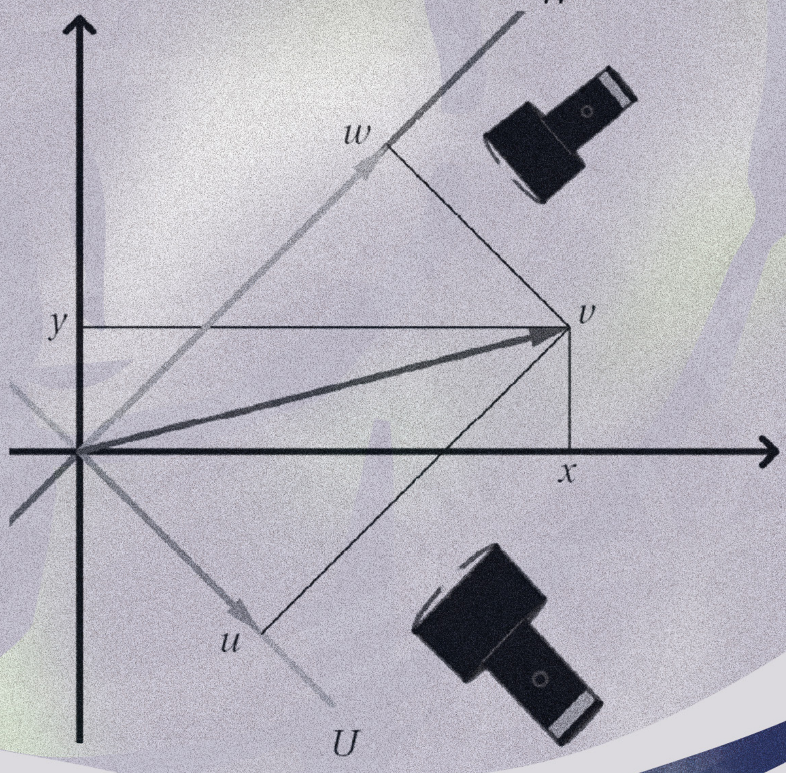
Referência
PATRÃO, Mauro. **Introdução à álgebra linear**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2025. E-book (259 p.). (Série Ensino de Graduação). Disponível em: https://livros.unb.br/index.php/portal/catalog/book/626. Acesso em: 03 fev. 2025.



EDITORA
UnB

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Mauro Patrão

SÉRIE ENSINO DE GRADUAÇÃO

EDITORA
UnB

Introdução à Álgebra Linear

Mauro Patrão

SÉRIE ENSINO DE GRADUAÇÃO

Equipe do projeto de extensão – Oficina de edição de obras digitais

Coordenação geral	Thiago Affonso Silva de Almeida
Consultor de produção editorial	Percio Sávio Romualdo Da Silva
Coordenação de revisão	Talita Guimarães Sales Ribeiro
Coordenação de design	Cláudia Barbosa Dias
Revisão	Julia Oliveira Neves
Diagramação	Mauro Patrão

Direitos exclusivos para esta edição:
Editora Universidade de Brasília
Centro de Vivência, Bloco A - 2ª etapa, 1º andar
Campus Darcy Ribeiro, Asa Norte, Brasília/DF
CEP: 70910-900
Site: www.editora.unb.br
E-mail: contatoeditora@unb.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade de Brasília – BCE/UnB)

P314i Patrão, Mauro.
Introdução à álgebra linear [recurso eletrônico] / Mauro Patrão. - Brasília : Editora Universidade de Brasília, 2025.
259 p. - (Série Ensino de Graduação).

Formato PDF.
Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-5846-262-0.

1. Álgebra linear. 2. Matrizes (Matemática). 3. Determinantes (Matemática). I. Título. II. Série.

CDU 512.64

Heloiza Faustino dos Santos – CRB 1/1913

À minha mãe, Isa Helena, por ter sempre me ensinado a importância de nos excentrarmos

Agradecimentos

Agradeço ao estudante Eduardo Jonas Silva pela elaboração das figuras e aos estudantes de Introdução à Álgebra Linear que utilizaram alguma das versões preliminares deste livro, o que permitiu uma considerável melhoria do conteúdo e da apresentação do texto.

Sumário

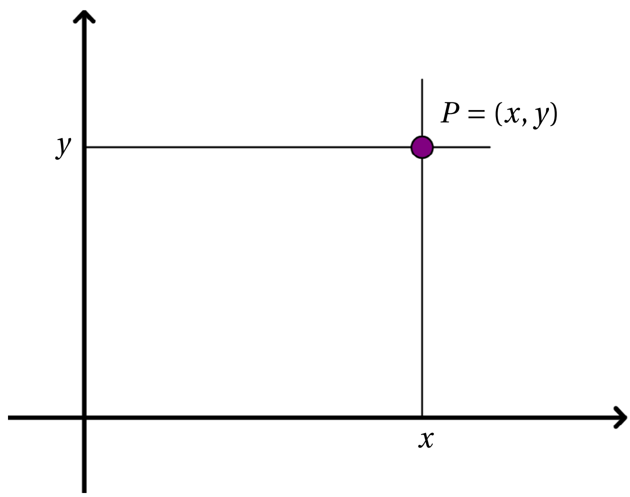
Apresentação

Esta obra foi elaborada e testada para servir como bibliografia principal na disciplina Introdução à Álgebra Linear da Universidade de Brasília. O enfoque da obra parte das intuições e conceitos geométricos, especialmente no plano, mas também no espaço, para introduzir os conceitos algébricos da forma mais natural possível e como ferramentas para tornar mais simples e fácil de ser computada a análise dos diversos problemas. Para isso, o livro conta com figuras bidimensionais e tridimensionais ilustrando as diversas construções geométricas e os diversos exemplos. No primeiro capítulo, denominado "Espaços", a partir da geometria analítica do plano e do espaço, os vetores são introduzidos geometricamente, além de outras estruturas algébricas, como o produto escalar, obtido a partir da Lei dos Cossenos. No segundo capítulo, intitulado "Transformações", o foco é dado em transformações geométricas, como projeções e reflexões, caracterizadas algebricamente como transformações lineares, respectivamente, idempotentes e involutivas, além de isometrias e homotetias, que são lineares quando preservam a origem. No terceiro capítulo, denominado "Coordenadas", as bases são introduzidas como generalização dos eixos coordenados, dando foco especial às denominadas bases ortonormais. No quarto capítulo, intitulado "Matrizes", as ligações entre objetos geométricos e algébricos seguem sendo exploradas. Em particular, o produto de matrizes é definido de modo a refletir a composição de transformações lineares e as isometrias lineares são caracterizadas como as que possuem inversa igual à transposta. No quinto capítulo, denominado "Autoespaços", autovalores e autovetores são introduzidos com o objetivo de diagonalizar matrizes de modo a simplificar o cálculo de potências de matrizes e compreender geometricamente e algebricamente as cônicas. No sexto capítulo, intitulado "Determinantes", esses objetos fundamentais para o cálculo de autovalores são introduzidos de forma geométrica, como o produto de orientações por volumes.

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS

1.1 GEOMETRIA ANALÍTICA



Vamos iniciar introduzindo no plano um sistema de coordenadas cartesiano, através de uma reta horizontal e de uma reta vertical, denominadas *eixos coordenados*, que se interceptam num ponto denominado *origem*. Após identificar os eixos coordenados aos números reais $\mathbb{R}$, dado um ponto P qualquer, associamos um par ordenado de números reais (x, y), onde a coordenada x é obtida pela interseção com o eixo horizontal de uma reta vertical passando por P, enquanto a coordenada y é obtida pela interseção com o eixo vertical de uma reta horizontal passando por P. Por outro lado, dado um par ordenado de números reais (x, y), associamos um ponto P do plano obtido pela interseção da reta vertical passando por x com a reta horizontal passando por y, onde x se encontra no eixo horizontal e y se encontra no eixo vertical. Temos então que o plano pode ser identificado com o conjunto $\mathbb{R}^2$, dos pares ordenados de números reais.

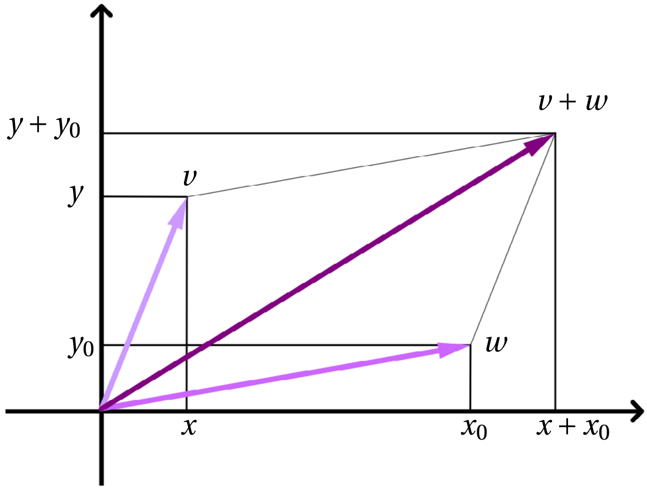
Podemos introduzir duas operações com pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ que tornam muito mais fácil a descrição dos objetos geométricos. A primeira operação é a *soma de pares ordenados*

$$\boxed{(x, y) + (x_0, y_0) = (x + x_0, y + y_0)}$$

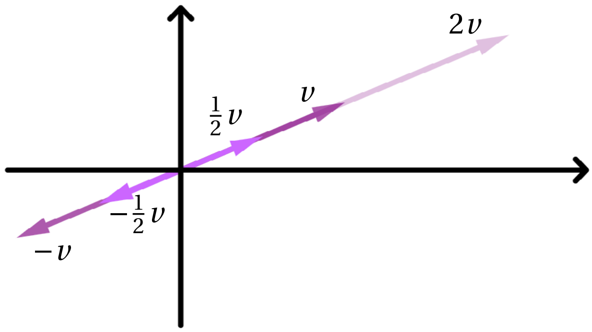
onde a soma acontece entres as respectivas coordenadas. A segunda operação é o *produto de par ordenado por escalar*

$$\boxed{t(x, y) = (tx, ty)}$$

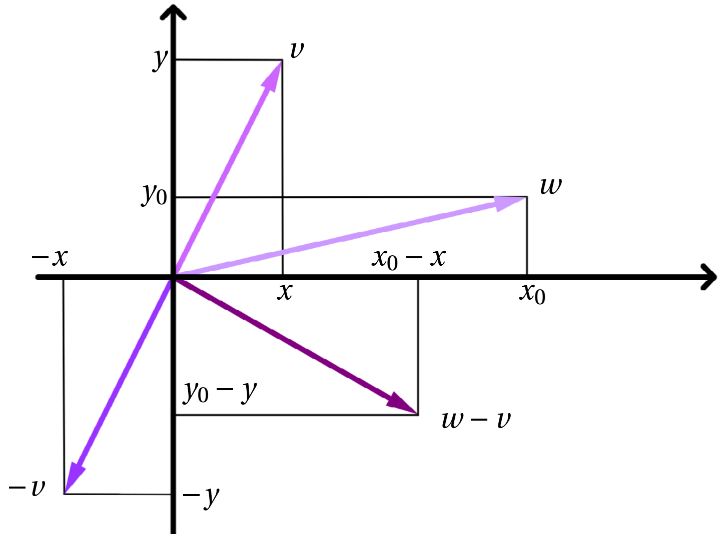
onde t é um número real e o produto pelo escalar acontece em cada coordenada.



Nesse contexto, um par ordenado é denominado *vetor* e representado graficamente por uma seta cujo início sempre coincide com a origem do plano e cuja ponta coincide com o ponto do plano determinado pelo par ordenado. As operações entre vetores também podem ser representadas graficamente. A soma $v+w$ dos vetores $v=(x,y)$ e $w=(x_0,y_0)$ coincide com a diagonal do paralelogramo determinado por esses dois vetores. Sua ponta coincide com a ponta de w após w ser transladado de modo que seu início coincida com a ponta de v, ou coincide com a ponta de v após v ser transladado de modo que seu início coincida com a ponta de w.



Por outro lado, a subtração $w-v$ é por definição a soma de w com o oposto de v, dado por $-v=(-x,-y)$, e sua ponta coincide com a ponta da seta com início em v e ponta em w, após essa seta ser transladada de modo que seu início coincida com a origem. Já o produto por escalar apenas estica, contrai ou inverte um dado vetor.



Podemos então utilizar essas operações com vetores para descrever uma dada reta no plano.

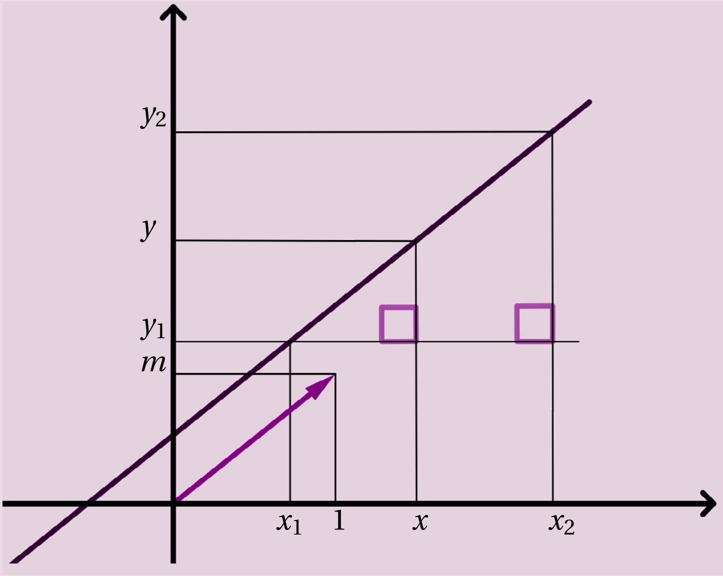
Proposição 1.1

Toda reta do plano pode ser descrita pelo conjunto dos vetores (x, y) da forma

$$\boxed{(x_1, y_1) + t(x_0, y_0)}$$

onde (x_1, y_1) é um dado vetor da reta, (x_0, y_0) é um dado vetor não nulo e t varia por todos os escalares.

Prova:



Caso a reta não seja vertical, considere (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos distintos sobre uma reta desse tipo, de modo que podemos identificar o triângulo retângulo formado por esses dois pontos e também pelo ponto (x_2, y_1). Se (x, y) é um outro ponto qualquer sobre essa reta, podemos identificar um segundo triângulo retângulo dado por esse ponto e também pelos pontos (x_1, y_1) e (x, y_1).

Esses dois triângulos retângulos são semelhantes, uma vez que suas bases e suas hipotenusas se encontram sobre as mesmas retas, enquanto suas alturas são paralelas. Pelo Teorema de Tales, sobre triângulos semelhantes, segue que

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Segue então que

$$(x-x_1, y-y_1) = (t, tm)$$

onde $t = x - x_1$, de modo que

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(1, m)$$

Se a reta for vertical, temos que $x = x_1$, de modo que

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(0, 1)$$

onde $t = y - y_1$.

□

Uma consequência imediata é a caracterização das retas passando pela a origem no plano.

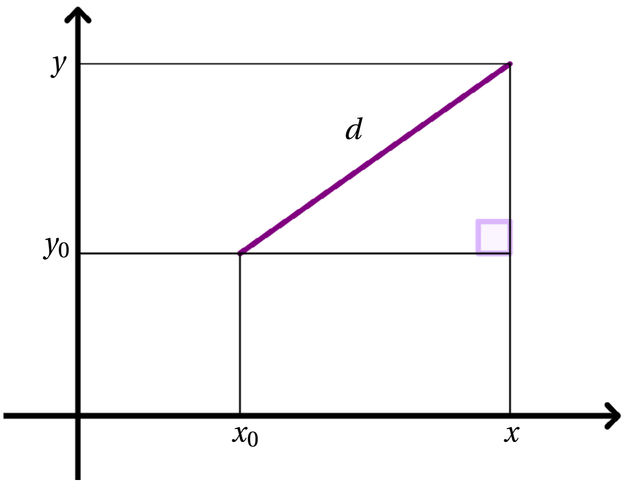
Corolário 1.2

Toda reta no espaço passando pela origem é dada como um conjunto de vetores da forma

$$\boxed{[w] = \{tw : t \in \mathbb{R}\}}$$

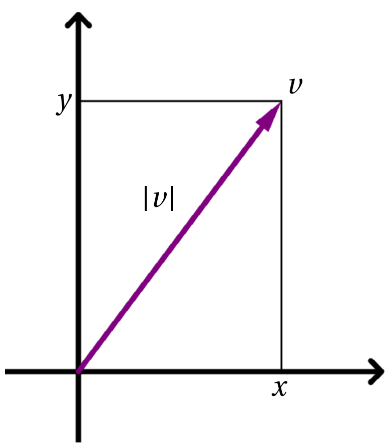
onde $w = (x_0, y_0)$ é um dado vetor não nulo sobre essa reta. Essa reta é denominada *reta gerada por* w.

Outro conceito fundamental da geometria que pode ser descrito em termos de coordenadas é a distância d entre dois pontos (x_0, y_0) e (x, y). Podemos identificar o triângulo retângulo formado por esses dois pontos e também pelo ponto (x, y_0).



A distância d é o comprimento da hipotenusa desse triângulo retângulo, que, pelo Teorema de Pitágoras, é dado por

$$\boxed{d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



Também podemos introduzir o conceito de comprimento de um vetor e ângulo entre dois vetores. O comprimento de um vetor $v = (x, y)$, denotado por $|v|$, é a distância da ponta do vetor até o seu início na origem.

Pelo que vimos da distância entre pontos do plano, segue então que

$$\boxed{|v|^2 = x^2 + y^2}$$

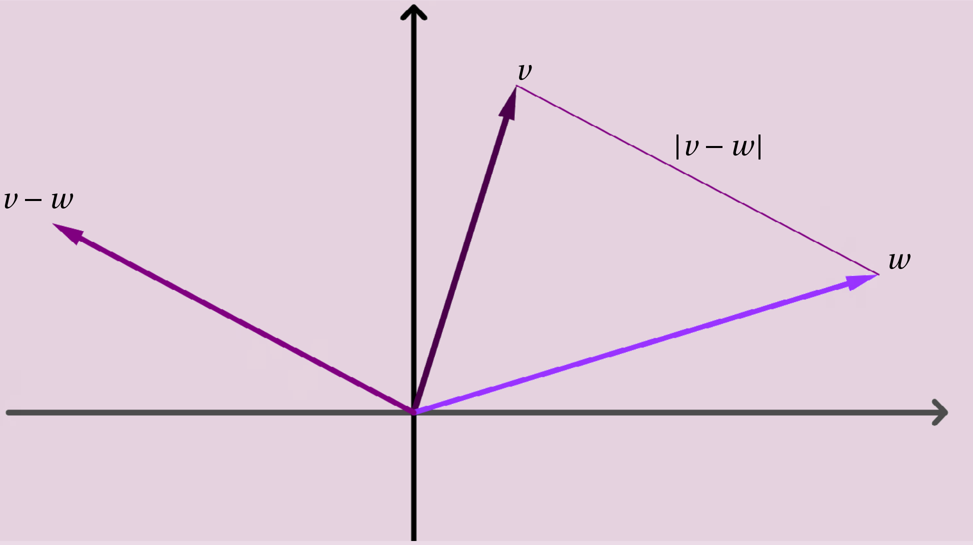
A distância entre dois vetores é então dada pelo comprimento da diferença entre esse vetores.

Proposição 1.3

A distância d entre dois vetores v e w é dada por

$$\boxed{d = |v - w|}$$

Prova:



Se $v = (x, y)$ e $w = (x_0, y_0)$, temos que

$$v - w = (x - x_0, y - y_0)$$

de modo que

$$|v - w|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$$

□

Já o ângulo θ entre v e w pode ser obtido considerando o triângulo formado pela ponta desses dois vetores e pela origem.

Proposição 1.4

O cosseno do ângulo θ entre v e w é dado por

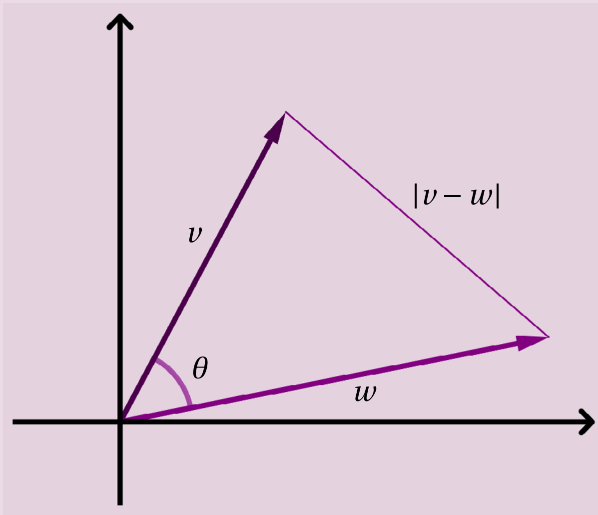
$$\boxed{\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v||w|}}$$

onde

$$\boxed{v \cdot w = x x_0 + y y_0}$$

é denominado *produto escalar entre v e w*.

Prova:



O lado oposto ao ângulo θ tem comprimento $|v-w|$ e a denominada *Lei dos Cossenos*, que é uma generalização do Teorema de Pitágoras, afirma que

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Em termos das respectivas coordenadas, temos que

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Desenvolvendo o lado direito, obtemos

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Cancelando as parcelas comuns aos dois lados, segue que

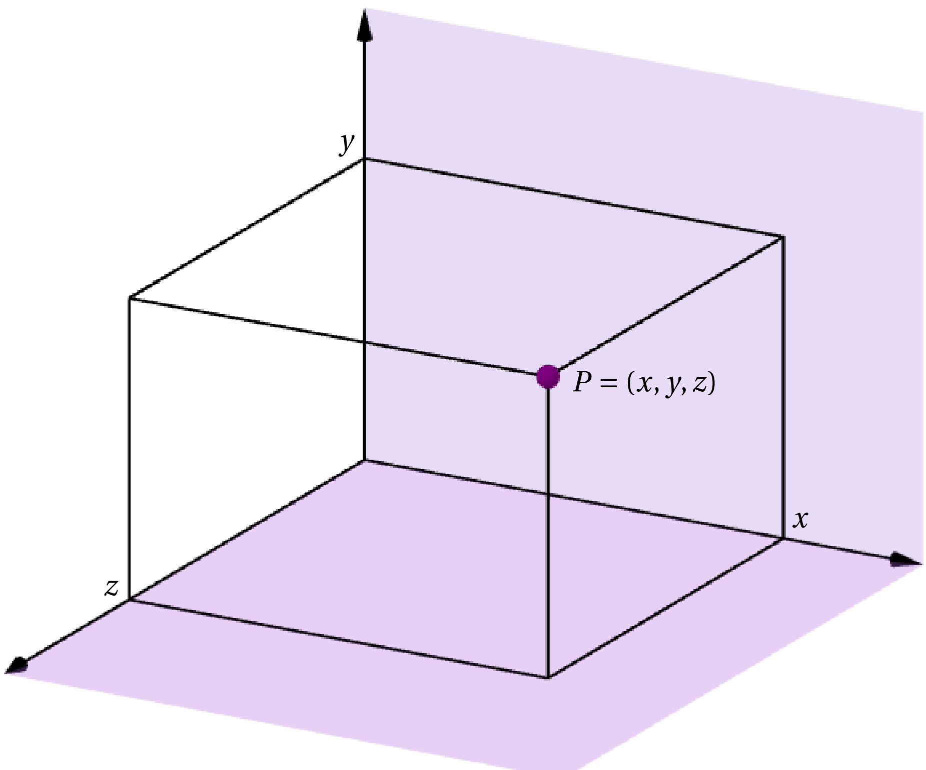
$$-2xx_0 - 2yy_0 = -2|v||w|\cos\theta$$

Dividindo por -2 e isolando $\cos\theta$, obtemos a fórmula do enunciado.

$\square$

Uma consequência imediata desse resultado é que o ângulo θ é reto se e só se $v \cdot w = 0$. Além disso, temos que θ é agudo se e só se $v \cdot w > 0$ e que θ é obtuso se e só se $v \cdot w < 0$.

Podemos proceder de forma análoga ao plano e introduzir no espaço um sistema de coordenadas cartesiano através de uma reta horizontal, de uma reta vertical e de uma reta de profundidade — perpendicular a essas duas primeiras — também denominadas *eixos coordenados*, que se interceptam num ponto denominado *origem*, denotado por O. Após identificar os eixos coordenados aos números reais $\mathbb{R}$, dado um ponto P qualquer, associamos um terno ordenado de números reais (x, y, z), onde a coordenada x é obtida pela interseção com o eixo horizontal de um plano perpendicular a esse eixo passando por P, enquanto a coordenada y é obtida pela interseção com o eixo vertical de um plano perpendicular a esse eixo passando por P e a coordenada z é obtida pela interseção com o eixo de profundidade de um plano perpendicular a esse eixo passando por P.



Por outro lado, dado um terno ordenado de números reais (x, y, z), associamos um ponto P do espaço obtido pela interseção do plano perpendicular ao eixo horizontal passando por x, com o plano perpendicular ao eixo vertical passando por y e com do plano perpendicular ao eixo de profundidade passando por z, onde x se encontra no eixo horizontal, y se encontra no eixo vertical e z se encontra no eixo de profundidade. Temos então que o espaço pode ser identificado com o conjunto $\mathbb{R}^3$ dos ternos ordenados de números reais.

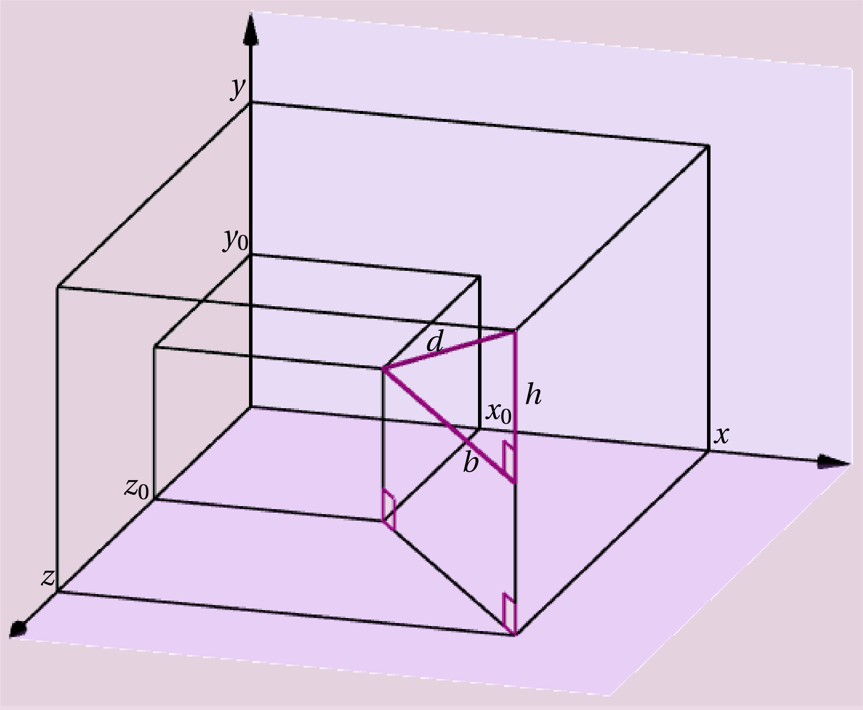
Assim como no plano, também podemos descrever a distância entre dois pontos do espaço em termos das suas coordenadas.

Proposição 1.5

A distância d entre dois pontos (x_0, y_0, z_0) e (x, y, z) é dada por

$$\boxed{d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Prova:



Podemos identificar o triângulo retângulo formado pelos pontos (x_0, y_0, z_0) e (x, y, z) e também pelo ponto (x, y_0, z). A distância d é o comprimento da hipotenusa desse triângulo retângulo, que, pelo Teorema de Pitágoras, é dado por

$$d^2 = b^2 + h^2$$

Pela definição de coordenadas no espaço, temos que

$$h^2 = (y - y_0)^2$$

e que os pontos (x_0, y_0, z_0), (x, y_0, z), $(x_0, 0, z_0)$ e $(x, 0, z)$ formam um retângulo, de modo que b é igual a distância entre os pontos $(x_0, 0, z_0)$ e $(x, 0, z)$, que é dada por

$$b^2 = (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2$$

pelo que sabemos sobre distância entre pontos no plano, o que completa a demonstração.

□

Do mesmo modo que fizemos no plano, também podemos introduzir duas operações com ternos ordenados de $\mathbb{R}^3$ que tornam muito mais fácil a descrição dos objetos geométricos. A primeira operação é a *soma de ternos ordenados*

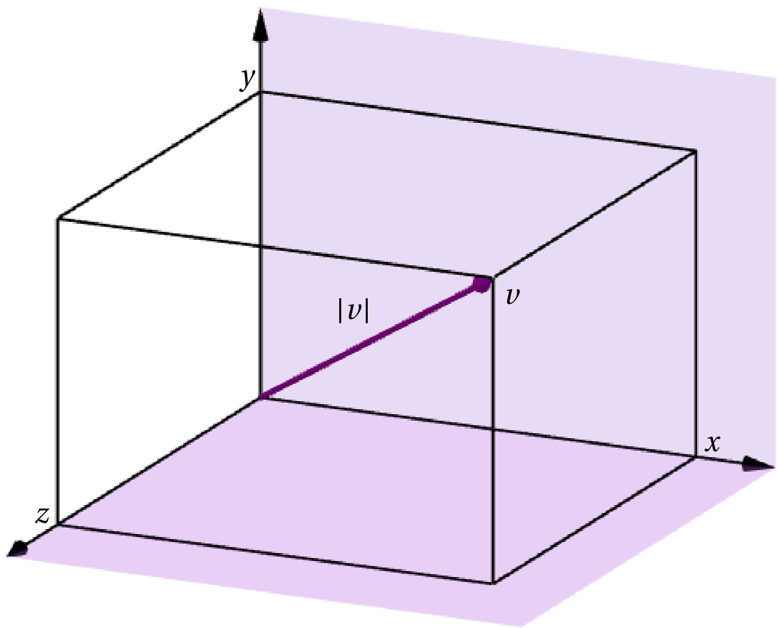
$$\boxed{(x, y, z) + (x_0, y_0, z_0) = (x + x_0, y + y_0, z + z_0)}$$

onde a soma acontece entres as respectivas coordenadas. A segunda operação é o *produto de terno ordenado por escalar*

$$\boxed{t(x, y, z) = (tx, ty, tz)}$$

onde t é um número real e o produto acontece em cada coordenada.

Além disso, um terno ordenado também é denominado vetor e representado graficamente por uma seta cujo início sempre coincide com a origem do espaço e cuja ponta coincide com o ponto do espaço



determinado pelo terno ordenado. Também podemos introduzir o conceito de comprimento de um vetor e ângulo entre dois vetores. O comprimento de um vetor $v = (x, y, z)$, denotado por $|v|$, é a distância da ponta do vetor até o seu início na origem. Pelo que vimos da distância entre pontos do espaço, segue então que

$$\boxed{|v|^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

A distância entre dois vetores é então dada pelo comprimento da diferença entre esse vetores.

Proposição 1.6

A distância d entre dois vetores v e w é dada por

$$\boxed{d = |v - w|}$$

Prova:

Se $v = (x, y, z)$ e $w = (x_0, y_0, z_0)$, temos que

$$v - w = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

de modo que

$$|v - w|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = d^2$$

$\square$

Já o ângulo θ entre v e w pode ser obtido considerando o triângulo formado pela ponta desses dois vetores e pela origem.

Proposição 1.7

O cosseno do ângulo θ entre v e w é dado por

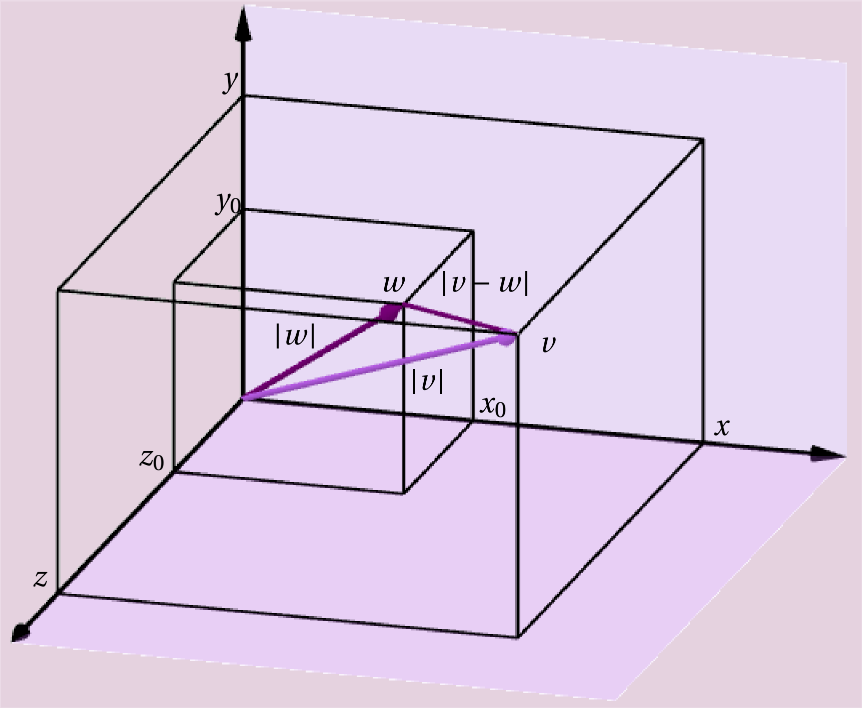
$$\boxed{\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v||w|}}$$

onde

$$\boxed{v \cdot w = xx_0 + yy_0 + zz_0}$$

é denominado *produto escalar entre v e w*.

Prova:



O lado oposto ao ângulo θ tem comprimento $|v-w|$ e a denominada *Lei dos Cossenos*, que é uma generalização do Teorema de Pitágoras, afirma que

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Em termos das respectivas coordenadas, temos que

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Desenvolvendo o lado direito, obtemos

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 + z^2 - 2zz_0 + z_0^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Cancelando as parcelas comuns aos dois lados, segue que

$$-2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 = -2|v||w|\cos\theta$$

Dividindo por -2 e isolando $\cos\theta$, obtemos a fórmula do enunciado.

$\square$

Assim como no caso do plano, o ângulo θ é reto se e só se $v \cdot w = 0$. Além disso, temos que θ é agudo se e só se $v \cdot w > 0$ e que θ é obtuso se e só se $v \cdot w < 0$. No caso do plano, o conjunto dos vetores perpendiculares a um dado vetor é uma reta passando pela origem. Já no caso do espaço, o conjunto dos vetores perpendiculares a um dado vetor w é um plano passando pela origem, dado por

$$\boxed{w^{\perp} = \{v : v \cdot w = 0\}}$$

e denominado *plano perpendicular a* w. As retas passando pela origem no espaço possuem descrição similar a das retas passando pela origem no plano.

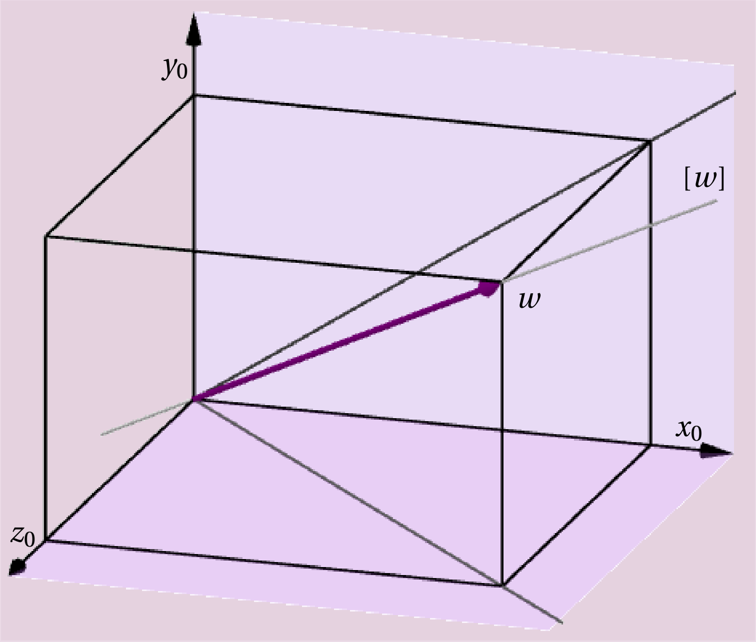
Proposição 1.8

Toda reta no espaço passando pela origem é dada como um conjunto de vetores da forma

$$\boxed{[w] = \{tw : t \in \mathbb{R}\}}$$

onde $w = (x_0, y_0, z_0)$ é um dado vetor não nulo sobre essa reta. Essa reta é denominada *reta gerada por* w.

Prova:



Considere o plano determinado pela reta r e pelo eixo de profundidade. A interseção desse plano com o plano determinado pelos eixos horizontal e vertical é uma reta tal que $(x, y, 0)$ pertence a ela sempre que (x, y, z) pertence à reta r. Temos então que $(x_0, y_0, 0)$ pertence a essa reta, de modo que, pelo que sabemos de retas em planos, $(x, y, 0) = t(x_0, y_0, 0)$ para algum escalar t. Agora, considere o plano determinado pela reta r e pelo eixo vertical. A interseção desse plano com o plano determinado pelos eixos horizontal e de profundidade é uma reta tal que $(x, 0, z)$ pertence a ela sempre que (x, y, z) pertence à reta r. Novamente, segue então que $(x_0, 0, z_0)$ pertence a essa reta, de modo que, pelo que sabemos de retas em planos, $(x, 0, z) = s(x_0, 0, z_0)$ para algum escalar s. Como

$$\frac{y}{y_0} = t = \frac{x}{x_0} = s = \frac{z}{z_0}$$

segue que $(x, y, z) = t(x_0, y_0, z_0) = tw$.

□

1.2 Espaços vetoriais

Agora vamos caminhar no sentido inverso, partindo de conceitos algébricos mais abstratos para chegarmos a conceitos geométricos mais intuitivos. Um *espaço vetorial real V* é um conjunto munido de duas operações com seus elementos, denominados *vetores*. A primeira operação é a *soma de vetores*

$$\boxed{v + w}$$

onde v e w pertencem a V, e segunda operação é o *produto de vetor por escalar*

$$\boxed{tv}$$

onde t é um número real. A operação soma de vetores deve satisfazer as seguintes propriedades:

Associativa Para todos os vetores u, v, w, temos que $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Neutro Existe o vetor 0 tal que $0 + v = v$, para todo vetor v.

Oposto Para todo vetor v, existe o vetor $-v$ tal que $-v + v = 0$.

Comutativa Para todos os vetores v, w, temos que $v + w = w + v$.

É importante notar que tanto o vetor 0, quanto o escalar 0 tem a mesma notação, ficando claro o que significam de acordo com o contexto. As três primeiras são as propriedades do que é denominado *grupo* que, juntamente com a quarta propriedade, é denominado *grupo comutativo*. Já operação produto de vetor por escalar deve satisfazer as seguintes propriedades:

Associativa Para todos os escalares s, t e todo vetor v, temos que $(st)v = s(tv)$.

Neutro Temos que $1v = v$, para todo vetor v.

Essas são as duas propriedades do que é denominado *ação da reta real*. Restam, ainda, as propriedades distributivas à esquerda e à direita, que relacionam as duas operações de um espaço vetorial

Esquerda Para todos os escalares s, t e todo vetor v, temos que $(s + t)v = sv + tv$.

Direita Para todo escalar t e todos os vetores v, w, temos que $t(v + w) = tv + tw$.

Existem diversos exemplos de espaços vetoriais. Os mais importantes no nosso contexto são apresentados abaixo.

Exemplos

1) O espaço $\mathbb{R}^2$, dos pares ordenados de números reais, com as operações de soma de pares ordenados e produto por escalar definidas na seção anterior.

2) O espaço $\mathbb{R}^3$, dos ternos ordenados de números reais, com as operações de soma de ternos ordenados e produto por escalar definidas na seção anterior.

3) De maneira mais geral, o espaço $\mathbb{R}^n$, das n-úplas ordenadas de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$, com as operações de soma de n-úplas ordenadas e produto por escalar definidas de modo análogo ao das operações do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. A *soma de n-úplas ordenadas* é dada por

$$\boxed{(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x + y, \ldots, x_n + y_n)}$$

onde a soma acontece entre as respectivas coordenadas. Já o *produto de n-úpla ordenada por escalar* é dado por

$$\boxed{t(x_1, \ldots, x_n) = (tx_1, \ldots, tx_n)}$$

onde t é um número real e o produto acontece em cada coordenada.

4) Um exemplo bem diferente dos anteriores é o espaço $\mathbb{F}$ das funções reais definidas na reta toda, com as operações usuais de soma de funções e produto de função por escalar. Relembrando, a *soma das funções f e g* é denotada por $f + g$ e é dada por

$$\boxed{(f + g)(x) = f(x) + g(x)}$$

enquanto o *produto da função f pelo escalar t* é denotado por tf e é dado por

$$\boxed{(tf)(x) = tf(x)}$$

onde x é um número real qualquer.

