink (Figura 3.3) a fim de verificar seu comportamento dinâmico de maneira preliminar e para validação do modelo desenvolvido. Foi utilizado o software Simulink em conjunto com o Matlab para criação de blocos de funções, que fornecem um ambiente de simulação numérica.

Para a descrição da planta utilizou-se as equações de forças no eixo Z_0 da plataforma em conjunto com as equações de momento, utilizando-se também as relações de Euler para uma

obtenção completa das variáveis de estados do sistema.

Uma breve descrição dos blocos de simulação vem a seguir:

1. **Bloco FZ:** Bloco referente a equação 3.6, que descreve a relação de forças no eixo Z da plataforma;
2. **Bloco MX, MY, MZ:** Bloco referente as Equações 3.7, 3.8 e 3.9 que descrevem a relação de momentos em cada um dos eixos cartesianos a referencial fixo na plataforma. O bloco omega_r não é utilizado nesse trabalho, mas foi implementado para acrescentar ao sistema uma modelagem do torque induzido dos motores;
3. **Bloco EULER:** Bloco com as equações de atitude de EULER;

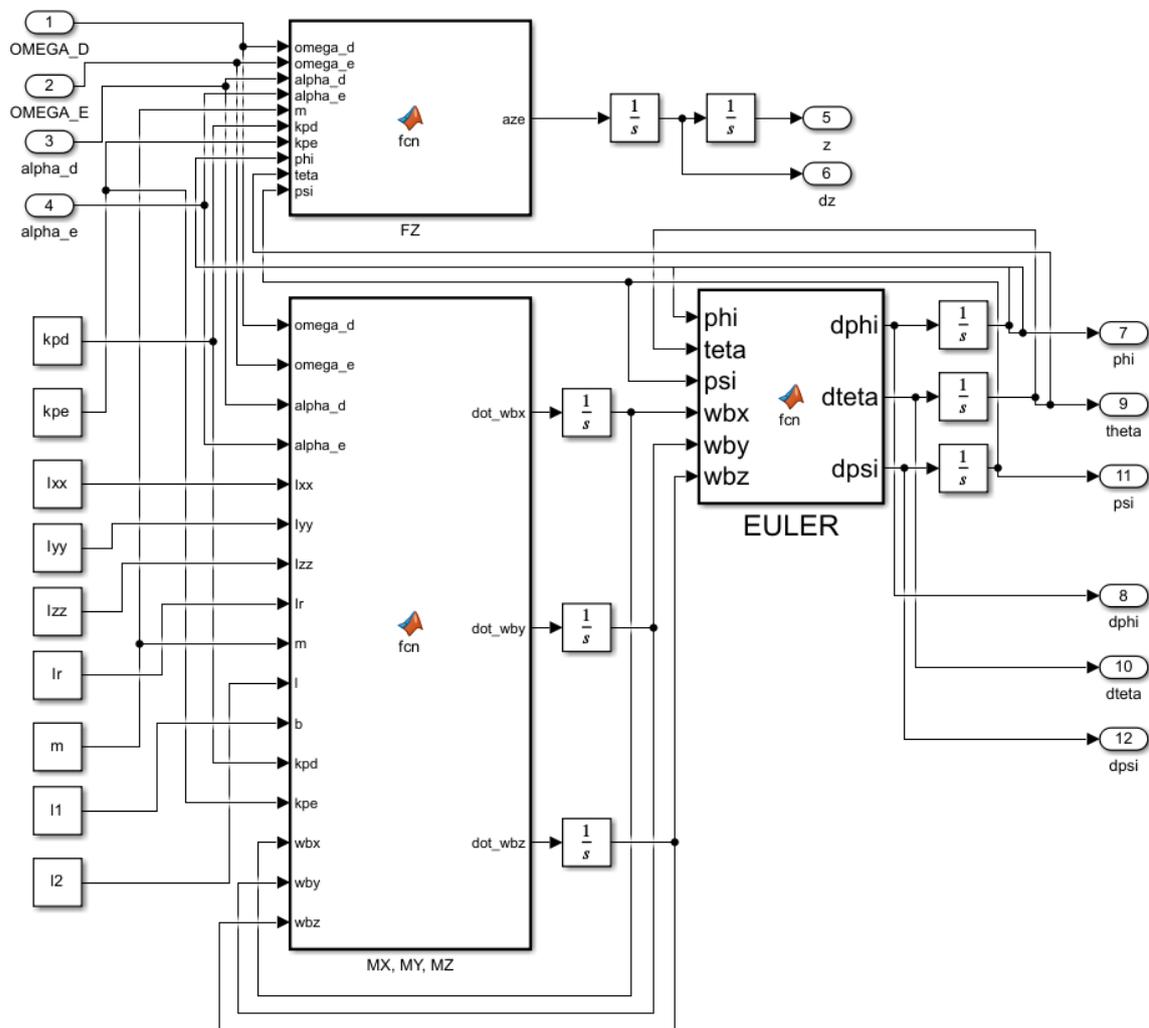


Figure 3.3 – Diagrama da planta do Tiltrotor feita em Simulink

3.3 MODELO PARA PROPULSÃO

Classifica-se como hélice todo dispositivo composto por perfis aerodinâmicos rotacionando em conjunto com o mesmo centro. Essa rotação por sua vez gera uma força comumente chamada de propulsão. Existem algumas explicações quanto a geração da força de sustentação de um perfil aerodinâmico. Uma delas é que o deslocamento do perfil pelo ar gera uma diferença de pressão entre suas faces ocasionando na geração de uma força orientada da região de maior pressão para a região de menor pressão.

Segundo [43], a força realizada por uma hélice é proporcional ao quadrado da velocidade angular de sua rotação multiplicada por constantes relacionadas a aspectos aerodinâmicos. Dessa maneira, iremos usar como modelo matemático das hélices da equação 3.10:

$$F = \rho A C_T (\Omega R)^2 = \kappa_f \Omega^2 \quad (3.10)$$

Em que cada coeficiente é descrito a seguir:



Figure 3.4 – Coeficientes de tração e momento devido ao arrasto da hélice

A variável F denota a força gerada por uma hélice. A constante k_f é a constante de força e encapsula todos os aspectos físicos do fenômeno descrito. Por fim, essas constantes podem ser obtidas através de ensaios estáticos e/ou ensaios em túneis de vento.

A curva de tração utilizada neste trabalho leva em conta o caso estático de propulsão, em que o motor está parado gerando uma curva de força dependente somente das rotações e de fatores inerentes a densidade do ar. Nesse trabalho considera-se que a velocidade do ar em direção ao plano da hélice é zero, visto que a plataforma fará apenas pequenas movimentações para se equilibrar.

Para a estimativa de k_f , realizou-se um ensaio estático da hélice, que consiste em verificar

as forças exercidas pelo grupo motopropulsor para um conjunto de velocidades de rotação. O conjunto de propulsão utilizado na plataforma tiltrotor possui a seguinte configuração:

Amperagem do ESC's	Hélice utilizada	Motor	Bateria
30A	10x45"	Turnigy D2830-1000KV	LIPO 3s 2200 25C

Table 3.2 – Especificações dos componentes do sistema

3.4 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA DO MOTOR DE PROPULSÃO

A estimativa de k_f (equação 3.10) é realizada através de um ensaio estático da hélice realizando os seguintes passos:

1. Instalou-se o motor sobre uma balança, observando uma distância razoável para que o fluxo de saída da hélice não gerasse turbulência na região de entrada;
2. Determinou-se um conjunto de comandos PWM para obter-se as respectivas rotações correspondentes através de um tacógrafo. Procurou-se fazer a média de três medidas. Para cada tentativa, registrou-se o valor registrado pela balança. A estrutura montada para o ensaio pode ser visto na Figura 3.5;

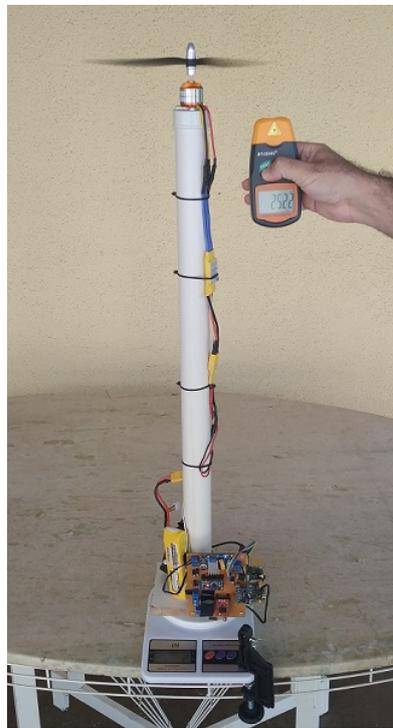


Figure 3.5 – Forças referentes ao empuxo da Hélice (Fonte: [1])

O valores obtidos podem ser vistos na Tabela 3.3.

Table 3.3 – Tabela da força de tração de uma hélice através do ensaio estático

Velocidade de Rotação (rad/s)	Tração Média (kgf)	Tração (N)
172,508	0,033	0,327
258,309	0,075	0,735
319,395	0,112	1,095
365,821	0,160	1,569
407,011	0,200	1,965
465,514	0,262	2,573
486,947	0,288	2,828
500,560	0,313	3,073
544,543	0,377	3,694
570,758	0,423	4,151
626,573	0,530	5,198
642,281	0,553	5,426
651,008	0,577	5,655
692,547	0,693	6,799

Destaca-se que procurou-se durante todo o experimento manter as mesmas condições para todas os dados colhidos, em vista que a identificação fosse próxima da situação na qual os propulsores estão em temperatura ambiente, e a plataforma com a bateria 100% carregada. Plotou-se então o gráfico da Figura 3.6, fazendo em seguida uma regressão dos dados para um polinômio de segundo grau. O valor obtido de k_f foi de **0.0000196**.

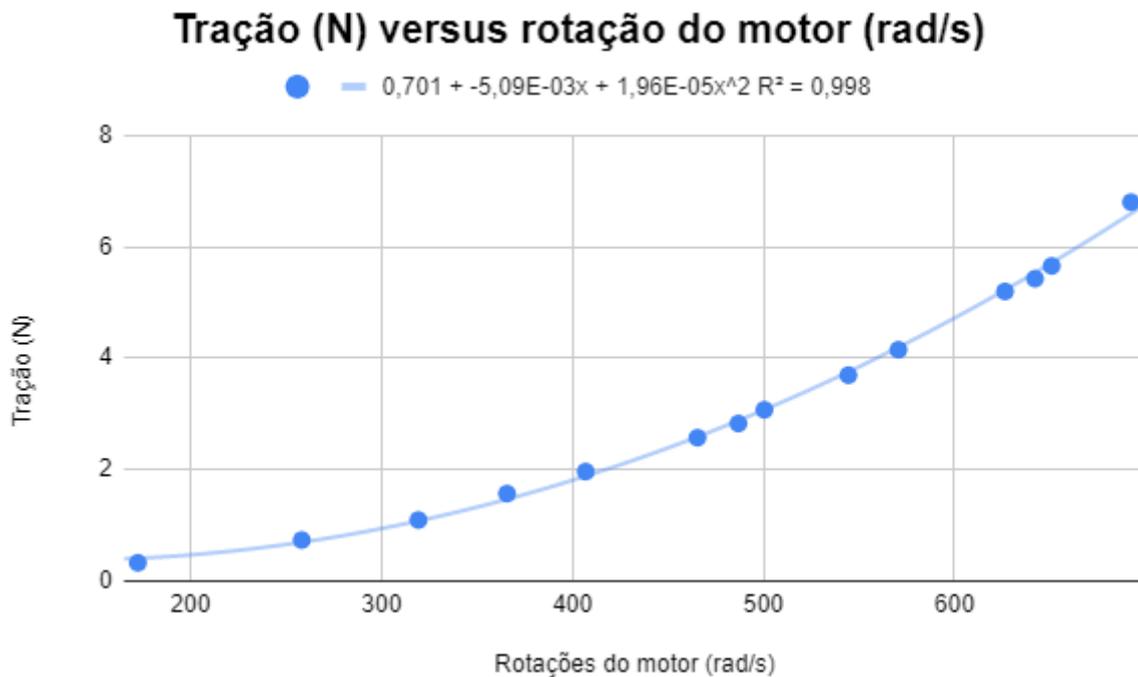


Figure 3.6 – Gráfico da tração da hélice

3.5 O PROBLEMA DA PROPULSÃO NÃO HOMOGÊNEA

Durante os experimentos de bancada, observou-se que apesar dos dois motores da plataforma serem idênticos (mesma marca, modelo e especificações), quando gerados sinais de PWM de entrada idênticos, as suas velocidades de rotação se apresentavam diferentes. Essa observação foi feita utilizando um tacômetro. Esse aspecto não era possível de ser observado por inspeção simples, e foi notado durante o teste de controle para a movimentação de rolagem da plataforma, o qual apresentou comportamento aparente de desbalanceamento de forças.

Os motores utilizados neste trabalho são para uso em aeromodelos recreativos. Sua fabricação não possui faixa de tolerância de fabricação satisfatória para esse tipo de aplicação. Além disso, eles não são fabricados para trabalhar em pares, como no caso de motores para quadricópteros. Além disso, eles operam em malha aberta, sem que haja controle da velocidade de rotação. O dados coletados podem ser vistos na Tabela 3.4.

Table 3.4 – Relação de sinal PWM com as rotações dos motores

RPM	Veloc. (rad/s)	Motor Dir. PWM	Motor Esq. PWM	Tração (N)
4500	471,239	1600	1560	3,133
5000	523,599	1690	1640	3,783
5500	575,959	1795	1745	4,432
6000	628,318	1860	1810	5,081
6500	680,678	1930	1870	5,731

Foram então realizadas regressões lineares dos dados da relação entre a escala PWM e da força de cada motor para avaliação da diferença de propulsão. As equações obtidas estão descritas em 3.11 e 3.12. O índice R das equações se refere a correlação da regressão linear dos dados obtidos do ensaio estático da hélice.

$$\text{Motor Direito: } 11 + (-0,0154)x + 6,58 \times 10^{-6}x^2 \quad R^2 = 1 \quad (3.11)$$

$$\text{Motor Esquerdo: } 13,5 + (-0,0189)x + 7,88 \times 10^{-6}x^2 \quad R^2 = 1 \quad (3.12)$$

Continuando a análise, realizou-se um comparativo para a resposta do motor para um mesmo PWM, a partir das equações obtidas através de regressão linear. A diferença do comportamento dos propulsores pode ser vista na Tabela 3.5 e no gráfico 3.7. Nota-se no gráfico 3.7 que na medida que se aumenta a velocidade de rotação dos propulsores, a diferença entre eles também aumenta. Não se utilizou um modelo de primeira ordem para o motor devido a relevante variação dos seus parâmetros ao longo da sua operação, como a variação da fonte de energia, variação de temperatura do motor, e pequenas deformações na estrutura da hélice.

