Referência

ALMEIDA, José Roberto Novaes de. **O bê-á-bá da matemática financeira e dos juros**: para universitários. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2024. 274 p. Disponível em: https://livros.unb.br/index.php/portal/catalog/book/586. Acesso em: 23 out. 2024.

O BÊ-Á-BÁ

da matemática financeira e dos juros – para universitários

Por calculadora, Excel e tabelas financeiras

José Roberto Novaes de Almeida

EDITORA
UnB

O BÊ-Á-BÁ

da matemática financeira e dos juros – para universitários

José Roberto Novaes de Almeida

EDITORA
UnB

Equipe editorial

Coordenadora de produção editorial Marília Carolina de Moraes Florindo
Revisão Ana Alethéa Osório
Capa Cecilia Quental

Direitos exclusivos para esta edição:
Editora Universidade de Brasília
Centro de Vivência, Bloco A – 2ª etapa,
1º andar – Campus Darcy Ribeiro, Asa Norte,
Brasília/DF – CEP: 70910-900
Telefone: (61) 3035-4200
Site: www.editora.unb.br
E-mail: contatoeditora@unb.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade de Brasília – BCE/UnB)

A447b

Almeida, José Roberto Novaes de.
O bê-á-bá da matemática financeira e dos juros – para universitários [recurso eletrônico] / José Roberto Novaes de Almeida. – Brasília : Editora Universidade de Brasília, 2024.
274 p.

Formato PDF.
Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-5846-069-5.

1. Matemática financeira. 2. Juros. 3. Sistemas de amortização. 4. Correção monetária. I. Título.

CDU 336.781

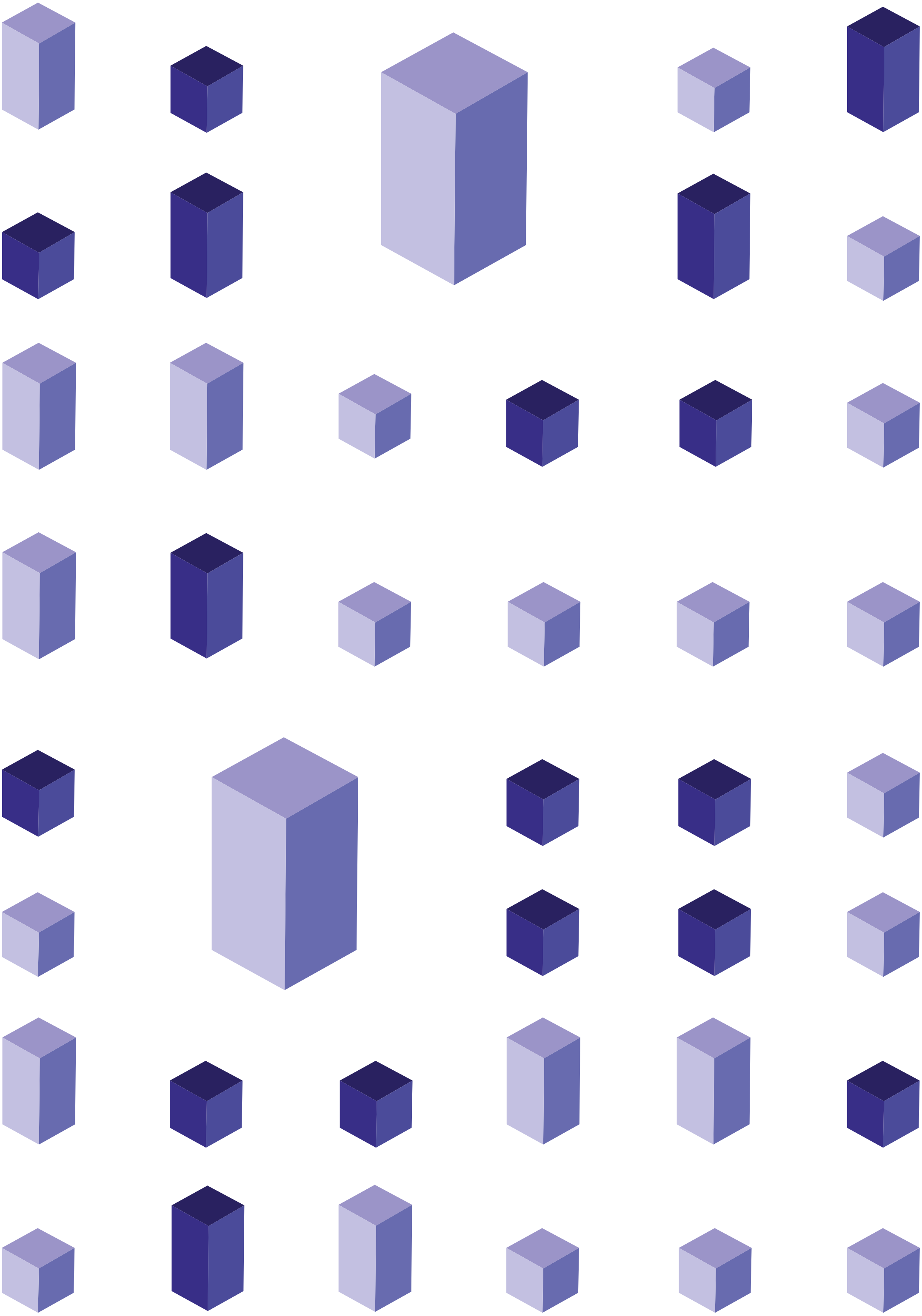
Heloiza Faustino dos Santos – Bibliotecária – CRB1/1913