A partir das propriedades básicas das operações dos espaço vetoriais, obtemos outras propriedade úteis.

Proposição 1.9

Para todo escalar t e todos os vetores u, v, w, temos que

1) Se $u + v = w + v$, então $u = w$ (lei do cancelamento).

2) Se $u + v = v$, então $u = 0$ (unicidade do elemento neutro).

3) Se $u + v = 0$, então $u = -v$ (unicidade do elemento oposto).

4) Temos que $0v = 0$ e que $t0 = 0$.

5) Se $t \neq 0$ e $v \neq 0$, então $tv \neq 0$.

6) Temos que $-1v = -v$.

Prova:

1) Temos que

$$\begin{aligned} u &= u + 0 \\ &= u + (v - v) \\ &= (u + v) - v \\ &= (w + v) - v \\ &= w + (v - v) \\ &= w + 0 \\ &= w \end{aligned}$$

2) Temos que $u + v = v = 0 + v$, de modo que $u = 0$, pela lei do cancelamento.

3) Temos que $u + v = 0 = -v + v$, de modo que $u = -v$, pela lei do cancelamento.

4) Temos que $0v = (0+0)v = 0v + 0v$ e também que $t0 = t(0+0) = t0 + t0$, de modo que $0v = 0$ e também que $t0$, pela unicidade do elemento neutro.

5) Se $t \neq 0$, temos que $v = 1v = (t^{-1}t)v = t^{-1}(tv)$. Então, se $v \neq 0$, segue que $tv \neq 0$, pelo item anterior.

6) Temos que $-1v + v = -1v + 1v = (-1+1)v = 0v = 0$, pelo quarto item, de modo que $-1v = -v$, pela unicidade do elemento oposto.

$\square$

Para introduzirmos os conceitos geométricos, vamos necessitar de uma estrutura algébrica adicional, denominada *produto escalar entre vetores* e denotada por

$$\boxed{v \cdot w}$$

onde v, w são vetores, que satisfaz as seguintes propriedades:

Bilinear Para todos os vetores u, v, w e todo escalar t, temos que

$$(u + tv) \cdot w = u \cdot w + t(v \cdot w)$$

Simetria Para todos os vetores v, w, temos que $v \cdot w = w \cdot v$.

Positiva Para todo vetor não nulo v, temos que $v \cdot v > 0$.

Pela bilinearidade, é imediato que $v \cdot 0 = 0$ para todo vetor v. No nosso contexto, os dois principais exemplos de produto escalar são apresentados a seguir.

Exemplos

1) No espaço $\mathbb{R}^n$, o denominado produto escalar entre os vetores $v = (x_1, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, \ldots, y_n)$ é dado por

$$\boxed{v \cdot w = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}$$

e é a generalização natural do produto escalar em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Em $\mathbb{R}^2$, o produto escalar entre $v = (x, y)$ e $w = (x_0, y_0)$ é dado por

$$v \cdot w = x x_0 + y y_0$$

2) No espaço $\mathbb{P}$, das funções polinomiais, o produto escalar entre os polinômios p e q, com

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \quad \text{e} \quad q(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m$$

é definido por

$$\boxed{p \cdot q = c_0 d_0 + c_1 d_1 + \cdots + c_k d_k}$$

onde k é o menor valor entre m e n.

O resultado seguinte é fundamental para se estabelecer a ligação entre as propriedades algébricas e geométricas do produto escalar.

Proposição 1.10: Desigualdade de Schwarz

Para todos $v, w \in V$, temos que

$$\boxed{(v \cdot w)^2 \leq (v \cdot v)(w \cdot w)}$$

onde a igualdade ocorre se e só se v e w forem múltiplos.

Prova:

Se $v = 0$, ambos os lados se anulam e v e w são múltiplos, uma vez que $v = 0w$. Vamos agora considerar o caso em que $v \neq 0$. Para todo escalar t, pela positividade e pela bilinearidade, temos que

$$0 \leq (tv - w) \cdot (tv - w) = t^2(v \cdot v) - t(v \cdot w) - t(w \cdot v) + w \cdot w$$

de modo que, pela simetria, segue que

$$0 \leq (tv - w) \cdot (tv - w) = (v \cdot v)t^2 - 2(v \cdot w)t + w \cdot w$$

Logo o polinômio quadrático na direita possui no máximo uma raiz real, o que ocorre se e só se o seu discriminante é menor ou igual a zero, de modo que

$$\Delta = 4(v \cdot w)^2 - 4(v \cdot v)(w \cdot w) \leq 0$$

A desigualdade de Schwarz é obtida dividindo essa desigualdade por 4 e isolando $(v \cdot w)^2$ no lado esquerdo. A igualdade ocorre se e só se $\Delta = 0$, o que ocorre se e só se existe uma raiz real t, o que ocorre se e só

$$0 = (tv - w) \cdot (tv - w)$$

o que ocorre se e só se $tv - w = 0$, pela positividade do produto escalar.

□

A partir da desigualdade de Schwarz, podemos definir o comprimento de vetores, denominado *valor absoluto* e definido por

$$\boxed{|v| = \sqrt{v \cdot v}}$$

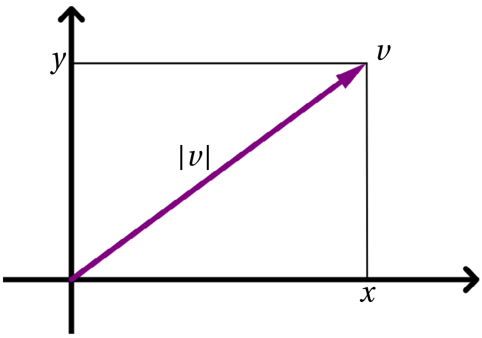
onde v é vetor.

Exemplos

1) No espaço $\mathbb{R}^n$, o valor absoluto de $v = (x_1, \ldots, x_n)$ é dado por

$$\boxed{|v| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$$

e é a generalização natural do comprimento de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.



Em $\mathbb{R}^2$, o comprimento de $v = (x, y)$ é dado por

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2) No espaço $\mathbb{P}$, o valor absoluto de p, onde

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

é dada por

$$\boxed{|p| = \sqrt{c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_n^2}}$$

Podemos mostrar que o valor absoluto é uma *norma*, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

Positiva Para todo vetor não nulo v, temos que $|v| > 0$ e temos que $|0| = 0$.

Homogênea Para todos os vetores v e todo escalar t, temos que $|tv| = |t||v|$.

Triangular Para todos os vetores v, w, temos que $|v + w| \leq |v| + |w|$.

Proposição 1.11

O valor absoluto é uma norma.

Prova:

A positividade da norma segue diretamente da positividade do produto escalar. A homogeneidade da norma segue da bilinearidade do produto escalar, uma vez que

$$|tv|^2 = (tv)\cdot(tv) = t^2(v\cdot v) = |t|^2|v|^2$$

bastando então extrair a raiz quadrada. A desigualdade triangular segue da bilinearidade e da desigualdade de Schwarz, uma vez que

$$\begin{aligned}
|v+w|^2 &= (v+w)\cdot(v+w) \\
&= v\cdot v + v\cdot w + w\cdot v + w\cdot w \\
&\leq |v|^2 + |v||w| + |w||v| + |w|^2 \\
&\leq (|v|+|w|)^2
\end{aligned}$$

bastando então extrair a raiz quadrada.

□

Existe uma maneira de escrever o produto escalar em termos do valor absoluto, denominada *fórmula de polarização*.

Proposição 1.12: Polarização

Temos que

$$\boxed{v \cdot w = \frac{|v|^2 + |w|^2 - |v-w|^2}{2}}$$

para todos os vetores v, w de V.

Prova:

Temos que

$$|v-w|^2 = (v-w)\cdot(v-w) = v\cdot v - v\cdot w - w\cdot v + w\cdot w$$

de modo que

$$|v-w|^2 = |v|^2 - 2(v\cdot w) + |w|^2$$

O resultado segue isolando $v \cdot w$ na equação acima.

□

A partir do valor absoluto, podemos definir a distância entre vetores, denominada *distância induzida pelo valor absoluto* e definida por

$$\boxed{d(v,w) = |v-w|}$$

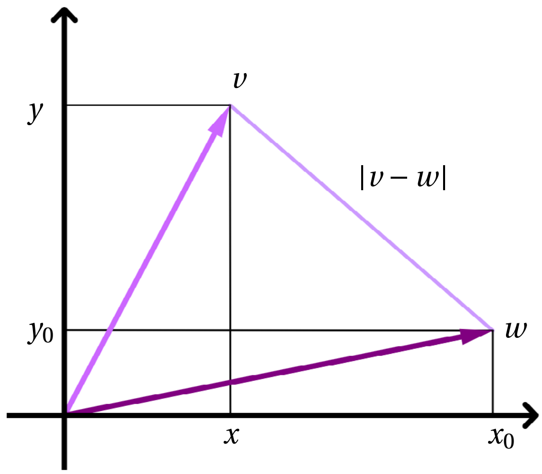
onde v, w são vetores.

Exemplos

1) No espaço $\mathbb{R}^n$, a distância induzida entre $v = (x_1, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, \ldots, y_n)$ é dada por

$$\boxed{d(v,w) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}}$$

e é a generalização natural da distância entre vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.



Em $\mathbb{R}^2$, a distância entre $v = (x, y)$ e $w = (x_0, y_0)$ é dada por

$$d(v, w) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

2) No espaço $\mathbb{P}$, a distância induzida entre p e q, com

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \quad \text{e} \quad q(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m$$

é dada por

$$\boxed{d(p, q) = \sqrt{(c_0 - d_0)^2 + (c_1 - d_1)^2 + \cdots + (c_k - d_k)^2}}$$

onde k é o menor valor entre m e n.

Podemos mostrar que a distância induzida pelo valor absoluto é realmente uma *distância*, ou seja, que satisfaz as seguintes propriedades:

Positiva Para todos os vetores v, w, temos que $d(v,w) \geq 0$. Além disso, temos que $d(v,w) = 0$ se e só se $v = w$.

Simetria Para todos os vetores v, w, temos que $d(v,w) = d(w,v)$.

Triangular Para todos os vetores u, v, w, temos que $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

Proposição 1.13

A distância induzida pelo valor absoluto é uma distância.

Prova:

A positividade da distância segue diretamente da positividade do valor absoluto. A simetria da distância segue da homogeneidade do valor absoluto, uma vez que

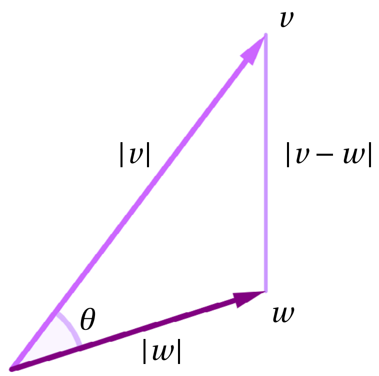
$$d(v,w) = |v-w| = |(-1)(w-v)| = |-1||w-v| = d(w,v)$$

A desigualdade triangular da distância segue da desigualdade triangular do valor absoluto, uma vez que

$$\begin{aligned} d(u,w) &= |u-w| \\ &= |u-v+v-w| \\ &\leq |u-v|+|v-w| \\ &= d(u,v)+d(v,w) \end{aligned}$$

□

Com essa definição de distância, assim como no caso do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$, o ângulo θ entre v e w pode ser obtido considerando o triângulo formado pela ponta desses dois vetores e pela origem.



Proposição 1.14

O cosseno do ângulo θ entre v e w é dado por

$$\boxed{\cos\theta = \frac{v\cdot w}{|v||w|}}$$

Prova:

O lado oposto ao ângulo θ tem comprimento $|v-w|$ e a Lei dos Cossenos afirma que

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Desenvolvendo o lado esquerdo através da definição

$$|v-w|^2 = (v-w)\cdot(v-w)$$

e das propriedades do produto escalar, obtemos que

$$|v|^2 + |w|^2 - 2(v\cdot w) = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

Cancelando as parcelas comuns aos dois lados, segue que

$$-2(v\cdot w) = -2|v||w|\cos\theta$$

Dividindo por -2 e isolando $\cos\theta$, obtemos a fórmula do enunciado.

$\square$

Assim como no caso do plano e do espaço, o ângulo θ é reto se e só se $v \cdot w = 0$. Nesse contexto mais abstrato, dois vetores perpendiculares são também denominados *ortogonais*. Além disso, temos que θ é agudo se e só se $v \cdot w > 0$ e que θ é obtuso se e só se $v \cdot w < 0$. No caso do plano, o conjunto dos vetores ortogonais a um dado vetor é uma reta passando pela origem. No caso do espaço, o conjunto dos vetores ortogonais a um dado vetor w é um plano passando pela origem. De modo mais geral, o conjunto dos vetores ortogonais a um dado vetor w é um subespaço, dado por

$$\boxed{w^\perp = \{v : v \cdot w = 0\}}$$

e denominado *hiperplano ortogonal a* w.

1.3 Decomposições

Existem subconjuntos especiais de um espaço vetorial, denominados *subespaços*, que podem ser vistos eles mesmos como espaços vetoriais. Temos que um subconjunto W não-vazio de um espaço vetorial V é um subespaço, quando ele é fechado para a soma e para o produto por escalar. Ou seja, para todos $w, w_0 \in W$, temos que $w + w_0 \in W$ e, para todo escalar t, temos que $tw \in W$.

Proposição 1.15

Todo subespaço é um espaço vetorial.

Prova:

Basta verificarmos que o elemento neutro e os inversos dos elementos do subespaço pertencem ao subespaço, pois todas as outras propriedades de espaço vetorial são satisfeitas automaticamente. Mas, de fato, para todo $w \in W$, temos que $-w = -1w \in W$, de modo que $0 = -w + w \in W$.

□

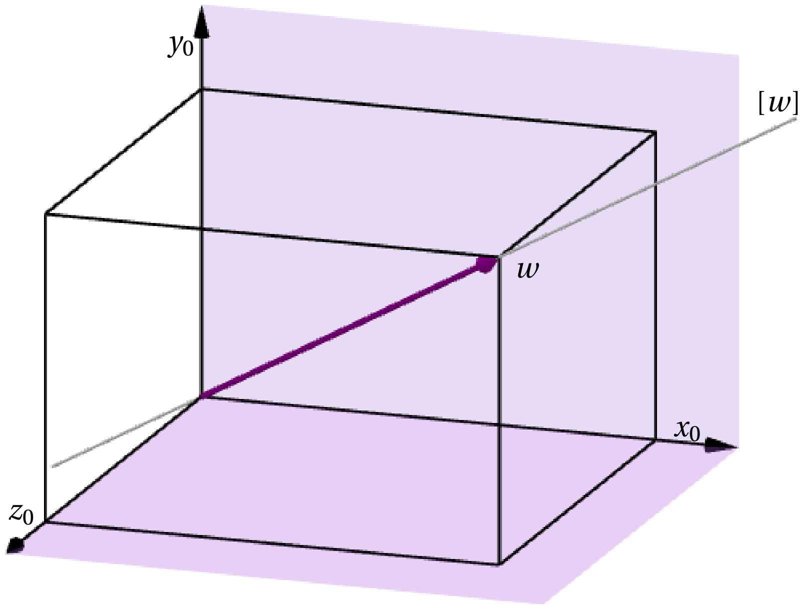
Apresentamos a seguir alguns dos mais importantes exemplos de subespaços para o nosso contexto.

Exemplos

1) O espaço todo V e o espaço 0, que contem apenas o vetor nulo, são exemplos óbvios, denominados *subespaços triviais*.

2) A *reta gerada por w*, onde w é qualquer vetor não nulo de V, dada por

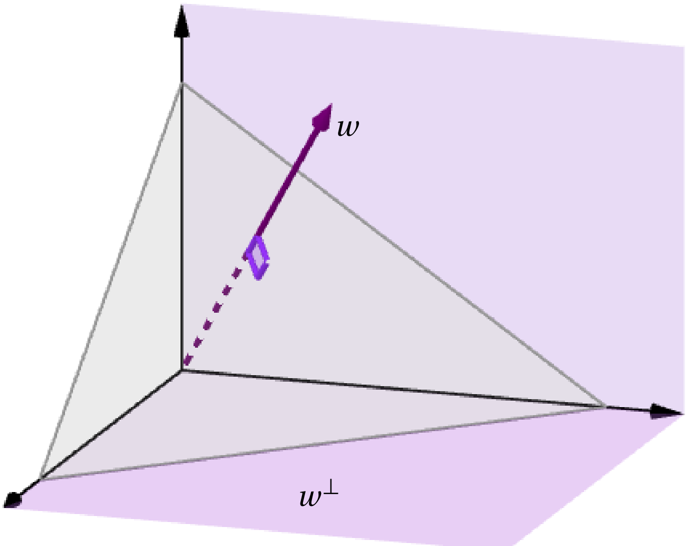
$$[w] = \{tw : t \in \mathbb{R}\}$$



Vamos ver mais adiante que os subespaços de $\mathbb{R}^2$ são dados pelos subespaços triviais e pelas retas passando pela origem.

3) No $\mathbb{R}^3$, o *plano perpendicular a w*, onde w é qualquer vetor não nulo de $\mathbb{R}^3$, dado por

$$w^{\perp} = \{v : v \cdot w = 0\}$$



Em particular, o plano perpendicular ao vetor $(0,0,1)$, que é dado por

$$\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Vamos ver mais adiante que os subespaços de $\mathbb{R}^3$ são dados pelos subespaços triviais, e pelas retas e pelos planos passando pela origem.

4) Um exemplo bem diferente dos anteriores é o espaço $\mathbb{P}$ das funções polinomiais p, com

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

onde $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, que é um subespaço do espaço $\mathbb{F}$, das funções reais definidas na reta toda. Já o espaço $\mathbb{P}_n$ das funções polinomiais de grau menor ou igual a n é um subespaço de $\mathbb{P}$. Além disso, temos que $\mathbb{P}_n$ é um subespaço de $\mathbb{P}_{n+1}$, de modo que temos as seguintes inclusões

$$\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{P}_n \subset \cdots \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{F}$$

Vamos agora mostrar como decompor espaços vetoriais como combinações de seus subespaços. Dados U e W dois subespaços de V, dizemos que V se decompõe numa *soma direta de* U *com* W denotada por

$$\boxed{V = U \oplus W}$$

quando cada $v \in V$ pode ser escrito de forma única como

$$\boxed{v = u + w}$$

onde

$$\boxed{u \in U}$$

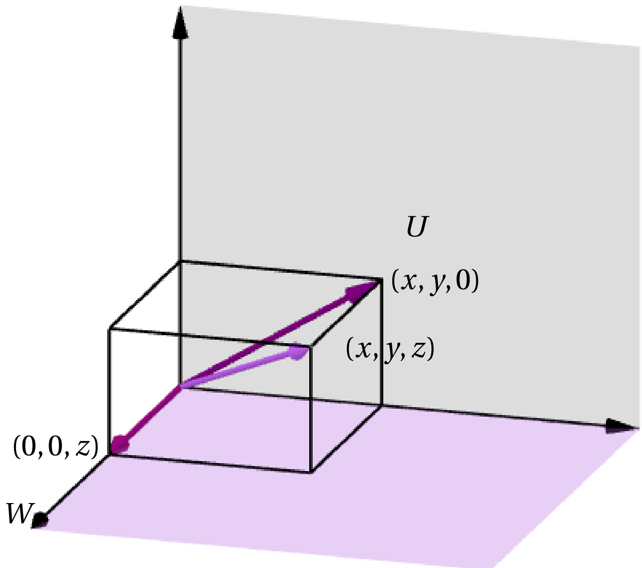
denominada *projeção de* v *em* U *paralela a* W, enquanto

$$\boxed{w \in W}$$

denominada *projeção de* v *em* W *paralela a* U.

Exemplos

1) O espaço todo se decompõe na soma direta $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, onde U é o plano determinado pelos eixos horizontal e vertical e W é o eixo de profundidade.



De fato, temos que

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) \in U + W$$

de modo que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2) Temos que $\mathbb{R}^2$ se decompõe na soma direta $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, onde $U = [(1,0)]$ com $W = [(1,1)]$. De fato, vamos mostrar que todo $v \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito de maneira única como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$. Se $v = (x, y)$, vamos determinar

$$u = (s, 0) = s(1, 0) \in U$$

e

$$w = (t, t) = t(1, 1) \in W$$

tais que

$$(x, y) = (s, 0) + (t, t) = (s + t, t)$$

Temos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} s+t & = & x \\ t & = & y \end{cases}$$

cuja única solução é $s = x - y$ e $t = y$. Logo

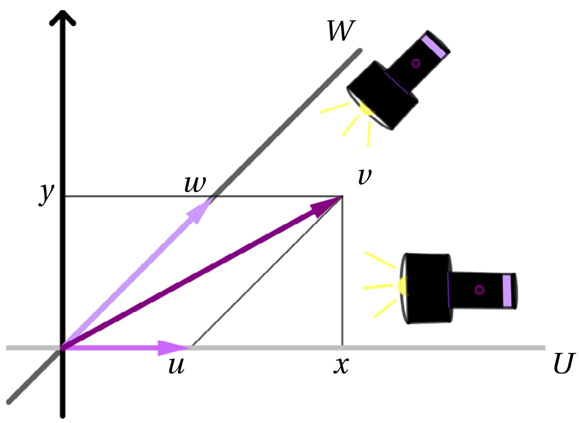
$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$$

de modo que a projeção de $v = (x, y)$ em U paralela a W é dada por

$$u = (x - y, 0)$$

enquanto a projeção de $v = (x, y)$ em W paralela a U é dada por

$$w = (y, y)$$



A decomposição $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ não é ortogonal, pois

$$s(1,0) \cdot t(1,1) = st \neq 0$$

quando s e t são não nulos.

3) Temos que $\mathbb{R}^2$ se decompõe na soma direta $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, onde $U = [(1,-1)]$ com $W = [(1,1)]$. De fato, vamos mostrar que todo $v \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito de maneira única como $v = u + w$, onde

$u \in U$ e $w \in W$. Se $v = (x, y)$, vamos determinar

$$u = (s, -s) = s(1, -1) \in U$$

e

$$w = (t, t) = t(1, 1) \in W$$

tais que

$$(x, y) = (s, -s) + (t, t) = (s + t, t - s)$$

Temos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} s + t & = & x \\ -s + t & = & y \end{cases}$$

cuja única solução é $s = (x - y)/2$ e $t = (x + y)/2$. Logo

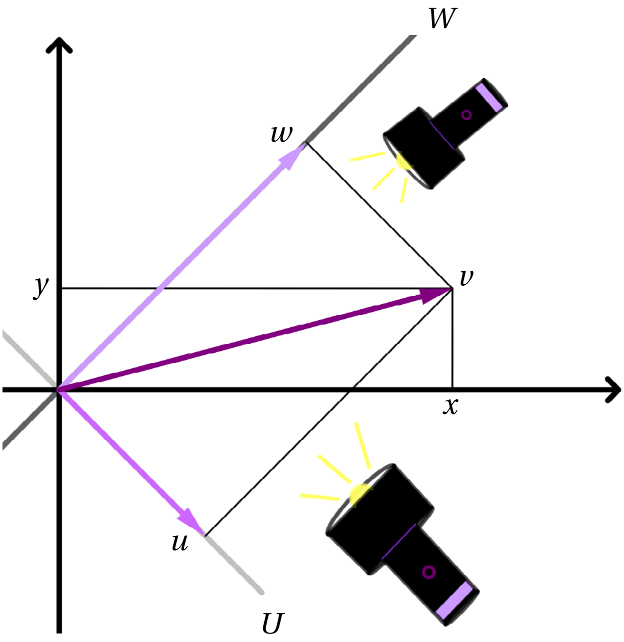
$$(x, y) = \left(\frac{x - y}{2}, -\frac{x - y}{2}\right) + \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2}\right)$$

de modo que a projeção de $v = (x, y)$ em U paralela a W é dada por

$$u = \left(\frac{x - y}{2}, -\frac{x - y}{2}\right)$$

enquanto a projeção de $v = (x, y)$ em W paralela a U é dada por

$$w = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x + y}{2}\right)$$



A decomposição $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ é ortogonal, pois

$$s(1,-1) \cdot t(1,1) = 0$$

para quaisquer s e t.

O próximo resultado mostra que o espaço sempre pode ser decomposto numa dada reta e no hiperplano ortogonal a ela.

Proposição 1.16

Para todo vetor w não nulo, temos que

$$\boxed{V = w^{\perp} \oplus [w]}$$

e essa decomposição é ortogonal. Além disso, a projeção de v em $[w]$ paralela a $w^{\perp}$, denominada *projeção ortogonal de v em $[w]$*, é dada por

$$\boxed{\frac{v \cdot w}{|w|^2} w}$$

enquanto a projeção de v em $w^{\perp}$ paralela a $[w]$, denominada *projeção ortogonal de v em $w^{\perp}$*, é dada por

$$\boxed{v - \frac{v \cdot w}{|w|^2} w}$$

Prova:

Para todo $v \in V$, temos que

$$v = v - tw + tw$$

e também que $tw \in [w]$, onde $t = (v \cdot w)/|w|^2$. Além disso, temos que $v - tw \in w^{\perp}$, uma vez que

$$(v - tw) \cdot w = v \cdot w - tw \cdot w = 0$$

Essa decomposição é única, pois se

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$

onde $u_1, u_2 \in w^{\perp}$, enquanto $w_1, w_2 \in [w]$, então

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in w^{\perp} \cap [w]$$

Contudo, só existe um vetor que é simultaneamente múltiplo de w e perpendicular a w, que é o vetor nulo, mostrando que $u_1 = u_2$ e também que $w_2 = w_1$.

$\square$

Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^2$, se $w = (1,1)$, temos que $[w]$ é igual a W do exemplo 3 da lista anterior de exemplos, enquanto $w^\perp$ é igual a U desse mesmo exemplo. Pelas fórmulas obtidas na proposição anterior, se $v = (x, y)$, temos que

$$\frac{(x,y)\cdot(1,1)}{|(1,1)|^2}(1,1) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

e também que

$$(x,y) - \frac{(x,y)\cdot(1,1)}{|(1,1)|^2}(1,1) = \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right)$$

que são as projeções associadas à decomposição $V = U \oplus W$ do exemplo citado.

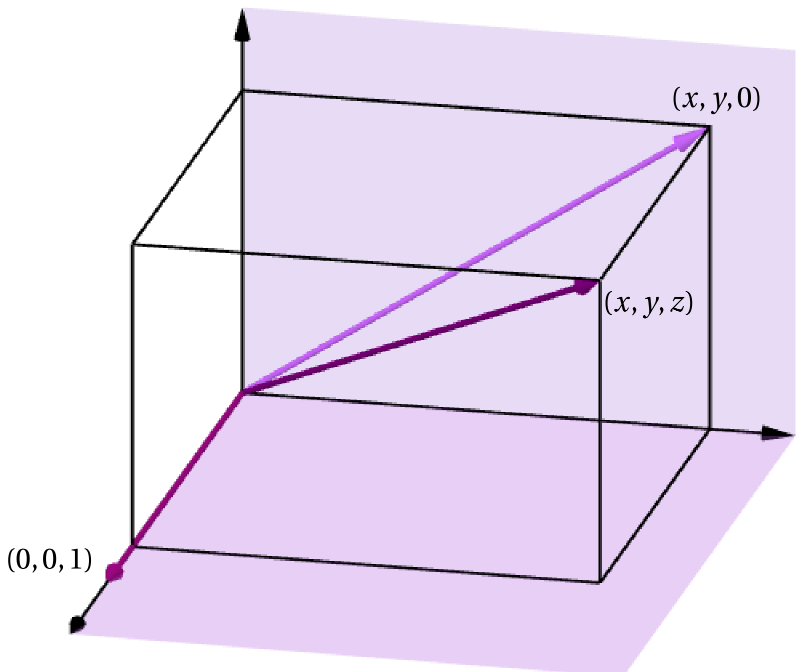
2) Em $\mathbb{R}^3$, se $w = (1,1,1)$ e $v = (x, y, z)$, pelas fórmulas obtidas na proposição anterior, temos que

$$\frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{|(1,1,1)|^2}(1,1,1) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right)$$

e também que

$$(x,y,z) - \frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{|(1,1,1)|^2}(1,1,1) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right)$$

3) Em $\mathbb{R}^3$, se $w = (0,0,1)$, temos que $[w]$ é o eixo de profundidade, enquanto $w^\perp$ é o plano perpendicular ao eixo de profundidade, ou seja, o plano determinado pelos eixos horizontal e vertical.



Pelas fórmulas obtidas na proposição anterior, se $v = (x, y, z)$, temos que

$$\frac{(x, y, z) \cdot (0, 0, 1)}{|(0, 0, 1)|^2}(0, 0, 1) = (0, 0, z)$$

e também que

$$(x, y, z) - \frac{(x, y, z) \cdot (0, 0, 1)}{|(0, 0, 1)|^2}(0, 0, 1) = (x, y, 0)$$

A *distância entre v e o hiperplano $w^{\perp}$*, denotada por $d(v, w^{\perp})$, é definida como a menor distância entre v e os vetores de $w^{\perp}$.

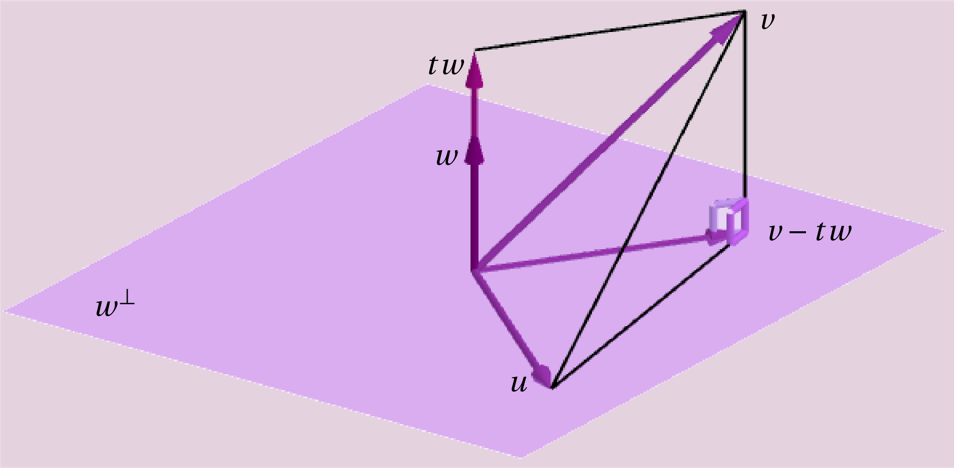
Proposição 1.17

Para todo vetor w não nulo, temos que

$$d(v, w^{\perp}) = \left|\frac{v \cdot w}{|w|}\right|$$

Prova:

Se $t = (v \cdot w)/|w|^2$, pela proposição acima $v - tw \in w^{\perp}$. Logo, para todo $u \in w^{\perp}$, temos que $v - tw - u \in w^{\perp}$, de modo que o triângulo com vértices em v, u e $v - tw$ é retângulo com hipotenusa de comprimento $|v - u|$ e catetos de comprimento $|v - (v - tw)|$ e $|v - tw - u|$.



Pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$|v - u|^2 = |v - (v - tw)|^2 + |v - tw - u|^2 \geq |tw|^2$$

Extraindo a raiz quadrada, segue que

$$|v - u| \geq |tw|$$

para todo $u \in w^\perp$, mostrando que

$$d(v, w^\perp) = |tw|$$

O resultado segue, observando que

$$|tw| = \left|\frac{v \cdot w}{|w|^2}\right| |w| = \left|\frac{v \cdot w}{|w|}\right|$$

$\square$

Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^3$, a distância de $v = (x, y, z)$ ao plano ortogonal a $w = (1,1,1)$ é dada por

$$d(v, w^\perp) = \left|\frac{(x, y, z) \cdot (1,1,1)}{|(1,1,1)|}\right| = \frac{|x + y + z|}{\sqrt{3}}$$

2) Em $\mathbb{R}^3$, a distância de $v = (x, y, z)$ ao plano ortogonal a $w = (0,0,1)$ é dada por

$$d(v, w^\perp) = \left|\frac{(x, y, z) \cdot (0,0,1)}{|(0,0,1)|}\right| = |z|$$

1.4 Exercícios

1) Considere $v = (-1,3)$ e $w = (2,1)$.

a) Desenhe a reta paralela a v passando por w. Qual a descrição algébrica dos vetores (x, y) dessa reta?

b) Desenhe a reta paralela a w passando por v. Qual a descrição algébrica dos vetores (x, y) dessa reta?

c) Desenhe a reta perpendicular a v passando pela origem. Qual a descrição algébrica dos vetores (x, y) dessa reta?

d) Desenhe a reta perpendicular a w passando pela origem. Qual a descrição algébrica dos vetores (x, y) dessa reta?

2) Verifique que os espaços abaixo são espaços vetoriais.

   a) O espaço $\mathbb{R}^2$, com a soma dos pares ordenados e o produto por escalar usuais.

   b) O espaço $\mathbb{R}^3$, com a soma dos ternos ordenados e o produto por escalar usuais.

   c) O espaço $\mathbb{R}^n$, com a soma das n-uplas ordenadas e o produto por escalar usuais.

   d) O espaço $\mathbb{F}$, das funções reais definidas na reta toda, com a soma de funções e o produto por escalar usuais.

3) Verifique que os conjuntos abaixo são subespaços.

   a) O conjunto $[(2,1-3)]$, dos vetores de $\mathbb{R}^3$ múltiplos do vetor $(2,1-3)$.

   b) O conjunto $(2,1-3)^\perp$, dos vetores de $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(2,1-3)$.

   c) O conjunto $[(2,1-3),(2,1,0)]$, dos vetores de $\mathbb{R}^3$ da forma

$$(x,y,z) = s(2,1-3) + t(2,1,0)$$

   onde s,t são escalares.

4) (Abstrato) Verifique que os conjuntos abaixo são subespaços.

   a) O conjunto $[w]$, dos vetores de V múltiplos do vetor w.

   b) O conjunto $w^\perp$, dos vetores de V ortogonais ao vetor w.

   c) O conjunto $[w_1,\dots,w_k]$, dos vetores de V da forma

$$v = t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k$$

   onde $t_1,\dots,t_k$ são escalares.

   d) O conjunto $\mathbb{P}$, das funções de $\mathbb{F}$ que são polinomiais.

   e) O conjunto $\mathbb{P}_n$, das funções polinomiais de grau menor ou igual a n.

   f) Os conjuntos $U = \{p \in \mathbb{P} : x^2 - 1 \text{ divide } p(x)\}$ e $W = \{p \in \mathbb{P} : p(-1) = p(1) = 0\}$. Qual a relação entre U e W?

5) (Abstrato) Considere U e W subespaços de V. A soma de U e W é definida por:

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

   a) Verifique que $U + W$ é subespaço de V.
   b) Verifique que U e W são subespaços de $U + W$.
   c) Verifique que $U \subset W$, então $U + W = W$.
   d) Verifique que $U \cap W$ é subespaço de V.

6) (Abstrato) Mostre que, se $U \cap W = 0$ e $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ com $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$, então $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

7) (Abstrato) Mostre que se v é não nulo e $u = \dfrac{v}{|v|}$, então $|u| = 1$.

8) Determine a norma dos vetores v e w e também o cosseno do ângulo entre eles. Esse ângulo é agudo, reto ou obtuso?

   a) Se $v = (-1, 3)$ e $w = (2, 1)$.
   b) Se $v = (-1, 3, 0)$ e $w = (2, 1, 0)$.
   c) Se $v = (-1, 3, 1)$ e $w = (2, 1, -3)$.
   d) Se $v = (-1, 3, 1, 0)$ e $w = (2, 1, -3, 0)$.
   e) Se $v = (-1, 3, 1, -1)$ e $w = (2, 1, -3, -2)$.

9) Mostre que o produto escalar do $\mathbb{R}^n$ é de fato um produto escalar.

10) (Abstrato) Use a bilinearidade para mostrar que $v \cdot 0 = 0$ para todo vetor v.

11) Verifique que $V = U \oplus W$, determine as projeções de v em relação a essa decomposição e decida se as projeções são ortogonais. Desenhe todos os objetos quando V for o plano.

   a) Se $v = (x, y)$, $U = \{(2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(6s, -4s) : s \in \mathbb{R}\}$.
   b) Se $v = (x, y)$, $U = \{(2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(s, -2s) : s \in \mathbb{R}\}$.
   c) Se $v = (x, y, z)$, $U = \{(t, 2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(r, s, 0) : r, s \in \mathbb{R}\}$.
   d) Se $v = (x, y, z)$, $U = \{(0, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(r, 2r + s, 3s) : r, s \in \mathbb{R}\}$.
   e) Se $v = (x, y, z)$, $U = \{(0, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(r, 2s, -6s) : r, s \in \mathbb{R}\}$.

12) Determine o subespaço $w^\perp$, as projeções de v em relação à decomposição $V = w^\perp \oplus [w]$ e a distância $d(v, w^\perp)$. Desenhe todos os objetos quando V for o plano.

a) Se $w = (2,2)$ e $v = (x, y)$.
b) Se $w = (-1,1)$ e $v = (x, y)$.
c) Se $w = (1,0,0)$ e $v = (x, y, z)$.
d) Se $w = (0,1,0)$ e $v = (x, y, z)$.
e) Se $w = (1,1,0)$ e $v = (x, y, z)$.
f) Se $w = (1,0,1)$ e $v = (x, y, z)$.
g) Se $w = (0,1,1)$ e $v = (x, y, z)$.
h) Se $w = (1,1,1)$ e $v = (x, y, z)$.

13) (Desafio) O objetivo desse exercício é mostrar que uma dada distância coincide com a distância induzida por uma norma se e só se ela for homogênena, de modo que

$$d(tv, tw) = |t|d(v, w)$$

para todo escalar t e que todas as translações são isometrias, de modo que

$$d(u + v, u + w) = d(v, w)$$

para todos os vetores u, v, w.

a) Mostre que, se $d(v, w) = |v - w|$, então a distância d é homogênena e todas as translações são isometrias.
b) Mostre que, se a distância d é homogênena e todas as translações são isometrias, mostre que $|v| = d(v, 0)$ é uma norma e que $d(v, w) = |v - w|$.

14) (Desafio) O objetivo desse exercício é mostrar que uma dada norma coincide com a norma induzida por uma produto escalar se e só se ela satisfizer a denominada *Lei dos paralelogramos*, de modo que

$$|v + w|^2 + |v - w|^2 = 2|v|^2 + 2|w|^2$$

para todos os vetores v, w.

a) Mostre que, se $|v|^2 = v \cdot v$, então a norma $|\cdot|$ satisfaz a Lei dos paralelogramos.

b) Mostre que, se a norma $|\cdot|$ satisfaz a Lei dos paralelogramos, mostre que

$$v \cdot w = \frac{|v+w|^2 - |v|^2 - |w|^2}{2}$$

é um produto escalar e que $|v|^2 = v \cdot v$.

Dica: Para verificar a bilinearidade, primeiro mostre que

$$u \cdot (v+w) = 2(\tfrac{u}{2} \cdot v) + 2(\tfrac{u}{2} \cdot w)$$

através da Lei dos paralelogramos, escrevendo $|u+v+w|^2 = |(\frac{u}{2}+v)+(\frac{u}{2}+w)|^2$. Conclua que $u \cdot v = 2(\frac{u}{2} \cdot v)$ e em seguida que $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$. Use isso para mostrar que $u \cdot tv = t(u \cdot v)$, primeiro para t natural, depois para t inteiro e para t racional e, finalmente, para t real, usando a densidade dos racionais nos reais.

15) (Desafio) Dado um subespaço W de V, o denominado *espaço ortogonal a* W é dado por

$$W^\perp = \{v : v \cdot w = 0 \text{ para todo } w \text{ em } W\}$$

Um subespaço é denominado *fechado* quando $(W^\perp)^\perp = W$.

a) Verifique que $W^\perp$ é um subespaço.

b) Mostre $W \cap W^\perp = 0$.

c) Se $V = W \oplus W^\perp$, então W é fechado.

Observação: Um espaço vetorial com produto escalar é denominado *de Hilbert* quando vale a volta do último item. Nesse caso, a projeção ortogonal está definida se e só se o subespaço é fechado.

CAPÍTULO 2

TRANSFORMAÇÕES

Depois de termos apresentado os espaços vetoriais no capítulo anterior, vamos agora considerar as transformações entre espaços vetoriais, cujo exemplo mais importante no nosso contexto é o das *transformações lineares*. Uma *transformação linear* T do espaço vetorial V para o espaço vetorial W é uma função $T : V \to W$, que satisfaz as seguintes propriedades:

Soma Para todos os vetores v, v_0 de V, temos que $T(v + v_0) = Tv + Tv_0$.

Produto Para todo vetor v de V e todo escalar t, temos que $T(tv) = tTv$.