Table 3.5 – Relação entre PWM e Tração dos Motores

PWM	Tração Motor Direito (N)	Tração Motor Esquerdo (N)
1600	3,2048	3,4328
1650	3,50405	3,7683
1700	3,8362	4,1432
1750	4,20125	4,5575
1800	4,5992	5,0112
1850	5,03005	5,5043
1900	5,4938	6,0368
1950	5,99045	6,6087
2000	6,52	7,22

Motor Direito e Motor Esquerdo

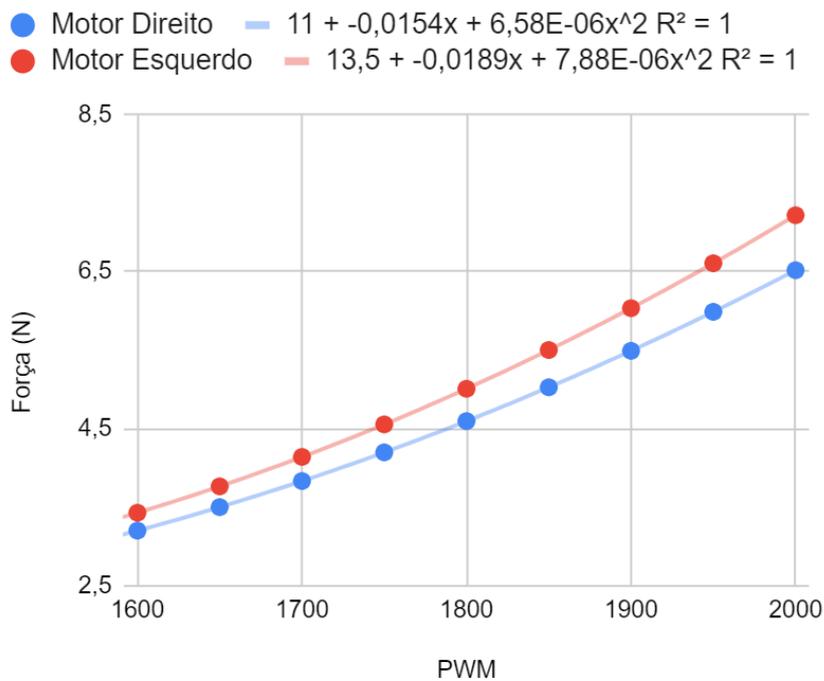


Figure 3.7 – Curvas de propulsão

Observando-se o gráfico 3.7, nota-se que a relação entre PWM e a força do motor também é um polinômio de grau 2. Por esse motivo, pode-se utilizar a equação 3.10 para modelagem de propulsão, estendendo sua abrangência de aspectos físicos além dos aspecto aerodinâmicos. Procura-se nesse trabalho avançar na solução do problema da não homogeneidade de propulsão do Tiltrotor Bimotor, situação na qual as curvas de tração que descrevem o comportamento dos propulsores são diferentes, e também, de não se conhecer exatamente a planta, uma vez que a identificação dos componentes de maneira individualizada não necessariamente corresponde a uma identificação exata dos componentes interagindo em conjunto.

4

PROJETO DE CONTROLE

Neste capítulo serão apresentados dois projetos de controle para estabilização de atitude e controle de altitude para um tiltrotor bimotor com propulsão não homogênea. A primeira proposta é composta por uma abordagem que utiliza a inversa do modelo dinâmico em conjunto com equações cinemáticas de corpos rígidos e controladores PID's. Os controles PID por sua vez são sintonizados utilizando a técnica de reinforcement learning TD3. A segunda proposta trata-se de uma solução utilizando uma modelagem em espaço de estados, com alocação robusta de polos sendo feita com auxílio de LMI's.

4.1 PROJETO DE CONTROLE UTILIZANDO RL TD3

Seguindo a estratégia de controle de [11], vamos obter a inversa do modelo dinâmico. Em análise, observa-se que o modelo é sub-atuado com 12 graus de liberdade para 4 variáveis de entrada (Ω_d (velocidade de rotação do motor direito), Ω_e (velocidade de rotação do motor esquerdo), α_d (ângulo de tilt do motor direito), α_e (ângulo de tilt motor esquerdo)), e 4 variáveis para controle ϕ , θ , ψ (ângulos de Euler) e z_0 (altitude). Escolheu-se como arquitetura de controle o seguinte projeto, presente na figura 4.1.

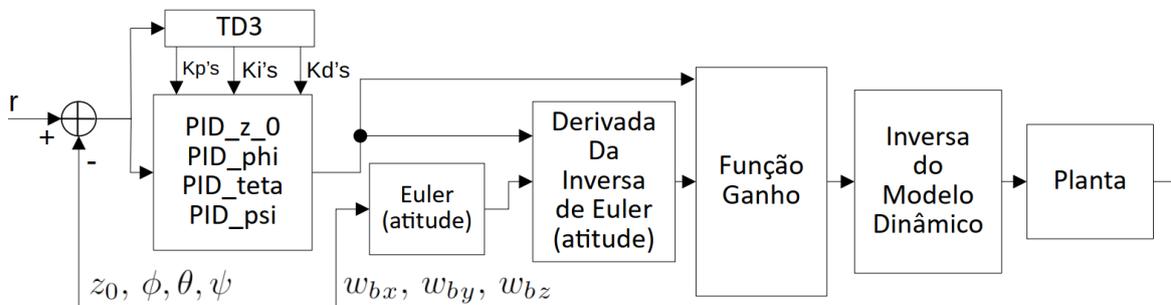


Figure 4.1 – Diagrama de blocos do projeto de controle

Deseja-se avaliar se com o uso do TD3 é possível alcançar os seguintes resultados de controle da plataforma tiltrotor bimotor:

- Procura-se que a resposta ao degrau para os ângulos de atitude tenha tempo de subida 90% menor que 0,8 segundos. Para altitude, menor que 1,5 segundos. Além disso, deseja-se que a UP% dessas respostas estejam abaixo de 7%. Em caráter qualitativo, deseja-se também avaliar o comportamento do controle para sinais periódicos com ruídos;

- Deseja-se também comparar o desempenho da técnica de sintonia utilizando TD3 em vista da sintonia Ziegler-Nichols;

Um dos sub-objetivos da proposta é obter uma inversa linear do modelo dinâmico do sistema. Em seguida, utilizando-se equações cinemáticas para o corpos rígidos, deseja-se obter subsistemas de equações que permitam realizar o controle de atitude e altitude do sistema através de ações de controle de velocidade. Em seguida, utiliza-se controles PID para cada variável de controle (ϕ , θ , ψ e z_0). O desenvolvimento de cada bloco de controle pode ser visualizado nas seções que se seguem. Por fim, por haver desacoplamento entre as equações que descrevem o modelo em cada eixo de atitude, treina-se a rede TD3 para cada variável de controle de interesse de maneira independente. Uma vez treinada a rede, obtém-se os ganhos do PID relativo aos pesos da rede, substituindo-se a rede pelo controlador PID devidamente sintonizado. Isso é feito para cada variável de controle até que se finalize todas as sintonias.

4.1.1 Obtenção da Inversa do modelo dinâmico

A inversa é desenvolvida a partir das equações 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9. As variáveis M_{x_0} , M_{y_0} , M_{z_0} e F_{z_0} são respectivamente os momentos resultantes nos eixos x_0 , y_0 e z_0 e o somatório de forças resultantes no eixo z_0 . Procura-se então inverter essas equações. Nesse trabalho as entradas das plantas são as rotações dos motores e os ângulos de tilt. A vantagem de utilizar-se a inversa do modelo se deve a possibilidade de realizar o ajuste dos controladores de maneira desacoplada, sem que seja necessário um ajuste conjunto dos controles para os eixos de atitude e altitude simultaneamente.

Inicia-se considerando apenas as forças de tração da hélice como atuantes na plataforma, descartando-se todas as outras, utilizando-se um referencial fixo no corpo. As equações que descrevem a dinâmica da plataforma tiltrotor ficam então na forma das equações 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 que descrevem apenas as forças geradas pela plataforma, excluindo-se as forças externas:

$$M_x = l \cdot (P_{dz} - P_{ez}), \quad (4.1)$$

$$M_y = b \cdot (P_{dx} + P_{ex}), \quad (4.2)$$

$$M_z = l \cdot (P_{dx} - P_{ex}), \quad (4.3)$$

$$F_z = (P_{dz} + P_{ez}). \quad (4.4)$$

Verifica-se então três equações de momento e uma equação do somatório de forças em z_0 da plataforma. Os momentos são o resultado do conjunto de forças geradas pelas quatro

entradas do sistema (P_{dz} , P_{ez} , P_{dx} e P_{ex}). Desenvolvendo as equações, temos:

$$\begin{aligned}\frac{M_y}{b} &= P_{dx} + P_{ex}, \\ \frac{M_z}{l} &= P_{dx} - P_{ex}, \\ \frac{M_y}{b} + \frac{M_z}{l} &= 2 \cdot P_{dx}, \\ P_{dx} &= 0.5 \cdot \left(\frac{M_y}{b} + \frac{M_z}{l} \right),\end{aligned}\tag{4.5}$$

logo,

$$\begin{aligned}\frac{M_y}{b} &= 0.5 \cdot \left(\frac{M_y}{b} + \frac{M_z}{l} \right) + P_{ex}, \\ P_{ex} &= 0.5 \cdot \left(\frac{M_y}{b} - \frac{M_z}{l} \right).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Analisando-se:

$$\begin{aligned}F_z &= P_{dz} + P_{ez}, \\ \frac{M_x}{l} &= P_{dz} - P_{ez}, \\ \frac{M_x}{l} + F_z &= 2 \cdot P_{dz}, \\ P_{dz} &= 0.5 \cdot \left(\frac{M_x}{l} + F_z \right),\end{aligned}\tag{4.7}$$

logo:

$$\begin{aligned}F_z &= P_{dz} + P_{ez}, \\ F_z &= 0.5 \cdot \left(\frac{M_x}{l} + F_z \right) + P_{ez}, \\ P_{ez} &= 0.5 \cdot F_z - 0.5 \cdot \frac{M_x}{l}, \\ P_{ez} &= 0.5 \cdot \left(F_z - \frac{M_x}{l} \right).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Como se trata de vetores ortogonais, o modulo dos vetores P_e e P_d podem ser calculando usando a Equação :

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},\tag{4.9}$$

obtendo-se:

$$P_d = 0.5 \cdot \sqrt{\left(\frac{M_z}{l} + \frac{M_y}{b} \right)^2 + \left(F_z - \frac{M_x}{l} \right)^2},\tag{4.10}$$

$$P_e = 0.5 \cdot \sqrt{\left(\frac{M_y}{b} - \frac{M_z}{l}\right)^2 + \left(F_z + \frac{M_x}{l}\right)^2}. \quad (4.11)$$

Devido a situação de propulsão não homogênea, substitui-se o k_f único presente nos modelos das duas unidades propulsoras por k_{pd} e k_{pe} , para assim passar a representá-las individualmente, cada qual com seu comportamento, chamando-as de constante de propulsão do motor direito e esquerdo, respectivamente.

Diante disso, temos então as equações 4.12 e 4.13:

$$P_d = k_{pd} \cdot \Omega_d^2, \quad (4.12)$$

$$P_e = k_{pe} \cdot \Omega_e^2. \quad (4.13)$$

Para obtenção dos ângulos de entrada, utilizou-se a função atan2 que nos retorna o arco tangente das componentes das forças mapeadas em cada quadrante. Segue-se a descrição da função:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \text{indefinido} & \text{se } x = 0 \text{ e } y = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Por fim, as equações que descrevem a inversa do modelo dinâmico seguem abaixo:

$$\Omega_d = \sqrt{\frac{1}{2k_{pd}} \sqrt{\left(\frac{M_z}{l} + \frac{M_y}{b}\right)^2 + \left(F_z - \frac{M_x}{l}\right)^2}}, \quad (4.15)$$

$$\Omega_e = \sqrt{\frac{1}{2k_{pe}} \sqrt{\left(\frac{M_y}{b} - \frac{M_z}{l}\right)^2 + \left(F_z + \frac{M_x}{l}\right)^2}}, \quad (4.16)$$

$$\alpha_d = \text{atan2}\left(\frac{M_z}{l} + \frac{M_y}{b}, F_z - \frac{M_x}{l}\right), \quad (4.17)$$

$$\alpha_e = \text{atan2}\left(\frac{M_y}{b} - \frac{M_z}{l}, F_z + \frac{M_x}{l}\right). \quad (4.18)$$

4.1.2 Função de ganho para conversão de acelerações em Força e Momentos

A função de ganho consiste em transformar as acelerações angulares e a aceleração linear em z_0 em momentos e força. Seu objetivo dentro do fluxo de controle é fornecer para a inversa da planta o estado atual dos momentos e da aceleração no sistema no eixo Z_0 a fim de estimar as entradas posteriormente. Os valores de ganho são a massa da plataforma e os momentos de inércia nos três eixos do referencial inercial.

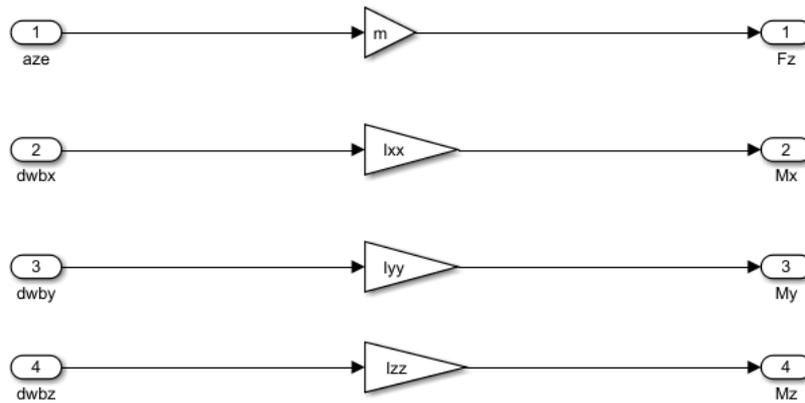


Figure 4.2 – Função de ganho (Conversão de acelerações para Momentos e Força)

4.2 UMA ABORDAGEM UTILIZANDO AS EQUAÇÕES DE EULER

Nesta etapa, procura-se obter as acelerações angulares dos eixos x, y e z fixos ao corpo. O primeiro passo a realizar para a obtenção dessas acelerações é inverter o conjunto de equações que descrevem os ângulos de Euler. Dessa maneira, realizando a inversão das equações 2.2, 2.3 e 2.4 temos em 4.19 a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Os passos a seguir é uma estratégia usada em [44], em que se deriva as relações de 4.19 obtendo um conjunto de equações que retornam as acelerações angulares presentes nos eixos

do referencial fixo ao corpo:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_{bx} &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\theta) \\
\dot{\omega}_{by} &= \dot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) + \dot{\varphi} \dot{\phi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\phi) \sin(\theta) \\
\dot{\omega}_{bz} &= -\dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\phi) \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Adequando o resultado de 4.20 para uma aplicação de controle, denota-se que a velocidades dos ângulos de Euler como entradas das equações de aceleração angular nos eixos fixos ao corpo. Denota-se essas entradas como u , rotulando-as com o índice respectivo a cada ângulo.

$$\begin{aligned}
\dot{w}_{bx} &= u_{\phi} - u_{\varphi} \sin(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\theta) \\
\dot{w}_{by} &= u_{\theta} \cos(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) + u_{\varphi} \sin(\phi) \cos(\theta) + \dot{\varphi} \dot{\phi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\phi) \sin(\theta) \\
\dot{w}_{bz} &= -u_{\theta} \sin(\phi) - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi) + u_{\varphi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\theta) - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\phi) \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.2.1 Projeto de controladores PID para atitude e altitude

Utilizou-se inicialmente para esse projeto controladores PD (Proporcional Derivativo) conforme descrito nas equações (4.22) a (4.25). Temos 4 variáveis para controle ϕ , θ , ψ (ângulos de Euler) e z_0 (altitude), com suas respectivas variáveis de referência, onde se adiciona-se o subíndice r . O controlador de altitude possui uma constante $F_{planeio}$, que tem por objetivo ajustar o controlador para manter a plataforma pairando sobre o ar quando atingir as referências desejadas.

$$u_{\phi} = k_{p\phi} (\phi_r - \phi) + k_{d\phi} (\dot{\phi}_r - \dot{\phi}), \tag{4.22}$$

$$u_{\theta} = k_{p\theta} (\theta_r - \theta) + k_{d\theta} (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}), \tag{4.23}$$

$$u_{\psi} = k_{p\psi} (\psi_r - \psi) + k_{d\psi} (\dot{\psi}_r - \dot{\psi}), \tag{4.24}$$

$$u_{z_0} = k_{pz_0} (z_{0r} - z_0) + k_{dz_0} (\dot{z}_{0r} - \dot{z}_0) + F_{planeio}. \tag{4.25}$$

4.2.2 Alteração do controlador para PID sintonizado por TD3

Durante ensaios em bancada, notou-se que para pequenos ângulos o controle PD para rolagem (ϕ) não conseguia zerar o erro. Para pequenas variações de massa, o mesmo ocorre para altitude. Por esse motivo, escolheu-se utilizar controladores PID's para resolver o problema de erro estacionário.

As saturação das entradas da planta foram configurados na faixa de 300 rad/s até 650

rad/s para a rotação dos motores, e para os ângulos de tilt, -1,0472 e 1,0472 rad (-60° e 60°).