Lista de figuras

Lista de gráficos

Lista de quadros

Sumário



Apresentação

Hesitei muito ao dar o título do livro, mas está como está. É um bê-á-bá para universitários de todos os cursos, principalmente, mas pode ser estudado por todas as pessoas interessadas neste assunto. É para ser utilizado com uma calculadora financeira, mas funciona bem com calculadoras simples, tabelas financeiras e computador. É um livro para todo mundo, mas é especialmente útil para bancários e banqueiros, para operadores do mercado financeiro e para compradores e vendedores. Na verdade, todo mundo precisa aprender matemática financeira básica para conhecer e ter sensibilidade para os juros embutidos nas compras e vendas e para não ser enganado por pessoas inescrupulosas.

Aprende-se aqui um pouco de matemática financeira, como se usa uma calculadora financeira, como se usa o Excel e sobre a utilidade de ter uma tabela financeira em mãos. A tabela nos ajuda a ser sensível aos custos. A minha sugestão é simples: se o leitor não conseguir entender alguma coisa, pule o item e vá para o próximo: quando se sentir mais seguro retorne ao que não entendeu. Não fique intimidado por cálculos que são aparentemente difíceis devido ao tipo do número ou a alguma observação que parece mais complicada, como as derivadas e logaritmos. São detalhes que apenas enfeitam o texto: se parecerem complicados, simplesmente abandone-os; verá que em nada perturbam a compreensão do texto. O mínimo pedido é um entendimento de equações no nível dos últimos anos do ensino médio e nada mais.

A história deste texto é lenta. Uma primeira versão foi escrita para um curso do Banco Central do Brasil na década de 1970: era técnico demais, com muitos logaritmos, devido à pobreza das calculadoras da época, e tinha uma quantidade imensa de exercícios com correção monetária, então muito utilizada. Foi primorosamente checado e rechecado por uma colega do Banco, Tânia Cunha, a quem muito agradeço aqui. O curso jamais foi dado pelo Banco, por razões que jamais descobri, e anos depois o texto me foi devolvido, sem maiores explicações. Engavetei-o imediatamente, já que tinha outros interesses e teria que fazer uma grande revisão, principalmente eliminando os cálculos enfadonhos de logaritmos, dado o aparecimento de simples calculadoras.

Quando comecei a ministrar a disciplina de Economia Monetária no Departamento de Economia da UnB, como professor em tempo integral, em 1997 – retomando experiência que tivera na década de 1970, quando ali estivera como professor em tempo parcial –, notei a necessidade de um bom texto de matemática financeira. Todos os que encontrei eram longos em demasia, com poucas informações econômicas. E lembrei-me do professor Mário Henrique Simonsen, autor de frases memoráveis: “o vestibular de Engenharia foi muito bom, mas o curso...” (sobre a qualidade do curso de Engenharia que fizera); “toda a matemática financeira pode ser aprendida em duas horas de aula". Não chego a dizer tanto, mas o curso deste livro pode ser aprendido com quatro horas de aula e outras tantas de estudo individual.

Peguei o texto da década de 1970 e o refiz quase que totalmente em meados da década de 1990. Gabriel Ervilha, então estudante de Economia da UnB, corrigiu e reviu os cálculos. O texto deveria ser parte do livro *Economia monetária – uma abordagem brasileira* (que acabou sendo editado pela Editora Atlas, em 2009), mas os editores disseram-me, com um bom senso que muito agradeço, que seria melhor separá-lo do texto principal, que já estava grande. E isso foi o que fiz, mas levou vários anos mais. Esta versão foi testada e criticada duramente por várias turmas de Economia da UnB desde 2002, que realmente quase refizeram o livro. Não é à toa que o bacharelado de Economia da UnB sempre teve nota A em todas as avaliações feitas no país: os alunos são ótimos, inquisitivos e críticos como devem sê-lo.