Quando uma transformação está definida do espaço V para ele mesmo, ela é denominada de *operador*. A *soma ou diferença de duas transformações lineares S e T do mesmo espaço V para o mesmo espaço W* é definida por

$$(S \pm T)v = Sv \pm Tv$$

para todo vetor v de V. O *produto de uma transformação linear T por um escalar t* é definido por

$$(tT)v = tTv$$

para todo vetor v de V. Não é difícil verificar que a soma ou diferença de transformações lineares e o produto de transformação linear por escalar são também transformações lineares. Além disso, o *produto de duas transformações lineares* S *e* T é definida por

$$(ST)v = S(Tv)$$

para todo vetor v de V, sempre que o domínio da S contiver a imagem da T. Não é difícil verificar que o produto de transformações lineares é também uma transformação linear. Podemos também considerar o produto de um operador linear por si mesmo várias vezes, que é denotado com o uso da notação de potência, de modo que

$$T^2 = TT, \quad T^3 = TT^2, \quad T^4 = TT^3, \quad \ldots$$

Nesse capítulo, vamos analisar os principais exemplos e principais propriedades de transformações e operadores lineares. Um dos exemplos mais importantes de operadores lineares é o *operador identidade*, definido por

$$Iv = v$$

para todo vetor v de V.

2.1 Projeções, reflexões e nilpotentes

Podemos olhar as projeções introduzidas no capítulo anterior como transformações. Relembrando, dada uma decomposição em soma direta $V = U \oplus W$, todo $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como

$$v = u + w$$

onde $u \in U$ e $w \in W$. A *projeção de* v *em* U *paralela a* W será denotada por

$$\boxed{P_U^W v = u}$$

enquanto a *projeção de* v *em* W *paralela a* U será denotada por

$$\boxed{P_W^U v = w}$$

Quando não gerar confusão, P_U^W e P_W^U serão denotadas, respectivamente, por P_U e P_W. Como u está em U e w está em W, podemos considerar as projeções P_U e P_W como transformações, respectivamente, de V para U e de V para W. Por outro lado, como U e W são subconjuntos de V, podemos alternativamente considerar as projeções P_U e P_W como operadores de V para si mesmo.

Proposição 2.1

Temos que P_U e P_W são lineares.

Prova:

Vamos demonstrar apenas para a projeção $P = P_U$. A demonstração para a projeção P_W é inteiramente análoga. Todos $v, v_0 \in V$, podem ser escritos de maneira única como

$$v = u + w \qquad \text{e} \qquad v_0 = u_0 + w_0$$

onde $u, u_0 \in U$ e $w, w_0 \in W$, de modo que

$$Pv = u \qquad \text{e} \qquad Pv_0 = u_0$$

Por outro lado, somando v e v_0, obtemos que

$$v + v_0 = (u + u_0) + (w + w_0)$$

onde $u + u_0 \in U$ e $w + w_0 \in W$, pois U e W são fechados para soma, uma vez que são subespaços. Como essa decomposição é única, segue que

$$P(v + v_0) = u + u_0 = Pv + Pv_0$$

Finalmente, multiplicando v pelo escalar t, obtemos que

$$tv = tu + tw$$

onde $tu \in U$ e $tw \in W$, pois U e W são fechados para o produto por escalar, uma vez que são subespaços. Como essa decomposição é única, segue que

$$P(tv) = tu = tPv$$

□

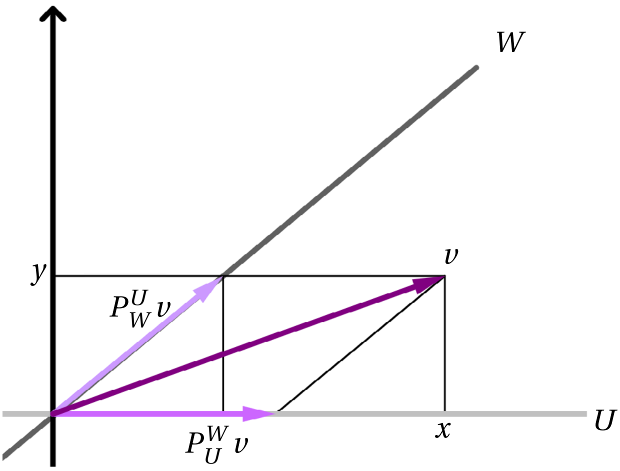
Exemplos

1) No capítulo anterior, vimos que $\mathbb{R}^2$ se decompõe como soma direta de $U = [(1,0)]$ com $W = [(1,1)]$, de modo que a projeção de $v = (x, y)$ em U paralela a W é dada por

$$P_U(x, y) = (x - y, 0)$$

enquanto a projeção de $v = (x, y)$ em W paralela a U é dada por

$$P_W(x, y) = (y, y)$$



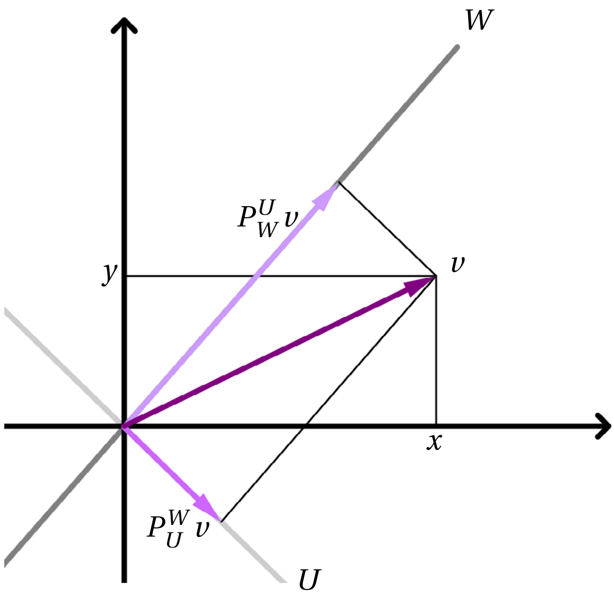
Podemos considerar P_U como uma transformação de $\mathbb{R}^2$ para $U = [(1,0)]$ ou como um operador de $\mathbb{R}^2$ para si mesmo. Da mesma forma, podemos considerar P_W como uma transformação de $\mathbb{R}^2$ para $W = [(1,1)]$ ou como um operador de $\mathbb{R}^2$ para si mesmo.

2) No capítulo anterior, também vimos que $\mathbb{R}^2$ se decompõe como soma direta de $U = [(1,-1)]$ com $W = [(1,1)]$, de modo que a projeção de $v = (x, y)$ em U paralela a W é dada por

$$P_U(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right)$$

enquanto a projeção de $v = (x, y)$ em W paralela a U é dada por

$$P_W(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$



Podemos considerar P_U como uma transformação de $\mathbb{R}^2$ para $U = [(1,0)]$ ou como um operador de $\mathbb{R}^2$ para si mesmo. Da mesma forma, Podemos considerar P_W como uma transformação de $\mathbb{R}^2$ para $W = [(1,1)]$ ou como um operador de $\mathbb{R}^2$ para si mesmo.

Além das projeções, podemos introduzir um outro tipo de transformações lineares associadas a decomposições em soma direta. Dada uma decomposição em soma direta $V = U \oplus W$, escreva cada $v \in V$ de maneira única como

$$v = u + w$$

onde $u \in U$ e $w \in W$. A *reflexão de v com espelho em U paralela a W* é dada por

$$\boxed{R_U^W\, v = u - w}$$

enquanto a *reflexão de v com espelho em W paralela a U* é dada por

$$\boxed{R_W^U\, v = -u + w}$$

Quando não gerar confusões, R_U^W e R_W^U serão denotadas, respectivamente, por R_U e R_W. Como $u - w$ e $-u + w$ em geral não estão nem em U, nem em W, as reflexões devem ser vistas como operadores de V para si mesmo.

Proposição 2.2

Temos que

$$\boxed{R_U = P_U - P_W = -R_W}$$

Em particular, R_U e R_W são operadores lineares de V para si mesmo.

Prova:

Temos que

$$R_U v = u - w = P_U v - P_W v = (P_U - P_W)\, v$$

e que

$$R_W v = -u + w = -R_U v$$

para todo vetor v de V. A segunda parte é imediata pois subtração de operadores lineares é operador linear.

□

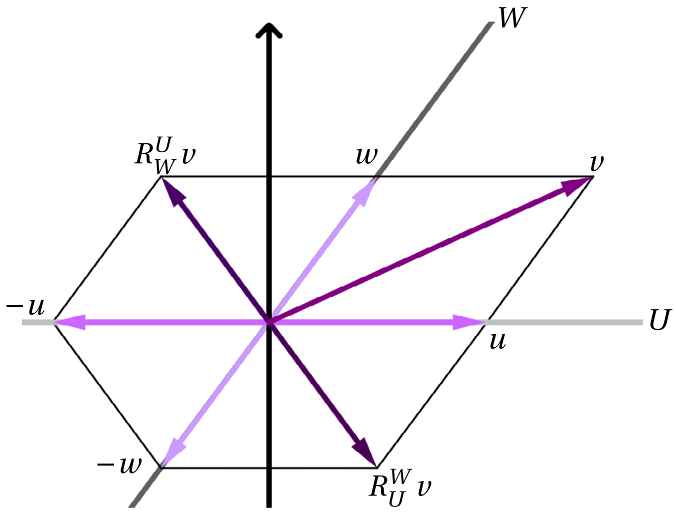
Exemplos

1) No exemplo anterior, vimos que $\mathbb{R}^2$ se decompõe como soma direta de $U = [(1,0)]$ com $W = [(1,1)]$, de modo que a reflexão de $v = (x, y)$ com espelho em U paralela a W é dada por

$$R_U(x, y) = P_U(x, y) - P_W(x, y) = (x - y, 0) - (y, y) = (x - 2y, -y)$$

enquanto a reflexão de $v = (x, y)$ com espelho em U paralela a W é dada por

$$R_W(x, y) = -R_U(x, y) = (2y - x, y)$$

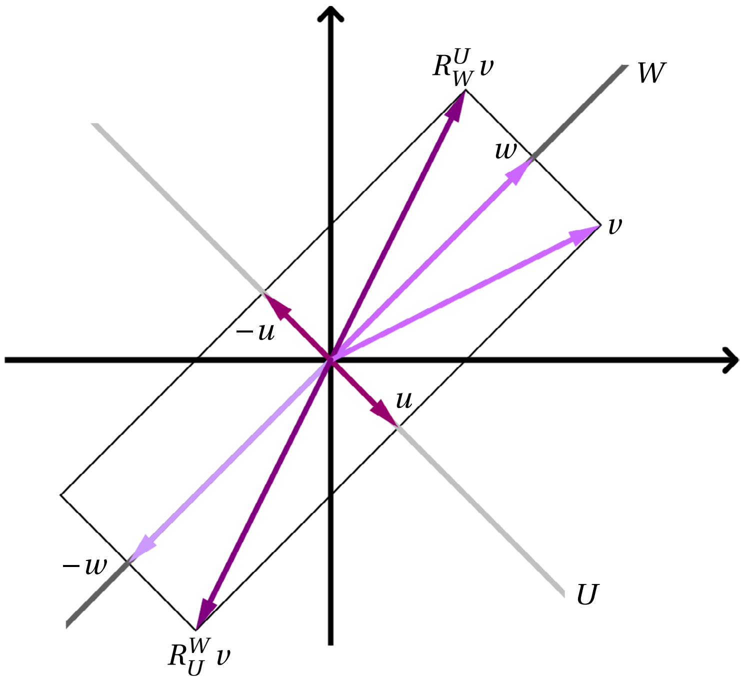


2) No exemplo anterior, vimos que $\mathbb{R}^2$ se decompõe como soma direta de $U = [(1,-1)]$ com $W = [(1,1)]$, de modo que a reflexão de $v = (x, y)$ com espelho em U paralela a W é dada por

$$\begin{aligned} R_U(x, y) &= P_U(x, y) - P_W(x, y) \\ &= \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right) - \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \\ &= (-y, -x) \end{aligned}$$

enquanto a reflexão de $v = (x, y)$ com espelho em U paralela a W é dada por

$$R_W(x,y) = -R_U(x,y) = (y,x)$$



As projeções e reflexões associadas à decomposição $V = [w] \oplus w^{\perp}$ são determinadas na proposição abaixo, onde utilizamos uma notação mais leve do que as notações introduzidas acima.

Proposição 2.3

A projeção de v em $[w]$ paralela a $w^\perp$, denominada *projeção ortogonal em* $[w]$, é dada por

$$\boxed{P_w v = \frac{v \cdot w}{|w|^2} w}$$

enquanto a projeção de v em $w^\perp$ paralela a $[w]$, denominada *projeção ortogonal em* $w^\perp$, é dada por

$$\boxed{P_{w^\perp} v = v - \frac{v \cdot w}{|w|^2} w}$$

A reflexão de v com espelho em $w^\perp$ paralela a $[w]$, denominada *reflexão ortogonal com espelho em* $w^\perp$, é dada por

$$\boxed{R_{w^\perp} v = v - 2\frac{v \cdot w}{|w|^2} w}$$

Prova:

As projeções foram determinadas no final da última seção do capítulo anterior. Segue então que

$$\begin{aligned} R_{w^\perp} v &= P_{w^\perp} v - P_w v \\ &= v - \frac{v \cdot w}{|w|^2} w - \frac{v \cdot w}{|w|^2} w \\ &= v - 2\frac{v \cdot w}{|w|^2} w \end{aligned}$$

□

Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^2$, se $w = (1,1)$, temos que $[w]$ é igual a W do exemplo 2 da listas anteriores de exemplos, enquanto $w^{\perp}$ é igual a U. Pelas fórmulas obtidas na proposição anterior, se $v = (x, y)$, temos que

$$P_w(x,y) = \frac{(x,y)\cdot(1,1)}{|(1,1)|^2}(1,1) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

e também que

$$P_{w^{\perp}}(x,y) = (x,y) - P_w(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right)$$

são iguais às projeções associadas à decomposição $V = U \oplus W$ do exemplo citado. Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} R_{w^{\perp}}(x,y) &= (x,y) - 2\frac{(x,y)\cdot(1,1)}{|(1,1)|^2}(1,1) \\ &= (x,y) - 2\frac{x+y}{2}(1,1) \\ &= (-y,-x) \end{aligned}$$

2) Em $\mathbb{R}^3$, se $w = (1,1,1)$ e $v = (x,y,z)$, pelas fórmulas obtidas na proposição anterior, temos que

$$P_w(x,y,z) = \frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{|(1,1,1)|^2}(1,1,1) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right)$$

e também que

$$\begin{aligned} P_{w^{\perp}}(x,y,z) &= (x,y,z) - P_w(x,y,z) \\ &= \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right) \end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
R_{w^\perp}(x,y,z) &= (x,y,z) - 2\frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{|(1,1,1)|^2}(1,1,1) \\
&= (x,y,z) - 2\frac{x+y+z}{3}(1,1,1) \\
&= \left(\frac{x-2y-2z}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z}{3}\right)
\end{aligned}$$

3) Em $\mathbb{R}^3$, se $w = (0,0,1)$, temos que $[w]$ é o eixo de profundidade, enquanto $w^\perp$ é o plano perpendicular ao eixo de profundidade, ou seja, o plano determinado pelos eixos horizontal e vertical. Pelas fórmulas obtidas na proposição anterior, se $v = (x,y,z)$, temos que

$$P_w(x,y,z) = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|(0,0,1)|^2}(0,0,1) = (0,0,z)$$

e também que

$$P_{w^\perp}(x,y,z) = (x,y,z) - P_w(x,y,z) = (x,y,0)$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
R_{w^\perp}(x,y,z) &= (x,y,z) - 2\frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|(0,0,1)|^2}(0,0,1) \\
&= (x,y,z) - (x,y,z) - 2\frac{z}{1}(0,0,1) \\
&= (x,y,-z)
\end{aligned}$$

Existem maneiras algébricas simples para determinar se um operador é uma projeção ou uma reflexão. Apresentamos primeiro a caracterização algébrica das projeções.

Proposição 2.4

Um operador linear P é uma projeção se e só

$$\boxed{P^2 = P}$$

denominado *idempotente*. Nesse caso, temos que

$$\boxed{P = P_U^W}$$

com

$$\boxed{U = \{Pv : v \in V\}}$$

e

$$\boxed{W = \{v - Pv : v \in V\}}$$

Prova:

Por definição, se P é uma projeção, então $P = P_U^W$, para algum U e algum W tais que $V = U \oplus W$. Para todo $v \in V$, escrevendo $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$, segue que

$$P^2 v = PPv = Pu = u = Pv$$

mostrando que $P^2 = P$. Por outro lado, se $P^2 = P$, considere

$$U = \{Pv : v \in V\} \qquad \text{e} \qquad W = \{v - Pv : v \in V\}$$

Não é difícil verificar que U e W são subespaços. Além disso, temos que, se $u \in U$, então $u = Pv$, para algum $v \in V$, de modo que

$$Pu = P^2 v = Pv = u$$

e temos também que, se $w \in W$, então $w = v - Pv$, para algum $v \in V$, de modo que

$$Pw = Pv - P^2 v = Pv - Pv = 0$$

Portanto, se $v \in U \cap W$, então

$$v = Pv = 0$$

mostrando que $U \cap W = 0$. Finalmente, temos que $P = P_U^W$, com $V = U \oplus W$, pois todo $v \in V$ pode ser escrito como

$$v = u + w$$

onde $u = Pv$ é vetor de U, $w = v - Pv$ é vetor de W e

$$Pv = u$$

□

Apresentamos agora a caracterização algébrica das reflexões.

Proposição 2.5

Um operador linear R é uma reflexão se e só

$$\boxed{R^2 = I}$$

denominado *involução*. Nesse caso, temos que

$$\boxed{R = R_U^W}$$

com

$$\boxed{U = \{v + Rv : v \in V\}}$$

e

$$\boxed{W = \{v - Rv : v \in V\}}$$

Prova:

Por definição, se R é uma reflexão, então $R = R_U^W$, para algum U e algum W tais que $V = U \oplus W$. Para todo $v \in V$, escrevendo $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$, segue que

$$R^2 v = RRv = R(u - w) = u + w = v$$

mostrando que $R^2 = I$. Por outro lado, se $R^2 = I$, considere

$$U = \{v + Rv : v \in V\} \qquad \text{e} \qquad W = \{v - Rv : v \in V\}$$

Não é difícil verificar que U e W são subespaços. Além disso, temos que, se $u \in U$, então $u = v + Rv$, para algum $v \in V$, de modo que

$$Ru = Rv + R^2 v = Rv + v = u$$

e temos também que, se $w \in W$, então $w = v - Rv$, para algum $v \in V$, de modo que

$$Rw = Rv - R^2 v = Rv - v = -w$$

Portanto, se $v \in U \cap W$, então

$$v = Rv = -v$$

mostrando que $v = 0$, de modo que $U \cap W = 0$. Finalmente, temos que $R = R_U^W$, com $V = U \oplus W$, pois todo $v \in V$ pode ser escrito como

$$v = u + w$$

onde $u = \frac{1}{2}(v + Rv)$ é vetor de U, $w = \frac{1}{2}(v - Rv)$ é vetor de W e

$$Rv = u - w$$

□

Exemplos

1) Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (0, x + y)$$

Temos que T é linear, pois

$$\begin{aligned} T((x, y) + (x_0, y_0)) &= T(x + x_0, y + y_0) \\ &= (0, x + x_0 + y + y_0) \\ &= (0, x + y) + (0, x_0 + y_0) \\ &= T(x, y) + T(x_0, y_0) \end{aligned}$$

para todos os vetores (x, y) e (x_0, y_0) e também

$$\begin{aligned} T(t(x, y)) &= T(tx, ty) \\ &= (0, tx + ty) \\ &= t(0, x + y) \\ &= tT(x, y) \end{aligned}$$

para todo vetor (x, y) e todo escalar t. Além disso, será que T é uma projeção ou uma reflexão? Para respondermos essa pergunta, devemos determinar quem é T^2, de modo que

$$\begin{aligned} T^2(x, y) &= TT(x, y) \\ &= T(0, x + y) \\ &= (0, x + y) \\ &= T(x, y) \end{aligned}$$

para todo vetor (x, y). Temos então que $T^2 = T$, de modo que T é uma projeção. Se quisermos determinar essa projeção geometricamente, devemos primeiro determinar os subespaços U e W tais que $T = P_U^W$. Temos que

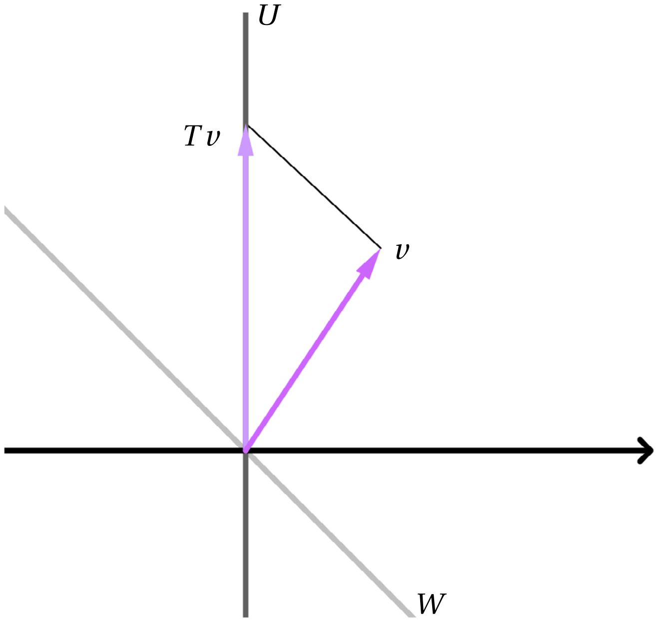
$$\begin{aligned} U &= \{T(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(0, x + y) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{(x+y)(0,1) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\
&= [(0,1)]
\end{aligned}
$$

e que

$$
\begin{aligned}
W &= \{(x,y) - T(x,y) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(x,y) - (0, x+y) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(x,-x) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{x(1,-1) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\
&= [(1,-1)]
\end{aligned}
$$

Para desenhar $T(x,y)$, basta observar que $T(x,y)$ é dado pela interseção de U com a reta paralela a W passando pela ponta de (x,y).



Agora é fácil ver que essa projeção não é ortogonal, pois os subespaços U e W não são ortogonais, uma vez que

$$s(0,1) \cdot t(1,-1) = -ts \neq 0$$

para todos s, t não nulos.

2) Considere o operador $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x,y) = (y,x)$$

Temos que T é linear, pois

$$\begin{aligned} T((x,y)+(x_0,y_0)) &= T(x+x_0, y+y_0) \\ &= (y+y_0, x+x_0) \\ &= (y,x)+(y_0,x_0) \\ &= T(x,y)+T(x_0,y_0) \end{aligned}$$

para todos os vetores (x,y) e (x_0,y_0) e também

$$\begin{aligned} T(t(x,y)) &= T(tx,ty) \\ &= (ty,tx) \\ &= t(y,x) \\ &= tT(x,y) \end{aligned}$$

para todo vetor (x,y) e todo escalar t. Além disso, será que T é uma projeção ou uma reflexão? Para respondermos essa pergunta, devemos determinar quem é T^2, de modo que

$$\begin{aligned} T^2(x,y) &= TT(x,y) \\ &= T(y,x) \\ &= (x,y) \\ &= I(x,y) \end{aligned}$$

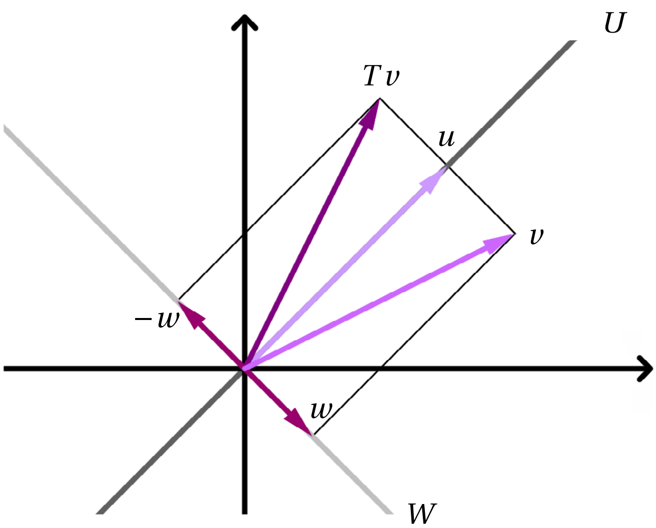
para todo vetor (x,y). Temos então que $T^2 = I$, de modo que T é uma reflexão. Se quisermos determinar essa reflexão geometricamente, devemos primeiro determinar os subespaços U e W tais que $T = R_U^W$. Temos que

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y)+T(x,y) : x,y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x,y)+(y,x) : x,y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x+y,x+y) : x,y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x+y)(1,1) : x,y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= [(1,1)] \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} W &= \{(x,y) - T(x,y) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x,y) - (y,x) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x-y, y-x) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x-y)(1,-1) : x, y \in \mathbb{R}^2\} \\ &= [(1,-1)] \end{aligned}$$

Para desenhar $T(x,y)$, primeiro obtemos a projeção $P_U^W(x,y)$, dada pela interseção de U com a reta paralela a W passando pela ponta de (x,y), e a projeção $P_W^U(x,y)$, dada pela interseção de W com a reta paralela a U passando pela ponta de (x,y). Basta então observar que $T(x,y)$ é dado pela diagonal do paralelogramos de lados $P_U^W(x,y)$ e $-P_W^U(x,y)$.



Agora é fácil ver que essa reflexão é ortogonal, pois os subespaços U e W são ortogonais, uma vez que

$$s(1,1) \cdot t(1,-1) = 0$$

para todos s, t.

Um operador linear $T : V \to V$ é denominado *nilpotente* se alguma de suas potências é igual ao operador nulo.

Exemplo

Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (0, x, y)$$

Temos que T é linear, pois

$$\begin{aligned} T((x, y, z) + (x_0, y_0, z_0)) &= T(x + x_0, y + y_0, z + z_0) \\ &= (0, x + x_0, y + y_0) \\ &= (0, x, y) + (0, x_0, y_0) \\ &= T(x, y, z) + T(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

para todos os vetores (x, y, z) e (x_0, y_0, z_0) e também

$$\begin{aligned} T(t(x, y, z)) &= T(tx, ty, tz) \\ &= (0, tx, ty) \\ &= t(0, x, y) \\ &= tT(x, y, z) \end{aligned}$$

para todo vetor (x, y, z) e todo escalar t. Além disso, será que T é uma projeção, uma reflexão ou é nilpotente? Para respondermos essa pergunta, devemos primeiro determinar quem é T^2, de modo que

$$\begin{aligned} T^2(x, y, z) &= TT(x, y, z) \\ &= T(0, x, y) \\ &= (0, 0, x) \end{aligned}$$

para todo vetor (x, y, z). Como T^2 é diferente de T e de I, segue que T não é nem uma projeção, nem uma reflexão. Calculando a próxima potência de T, obtemos que

$$\begin{aligned} T^3(x,y) &= TT^2(x,y,z) \\ &= T(0,0,x) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

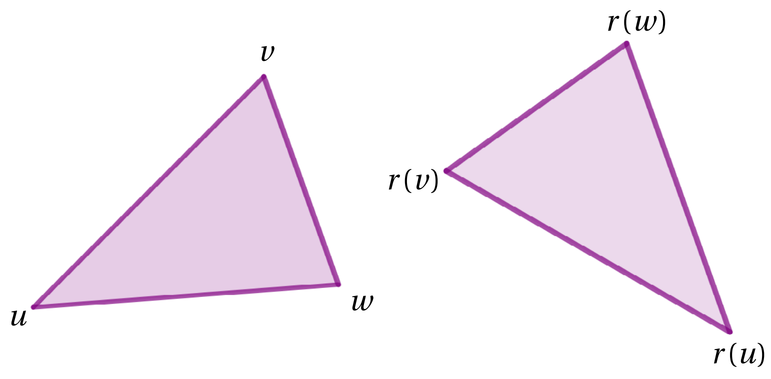
para todo vetor (x,y,z), mostrando T^3 é igual a operador nulo, de modo que T é nilpotente.

2.2 Isometrias e homotetias

Um dos exemplos mais importantes de operadores do ponto de vista geométrico são as denominadas *isometrias*, também conhecidas como *movimentos rígidos*, que são estreitamente ligadas ao conceito de *congruência*. Uma *isometria* $r : V \to V$ é um operador que preserva a distância entre vetores, de modo que

$$\boxed{d(r(v), r(w)) = d(v,w)}$$

para todos os vetores v, w de V. Dizemos que duas figuras são *congruentes* quando uma é levada na outra por alguma isometria.

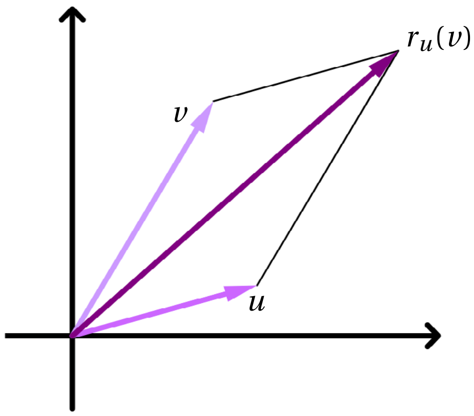


Exemplos

1) Um dos exemplos mais simples de isometrias são as denominadas translações. A *translação por u* é o operador definido por

$$\boxed{r_u(v) = v + u}$$

para todo vetor v de V.



Temos que r_u é de fato uma isometria, pois

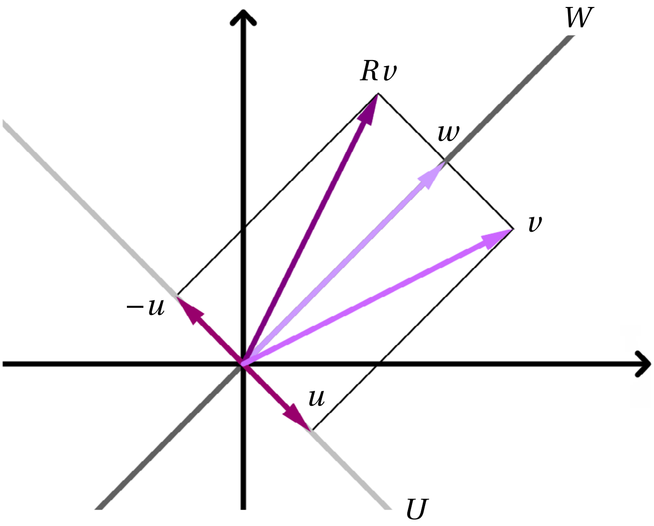
$$\begin{aligned} d(r_u(v), r_u(w)) &= |r_u(v) - r_u(w)| \\ &= |v + u - (w + u)| \\ &= |v - w| \\ &= d(v, w) \end{aligned}$$

para todos os vetores v, w de V.

2) As reflexões ortogonais também são exemplos de isometrias. De fato, considere $R = R_W^U$, onde U e W são ortogonais. Para todo $v \in V$, escrevendo $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$, temos que $Rv = -u + w$, de modo que, pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$|Rv|^2 = |-u|^2 + |w|^2 = |u|^2 + |w|^2 = |v|^2$$

de modo que $|Rv| = |v|$, para todo vetor v de V.



Portanto, segue que

$$d(Rv, Rw) = |Rv - Rw| = |R(v - w)| = |v - w| = d(v, w)$$

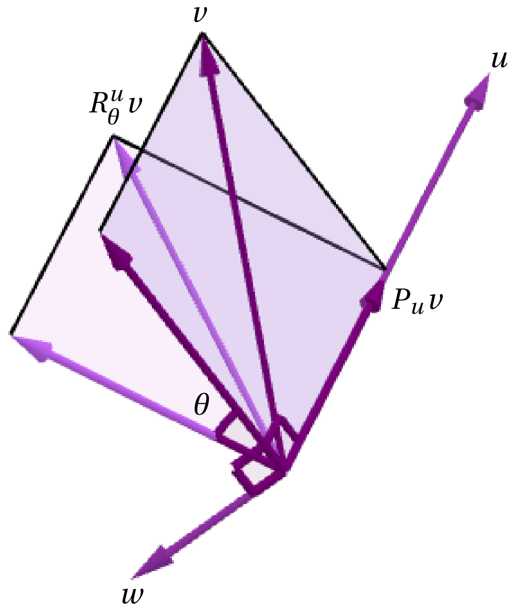
para todos os vetores v, w de V.

3) Em $\mathbb{R}^3$, a *rotação de um vetor v por um ângulo θ em torno do eixo* $[u]$, denotada por $R_\theta^u v$, pode ser obtida da seguinte forma. Decompondo

$$v = P_u v + P_{u^\perp} v$$

por definição, a rotação R_θ^u deixa a componente $P_u v$ parada, pois está sobre o eixo $[u]$, enquanto a componente $P_{u^\perp} v$ é rotacionada por um ângulo θ no plano perpendicular $u^\perp$. Para determinarmos a rotação da componente $P_{u^\perp} v$, considere um vetor w do plano $u^\perp$ que seja perpendicular a $P_{u^\perp} v$ e de mesmo comprimento. Segue então

$$R_\theta^u v = P_u v + P_{u^\perp} v \cos\theta + w \operatorname{sen}\theta$$



Escolhendo u unitário, temos que

$$P_u v = (v \cdot u)u \qquad \text{e} \qquad P_{u^\perp} v = v - (v \cdot u)u$$

Já o vetor w pode ser obtido através do denominado *produto vetorial* entre vetores. O *produto vetorial de v com u* é definido por

$$v \times u = (yz_0 - zy_0, zx_0 - xz_0, xy_0 - yx_0)$$

onde $v = (x, y, z)$ e $u = (x_0, y_0, z_0)$. Não é difícil verificar que o produto vetorial é bilinear e que possui as seguintes propriedades

1. $v \times u$ é perpendicular a v e também a u.
2. $|v \times u| = |v||u| \operatorname{sen} \alpha$, onde α é o ângulo entre v e u.

Podemos então definir $w = P_{u^\perp} v \times u$, de modo que w é perpendicular tanto a $P_{u^\perp} v$ como também a u. Além disso, temos que $|w| = |P_{u^\perp} v|$, pois u é unitário e o ângulo entre $P_{u^\perp} v$ e u é reto. Além disso, temos que

$$w = v \times u - (v \cdot u)u \times u = v \times u$$

onde usamos a bilinearidade do produto vetorial e que $u \times u = 0$, pois o ângulo do vetor u com ele mesmo é nulo. Segue então que

$$\boxed{R^u_\theta v = (v \cdot u)u + (v - (v \cdot u)u)\cos\theta + (v \times u)\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Não é difícil verificar que R^u_θ é um operador linear. Além disso, temos que R^u_θ é uma isometria. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
|R^u_\theta v|^2 &= |P_u v|^2 + |P_{u^\perp} v|^2 \cos^2\theta + |w|^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\
&= |P_u v|^2 + |P_{u^\perp} v|^2 (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) \\
&= |P_u v|^2 + |P_{u^\perp} v|^2 \\
&= |v|^2
\end{aligned}$$

onde utilizamos o teorema de Pitágoras na primeira e na quarta igualdades. Portanto, segue que

$$d(R^u_\theta v, R^u_\theta w) = |R^u_\theta v - R^u_\theta w| = |R^u_\theta (v - w)| = |v - w| = d(v, w)$$

para todos os vetores v, u de V. Mais adiante, veremos que as isometrias em $\mathbb{R}^3$ são sempre combinações de translações, reflexões e rotações.

Nem sempre uma isometria é um operador linear, como é o caso das translações, que não são lineares. Uma isometria que é um operador linear é denominada *isometria linear*. A proposição seguinte mostra a relação entre as isometrias e as isometrias lineares.

Proposição 2.6

Se $r : V \to V$ é uma isometria, então $R : V \to V$ dada por

$$\boxed{Rv = r(v) - r(0)}$$

é uma isometria linear.

Prova:

Primeiro vamos mostrar que R é uma isometria e depois que preserva o produto interno. Temos que

$$\begin{aligned} d(Rv,Rw) &= |Rv - Rw| \\ &= |r(v) - r(0) - (r(w) - r(0))| \\ &= |r(v) - r(w)| \\ &= d(r(v), r(w)) \\ &= d(v,w) \end{aligned}$$

para todos os vetores v, w de V, onde usamos que r é uma isometria na última igualdade. Além disso, utilizando, a fórmula de polarização obtida no capítulo anterior, segue então que

$$\begin{aligned} Rv \cdot Rw &= \frac{|Rv|^2 + |Rw|^2 - |Rv - Rw|^2}{2} \\ &= \frac{|Rv - R0|^2 + |Rw - R0|^2 - |Rv - Rw|^2}{2} \\ &= \frac{d(Rv,R0)^2 + d(Rw,R0)^2 - d(Rv,Rw)^2}{2} \\ &= \frac{d(v,0)^2 + d(w,0)^2 - d(v,w)^2}{2} \\ &= \frac{|v|^2 + |w|^2 - |v-w|^2}{2} \\ &= v \cdot w \end{aligned}$$

para todos os vetores v, w de V, onde usamos que $R0 = 0$ na segunda igualdade e que R é uma isometria na quarta igualdade. Para mostrar que R é linear, basta mostrar que

$$R(v+w) - Rv - Rw = 0 \qquad \text{e} \qquad R(tv) - tRv = 0$$

para todos os vetores v, w de V e todo escalar t. Para isso, primeiro use que

$$|R(v+w) - Rv - Rw|^2 = (R(v+w) - Rv - Rw) \cdot (R(v+w) - Rv - Rw)$$

e que

$$|R(tv) - tRv|^2 = (R(tv) - tRv) \cdot (R(tv) - tRv)$$

Depois, usando a bilinearidade do produto interno e o fato de que R preserva o produto interno, não é difícil mostrar que

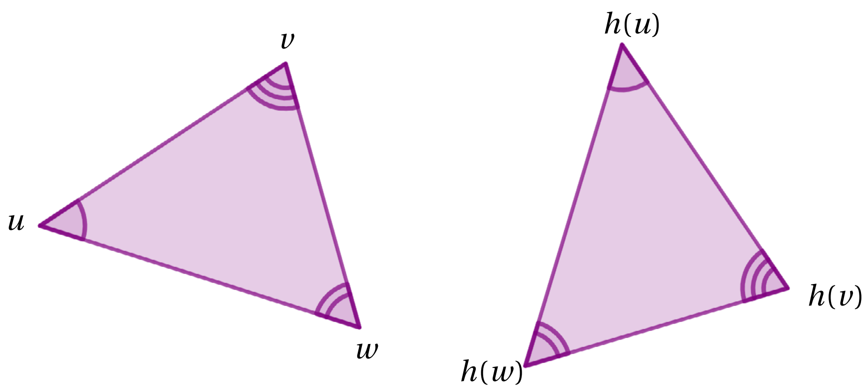
$$|R(v+w) - Rv - Rw|^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad |R(tv) - tRv|^2 = 0$$

□

O resultado acima mostra que toda isometria é a combinação de uma translação com uma isometria linear, pois

$$r(v) = r(0) + Rv$$

Isso mostra que para entender as isometrias é necessário entender os operadores lineares.



Outros exemplos importantes de operadores do ponto de vista geométrico são as denominadas *homotetias*, que são estreitamente ligadas ao conceito de *semelhança*. Uma homotetia $h : V \to V$ é um operador tal que

$$\boxed{d(h(v), h(w)) = cd(v, w)}$$

para alguma constante c positiva e para todos os vetores v, w de V. Dizemos que duas figuras são *semelhantes* quando uma é levada na outra por alguma homotetia. As homotetias também estão estreitamente ligadas às isometrias.

Proposição 2.7

Toda homotetia é o produto de uma constante por uma isometria.

Prova:

Considere $h : V \to V$ uma homotetia tal que

$$d(h(v), h(w)) = c d(v, w)$$

para todos os vetores v, w de V. Definido

$$r(v) = \frac{1}{c} h(v)$$

temos que

$$h(v) = c r(v)$$

onde $r : V \to V$ é uma isometria, pois

$$\begin{aligned} d(r(v), r(w)) &= |r(v) - r(w)| \\ &= \left|\frac{1}{c} h(v) - \frac{1}{c} h(w)\right| \\ &= \frac{1}{c} |h(v) - h(w)| \\ &= \frac{1}{c} d(h(v), h(w)) \\ &= d(v, w) \end{aligned}$$

para todos os vetores v, w de V.