A equação do controlador PID discreto é dada por:

$$U(z) = K_p E(z) + K_i \frac{T_s}{1 - z^{-1}} E(z) + K_d \frac{1}{T_s} \frac{z - 1}{z} E(z) \quad (4.26)$$

em que:

- $U(z)$ é a transformada Z do sinal de controle;
- $E(z)$ é a transformada Z do erro $e[k]$;
- K_p , K_i e K_d são os ganhos proporcionais, integrais e derivativos, respectivamente;
- T_s é o intervalo de tempo discreto entre amostras.

4.3 FUNÇÕES DE RECOMPENSA PARA O ALGORITMO DE APRENDIZAGEM TD3

Foram utilizadas nesse projeto de controle duas funções de recompensa, descritas em 4.27 e 4.28. O agente procura maximizar a recompensa, e assim, minimizar o erro de rastreamento. A equação de recompensa 4.27 é a norma quadrada do erro, e ela se mostra útil devido a lidar com as inversões de sinais durante o rastreamento. A equação de recompensa 4.28 procura ter maior gradiente de maximização da recompensa em função do erro.

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{T} \int_0^T ((H_{ref} - y(t))^2) dt \right), \quad (4.27)$$

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \exp \left(\frac{y(t)}{H_{ref}} \right) - e \right|, \quad (4.28)$$

em que:

- H_{ref} é a referência,
- $y(t)$ é a saída do sistema no tempo t ,
- \mathbb{E} denota o valor esperado.

4.4 IMPLEMENTAÇÃO EM SIMULINK DO PROJETO DE CONTROLE E TREINO DO TD3

Para implementação do TD3, foi utilizado o Reinforcement Learning Toolbox do Simulink, configurado conforme o diagrama disposto na Figura 4.3. Foi utilizado para simulação um computador Intel(R) Core(TM) i7-6500U, com frequência de processamento de 2.59 GHz, tendo 8 GB de memória RAM. O agente RL recebe os seguintes parâmetros:

- Observações do comportamento do sistema;
- Função de recompensa em relação as variáveis observadas;
- Função de término do treinamento, que tem o objetivo de terminar o treinamento em caso de obtenção de um valor de máximo global determinado ou chegar ao ponto de extrapolação do número máximo de episódios de treinamento.

O objetivo do treinamento é minimizar a variável de erro durante o rastreamento, utilizando como métrica a função de recompensa para a obtenção de um conjunto de pesos da rede neural que promova esse objetivo. Para realização do treinamento, é efetuada a cada episódio a simulação do rastreamento em vista de pesos pré-configurados pelo usuário.

No nosso caso, foram utilizados como valores iniciais os ganhos dos controladores PD obtidos através do método de sintonia de Ziegler Nichols. Esses valores são transformados em pesos da rede profunda do TD3. A cada episódio, os pesos são alterados, e por conseguinte, os ganhos do controlador. É determinada uma quantidade máxima de episódios em que os valores de recompensa gerados permanecem em uma determinada faixa desejada, sendo uma das condições de parada do treinamento. A outra condição é a de atingimento do número máximo de episódios. Para esse projeto, todo o treinamento foi realizado para controladores no tempo discreto.

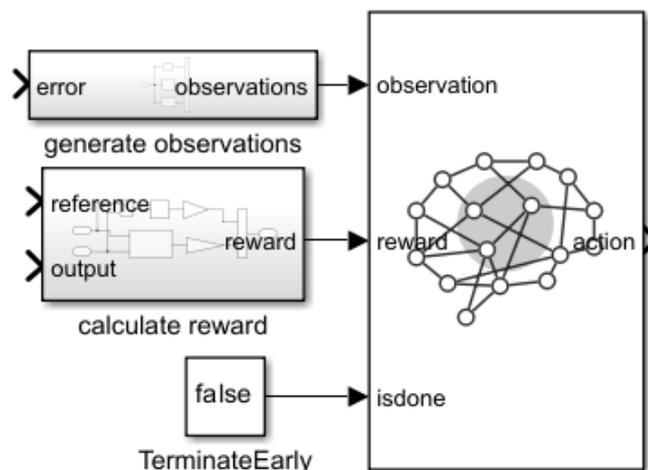


Figure 4.3 – TD3 implementado no Simulink

Para o problema em estudo, as observações realizadas levaram-se em conta os termos de um controlador PID tradicional: o erro, a integral do erro e a derivada do erro, conforme pode ser visto na Figura 4.4. Para cada observação, existe um conjunto de pesos presentes na rede profunda que se associa a cada ganho do PID.

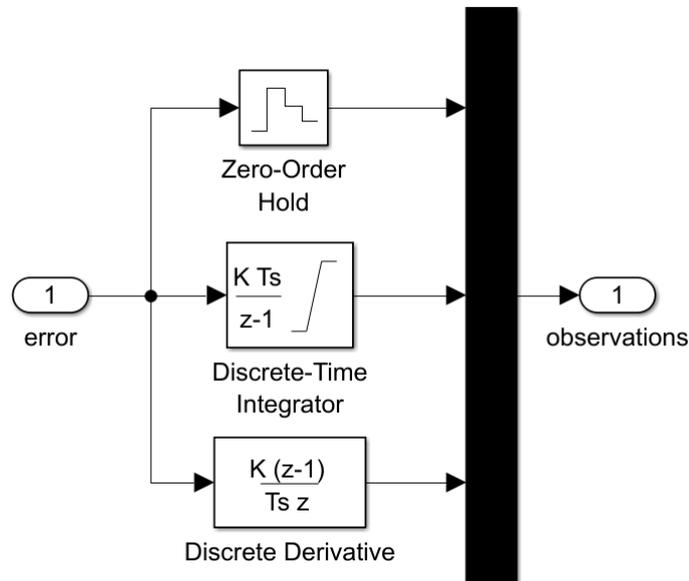


Figure 4.4 – Observações

Conforme exposto na seção 4.3, estudaremos dois tipos de recompensas, os quais foram implementados conforme exposto na Figura 4.5. O principal fator para a escolha dessas funções de recompensas para nosso problema se deve a velocidade da progressão da recompensa. Não apenas se quer que o valor da recompensa auxilie a alcançar o menor valor de erro, mas também que sua velocidade de minimização seja rápida durante o progresso. Esse aspecto acaba por ocasionar um conjunto de pesos da rede profunda que propiciam desempenho conservadores ou não dos controladores obtidos durante os treinamentos.

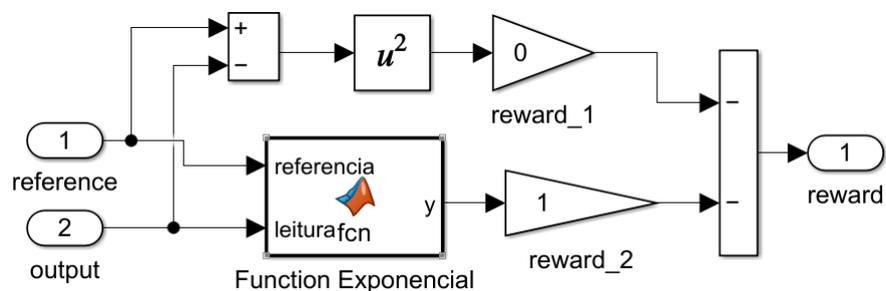


Figure 4.5 – Recompensas

As redes do agente TD3 foram configuradas conforme a figura 4.6. Foi criada uma rede neural profunda com duas entradas (uma referente a observação, e outra referente a ação atual) e uma saída (ação futura).

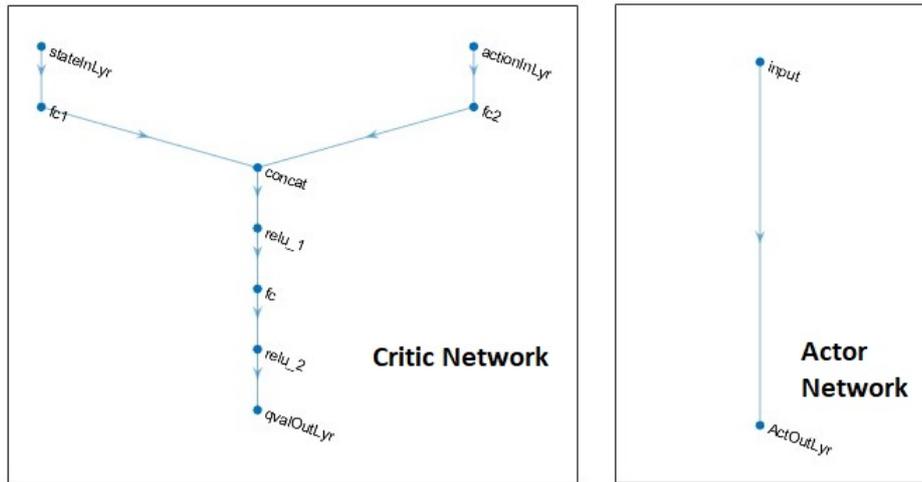


Figure 4.6 – Redes Critica e Ator (fc (Fully Conected), relu (Rectified Linear Unit) e concat (concatenação))

O termos fc (Fully Conected), relu (Rectified Linear Unit) e concat na 4.6 se referem respectivamente a um camada onde todos os neurônios estão conectados, função de ativação, e operação para combinar tensores. Por fim, foram adicionadas blocos de saturação a fim de respeitar os limites de atuação da plataforma. A implementação final do projeto de controle, incluindo o treinamento do algoritmo TD3, pode ser vista na Figura 4.7. Levando-se em conta o efeito da gravidade no controle de altitude da plataforma, adicionou-se um valor constante de 9.8107 na ação de controle a fim de estabelecer um ponto de operação ao qual o controle deverá atuar. O bloco PID desconectado na figura 4.7 se deve ao fato de a rede neural realizar o papel do controlador PID durante o treinamento, obtendo-se ao final ganhos para que o controlador PID se comporte como a rede treinada.

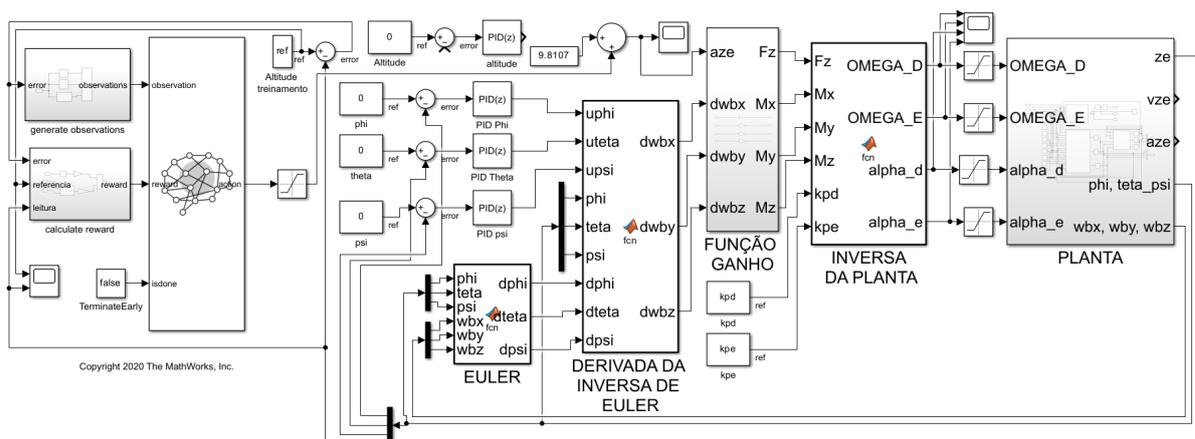


Figure 4.7 – Diagrama de simulação implementado em Simulink para treino da rede para sintonia do controlador

4.5 CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS UTILIZANDO LMI'S

Propõe-se como segunda proposta um projeto feito em espaço de estados utilizando Linear Matrix Inequality (LMI). Pretende-se realizar um projeto em espaço de estado linear, uma vez que se dispõe de um vasto conjunto de ferramentas consolidadas disponíveis para a construção de soluções de controle. O controle ótimo por LMI se mostrou uma opção interessante devido a alocação robusta de polos, situação que permitirá rejeitar incertezas e perturbações relativos ao sistema de controle. A arquitetura de controle proposta está presente na figura 4.8.

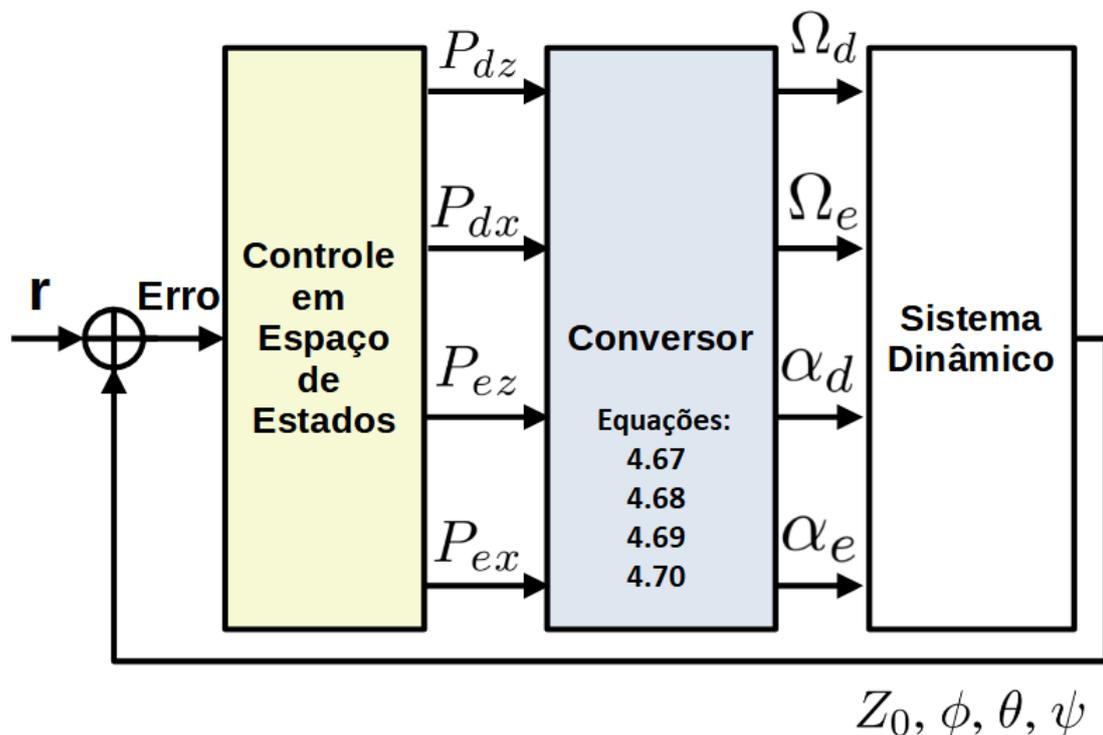


Figure 4.8 – Proposta de controle em espaço de estados

Ela se mostra interessante por permitir que se possa trabalhar apenas com termos lineares dentro do modelo em espaço de estados, passando toda parte não linear para o bloco conversor, que realizará a conversão das forças de atuação em termos de velocidades de rotação de propulsão e ângulos de tilt, entradas do nosso sistema. Outro ponto positivo dessa abordagem se deve a possibilidade de realizar ajustes de refinamento especificamente nos parâmetros dos propulsores, sem que seja necessário alterar todo o projeto realizado em espaço de estados.

4.6 MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Iniciará a modelagem realizando o diagrama de corpo livre em relação a um referencial fixo na plataforma, conforme Figura 4.9.