João Isídio Martins, estudante da UnB, viu e reviu o texto, refazendo os cálculos, um por um, com uma paciência de Jó. Ainda mais: criou as seções sobre o uso de Excel, os gráficos e tudo mais que diz respeito a computador e a calculadora simples. Fez um trabalho primoroso, muito acima do que se pede de um assistente de pesquisa, sendo criativo realmente. A ele agradeço de verdade: sem o seu interesse, possivelmente este livro não teria sido finalizado. Finalmente, Danilo Gomes Vieira, de cuja banca teria o prazer de participar, avaliando sua monografia muito original, fez duas revisões dos cálculos, a primeira, mais uma vez rechecada por João Isídio Martins. Finalmente, Lucas Camacho, meu assistente de pesquisa, deu o retoque final, com muito empenho e criatividade.

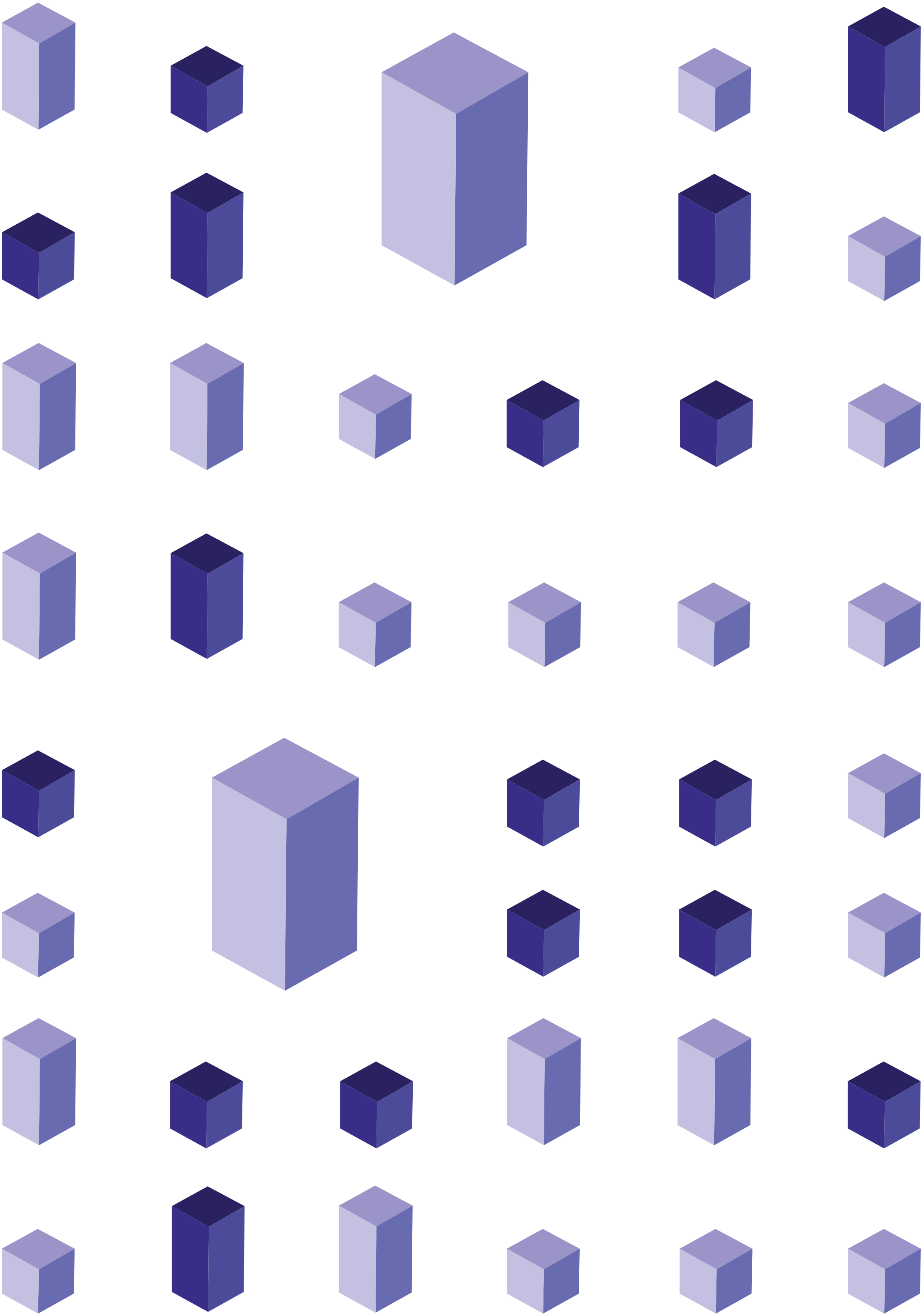
Lidando com números e conceitos, sei que erros sempre existirão, mas espero que não sejam muitos depois dessas revisões exaustivas. Os erros remanescentes são somente meus. Sugestões de correções são bem-vindas e devem ser enviadas para novaes@unb.br ou para a Caixa Postal 04302, Departamento de Economia da UnB, 70919-970, Brasília, DF.