$\square$

2.3 Sistemas lineares

Um sistema linear com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações simultâneas da forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n & = & b_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \cdots + t_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

onde os x_j são as incógnitas, enquanto os t_{ij} e os b_i são dados do problemas. Denotando

$$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e também

$$\begin{array}{lcl} l_1 & = & (t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1n}) \\ l_2 & = & (t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{2n}) \\ & \vdots & \\ l_m & = & (t_{m1}, t_{m2}, \ldots, t_{mn}) \end{array}$$

podemos rescrever o sistema da seguinte forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} l_1 \cdot v & = & b_1 \\ l_2 \cdot v & = & b_2 \\ & \vdots & \\ l_m \cdot v & = & b_m \end{array}\right.$$

Definindo a a transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por

$$Tv = (l_1 \cdot v, l_2 \cdot v, \ldots, l_m \cdot v)$$

e denotando

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

o sistema linear acima pode ser escrito como

$$\boxed{Tv = b}$$

Não é difícil verificar que a transformação T é linear. Vamos ver que as soluções da equação original estão relacionadas às soluções da denominada *equação homogênea associada*, dada por

$$\boxed{Tv = 0}$$

que é obtida da equação original substituindo o vetor b pelo vetor nulo. Fazendo agora o caminho inverso, essa equação pode ser rescrita como

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n & = & 0 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \cdots + t_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

denominado *sistema linear homogêneo associado*, que é obtido do sistema linear original substituindo o lado direito de cada equação por zero.

Exemplo

Considere o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + 2y + z & = & 6 \\ x + y + z & = & 3 \end{array}\right.$$

O sistema acima pode ser reescrito como

$$Tv = b$$

definindo a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ por

$$Tv = T(x, y, z) = (2x + 2y + z, x + y + z)$$

e denotando

$$b = (6, 3)$$

A equação homogênea associada é dada por

$$Tv = 0$$

de modo que o sistema linear homogêneo associado é dado por

$$\begin{cases} 2x+2y+z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{cases}$$

O próximo resultado mostra que o conjunto das soluções de um sistema linear possui uma estrutura geometrica simples, denominada de *subespaço afim*, que é um subespaço transladado da origem.

Proposição 2.8

Dado uma transformação linear de $T : V \to W$, a solução geral da equação homogênea associada

$$\boxed{Tv = 0}$$

é um subespaço, denominado *núcleo de* T e dado por

$$\boxed{N(T) = \{v : Tv = 0\}}$$

Além disso, existe uma solução da equação

$$\boxed{Tv = b}$$

se e só se b pertence a denominada *imagem de* T, dada por

$$\boxed{I(T) = \{Tv : v \in V\}}$$

que também é um subespaço. Nesse caso, a solução geral é dada por

$$\boxed{\{v : Tv = b\} = v_p + N(T)}$$

onde v_p é uma solução particular.

Prova:

Não é difícil verificar que $N(T)$ e $I(T)$ são subespaços e segue direto das definições que $Tv = b$ possui solução se e só se b pertence a $I(T)$.

Além disso, se v é solução de $Tv = b$, temos que $v \in v_p + N(T)$, pois $v = v_p + v_0$, com $v_0 = v - v_p \in N(T)$, uma vez que

$$T(v - v_p) = Tv - Tv_p = b - b = 0$$

Por outro lado, para todo $v_0 \in N(T)$, temos que $v_p + v_0$ é solução de $Tv = b$, pois

$$T(v_p + v_0) = Tv_p + Tv_0 = b + 0 = b$$

□

Exemplo

A equação homogênea associada do exemplo anterior é dada por

$$Tv = (2x + 2y + z, x + y + z) = (0, 0)$$

e pode ser rescrita como

$$\begin{cases} 2x + 2y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{cases}$$

O núcleo de T, que é a solução geral desse sistema linear, pode ser interpretada geometricamente como a interseção do plano perpendicular ao vetor $(2, 2, 1)$, cuja equação é dada por

$$2x + 2y + z = 0$$

com o plano perpendicular ao vetor $(1, 1, 1)$, cuja equação é dada por

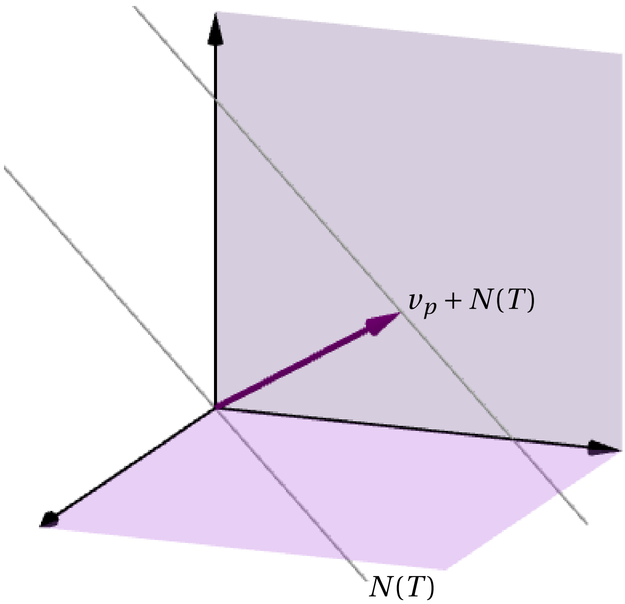
$$x + y + z = 0$$

A solução geral desse sistema linear é dada por

$$x + y = 0 \qquad \text{e} \qquad z = 0$$

de modo que

$$N(T) = \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1, 0)]$$



Além disso, temos que

$$v_p = (2, 1, 0)$$

é uma solução particular da equação

$$Tv = (2x + 2y + z, x + y + z) = (6, 3)$$

A solução geral dessa equação é então dada pelo espaço afim

$$v_p + N(T) = (2, 1, 0) + [(1, -1, 0)]$$

ou seja, é a reta $[(1, -1, 0)]$ transladada pelo vetor $2, 1, 0)$

Proposição 2.9

Uma transformação linear de $T : V \to W$ possui inversa se e só se

$$\boxed{N(T) = 0 \qquad \text{e} \qquad I(T) = W}$$

Nesse caso, a inversa T^{-1} também é linear.

Prova:

Uma transformação $T : V \to W$ possui inversa se e só se a equação $Tv = w$, possui uma única solução para todo $w \in W$. Como T é linear, pela proposição anterior, isso ocorre se e só se $N(T) = 0$ e $I(T) = W$. Nesse caso, $T^{-1}w = v$ é a única solução da equação $Tv = w$. Para todos os vetores w, w_0 em W, se $T^{-1}w = v$ e $T^{-1}w_0 = v_0$, então $Tv = w$ e $Tv_0 = w_0$. Segue que

$$\begin{aligned}
T^{-1}(w + w_0) &= T^{-1}(Tv + Tv_0) \\
&= T^{-1}(T(v + v_0)) \\
&= v + v_0 \\
&= T^{-1}w + T^{-1}w_0
\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}
T^{-1}(tw) &= T^{-1}(tTv) \\
&= T^{-1}(T(tv)) \\
&= tv \\
&= tT^{-1}w
\end{aligned}$$

para todo escalar t.

□

Exemplo

Considere $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y) = (y, x+y)$$

Não é difícil verificar que

$$N(T) = 0 \qquad \text{e} \qquad I(T) = \mathbb{R}^2$$

de modo que T possui inversa. Escrevendo

$$(x_0, y_0) = T^{-1}(x,y)$$

temos que

$$T(x_0, y_0) = TT^{-1}(x,y) = I(x,y) = (x,y)$$

de modo que

$$(y_0, x_0 + y_0) = (x,y)$$

Essa equação pode ser rescrita como

$$\begin{cases} \phantom{x_0 +{}} y_0 & = & x \\ x_0 + y_0 & = & y \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos que

$$x_0 = y - x \qquad \text{e} \qquad y_0 = x$$

de modo que

$$T^{-1}(x,y) = (y-x, x)$$

2.4 Exercícios

1) Verifique que $V = U \oplus W$, determine as projeções $P_U^W v$ e $P_W^U v$, as reflexões $R_U^W v$ e $R_W^U v$ e decida se as projeções e reflexões são ortogonais. Desenhe todos os objetos quando V for o plano.

   a) Se $v = (x, y)$, $U = \{(2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(6s, -4s) : s \in \mathbb{R}\}$.
   b) Se $v = (x, y)$, $U = \{(2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(s, -2s) : s \in \mathbb{R}\}$.
   c) Se $v = (x, y, z)$, $U = \{(t, 2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(r, s, 0) : r, s \in \mathbb{R}\}$.
   d) Se $v = (x, y, z)$, $U = \{(0, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(r, 2r + s, 3s) : r, s \in \mathbb{R}\}$.
   e) Se $v = (x, y, z)$, $U = \{(0, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(r, 2s, -6s) : r, s \in \mathbb{R}\}$.

2) Determine o subespaço $w^\perp$, as projeções $P_w v$ e $P_{w^\perp} v$ e as reflexões $R_w v$ e $R_{w^\perp} v$. Desenhe todos os objetos quando V for o plano.

   a) Se $w = (2, 2)$ e $v = (x, y)$.
   b) Se $w = (-1, 1)$ e $v = (x, y)$.
   c) Se $w = (1, 0, 0)$ e $v = (x, y, z)$.
   d) Se $w = (0, 1, 0)$ e $v = (x, y, z)$.
   e) Se $w = (1, 1, 0)$ e $v = (x, y, z)$.
   f) Se $w = (1, 0, 1)$ e $v = (x, y, z)$.
   g) Se $w = (0, 1, 1)$ e $v = (x, y, z)$.
   h) Se $w = (1, 1, 1)$ e $v = (x, y, z)$.

3) Verifique que o operador T de V é linear e decida se ele é reflexão, projeção ou nilpotente. Determine quais das projeções e reflexões são ortogonais e quais estão relacionadas à mesma decomposição em soma direta. Desenhe todos os objetos quando V for o plano.

   a) Se $T(x, y) = (-x - 2y, y)$.
   b) Se $T(x, y) = \frac{1}{10}(9x + 3y, 3x + y)$.
   c) Se $T(x, y) = (x + y, 0)$.
   d) Se $T(x, y) = (-x + y, -x + y)$.
   e) Se $T(x, y) = \frac{-1}{5}(4x + 3y, 3x - 4y)$.
   f) Se $T(x, y) = (2x + 4y, -x - 2y)$.
   g) Se $T(x, y, z) = \frac{1}{2}(2x, y + z, y + z)$.
   h) Se $T(x, y, z) =$
   $= (x + y + 2z, -x - y + 2z, 0)$.

4) (Abstrato) Mostre que, se T é uma transformação linear, então $T0 = 0$.

5) (Abstrato) Se S e T são operadores lineares, mostre que $S + T$ e ST também são operadores lineares.

6) (Abstrato) Se T é operador linear de V, mostre que os conjuntos abaixo são subespaços.

a) $U = \{Tv : v \in V\}$.

b) $W = \{Tv - v : v \in V\}$.

c) $U = \{Tv + v : v \in V\}$.

d) $V_\lambda^T = \{v : Tv = \lambda v\}$.

7) (Abstrato) Responda as questões abaixo.

a) Se um operador é uma projeção e também uma reflexão, quem é ele?

b) Uma projeção pode ser nilpotente? Se sim, quem é ela?

c) Uma reflexão pode ser nilpotente? Se sim, quem é ela?

d) O produto de duas isometrias é uma isometria?

8) (Abstrato) Verifique que os operadores S e T de $\mathbb{P}$, o espaço das funções polinomiais, dados por

$$Sp = pq \qquad \text{e} \qquad Tp = p'$$

são lineares, onde p e q pertencem a $\mathbb{P}$ e

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

se

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Mostre também que T é nilpotente em $\mathbb{P}_n$, o espaço das funções polinomiais de grau menor ou igual a n. Se $q(x) = x$, determine ST e também TS e decida se são nilpotentes.

9) (Abstrato) Supondo que $|u| = 1$, mostre diretamente, a partir das definições

$$P_u v = (v \cdot u)u, \qquad P_{u^\perp} v = v - (v \cdot u)u, \qquad R_{u^\perp} v = v - 2(v \cdot u)u$$

que os operadores P_u, $P_{u^\perp}$ e $R_{u^\perp}$ de V são lineares, que P_u e $P_{u^\perp}$ são projeções e que $R_{u^\perp}$ é uma reflexão. Use a bilinearidade do produto escalar.

10) O produto vetorial de $v = (x, y, z)$ com $u = (x_0, y_0, z_0)$ é dado por

$$v \times u = (yz_0 - zy_0, zx_0 - xz_0, xy_0 - yx_0)$$

a) Verifique que $v \times u$ é perpendicular a v e também a u.
b) Verifique que o produto vetorial é bilinear e antissimétrico.
c) Mostre que $|v \times u|^2 = |v|^2|u|^2 - (v \cdot u)^2$.
d) Conclua que $|v \times u| = |v||u| \operatorname{sen}\alpha$, onde α é o ângulo entre v e u.
Dica: Use o item anterior e que $v \cdot u = |v||u| \cos\alpha$.

11) (Abstrato) Mostre diretamente, a partir da definição

$$R_\theta^u v = (v \cdot u)u + (v - (v \cdot u)u) \cos\theta + (v \times u) \operatorname{sen}\theta$$

e a partir da bilinearidade do produto escalar e do produto vetorial, que o operador R_θ^u do $\mathbb{R}^3$ é linear.

12) (Abstrato) Se R é um operador que preserva o produto escalar, mostre que

$$|R(v + w) - Rv - Rw|^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad |R(tv) - tRv|^2 = 0$$

para todos os vetores v e w e para todo escalar t. Use a bilinearidade do escalar.

13) Determine a transformação T e o vetor b tais que os sistemas abaixo podem ser escritos como $Tv = b$. Verifique que a solução geral é dada por $v_p + N(T)$, onde v_p é uma solução particular. Desenhe $N(T)$ e a solução geral quando o domínio de T for o plano.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

14) Determine ST e TS e também o núcleo de S e de T e decida se S é a inversa de T.

a) Se $S(x, y) = (-x-2y, y)$ e $T(x, y) = (-x-2y, y)$.
b) Se $S(x, y) = (x+2y, -2x-4y)$ e $T(x, y) = (2x+4y, -x-2y)$.
c) Se $S(x, y, z) = (y, x, z)$ e $T(x, y, z) = (x, z, y)$.
d) Se $S(x, y) = (0, x, y)$ e $T(x, y, z) = (x+y, x+z)$.
e) Se $S(x) = (x, 2x, -2x)$ e $T(x, y, z) = x+y+z$.
f) Se $S(x, y) = \frac{1}{2}(y-x, y+x)$ e $T(x, y) = (x-y, x+y)$.

15) (Abstrato) Mostre que a transformação T de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$, dada por

$$Tv = (l_1 \cdot v, \ldots, l_m \cdot v)$$

é linear, onde $l_1, \ldots, l_m$ são vetores do $\mathbb{R}^n$. Use a bilinearidade do produto escalar.

16) (Abstrato) Considere T uma transformação linear de V para W.

a) Mostre que $N(T)$ é um subespaço de V
b) Verifique que $I(T)$ é um subespaço de W.

17) (Abstrato) Determine $N(P_U^W)$ e $I(P_U^W)$ e também $N(P_W^U)$ e $I(P_W^U)$.

18) (Abstrato) Responda as questões abaixo.

a) Qual é a inversa de uma reflexão?
b) Uma projeção pode ter inversa? Se sim, quem é ela?
c) Uma nilpotente pode ter inversa? Se sim, quem é ela?
d) A inversa de uma isometria é uma isometria?

19) (Desafio) Podemos interpretar geometricamente diversos conceitos da probabilidade e da estatística. Seja $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ um espaço de eventos probabilísitcos, onde p_k é a probabilidade de acontecer o evento ω_k, de modo que $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Um vetor $X = (x_1, \ldots, x_n)$ é a variável aleatória que associa o valor x_k quando acontecer o evento ω_k. No lançamento de um dado, temos que $n = 6$, que ω_k é sair a face k e que $p_k = \frac{1}{6}$, para todo $k \in \{1, \ldots, 6\}$. Podemos considerar $X = (1, \ldots, 6)$ a variável que associa a cada face seu número.

a) Mostre que $X \cdot Y = x_1 y_1 p_1 + \cdots + x_n y_n p_n$ é um produto escalar. Verifique que, no caso do dado, $X \cdot Y = \frac{X \cdot Y}{6}$.

b) A *esperança de* X é dada por $EX = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$. Mostre que $EX = X \cdot I$, onde $I = (1, \ldots, 1)$ é a variável aleatória contante. Determine EX quando $X = (1, \ldots, 6)$.

c) Mostre que $P_I X = EXI$ e que $P_{I^\perp} X = X - EXI$. Determine $P_I X$ e $P_{I^\perp} X$ quando $X = (1, \ldots, 6)$.

d) A *variância de* X é dada por $\mathrm{var}(X) = (x_1 - EX)^2 p_1 + \cdots + (x_n - EX)^2 p_n$ e o *desvio padrão de* X é dado por $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$. Mostre que $\sigma(X) = |P_{I^\perp} X|$ e conclua que $\sigma(X) = 0$ se e só se $X = EXI$.

e) A *covariância entre* X *e* Y é dada por

$$\mathrm{cov}(X, Y) = (x_1 - EX)(y_1 - EY) p_1 + \cdots + (x_n - EX)(y_n - EY) p_n$$

Mostre que $\mathrm{cov}(X, Y) = \langle P_{I^\perp} X \cdot P_{I^\perp} Y \rangle$.

CAPÍTULO 3

COORDENADAS

3.1 BASES

Vamos agora introduzir um conceito que generaliza o conceito de eixos coordenados do plano e do espaço. Uma *base finita* é um conjunto finito

$$\boxed{B = \{v_1, \ldots, v_n\}}$$

de vetores de V tal que todo vetor de V pode ser escrito de modo único como *combinação linear* dos vetores de B, ou seja, cada vetor v pode ser escrito como

$$\boxed{v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n}$$

onde os escalares

$$\boxed{x_1, \ldots, x_n}$$

são únicos, denominados *coordenadas de v na base B*.

A seguir seguem alguns exemplos que ilustram o conceito de bases de um espaço vetorial.

Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^2$, a base mais simples é a denominada *base canônica de* $\mathbb{R}^2$, dada por

$$\boxed{\{e_1, e_2\}}$$

onde

$$\boxed{e_1 = (1,0) \qquad \text{e} \qquad e_2 = (0,1)}$$

De fato, é imediato que

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$$

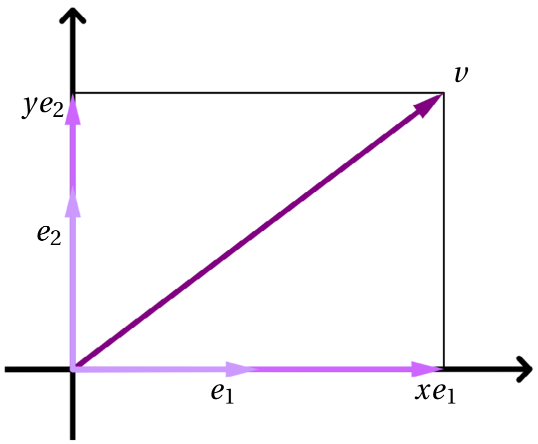
de modo que, para todo $v = (x, y)$, temos que

$$v = xe_1 + ye_2$$

onde os escalares

$$x \quad \text{e} \quad y$$

são únicos, denominados *coordenadas de v na base canônica de* $\mathbb{R}^2$.



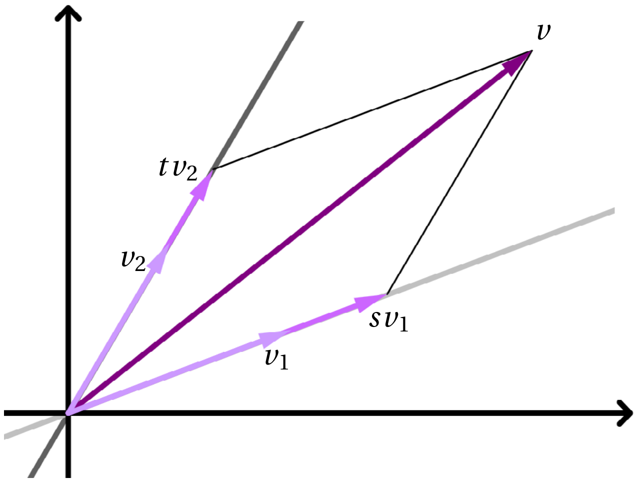
Mais à frente, veremos que quaisquer dois vetores não colineares formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, temos que

$$\{v_1, v_2\}$$

onde

$$v_1 = (2,1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (1,2)$$

é uma base de $\mathbb{R}^2$.



De fato, escrevendo

$$(x, y) = s(2,1) + t(1,2)$$

segue que

$$\begin{cases} 2s + t &= x \\ s + 2t &= y \end{cases}$$

cuja única solução é

$$s = \frac{2x - y}{3} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{2y - x}{3}$$

de modo que, para todo $v = (x, y)$, temos que

$$v = sv_1 + tv_2$$

onde os escalares

$$s \quad \text{e} \quad t$$

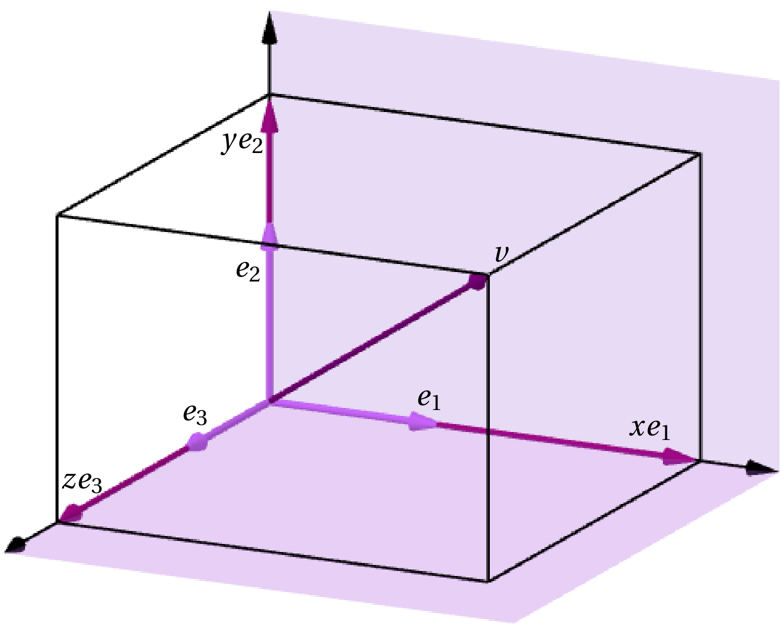
são únicos, ou seja, as coordenadas de v na base B.

2) Em $\mathbb{R}^3$, a base mais simples é a denominada *base canônica de* $\mathbb{R}^3$, dada por

$$\boxed{\{e_1, e_2, e_3\}}$$

onde

$$\boxed{e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (0,1,0) \qquad \text{e} \qquad e_3 = (0,0,1)}$$



De fato, é imediato que

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

de modo que, para todo $v = (x,y,z)$, temos que

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

onde os escalares

$$x, \quad y \quad \text{e} \quad z$$

são únicos, denominados *coordenadas de v na base canônica de* $\mathbb{R}^3$.

Mais à frente, veremos que quaisquer três vetores não coplanares formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

3) De modo mais geral, em $\mathbb{R}^n$, a base mais simples é a denominada *base canônica de* $\mathbb{R}^n$, dada por

$$\boxed{\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}}$$

onde

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e_1 & = & (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \\ e_2 & = & (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) \\ & \vdots & \\ e_n & = & (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \end{array}}$$

De fato, é imediato que

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1)$$

de modo que, para todo $v = (x_1, \ldots, x_n)$, temos que

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

onde os escalares

$$x_1, \ldots, x_n$$

são únicos, denominados *coordenadas de v na base canônica de* $\mathbb{R}^n$.

4) No espaço $\mathbb{P}$, das funções polinomiais, não existe uma base finita. De fato, dado qualquer conjunto finito de polinômios F, considere p o polinômio de maior grau em F. Então toda combinação linear de polinômios de F é um polinômio de grau menor ou igual ao de p. Portanto qualquer polinômio com grau maior do que o de p

não pode ser escrito como combinação linear dos polinômios de F, mostrando que F não pode ser base de $\mathbb{P}$.

Por outro lado, no subespaço $\mathbb{P}_n$, das funções polinomiais de grau menor igual a n, existem bases finitas. A base mais simples é a denominada *base canônica de* $\mathbb{P}_n$, dada por

$$\boxed{\{1, x, \ldots, x^n\}}$$

pois é imediato da definição que todo p em $\mathbb{P}_n$ é dado por

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

onde os escalares

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

são únicos, denominados *coordenadas de p na base canônica de* $\mathbb{P}_n$.

Vamos mostrar que toda base de V é caracterizada por duas propriedades algébricas muito úteis. Um subconjunto $G = \{v_1, \ldots, v_l\}$ de V é denominado *gerador*, quando todo vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores de G. Ou seja, todo vetor v de V pode ser escrito como

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_l v_l$$

onde $\{x_1, \ldots, x_l\}$ são escalares. Um subconjunto $F = \{w_1, \ldots, w_k\}$ de V é denominado *linearmente independente*, quando a única combinação linear dos vetores de F que é nula é a combinação trivial, onde todos os escalares são nulos. Ou seja, se sempre que

$$t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k = 0$$

então $t_1 = \cdots = t_k = 0$.

Proposição 3.1

Temos que $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base finita de V se e só se B é gerador e linearmente independente.

Prova:

Por um lado, se B é base, então B é gerador por definição. Além disso, se

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0 = 0 v_1 + \cdots + 0 v_n$$

como os escalares são únicos segue que $x_1 = \cdots = x_n = 0$, mostrando que B é linearmente independente. Por outro lado, se B é gerador, todo vetor v pode ser escrito como

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

Para mostrar que os escalares são únicos, suponha que

$$v = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$$

Subtraindo as duas equações acima, segue que

$$0 = (x_1 - y_1) v_1 + \cdots + (x_n - y_n) v_n$$

Se B também é linearmente independente, segue que

$$x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0$$

de modo que os escalares são únicos.

$\square$

Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^2$, temos que

$$G = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

é gerador, pois

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) + 0(1,1)$$

mas não é linearmente independente, pois

$$(0,0) = t(1,0) + t(0,1) + (-t)(1,1)$$

para todo escalar t. De fato, G não é uma base, uma vez que

$$(x, y) = (x+t)(1,0) + (y+t)(0,1) + (-t)(1,1)$$

para todo escalar t, mostrando que existem infinitas maneiras de escrever (x, y) como combinação linear de vetores de G.

2) Em $\mathbb{R}^2$, temos que

$$F = \{(1,0)\}$$

é linearmente independente, pois

$$(0,0) = x(1,0)$$

implica que $x = 0$. Mas F não é gerador, pois não existe um escalar x tal que

$$(0,1) = x(1,0)$$

de modo que F também não é uma base.

3) Em $\mathbb{R}^2$, temos que

$$E = \{(1,0),(0,1)\}$$

é gerador, pois

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$$

e é um linearmente independente, pois

$$(0,0) = x(1,0) + y(0,1)$$

implica que $x = y = 0$. Da mesma forma, temos que

$$B = \{(1,0),(1,1)\}$$

é gerador, pois

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1)$$

e é linearmente independente, pois

$$(0,0) = s(1,0) + t(1,1)$$

implica que $x = y = 0$. Temos que tanto E, quanto B são bases de $\mathbb{R}^2$. Observe que F está contido em E e em B e que todos estão contidos em G.

Para a caracterização de bases através dos conceitos de gerador e de linearmente independente, vamos precisar dos seguintes lemas.

Lema 3.2

Se $G = \{v_1, \ldots, v_l\}$ é gerador e se cada vetor v_i de G pode ser escrito como combinação linear de vetores de $F = \{w_1, \ldots, w_k\}$, então F é gerador.

Prova:

Por um lado, como cada v_i pode ser escrito pode ser escrito como combinação linear de vetores de $F = \{w_1, \ldots, w_k\}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & y_1^1 w_1 + \cdots + y_k^1 w_k \\ & \vdots & \\ v_l & = & y_1^l w_1 + \cdots + y_k^l w_k \end{array}$$

Por outro lado, dado v em V, como G é gerador, podemos escrever

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_l v_l$$

Multiplicando as equações anteriores pelos respectivos escalares, temos que

$$\begin{aligned} x_1 v_1 &= x_1 y_1^1 w_1 + \cdots + x_1 y_k^1 w_k \\ &\vdots \\ x_l v_l &= x_l y_1^l w_1 + \cdots + x_l y_k^l w_k \end{aligned}$$

Somando essas equações, segue que

$$v = \left(x_1 y_1^1 + \cdots + x_l y_1^l\right) w_1 + \cdots + \left(x_1 y_k^1 + \cdots + x_l y_k^l\right) w_k$$

mostrando que $F = \{w_1, \ldots, w_k\}$ é gerador.

□

Quando F não é linearmente independente, ele é denominado *linearmente dependente*. Não é difícil mostrar que F é linearmente dependente se e só se algum de seus vetores depende linearmente dos demais, o que justifica a terminologia de dependência e independência linear.

Lema 3.3

Temos que $D = \{v_1, \ldots, v_k\}$ é um conjunto linearmente dependente se e só se existe um vetor v_i de D que pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Prova:

Se D é linearmente dependente, então

$$t_1 v_1 + \cdots + t_i v_i + \cdots + t_n v_n = 0$$

com algum $t_i \neq 0$, de modo que

$$v_i = \frac{-t_1}{t_i} v_1 + \cdots + \frac{-t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} + \frac{-t_{i+1}}{t_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{-t_n}{t_i} v_n$$

mostrando que existe um vetor v_i de D que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Se existe um vetor v_i de D que pode ser escrito como combinação linear dos demais, então

$$v_i = s_1 v_1 + \cdots + s_{i-1} v_{i-1} + s_{i+1} v_{i+1} + \cdots + s_n v_n$$

de modo que

$$0 = s_1 v_1 + \cdots + s_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + s_{i+1} v_{i+1} + \cdots + s_n v_n$$

mostrando que D é linearmente dependente.

□

Concluímos esta seção com um resultado que será muito útil na próxima.

Lema 3.4

Se F um conjunto linearmente independente, então $F \cup \{v\}$ é linearmente independente se e só se v não é combinação linear de vetores de F.

Prova:

Por um lado, se v é combinação linear de vetores de $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$, então $F \cup \{v\} = \{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente dependente. Logo, se $F \cup \{v\}$ é linearmente independente, então v não é combinação linear de vetores de F. Por outro lado, se v não é combinação linear de vetores de F, então $F \cup \{v\} = \{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente independente. De fato, escrevendo

$$0 = tv + t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

segue que $t = 0$, pois caso contrário, poderíamos escrever

$$v = -\frac{t_1}{t}v_1 - \cdots - \frac{t_n}{t}v_n$$

o que já havíamos descartado por hipótese. Como $t = 0$, segue que

$$0 = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

o que implica que $t_1 = \cdots = t_n = 0$, pois F é linearmente independente, mostrando que $F \cup \{v\}$ também é linearmente independente.

□

3.2 Dimensão

Vamos agora mostrar que todas as bases de um dado espaço vetorial possuem o mesmo número de elementos. Primeiro precisamos de um resultado para relacionar os elementos de duas bases dadas.

Lema 3.5

Sejam $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ duas bases finitas de V. Para cada $v_i \in B$, podemos escolher $w_k \in C$ tal que

$$D = \{v_1, \ldots, v_{i-1}, w_k, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

também é base de V.

Prova:

Primeiro observe que deve existir um vetor w_k de C que não pode ser escrito como combinação linear de vetores de B sem o vetor v_i. De fato, caso contrário, todos os vetores do gerador C poderiam ser escritos como combinação linear de vetores de B sem o vetor v_i. Nesse caso, o conjunto B sem o vetor v_i permaneceria gerador, de modo que v_i poderia ser escrito como combinação linear dos demais vetores de B, o que seria contraditório com B ser linearmente independente. Por outro lado, temos que

$$w_k = x_1 v_1 + \cdots + x_i v_i + \cdots x_n v_n$$

com $x_i \neq 0$. Podemos então escrever

$$v_i = \frac{1}{x_i} w_k - \frac{x_1}{x_i} v_1 - \cdots - \frac{x_{i-1}}{x_i} v_{i-1} + \frac{x_{i+1}}{x_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{x_n}{x_i} v_n$$

de modo que todos os vetores do gerador B podem ser escritos como combinação linear de vetores de D, mostrando que esse conjunto é gerador. Para mostrar que ele é linearmente independente, considere

$$0 = t_1 v_1 + \ldots + t_{i-1} v_{i-1} + t w_k + t_{i+1} v_{i+1} + \ldots + t_n v_n$$

Usando a combinação linear de w_k acima, poderíamos escrever

$$0 = (t_1 + t x_1) v_1 + \ldots + t x_i v_i + \ldots + (t_n + t x_n) v_n$$

Como B é linearmente independente, segue que $t x_i = 0$. Como $x_i \neq 0$, segue que $t = 0$, de modo que

$$0 = t_1 v_1 + \ldots + t_{i-1} v_{i-1} + t_{i+1} v_{i+1} + \ldots + t_n v_n$$

Usando novamente que B é linearmente independente, segue que

$$t_1 = \ldots = t_{i-1} = t_{i+1} = \ldots = t_n = 0$$

mostrando que D é linearmente independente e, portanto, uma base.

□

A seguir, demonstramos o resultado mais importante dessa seção.

Proposição 3.6

Todas as bases finitas de V possuem o mesmo número de elementos.

Prova:

Sejam $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ duas bases finitas de V. Aplicando o lema anterior às bases B e C, existe $w_{k_1} \in C$ tal que

$$B_1 = \{w_{k_1}, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$$

também é uma base de V. Aplicando o lema anterior às bases B_1 e C, existe $w_{k_2} \in C$ tal que

$$B_2 = \{w_{k_1}, w_{k_2}, v_3, \ldots, v_n\}$$

também é uma base de V. Após repetir esse processo n vezes, obtemos uma base

$$B_n = \{w_{k_1}, w_{k_2}, w_{k_3}, \ldots, w_{k_n}\} \subset C$$

Como não pode haver elementos repetidos numa base, pois é um conjunto linearmente independente, segue que $n \leq m$. Repetindo o argumento, mas trocando os papéis de B e C, obtemos que $m \leq n$, mostrando que $m = n$.

□

Quando V possui uma base finita $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, ele é denominado *espaço de dimensão finita* e a denominada *dimensão de* V é dada por

$$\boxed{\dim V = n}$$

Quando $V = 0$, definimos $\dim V = 0$ e quando V não possui uma base finita, ele é denominado *espaço de dimensão infinita*. Os resultados obtidos dois primeiros capítulos são válidos para todo tipo de espaço vetorial com produto interno. A partir desse capítulo, nos restringiremos aos espaços de dimensão finita.

Exemplos

1) Não é difícil verificar que $\{v, w\}$ é linearmente independente se e só se v, w são vetores não colineares. Nesse caso, segue que

$$\boxed{\dim[v, w] = 2}$$

pois $\{v, w\}$ é uma base desse espaço, e o subespaço $[v, w]$, gerado por $\{v, w\}$, é denominado *plano gerado por v e w*.

De modo mais geral, se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente, segue que

$$\boxed{\dim[v_1, \ldots, v_k] = k}$$

pois $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base desse espaço.

2) Temos que

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^2 = 2}$$

pois a base canônica de $\mathbb{R}^2$, dada por

$$\boxed{\{(1,0), (0,1)\}}$$

possui dois elementos. Da mesma forma, temos que

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^3 = 3}$$

pois a base canônica de $\mathbb{R}^3$, dada por

$$\boxed{\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}}$$

possui três elementos. De modo mais geral, temos que

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n}$$

pois a base canônica de $\mathbb{R}^n$, dada por

$$\boxed{\{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}}$$

possui n elementos.

3) Como não existe base finita no espaço $\mathbb{P}$, das funções polinomiais, temos que $\mathbb{P}$ é um espaço de dimensão infinita. Por outro lado, temos que

$$\boxed{\dim \mathbb{P}_n = n+1}$$

pois a base canônica de $\mathbb{P}_n$, dada por

$$\boxed{\{1, x, \ldots, x^n\}}$$

possui $n+1$ elementos.

Proposição 3.7

Todo conjunto linearmente independente pode ser estendido a uma base. Em particular, o número de elementos de um conjunto linearmente independente é sempre menor ou igual a dimensão de V.

Prova:

Seja F um conjunto linearmente independente e B uma base finita de V. Se F é gerador, então ele é base. Caso contrário, existe $v_1 \in B$ que não pode ser escrito como combinação linear de vetores de F. Pelo Lema 3.4, o conjunto $F \cup \{v_1\}$ é linearmente independente. Se $F \cup \{v_1\}$ é gerador, então ele é base. Caso contrário, existe $v_2 \in B$ que não pode ser escrito como combinação linear de vetores de $F \cup \{v_1\}$. Pelo Lema 3.4, o conjunto

$F \cup \{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Repetindo esse processo k vezes, obtemos $F \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$ linearmente independente, onde os v_i pertencem a B. Podemos continuar repetindo esse processo enquanto $F \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$ não for gerador. Como B é finito e como $F \cup B$ é gerador, esse processo deve parar, de modo que, para algum k, $F \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$ é gerador e linearmente independente, portanto, uma base.

□

Uma consequência importante desse resultado é que os subespaços tem dimensão menor ou igual a do espaço.

Proposição 3.8

Se W é subespaço de V, então

$$\boxed{\dim W \leq \dim V}$$

e a igualdade ocorre se e só se $W = V$.

Prova:

Suponha por contradição que $\dim W > \dim V = n$. Nesse caso, existe $w_1 \neq 0$ em W, de modo que $F_1 = \{w_1\}$ é LI (linearmente independente). Mas se $F_k = \{w_1, \ldots, w_k\} \subset W$ for LI e $k \leq n$, então F_k não pode ser gerador de W. Logo existe w_{k+1} em W tal que $F_{k+1} = \{w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}\}$ é LI. Partindo de F_1, podemos ir obtendo $F_2, \ldots, F_k, \ldots$, todos LI, até $F_{n+1} = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$. Como W é subespaço de V, segue que F_{n+1} é um conjunto LI de V. Pela proposição anterior, segue que $n + 1 \leq \dim V$, o que é uma contradição com $\dim V = n$.

Seja $B = \{w_1, \ldots, w_k\}$ uma base de W. Se $W \neq V$, então existe algum vetor v que não pode ser escrito com combinação dos vetores de B. Pelo segundo lema da seção anterior, o conjunto $B \cup \{v\}$ é LI de V. Pelo proposição anterior, segue que $\dim W < k + 1 \leq \dim V$.

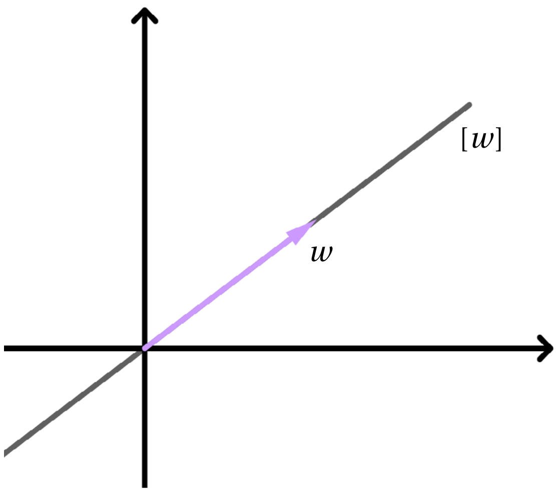
□

Exemplos

1) Podemos usar o resultado acima para descrever todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$. Se W é subespaço de $\mathbb{R}^2$, então

$$\dim W \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

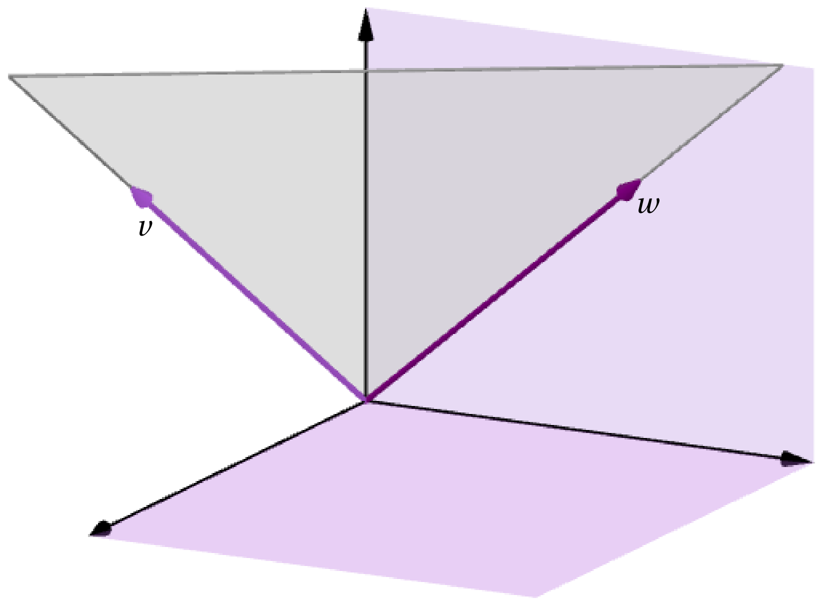
Além dos subespaços triviais, $W = 0$ e $W = \mathbb{R}^2$, que possuem dimensões, respectivamente, zero e dois, restam apenas os subespaços de dimensão um, que são dados por $W = [w]$, onde w é um vetor não nulo. Logo, os subespaços de $\mathbb{R}^2$ são os subespaços triviais e as retas passando pela origem.