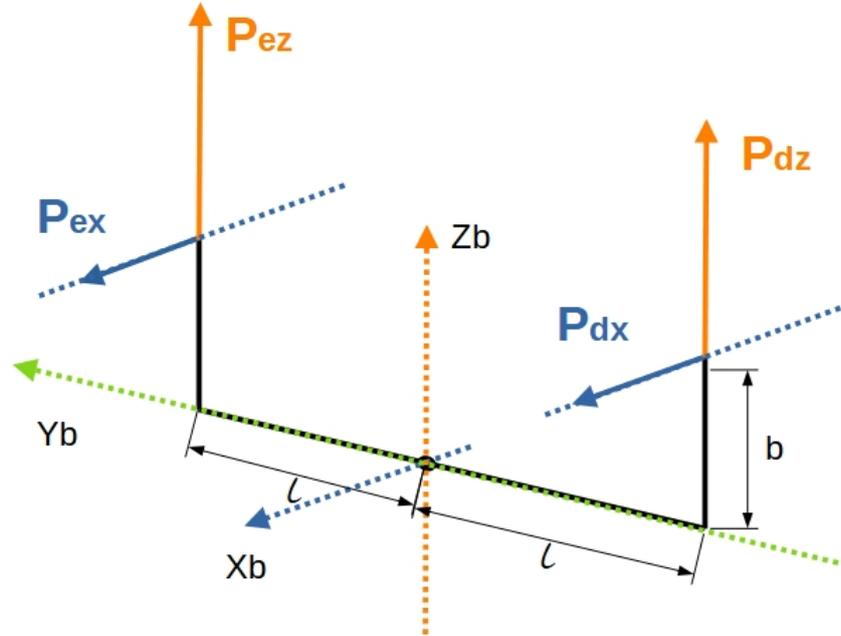


Figure 4.9 – Diagrama de blocos - Referencial fixo ao corpo

Além disso, assumirá as seguintes hipóteses em relação a cinemática da plataforma:

$$w_{bx} = \dot{\phi}, \quad (4.29)$$

$$w_{by} = \dot{\theta}, \quad (4.30)$$

$$w_{bz} = \dot{\psi}. \quad (4.31)$$

Podemos então descrever as equações 3.7 a 3.9 da seguinte forma:

$$\ddot{\phi} = \frac{(I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi}}{I_{xx}} + \frac{l}{I_{xx}}(P_{dz} - P_{ez}), \quad (4.32)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(I_{zz} - I_{xx})\dot{\phi}\dot{\psi}}{I_{yy}} + \frac{b}{I_{yy}}(P_{dx} + P_{ex}), \quad (4.33)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{(I_{xx} - I_{yy})\dot{\phi}\dot{\theta}}{I_{zz}} + \frac{l}{I_{zz}}(P_{dx} - P_{ex}). \quad (4.34)$$

A expansão de Taylor de primeira ordem foi utilizada para os termos $\sin(x)$ e $\cos(x)$ nas

equações, sendo aplicada em torno de 0° para linearizar o modelo, com x representando as variáveis ϕ , θ e ψ . Reescrevendo as equações 3.6 de altitude e as equações 4.32 a 4.34 de atitude, temos:

$$m\dot{v}_z^e = -mg + P_{dz} + P_{ez}, \quad (4.35)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{l}{I_{xx}}(P_{dz} - P_{ez}), \quad (4.36)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{b}{I_{yy}}(P_{dx} + P_{ex}), \quad (4.37)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{l}{I_{zz}}(P_{dx} - P_{ex}). \quad (4.38)$$

Após a linearização, escreve-se o sistema de equações lineares em termos de modelagem em espaço de estados, conforme equações 4.39 e 4.40:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.39)$$

$$y = Cx, \quad (4.40)$$

onde:

x = vetor de estados da planta (vetor n-dimensional),

u = sinal de controle,

y = sinal de saída.

Com o foco é em estabilização de atitude e controle de altitude, mas pensando em uma implementação futura visando variáveis de navegação (x_0 e y_0), vamos construir a matriz A com as dimensões necessárias para uma implementação futura. O vetor de estados x é dado por:

$$x^t = \left[x_0 \quad v_{x0} \quad y_0 \quad v_{y0} \quad z_0 \quad v_{z0} \quad \phi \quad \omega_\phi \quad \theta \quad \omega_\theta \quad \psi \quad \omega_\psi \right], \quad (4.41)$$

e os elementos da matriz A são dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

A matriz de entrada B é dada por

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_7 & 0 & b_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_8 & 0 & b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_9 & 0 & -b_9 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

As constantes utilizadas no modelo estão presentes na Tabela 4.1:

Table 4.1 – Valores dos coeficientes do sistema

a_1	b_6	b_7	b_8	b_9	k_f
$-\frac{g}{x}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{l}{I_{xx}}$	$\frac{b}{I_{yy}}$	$\frac{l}{I_{zz}}$	const.
-9.806	0.909	7.169×10^5	3.22×10^6	1.233×10^7	1.96×10^{-5}

O vetor de entrada u é dado por

$$u = \begin{bmatrix} P_{dz} \\ P_{dx} \\ P_{ez} \\ P_{ex} \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

A matriz de saída C é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

com o vetor de saída y dado por

$$y = \begin{bmatrix} z_0 \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

A representação proposta em espaço de estados considera como entradas as forças decompostas dos motores. Para implementação em um microcontrolador, é necessário que as entradas sejam descritas em termos das velocidades de rotação dos motores e de seus ângulos de posição. Essas equações serão descritas nos passos futuros.

4.7 ARQUITETURA DE CONTROLE EM ESPAÇO DE ESTADOS

A arquitetura de controle proposta para este problema pode ser vista na Figura 4.10.

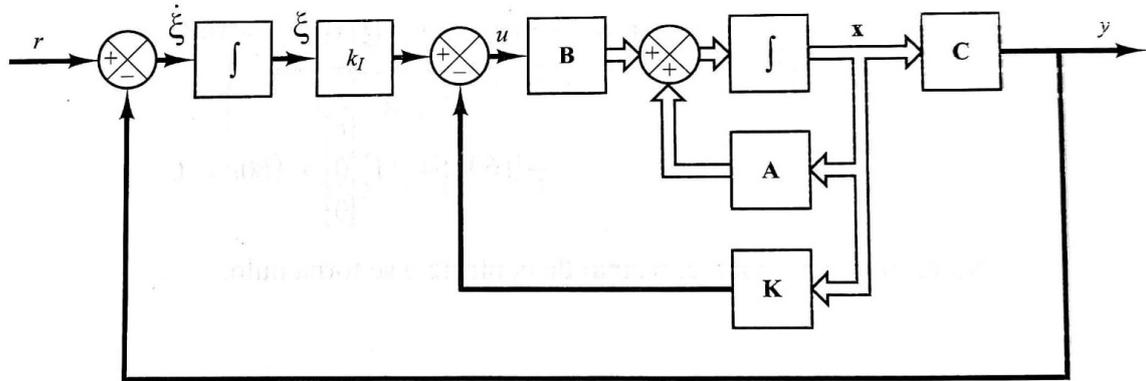


Figure 4.10 – Sistema de controle onde a planta é ampliada com um integrador (Ogata, 2010)

A seguinte configuração de controle foi utilizada:

$$u = -K_p x + K_i \xi, \quad (4.47)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx, \quad (4.48)$$

onde ξ é a saída do integrador e r é o sinal de entrada de referência. As equações de estado podem ser colocadas de forma compacta como mostrado em 4.49.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}}_{\dot{x}_a} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{A_a} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} \underbrace{\begin{bmatrix} K_p & K_i \end{bmatrix}}_{K_a} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}}_{x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{E_a} r \quad (4.49)$$

Nesta representação, o problema a ser resolvido consiste em determinar a matriz K_a tal que o seguinte sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Uma formulação dessa descrição segue na equação 4.50.

$$\dot{x}_a = (A_a - B_a K_a) x_a + E_a r \quad (4.50)$$

Sugere-se essa configuração em vista dos 16 ganhos acoplados na ação integral do controlador, o que atenuará diferenças entre o modelo e o sistema real, incluindo a situação de propulsão não homogênea.

A expansão do sistema é realizada, sendo estendido para incluir variáveis de estado para os erros de z , ϕ , θ e ψ . As matrizes aumentadas são denotadas como A_a , B_a e C_a . A_a torna-se um sistema 16×16 . O sistema de controle completo foi implementado em Simulink,

conforme mostrado na Figura 4.12. As matrizes A_a , B_a e K_p e K_i são descritas a seguir:

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_7 & 0 & b_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_8 & 0 & b_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_9 & 0 & -b_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} kp_{1,1} & kp_{1,2} & kp_{1,3} & kp_{1,4} & kp_{1,5} & kp_{1,6} & kp_{1,7} & kp_{1,8} \\ kp_{2,1} & kp_{2,2} & kp_{2,3} & kp_{2,4} & kp_{2,5} & kp_{2,6} & kp_{2,7} & kp_{2,8} \\ kp_{3,1} & kp_{3,2} & kp_{3,3} & kp_{3,4} & kp_{3,5} & kp_{3,6} & kp_{3,7} & kp_{3,8} \\ kp_{4,1} & kp_{4,2} & kp_{4,3} & kp_{4,4} & kp_{4,5} & kp_{4,6} & kp_{4,7} & kp_{4,8} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$K_i = \begin{bmatrix} ki_{1,9} & ki_{1,10} & ki_{1,11} & ki_{1,12} \\ ki_{2,9} & ki_{2,10} & ki_{2,11} & ki_{2,12} \\ ki_{3,9} & ki_{3,10} & ki_{3,11} & ki_{3,12} \\ ki_{4,9} & ki_{4,10} & ki_{4,11} & ki_{4,12} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

4.7.1 Controle H_∞ com Ação Integral

Por fim, para finalizar o projeto da solução proposta em 4.50, buscamos adicionar ao controlador um componente que rejeite perturbações e/ou dinâmicas não modeladas. Na plataforma tiltrotor, um problema existente é a situação de propulsão não homogênea, em que a constante k_f é diferente para cada propulsor. Isto cria um desequilíbrio de forças, fazendo com que a plataforma fique instável.

Por este motivo, a arquitetura 4.49 será modificada, adicionando o componente w e a matriz de ponderação D1 para modelar a diferença na constante de propulsão como dinâmica não modelada. Temos então:

- Faixa vertical definida pelas linhas $-\alpha$ e $-\beta$:

$$\begin{cases} A_a W_1 + W_1 A_a^T + B_a W_2 + W_2^T B_a^T + 2\alpha W_1 < 0 \\ -A_a W_1 - W_1 A_a^T - B_a W_2 - W_2^T B_a^T - 2\beta W_1 < 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

- Restrições no setor cônico:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)L_{11} & \text{cos}(\theta)L_{12} \\ \text{cos}(\theta)L_{21} & \text{sen}(\theta)L_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.62)$$

onde:

$$L_{11} = A_a W_1 + W_1 A_a^T + B_a W_2 + W_2^T B_a^T, \quad (4.63)$$

$$L_{12} = A_a W_1 - W_1 A_a^T + B_a W_2 - W_2^T B_a^T, \quad (4.64)$$

$$L_{21} = -A_a W_1 + W_1 A_a^T - B_a W_2 + W_2^T B_a^T, \quad (4.65)$$

$$L_{22} = A_a W_1 + W_1 A_a^T + B_a W_2 + W_2^T B_a^T. \quad (4.66)$$

O região delimitada no domínio complexo terá o seguinte formato, conforme figura 4.11:

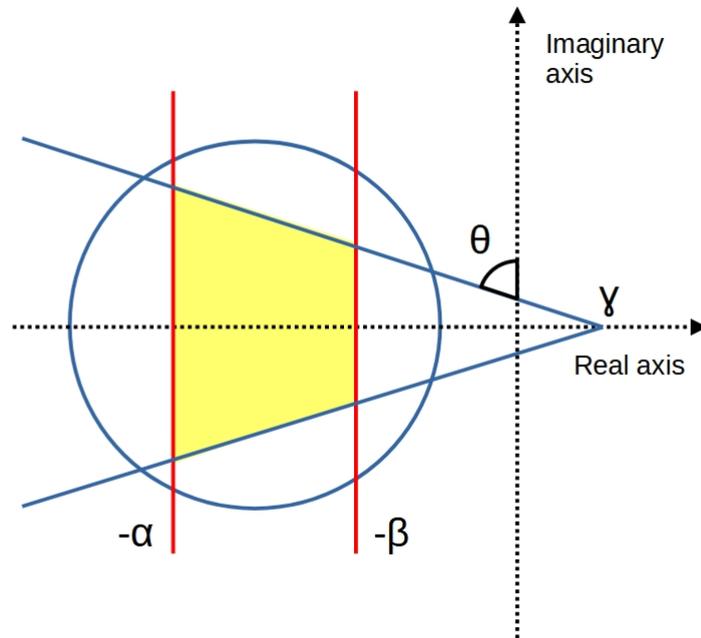


Figure 4.11 – Diagrama de simulação implementado em Simulink para treino da rede para sintonia do controlador

O ganho \mathcal{H}_∞ ideal é calculado a partir da solução do problema 4.58 como $K_a = W_2 W_1^{-1}$

e a norma \mathcal{H}_∞ associada é dada por $\|T_{wz}(s)\|_\infty = \gamma$. Assim, além do ganho ótimo H_{inf} , o requisito de alocação de pólos do sistema em malha fechada também é atendido.

Uma breve descrição do algoritmo de otimização segue em Algoritmo 2:

Algorithm 2 Otimização com Restrições LMI e Cálculo do Controlador Ótimo

- 1: **Passo 1: Inicialização das Variáveis**
 - 2: Definir as matrizes estendidas:
 - 3: $A_a \leftarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$, $B_a \leftarrow \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_a \leftarrow [C \ 0]$
 - 4: $K_{\text{optimal}} \leftarrow 0$
 - 5: Inicializar as variáveis de decisão:
 - 6: $W_1 \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ (simétrica), $W_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 16}$, $\gamma \in \mathbb{R}$
 - 7: Definir parâmetros:
 - 8: $\alpha \leftarrow 9$, $\beta \leftarrow 10$, $\theta \leftarrow \frac{\pi}{4}$
 - 9: **Passo 2: Formulação da LMI Principal**
 - 10: $LMI_0 \leftarrow \begin{bmatrix} A_a W_1 + W_1 A_a' + B_a W_2 + W_2' B_a' & B_a & W_1 C_a' \\ & B_a' & D_1' \\ & C W_1' & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0$
 - 11: **Passo 3: Restrições na Faixa Vertical**
 - 12: $LMI_1 \leftarrow A_a W_1 + W_1 A_a' + B_a W_2 + W_2' B_a' + 2\alpha W_1 \leq 0$
 - 13: $LMI_2 \leftarrow -A_a W_1 - W_1 A_a' - B_a W_2 - W_2' B_a' - 2\beta W_1 \leq 0$
 - 14: **Passo 4: Restrições no Setor Cônico**
 - 15: $L_{11} \leftarrow -A_a W_1 + W_1 A_a^T + B_a W_2 + W_2^T B_a^T$
 - 16: $L_{12} \leftarrow -A_a W_1 - W_1 A_a^T + B_a W_2 - W_2^T B_a^T$
 - 17: $L_{21} \leftarrow -A_a W_1 + W_1 A_a^T - B_a W_2 + W_2^T B_a^T$
 - 18: $L_{22} \leftarrow -A_a W_1 - W_1 A_a^T + B_a W_2 + W_2^T B_a^T$
 - 19: $LMI_3 \leftarrow \begin{bmatrix} \sin(\theta)(L_{11}) & \cos(\theta)(L_{12}) \\ \cos(\theta)(L_{21}) & \sin(\theta)(L_{22}) \end{bmatrix} \leq 0$
 - 20: **Passo 5: Restrição completa**
 - 21: $LMI \leftarrow \{LMI_0 \leq 0, W_1 \geq 0, LMI_1, LMI_2, LMI_3\}$
 - 22: **Passo 6: Resolver o Problema de Otimização**
 - 23: Aplicação de algoritmo de otimização SDP.
 - 24: **Passo 7: Calcular o Ganho Ótimo do Controlador**
 - 25: $K_a \leftarrow W_2^{\text{opt}} (W_1^{\text{opt}})^{-1}$
 - 26: **end.**
-

4.8 IMPLEMENTAÇÃO EM AMBIENTE DE SIMULAÇÃO

Para esse controle, utilizaremos apenas um k_f na estrutura de controle para ambos os motores, sendo que o controlador em espaço de estados se adapte à diferença de propulsão do sistema real sem a necessidade de identificação individual de cada propulsor. Nos blocos Ω_d e Ω_e da Figura 4.12, usaremos apenas um valor para k_f , projetando que no sistema real eles serão diferentes, mas o controlador em espaço de estados irá mitigar os desbalanceio de forças devido a diferença de propulsão.