Brasília, julho de 2018.

Introdução

Este livro trata dos conceitos e da mensuração de juros, além do valor atual e da taxa interna de retorno. As formas de amortização são examinadas, particularmente a tabela Price, talvez a mais importante fórmula de pagamento financeira já criada, além do sistema de amortização constante e o *sinking fund*. A correção monetária, que, em sua face moderna, é uma invenção brasileira, é discutida junto às principais formas de financiamento imobiliário. A relevância e o poder dos juros compostos para a poupança e para o planejamento financeiro pessoal são também discutidos. O trabalho termina com uma seção acerca dos logaritmos, seus gráficos e derivadas logarítmicas e, já que os economistas falam sempre de elasticidade, este tema também aparece no final do trabalho.

O livro destina-se a estudantes universitários e operadores do mercado financeiro, principalmente aos agentes de financiamento. A ênfase é no uso de calculadora com explicações detalhadas para o uso do Excel. A sensibilidade do estudante será aguçada pelo uso de tabelas financeiras.



CAPÍTULO 1

Conceito de juros e valor atual

1.1 Introdução

A existência de juros é explicada por muitas razões, dentre as quais destaco duas: a) os consumidores preferem consumir hoje em vez de amanhã e, para tanto, estão dispostos a pagar algo (que é o juro); e b) os poupadores postergarão seu consumo e somente o farão por uma remuneração (juro). Em português claro, não há nada de graça. Do ponto de vista da Economia, o juro é definido como sendo a remuneração do fator de produção *capital*, entendido em seu sentido mais amplo, tanto de natureza física (máquinas e equipamentos, terra e imóveis), quanto de natureza financeira. O conceito de *juros* está associado ao *custo de oportunidade* do capital, isto é, todos os custos ligados direta ou indiretamente à utilização do capital.

As taxas de juros costumam ser apresentadas em *termos unitários*, a forma mais utilizada em matemática financeira; parte-se sempre de um capital inicial de $ 1,00, com o símbolo $ representando uma unidade monetária genérica, ou em *termos percentuais*, em que o capital inicial é sempre $ 100,00. É claro que é alternativo dizer 12% ao ano, isto é, 12 unidades monetárias de juros sobre $ 100,00 de capital investido, ou dizer juros de 0,12 ao ano por 1 unidade de capital investido.

O termo *investimento* é usado, em matemática financeira, como sinônimo de recursos financeiros utilizados e nada tem a ver com o significado econômico de bens de capital (bens de investimento). Em matemática financeira o *investidor* é o agente econômico que realiza investimentos financeiros e não deve ser confundido com o investidor da Economia, que é o empresário que está promovendo a criação de riqueza. Matematicamente, a taxa de juros é a remuneração do capital por unidade de tempo. Os termos *juros* e *taxa de juros* são usados como sinônimos, embora, formalmente, haja diferença entre eles. Assim:

Juros – são a remuneração de um capital em um período de tempo;
Taxa de juros – é a remuneração de uma unidade de capital por período de tempo (ou, alternativamente, de 100 unidades de capital, quando então se diz taxa de juros em percentagem por período de tempo).

Quando o capital é de 1 e o período de tempo é 1, o valor dos *juros* é igual à *taxa de juros*. O capital pode ser expresso em diversas unidades, como sal, ouro, a unidade monetária do país, etc. Muitas vezes há limitações legais para a taxa de juros máxima, como no Código de Hamurabi (cerca de 4.000 a.C.), que estabelecia em 25% o limite máximo para a taxa de juros sobre a prata, que era a unidade monetária na época.