2) O resultado acima também pode ser usado para descrever todos os subespaços de $\mathbb{R}^3$. Se W é subespaço de $\mathbb{R}^3$, então

$$\dim W \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Além dos subespaços triviais, $W = 0$ e $W = \mathbb{R}^3$, que possuem dimensões, respectivamente, zero e três, restam apenas os subespaços de dimensão um, que são dados por $W = [w]$, onde w é um vetor não nulo, e os subespaços de dimensão dois, que são dados por $W = [v, w]$, onde $\{v, w\}$ são vetores não colineares. Logo, os subespaços de $\mathbb{R}^3$ são os subespaços triviais, as retas passando pela origem e os planos passando pela origem.



Agora mostraremos o denominado *Teorema do Núcleo e da Imagem*, que relaciona a dimensão do núcleo e a dimensão da imagem com a dimensão do domínio de uma dada transformação linear.

Teorema 3.9: Núcleo e Imagem

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então

$$\boxed{\dim V = \dim N(T) + \dim I(T)}$$

onde $N(T)$ é o núcleo e $I(T)$ é a imagem de T.

Prova:

Sejam $\{v_1, \ldots, v_{n_T}\}$ uma base de $N(T)$ e $\{w_1, \ldots, w_{i_T}\}$ uma base de $I(T)$. Pela definição de $N(T)$, temos que

$$Tv_1 = 0, \quad \ldots, \quad Tv_{n_T} = 0$$

e, pela definição de $I(T)$, temos que

$$w_1 = Tu_1, \quad \ldots, \quad w_{i_T} = Tu_{i_T}$$

Basta então mostrarmos que

$$B = \{v_1, \ldots, v_{n_T}, u_1, \ldots, u_{i_T}\}$$

é uma base de V.

Para mostrarmos que B é linearmente independente, considere

$$0 = t_1 v_1 + \cdots + t_{n_T} v_{n_T} + s_1 u_1 + \ldots + s_{i_T} u_{i_T}$$

Aplicando T em ambos os lados e usando a linearidade de T, segue que

$$0 = s_1 w_1 + \ldots + s_{i_T} w_{i_T}$$

Como $\{w_1, \ldots, w_{i_T}\}$ é linearmente independente, segue que $s_1 = \cdots = s_{i_T} = 0$, de modo que, voltando à equação acima, segue que

$$0 = t_1 v_1 + \cdots + t_{n_T} v_{n_T}$$

Como $\{v_1, \ldots, v_{n_T}\}$ é linearmente independente, segue que $t_1 = \cdots = t_{n_T} = 0$, mostrando que B é linearmente independente.

Para mostrarmos que B é gerador, considere um vetor v de V. Como $\{w_1, \ldots, w_{i_T}\}$ é gerador de $I(T)$, temos que

$$Tv = y_1 w_1 + \ldots + y_{i_T} w_{i_T}$$

Usando a linearidade de T, não é difícil verificar que

$$v - (y_1 u_1 + \ldots + y_{i_T} u_{i_T})$$

pertence a $N(T)$. Como $\{v_1, \ldots, v_{n_T}\}$ é gerador de $N(T)$, temos que

$$v - (y_1 u_1 + \ldots + y_{i_T} u_{i_T}) = x_1 v_1 + \cdots + x_{n_T} v_{n_T}$$

de modo que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_{n_T} v_{n_T} + y_1 u_1 + \ldots + y_{i_T} u_{i_T}$$

mostrando que B também é gerador e, portanto, base de V.

□

A dimensão do núcleo de T

$$\boxed{n_T = \dim N(T)}$$

é denominada *nulidade de* T, enquanto a dimensão da imagem de T

$$\boxed{i_T = \dim I(T)}$$

é denominada *posto de* T.

Exemplo

Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por

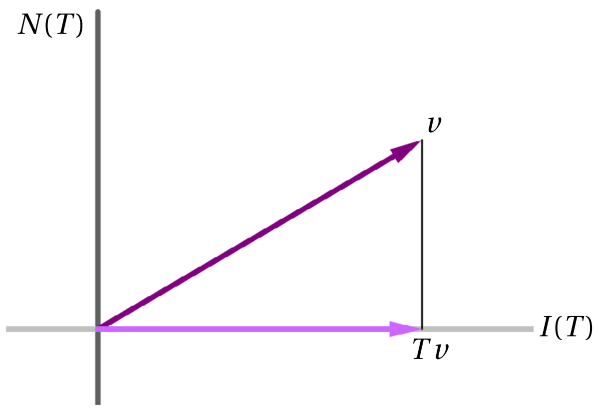
$$T(x, y) = (x, 0)$$

temos que

$$N(T) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

enquanto

$$I(T) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$



Segue então que

$$n_T + i_T = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

Uma consequência importante do resultado acima é que a dimensão de uma soma direta é a soma das dimensões.

Proposição 3.10

Se $V = U \oplus W$ é uma decomposição em soma direta, então

$$\boxed{\dim V = \dim U + \dim W}$$

Prova:

Basta aplicar o Teorema do Núcleo e da Imagem para a projeção P_W^U, cujo núcleo é o subespaço U e cuja imagem é o subespaço W.

□

Outra consequência importante do resultado acima é que a caracterização dos operadores lineares invertíveis.

Proposição 3.11

Seja T um operador linear de V. As seguintes condições são equivalentes

(a) T é invertível.

(b) $N(T) = 0$.

(c) $I(T) = V$.

Prova:

Vimos no final do segundo capítulo que T é invertível se e só se

$$N(T) = 0 \qquad \text{e} \qquad I(T) = V$$

o que ocorre se e só se

$$n_T = 0 \qquad \text{e} \qquad i_T = \dim V$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem

$$n_T = 0 \qquad \text{se e só se} \qquad i_T = \dim V$$

de modo que

$$N(T) = 0 \qquad \text{se e só se} \qquad I(T) = V$$

mostrando que as três condições acima são equivalentes.

□

3.3 Bases ortonormais

Se o conceito de base generaliza a ideia de eixos coordenados do plano e do espaço, as denominadas *base ortonormais* generalizam a noção de eixos coordenados perpendiculares. Uma *base ortonormal* é uma base finita

$$\boxed{\{u_1, \dots, u_n\}}$$

de vetores unitários de V ortogonais entre si, ou seja, tais que

$$\boxed{|u_i| = 1}$$

e que

$$\boxed{u_i \cdot u_j = 0}$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$.

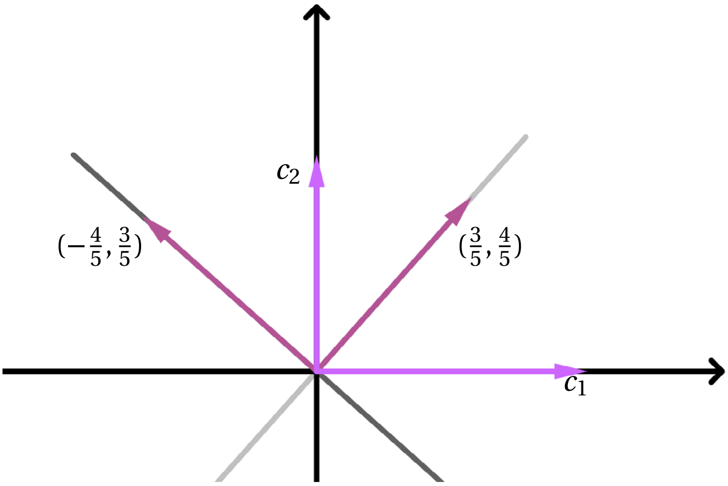
Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^2$, a base canônica é uma base ortonormal, pois

$$|(1,0)| = 1 \qquad \text{e} \qquad |(0,1)| = 1$$

e também

$$(1,0) \cdot (0,1) = 0$$



Existem várias outras bases ortonormais em $\mathbb{R}^2$, como

$$\left\{\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}\right),\left(-\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5}\right)\right\}$$

pois

$$\left|\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}\right)\right| = 1 \qquad \text{e} \qquad \left|\left(-\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5}\right)\right| = 1$$

e também

$$\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}\right)\cdot\left(-\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5}\right) = 0$$

2) De modo geral, a base canônica $\{e_1,\dots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ é uma base ortonormal, pois

$$|e_i| = 1$$

e que

$$e_i \cdot e_j = 0$$

para todos $i, j \in \{1,\dots,n\}$.

3) Em $\mathbb{R}^3$, o plano $(1,2,2)^\perp$, dos vetores ortogonais ao vetor $(1,2,2)$, possui uma base dada por

$$\left\{\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right),\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}\right)\right\}$$

pois esse vetores são ortogonais a $(1,2,2)$ e são não colineares. Além disso, essa base é ortonormal, pois

$$\left|\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)\right| = 1 \qquad \text{e} \qquad \left|\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}\right)\right| = 1$$

e também

$$\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}\right) = 0$$

Não é difícil verificar que

$$\left\{\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right),\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right),\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Vamos generalizar a decomposição de um espaço vetorial na soma ortogonal de uma reta passando pela origem mais o hiperplano perpendicular a ela. Precisamos primeiro do seguinte resultado.

Proposição 3.12

Se U é um subespaço de V, então

$$\boxed{U^{\perp} = \{v \in V : v \cdot u = 0, \text{para todo } u \in U\}}$$

é um subespaço de V, denominado *subespaço perpendicular a* U.

Prova:

Para todo escalar t, para todos $w_1, w_2 \in U^{\perp}$ e para todo $u \in U$, segue que

$$tw_1 \cdot u = t(w_1 \cdot u) = 0$$

mostrando que $tw_1 \in U^{\perp}$, e também que

$$(w_1 + w_2) \cdot u = w_1 \cdot u + w_2 \cdot u = 0$$

mostrando que $w_1 + w_2 \in U^{\perp}$, de modo que $U^{\perp}$ é de fato um subespaço de V.

$\square$

Vamos agora obter a fórmula da projeção ortogonal sobre um subespaço que possui uma base ortonormal.

Proposição 3.13

Seja $\{u_1, \dots, u_k\}$ uma base ortonormal de U. Temos que

$$\boxed{V = U \oplus U^\perp}$$

e essa decomposição é ortogonal. Além disso, a projeção de v em U paralela a $U^\perp$, denominada *projeção ortogonal de v em U*, é dada por

$$\boxed{P_U v = (v \cdot u_1)u_1 + \cdots + (v \cdot u_k)u_k}$$

Prova:

Temos que mostrar que todo v pode ser escrito de modo único como

$$v = u + w$$

onde $u \in U$ e $w \in U^\perp$. Primeiro mostramos a unicidade da decomposição. De fato, se

$$u_1 + w_1 = v = u_2 + w_2$$

onde $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in U^\perp$, então

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

de modo que

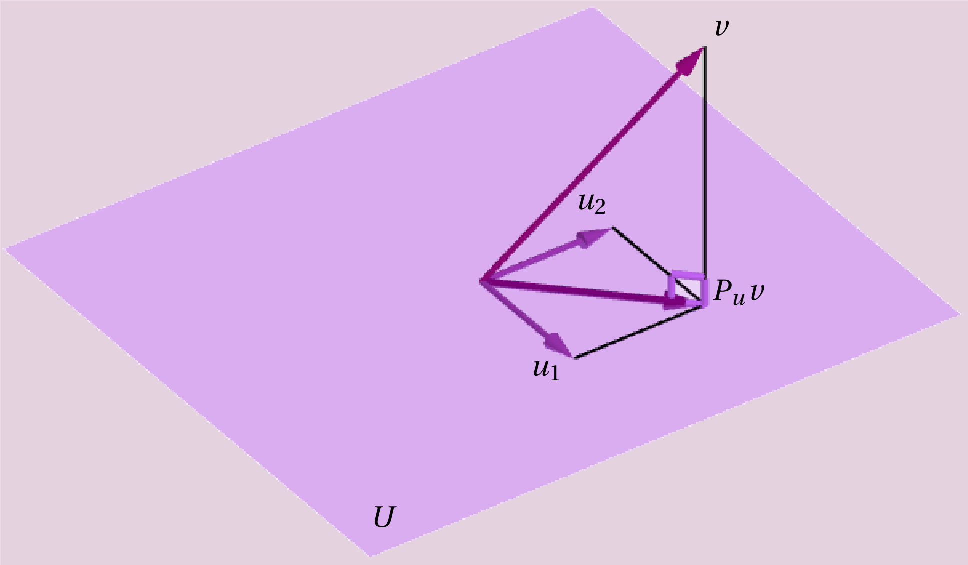
$$|u_1 - u_2|^2 = (u_1 - u_2) \cdot (u_1 - u_2) = (u_1 - u_2) \cdot (w_2 - w_1) = 0$$

uma vez que $u_1 - u_2 \in U$, enquanto $w_2 - w_1 \in U^\perp$. Segue então que $u_1 = u_2$ e também que $w_1 = w_2$, mostrando a unicidade.

Agora, como $P_U v$ pertence a U, pois é combinação linear dos vetores de $\{u_1, \dots, u_k\}$, e como

$$v = P_U v + v - P_U v$$

basta então mostrarmos que $v - P_U v$ é perpendicular a todo vetor u de U.



Como u é combinação linear dos vetores de $\{u_1, \ldots, u_k\}$, pela bilinearidade do produto interno, basta mostrarmos que $v - P_U v$ é perpendicular a cada vetor de $\{u_1, \ldots, u_k\}$. De fato, temos que

$$(v - P_U v) \cdot u_i = v \cdot u_i - P_U v \cdot u_i = 0$$

uma vez que

$$\begin{aligned} P_U v \cdot u_i &= (v \cdot u_1) u_1 \cdot u_i + \cdots + (v \cdot u_i) u_i \cdot u_i + \cdots + (v \cdot u_k) u_k \cdot u_i \\ &= (v \cdot u_1) 0 + \cdots + (v \cdot u_i) 1 + \cdots + (v \cdot u_k) 0 \\ &= v \cdot u_i \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

$\square$

Exemplos

1) Se u é unitário, a projeção ortogonal de v sobre a reta $[u]$ é dada por

$$P_u v = (v \cdot u)u$$

que é igual à fórmula obtida no primeiro capítulo, pois $|u|^2 = 1$.

2) Em $\mathbb{R}^3$, vimos acima que o subespaço U dos vetores ortogonais ao vetor $(1,2,2)$ possui uma base ortonormal dada por

$$\left\{\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)\right\}$$

Portanto a projeção ortogonal de $v = (x, y, z)$ sobre U é dada por

$$\begin{aligned} & P_U(x,y,z) = \\ = \ & \left((x,y,z)\cdot\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right)\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) + \left((x,y,z)\cdot\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)\right)\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) \\ = \ & \left(\tfrac{4x-2y-2z}{9}, \tfrac{-2x+5y-4z}{9}, \tfrac{-2x-4y+5z}{9}\right) \end{aligned}$$

O próximo resultado apresenta um processo de se obter uma base ortonormal a partir de uma base finita, denominado *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt.*

Proposição 3.14: Gram-Schmidt

Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base finita de V. Se

$$\boxed{u_i = \frac{v_i - P_{U_i} v_i}{|v_i - P_{U_i} v_i|}}$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, onde

$$\boxed{U_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad U_i = [u_1, \dots, u_{i-1}]}$$

para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, então

$$\boxed{U_i = [v_1, \dots, v_{i-1}]}$$

de modo que o processo está bem definido e

$$\boxed{\{u_1, \dots, u_n\}}$$

é uma base ortonormal de V.

Prova:

Procedemos por indução em i. Quando $i = 2$, temos que $U_2 = [u_1] = [v_1]$, uma vez que $P_{U_1} v_1 = 0$, de modo que $u_1 = v_1/|v_1|$. Além disso, temos que

$$U_{i+1} = [u_1, \dots, u_{i-1}, u_i] = [u_1, \dots, u_{i-1}, v_i] = [v_1, \dots, v_{i-1}, v_i]$$

onde usamos, na primeira igualdade, que

$$v_i = P_{U_i} v_i + t u_i$$

com $t = |v_i - P_{U_i} v_i|$, e, na segunda igualdade, a hipótese de indução

$$U_i = [u_1, \dots, u_{i-1}] = [v_1, \dots, v_{i-1}]$$

O processo está bem definido, uma vez que v_i não pertence a $[v_1, \dots, v_{i-1}]$, pois $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base, de modo que $v_i - P_{U_i} v_i \neq 0$. Finalmente, como cada u_i é unitário e ortogonal ao anteriores e como $\{u_1, \dots, u_n\}$ possui n vetores, segue que ele é base ortonormal de V.

$\square$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, o plano U dos vetores ortogonais ao vetor $(1,2,2)$ possui uma base dada por $\{v_1, v_2\}$, onde

$$v_1 = (2,-2,1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (2,-1,0)$$

pois esse vetores são ortogonais a $(1,2,2)$ e são não colineares. Entretanto essa base não é ortonormal, pois seus vetores não são unitários nem ortogonais entre si. Vamos então aplicar o Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt a essa base. Temos que

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(2,-2,1)}{|(2,-2,1)|} = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

e que

$$u_2 = \frac{v_2 - P_{U_2} v_2}{|v_2 - P_{U_2} v_2|}$$

onde $U_2 = [u_1]$. Temos que

$$\begin{aligned} P_{U_2} v_2 &= \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \\ &= \left((2,-1,0) \cdot \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right) \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \\ &= \left(\tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

de modo que

$$v_2 - P_{U_2} v_2 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)$$

Como

$$\left|\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)\right| = 1$$

segue que

$$u_2 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)$$

de modo que $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de U.

Uma consequência importante do Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt é a decomposição de um espaço vetorial na soma ortogonal de um subespaço dado mais o subespaço perpendicular a ele.

Proposição 3.15

Para todo subespaço U de V, temos que

$$\boxed{V = U \oplus U^{\perp}}$$

Em particular, temos que

$$\boxed{\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U}$$

Prova:

A decomposição em soma direta segue do que vimos no início desta seção, pois U sempre possui base ortonormal, pelo Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt. O resultado da dimensão segue então direto da decomposição em soma direta, pois, nesse caso, temos que

$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$$

□

3.4 Exercícios

1) Decida se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.

a) $\begin{cases} v_1 = (1,0,1) \\ v_2 = (-1,1,0) \\ v_3 = (0,2,2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} v_1 = (1,1,1) \\ v_2 = (-1,1,-2) \\ v_3 = (1,7,-2) \end{cases}$ e) $\begin{cases} v_1 = (1,1,1) \\ v_2 = (-1,1,-2) \\ v_3 = (-10,-2,-14) \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_1 = (1,1,1) \\ v_2 = (-1,1,0) \\ v_3 = (0,2,2) \end{cases}$ d) $\begin{cases} v_1 = (1,1,1) \\ v_2 = (-1,1,-2) \\ v_3 = (-10,-2,-12) \end{cases}$ f) $\begin{cases} v_1 = (2,1,-2,-2) \\ v_2 = (-3,-2,2,-1) \\ v_3 = (0,-1,-2,-8) \end{cases}$

2) Verifique se $\{p_1, p_2, p_3\}$ é linearmente independente.

a) $\begin{cases} p_1(x) = 1+x^2 \\ p_2(x) = -1+x \\ p_3(x) = 2x+3x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} p_1(x) = 1+x+x^2 \\ p_2(x) = -1+2x-x^2 \\ p_3(x) = -10-2x-14x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} p_1(x) = 2-x \\ p_2(x) = x+x^2 \\ p_3(x) = 8+2x+6x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} p_1(x) = 2+x-2x^2-2x^3 \\ p_2(x) = -3-2x+2x^2-x^3 \\ p_3(x) = -x-2x^2-8x^3 \end{cases}$

3) Determine a dimensão de $W = [w_1, w_2, w_3]$ e encontre uma base de W.

a) $\begin{cases} w_1 = (1,0,1) \\ w_2 = (-1,1,0) \\ w_3 = (0,2,2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} w_1 = (2,-1,-2,2) \\ w_2 = (-1,-1,-2,-1) \\ w_3 = (-1,1,2,-1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} w_1 = (1,1,1) \\ w_2 = (-1,1,-2) \\ w_3 = (1,7,-2) \end{cases}$ d) $\begin{cases} w_1 = (2,1,-2,-2) \\ w_2 = (-3,-2,2,-1) \\ w_3 = (0,-1,-2,-8) \end{cases}$

4) (Abstrato) Prove as afirmações abaixo.

a) Um conjunto F é linearmente dependente se e só se algum dos seus vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais.

b) Se G é um conjunto gerador e todos os seus vetores podem ser escritos como combinação linear dos vetores de F, então F também é gerador.

c) Se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ é linearmente independente, então $\dim[w_1, \ldots, w_k] = k$.

d) Um conjunto de dois vetores não colineares é linearmente independente.

e) Se v e w são vetores não colineares do $\mathbb{R}^3$, então $[v, w] = (v \times w)^\perp$.

f) Se w é um vetor não nulo de V, então $\dim w^\perp = \dim V - 1$.
Dica: Aplique o Teorema do Núcleo e da Imagem a P_w.

5) Por Gram-Schmidt, determine uma base ortonormal de U e depois a projeção P_U.

a) $\begin{cases} U &= [v_1, v_2] \\ v_1 &= (1,1,1,0) \\ v_2 &= (0,0,1,1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} U &= [v_1, v_2, v_3] \\ v_1 &= (1,1,0,0) \\ v_2 &= (1,0,1,0) \\ v_3 &= (0,1,0,1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} U &= [v_1, v_2] \\ v_1 &= (1,1,0,2) \\ v_2 &= (0,0,1,1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} U &= [v_1, v_2, v_3] \\ v_1 &= (0,1,0,-1) \\ v_2 &= (-1,0,1,0) \\ v_3 &= (0,1,0,1) \end{cases}$

6) (Abstrato) Mostre diretamente, a partir da definição

$$P_U v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

que o operador P_U de V é linear e também é uma projeção, onde $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é uma base ortonormal do subespaço U.

7) (Abstrato) Mostre todo conjunto ortonormal é linearmente independente.

CAPÍTULO 4

MATRIZES

4.1 SOMA E PRODUTO

Vamos agora explorar a existência de bases finitas, para introduzir as denominadas *matrizes*, que são tabelas de escalares que descrevem completamente os vetores e as transformações lineares. Ordenando um base finita $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, a denominada *matriz de v na base B* é dada pela seguinte tabela de escalares

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_B}$$

com n linhas e uma coluna, onde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ são as coordenadas de v na base B, de modo que $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Quando a base B estiver subentendida, escrevemos

$$\boxed{v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

ou simplesmente

$$\boxed{v = [x_j]_n}$$

onde o subíndice n diz o número de linhas.

Proposição 4.1

Sejam $v = [x_j]_n$ e $w = [y_j]_n$ dois vetores e t um escalar. Então

$$v + w = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad tv = \begin{bmatrix} tx_1 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix}$$

Prova:

Como

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \qquad \text{e} \qquad w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$$

segue que

$$v + w = (x_1 + y_1) v_1 + \cdots + (x_n + y_n) v_n$$

e também que

$$tv = tx_1 v_1 + \cdots + tx_n v_n$$

□

Podemos então definir as operações de soma de matrizes colunas e produto por escalar, de modo a refletir as operações de soma de vetores e produto por escalar. Em vista do resultado acima, definimos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

e também

$$t\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix}$$

ou de maneira resumida

$$[x_j]_n + [y_j]_n = [x_j + y_j]_n \qquad \text{e} \qquad t[x_j]_n = [tx_j]_n$$

Observe que as matrizes de vetores em relação a uma dada base estabelecem uma relação muito próxima entre os espaços de dimensão n e o espaço $\mathbb{R}^n$, ainda que a notação de n-úpla tenha sido substituída pela de matriz coluna.

Exemplos

1) Em $\mathbb{R}^2$, a matriz de $v = (x, y)$ na base canônica é dada por

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

enquanto, em $\mathbb{R}^3$, a matriz de $v = (x, y, y)$ na base canônica é dada por

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

De modo mais geral, em $\mathbb{R}^n$, a matriz de $v = (x_1, \ldots, x_n)$ na base canônica é dada por

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2) Em $\mathbb{P}_2$, a matriz de p, onde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, na base canônica é dada por

$$p = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

De modo mais geral, em $\mathbb{P}_n$, a matriz de p, onde

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

na base canônica é dada por

$$p = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Para definirmos a matriz de uma transformação linear, precisamos de um resultado preliminar.

Proposição 4.2

Sejam $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ordenada de V e $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base ordenada de W. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $v = [x_j]_n$ é um vetor, então

$$\boxed{Tv = \begin{bmatrix} x_1 t_{11} + x_2 t_{12} + \cdots + x_n t_{1n} \\ x_1 t_{21} + x_2 t_{22} + \cdots + x_n t_{2n} \\ \vdots \\ x_1 t_{m1} + x_2 t_{m2} + \cdots + x_n t_{mn} \end{bmatrix}_C}$$

onde

$$\boxed{Tv_j = \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \vdots \\ t_{mj} \end{bmatrix}_C}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Prova:

Como

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

pela linearidade de T, temos que

$$Tv = x_1 T v_1 + \cdots + x_n T v_n$$

e o resultado segue da soma de matrizes e produto por escalar.

□

A denominada *matriz de T na base ordenada B de V* é dada pela seguinte tabela de vetores de W

$$\boxed{\begin{bmatrix} Tv_1 & Tv_2 & \cdots & Tv_n \end{bmatrix}_B}$$

com uma linha e n colunas, enquanto a denominada *matriz de T nas bases ordenadas B de V e C de W* é dada pela seguinte tabela de escalares

$$\boxed{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}_{BC}}$$

com m linhas e n colunas. Quando as bases B e C estiverem subentendidas, escrevemos

$$\boxed{T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}}$$

ou simplesmente

$$\boxed{T = [t_{ij}]_{mn}}$$

onde o subíndice m diz o número de linhas, enquanto o subíndice n diz o número de colunas.

Podemos então definir a operação de produto de matriz coluna por matriz retangular, de modo a refletir o produto de transformação linear por vetor. Em vista do resultado acima, definimos

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 t_{11} + x_2 t_{12} + \cdots + x_n t_{1n} \\ x_1 t_{21} + x_2 t_{22} + \cdots + x_n t_{2n} \\ \vdots \\ x_1 t_{m1} + x_2 t_{m2} + \cdots + x_n t_{mn} \end{bmatrix}$$

Observe que o número de colunas da matriz retangular deve ser igual ao número de linhas da matriz coluna.

Exemplos

1) Quando nada for dito em contrário, a base usada em $\mathbb{R}^n$ será sempre a canônica. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + z)$$

A matriz de T é então dada por

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x + z \end{bmatrix}$$

2) Quando nada for dito em contrário, a base usada em $\mathbb{P}_n$ será sempre a canônica. Seja T a derivação em $\mathbb{P}_2$. Podemos considerar T como uma transformação de $\mathbb{P}_2$ em $\mathbb{P}_1$ ou como um operador de $\mathbb{P}_2$ em si mesmo. Por um lado, se considerarmos $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$, sua matriz é dada por

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} T1 & Tx & Tx^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pois a base canônica do contradomínio $\mathbb{P}_1$ é $\{1, x\}$, de modo que

$$0 = 0.1 + 0x, \qquad 1 = 1.1 + 0x, \qquad 2x = 0.1 + 2x$$

Além disso, temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix}$$

refletindo a equação

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$$

Por outro lado, se considerarmos $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, sua matriz é dada por

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} T1 & Tx & Tx^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pois a base canônica do contradomínio $\mathbb{P}_2$ é $\{1, x, x^2\}$, de modo que

$$0 = 0.1 + 0x + 0x^2, \qquad 1 = 1.1 + 0x + 0x^2, \qquad 2x = 0.1 + 2x + 0x^2$$

Além disso, temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

refletindo a equação

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x + 0x^2$$

Agora a fórmula da matriz da soma e produto por escalar de duas transformações lineares.

Proposição 4.3

Sejam $S = [s_{ij}]_{mn}$ e $T = [t_{ij}]_{mn}$ duas transformações lineares e t um escalar. Então

$$S + T = \begin{bmatrix} s_{11}+t_{11} & s_{12}+t_{12} & \cdots & s_{1n}+t_{1n} \\ s_{21}+t_{21} & s_{22}+t_{22} & \cdots & s_{2n}+t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1}+t_{m1} & s_{m2}+t_{m2} & \cdots & s_{mn}+t_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$tT = \begin{bmatrix} tt_{11} & tt_{12} & \cdots & tt_{1n} \\ tt_{21} & tt_{22} & \cdots & tt_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tt_{m1} & tt_{m2} & \cdots & tt_{mn} \end{bmatrix}$$

Prova:

Basta observar que

$$(S + T)v_j = Sv_j + Tv_j = \begin{bmatrix} s_{1j}+t_{1j} \\ s_{2j}+t_{2j} \\ \vdots \\ s_{mj}+t_{mj} \end{bmatrix}$$

e também que

$$(tT)v_j = tTv_j = \begin{bmatrix} tt_{1j} \\ tt_{2j} \\ \vdots \\ tt_{mj} \end{bmatrix}$$

□

Podemos então definir as operações de soma matrizes retangulares e produto por escalar, de modo a refletir as operações de soma de transformações lineares e produto por escalar. Em vista do resultado acima, definimos

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}+t_{11} & \cdots & s_{1n}+t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1}+t_{m1} & \cdots & s_{mn}+t_{mn} \end{bmatrix}$$

e também

$$t\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tt_{11} & \cdots & tt_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ tt_{m1} & \cdots & tt_{mn} \end{bmatrix}$$

ou de maneira resumida

$$[s_{ij}]_{mn} + [t_{ij}]_{mn} = [s_{ij}+t_{ij}]_{mn} \qquad \text{e} \qquad t[t_{ij}]_{mn} = [tt_{ij}]_{mn}$$

Dada uma matriz $T = [t_{ij}]_{mn}$, introduzimos a seguinte notação muito útil para a descrição do produto de matrizes

$$T = \begin{bmatrix} c_{T1} & c_{T2} & \cdots & c_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ l_{T2} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

onde

$$\boxed{c_{Tj} = Tv_j = \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \vdots \\ t_{mj} \end{bmatrix}}$$

é a j-ésima coluna de T, enquanto

$$\boxed{l_{Ti} = \begin{bmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \cdots & t_{in} \end{bmatrix}}$$

é a i-ésima linha de T. Nos próximos resultados, vamos utilizar essa notação e vamos identificar as matrizes de uma linha e uma coluna com seus respectivos escalares.

Proposição 4.4

Sejam $T = [t_{ij}]_{mn}$ uma transformação linear e $v = [x_j]_n$ um vetor. Então

$$\boxed{Tv = \begin{bmatrix} l_{T1}v \\ l_{T2}v \\ \vdots \\ l_{Tm}v \end{bmatrix}}$$

Prova:

O resultado segue pois

$$l_{Ti}v = \begin{bmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \cdots & t_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 + \cdots + t_{in}x_n$$

□

Agora, segue a fórmula da matriz do produto de duas transformações lineares.

Proposição 4.5

Sejam $S = [s_{ik}]_{ml}$ e $T = [t_{kj}]_{ln}$ duas transformações lineares. Então

$$\boxed{ST = \begin{bmatrix} l_{S1}c_{T1} & l_{S1}c_{T2} & \cdots & l_{S1}c_{Tn} \\ l_{S2}c_{T1} & l_{S2}c_{T2} & \cdots & l_{S2}c_{Tn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{Sm}c_{T1} & l_{Sm}c_{T2} & \cdots & l_{Sm}c_{Tn} \end{bmatrix}}$$

ou de maneira resumida

$$\boxed{ST = [l_{Si}c_{Tj}]_{mn}}$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} ST &= \begin{bmatrix} STv_1 & STv_2 & \cdots & STv_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Sc_{T1} & Sc_{T2} & \cdots & Sc_{Tn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e o resultado segue, pois

$$Sc_{Tj} = \begin{bmatrix} l_{S1}c_{Tj} \\ l_{S2}c_{Tj} \\ \vdots \\ l_{Sm}c_{Tj} \end{bmatrix}$$

onde

$$l_{Si}c_{Tj} = \begin{bmatrix} s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{il} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \vdots \\ t_{lj} \end{bmatrix} = s_{i1}t_{1j} + s_{i2}t_{2j} + \cdots + s_{il}t_{lj}$$

$\square$

Podemos então definir a operação de produto de matrizes retangulares, de modo a refletir a operação de produto de transformações lineares. Em vista do resultado acima, definimos

$$\begin{bmatrix} l_{S1} \\ l_{S2} \\ \vdots \\ l_{Sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{T1} & c_{T2} & \cdots & c_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{S1}c_{T1} & l_{S1}c_{T2} & \cdots & l_{S1}c_{Tn} \\ l_{S2}c_{T1} & l_{S2}c_{T2} & \cdots & l_{S2}c_{Tn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{Sm}c_{T1} & l_{Sm}c_{T2} & \cdots & l_{Sm}c_{Tn} \end{bmatrix}$$

Observe que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

Exemplos

1) O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$T(x, y) = \left(\frac{3x-4y}{5}, \frac{-4x-3y}{5}\right)$$

é projeção, reflexão ou nilpotente? A matriz de T é então dada por

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} T(1,0) & T(0,1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) & \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que

$$T^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

de modo que T é uma reflexão.

2) O operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$T(x, y, z) = \left(\frac{2x-y+z}{3}, \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{x+y+2z}{3}\right)$$

é projeção, reflexão ou nilpotente? A matriz de T é então dada por

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) & \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que

$$T^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} & \frac{3}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{3}{9} & \frac{6}{9} \end{bmatrix} = T$$

de modo que T é uma projeção.

4.2 Transposta

A denominada *transposta* de uma matriz coluna com n linhas é uma matriz linha com n colunas e vice e versa, de modo que

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}$$

e também

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

A *transposta* de uma matriz retangular é a matriz retangular cujas linhas são as transpostas das colunas da matriz original ou, equivalentemente, as colunas são as transpostas das linhas da matriz original, de modo que, se

$$\boxed{T = \begin{bmatrix} c_{T1} & c_{T2} & \cdots & c_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ l_{T2} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}}$$

então

$$\boxed{T' = \begin{bmatrix} c'_{T1} \\ c'_{T2} \\ \vdots \\ c'_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l'_{T1} & l'_{T2} & \cdots & l'_{Tm} \end{bmatrix}}$$

De modo mais explícito, se

$$\boxed{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{m1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}}$$

De modo mais resumido, se

$$\boxed{T = [t_{ij}]_{mn}}$$

então

$$\boxed{T' = [t_{ji}]_{nm}}$$

Exemplo

Se

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

então

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Vamos agora mostrar como a transposição se comporta em relação à soma e ao produto de matrizes.

Proposição 4.6

Temos que

$$\boxed{(S+T)' = S' + T' \qquad \text{e} \qquad (ST)' = T'S'}$$

Prova:

No caso da soma, temos que

$$\begin{aligned} (S+T)' &= [s_{ij} + t_{ij}]'_{mn} \\ &= [s_{ji} + t_{ji}]_{nm} \\ &= [s_{ji}]_{nm} + [t_{ji}]_{nm} \\ &= [s_{ij}]'_{mn} + [t_{ij}]'_{mn} \\ &= S' + T' \end{aligned}$$

No caso do produto, temos que

$$\begin{aligned} (ST)' &= [l_{Si} c_{Tj}]'_{mn} \\ &= [l_{Sj} c_{Ti}]_{nm} \\ &= [c'_{Ti} l'_{Sj}]_{nm} \\ &= T'S' \end{aligned}$$

uma vez que

$$
\begin{aligned}
l_{Sj} c_{Ti} &= \begin{bmatrix} s_{j1} & s_{j2} & \cdots & s_{jl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{li} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t_{1i} & t_{2i} & \cdots & t_{li} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{j1} \\ s_{j2} \\ \vdots \\ s_{jl} \end{bmatrix} \\
&= c'_{Ti} l'_{Sj}
\end{aligned}
$$

□

Exemplo

Se

$$
S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

então

$$
ST = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \end{bmatrix}
$$

e também

$$
T'S' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 \end{bmatrix}
$$

Supondo que a base considerada é ortonormal, podemos relacionar a transposta de vetores com o produto escalar.

Proposição 4.7

Seja $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal ordenada de V. Se $v = [x_j]_n$ e $w = [y_j]_n$ são vetores de V, então

$$\boxed{v \cdot w = v' w}$$

Prova:

Como

$$v = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \qquad \text{e} \qquad w = y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n$$

usando a bilinearidade do produto interno, segue que

$$\begin{aligned} v \cdot w \quad = \quad & x_1 y_1 (u_1 \cdot u_1) + x_1 y_2 (u_1 \cdot u_2) + \cdots + x_1 y_n (u_1 \cdot u_n) + \\ & + x_2 y_1 (u_2 \cdot u_1) + x_2 y_2 (u_2 \cdot u_2) + \cdots + x_2 y_n (u_2 \cdot u_n) + \\ & \vdots \\ & + x_n y_1 (u_n \cdot u_1) + x_n y_2 (u_n \cdot u_2) + \cdots + x_n y_n (u_n \cdot u_n) \end{aligned}$$

Usando que B é ortonormal, sobram apenas as parcelas da diagonal, de modo que

$$v \cdot w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

□

Vimos no capítulo anterior que, dado um produto escalar, sempre existe uma base ortonormal, obtida pelo Processo de Gram-Schmidt. Por outro lado, dada uma base finita qualquer, não é difícil mostrar que a fórmula acima define um produto escalar no qual essa base é ortonormal. De agora em diante, vamos sempre supor que estamos trabalhando com bases ortonormais em relação ao produto escalar, denotadas por $\{e_1, \ldots, e_n\}$, assim como a base canônica do $\mathbb{R}^n$, de modo que a fórmula acima é verdadeira. Podemos relacionar a transposta de transformações lineares com o produto escalar.

Proposição 4.8

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então

$$\boxed{Tv \cdot w = v \cdot T'w}$$

para todo vetor v de V e para todo vetor w de W.

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} Tv \cdot w &= (Tv)'w \\ &= (v'T')w \\ &= v'(T'w) \\ &= v \cdot T'w \end{aligned}$$

onde usamos a proposição anterior na primeira e na última igualdades.

□

Agora vamos mostrar a relação entre isometrias e a transposta de operadores lineares.

Proposição 4.9

Seja $R : V \to V$ um operador linear. Então R é uma isometria se e só se

$$\boxed{R'R = I}$$

Prova:

Vimos no segundo capítulo, que R é uma isometria se e só se ela preserva o produto interno, de modo que

$$Rv \cdot Rw = v \cdot w$$

para todos vetores v e w de V. Pela proposição anterior, essa condição é equivalente a

$$R'Rv \cdot w = v \cdot w$$

que por sua vez é equivalente a

$$(R'Rv - v) \cdot w = 0$$

para todos vetores v e w de V. Escolhendo $w = R'Rv - v$, segue que

$$|R'Rv - v|^2 = (R'Rv - v) \cdot (R'Rv - v) = 0$$

para todo vetor v, de modo que

$$R'Rv = v$$

para todo vetor v. Mas essa última condição é equivalente a

$$R'R = I$$

□

Exemplo

O operador

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

é uma isometria?

Como

$$T'T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = I$$

segue que T é uma isometria.

4.3 Posto e escalonamento

Vamos introduzir agora o denominado *posto coluna de* T, que é a dimensão do subespaço gerado pelas colunas de T, dado por

$$\boxed{c_T = \dim\,[c_{T1}, \ldots, c_{Tn}]}$$

e o denominado *posto linha de* T, que é a dimensão do subespaço gerado pelas linhas de T, dado por

$$\boxed{l_T = \dim\,[l'_{T1}, \ldots, l'_{Tm}]}$$

Observe que estamos considerando as transpostas das linhas na definição do posto linha, pois vetores correspondem a matrizes coluna. O próximo resultado mostra que o posto linha e o posto coluna coincidem com o posto da transformação.

Proposição 4.10

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Temos que a imagem de T é o subespaço gerado pelas colunas

$$\boxed{I(T) = [c_{T1}, \ldots, c_{Tn}]}$$

e que o núcleo de T é o subespaço perpedicular ao gerado pelas linhas

$$\boxed{N(T) = [l'_{T1}, \ldots, l'_{Tm}]^{\perp}}$$

Em particular, temos que

$$\boxed{c_T = i_T = l_T}$$

Prova:

Para a primeira igualdade, temos que

$$\begin{aligned}
I(T) &= \{Tv : v \in V\} \\
&= \{x_1 Te_1 + \cdots + x_n Te_n : x_i \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x_1 c_{T1} + \cdots + x_n c_{Tn} : x_i \in \mathbb{R}\} \\
&= [c_{T1}, \ldots, c_{Tn}]
\end{aligned}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base ortonormal de V fixada. Para a segunda igualdade, primeiro observamos que

$$Tv = \begin{bmatrix} l_{T1}v \\ l_{T2}v \\ \vdots \\ l_{Tm}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l'_{T1} \cdot v \\ l'_{T2} \cdot v \\ \vdots \\ l'_{Tm} \cdot v \end{bmatrix}$$

Como v pertence a $N(T)$ se e só $Tv = 0$, segue então que v pertence a $N(T)$ se e só se v é perpedicular a cada linha de T, o que ocorre se e só se

$u \cdot v = 0$ para todo $u \in [l'_{T1}, \ldots, l'_{Tm}]$, pois como

$$u = t_1 l'_{T1} + \cdots + t_m l'_{Tm}$$

então

$$u \cdot v = t_1 (l'_{T1} \cdot v) + \cdots + t_m (l'_{Tm} \cdot v)$$

pela bilinearidade do produto escalar.