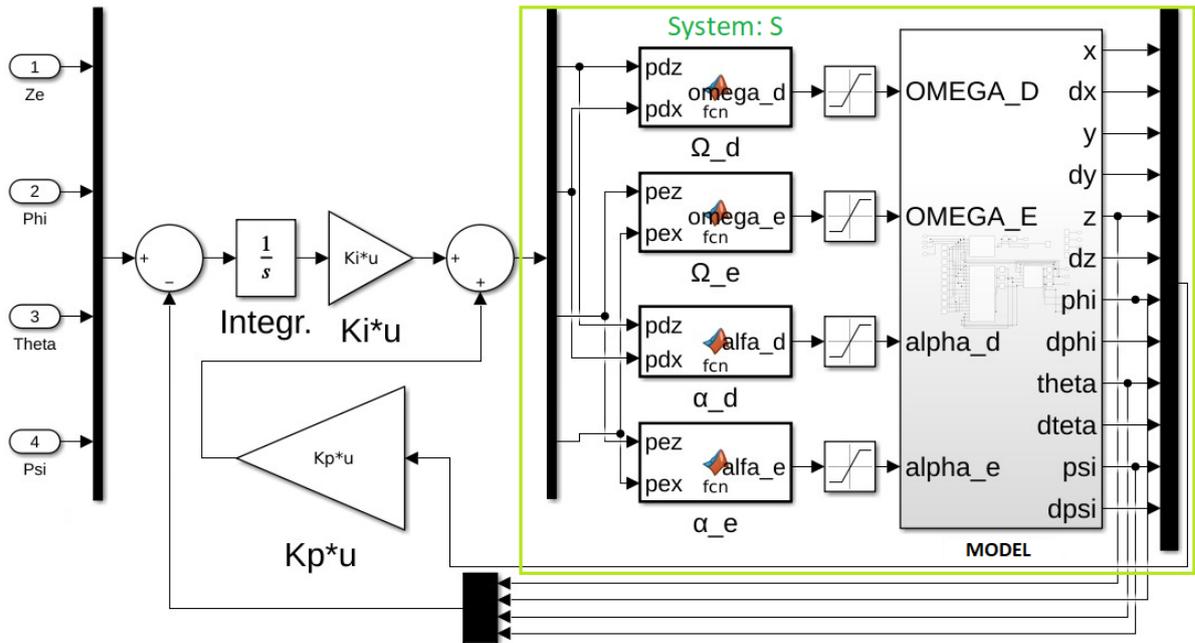


Figure 4.12 – Implementação em Simulink do controle utilizando LMI

Os valores dos saturadores aplicados na saída do controle estão presentes na Tabela 4.2:

Parâmetro	Valor	Unidade
Saturação da rotação dos motores de propulsão	670	rad/s
Saturação dos ângulos de inclinação	23	graus

Table 4.2 – Limites de saturação para velocidade de rotação dos motores e ângulos de tilt.

Por fim, as equações que convertem as forças descompostas em termos de velocidade de rotação e ângulo de tilt podem ser vistas em 4.67, 4.68, 4.69 e 4.70:

$$\Omega_d = \sqrt{\frac{P_{dz}}{k_f \cos(\text{atan2}(P_{dx}, P_{dz}))}}, \quad (4.67)$$

$$\Omega_e = \sqrt{\frac{P_{ez}}{k_f \cos(\text{atan2}(P_{ex}, P_{ez}))}}, \quad (4.68)$$

$$\alpha_d = \text{atan2}(P_{dx}, P_{dz}), \quad (4.69)$$

$$\alpha_e = \text{atan2}(P_{ex}, P_{ez}). \quad (4.70)$$

5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

5.1 CONFIGURAÇÕES DE SIMULAÇÃO PARA SINTONIA COM TD3

Para a sintonia dos controladores utilizando TD3, inicialmente foram utilizados os ganhos obtidos com Ziegler-Nichols como condição inicial para o treinamento. Utilizou-se os hiperparâmetros disponíveis na tabela 5.1. As redes críticas e de atuação estão totalmente conectadas, com duas camadas de aprendizado. A ação de atuação foi limitada com saturadores de 2g para aceleração de altitude e de 15 rad/s² para atitude.

Table 5.1 – Configurações dos Hyperparâmetros

Hyperparameter	Learning rate	Layer1 size	Layer2 size	Policy noise
Valor	0.0001	32	32	0.1

5.1.1 Avaliação da função de recompensa para o caso em estudo

Durante a realização do experimento, considerou-se que o desempenho da função de recompensa 4.27 estava abaixo do esperado, sendo substituída pela função 4.28. Um comparativo dos desempenhos podem ser vista nas figuras 5.1, com ênfase na figura 5.2, e na tabela 5.2.

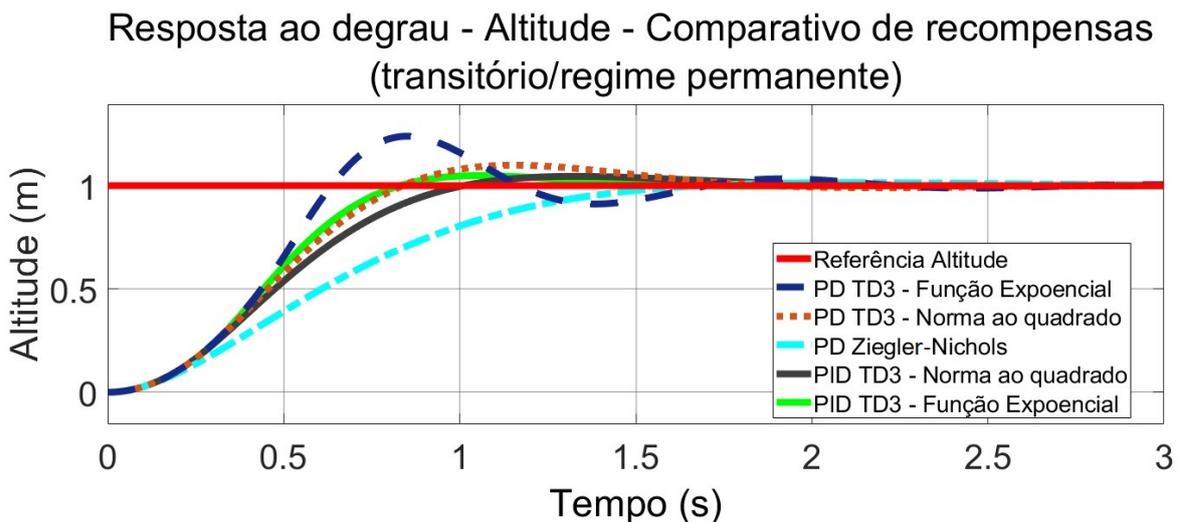


Figure 5.1 – Comparativo da resposta de acordo com a recompensa (motores iguais) - transitório/regime permanente

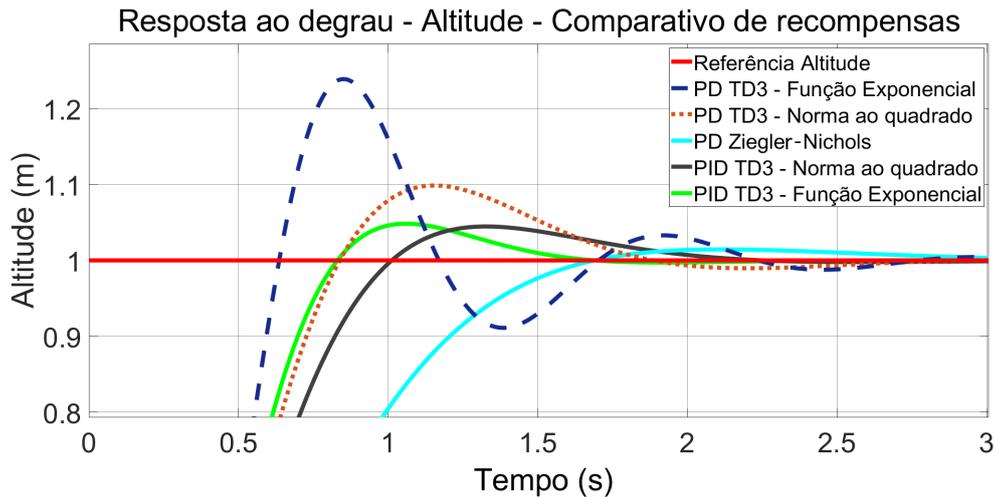


Figure 5.2 – Comparativo da resposta de acordo com a recompensa (motores iguais) - foco na ultrapassagem percentual

Uma primeira análise da Figura 5.2 nos permitir avaliar que a sintonia do PD TD3 - Função Exponencial tem maior aderência a aplicações que necessitam de resposta rápidas, como voos a céu aberto. Por outro lado, a sintonia PID TD3 - Função Exponencial parece mais adequada para aplicações com pouca tolerância para ultrapassagem percentual a resposta, como voos feitos dentro de tubulações.

Table 5.2 – Ganhos e Desempenho dos Controladores - Altitude

	Altitude - Ganhos			Desempenho	
	K_p	K_i	K_d	$U_p \%$	$T_s 90\% (s)$
PD Ziegler Nichols	6.129	-	3.961	0,81%	0,9397
PD TD3 (lu^2)	13,0501	-	4,1910	9,871%	0,727
PD TD3 (Func Exp.)	36,6324	-	3,7584	23,9%	0,5933
PID TD3 (lu^2)	11,7890	0,00029315	4,7403	4,4466%	0,8228
PID TD3 (Func Exp.)	22,5325	0,00024636	6,3168	6,20%	0,683
PID TD3 (Func. Exp.) Motores diferentes	6.6585	0,0026	3.9528	1,869%	1,197

Nota-se que PID TD3 Função Exponencial tem o melhor compromisso em relação aos requisitos de projeto. Por inspeção, nota-se que o termo exponencial possui maior acréscimo de recompensa do que a norma quadrática quando o valor da variável de controle é divergente do sinal de referência. A função exponencial permitiu que o TD3 ajustasse os pesos de maneira mais efetiva a fim encontrar o mínimo local desejado. Foram realizados treinos para cada variável de interesse: altitude, ϕ , θ e ψ . Para as observações utilizou-se o erro, a sua integral e a sua derivada. A rede armazenou e atualizou, a cada interação, os valores de K_p , K_d e K_i . Os ganhos iniciais utilizados para K_p , K_d e K_i foram os valores encontrados

através do método de sintonia de Ziegler-Nichols.

Nas tabela 5.3 e na figura 5.3 pode-se observar os resultados do treinamento em termos das recompensas obtidas a cada episódio. Para a avaliação das funções de recompensa realizou-se um treinamento com 1000 episódios para cada função. Observa-se que a função norma quadrática convergiu mais rapidamente para a faixa de valores onde se encontrava o valor ótimo. Por outro lado, percebe-se uma pequena ineficiência durante o processo de busca entre os episódios 100 e 400 do treinamento.

	Func. Exponencial	Quadratic Norm
Episode reward	-84.1473	-57.899
Average reward	-97.9448	-57.5176
Episode Q0	-85.1909	-27.9444

Table 5.3 – Comparação de métricas de recompensa para diferentes funções

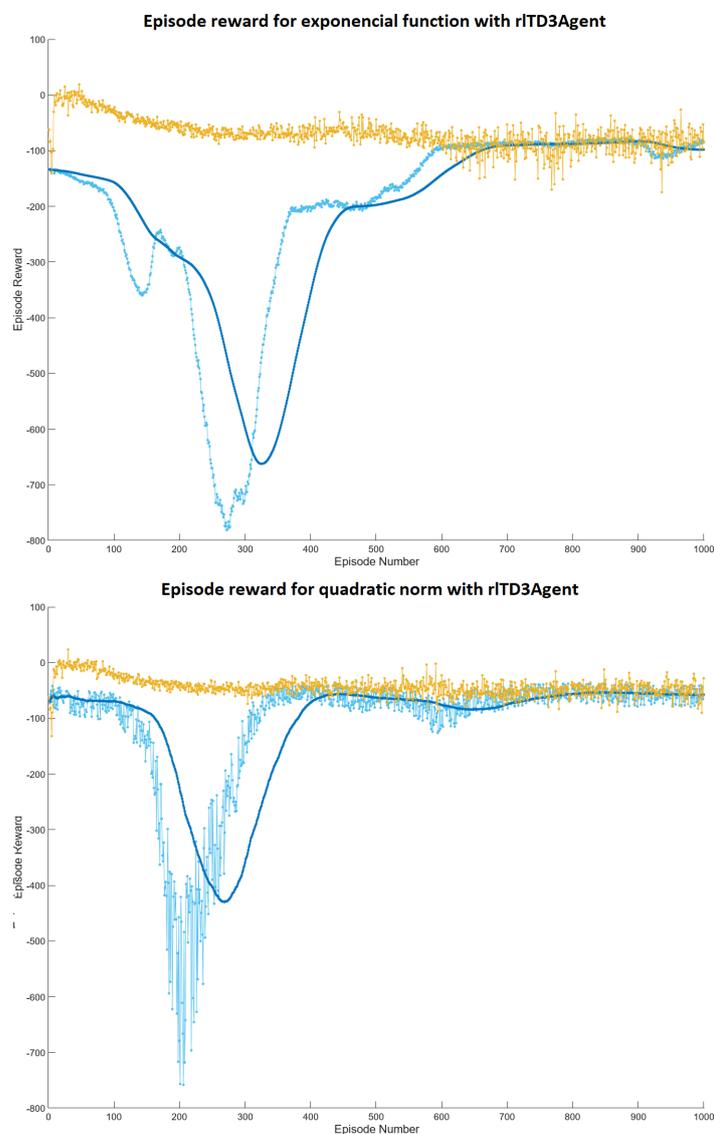


Figure 5.3 – Recompensa para a função exponencial

5.1.2 Controle de Altitude

Para controle de altitude, o treinamento foi realizado com o objetivo de rastreamento de um degrau de referência de 1 metro somando-se a um delta randômico de 40% em torno desse valor. Além disso, realizou-se também treinamento para o caso de propulsão não homogênea, em que o motor esquerdo atuava com uma constante de propulsão 10% menor que o propulsor direito. Achou-se conveniente durante os treinamentos utilizar uma estrutura PID por avaliar que seu desempenho foi melhor devido sua ação integral, conforme pode ser visto na tabela 5.2. As respostas dos controladores obtidos no treinamento podem ser vistas na figura 5.4 utilizando como recompensa a equação exponencial 4.28:

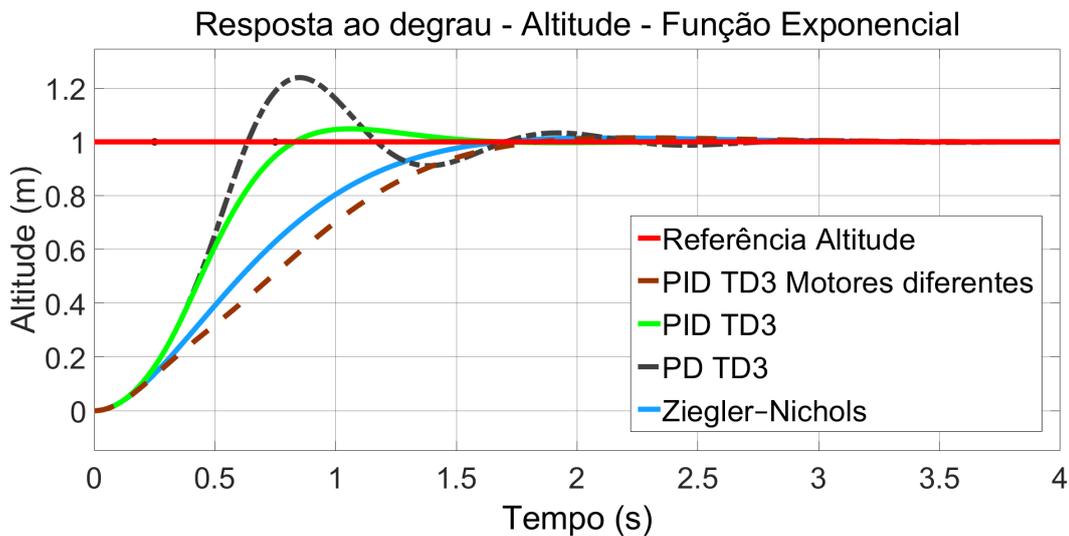


Figure 5.4 – Resposta ao degrau da altitude

5.1.3 Estabilização de atitude

Para estabilização de atitude, os ganhos obtidos podem ser vistos na tabela 5.4. Realizou-se um treinamento para uma referência de 10 graus somando-se com um delta randômico de 23% em torno desse valor. Considerou-se também a existência de ruído gaussiano com variância de 0,1. O desempenho dos controladores podem ser vistos na tabela 5.4. Além disso, assim como no caso de controle de altitude, realizou-se também o treinamento para o caso de propulsão não homogênea, em que o motor esquerdo atuava com uma constante de propulsão 10% menor que o propulsor direito.

Como destaque, observa-se que os valores UP% sofreram relevante influência em relação ao caso em que as propulsões são não homogêneas, com valores de 2 a 4 vezes maiores do que com propulsão homogênea. Isso sugere que o controle possui maior dificuldade de estabilização da plataforma. Por outro lado, esses valores ainda se apresentam satisfatórios visto que não inviabilizam a estabilização da plataforma e o tempo de subida sem mantém

próximo a 0.5 segundo, o que é um bom desempenho.

Table 5.4 – Ganhos e Desempenho dos Controladores - Atitude - Recompensa Função Exponencial

Sintonia / Variável		Atitude - Ganhos			Atitude - Desempenho	
		Kp	Ki	Kd	Up %	Ts 90% (s)
PD Ziegler Nichols	ϕ	27,77	-	8,431	1,008	0,5691
	θ	27,247	-	8,351	1,582	0,5708
	ψ	27,405	-	8,375	1,014	0,5703
PD TD3	ϕ	34,5589	-	8,2844	3,019	0,419
	θ	37,6544	-	9,4701	1,724	0,4446
	ψ	32,8513	-	8,0532	3,092	0,430
PID TD3	ϕ	28,3688	0,000091399	7,6808	2,509	0,4715
	θ	30,1206	0,00032916	8,8979	0,895	0,5218
	ψ	29,4897	0,001	7,7345	2,803	0,4583
PID TD3 Motores diferentes	ϕ	29,6227	0,00015865	8,0606	1,903	0,476
	θ	29,7904	0,000030532	7,5670	4,010	0,4464
	ψ	29,5745	0,0011	7,2748	4,512	0,4311

Por fim, realizou-se uma avaliação qualitativa para ruídos presentes na entrada e saída do controlador. Avalia-se o ruído devido a campos magnéticos que geram pequenas distorções nos sinais de controle. Para os sinais de entradas, vibrações mecânicas na plataforma devido ao giro dos motores de propulsão. Os resultados podem ser observados na figura 5.5. Observa-se que os controladores sintonizados pelo TD3 corrigem um pequeno atraso em regime transitório que existe no controlador sintonizado por Ziegler-Nichols.

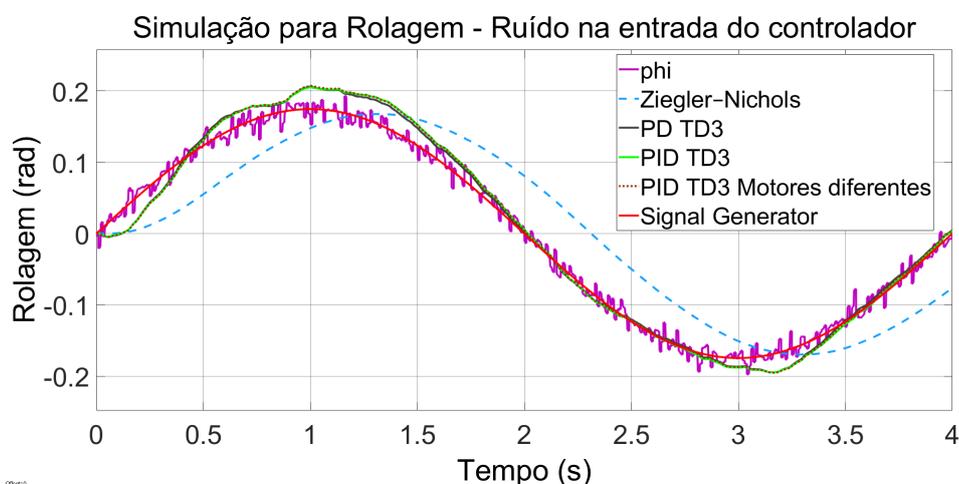


Figure 5.5 – Resposta ao sinal periódico senoidal com ruído branco contínuo normalmente distribuído

5.2 RESULTADOS DO CONTROLE POR LMI

Os polos obtidos em malha fechada pelo Algoritmo 2 são descritos através da Tabela 5.5 e pelo gráfico da figura 5.6. Nota-se que o sistema é estável devido a todos os pólos terem parte real negativa, e os pólos com parte real zero são simples. Entretanto, o polos com parte real nulos indicam que podem haver modos não controlados para o sistema. A menor tolerância encontrada para o problema primal residual (problema original da otimização) foi de $e-13$, o que mostra que a solução é viável, tendo no entanto, pequenas violações de viabilidade das restrições. O mesmo acontece nos problemas dual residual (problemas derivados do problema primal), que apresentam no pior caso um valor de $e-15$. Além disso, os problemas de ID 1 e 4 apresentam condição de dualidade forte, ponto favorável a viabilidade da solução.

ID	Constraint	Primal residual	Dual residual	Tag
1	Matrix inequality	-2.0923e-17	7.5809e-17	LMI0
2	Matrix inequality	-3.8717e-16	1.3303e-15	W1
3	Matrix inequality	-3.7206e-14	2.1152e-15	LMI1
4	Matrix inequality	-8.1097e-15	1.1088e-15	LMI2
5	Matrix inequality	-1.9233e-13	3.4539e-17	LMI3

Table 5.5 – Primal and Dual Residuals for Matrix Inequality Constraints

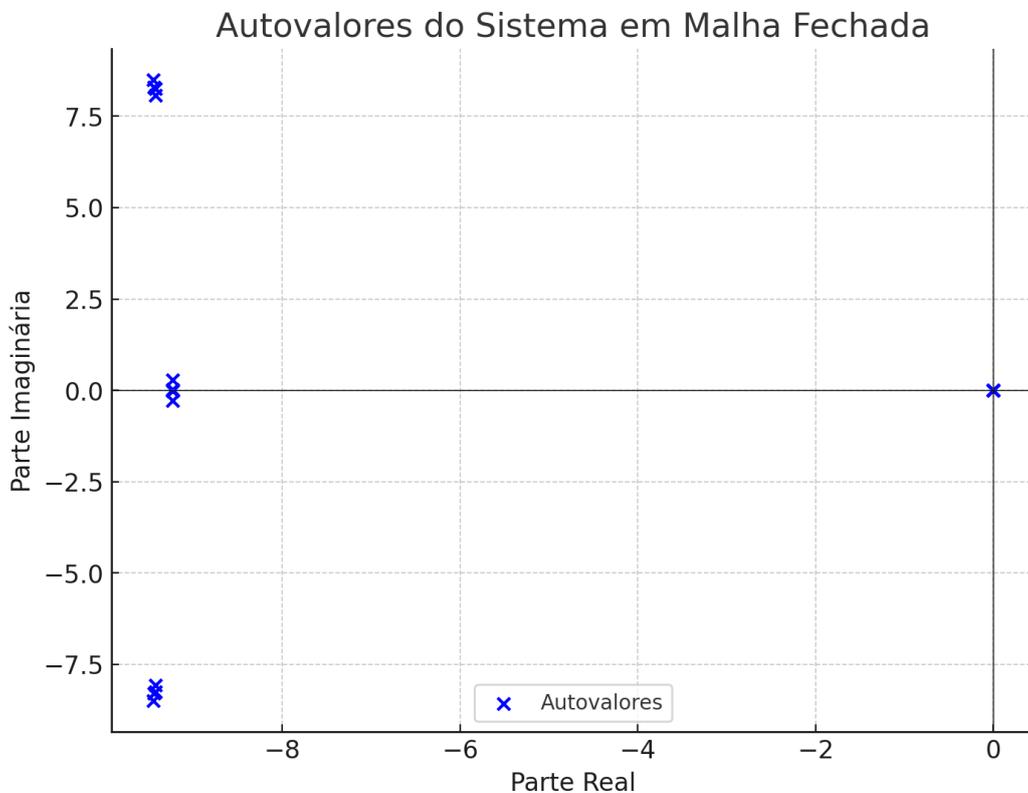


Figure 5.6 – Autovalores do sistema em malha fechada

5.2.1 Desempenho do controlador em espaço de estados para propulsão não homogênea

Para avaliação da robustez do sistema em espaço de estados utilizando LMI, realizou-se uma simulação de 60 segundos em que é feito um decaimento da constante de tração do motor esquerdo por 40 segundos, conforme descrito no gráfico da figura 5.7. O motor direito permanecerá com k_f constante. Simultaneamente, aplicou-se um sinal senoidal para referência de altitude com amplitude de 1 metro e frequência de 0,5 Hz, conforme o gráfico da figura 5.8, assim como para referência de ϕ e θ um sinal square de amplitude de 15 graus e frequência de 0,25 Hz, conforme gráficos da figura 5.9.

Essa simulação tem o objetivo de avaliar a estabilidade do controle em vista da variação dos valores identificados para a planta, de movimentações que afastam a planta dos pontos de linearização e operação. Observa-se no gráfico da figura 5.10 que o sinal de entrada do motor esquerdo desloca positivamente com o decorrer da simulação, enquanto o sinal do motor direito permanece se nenhuma alteração do seu comportamento.