A igualdade $i_T = c_T$ segue direto da primeira igualdade. Da segunda igualdade e da Proposição 3.15, segue que $n_T = \dim V - l_T$. Como temos que $\dim V = n_T + i_T$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que $i_T = l_T$.

□

Exemplo

Considere

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Por um lado, temos que l_{1T} não é multipla de l_{2T} e também que

$$l_{3T} = l_{1T} + l_{2T}$$

de modo que $l_T = 2$. Por outro lado, temos que c_{1T} não é multipla de c_{2T} e também que

$$c_{3T} = -c_{1T} + 2c_{2T} \qquad \text{e} \qquad c_{4T} = -2c_{1T} + 3c_{2T}$$

de modo que $c_T = 2$.

Proposição 4.11

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Temos que

$$\boxed{N(T'T) = N(T)}$$

Em particular, temos que

$$\boxed{i_{T'T} = i_T = i_{T'}}$$

Prova:

Por um lado, se v pertence a $N(T)$, então

$$T'Tv = T'0 = 0$$

de modo que v pertence a $N(T'T)$. Por outro lado, se v pertence a $N(T'T)$, então $T'Tv = 0$. Logo

$$|Tv|^2 = Tv \cdot Tv = v \cdot T'Tv = 0$$

de modo que $Tv = 0$, mostrando que v pertence a $N(T)$.

A segunda igualdade, segue da primeira e do Teorema do Núcleo e da Imagem, pois

$$n_{T'T} + i_{T'T} = n_T + i_T$$

A terceira igualdade é consequência direta da proposição anterior, pois

$$i_T = c_T = l_{T'} = i_{T'}$$

□

Agora vamos apresentar um método para se determinar o posto de uma matriz, denominado *escalonamento*. Uma matriz está *escalonada de cima para baixo e da esquerda para direita* ou simplesmente *escalonada* quando o primeiro elemento não nulo, da esquerda para direita, de cada linha está à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha abaixo. Uma matriz está *escalonada de baixo para cima e da direita para esquerda* quando o primeiro elemento não nulo, da direita para esquerda, de cada linha está à direita do primeiro elemento não nulo da linha acima.

Exemplo

A matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

está escalonada de cima para baixo e da esquerda para direita, enquanto a matriz

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

está escalonada de baixo para cima e da direita para esquerda.

Uma vez que a matriz está escalonada é muito simples determinar o seu posto.

Proposição 4.12

Se T está escalonada, então suas linhas não nulas são linearmente independentes. Em particular, seu posto é igual ao número de linhas não nulas. Além disso, se T é quadrada e está escalonada, então T é invertível se e só se os elementos da diagonal forem todos não nulos.

Prova:

Sejam $\{l_{T1}, l_{T2}, \dots, l_{Tk}\}$ as linhas não nulas de T. Escrevendo

$$t_1 l_{T1} + t_2 l_{T2} + \cdots + t_k l_{Tk} = 0$$

como T está escalonada, primeiro concluímos que $t_1 = 0$, depois que $t_2 = 0$, e assim por diante, até $t_k = 0$, mostrando que as linhas não nulas são linearmente independentes. Em particular, o posto linha de T é igual ao número de linhas não nulas. Além disso, temos que T é invertível se e só se o posto de T é igual à dimensão do domínio. Se T é quadrada, isso ocorre se e só se o posto de T é igual ao número de suas linhas. Se T está escalonada, pela primeira parte da proposição, isso ocorre se e só se suas linhas são todas não nulas. Por sua vez, isso ocorre se e só se os elementos da diagonal forem todos não nulos. De fato, por um lado, se alguma linha for nula, então o elemento da diagonal dessa linha é nulo e, por outro lado, se algum elemento da diagonal for nulo, todos os elementos da diagonal das linhas abaixo também são nulos, pois T está escalonada, de modo que a última linha é nula.

$\square$

A seguir apresentamos os passos do denominado *escalonamento de cima para baixo e da esquerda para direita* de uma matriz $[t_{ij}]_{mn}$.

Passos

1) Inicie com l_k sendo a primeira linha.
2) Ignore as linhas acima de l_k.
3) Localize a coluna não nula mais à esqueda, digamos c_j.
4) Se $t_{kj} = 0$, troque a linha l_k pela primeira linha abaixo tal que, após a troca, $t_{kj} \neq 0$.
5) Deixe a linha l_k inalterada e substitua cada linha l_i abaixo pela linha
$$l_i - \frac{t_{ij}}{t_{kj}} l_k$$
6) Volte para o passo 2, agora com $[t_{ij}]_{mn}$ sendo a nova matriz obtida após os passos 4 e 5 e trocando l_k pela linha abaixo, e repita todos os passos seguintes.

Exemplo

Vamos escalonar a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Iniciamos com a linha l_1. A coluna não nula mais a esquerda é a segunda coluna. Como $t_{12} = 0$, efetuamos então a seguinte troca $l_1 \leftrightarrow l_2$, pois l_2 é primeira linha abaixo de l_1 tal que, após a troca, $t_{12} \neq 0$, de modo que obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora vamos deixar a linha l_1 inalterada realizar as seguintes substituições

$$l_2 \rightarrow l_2 - \frac{t_{22}}{t_{12}} l_1 = l_2 - \frac{0}{2} l_1$$

e também

$$l_3 \rightarrow l_3 - \frac{t_{32}}{t_{12}} l_1 = l_3 - \frac{1}{2} l_1$$

de modo que obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora passamos para a linha l_2 e ignoramos as linhas acima, no caso apenas a linha l_1. A coluna não nula mais a esquerda é a terceira coluna. Como $t_{23} \neq 0$, vamos deixar a linha l_2 inalterada e realizar a seguinte substituição

$$l_3 \rightarrow l_3 - \frac{t_{33}}{t_{23}} l_2 = l_3 - \frac{1}{3} l_2$$

de modo que obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que agora está escalonada.

No próximo resultado, vamos ver que os passos 4 e 5 podem ser realizados pelo produto por matrizes pela esquerda, denominadas *operações com linhas*. Se a matriz identidade é dada por

$$\boxed{I = \begin{bmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_k' \\ \vdots \\ e_i' \\ \vdots \\ e_m' \end{bmatrix}}$$

a matriz obtida de I ao trocar sua linha k por sua linha i é dada por

$$\boxed{[l_k \leftrightarrow l_i]_{mm} = \begin{bmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_i' \\ \vdots \\ e_k' \\ \vdots \\ e_m' \end{bmatrix}}$$

enquanto a matriz obtida de I substituindo-se sua linha i por sua linha i

menos s vezes sua linha k é dada por

$$[l_i \to l_i - s l_k]_{mm} = \begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_k \\ \vdots \\ e'_i - s e'_k \\ \vdots \\ e'_m \end{bmatrix}$$

Proposição 4.13

Se

$$T = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ l_{Tk} \\ \vdots \\ l_{Ti} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

então

$$[l_k \leftrightarrow l_i]_{mm} T = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ l_{Ti} \\ \vdots \\ l_{Tk} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

e

$$[l_i \to l_i - sl_k]_{mm} T = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ l_{Tk} \\ \vdots \\ l_{Ti} - sl_{Tk} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

Prova:

Temos que

$$e_i' c_{Tj} = t_{ij}$$

Para a primeira igualdade, temos que

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_i' \\ \vdots \\ e_k' \\ \vdots \\ e_m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{T1} & \cdots & c_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1' c_{T1} & \cdots & e_1' c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_i' c_{T1} & \cdots & e_i' c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_k' c_{T1} & \cdots & e_k' c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_m' c_{T1} & \cdots & e_m' c_{Tn} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[l_k \leftrightarrow l_i]_{mm} T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{i1} & \cdots & t_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k1} & \cdots & t_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ l_{Ti} \\ \vdots \\ l_{Tk} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

Para a segunda igualdade, temos que

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_k \\ \vdots \\ e'_i - se'_k \\ \vdots \\ e'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{T1} & \cdots & c_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e'_1 c_{T1} & \cdots & e'_1 c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e'_k c_{T1} & \cdots & e'_k c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e'_i c_{T1} - se'_k c_{T1} & \cdots & e'_i c_{Tn} - se'_k c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e'_m c_{T1} & \cdots & e'_m c_{Tn} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[l_i \to l_i - sl_k]_{mm} T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k1} & \cdots & t_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{i1} - st_{k1} & \cdots & t_{in} - st_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ l_{Tk} \\ \vdots \\ l_{Ti} - sl_{Tk} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

$\square$

Exemplo

No exemplo passado, escalonamos a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Nossa primeira operação com linha foi efetuar a seguinte troca $l_1 \leftrightarrow l_2$, que pode ser obtida através do produto pela esquerda pela matriz

$$[l_1 \leftrightarrow l_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De fato, temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Nossa segunda operação com linha não trivial foi efetuar a substituição $l_3 \to l_3 - \frac{1}{2}l_1$, que pode ser obtida através do produto pela esquerda pela matriz

$$[l_3 \to l_3 - \tfrac{1}{2}l_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De fato, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, nossa terceira operação com linha não trivial foi efetuar a substituição $l_3 \to l_3 - \frac{1}{3}l_2$, que pode ser obtida através do produto pela esquerda pela matriz

$$[l_3 \to l_3 - \tfrac{1}{3}l_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

De fato, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denotando

$$L = [l_3 \to l_3 - \tfrac{1}{3} l_2][l_3 \to l_3 - \tfrac{1}{2} l_1][l_1 \leftrightarrow l_2]$$

temos que

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos sempre inverter as operações com linhas e suas inversas também são operações com linhas.

Proposição 4.14

Temos que

$$\boxed{[l_k \leftrightarrow l_i]_{mm}^{-1} = [l_k \leftrightarrow l_i]_{mm}}$$

e que

$$\boxed{[l_i \to l_i - s l_k]_{mm}^{-1} = [l_i \to l_i + s l_k]_{mm}}$$

Prova:

A demonstração é imediata das definições.

$\square$

O resultado acima garante que o processo de escalonamento não altera algumas propriedades importantes de uma matriz, como o seu posto.

Proposição 4.15

Se L é um operador linear invertível, então o sistema

$$\boxed{Tv = b}$$

é equivalente ao sistema

$$\boxed{LTv = Lb}$$

Em particular, temos que

$$\boxed{N(T) = N(LT)}$$

e

$$\boxed{i_T = i_{LT}}$$

Prova:

A primeira parte da proposição é imediata. A segunda parte segue do fato de que

$$N(T) = \{v : Tv = 0\} = \{v : LTv = L0 = 0\} = N(LT)$$

e do Teorema do Núcleo e da Imagem, pois

$$n_T + i_T = n_{LT} + i_{LT}$$

□

A seguir apresentamos os passos para determinarmos a inversa de uma matriz T quadrada invertível.

Passos

1) Justaponha a matriz identidade de mesmo tamanho após T.
2) Cada operação linha aplicada à primeira matriz também deve ser aplicada à matriz justaposta.
3) Escalone de cima para baixo e da esquerda para a direita, transformando a primeira matriz numa matriz escalonada.
4) Escalone de baixo para cima e da direita para a esquerda, transformando a primeira matriz numa matriz diagonal.
5) Troque cada linha l_{Ti} pela linha $\frac{1}{t_{ii}} l_{Ti}$, transformando a primeira matriz na identidade, de modo que a matriz justaposta será a matriz inversa de T.

O passo 5 acima também pode ser realizado pelo produto de operações com linhas. Se a matriz identidade é dada por

$$\boxed{I = \begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_m \end{bmatrix}}$$

a matriz obtida de I a partir da substituição da sua linha i por s vezes sua linha i é dada por

$$\boxed{[l_i \to s l_i]_{mm} = \begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ s e'_i \\ \vdots \\ e'_m \end{bmatrix}}$$

Proposição 4.16

Se

$$T = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ l_{Ti} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

então

$$[l_i \to s l_i]_{mm} T = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ s l_{Ti} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

Prova:

Temos que

$$e'_i c_{Tj} = t_{ij}$$

Segue então que

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ s e'_i \\ \vdots \\ e'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{T1} & \cdots & c_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e'_1 c_{T1} & \cdots & e'_1 c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s e'_i c_{T1} & \cdots & s e'_i c_{Tn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e'_m c_{T1} & \cdots & e'_m c_{Tn} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[l_i \to sl_i]_{mm} T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ st_{i1} & \cdots & st_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{T1} \\ \vdots \\ sl_{Ti} \\ \vdots \\ l_{Tm} \end{bmatrix}$$

□

Finalizamos o capítulo, observando que os passos acima produzem realmente a matriz inversa de uma dada matriz quadrada invertível. De fato, se L_3 é produto das operações com linhas aplicadas no passo 3 e T é uma matriz quadrada invertível, então $L_3 T$ é uma matriz quadrada escalonada invertível, de modo que os elementos da diagonal são todos não nulos. Logo, se L_4 é produto das operações com linhas aplicadas no passo 4, então $L_4 L_3 T$ é uma matriz quadrada diagonal invertível com os elementos da diagonal todos não nulos. Finalmente, se L_5 é produto das operações com linhas aplicadas no passo 5, então

$$L_5 L_4 L_3 T = I$$

de modo que

$$L_5 L_4 L_3 I = T^{-1}$$

Exemplo

Para obter a inversa da matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

primeiro justapomos a matriz indentidade após T, de modo que obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Em seguida escalonamos a primeira matriz de cima para baixo e da esquerda para direita, através da substituição $l_2 \to l_2 - 3l_1$, de modo que obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Depois escalonamos a primeira matriz de baixo para cima e da direita para esquerda, através da substituição $l_1 \to l_1 + l_2$, de modo que obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente, transformamos a primeira matriz na matriz identidade, através da substituição $l_2 \to -\frac{1}{2}l_2$, de modo que obtemos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Segue então que

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.4 Exercícios

1) Determine a matriz do operador T de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ na base canônica e decida se T é projeção, reflexão ou nilpotente. Decida também se T é uma isometria.

a) Se $T(x,y) = (-x-2y, y)$.

b) Se $T(x,y) = \frac{1}{10}(9x+3y, 3x+y)$.

c) Se $T(x,y) = (x+y, 0)$.

d) Se $T(x,y) = (-x+y, -x+y)$.

e) Se $T(x,y) = \frac{1}{5}(-4x-3y, -3x+4y)$.

f) Se $T(x,y) = (2x+4y, -x-2y)$.

g) Se $T(x,y,z) = \frac{1}{2}(2x, y+z, y+z)$.

h) Se $T(x,y,z) = (x,z,y)$.

i) Se $T(x,y,z) = (x+y+2z, -x-y+2z, 0)$.

j) Se $T(x,y,z) = \frac{1}{3}(-x+2y+z, x+y+2z, 2x-y+z)$.

2) Lembrando que a derivada primeira de $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ é dada por $p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ e a derivada segunda é dada por $p''(x) = 2a_2$, determine a matriz do operador T de $\mathbb{P}_2$ na base canônica e determine $N(T)$.

a) Se T é o operador de derivação, onde

$Tp = p'$.

b) Se T é o operador de Euler, onde

$Tp = x^2 p'' + xp' - 4p$.

c) Se T é o operador de Hermite, onde

$Tp = p'' - 2xp' + 4p$.

d) Se T é o operador de Laguerre, onde

$Tp = xp'' + (1-x)p' + 2p$.

e) Se T é o operador de Lagrange, onde

$Tp = (1-x^2)p'' - 2xp' + 2p$.

f) Se T é o operador de Tchebychev, onde

$Tp = (1-x^2)p'' - xp' + 4p$.

3) Relembrando que

$$R_\theta^u v = (v \cdot u)u + (v - (v \cdot u)u)\cos\theta + (v \times u)\operatorname{sen}\theta$$

determine as matrizes dos operadores $R_\theta^{e_1}$, $R_\theta^{e_2}$ e $R_\theta^{e_3}$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$, denominadas *matrizes de rotação nos eixos coordenados.*

4) (Abstrato) Dada uma base B de V, mostre que $v \cdot w = v' w$ define um produto interno em V tal que a base B é ortonormal.

5) Determine a dimensão de $[v_1, v_2, v_3]$ e decida se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.

a) $\begin{cases} v_1 &= (1,0,1) \\ v_2 &= (-1,1,0) \\ v_3 &= (0,2,2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_1 &= (1,1,1) \\ v_2 &= (-1,1,0) \\ v_3 &= (0,2,2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} v_1 &= (1,1,1) \\ v_2 &= (-1,1,-2) \\ v_3 &= (1,7,-2) \end{cases}$

d) $\begin{cases} v_1 &= (1,1,1) \\ v_2 &= (-1,1,-2) \\ v_3 &= (-10,-2,-12) \end{cases}$

e) $\begin{cases} v_1 &= (1,1,1) \\ v_2 &= (-1,1,-2) \\ v_3 &= (-10,-2,-14) \end{cases}$

f) $\begin{cases} v_1 &= (2,1,-2,-2) \\ v_2 &= (-3,-2,2,-1) \\ v_3 &= (0,-1,-2,-8) \end{cases}$

6) Determine o posto e núcleo de T.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

7) Encontre a solução geral do sistema $Tv = b$.

a) $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

8) Determine a inversa de T.

a) $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$

c) $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$

b) $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$

d) $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$

9) (Abstrato) Mostre que T é invertível se e só se T' for invertível e também que neste caso $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

10) (Desafio) Considere R uma isometria linear de um espaço de dimensão dois.

a) Mostre que se $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1 = r_{12}^2 + r_{22}^2 \\ r_{11}^2 + r_{12}^2 &= 1 = r_{21}^2 + r_{22}^2 \end{aligned}$$

Dica: Calcule $R'R$ e depois RR'.

b) Use o item anterior para mostrar que $r_{21}^2 = r_{12}^2$ e também que $r_{11}^2 = r_{22}^2$, de modo que existe um ângulo θ tal que $r_{11} = \pm r_{22} = \cos\theta$ e também que $r_{21} = \pm r_{12} = \operatorname{sen}\theta$.

c) Conclua que R é o produto de uma reflexão por uma rotação.

11) (Desafio) Considere um modelo onde a variável explicada y depende linearmente de k variáveis explicativas, de modo que

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

onde as constantes $\beta_1, \ldots, \beta_k$ são desconhecidas e ε é um erro aleatório. Após realizarmos n medições, obtemos

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad x_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}$$

No denominado *Método dos Mínimos Quadrados* as constantes $\beta_1, \ldots, \beta_k$ deconhecidas, são estimadas por constantes $b_1, \ldots, b_k$, que devem ser escolhidas de modo que o denominado *vetor dos erros amostrais*, dado por

$$e = y - (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k)$$

tenha a menor norma possível, o que ocorre quando $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k$ é a projeção ortogonal de y sobre $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$, ou seja, quando o erro e é ortogonal a cada vetor de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

a) Mostre que $e = y - Xb$, onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{bmatrix}$$

b) Verifique que, se e é ortogonal a cada vetor de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, então

$$X'Xb = X'y$$

c) Mostre que, se X tem posto k, então $X'X$ é invertível, de modo que

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

d) Verifique que a matriz $P_X = X(X'X)^{-1}X'$ é uma projeção.

CAPÍTULO 5

AUTOESPAÇOS

Vimos que não é muito fácil obter as potências de um matriz quadrada T, pois geralmente o produto de matrizes não é muito simples. Entretanto, essa tarefa se torna muito mais simples quando a matriz é diagonal

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}$$

Nesse caso, é imediato que

$$\boxed{D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}}$$

Além disso, se os elementos da diagonal são todos não nulos, através da fórmula acima, podemos considerar potências negativas de D, enquanto que, se os elementos da diagonal são todos positivos, podemos considerar potências de D com expoentes reais quaisquer.

Exemplo

Considere

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Segue que

$$D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

e também que

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

O principal objetivo desse capítulo é desenvolver ferramentas para que, em muitos casos, possamos obter as mesmas facilidades nos cálculos, mesmo que a matriz não seja diagonal.

5.1 Autovalores e autovetores

Dado um operador T de V, o escalar λ é denominado um *autovalor de* T, quando

$$\boxed{Tv = \lambda v}$$

para algum vetor v não nulo, que é denominado um *autovetor de* T *associado a* λ.

Exemplos

1) Se

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

então $\lambda = 1$ é autovalor de D, pois e_1 é um autovetor de D associado a $\lambda = 1$, uma vez que

$$De_1 = 1e_1$$

Da mesma forma, $\lambda = 4$ é autovalor de D, pois e_2 é um autovetor de D associado a $\lambda = 4$, uma vez que

$$De_2 = 4e_2$$

e também $\lambda = 9$ é autovalor de D, pois e_3 é um autovetor de D associado a $\lambda = 9$, uma vez que

$$De_3 = 9e_3$$

2) Se

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

então $\lambda = 2$ é autovalor de D, pois e_1 é um autovetor de D associado a $\lambda = 2$, uma vez que

$$De_1 = 2e_1$$

Observe que e_2 também é um autovetor de D associado a $\lambda = 2$, uma vez que

$$De_2 = 2e_2$$

Além disso, $\lambda = 4$ também é autovalor de D, pois e_3 é um autovetor de D associado a $\lambda = 4$, uma vez que

$$De_3 = 4e_3$$

3) De modo mais geral, se

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é diagonal então λ_i é autovalor de D, pois e_i é um autovetor de D associado a λ_i, uma vez que

$$De_i = \lambda_i e_i$$

4) Se P é a projeção P_U^W, então todo vetor não nulo u de U é um autovetor de P associado ao autovalor $\lambda = 1$, pois

$$Pu = u = 1u$$

enquanto todo vetor não nulo w de W é um autovetor de P associado ao autovalor $\lambda = 0$, pois

$$Pw = 0 = 0w$$

5) Se R é a reflexão R_U^W, então todo vetor não nulo u de U é um autovetor de R associado ao autovalor $\lambda = 1$, pois

$$Ru = u = 1u$$

enquanto todo vetor não nulo w de W é um autovetor de R associado ao autovalor $\lambda = -1$, pois

$$Rw = -w = -1w$$

Dado um operador T de V e um escalar λ, o conjunto

$$\boxed{V_\lambda^T = \{v : Tv = \lambda v\}}$$

é denominado o *autoespaço de T associado a λ*.

Proposição 5.1

Temos que V_λ^T é subespaço e que λ é autovalor de T se e só se V_λ^T é não nulo. Além disso, temos que V_0^T é o núcleo $N(T)$.

Prova:

A demonstração é imediata das definições.

$\square$

Exemplos

1) Se

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

então

$$V_1^D = [e_1], \qquad V_4^D = [e_2], \qquad V_9^D = [e_3]$$

2) Se

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

então

$$V_2^D = [e_1, e_2] \qquad \text{e} \qquad V_4^D = [e_3]$$

3) Se P é a projeção P_U^W, então

$$V_1^P = U \qquad \text{e} \qquad V_0^P = W$$

4) Se R é a reflexão R_U^W, então

$$V_1^R = U \qquad \text{e} \qquad V_{-1}^R = W$$

5.2 SIMETRIA E ORTOGONALIDADE

Vamos utilizar o conceito de autoespaço para caracterizar quando projeções e reflexões são ortogonais. Uma matriz T é denominada *simétrica* quando

$$\boxed{T' = T}$$

Exemplos

1) Matrizes diagonais

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

são simétricas

2) Temos que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

é simétrica.

O próximo resultado estabelece uma caracterização da simetria de uma matriz através do produto interno e sem utilizar a transposta.

Proposição 5.2

Temos que T é simétrica se e só se

$$\boxed{Tv \cdot w = v \cdot Tw}$$

para todos os vetores v e w.

Prova:

Já sabemos que

$$Tv \cdot w = v \cdot T'w$$

para todos os vetores v e w. Por um lado, se T é simétrica, é imediato que vale a fórmula do enunciado. Por outro lado, se vale a fórmula do enunciado, temos que

$$Tv \cdot w = v \cdot Tw = T'v \cdot w$$

de modo que

$$(Tv - T'v) \cdot w = 0$$

para todos os vetores v e w. Para todo vetor v, escolha $w = Tv - T'v$, de modo que

$$|Tv - T'v|^2 = (Tv - T'v) \cdot (Tv - T'v) = 0$$

Logo $Tv - T'v = 0$, para todo vetor v, de modo que $T = T'$.

$\square$

Agora vamos apresentar a relação entre simetria de matrizes e ortogonalidade de subespaços.

Proposição 5.3

Seja T uma matriz simétrica. Se $\lambda \neq \mu$, então V_λ^T e V_μ^T são ortogonais.

Prova:

Considere v_λ um vetor de V_λ^T e também v_μ um vetor de V_μ^T. Temos que mostrar que v_λ e v_μ são ortogonais. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda(v_\lambda \cdot v_\mu) &= \lambda v_\lambda \cdot v_\mu \\
&= T v_\lambda \cdot v_\mu \\
&= v_\lambda \cdot T v_\mu \\
&= v_\lambda \cdot \mu v_\mu \\
&= \mu(v_\lambda \cdot v_\mu)
\end{aligned}$$

de modo que

$$(\lambda - \mu)(v_\lambda \cdot v_\mu) = 0$$

Se $\lambda \neq \mu$, então $v_\lambda \cdot v_\mu = 0$.

□

O próximo resultado caracteriza quais das projeções são ortogonais.

Proposição 5.4

Seja $P = P_U^W$ uma projeção. Então P é ortogonal se e só se P for simétrica.

Prova:

Por um lado, se P é ortogonal, então U e W são ortogonais. Considere v, v_0 vetores de V e escreva $v = u + w$ e também $v_0 = u_0 + w_0$, onde u, u_0 pertencem a U, enquanto w, w_0 pertencem a W. Temos então que

$$\begin{aligned}
Pv \cdot v_0 &= u \cdot (u_0 + w_0) \\
&= u \cdot u_0 + u \cdot w_0 \\
&= u \cdot u_0 + w \cdot u_0 \\
&= (u + w) \cdot u_0 \\
&= v \cdot Pv_0
\end{aligned}$$

mostrando que P é simétrica, onde usamos na terceira igualdade que

$$u \cdot w_0 = 0 = w \cdot u_0$$

Por outro lado, se P é simétrica, como $1 \neq 0$, então

$$V_1^P = U \qquad \text{e} \qquad V_0^P = W$$

são ortogonais, mostrando que P é ortogonal.

□

Finalmente, o resultado que caracteriza quais das reflexões são ortogonais.

Proposição 5.5

Seja $R = R_U^W$ uma reflexão. Então R é ortogonal se e só se R for simétrica.

Prova:

Por um lado, se R é ortogonal, então U e W são ortogonais. Considere v, v_0 vetores de V e escreva $v = u + w$ e também $v_0 = u_0 + w_0$, onde u, u_0 pertencem a U, enquanto w, w_0 pertencem a W. Temos então que

$$\begin{aligned}
Rv \cdot v_0 &= (u - w) \cdot (u_0 + w_0) \\
&= u \cdot u_0 + u \cdot w_0 - w \cdot u_0 - w \cdot w_0 \\
&= u \cdot u_0 - u \cdot w_0 + w \cdot u_0 - w \cdot w_0 \\
&= (u + w) \cdot (u_0 - w_0) \\
&= v \cdot Rv_0
\end{aligned}$$

mostrando que R é simétrica. Usamos na terceira igualdade que

$$u \cdot w_0 = 0 = -u \cdot w_0 \qquad \text{e} \qquad -w \cdot u_0 = 0 = w \cdot u_0$$

Por outro lado, se R é simétrica, como $1 \neq -1$, então

$$V_1^R = U \qquad \text{e} \qquad V_{-1}^R = W$$

são ortogonais, mostrando que R é ortogonal.

$\square$

Exemplos

1) Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$T(x,y,z) = \left(\frac{2x - y - 2z}{3}, \frac{-x + 2y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y - z}{3} \right)$$

Então T é uma projeção ou uma reflexão? Ela é ortogonal? Devemos primeiro obter a matriz de T na base $\{e_1, e_2, e_3\}$, que é dada por

$$T = \begin{bmatrix} Te_1 & Te_2 & Te_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Agora é fácil verificar que $T^2 = I$, mostrando que T é uma reflexão, e tambpem que $T' = T$, mostrando que é uma reflexão ortogonal.

2) Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x + y + 2z}{6}, \frac{x + y + 2z}{6}, \frac{x + y + 2z}{3} \right)$$

Então T é uma projeção ou uma reflexão? Ela é ortogonal? Devemos primeiro obter a matriz de T na base $\{e_1, e_2, e_3\}$, que é dada por

$$T = \begin{bmatrix} Te_1 & Te_2 & Te_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Agora é fácil verificar que $T^2 = T$, mostrando que T é uma projeção, e também que $T' = T$, mostrando que é uma projeção ortogonal.

5.3 Diagonalização

Uma matriz T é denominada *diagonalisável*, quando ela é conjugada a um matriz diagonal D por uma matriz S, de modo que

$$\boxed{T = SDS^{-1}}$$

ou equivalentemente

$$\boxed{S^{-1}TS = D}$$

Quando T é diagonalizável, o cálculo das suas potências é essencialmente tão fácil quanto o cálculo das potências de D.

Proposição 5.6

Se

$$\boxed{T = SDS^{-1}}$$

então

$$\boxed{T^k = SD^kS^{-1}}$$

Prova:

Quando $k = m$ é um inteiro positivo, temos que

$$\begin{aligned} T^m &= (SDS^{-1})^m \\ &= (SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1})\cdots(SDS^{-1})(SDS^{-1}) \\ &= SD(S^{-1}S)D(S^{-1}S)D(S^{-1}\cdots S)D(S^{-1}S)DS^{-1} \\ &= SDIDIDI\cdots IDIDS^{-1} \\ &= SD^mS^{-1} \end{aligned}$$

O caso em que $k = -m$ é um inteiro negativo só existe se os elementos da diagonal de D forem todos não nulos. Nesse caso, como

$$T^{-1} = (SDS^{-1})^{-1} = SD^{-1}S^{-1}$$

segue que

$$\begin{aligned} T^{-m} &= (T^{-1})^m \\ &= (SD^{-1}S^{-1})^m \\ &= S(D^{-1})^mS^{-1} \\ &= SD^{-m}S^{-1} \end{aligned}$$

onde a primeira e quarta igualdades seguem das definições e a terceira igualdade segue do que vimos acima no caso em que k é um inteiro positivo. A fórmula para o caso em que k é um número real qualquer é uma definição e só existe se os elementos da diagonal de D forem todos positivos.

□

Exemplo

Considere a progressão de Fibonacci, onde os dois primeiros termos são iguais a 1 e os próximos termos são sempre dados pela soma dos dois termos anteriores, de modo que

$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 8, \ldots, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \ldots$$

Denotando

$$w_n = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$w_1 = Tw_0, \quad w_2 = Tw_1 = T^2 w_0, \quad w_3 = Tw_2 = T^3 w_0, \quad \ldots$$

de modo que

$$w_n = T^n w_0$$

Se conseguirmos determinar uma fórmula para T^n, obtemos uma fórmula para w_n e consequentemente uma fórmula para o termo geral f_n. Para isso, precisamos saber diagonalizar T.

Proposição 5.7

Suponha que exista $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de autovetores de T de V. Então a matriz

$$\boxed{S = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}$$

na base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ possui inversa e

$$\boxed{S^{-1}TS = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}$$

onde

$$\boxed{Tv_i = \lambda_i v_i}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Prova:

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, temos que o posto de S é igual a dimensão de V, de modo que S possui inversa. Além disso, temos que

$$TSe_i = Tv_i = \lambda_i v_i = \lambda_i Se_i$$

de modo que

$$S^{-1}TSe_i = \lambda_i S^{-1}Se_i = \lambda_i e_i$$

Segue então que

$$\begin{aligned} S^{-1}TS &= \left[\begin{array}{ccc} S^{-1}TSe_1 & \cdots & S^{-1}TSe_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 e_1 & \cdots & \lambda_n e_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right] \end{aligned}$$

□

Exemplo

Considere

$$T = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

Temos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de autovetores de T, com

$$v_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \lambda_1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad v_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \lambda_2 \end{array}\right]$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

são tais que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

De fato, não é difícil verificar que

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1 \qquad \text{e} \qquad Tv_2 = \lambda_2 v_2$$

Segue então que

$$T^n = SD^n S^{-1}$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Segue então que

$$T^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_2^n \lambda_1 - \lambda_1^n \lambda_2 & \lambda_2^{n+1}\lambda_1 - \lambda_1^{n+1}\lambda_2 \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix}$$

Usando que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

é possível mostrar que

$$\begin{aligned} w_n &= T^n w_0 \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^{n+2} - \lambda_2^{n+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$w_n = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Segue então que o termo geral da progressão de Fibonacci é dado por

$$f_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

A questão de como encontrar os autovalores e autovetores de uma dada matriz T será respondida apenas no último capítulo. De fato, nem toda matriz possui uma base de autovetores, como por exemplo a rotação pelo ângulo reto no plano. O próximo resultado, denominado *Teorema Espectral*, garante que, se a matriz for simétrica, sempre existe uma base ortonormal de autovetores.

Teorema 5.8: Espectral

Existe $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de T de V se e só se T for simétrica. Nesse caso, a matriz

$$\boxed{R = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}$$

na base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma isometria e

$$\boxed{R' T R = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}$$

onde

$$\boxed{T u_i = \lambda_i u_i}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Prova:

Por um lado, se existe $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de T, pela proposição anterior, temos que

$$R^{-1} T R = D$$

Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é ortonormal, não é difícil mostrar que R é uma isometria, de modo que $R^{-1} = R'$. Logo,

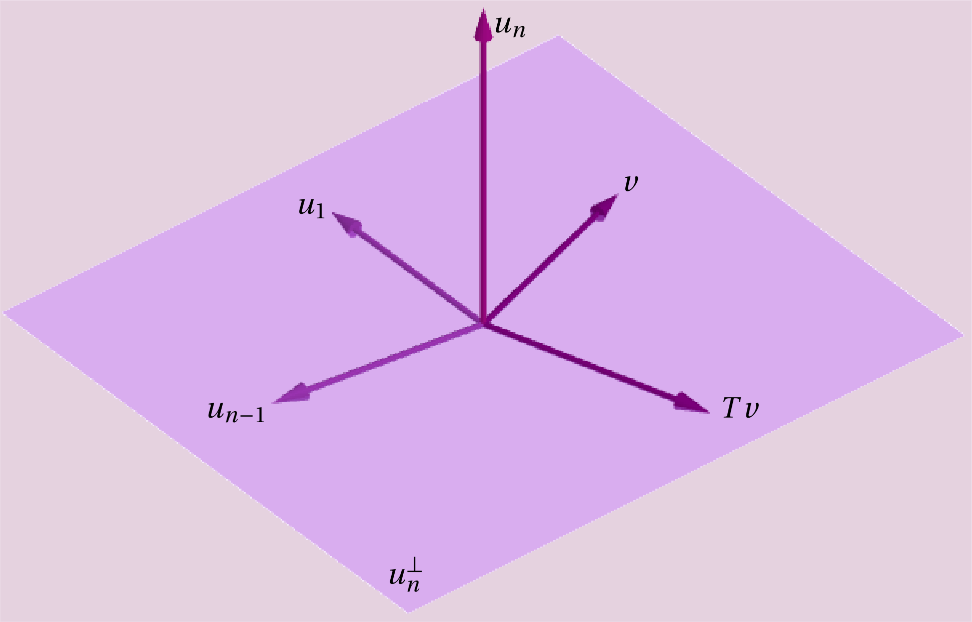
$$R' T R = D$$

de modo que

$$T = R D R'$$

é claramente simétrica. Por outro lado, se T é simétrica, vamos provar por indução na $\dim V$ que existe uma base ortonormal de autovetores de

T. Se $\dim V = 1$, todo vetor não nulo é autovetor de T, de modo que $\{u_1\}$ é uma base ortonormal de autovetores de T, desde que u_1 seja unitário. Agora suponha, por hipótese de indução, que o caso $\dim V = n-1$ já foi provado e vamos provar o caso $\dim V = n$.



Considere u_n um autovetor de T unitário, que sempre existe se T é simétrica, o que é demonstrado no apêndice. Já sabemos que $\dim u_n^\perp = n-1$. Vamos verificar que podemos restringir T ao espaço $u_n^\perp$. De fato, temos que v pertence a $u_n^\perp$ se e só se $v \cdot u_n = 0$. Como T é simétrica, segue que

$$\begin{aligned} Tv \cdot u_n &= v \cdot Tu_n \\ &= v \cdot \lambda_n u_n \\ &= \lambda_n (v \cdot u_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

mostrando que Tv também pertence a $u_n^\perp$. Mas a restrição de T ao espaço $u_n^\perp$ permanece simétrica, pois

$$Tv \cdot w = v \cdot Tw$$

para todos os vetores v, w de V e, em particular, para todos os vetores v, w de $u_n^{\perp}$. Pela hipótese de indução, existe uma base ortonormal de autovetores $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ da restrição de T a $u_n^{\perp}$. Segue então que $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de autovetores de T e, portanto, uma base de V.

□

Exemplos

1) Considere

$$T(x, y, z) = \big(4x - 5z, -3x + y - 3z, 9z\big)$$

Quais são as coordenadas de $T^{\frac{1}{2}}(x, y, z)$? Primeiro determinamos a matriz de T, dada por

$$T = \begin{bmatrix} Te_1 & Te_2 & Te_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Temos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de autovetores de T, com

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pois não é difícil verificar que

$$Tv_1 = v_1, \qquad Tv_2 = 4v_2, \qquad Tv_3 = 9v_3$$

Segue então que

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{2}} &= SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$T^{\frac{1}{2}}(x, y, z) = \left(2x - z, -x + y - z, 3z\right)$$

2) Considere

$$T = \begin{bmatrix} 43 & 28 & 20 \\ 28 & 49 & 8 \\ 20 & 8 & 25 \end{bmatrix}$$

Qual é a primeira entrada de T^{1000}? Temos que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal de autovetores de T, com

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

pois não é difícil verificar que

$$Tu_1 = 9u_1, \qquad Tu_2 = 27u_2, \qquad Tu_3 = 81u_3$$

Segue então que

$$T^{1000} = RD^{1000}R'$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo, a primeira entrada de T^{1000} é dada por

$$9^{1000}\frac{4}{9} + 27^{1000}\frac{1}{9} + 81^{1000}\frac{4}{9}$$

Vamos finalizar essa seção mostrando que toda matriz invertível pode ser escrita como o produto de uma matriz simétrica por uma isometria, conhecido como *Decomposição Polar*.

Proposição 5.9: Decomposição Polar

Se T é invertível, então

$$\boxed{T = SR}$$

onde S é simétrica e R é isometria.

Prova:

Como TT' é simétrica, pelo Teorema Espectral, ela pode ser diagonalizada. Temos que todos os autovalores de TT' são positivos. De fato, se v é um autovetor unitário de TT' associado ao autovalor λ, temos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(v \cdot v) \\ &= v \cdot \lambda v \\ &= v \cdot TT'v \\ &= T'v \cdot T'v \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Além disso, como T é invertível, então TT' é invertível, de modo que nenhum dos seus autovalores pode ser nulo. Então podemos definir $S = (TT')^{\frac{1}{2}}$, que é simétrica e invertível. Definindo-se $R = S^{-1}T$, segue que $T = SR$ e que

$$\begin{aligned} RR' &= S^{-1}TT'S^{-1} \\ &= S^{-1}S^2S^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

mostrando que R é isometria.

$\square$

5.4 Cônicas

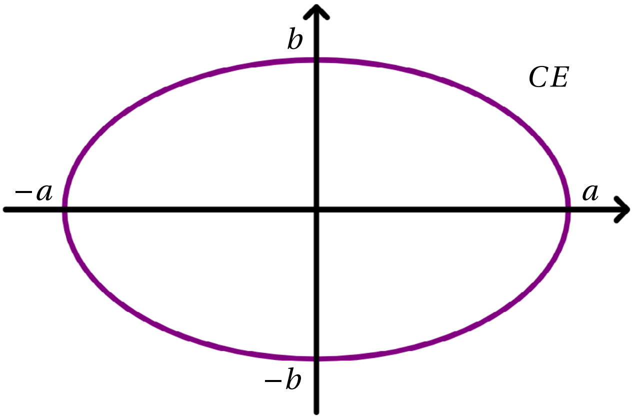
As cônicas são definidas classicamente como a interseção de um cone com um plano. Entre as cônicas mais famosas, estão as *elipses*, que incluem os *círculos*, e as *hipérboles*. As cônicas também podem ser vistas como o *lugar geométrico* dos pontos do plano satisfazendo alguma propriedade em relação à distância, como o círculo, que é o conjunto dos pontos que possuem a mesma distância, denominada *raio*, a um dado ponto, denominado *centro*. Na geometria analítica, essas propriedades são traduzidas em termos de equações quadráticas.