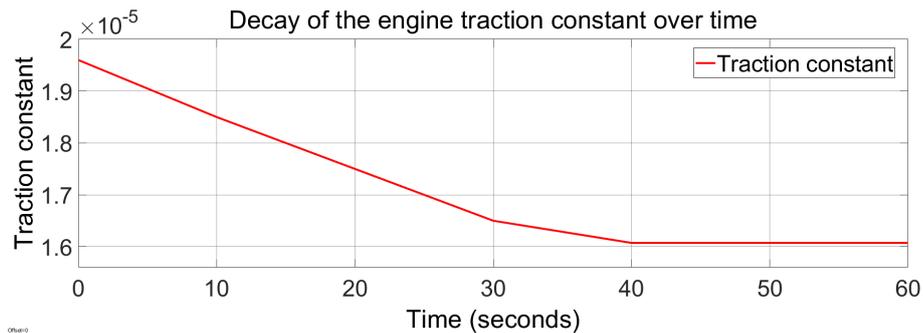


Figure 5.7 – Traction constant variation

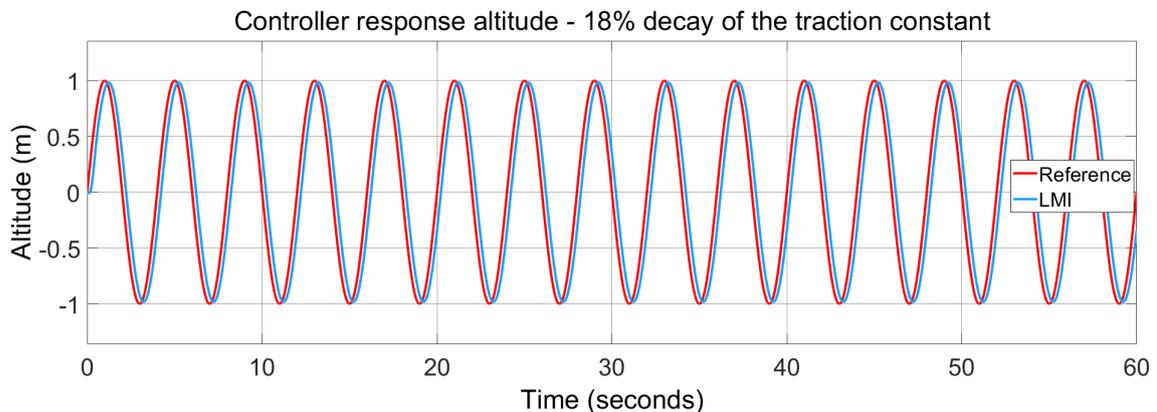


Figure 5.8 – Altitude

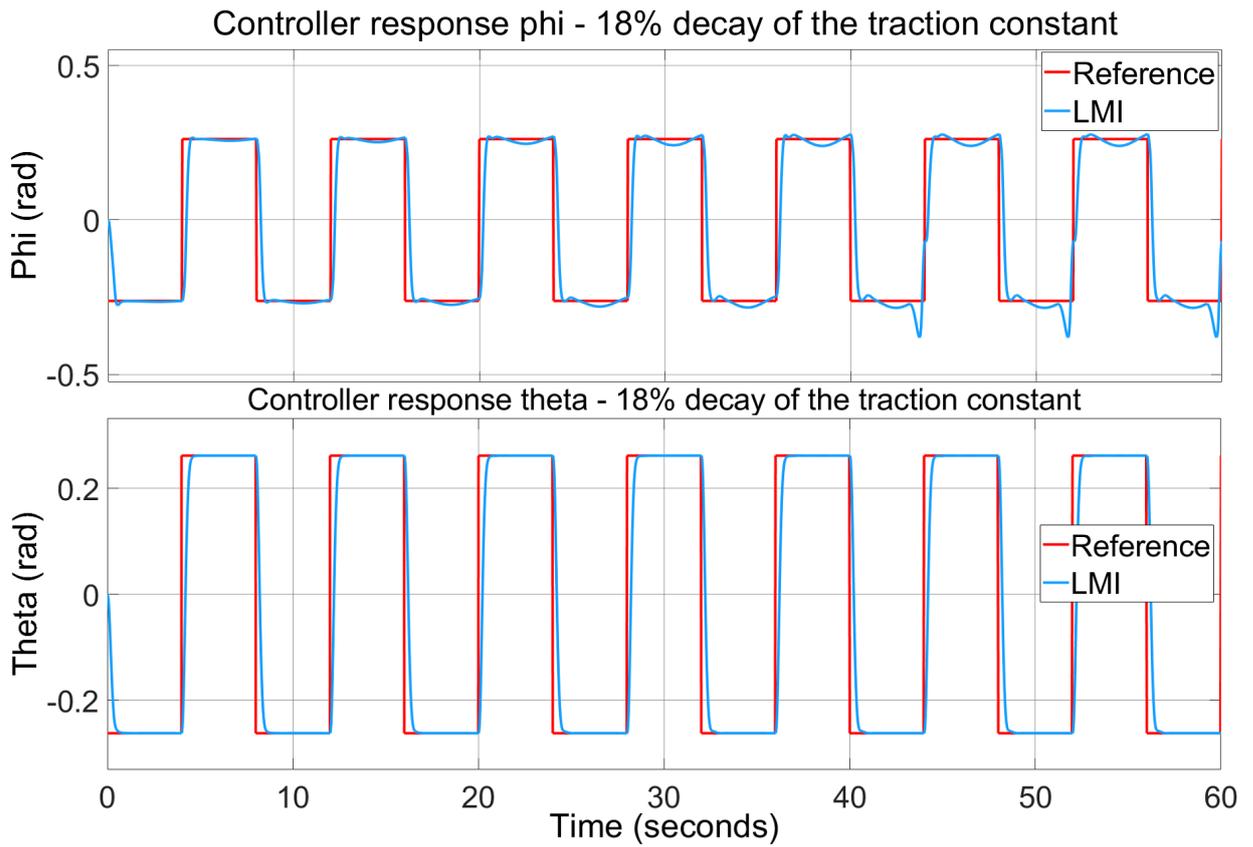


Figure 5.9 – phi

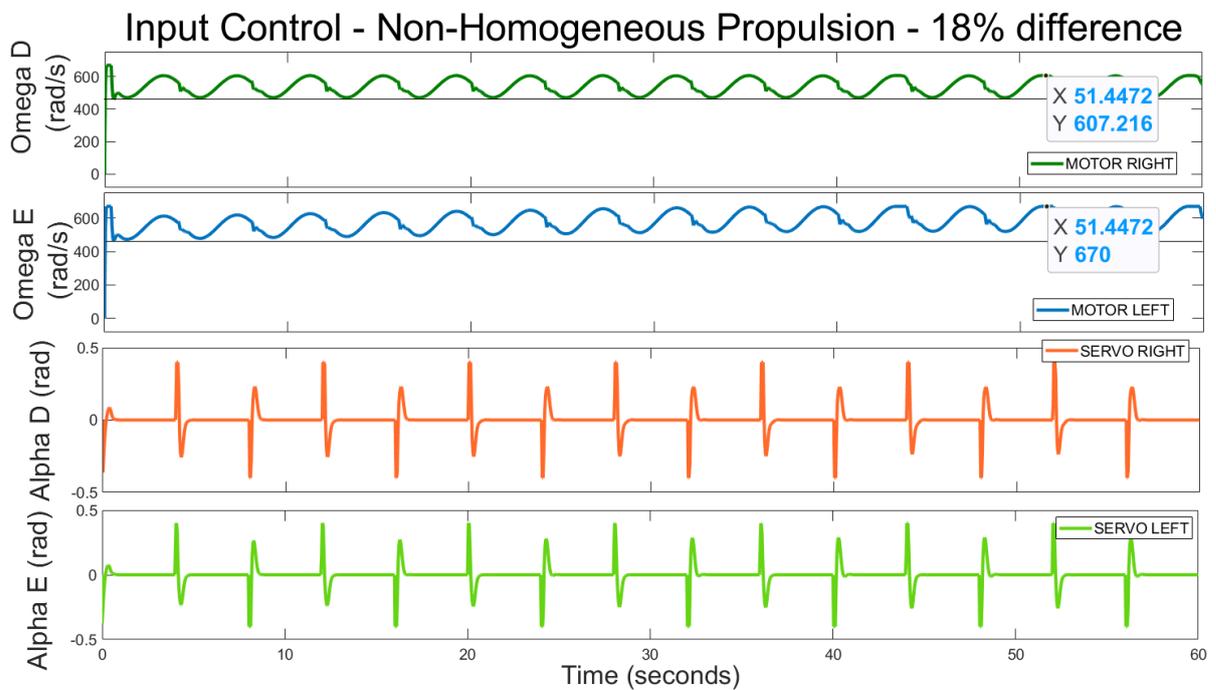


Figure 5.10 – Inputs

5.3 ANÁLISE COMPARATIVA DOS DOIS CONTROLES UTILIZANDO ISE, IAE, IE, ITAE E ITSE

Por fim, avaliou-se quantitativamente a resposta ao degrau de referência para as duas proposta de controle (TD3 e LMI). Utilizou-se 0,3 metros para altitude e 15 graus para atitude. Para essa avaliação, foram observados os índices de desempenho ISE, IAE, IE, ITAE e ITSE. Os resultados podem ser vistos na tabela 5.6. Percebe-se ligeira vantagem de desempenho para o controle feito com LMI.

	ISE	IAE	IE	ITAE	ITSE
Z0 (TD3)	0.01758	0.09262	0.07692	0.02348	0.008715
Z0 (LMI)	0.01877	0.07919	0.07526	0.01219	0.009912
ϕ (TD3)	0.01264	0.07408	0.06691	0.01585	0.009248
ϕ (LMI)	0.01126	0.05972	0.05972	0.008563	0.008563
θ (TD3)	0.01293	0.07555	0.07367	0.01552	0.01346
θ (LMI)	0.01127	0.05978	0.05978	0.00858	0.00858
ψ (TD3)	0.01237	0.07258	0.06488	0.01533	0.008485
ψ (LMI)	0.01127	0.05977	0.05977	0.00858	0.00858

Table 5.6 – Comparação de índices de desempenho para variáveis de controle com métodos TD3 e LMI

Além disso, plotou-se os gráficos das respostas para uma avaliação qualitativa de cada controle, como pode ser visto na figuras 5.11 e 5.12. Destaca-se o fato de que as respostas de atitude do controle feito por LMI não possuir sobressinal e ser mais rápido para assentamento do que a abordagem por TD3.

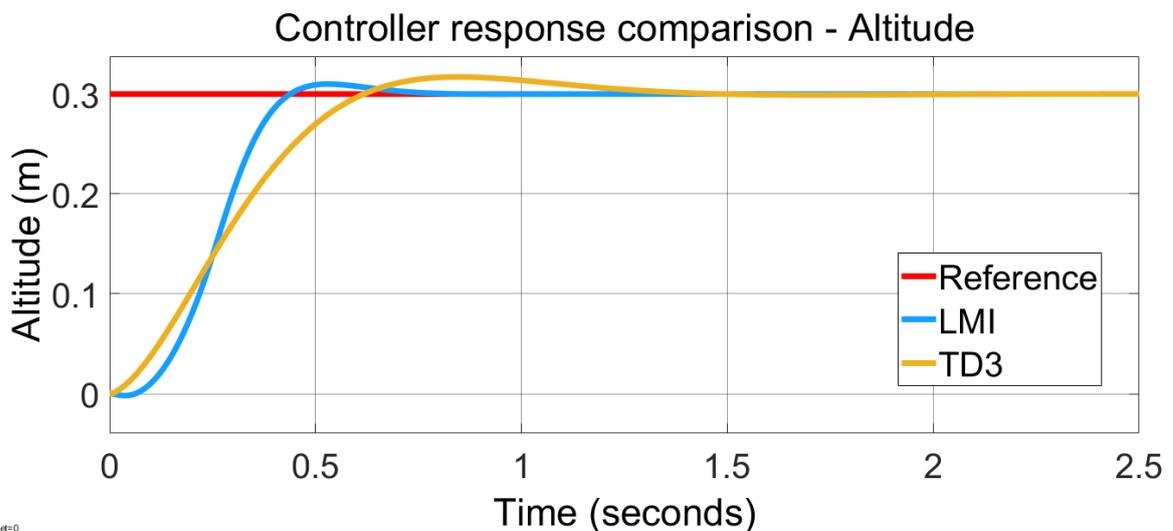


Figure 5.11 – Comparativo de controle par altitude

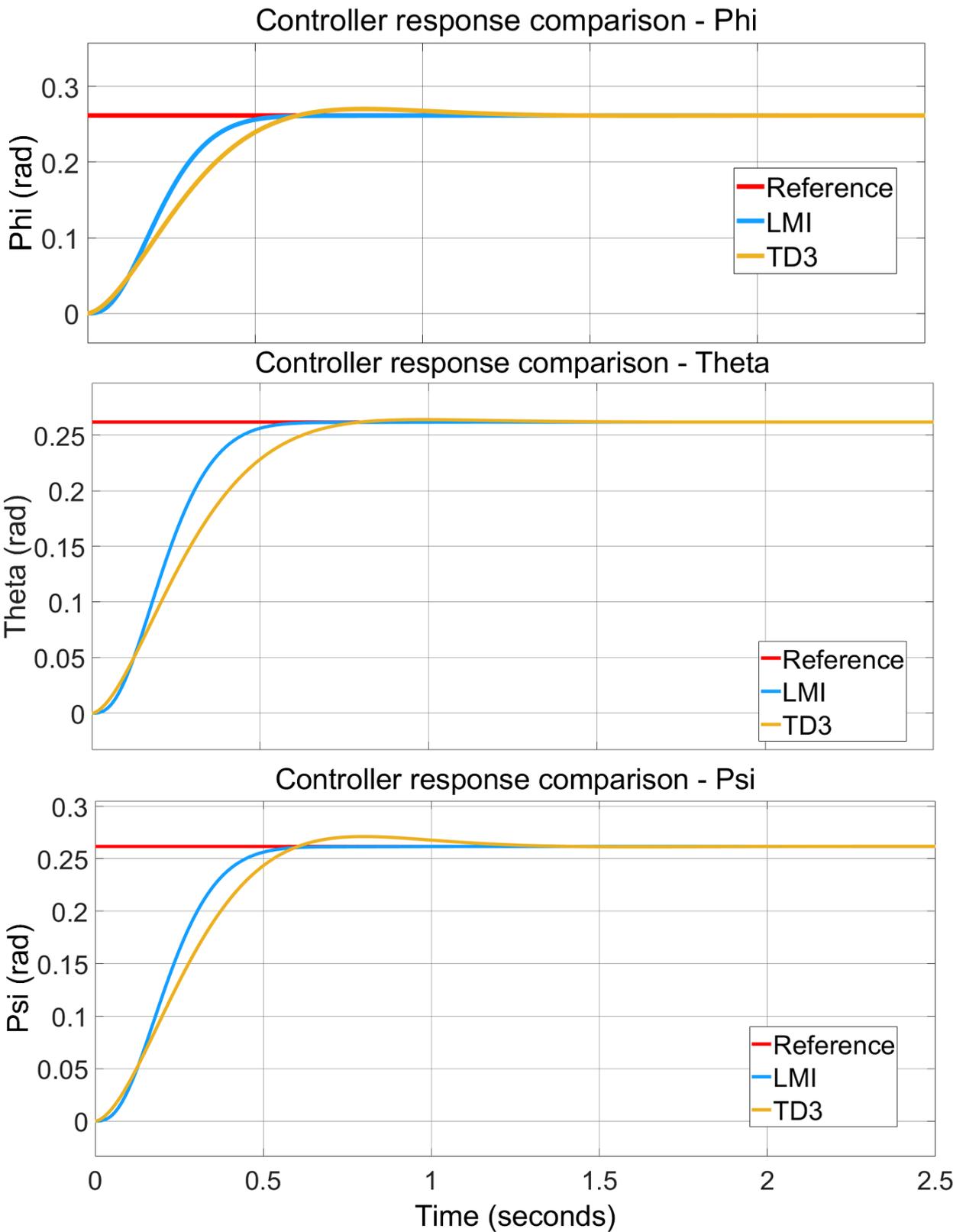


Figure 5.12 – Comparativo de controle para ϕ , θ e ψ

6 CONCLUSÕES

Este trabalho propôs uma abordagem de modelagem dinâmica não linear para uma plataforma tiltrotor bimotor com duas propostas de controles capazes de estabilizar sua atitude e fazer o controle de altitude. Também foi desenvolvido um ambiente de simulação para análise do comportamento do sistema e foi realizada a identificação dos parâmetros físicos da plataforma. Para a primeira proposta de controle, em conjunto com a identificação dos parâmetros físicos, foi possível elaborar um controlador simples para aplicação em software embarcado. Nota-se também que houve instabilidade do sistema de controle antes de ser feita a identificação individual de cada grupo motor-propulsor. Por inferência, pode-se utilizar outros tipos de controladores no lugar dos controladores da família PID, visto que a inversa da planta encapsula os aspectos físicos inerentes da plataforma.

As duas propostas se mostraram eficazes, cada uma com suas particularidades. A utilização do artifício da inversa do modelo dinâmico proporcionou a realização do controle de modo desacoplado para cada eixo de atitude. Essa possibilidade foi interessante, em vista da fácil implementação de controladores SISO's para esse problema. Ainda, essa abordagem permitiu que os parâmetros de controle tivessem uma caracterização mais próxima dos aspectos físicos do sistema, permitindo a um usuário futuro deste controle melhorar as configurações desses parâmetros para os casos em concreto que esse controle for aplicado. Por outro lado, apesar de poder realizar os ajustes para cada caso, o controle da primeira proposta se mostrou pouco robusto para variações de alguns parâmetros em relação aos valores identificados, como no caso deste trabalho, as constantes de propulsão.

A sintonia de PD's e PID's por TD3 conseguiram melhores desempenhos de tempo de subida 90% e UP% do que a sintonia por Ziegler-Nichols. O método de Ziegler-Nichols, por sua vez, não tem no seu escopo garantir soluções ótimas, mas sim, uma sugestão de obter ganhos viáveis para o controlador. O TD3, por sua vez, se apresentou um complemento conveniente ao método de Ziegler-Nichols, uma vez que ele realiza a busca do ótimo local na região do controle gerado por Ziegler-Nichols. Outro destaque para essa abordagem se deve a possibilidade de se utilizar a própria rede do TD3 como um controlador, uma possibilidade futura para outros trabalhos. Essa perspectiva é interessante pois permite-se configurar a rede para aprender um conjunto maior de possibilidades para o comportamento do sistema, como por exemplo, a variação da massa da plataforma.

Em regime transitório, os controles obtidos por TD3 conseguiram resolver o pequeno atraso observado na sintonia Ziegler-Nichols. Mesmo com propulsão não homogênea, foi possível obter uma sintonia satisfatória de acordo com os requisitos estipulados. Isso se deve ao fato da sintonia do TD3 ser feita em tempo discreto, corrigindo qualquer tipo de erro

de aliasing. Além disso, os controladores sintonizados por TD3 podem ser implementados diretamente em sistemas embarcados, o que torna a combinação dessas duas técnicas uma abordagem muito prática para sintonia de controles PID, e também, de implementação em software embarcado. Nota-se que a aplicação de TD3 para sistemas caixa preta é uma ótima opção, uma vez que aumentando-se os hiper-parâmetros de aprendizagem, torna-se dispensável a utilização de um modelo que identifique uma região de interesse para a sintonia dos parâmetros. Em contrapartida, o tempo de aprendizado aumentará.

A utilização de Reinforcement Learning através do TD3 permitiu obter ótimos desempenhos do controle para a primeira proposta. Destaca-se que essa abordagem realizou uma sintonia para uma faixa de valores de referência, e não apenas para um valor específico, permitindo assim um resultado otimizado para essa faixa de trabalho. Uma vez que é possível realizar a sintonia de controladores por Ziegler-Nichols para o tiltrotor bimotor, observou-se que essa técnica se mostrou uma ótima possibilidade. Além disso, um destaque dessa solução deve-se ao fato da sintonia poder ser realizada em tempo discreto, dispensando do projetista a necessidade de fazer algum tipo de tratamento necessário a posteriori para readequá-los ao contexto de implementação em software embarcado.

A troca da recompensa de norma quadrática para uma função exponencial obteve melhor compromisso entre o tempo de subida e UP% para os PID's do que para os PD's. Isso ocorreu devido ao termo integral do PID, o qual foi utilizado pelo TD3 para alcançar melhores índices de desempenho. Além disso, a função exponencial possui maior gradiente de aproximação do ponto de minimização do erro em relação a norma quadrática, fazendo com que os pesos da rede fossem ajustados de maneira mais rápida de minimização, progredindo até que se encontrasse o melhor compromisso entre velocidade de minimização do erro e sobressinal da resposta ao degrau. A conclusão em relação a esse aspecto é que o perfil da função de recompensa determina não apenas a minimização do erro, mas o perfil do tipo de resposta gerado pelo controle do sistema.

Os sobressinais dos PID's obtidos com TD3 ficaram abaixo dos 7%, considerado para essa aplicação um bom desempenho. Em relação a ruídos, os resultados foram satisfatórios na atenuação dos seus efeitos. Conforme descrito no parágrafo anterior, o conjunto PID e a escolha de recompensa foram os fatores de impacto para a obtenção dos desempenhos descritos. O termo integral atua como um filtro, realizando correções no processo de controle. Por fim, essa proposta de controle permite uma correlação com os testes de bancadas tradicionais para UAV's. Por ser um controle de arquitetura desacoplada, é possível realizar o treino do TD3 para cada eixo de atitude em um experimento de bancada. Esse tipo de treino se mostra muito conveniente após a etapa de treinamento em ambiente de simulação, permitindo uma sintonia mais precisa em relação a plataforma real.

A proposta de controle utilizando LMI's foi capaz de estabilizar sua atitude e altitude utilizando alocação robusta de polos. Adicionalmente, foi desenvolvido um ambiente de

simulação para analisar o comportamento do sistema. Nota-se que a implementação linear do controle obteve bom desempenho quando simulada com o modelo de planta não linear. Uma vez obtido o controlador PI ideal, o sistema pode ser facilmente implementado em um microcontrolador. A estimação dos estados utilizando filtro de Kalman é necessária para a utilização deste controle.

A abordagem utilizando-se espaço estados e LMI's tem como maior qualidade ser robusta em relação as incertezas do modelo. A arquitetura utilizada permitiu que houvesse liberdade quanto ao uso de todo ferramental de espaço de estados lineares. O grande destaque dessa característica foi poder utilizar uma única constante de propulsão para os dois propulsores, uma vez que no modelo não linear os valores configurados foram diferentes daqueles presentes no controle. O controle por sua vez rapidamente realizou a estabilização e controle da planta sem maiores problemas. Apesar de não ser intuitivo ajustar os ganhos do controle em espaço de estados manualmente como na primeira proposta, a abordagem utilizando LMI's nos permitiu alcançar ótimos índices de desempenho. Esse aspecto torna essa proposta valiosa no contexto da solução do problema desse trabalho.

Na primeira abordagem deste trabalho, deixa-se disponível um grande número de parâmetros para ajustes a fim de se encontrar valores que estabilizem a plataforma aérea. Apesar dessa vantagem, na segunda proposta assume-se que o modelo do sistema possui um conjunto de incertezas, e que uma solução robusta é mais adequada em vista da dificuldade de realizar a identificação do sistema real de maneira precisa. O destaque dessa premissa fica para a utilização de uma única constante de propulsão para os dois motores na estrutura de controle, mesmo que no sistema dinâmico os valores das constantes de propulsão fossem diferentes. Outro ponto que é destaque dessa proposta é que o controle em espaço de estados não leva em conta que as forças das entradas do controle são decomposições das forças provenientes da velocidade de rotação dos motores de propulsão e dos ângulos de tilt, eliminando-se a sim a parte não linear na parte do projeto em espaço de estados.

A alocação robusta de polos e o aspecto do acoplamento dos ganhos integrais deste controlador permitiram resolver a questão de propulsão não homogênea. Se por um lado, o entendimento físico dos ganhos do controlador se tornam mais complicados, por outro, permite-se que ocorra a rejeição de perturbações e incertezas durante o controle do sistema. Uma vez que por alocação de polos é possível determinar aspectos de desempenho de controle, o tradeoff entre o aumento da complexidade do controlador e sua robustez apresentam um bom compromisso, mesmo que seja mais complexa toda construção das restrições LMI's e da aplicação da programação semi-definida. Assim, como na primeira solução, o termo integral possui ainda mais ação na estabilização da plataforma, uma vez que o acoplamento dos ganhos permitem que não só a mitigação do problema da propulsão não homogenia aconteça, mas também que outras incertezas do modelo sejam mitigadas, como os aspectos de variação de massa, momento de inércia, ruídos, entre outros.

Por fim, o quesito tempo de desenvolvimento dessa solução se mostrou mais conveniente do que o da solução da primeira proposta. Uma vez delimitados todas as LMI's, os algoritmos de otimização rapidamente encontram a solução ótima de acordo com as restrições impostas. Vale destacar que o problema LMI é convexo, enquanto a abordagem por NN resulta em um problema de otimização não-convexo. A consequência e importância disso é que no caso utilizando LMI, os mínimos locais são também mínimos globais. Na primeira proposta, o tempo de aprendizagem para cada sintonia foi de cerca de 1:30h, o que se mostrou ser um ponto de reflexão ao se escolher essa proposta. Existe a possibilidade de redução desse tempo, de acordo com o conhecimento que se tem do sistema dinâmico que se quer aprender, podendo-se diminuir o tempo de treinamento através da alteração dos hiperparâmetros. O desempenho computacional para treinamento também é um fator relevante em relação a primeira proposta de controle, sendo necessário um computador com relevante poder computacional. A resolução de LMI's, por sua vez, não requer grande poder computacional.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Nesta parte, propomos alguns temas que poderão ser objeto de pesquisas futuras:

- Implementação de um modelo em espaço de estados não linear: Em vista de disponibilidade de hardware mais avançado, torna-se interessante propostas de controles mais sofisticados. Os modelos não lineares possuem uma descrição mais precisa, além de poderem originar projetos de controles não lineares mais sofisticados;
- Adição ao modelo dinâmico a modelagem de um conjunto com asa fixa e empenagem: Em vista de aumentar a autonomia de voo, a adição de uma asa fixa e empenagem a plataforma em conjunto com a implementação de uma ação de transição entre o modo helicóptero para o modo avião se mostram um passo futuro interessante para a ampliação de tipos de missão que essa aeronave pode executar;
- Implementação de outros algoritmos de aprendizagem: Esse modelo se mostrou interessante para aplicações de outros algoritmos de aprendizagem, visto ser um sistema MIMO sub-atuado de modelagem relativamente complexa. Um processo de aprendizagem caixa-preta também se mostrou ser um estudo interessante, em vista de a princípio, dispensar atividades de modelagem e de projeto de controle baseado em modelo;
- Implementação de controle adaptativo onde foram implementados os PID's, realizando-se um comparativo em seguida: Uma vez que os controladores PID (que apesar de robustos, tem parâmetros estáticos) tiveram desempenho satisfatório, uma questão que

fica em aberto seria de avaliar a melhora do desempenho dessa arquitetura com controladores adaptativos;

- Implementação de um controle LQR acoplado com um filtro de Kalman estendido: Essa implementação tornaria mais robusta a solução, em vista que o filtro de Kalman geraria boa estimativa dos estados do sistema;
- Teste de vôo em ambiente controlado e realizar comparação entre as simulações e experimentos reais: Uma vez bem consolidada a etapa de projeto e simulações, faz necessário a implementação de teste experimentais em uma plataforma real em vista de validar o projeto;
- Adição de camada de controle de navegação: Uma vez que a plataforma atua de forma estável e controlável, faz se necessário implementar um sistema de navegação para que ela possa se movimentar utilizando coordenadas geográfica, e assim, tornar mais abrangente suas possibilidade de atuação.

6.2 LISTA DE PUBLICAÇÕES

Os trabalhos publicados durante a elaboração desta dissertação foram:

- BOTELHO, L C., BORGES, A. G., ISHIHARA, J. Y. (2023). Projeto de Controle de Estabilização de Atitude e Altitude de Plataforma Aérea Tiltrotor Bimotor com Motores Não Homogêneos. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2023). (Aceito para publicação.);
- BOTELHO, L C., BORGES, A. G., ISHIHARA, J. Y. (2024). Sintonia de controles PID para uma plataforma EVTOL Tiltrotor Bimotor com Configuração de Propulsão Homogênea e Não-Homogênea Utilizando TD3. Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2024). (Aceito para publicação.);
- BOTELHO, L C., BORGES, A. G., ISHIHARA, J. Y., Tognetti, E. S (2024). Attitude Stabilization and Altitude Control of a Twin-Engine Tiltrotor Aerial with Inhomogeneous Propulsion Using Optimal Control. IEEE Urucon. (Aceito para publicação.).

BIBLIOGRAPHY

- [1] L. C. Botelho, “Modelagem e estabilização de plataforma aérea tiltrotor.” Brazil: UnB), 2021, p. 78.
- [2] S. J. Carlson and C. Papachristos, “The minihawk-vtol: Design, modeling, and experiments of a rapidly-prototyped tiltrotor uav,” vol. 1, Athens, Greece, June 2021, p. 10.
- [3] A. Lara, I. B. P. Nascimento, J. Arias-Garcia, L. B. Becker, and G. V. Raffo, “Hardware-in-the-loop simulation environment for testing of tilt-rotor uav’s control strategies,” vol. 1. Minas Gerais e Santa Catarina, Brazil: UFMG/UFSC, Abril 2020, p. 7.
- [4] Embraer, “BNDES apoia desenvolvimento de carros voadores por empresa nacional,” <https://tinyurl.com/bdckz8ud>, 2022, [Online; accessed 06-May-2024].
- [5] K. Tan and K. H. Low, “Initial feasibility study of multi-rotor evtol aircraft for cross-border urban air mobility between singapore and neighbouring countries.” Nanyang, Singapore: 021 IEEE/AIAA 40th Digital Avionics Systems Conference (DASC), 2021, p. 7.
- [6] X. Huang, J. Liu, H. Zhong, Z. Wang, and W. Luo, “Nonlinear flight attitude control using error dynamics based dual heuristic dynamic programming.” 35rd Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2023, p. 6.
- [7] S. Shen, J. Xu, P. Chen, and Q. Xia, “Adaptive neural network extended state observer-based finite-time convergent sliding mode control for a quad tiltrotor uav.” Nanjing, China: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics and Nanjing University of Science and Technology, 2023, p. 14.
- [8] C. Ma, D. Sun, and N. Hovakimyan, “Modeling and adaptive control law design for a bi-tiltrotor unmanned aerial vehicle.” ASCE, 2023, p. 22.
- [9] J. Lou, P. Wang, X. Gao, and J. Yang, “Active disturbance rejection control with ftceso applied to tiltrotor transition control.” China: 33rd Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2021, p. 5.
- [10] R. Andrade, A. Ferramosca, J. E. Normey-Rico, and G. V. Raffo, “Explicit model predictive control for a tiltrotor uav in cargo transportation tasks,” Minas Gerais, Brasil, Jul 2020, p. 7.
- [11] A. Hu, X. Zhao, and D. Xu, “Modeling and hovering control of 5-dof tilt-birotor robot.” Shenzhen, China: Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV), Dec 2020, p. 6.

- [12] A. A. de Paula, G. V. Raffo, and B. O. S. Teixeira, "State estimation based on stochastic and zonotopic approaches: Part ii - nonlinear systems," vol. 1. Minas Gerais, Brazil: China Aviation General Aircraft, 2022, p. 5.
- [13] L. Qing, Z. Xingyu, and L. Juanxia, "Frequency-domain system identification of tiltrotor aircraft: Compared with cifer," vol. 1. Zhuhai, China: China Aviation General Aircraft, 2022, p. 5.
- [14] V. P. Tran, M. A. Mabrok, S. G. Anavatti, M. A. Garratt, and I. R. Petersen, "Robust fuzzy q-learning-based strictly negative imaginary tracking controllers for the uncertain quadrotor systems." Doha, Qatar: IEEE TRANSACTIONS ON CYBERNETICS, 2023, p. 13.
- [15] S. Fujimoto, H. van Hoof, and D. Meger, "Addressing function approximation error in actor-critic methods." McGill University, Montreal, Canada and University of Amsterdam, Amsterdam, Netherlands: Proceedings of the 35 th International Conference on Machine Learning, Stockholm, Sweden, PMLR 80, 2018, p. 15.
- [16] T. P. Lillicrap, J. J. Hunt, A. Pritzel, N. Heess, T. Erez, Y. Tassa, D. Silver, and D. Wierstra, "Continuous control with deep reinforcement learning." London, UK: Google Deepmind, 2016, p. 14.
- [17] D. Lin, J. Han, K. Li, J. Zhang, and C. Zhang, "Payload transporting with two quadrotors by centralized reinforcement learning method." Nankai, China: IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, p. 14.
- [18] A. G. de Almeida and E. L. C. A. da Silva Simoes, "Controlling tiltrotors unmanned aerial vehicles (uavs) with deep reinforcement learning." São Paulo, Brasil: 2023 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2023, p. 6.
- [19] Y. Li and A. H. Aghvami, "Covertness-aware trajectory design for uav: A multi-step td3-per solution." London WC2R 2LS, U.K: ICC 2022 - IEEE International Conference on Communications, 2022, p. 6.
- [20] A. O'Dwyer, *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Imperial College Press, 2009, vol. 1.
- [21] X. Wu and C. Wei, "Drl-based motion control for unmanned surface vehicles with environmental disturbances." Changzhou, China: College of Mechanical and Electrical Engineering, Hohai University, 2023, p. 5.
- [22] R. Dubey, R. Loka, and A. M. Parimi, "Maintaining the frequency of ai-based power system model using twin delayed ddp(td3) implementation." Mathura, India: 2nd

International Conference on Power Electronics IoT Applications in Renewable Energy and Its Control (PARC), 2022, p. 4.

- [23] Y. Chen, S. Liu, C. Xiong, Y. Zhu, and J. Wang, “Research on uav flight tracking control based on genetic algorithm optimization and improved bp neural network pid control.” Wuhan,China: Wuhan University of Technology, 2019, p. 6.
- [24] B. Breese, M. Kumar, M. Bolender, and D. W. Casbeer, “Physics-based neural networks for modeling control of aerial vehicles.” Atlanta, USA: American Control Conference (ACC), 2022, p. 6.
- [25] A. Dharmawan, A. Ashari, and A. E. Putra, “Translation movement stability control of quad tiltrotor using lqr and lqg,” UFBA, Bahia, 2018, p. 12.
- [26] R. S. Leonello, M. Z. Seixas, H. X. de Araújo, and B. Ordonez, “Controle de trajetória do quadrotor ar.drone 2.0 via abordagens lqr e h1,” UFBA, Bahia, 2021, p. 6.
- [27] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian, “Robust pole placement in lmi regions,” -, p. 6.
- [28] F. L. Markley and J. L. Crassidis, in *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control.*, vol. 1, Abril 2014, p. 7.
- [29] K. Ogata, “Engenharia de controle moderno.” Pearson, 2010, p. 822.
- [30] Openai. (2024) Deep deterministic policy gradient. [Online]. Available: <https://spinningup.openai.com/en/latest/algorithms/ddpg.html>
- [31] G.-R. Duan and H.-H. Yu, *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, 2015.
- [32] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, “Linear matrix inequalities in system and control theory.” Philadelphia: SIAM, 1994, p. 205.
- [33] —, “A novel approach for h2 e hinf robust pid synthesis for uncertain systems.” Minas Gerais: ELSEVIER, 2008, p. 8.
- [34] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian, “Robust pole placement in lmi regions,” p. 6, 2018.
- [35] M. Taherinezhad and A. Ramirez-Serrano, “Sliding mode thau observer for actuator fault diagnosis of quadcopter uavs,” *MDPI - Applied Sciences*, p. 12, 2018.
- [36] A. Cherifi, K. Guelton, and L. Arcese, “Uncertain t-s model-based robust controller design with d-stability constraints—a simulation study of quadrotor attitude stabilization,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 67 (2018), p. 6, 2022.

- [37] M. Guo, Y. Su, and D. Gu, “Mixed h₂/h tracking control with constraints for single quadcopter carrying a cable-suspended payload,” *IFAC (International Federation of Automatic Control) Hosting by Elsevier Ltd.*, p. 6, 2017.
- [38] R. S. Leonello, M. Z. Seixas, H. X. de Araújo, and B. Ordoñez, “Controle de trajetória do quadrotor ar.drone 2.0 via abordagens lqr e h₁,” *XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2021*, p. 6, 2021.
- [39] A. Dharmawan, A. Ashari, and A. E. Putra, “Translation movement stability control of quad tiltrotor using lqr and lqg,” *I.J. Intelligent Systems and Applications*, p. 12, 2018.
- [40] L. F. Sabra, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Projeto de controladores pi para sistemas lineares utilizando técnicas de análise de estabilidade robusta,” *XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2021*, p. 7, 2021.
- [41] A. T. Nugraha and dan T Agustinah, “Quadcopter path following control design using output feedback with command generator tracker los based at square path,” *MISEIC - IOP Conf. Series*, p. 8, 2018.
- [42] M. V. S. Costa, J. C. T. Campos, O. M. Almeiday, and V. P. Pintoz, “Análise e controle multivariável robusto d-lqi otimizado via lmis,” *SBAI 2013*, p. 6, 2013.
- [43] G. D. Padfield, in *Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and*, vol. 1. United Kingdom: AIAA, 1995.
- [44] A. D. Cerezo-Pacheco, C. A. Perez-Velasco, Y. Lozano-Hernandez, H. R. iguez Cortes, and V. G. Sanchez-Meza, “Integration of x-plane and matlab for modeling and simulation of a tiltrotor uav,” vol. 1. CDMX, Mexico: Instituto Politecnico Nacional CDMX, 2021, p. 6.
- [45] R. S. Leonello, M. Z. Seixas, H. X. de Araújo, and B. Ordonez, “Controle de trajetória do quadrotor ar.drone 2.0 via abordagens lqr e h₁,” UFBA, Bahia, 2021, p. 6.
- [46] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian, “Robust pole placement in lmi regions,” 1999, p. 6.