Exemplos

1) Uma elipse centrada na origem com eixos de simetria dados pelos eixos coordenados horizontal e vertical é o conjunto dos pontos (x, y) do plano, satisfazendo

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

com raio horizontal a e raio vertical b.

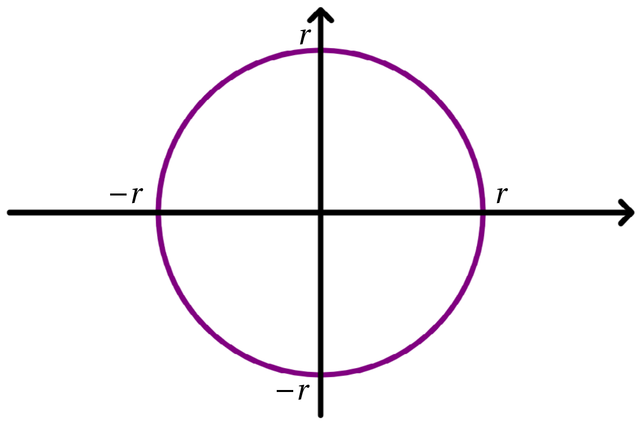


No caso particular em que $a = b = r$, obtemos o círculo centrado na origem de raio r, que satisfaz

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

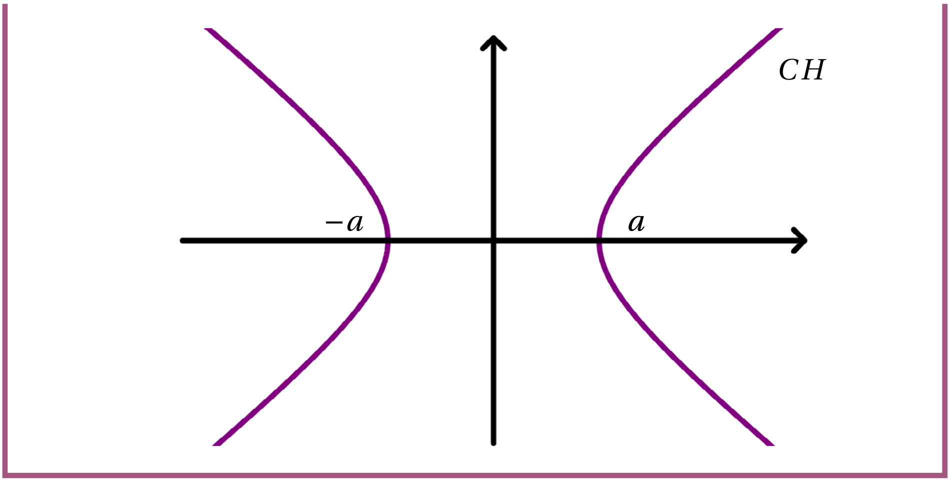
que é equivalente a

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



2) Uma hipérbole centrada na origem com eixos de simetria dados pelos eixos coordenados horizontal e vertical é o conjunto dos pontos (x, y) do plano, satisfazendo

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



De modo mais geral, dado um operador T de V, a denominada *cônica dada por T* é o conjunto dado por

$$\boxed{C_T = \{v : v'Tv = 1\}}$$

No espaço $\mathbb{R}^3$, aparecem os denominados *elipsóides* e *hiperbolóides*.

Exemplos

1) Considere

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}$$

A elipse do exemplo anterior é a cônica C_E dada por E, uma vez que

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

de modo que

$$C_E = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

2) Considere

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{bmatrix}$$

A hipérbole do exemplo anterior é a cônica C_H dada por H, uma vez que

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

de modo que

$$C_H \quad = \quad \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

As cônicas com eixos de simetria dados pelos eixos coordenados associados à base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ são denominadas *cônicas canônicas* e dadas por matrizes D diagonais, como nos exemplos do plano acima vistos acima. Se aplicarmos um movimento rígido R à cônica C_D, vamos obter uma nova cônica, dada por

$$RC_D = \{Rv : v'Dv = 1\}$$

com eixos de simetria dados pelos eixos associados à base ortonormal $\{Re_1, \ldots, Re_n\}$.

Proposição 5.10

Se R é uma isometria, temos que

$$\boxed{RC_D = C_{RDR'}}$$

Prova:

Escrevendo $w = Rv$, temos que $v = R'w$, pois R é uma isometria, de modo que

$$\begin{aligned} RC_D &= \{Rv : v'Dv = 1\} \\ &= \{w : (R'w)'DR'w = 1\} \\ &= \{w : w'RDR'w = 1\} \\ &= C_{RDR'} \end{aligned}$$

□

Exemplo

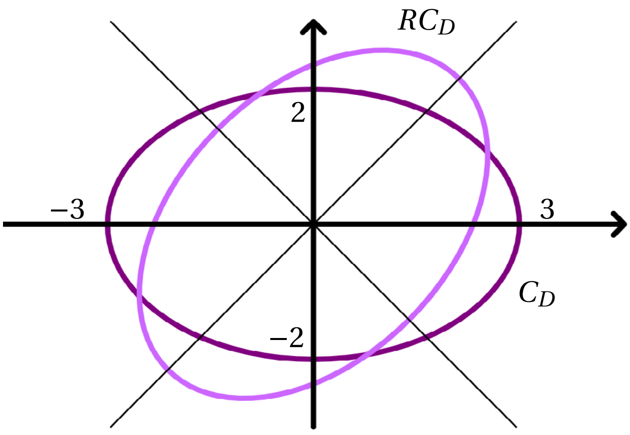
Considere

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Temos que a cônica dada por D é a elipse canônica dada por

$$C_D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$

com raio horizontal igual a 3 e raio vertical igual a 2.



A rotação anti-horária por 45 graus é dada pela matriz

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

de modo que RC_D é a elipse com eixos de simetria dados pelos eixos associados à base ortonormal

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Essa é a cônica dada por

$$RDR' = \begin{bmatrix} \frac{13}{72} & -\frac{5}{72} \\ -\frac{5}{72} & \frac{13}{72} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$RC_D = C_{RDR'} = \left\{(x,y) : \frac{13}{72}(x^2+y^2) - \frac{10}{72}xy = 1\right\}$$

pois

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{72} & -\frac{5}{72} \\ -\frac{5}{72} & \frac{13}{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{13}{72}(x^2+y^2) - \frac{10}{72}xy$$

Como consequência do Teorema Espectral, vamos mostrar que toda cônica pode ser vista como o movimento rígido de uma cônica canônica. Para isso primeiro precisamos mostrar que podemos sempre trabalhar com matrizes T simétricas.

Proposição 5.11

Temos que

$$\boxed{C_T = C_{\frac{1}{2}(T+T')}}$$

Prova:

Basta observar que

$$\begin{aligned} v'\frac{1}{2}(T+T')v &= \frac{1}{2}v'Tv+\frac{1}{2}v'T'v \\ &= \frac{1}{2}v'Tv+\frac{1}{2}v'Tv \\ &= v'Tv \end{aligned}$$

□

A proposição seguinte mostra como podemos utilizar a diagonalização de uma matriz simétrica para desenhar sua cônica como o movimento rígido de uma cônica canônica.

Proposição 5.12

Seja T é simétrica. Então

$$\boxed{C_T = RC_D}$$

onde

$$\boxed{R = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}$$

com $\{u_1, \ldots, u_n\}$ sendo uma base ortonormal de autovetores de T de V e

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}$$

onde

$$\boxed{Tu_i = \lambda_i u_i}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Prova:

O Teorema Espectral garante a existência da base $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Segue então que $T = RDR'$, de modo que

$$C_T = C_{RDR'} = RC_D$$

$\square$

Exemplo

A cônica dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$C_T = \left\{(x, y) : xy = 1\right\}$$

pois

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = xy$$

Para desenharmos C_T, primeiro observamos que $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de autovetores de T, onde

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

pois não é difícil verificar que

$$Tu_1 = \frac{1}{2}u_1 \qquad \text{e} \qquad Tu_2 = -\frac{1}{2}u_2$$

Segue então que

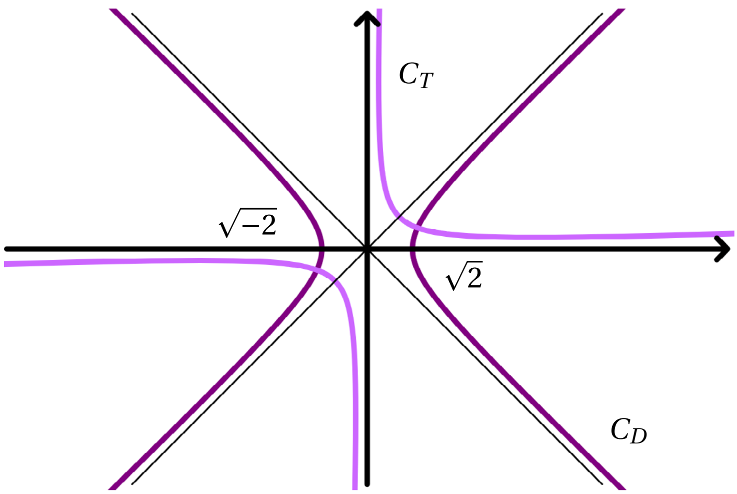
$$C_T = RC_D$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Temos então que a cônica C_T é a rotação anti-horária por 45 graus da hipérbole canônica dada por

$$C_D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1\right\}$$



5.5 Exercícios

1) Resolva os itens abaixo.

a) A matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é projeção ou reflexão?

b) A matriz $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é projeção ou reflexão?

c) Determine todas as matrizes da forma $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ que são projeções e também todas as que são reflexões.

d) Quais são o possíveis valores dos escalares $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ para os quais a matriz $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ é uma projeção? E reflexão?

2) Um dos resultados mais importantes da mecânica dos sólidos é que a tensão (força por unidade de área) num dado ponto de um corpo sólido e no plano ortogonal a um dado vetor unitário u é dada por Tu, onde T é um operador linear simétrico denominado *tensor das tensões*. Em geral, a tensão Tu tem componentes normal e tangencial ao plano ortogonal a u. Quando Tu possui apenas componente normal, o vetor u é denominado *direção principal* e é um T-autovetor associado a um T-autovalor, denominado *tensão principal*. Verifique que $\{v_1, v_2, v_3\}$ são T-autovetores e determine quais são as respectivas tensões principais $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

a) Se $T = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 6 \\ 6 & 21 & 0 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$,
$v_1 = (2, -1, -2)$, $v_2 = (-1, 2, -2)$, $v_3 = (-2, -2, -1)$.

b) Se $T = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & 15 \end{bmatrix}$,
$v_1 = (-1, -2, 2)$, $v_2 = (2, -2, -1)$, $v_3 = (-2, -1, -2)$.

c) Se $T = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $v_1 = (2, -2, -1)$, $v_2 = (-1, -2, 2)$, $v_3 = (-2, -1, -2)$.

3) (Abstrato) Resolva os itens abaixo.

a) Mostre que T é uma isometria simétrica se e só se T é uma reflexão ortogonal.

b) Verifique que a matriz $P_X = X(X'X)^{-1}X'$ é uma projeção ortogonal.

4) Determine se T é projeção ou reflexão e se é ortogonal.

a) Se $T(x, y, z) = (x, z, y)$.

b) Se $T(x, y, z) = \frac{1}{9}(x - 4y - 8z, -4x + 7y - 4z, -8x - 4y + z)$.

c) Se $T(x, y, z) = (-x - 2y, y, 2y - z)$.

d) Se $T(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + z, x + y + 2z, 2x - y + z)$.

e) Se $T(x, y, z) = (-y, y, -x - y + z)$.

f) Se $T(x, y, z) = \frac{1}{9}(8x - 2y + 2z, -2x + 5y + 4z, 2x + 4y + 5z)$.

g) Se $T(x, y, z) = \frac{1}{2}(2x, y + z, y + z)$.

h) Se $T(x, y, z) = \frac{1}{9}(5x - 2y - 4z, -2x + 8y - 2z, -4x - 2y + 5z)$.

5) Determine T^k e sempre que possível calcule $T^{\frac{1}{2}}$ e também T^{-2}, sabendo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de T-autovetores.

a) Se $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (-1,0,1)$, $v_3 = (-1,1,0)$.

b) Se $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$, $v_3 = (1,0,-1)$.

6) Determine T^k e sempre que possível calcule $T^{\frac{1}{2}}$ e também T^{-2}, sabendo que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal de T-autovetores.

a) Se $T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$,
$u_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $u_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $u_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

b) Se $T = \begin{bmatrix} 29 & 22 & -4 \\ 22 & 44 & -26 \\ -4 & -26 & 53 \end{bmatrix}$,
$u_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $u_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $u_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

7) Desenhe a cônica C_T, sabendo que $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de T-autovetores.

a) Se $T = \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{bmatrix}$, $u_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $u_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

b) Se $T = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$, $u_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $u_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

c) Se $T = \begin{bmatrix} 61 & -48 \\ -48 & 89 \end{bmatrix}$, $u_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $u_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

d) Se $T = \begin{bmatrix} 89 & -48 \\ -48 & 61 \end{bmatrix}$, $u_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $u_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

8) (Abstrato) Resolva os itens abaixo.

a) Mostre que o operador $R = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ é uma isometria se e só se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base ortonormal.

b) Se D é diagonal, verifique que $T = RDR'$ é simétrica.

9) (Desafio) Mostre que, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto de T-autovetores associados respectivamente a T-autovalores todos distintos $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

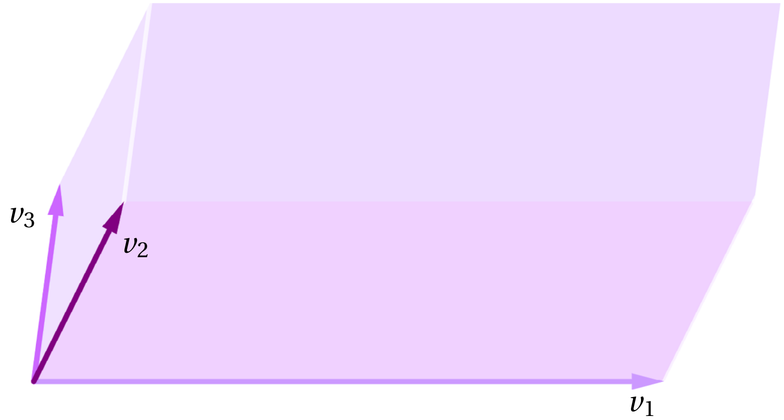
Dica: Prove por indução em n.

CAPÍTULO 6

DETERMINANTES

6.1 DETERMINANTES DE PARALELEPÍPEDOS

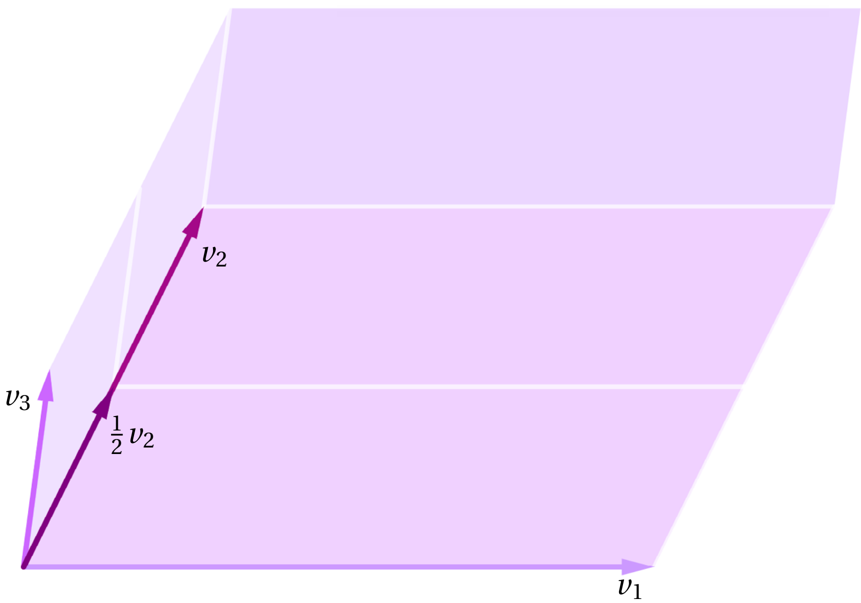
Nesta seção, o determinante será introduzido como uma versão com sinal da medida de volume de paralelepípedos. No plano, eles correspondem a paralelogramos dados por dois vetores $\{v_1, v_2\}$, enquanto que, no espaço, correspondem paralelepípedos dados por três vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$.



Se $\dim V = n$, o denominado *volume do paralelepípedo dado por* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um escalar não negativo, denotado por $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

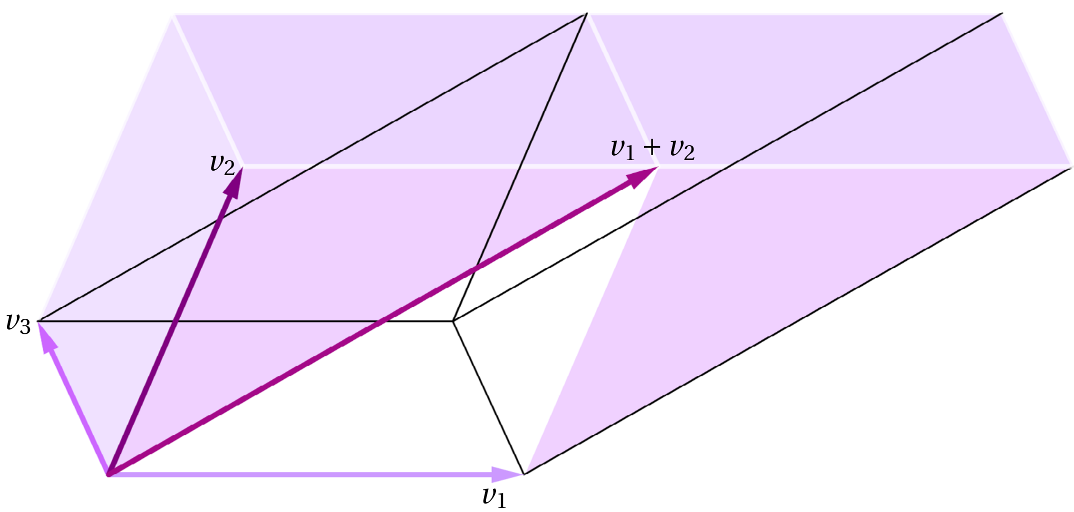
V1 Para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n$ e todo escalar t não negativo, temos que

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, tv_i, \ldots, v_n) = t\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$



V2 Para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n$, temos que

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$



Se $\dim V = n$, o denominado *determinante do paralelepípedo dado por* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma espécie de volume com sinal, denotado por

$$\boxed{\det(v_1, \ldots, v_n)}$$

hspace-2mm que satisfaz as mesmas propriedades do volume, só que agora permitimos que os escalares sejam quaisquer números reais, de modo que

D1 Para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n$ e todo escalar t, temos que

$$\det(v_1, \ldots, t v_i, \ldots, v_n) = t \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

D2 Para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n$, temos que

$$\det(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

Essas duas propriedades naturais do determinante, demonstradas no apêndice, garantem as seguintes propriedades fundamentais

Multilinear Para todos os vetores $v, v_1, \ldots, v_n$ e todo escalar t, temos que

$$\det(v_1, \ldots, v_i + t v, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + t \det(v_1, \ldots, v, \ldots, v_n)$$

Alternada Para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n$, temos que

$$\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Proposição 6.1

O determinante é uma forma multilinear alternada.

Prova:

Primeiro observe que D1 e D2 implicam na seguinte propriedade

D3 Para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n$ e todo escalar t, temos que

$$\det(v_1, \ldots, v_i + t v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

De fato, se t é nulo, isso é trivialmente verdadeiro e, se t não é nulo, temos que

$$\begin{aligned}
\det(v_1,\ldots,v_i+tv_j,\ldots,v_j,\ldots,v_n) &\overset{D1}{=} t^{-1}\det(v_1,\ldots,v_i+tv_j,\ldots,tv_j,\ldots,v_n)\\
&\overset{D2}{=} t^{-1}\det(v_1,\ldots,v_i,\ldots,tv_j,\ldots,v_n)\\
&\overset{D1}{=} \det(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_n)
\end{aligned}$$

Segundo note que, se $\{v_1,\ldots,v_n\}$ é linearmente dependente, então um dos seus elementos pode ser escrito como combinação linear dos demais. Supondo que

$$v_i = t_1v_1+\cdots+t_{i-1}v_{i-1}+t_{i+1}v_{i+1}+\cdots t_nv_n$$

temos que

$$\begin{aligned}
\det(v_1,\ldots,v_n) &= \det(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)\\
&= \det(v_1,\ldots,t_1v_1+\cdots+t_{i-1}v_{i-1}+t_{i+1}v_{i+1}+\cdots t_nv_n,\ldots,v_n)\\
&= \det(v_1,\ldots,0,\ldots,v_n)\\
&= 0
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade D3 na terceira igualdade e a propriedade D1 na quarta igualdade. Para verificarmos a multilinearidade, observamos que, em virtude da propriedade D1, basta provarmos que

$$\det(v_1,\ldots,v_i+v,\ldots,v_n) = \det(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)+\det(v_1,\ldots,v,\ldots,v_n)$$

Temos que analisar algumas possibilidades. Se os conjuntos

$$\{v_1,\ldots,v_i+v,\ldots,v_n\},\quad \{v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n\}\quad \text{e}\quad \{v_1,\ldots,v,\ldots,v_n\}$$

são todos linearmente dependentes, então

$$\det(v_1,\ldots,v_i+v,\ldots,v_n) = 0 = \det(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)+\det(v_1,\ldots,v,\ldots,v_n)$$

Se $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente, então ele é uma base de V, de modo que podemos escrever

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_i v_i + \cdots + t_n v_n$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\det(v_1, \ldots, v_i + v, \ldots, v_n) &= \det(v_1, \ldots, v_i + t_1 v_1 + \cdots + t_i v_i + \cdots t_n v_n, \ldots, v_n) \\
&= \det(v_1, \ldots, t_1 v_1 + \cdots + (1 + t_i) v_i + \cdots t_n v_n, \ldots, v_n) \\
&= \det(v_1, \ldots, (1 + t_i) v_i, \ldots, v_n) \\
&= (1 + t_i) \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \\
&= \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \det(v_1, \ldots, t_i v_i, \ldots, v_n) \\
&= \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \det(v_1, \ldots, v, \ldots, v_n)
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade D3 na terceira e na sétima igualdades e a propriedade D1 na quarta e na quinta igualdades. Para as outras duas possibilidades, procedemos de modo similar ao da segunda, com alguma pequenas modificações. Se $\{v_1, \ldots, v, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente, apenas troque os papéis de v e v_i e, se $\{v_1, \ldots, v_i + v, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente, escreva $v_i = v_i + v - v$ e troque os papéis de $v_i + v$ e v_i. Para verificarmos a alternância, basta observar que

$$\begin{aligned}
0 &= \det(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) \\
&= \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + \\
&\quad + \det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \\
&= \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + \det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)
\end{aligned}$$

onde usamos a multilinearidade na segunda igualdade e que

$$\det(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_n) = 0$$

na primeira e na terceira igualdades, uma vez que $\{v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente.

□

Quando estivermos trabalhando com matrizes, introduzimos a seguinte notação

$$\boxed{\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}}$$

onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad v_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

Com essa notação, a multilinearidade é dada por

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} + tx_1 & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} + tx_2 & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} + tx_n & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_1 & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_2 & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_n & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

enquanto a alternância é dada por

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo

Pela multilinearidade, temos que

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_{11}+0 & x_{12} \\ 0+x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \\
&= x_{11}\begin{vmatrix} 1 & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{vmatrix} + x_{21}\begin{vmatrix} 0 & x_{12} \\ 1 & x_{22} \end{vmatrix} \\
&= x_{11}\begin{vmatrix} 1 & x_{12}+0 \\ 0 & 0+x_{22} \end{vmatrix} + x_{21}\begin{vmatrix} 0 & x_{12}+0 \\ 1 & 0+x_{22} \end{vmatrix} \\
&= x_{11}\left(x_{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + x_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) + \\
&\quad + x_{21}\left(x_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + x_{22}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Pela alternância, temos que

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0
$$

e também que

$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

de modo que

$$
\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = (x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

Se escolhermos o determinante do cubo unitário dado pela base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como sendo igual a uma unidade, então o determinante fica unicamente determinado pela multilinearidade e pela alternância.

Proposição 6.2

Se Det é multilinear e alernado e

$$\boxed{\mathrm{Det}(e_1, \ldots, e_n) = 1}$$

então Det = det.

Prova:

Dados $\{v_1, \ldots, v_n\}$, podemos escrever

$$v_k = \sum_{i_k=1}^{n} x_{ki_k} e_{i_k} = x_{k1}e_1 + \cdots + x_{kn}e_n$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pela multilinearidade, segue que

$$\begin{aligned} \det(v_1, \ldots, v_n) &= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{1i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} x_{ni_n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} x_{1i_1} \cdots x_{ni_n} \det\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right) \end{aligned}$$

Pela alternância, segue que $\det\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right)$ é igual a zero, se houver repetições, ou é igual a $(-1)^l$, onde l é o número de trocas de vetores necessárias para transformar a n-úpla $\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right)$ na n-úpla $(e_1, \ldots, e_n)$, iniciando pelo e_1 até chegar no e_n. Se Det é multilinear e alernado tal que $\mathrm{Det}(e_1, \ldots, e_n) = 1$, o mesmo raciocínio acima se aplica. Logo $\mathrm{Det}\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right) = \det\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right)$ e a fórmula acima também vale para Det, mostrando que Det = det.

□

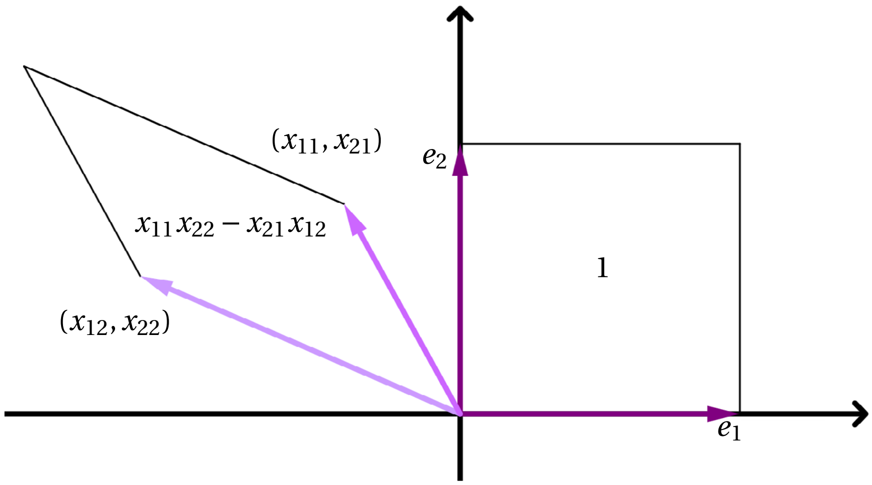
Exemplo

Pelo que vimos no exemplo acima, se escolhermos o determinante do quadrado unitário dado pela base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ como sendo igual a uma unidade, de modo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

então

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$$



O próximo resultado apresenta uma das propriedades mais relevantes do determinante, que caracteriza quando um conjunto de vetores é uma base.

Proposição 6.3

Temos que $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ se e só se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

Prova:

Por um lado, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ não é uma base, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente, pois $\dim V = n$. Pelo que vimos na demonstração do primeiro resultado dessa seção, isso implica que $\det(v_1, \ldots, v_n) = 0$. Por outro lado, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base, então, pelo que vimos na primeira seção do terceiro capítulo, existe v_{i_1} tal que $\{v_{i_1}, e_2, \ldots, e_n\}$ é base. Escrevendo

$$v_{i_1} = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \cdots + t_n e_n$$

temos que $t_1 \neq 0$, pois $\{v_{i_1}, e_2, \ldots, e_n\}$ é linearmente independente. Logo temos que

$$\begin{aligned} \det(v_{i_1}, e_2, \ldots, e_n) &= \det(t_1 e_1 + t_2 e_2 + \cdots + t_n e_n, e_2, \ldots, e_n) \\ &= \det(t_1 e_1, e_2, \ldots, e_n) \\ &= t_1 \det(e_1, e_2, \ldots, e_n) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Novamente pelo que vimos na primeira seção do terceiro capítulo, existe v_{i_2} tal que $\{v_{i_1}, v_{i_2}, e_3, \ldots, e_n\}$ é base. Escrevendo

$$v_{i_2} = t_1 v_{i_1} + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \cdots + t_n e_n$$

temos que $t_2 \neq 0$, pois $\{v_{i_1}, v_{i_2}, e_3, \ldots, e_n\}$ é linearmente independente. Logo temos que

$$\begin{aligned} \det(v_{i_1}, v_{i_2}, e_3, \ldots, e_n) &= \det(v_{i_1}, t_1 v_{i_1} + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \cdots + t_n e_n, e_3, \ldots, e_n) \\ &= \det(v_{i_1}, t_2 e_2, e_3, \ldots, e_n) \\ &= t_2 \det(v_{i_1}, e_2, e_3, \ldots, e_n) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Repetindo esse processo n vezes, obtemos que $\det(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) \neq 0$, de modo que não podem existir repetições em $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$. Logo podemos reordenar os vetores da n-úpla $\left(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\right)$ de modo a obter a n-úpla $(v_1, \ldots, v_n)$. Pela alternância, segue que $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

□

Exemplo

Se

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} = 0$$

então temos que uma coluna é múltipla da outra. De fato, se a primeira coluna é nula, temos que ela é $t = 0$ vezes a segunda. Se a primeira coluna não é nula, ou $x_{11} \neq 0$, de modo que

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = (x_{12}/x_{11}) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

pois

$$\frac{x_{12}}{x_{11}} x_{21} = x_{22}$$

ou $x_{21} \neq 0$, de modo que

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = (x_{22}/x_{21}) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

pois

$$\frac{x_{22}}{x_{21}} x_{11} = x_{12}$$

6.2 Determinantes de operadores

Inciamos esta seção mostrando que operadores lineares levam paralelepípedos em paralelepípedos de modo que a proporção entre os determinantes final e original é sempre a mesma.

Proposição 6.4

Seja T um operador de V. Então

$$\boxed{\det(T) = \frac{\det(Tv_1,\ldots,Tv_n)}{\det(v_1,\ldots,v_n)} = \det(Te_1,\ldots,Te_n)}$$

é constante para toda base $\{v_1,\ldots,v_n\}$ e denominado *determinante de* T. Além disso, temos que $\det(T) \neq 0$ se e só se T for invertível.

Prova:

Por um lado, se T não é invertível, então $\{Tv_1,\ldots,Tv_n\}$ não é base, de modo que $\det(Tv_1,\ldots,Tv_n) = 0$, para toda base $\{v_1,\ldots,v_n\}$, mostrando que $\det(T)$ é constante e igual a zero. Por outro lado, se T é invertível, então $\{Te_1,\ldots,Te_n\}$ tem posto n e, portanto, é uma base de V. Segue que $\det(Te_1,\ldots,Te_n) \neq 0$, de modo que podemos definir

$$\mathrm{Det}(v_1,\ldots,v_n) = \frac{\det(Tv_1,\ldots,Tv_n)}{\det(Te_1,\ldots,Te_n)}$$

Não é difícil verificar que Det é multilinear e alternado. Pela unicidade do determinante, como $\mathrm{Det}(e_1,\ldots,e_n) = 1$, segue que $\mathrm{Det} = \det$, de modo que

$$\det(v_1,\ldots,v_n) = \frac{\det(Tv_1,\ldots,Tv_n)}{\det(Te_1,\ldots,Te_n)}$$

Para toda base $\{v_1,\ldots,v_n\}$, segue então que

$$\det(T) = \frac{\det(Tv_1,\ldots,Tv_n)}{\det(v_1,\ldots,v_n)} = \det(Te_1,\ldots,Te_n)$$

é constante e diferente de zero.

□

Quando estivermos trabalhando com matrizes, a proposição acima nos permite escrever

$$\boxed{\det(T) = \det(Te_1, \ldots, Te_n) = \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix}}$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} Te_1 & \cdots & Te_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

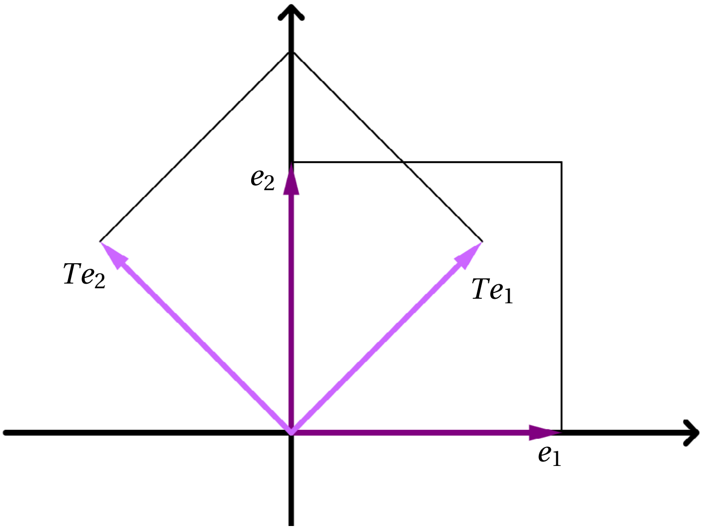
Se

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

então

$$\det(T) = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_{11} t_{22} - t_{21} t_{12}$$

é a área do paralelogramo dado por $\{Te_1, Te_2\}$.



Se T é a rotação anti-horária por 45 graus, então

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\det(T) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

o que era esperado, pois se T é um movimento rígido, então ele também deve preservar volumes.

A próxima proposição apresenta uma das propriedades mais importantes do determinante.

Proposição 6.5

Se S e T são operadores de V, então

$$\boxed{\det(ST) = \det(S)\det(T)}$$

Em particular, temos que

$$\boxed{\det(ST) = \det(TS)}$$

Prova:

Por um lado, se $\det(T) = 0$, então T não é invertível, de modo que $N(T) \neq 0$. Logo $N(ST) \neq 0$, de modo que ST não é invertível, mostrando que

$$\det(ST) = 0 = \det(S)\det(T)$$

Por outro lado, se $\det(T) \neq 0$, então $\det(Te_1, \ldots, Te_n) \neq 0$. Logo temos que $\{Te_1, \ldots, Te_n\}$ é uma base, de modo que

$$\begin{aligned}
\det(ST) &= \det(STe_1, \ldots, STe_n) \\
&= \frac{\det(STe_1, \ldots, STe_n)}{\det(Te_1, \ldots, Te_n)} \det(Te_1, \ldots, Te_n) \\
&= \det(S)\det(T)
\end{aligned}$$

□

O resultado seguinte é uma consequência quase imediata da proposição acima e do fato de que $\det(I) = \det(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Corolário 6.6

Se T é invertível, então

$$\boxed{\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}}$$

Exemplo

Se

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

então

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{e} \quad \det(T) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Por outro lado, temos que

$$ST = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 39 & 18 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\det(ST) = \begin{vmatrix} 17 & 8 \\ 39 & 18 \end{vmatrix} = -6 = \det(S)\det(T)$$

Agora vamos utilizar o escalonamento para calcularmos determinantes. Primeiro devemos considerar os determinantes das operações com linhas.

Proposição 6.7

Temos que

$$\boxed{|l_k \leftrightarrow l_i| = -1, \qquad |l_i \to l_i - s l_k| = 1, \qquad |l_i \to s l_i| = s}$$

Em particular, se L é um produto de operações com linhas, então

$$\boxed{\det\left(L'\right) = \det(L)}$$

Prova:

Primeiro observe que se

$$I = \begin{bmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_k' \\ \vdots \\ e_i' \\ \vdots \\ e_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_k & \cdots & e_i & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

então

$$[l_k \leftrightarrow l_i] = \begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_k \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_i & \cdots & e_k & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

que

$$[l_i \to l_i - sl_k] = \begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_k \\ \vdots \\ e'_i - se'_k \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_k - se_i & \cdots & e_i & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

e que

$$[l_i \to sl_i] = \begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ se'_i \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & se_i & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

Segue então que

$$|l_k \leftrightarrow l_i| = \det(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_k, \ldots, e_n) = -1$$

que

$$|l_i \to l_i - sl_k| = \det(e_1, \ldots, e_k - se_i, \ldots, e_i, \ldots, e_n) = 1$$

e que

$$|l_i \to sl_i| = \det(e_1, \ldots, se_i, \ldots, e_n) = s$$

Além disso, temos que $[l_k \leftrightarrow l_i]$ e também $[l_i \to sl_i]$ são simétricas e que

$$[l_i \to l_i - sl_k]' = [l_k \to l_k - sl_i]$$

de modo que $\det\left(L'\right) = \det(L)$, se L é um produto de operações com linhas.

□

Agora apresentamos a relação entre o determinante de uma matriz quadrada e sua escalonada.

Proposição 6.8

Temos que $\det(T)$ é o produto dos elementos da diagonal da escalonada de T vezes $(-1)^l$, onde l é o número de trocas de linhas efetuados durante o escalonamento.

Prova:

Seja LT a escalonada de T, onde L é um produto de operações com linhas do tipo $[l_k \leftrightarrow l_i]$ e também do tipo $[l_i \to l_i - sl_k]$. Segue que $\det(L) = (-1)^l$, pois $|l_k \leftrightarrow l_i| = -1$, enquanto $|l_i \to l_i - sl_k| = 1$. Como

$$\det(LT) = \det(L)\det(T) = (-1)^l \det(T)$$

segue que $\det(T)$ é igual a $\det(LT)$ vezes $(-1)^l$, de modo que basta mostrarmos que $\det(LT)$ é o produto dos elementos da diagonal de LT. Por um lado, se LT é não invertível, por um resultado da terceira seção do quarto capítulo, existe algum elemento da diagonal de LT nulo, de modo que $\det(LT) = 0$ é o produto dos elementos da diagonal de LT. Por outro lado, se LT é não invertível, pelo mesmo resultado da terceira seção do quarto capítulo, os elementos da diagonal de LT são todos não nulos, de modo que podemos multiplicar LT por operações com linhas do tipo $[l_i \to l_i - sl_k]$ e obter uma matriz diagonal D que possui a mesma diagonal de LT. Como $|l_i \to l_i - sl_k| = 1$, temos que $\det(LT) = \det(D)$, que é igual ao produto dos seus elementos diagonais pela propriedade D1.

□

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

Uma consequência importante do resultado acima é que os determinantes de uma matriz e de sua transposta coincidem.

Proposição 6.9

Temos que

$$\boxed{\det\left(T'\right) = \det(T)}$$

Prova:

Por uma lado, se $\det(T) = 0$, então T não é invertível, de modo que T' não é invertível, mostrando que $\det\left(T'\right) = 0 = \det(T)$. Por outro lado, se $\det(T) \neq 0$, pela prova da proposição anterior, podemos escrever $LT = D$, onde L é um produto de operações com linhas, de modo que $\det\left(L'\right) = \det(L) \neq 0$. Como

$$\begin{aligned} \det(L)\det(T) &= \det(LT) \\ &= \det(D) \\ &= \det\left(D'\right) \\ &= \det\left(T'L'\right) \\ &= \det\left(T'\right)\det\left(L'\right) \end{aligned}$$

cancelando $\det(L)$ no primeiro termo com $\det\left(L'\right)$ no último, obtemos o resultado desejado.

□

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$$

6.3 Polinômio característico

Nesta seção, vamos mostrar como o determinante pode ser usado para se determinar os autovalores e autovetores de um operador. Primeiro, vamos relacionar os autoespaços de um dado opearador com o núcleo de certos operadores associados.

Proposição 6.10

Seja T um opearador de V. Temos que o autoespaço de T associado ao escalar λ é dado por

$$\boxed{V_\lambda^T = N(T - \lambda I)}$$

Prova:

Temos que v pertence a V_λ^T se e só se $Tv = \lambda v$, o que ocorre se e só se $Tv - \lambda v = 0$, que por sua vez ocorre se e só se $(T - \lambda I)v = 0$, que finalmente ocorre se e só se v pertence a $N(T - \lambda I)$.

□

O denominado *polinômio característico de* T é definido por

$$\boxed{p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I)}$$

Se $\dim V = n$, então o polinômio característico de T possui n raízes, denominadas *valores característicos de* T e denotadas por

$$\boxed{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$$

O próximo resultado relaciona os valores característicos com os autovalores.

Proposição 6.11

Temos que λ é autovalor de T se e só se é valor característico de T real.

Prova:

Temos que λ é autovalor de T se e só se $V_\lambda^T \neq 0$, o que ocorre se e só se $N(T - \lambda I) \neq 0$, que por sua vez ocorre se e só $T - \lambda I$ não é invertível, que finalmente ocorre se e só se $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I) = 0$.

$\square$

Exemplos

1) Vimos, na terceira seção do quinto capítulo, que a matriz

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

está relacionada à progressão de Fibonacci. A partir da informação de quais são os autovalores de T e respectivos autovetores de T, fomos capazes de diagonalizar T e obter uma fórmula simples para o termo geral da progressão de Fibonacci. Vamos agora mostrar como obter essa informação, começando com os autovalores de T.

O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

de modo que os valores característico de T são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Como são reais, eles são autovalores de T. Para determinarmos uma base de autovetores de T, sabemos que

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1}^T &= N(T-\lambda_1 I) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2}^T &= N(T-\lambda_2 I) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

de modo que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de autovetores de T, onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

2) Vimos, na quarta seção do quinto capítulo, como obter a cônica dada pela matriz

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

a partir da informação de quais são os autovalores de T e respectivos autovetores de T. Vamos agora mostrar como obter essa informação, começando com os autovalores de T. O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

de modo que os valores característico de T são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Como são reais, eles são autovalores de T. Para determinarmos uma base de autovetores de T, sabemos que

$$\begin{aligned} V^T_{\frac{1}{2}} &= N(T - \tfrac{1}{2}I) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} V^T_{-\frac{1}{2}} &= N(T + \tfrac{1}{2}I) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

de modo que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de autovetores de T, onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando esses vetores, obtemos a base ortonormal $\{u_1, u_2\}$ de autovetores de T, onde

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Proposição 6.12

Se S e T são operadores de V, então

$$\boxed{p_{S^{-1}TS} = p_T = p_{T'}}$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} p_{S^{-1}TS}(\lambda) &= \det(S^{-1}TS - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}(T - \lambda I)S) \\ &= \det(SS^{-1}(T - \lambda I)) \\ &= \det(T - \lambda I) \\ &= p_T(\lambda) \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} p_{T'}(\lambda) &= \det(T' - \lambda I) \\ &= \det((T - \lambda I)') \\ &= \det(T - \lambda I) \\ &= p_T(\lambda) \end{aligned}$$

□

Exemplos

1) Ainda sobre o exemplo envolvendo a progressão de Fibonacci da terceira seção do quinto capítulo, vimos que, se

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

então

$$S^{-1}TS = D$$

de modo que

$$p_D = p_T$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} p_D(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1 \\ &= p_T(\lambda) \end{aligned}$$

2) Na quarta seção do quinto capítulo, vimos que, se

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

então

$$R^{-1}TR = D$$

de modo que

$$p_D = p_T$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} p_D(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{4} \\ &= p_T(\lambda) \end{aligned}$$

Proposição 6.13

Se

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

então

$$\boxed{\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (-\lambda)^n + (t_{11} + \cdots + t_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \cdots \\ &= (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n) \end{aligned}}$$

Prova:

Temos que

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Pela multilinearidade e alternância, o determinante de uma matriz é igual à soma e à subtração de diversas parcelas, cada uma delas produto de n entradas da matriz, não podendo haver repetições de linhas ou de colunas. As únicas entradas onde aparece λ são as entradas da diagonal. Logo a única possibilidade de aparecer a potência de grau n é na parcela gerada pelo produto das n entradas da diagonal, dado por

$$(t_{11} - \lambda)\cdots(t_{nn} - \lambda)$$

O mesmo ocorre com a potência de grau $n-1$, pois temos que escolher $n-1$ entradas da diagonal e, como não pode haver repetições de linhas ou de colunas, a n-ésima entrada do produto deve ser obrigatoriamente a entrada da diagonal que ainda não havia sido escolhida. Desenvolvendo o produto acima das n entradas da diagonal, obtemos uma única parcela para a potência de grau n, dada por $(-\lambda)^n$, e n parcelas para a potência de grau $n-1$, dadas por

$$t_{11}(-\lambda)^{n-1}, \ldots, t_{nn}(-\lambda)^{n-1}$$

Somando e colocando $(-\lambda)^{n-1}$ em evidência, isso fornece a primeira igualdade do enunciado. Para a segunda igualdade, basta lembrar que todo polinômio em λ de grau n pode ser escrito como o produto do coeficiente que multiplica a potência de grau n, que é $(-1)^n$ pelo que vimos acima, vezes $(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, pois $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ são as n raízes de p_T.

□

Uma das consequências da proposição acima é que o determinante de uma matriz é o produto dos seus valores característicos.

Proposição 6.14

Temos que

$$\boxed{\det(T) = \lambda_1 \cdots \lambda_n}$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} \det(T) &= \det(T - 0I) \\ &= p_T(0) \\ &= (-1)^n(0-\lambda_1)\cdots(0-\lambda_n) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

□

Exemplos

1) Temos que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

2) Temos que

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Inspirados por essa caracterização do determinante de T, definimos o denominado *traço de* T como sendo a soma dos valores característicos de T, dado por

$$\boxed{\operatorname{tr}(T) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

O traço possui algumas das propriedades satisfeitas pelo determinante.

Proposição 6.15

Se S e T são operadores de V, então

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tr}(ST) &= \operatorname{tr}(TS) \\ \operatorname{tr}\left(T'\right) &= \operatorname{tr}(T) \end{aligned}}$$

Prova:

Basta notar que $p_{T'} = p_T$ e que $p_{ST} = p_{S^{-1}STS} = p_{TS}$, de modo que suas raízes são as mesmas.

□

O próximo resultado apresenta uma maneira muito mais simples de se calcular o traço.

Proposição 6.16

Se

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

então

$$\boxed{\operatorname{tr}(T) = t_{11} + \cdots + t_{nn}}$$

Prova:

Por um lado, como

$$p_T(\lambda) = (-\lambda)^n + (t_{11} + \cdots + t_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \cdots$$

o coeficiente que multiplica λ^{n-1} é dado por

$$(-1)^{n-1}(t_{11} + \cdots + t_{nn})$$

Por outro lado, como

$$p_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

o coeficiente que multiplica λ^{n-1} também é dado por

$$(-1)^{n+1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

Logo

$$(-1)^{n+1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = (-1)^{n-1}(t_{11} + \cdots + t_{nn})$$

O resultado segue após cancelamento, pois $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$.

□

Exemplos

1) Temos que

$$\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0+1$$

2) Temos que

$$\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0+0$$

3) Se

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$ST = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad TS = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\mathrm{tr}(ST) = 0+0 = -1+1 = \mathrm{tr}(TS)$$

4) Se T é um operador de $\mathbb{R}^2$, então

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(T)\lambda + \det(T)$$

De fato, se

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (t_{11}+t_{22})\lambda + t_{11}t_{22} - t_{21}t_{12} \end{aligned}$$

O resultado seguinte é uma consequência imediata da proposição anterior.

Corolário 6.17

Se S e T são operadores de V e t é um escalar, então

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{tr}(S+T) &= \mathrm{tr}(S)+\mathrm{tr}(T) \\ \mathrm{tr}(tT) &= t\,\mathrm{tr}(T) \end{aligned}}$$

6.4 Exercícios

1) Use a multilinearidade e alternância do determinante para mostrar que

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} \\ -x_{31}x_{22}x_{13} - x_{32}x_{23}x_{11} - x_{33}x_{21}x_{12} \end{array}$$

denominada *Regra de Sarrus* e comumente denotada por

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{31} & x_{32} \end{array}\right|$$

de modo que o produto dos três elementos de cada diagonal descendo é somado, enquanto o de cada diagonal subindo é subtraido.

2) Mostre que

$$u \cdot (v \times w) = \det(u, v, w)$$

onde o lado esquerdo é denominado *produto misto*.

Dica: Desenvolva o lado esquerdo com

$$u = (x_{11}, x_{21}, x_{31}), \qquad v = (x_{12}, x_{22}, x_{32}), \qquad w = (x_{13}, x_{23}, x_{33})$$

e o lado direito com a Regra de Sarrus.

3) Calcule os determinantes abaixo usando escalonamento.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4) (Abstrato) Resolva os itens abaixo.

a) Considere T um operador linear invertível. Use que $\det(v_1,\ldots,v_n)$ é multilinear e alternado para mostrar que

$$\operatorname{Det}(v_1,\ldots,v_n) = \frac{\det(Tv_1,\ldots,Tv_n)}{\det(Te_1,\ldots,Te_n)}$$

também é multilinear e alternado.

b) Verifique que $\det(ST) = \det(TS)$ e também que $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$.

c) Mostre que $\det(R) = \pm 1$, quando R é uma isometria.

5) Desenhe a cônica C_T e escreva a equação que determina seus pontos.

a) $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ g) $T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e) $T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ h) $T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $T = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ f) $T = \begin{bmatrix} 61 & -48 \\ -48 & 89 \end{bmatrix}$ i) $T = \begin{bmatrix} 89 & -48 \\ -48 & 61 \end{bmatrix}$

6) (Abstrato) Resolva os itens abaixo.

a) Mostre que $\operatorname{tr}\left(P_U^W\right) = \dim U$.

b) Verifique que, se S e T são operadores de V e t é um escalar, então

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(S+T) &= \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(T) \\ \operatorname{tr}(tT) &= t\operatorname{tr}(T) \end{aligned}$$

7) (Desafio) Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Dica: Mostre que o lado esquerdo também satisfaz as propriedades D1 e D2 dos determinantes e utilize a unicidade.

8) (Desafio) O denominado *determinante de Vandermonde* é definido por

$$V(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

O objetivo desse exercício é mostrar que

$$\begin{aligned} V(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \; & (r_2 - r_1) \cdot (r_3 - r_1) \cdots (r_{n-1} - r_1) \cdot (r_n - r_1) \cdot \\ & \cdot (r_3 - r_2) \cdots (r_{n-1} - r_2) \cdot (r_n - r_2) \cdot \\ & \vdots \\ & \cdot (r_{n-1} - r_{n-2}) \cdot (r_n - r_{n-2}) \cdot \\ & \cdot (r_n - r_{n-1}) \end{aligned}$$

a) Verifique que $V(r_1, r_2) = (r_2 - r_1)$.

b) Mostre que

$$V(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \cdots (r_{n-1} - r_1)(r_n - r_1) V(r_2, \ldots, r_n)$$

Dica: Escalone a primeira coluna de baixo para cima, subtraindo a linha debaixo menos r_1 vezes a linha de cima. Então use o exercício anterior e a propriedade D1 dos determinantes.

c) Utilize os itens anteriores para mostrar, por indução em n, a fórmula acima para o determinante de Vandermonde.

d) Usando a fórmula acima para o determinante de Vandermonde, calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

e compare com o valor obtido por escalonamento num exercício anterior.

APÊNDICE A

APÊNDICE

A.1 Teorema espectral

Vamos mostrar nesta seção que toda matriz simétrica possui pelo menos um autovetor, o que é um resultado fundamental na prova do Teorema Espectral.

Proposição A.1

Se T é uma matriz simétrica, então existe pelo menos um T-autovetor.

Prova:

Quando $\dim V$ é ímpar, o grau do polinômio característico de T também é ímpar, de modo que sempre existe pelo menos um valor característico real, que é um T-autovalor, mostrando que existe pelo menos um T-autovetor. Contudo, quando $\dim V$ é par, esse argumento não funciona.

Quando $\dim V = 2$, temos que

$$T = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

de modo que

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$$

cujo discriminante é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b)^2 - 4(ab - c^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + c^2 \\ &= (a-b)^2 + c^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

mostrando que sempre existe pelo menos um valor característico real, que é um T-autovalor, mostrando que existe pelo menos um T-autovetor. Juntando essas duas argumentações, o resultado está provado para todo V tal que $\dim V \leq 3$.

Para a demonstração do caso geral, vamos considerar a forma quadrática dada por T, que é definida por

$$Q_T(v) = \langle v, Tv \rangle$$

Temos que Q_T é um polinômio de grau dois nas coordenadas de v, de modo que é uma função contínua. Como a esfera unitária centrada na origem, dada por

$$B = \{u : |u| = 1\}$$

é um conjunto limitado e fechado, por um resultado do cálculo de várias variáveis, existe um vetor u que é ponto de mínimo de Q_T restrita a B. Vamos mostrar que u é um T-autovetor. De fato, dado um vetor v qualquer, considere a função dada por

$$f(t) = Q_T\left(\frac{u + tv}{|u + tv|}\right)$$

definida num intervalo da forma $(-\varepsilon,\varepsilon)$, para algum ε positivo suficientemente pequeno. Temos que $t=0$ é um ponto de mínimo dessa função, uma vez que $\frac{u+tv}{|u+tv|}$ está em B e que $f(0)=Q_T(u)$. Por um resultado do cálculo de uma variável, segue que $f'(0)=0$. Temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\langle \frac{u+tv}{|u+tv|}, T\frac{u+tv}{|u+tv|}\right\rangle \\ &= \frac{\langle u+tv, Tu+tTv\rangle}{\langle u+tv, u+tv\rangle} \\ &= \frac{\langle u, Tu\rangle + 2t\langle Tu, v\rangle + t^2\langle v, Tv\rangle}{\langle u,u\rangle + 2t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle} \end{aligned}$$

onde usamos que

$$\langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle$$

pois T é simétrica. Pela regra da derivada do quociente, segue então que

$$f'(t) = \frac{2(\langle u, Tv\rangle + t\langle v, Tv\rangle)|u+tv|^2 - 2(\langle u,v\rangle + t\langle v,v\rangle)\langle u+tv, Tu+tTv\rangle}{|u+tv|^4}$$

de modo que

$$f'(0) = 2\langle Tu, v\rangle - 2\langle u,v\rangle\langle u, Tu\rangle = 0$$

onde usamos que $\langle u,u\rangle = |u|^2 = 1$. Escrevendo $\lambda = \langle u, Tu\rangle$, temos que

$$\langle Tu - \lambda u, v\rangle = 0$$

para todo vetor v. Escolhendo $v = Tu - \lambda u$, segue que

$$\langle Tu - \lambda u, Tu - \lambda u\rangle = 0$$

de modo que $Tu - \lambda u = 0$, mostrando que u é T-autovetor.

□

A.2 Orientação e determinantes

Dados u e w unitários e não colineares, podemos definir

$$\widehat{u} = \frac{u - (w\cdot u)w}{|u - (w\cdot u)w|}$$

e também

$$\begin{aligned} R^t_{u,w} v &= v - (\widehat{u} \cdot v)\widehat{u} - (w \cdot v) w \\ &\quad + (\cos(t)(\widehat{u} \cdot v) + \operatorname{sen}(t)(w \cdot v))\widehat{u} \\ &\quad + (-\operatorname{sen}(t)(\widehat{u} \cdot v) + \cos(t)(w \cdot v)) w \end{aligned}$$

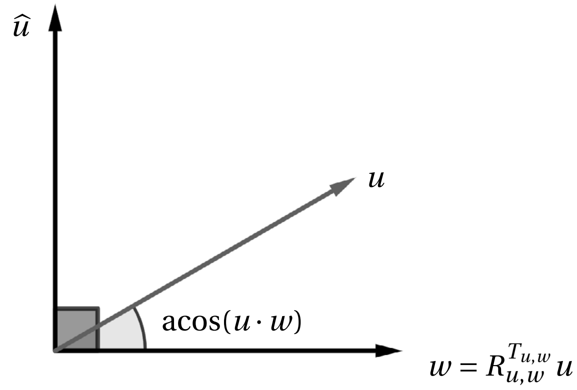
Temos que $(t, u, v, w) \mapsto R^t_{u,w} v$ é uma aplicação contínua e que $v \mapsto R^t_{u,w} v$ é uma rotação no plano gerado por u e w tal que

$$R^0_{u,w} v = v \qquad \text{e} \qquad R^{T_{u,w}}_{u,w} u = w$$

onde

$$T_{u,w} = \frac{\widehat{u} \cdot u}{|\widehat{u} \cdot u|} \operatorname{acos}(w \cdot u)$$

e acos denota o arco-cosseno.



Lema A.2

Dadas $(u_1, \ldots, u_n)$ e $(w_1, \ldots, w_n)$, com $n \geq 2$, duas bases ortonormais ordenadas suficientemente próximas, existe um caminho contínuo $t \mapsto (b_1(t), \ldots, b_n(t))$ de bases ortonormais ordenadas tal que

$$\boxed{b_i(0) = u_i, \qquad b_i(1) = w_i}$$

for every $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Prova:

Procedemos por indução em n, a dimensão do espaço vetorial.

Quando $n = 2$, temos duas possibilidades. Primeiro, se $u_2 = w_2$, então $u_1 = w_1$, uma vez que as duas bases ortonormais ordenadas são suficientemente próximas. Neste caso, podemos definir $b_i(t) = u_i = w_i$ para todo $i \in \{1,2\}$ e todo $t \in [0,1]$. Segundo, se $u_2 \neq w_2$, então u_2 e w_2 são não colineares, pois $u_2 \neq -w_2$, uma vez que as duas bases ortonormais ordenadas são suficientemente próximas. Neste caso, podemos definir $b_i(t) = R^t_{u_2,w_2} u_i$ para todo $i \in \{1,2\}$ e todo $t \in [0, T_2]$, onde $T_2 = T_{u_2,w_2}$. Segue que $b_i(0) = u_i$ para todo $i \in \{1,2\}$ e que $b_2(T_2) = R^{T_2}_{u_2,w_2} u_2 = w_2$. Uma vez que as duas bases ortonormais ordenadas são suficientemente próximas, segue que $b_1(T_2) = R^{T_2}_{u_2,w_2} u_1 = w_1$. A afirmação segue normalizando o parâmetro t.

Quando $n > 2$, também temos duas possibilidades. Primeiro, se $u_n = w_n$, temos que $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ e $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ são duas bases ortonormais ordenadas suficientemente próximas, do subespaço perpendicular a $u_n = w_n$, que é um espaço vetorial de dimensão $n-1$. Pela hipótese de indução, existe um caminho contínuo $t \mapsto (b_1(t), \ldots, b_{n-1}(t))$ de bases ortonormais ordenadas do subespaço perpendicular a $u_n = w_n$ tal que $b_i(0) = u_i$ e $b_i(1) = w_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Neste caso, podemos definir $b_n(t) = u_n = w_n$ para todo $t \in [0,1]$. Segundo, se $u_n \neq w_n$, então u_n e w_n são não colineares, pois $u_n \neq -w_n$, uma vez que as duas bases ortonormais ordenadas são suficientemente próximas. Neste caso, definimos $\widehat{b}_i(t) = R^t_{u_n,w_n} u_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e todo $t \in [0, T_n]$, onde $T_n = T_{u_n,w_n}$. Segue que $\widehat{b}_i(0) = u_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e que $\widehat{b}_n(T_n) = R^{T_n}_{u_n,w_n} u_n = w_n$. Temos que $(R^{T_n}_{u_n,w_n} u_1, \ldots, R^{T_n}_{u_n,w_n} u_{n-1})$ e $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ são duas bases ortonormais ordenadas suficientemente próximas, do subespaço perpendicular a $R^{T_n}_{u_n,w_n} u_n = w_n$, que é um espaço vetorial de dimensão $n-1$. Pela hipótese de indução, existe um caminho contínuo $t \mapsto (b_1(t), \ldots, b_{n-1}(t))$ de bases ortonormais ordenadas do subespaço perpendicular a $R^{T_n}_{u_n,w_n} u_n = w_n$ tal que $b_i(0) = R^{T_n}_{u_n,w_n} u_i$ and $b_i(1) = w_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. O resultado segue definindo $b_n(t) = R^{T_n}_{u_n,w_n} u_n = w_n$, conectando continuamente $\widehat{b}_i(t)$ e $b_i(t)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ e normalizando o parâmetro t.

□

O próximo resultado é essencial na definição geométrica de orientação.

Proposição A.3

Dadas $(u_1,\ldots,u_n)$ e $(w_1,\ldots,w_n)$, com $n \geq 3$, duas bases ortonormais ordenadas suficientemente próximas tais que $u_n, w_n \neq \pm e_n$, existe um caminho contínuo $t \mapsto (c_1(t),\ldots,c_n(t))$ de bases ortonormais ordenadas tal que

$$\boxed{c_i(0) = u_i, \qquad c_i(1) = w_i, \qquad c_n(t) \neq \pm e_n}$$

para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ e para todo $t \in [0,1]$.

Prova:

Temos duas possibilidades. Primeiro, se $u_n = w_n$, temos que $(u_1,\ldots,u_{n-1})$ e $(w_1,\ldots,w_{n-1})$ são duas bases ortonormais ordenadas suficientemente próximas, do subespaço perpendicular a $u_n = w_n$, que é um espaço vetorial de dimensão $n-1 \geq 2$. Pelo Lema A.2, existe uma caminho contínuo $t \mapsto (b_1(t),\ldots,b_{n-1}(t))$ de bases ortonormais ordenadas do subespaço perpendicular a $u_n = w_n$ tal que $b_i(0) = u_i$ e $b_i(1) = w_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Neste caso, podemos definir $c_i(t) = b_i(t)$ para todo $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ e $c_n(t) = u_n = w_n \neq \pm e_n$ para todo $t \in [0,1]$. Segundo, se $u_n \neq w_n$, existe v distinto, mas próximo de u_n e w_n tal que $\pm e_n$ não está no plano gerado por u_n e v, nem está no plano gerado por w_n e v. Neste caso, podemos definir $\widehat{b}_i(t) = R^t_{u_n,v} u_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ e todo $t \in [0,\widehat{T}]$, onde $\widehat{T} = T_{u_n,v}$. Segue que $\widehat{b}_i(0) = u_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, que $\widehat{b}_n(\widehat{T}) = R^{\widehat{T}}_{u_n,v} u_n = v$, e que $\widehat{b}_n(t) \neq \pm e_n$ para todo $t \in [0,\widehat{T}]$. Agora, podemos definir $\widetilde{b}_i(t) = R^t_{v,w_n} \widehat{b}_i(\widehat{T})$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ e todo $t \in [0,\widetilde{T}]$, onde $\widetilde{T} = T_{v,w_n}$. Segue que $\widetilde{b}_i(0) = \widehat{b}_i(\widehat{T})$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, que $\widetilde{b}_n(\widetilde{T}) = R^{\widetilde{T}}_{v,w_n} \widehat{b}_n(\widehat{T}) = R^{\widetilde{T}}_{v,w_n} v = w_n$, e que $\widetilde{b}_n(t) \neq \pm e_n$ para todo $t \in [0,\widetilde{T}]$. Temos que $(\widetilde{b}_1(\widetilde{T}),\ldots,\widetilde{b}_{n-1}(\widetilde{T}))$ e $(w_1,\ldots,w_{n-1})$ são duas bases ortonormais ordenadas suficientemente próximas, do subespaço perpendicular a $\widetilde{b}_n(\widetilde{T}) = w_n$, que é um espaço vetorial de dimensão $n-1 \geq 2$. Pelo Lema A.2, existe um caminho contínuo $t \mapsto (b_1(t),\ldots,b_{n-1}(t))$ de bases ortonormais ordenadas do subespaço perpendicular a $\widetilde{b}_n(\widetilde{T}) = w_n$ tal que $b_i(0) = \widetilde{b}_i(\widetilde{T})$ e $b_i(1) = w_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. O resultado segue definindo $b_n(t) = \widetilde{b}_n(\widetilde{T}) = w_n$, e definindo $c_i(t)$ conectando continuamente $\widehat{b}_i(t)$, $\widetilde{b}_i(t)$, e $b_i(t)$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ e normalizando o parâmetro t.

□

Dada uma base ortonormal ordenada canônica $(e_1,\ldots,e_n)$, vamos definir indutivamente a orientação de uma base ortonormal ordenada $(u_1,\ldots,u_n)$ em relação a $(e_1,\ldots,e_n)$. No caso unidimensional, temos que $u_1 = \pm e_1$, de modo que podemos definir a orientação de u_1 em relação a e_1 como

$$S_1(u_1) = \begin{cases} 1, & u_1 = e_1 \\ -1, & u_1 = -e_1 \end{cases}$$

No caso bidimensional, temos que

$$\begin{aligned} c_1(t) &= +(\cos(t)(e_1 \cdot u_1) - \operatorname{sen}(t)(e_2 \cdot u_1))e_1 \\ &\quad +(\operatorname{sen}(t)(e_1 \cdot u_1) + \cos(t)(e_2 \cdot u_1))e_2 \\ c_2(t) &= +(\cos(t)(e_1 \cdot u_2) - \operatorname{sen}(t)(e_2 \cdot u_2))e_1 \\ &\quad +(\operatorname{sen}(t)(e_1 \cdot u_2) + \cos(t)(e_2 \cdot u_2))e_2 \end{aligned}$$

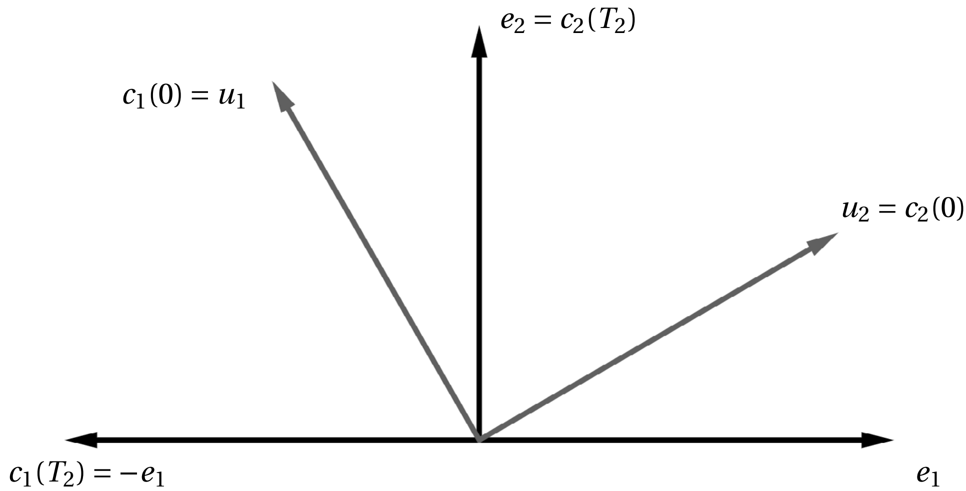
são tais que $(c_1(t), c_2(t))$ é base ortonormal ordenada para todo t e tais que

$$c_1(0) = u_1, \quad c_2(0) = u_2, \quad c_1(T_2) = \pm e_1, \quad c_2(T_2) = e_2$$

onde $T_2 = ((e_1 \cdot u_2)/|e_1 \cdot u_2|)\operatorname{acos}(e_2 \cdot u_2)$, de modo que podemos definir a orientação de (u_1, u_2) em relação a (e_1, e_2) como

$$S_2(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & c_1(T_2) = e_1 \\ -1, & c_1(T_2) = -e_1 \end{cases}$$

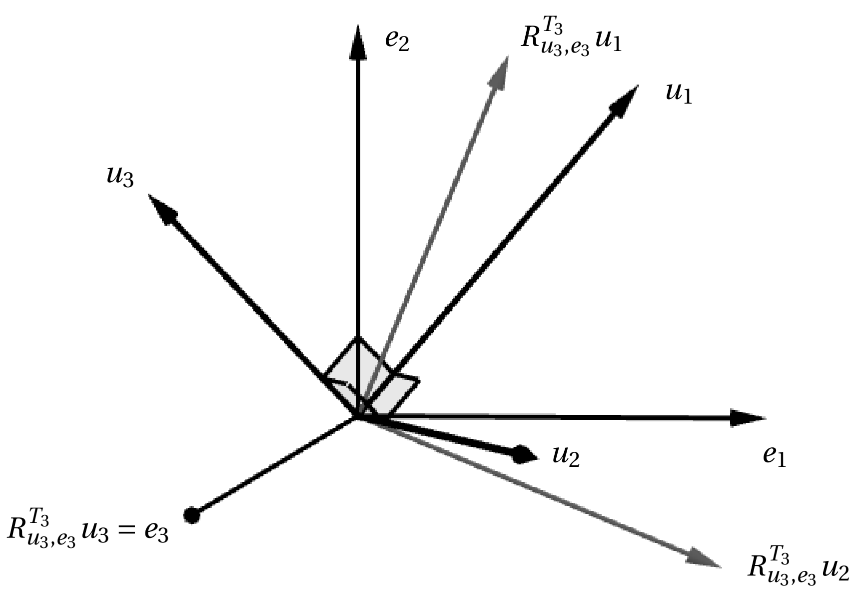
que é claramente uma função contínua.



Para $n \geq 3$ e quando $u_n \neq \pm e_n$, podemos definir indutivamente a orientação de $(u_1, \ldots, u_n)$ em relação a $(e_1, \ldots, e_n)$ como

$$S_n(u_1, \ldots, u_n) = S_{n-1}\left(R^{T_n}_{u_n,e_n} u_1, \ldots, R^{T_n}_{u_n,e_n} u_{n-1}\right)$$

onde $T_n = T_{u_n,e_n}$ e $\left(R^{T_n}_{u_n,e_n} u_1, \ldots, R^{T_n}_{u_n,e_n} u_{n-1}\right)$ é uma base ortornormal ordenada do espaço gerado pela base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, pois $R^{T_n}_{u_n,e_n} u_n = e_n$.



Assumindo indutivamente que S_{n-1} é uma aplicação contínua, temos que $S_n(u_1,\dots,u_n)$ é contínua em qualquer base ortonormal orientada $(u_1,\dots,u_n)$, onde $u_n \neq \pm e_n$. Além disso, dada uma base ortonormal orientada $(v_1,\dots,v_n)$, onde $v_n = \pm e_n$, e dadas duas outras bases ortonormais orientadas $(u_1,\dots,u_n)$ e $(w_1,\dots,w_n)$ suficientemente próximas da primeira, com $u_n, w_n \neq \pm e_n$, existe um caminho contínuo $t \mapsto (c_1(t),\dots,c_n(t))$ de bases ortonormais ordenadas tal que

$$c_i(0) = u_i, \qquad c_i(1) = w_i, \qquad c_n(t) \neq \pm e_n$$

para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ e para todo $t \in [0,1]$. Logo $t \mapsto S_n(c_1(t),\dots,c_n(t))$ é uma função contínua de $[0,1]$ em $\{\pm 1\}$, de modo que é constante. Logo $S_n(u_1,\dots,u_n) = S_n(w_1,\dots,w_n)$, mostrando que S_n é constante numa vizinhança de $(v_1,\dots,v_n)$, onde $v_n = \pm e_n$, de modo que podemos definir

$$S_n(v_1,\dots,v_n) = S_n(u_1,\dots,u_n)$$

para qualquer $(u_1,\dots,u_n)$ suficientemente próxima de $(v_1,\dots,v_n)$ com $u_n \neq \pm e_n$. Temos então que $S_n(u_1,\dots,u_n)$ é localmente constante e portanto contínua em qualquer base ortonormal orientada $(u_1,\dots,u_n)$.

Proposição A.4

$$\boxed{S_n(-u_1,u_2,\dots,u_n) = -S_n(u_1,u_2,\dots,u_n)}$$

Prova:

Procedemos por indução em n. Para $n=2$, a afirmação é imediata. Para $n \geq 3$, supondo que a afirmação é válida para $n-1$, temos que

$$\begin{aligned}
S_n(-u_1,u_2,\dots,u_n) &= S_{n-1}\left(R^{T_n}_{u_n,e_n} - u_1, R^{T_n}_{u_n,e_n} u_2,\dots,R^{T_n}_{u_n,e_n} u_{n-1}\right)\\
&= S_{n-1}\left(-R^{T_n}_{u_n,e_n} u_1, R^{T_n}_{u_n,e_n} u_2,\dots,R^{T_n}_{u_n,e_n} u_{n-1}\right)\\
&= -S_{n-1}\left(R^{T_n}_{u_n,e_n} u_1, R^{T_n}_{u_n,e_n} u_2,\dots,R^{T_n}_{u_n,e_n} u_{n-1}\right)\\
&= -S_n(u_1,u_2,\dots,u_n)
\end{aligned}$$

quando $u_n \neq \pm e_n$, e o resultado segue para o caso geral, pois a função S_n é localmente constante.

□

Para uma base ordenada qualquer $(v_1, \ldots, v_n)$, definimos

$$G(v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n)$$

dada pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, onde $u_1 = v_1/|v_1|$ e indutivamente

$$u_i = \frac{v_i - \sum_{j=1}^{i-1}(v_i \cdot u_j)u_j}{\left|v_i - \sum_{j=1}^{i-1}(v_i \cdot u_j)u_j\right|}$$

Podemos definir a orientação de $(v_1, \ldots, v_n)$ em relação a $(e_1, \ldots, e_n)$ como

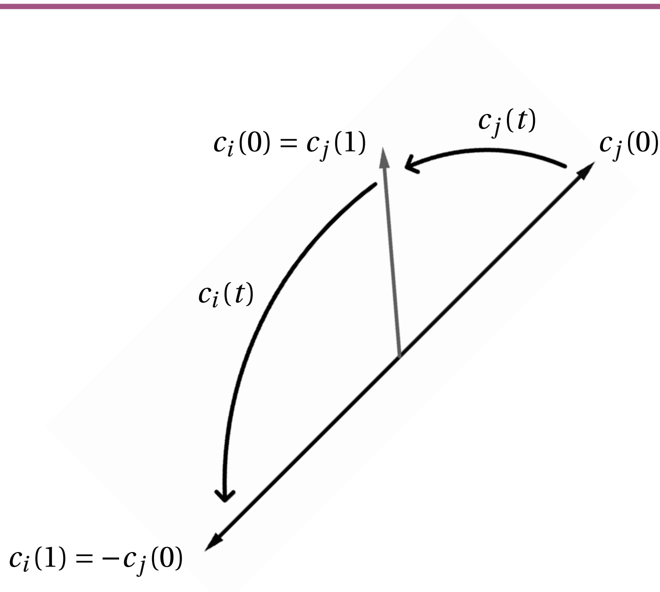
$$S(v_1, \ldots, v_n) = S_n(G(v_1, \ldots, v_n))$$

que é localmente constante, uma vez que S_n é localmente constante e que G é continua. Vamos precisar do seguinte lema, cuja demonstração é imediata.

Lema A.5

Dados v_i e v_j não colineares, existe um caminho contínuo $t \mapsto \big(c_i(t), c_j(t)\big)$ de bases ordenadas do espaço gerado por $\{v_i, v_j\}$ tal que

$$\boxed{\big(c_i(0), c_j(0)\big) = \big(v_i, v_j\big), \qquad \big(c_i(1), c_j(1)\big) = \big(-v_j, v_i\big)}$$



Essa é a propriedade fundamental da orientação de bases ordenadas para obtermos as propriedades fundamentais do determinante.

Proposição A.6

$$\boxed{S(v_1,\ldots,v_{i-1},tv_i,v_{i+1},\ldots,v_n) = \frac{t}{|t|}S(v_1,\ldots,v_n)}$$

Prova:

Temos que

$$G(tv_1,v_2,\ldots,v_n) = \left(\frac{t}{|t|}u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$$

se

$$G(v_1,\ldots,v_n) = (u_1,\ldots,u_n)$$

de modo que

$$\begin{aligned} S(tv_1,v_2,\ldots,v_n) &= S_n\left(\frac{t}{|t|}u_1,u_2,\ldots,u_n\right) \\ &= \frac{t}{|t|}S_n(u_1,\ldots,u_n) \\ &= \frac{t}{|t|}S(v_1,\ldots,v_n) \end{aligned}$$

onde usamo o Lema A.4 na segunda igualdade. Segue então que

$$\begin{aligned} S(v_1,\ldots,v_{i-1},tv_i,v_{i+1},\ldots,v_n) &= S(-tv_i,\ldots,v_{i-1},v_1,v_{i+1},\ldots,v_n) \\ &= \frac{t}{|t|}S(-v_i,\ldots,v_{i-1},v_1,v_{i+1},\ldots,v_n) \\ &= \frac{t}{|t|}S(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n) \\ &= \frac{t}{|t|}S_n(v_1,\ldots,v_n) \end{aligned}$$

onde usamos o Lema A.5 na primeira e na terceira igualdades.

□

Podemos definir o determinante de uma base ordenada qualquer $(v_1, \ldots, v_n)$ como o produto da orientação pelo volume

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = S(v_1, \ldots, v_n)\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n)$$

e, quando $(v_1, \ldots, v_n)$ não é uma base, seu determinante é definido como sendo nulo. Com essa definição, podemos obter as propriedades fundamentais do determinante.

Proposição A.7

Para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n$ e todo escalar t, temos que

D1)

$$\boxed{\det(v_1, \ldots, tv_i, \ldots, v_n) = t\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)}$$

D2)

$$\boxed{\det(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)}$$

Prova:

Quando $(v_1, \ldots, v_n)$ não é uma base, temos que $(v_1, \ldots, tv_i, \ldots, v_n)$ e também $(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$ não são bases, de modo que ambos os lados das duas equações do enunciado são nulos. Quando $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base, primeiro temos que

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, -v_i, \ldots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

uma vez que o paralelepípedo gerado por $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ é a translação por $2v_i$ do paralelepípedo gerado por $(v_1, \ldots, -v_i, \ldots, v_n)$. Segue então que

$$\begin{aligned}
\det(v_1, \ldots, tv_i, \ldots, v_n) &= S(v_1, \ldots, tv_i, \ldots, v_n)\mathrm{vol}(v_1, \ldots, tv_i, \ldots, v_n) \\
&= \frac{t}{|t|}S(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)|t|\mathrm{vol}\left(v_1, \ldots, \frac{t}{|t|}v_i, \ldots, v_n\right) \\
&= tS(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \\
&= t\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade **V1** na segunda igualdade e que $t/|t| = \pm 1$ na terceira igualdade. Além disso, temos que $t \mapsto c(t) = v_i + t v_j$ é um caminho contínuo tal que $c(0) = v_i$ e $c(1) = v_i + v_j$ de modo que

$$S(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = S(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

e, pela propriedade **V2**, temos que

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

de modo que, multiplicando as duas equações acima, obtemos que

$$\det(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

□

Referências

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. *Geometria Plana*, São Paulo: Atual, 2006. (Fundamentos de Matemática Elementar, v. 9).

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. *Geometria Espacial*, São Paulo: Atual, 2006. (Fundamentos de Matemática Elementar, v. 10).

HILBERT, David. *Fundamentos da Geometria*, Lisboa: Gradiva, 2003.

IEZZI, Gelson. *Geometria Analítica*, São Paulo: Atual, 2006. (Fundamentos de Matemática Elementar, v. 7).

LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*, Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

STRANG, Gilbert. *Álgebra Linear e suas Aplicações*, Boston: Cengage Learning, 2010.

A Editora UnB é filiada à

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

Este livro foi composto em UnB Pro, Utopoa e Liberation Serif.

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Essa obra foi elaborada e testada para servir como referência bibliográfica principal na disciplina de Introdução à Álgebra Linear. O enfoque da obra parte das intuições e conceitos geométricos, especialmente no plano bidimensional, mas também no espaço tridimensional, para introduzir os conceitos algébricos da forma mais natural possível e como ferramentas para tornar a análise dos diversos problemas mais simples e fáceis de serem computados. Para isso, o livro conta com 55 figuras bidimensionais e tridimensionais ilustrando as diversas construções geométricas e os diversos exemplos. No primeiro capítulo, denominado Espaços, a partir da geometria analítica do plano e do espaço, os vetores são introduzidos geometricamente, assim como outras estruturas algébricas, como o produto escalar, obtido a partir da Lei dos Cossenos. No segundo capítulo, intitulado Transformações, o foco é dado em transformações geométricas, como projeções e reflexões, caracterizadas algebricamente como transformações lineares, respectivamente, idempotentes e involutivas, e também isometrias e homotetias, que são lineares quando preservam a origem. No terceiro capítulo, denominado Coordenadas, as bases são introduzidas como generalização dos eixos coordenados, dando foco especial às denominadas bases ortonormais. No quarto capítulo, intitulado Matrizes, as ligações entre objetos geométricos e algébricos seguem sendo exploradas, em particular, o produto de matrizes é definido de modo a refletir a composição de transformações lineares e as isometrias lineares são caracterizadas como as que possuem inversa igual à transposta. No quinto capítulo, denominado Autoespaços, autovalores e autovetores são introduzidos com o objetivo de diagonalizar matrizes de modo a simplificar o cálculo de potências de matrizes e compreender geometricamente e algebricamente as cônicas. No sexto capítulo, intitulado Determinantes, esses objetos fundamentais para o cálculo de autovalores são introduzidos de forma geométrica, como o produto de orientações por volumes.

EDITORA UnB

SÉRIE ENSINO DE GRADUAÇÃO