Os juros referem-se ao uso do capital disponibilizado no momento *0*, que são pagos no tempo *t*. Por essa razão, o cálculo dos juros é sempre feito sobre o montante de capital efetivamente utilizado e refere-se, sempre, ao pagamento que será feito no encerramento do contrato. Outras situações que envolvem redução no valor recebido pelo devedor de um empréstimo, como pagamento de comissões, de prestações antecipadas, etc., são matematicamente resolvidas pela redução do valor do capital inicial.

1.2 Composição de juros por período e juros simples

1.2.1 Composição

Composição é o ato de incorporação dos juros ao capital, após um determinado tempo, gerando um novo capital, sobre o qual a taxa de juros irá incidir outra vez. O sistema de juros compostos consiste na aplicação da hipótese de que o investidor, ao receber os juros, não irá guardá-los debaixo do colchão, mas, sim, empregá-los imediatamente. Não importa, é claro, que o investidor gaste o dinheiro de seus investimentos em bens de consumo em vez de reinvesti-lo: tudo se passa, em termos comparativos, como se os ganhos de um investimento fossem reinvestidos à mesma taxa anterior. O sistema de juros compostos nada mais é, portanto, do que receber juros e reaplicá-los imediatamente.

Sejam:

P = capital ou principal; é o valor efetivamente recebido pelo devedor, sobre o qual incidirá a taxa de juros;

J = valor dos juros

S= valor do principal somado ao dos juros ao final do período t; é também conhecido como montante;
r = taxa de juros por período, a compor no fim do período, por unidade de capital. É também conhecida como taxa nominal de juros; e
t = nº de períodos sobre os quais incidirão os juros.

No final do primeiro período, o valor do principal é:

$$\boldsymbol{S1} = P + Pr = P\,(1 + \mathrm{r})$$

No final do segundo período:

$$\boldsymbol{S2} = S_1 + S_1 r = S_1\,(1 + r)$$
$$\boldsymbol{S2} = P\,(1 + \mathrm{r})^2$$

No final de *t* períodos:

$$\boldsymbol{S} = P\,(1 + r)^{t} \qquad \textbf{(1)}$$

A fórmula **(1)** é a base para todas as operações financeiras que se refiram a créditos de longo prazo, como hipotecas, investimentos em capital fixo, captação de recursos por títulos, depósitos a prazo fixo, etc.

Em muitos livros didáticos, os símbolos **S, P, r** e **t** são substituídos consecutivamente por C_n, C_0, *i* e *n*. Daí, que a fórmula **(1)** pode ser, assim, reescrita:

$$\boldsymbol{C_n} = C_0\,(1 + r)^{n} \qquad \textbf{(1')}$$

A vantagem da última fórmula é que torna claros os períodos envolvidos. O período *0* refere-se à data em que o contrato foi celebrado, incorporando-se os juros ao capital somente no final dos períodos de um contrato com *t* períodos. Mediante adaptação do enunciado de um problema, é fácil corrigir a formulação anterior quando há pagamento de comissões de abertura de crédito ou impostos no ato da concessão de crédito: esses valores devem ser reduzidos do principal, para o cálculo perfeito dos juros.

Não é necessário que o período seja estipulado, unicamente, em termos de uma só unidade temporal. Um período pode ser, por exemplo, de 4 anos, 8 meses e 7 dias ou 5 anos. Formas habituais de períodos, em matemática financeira, são dias (correntes ou úteis), semanas, meses (sempre com 30 dias corridos) e anos. O ano bancário tem 12 meses iguais, cada mês com 30 dias, que é a prática tanto internacional quanto brasileira, correspondendo, portanto, sempre, a um ano de 360 dias. No mercado financeiro brasileiro, usa-se, para os títulos públicos, um ano de 252 dias úteis, com composição de juros a cada dia. Os americanos usam muito o trimestre civil como forma de cálculo para as contas de poupança.

A taxa de juros deve referir-se à mesma unidade de tempo que a do período, qualquer que seja ele (por exemplo, taxa de juros unitária de 0,08 em 4 anos, 8 meses e 7 dias, por $1 de principal). Na prática bancária, adota-se o termo **acessórios** para a soma dos juros (*J*) e comissões de abertura de crédito, comissões de cálculos, impostos, ou seja, para todos os valores acima do principal.

1.2.2 Juros Simples

Se os juros não forem incorporados ao capital, seu cálculo é dado por:

$$\boldsymbol{J} = Prt, \text{ se } \boldsymbol{t} = 1,\ r = \frac{J}{P}$$

em que **J** são os juros simples, *P* é o capital, *r* é a taxa de juros simples e *t* é o período, resultando daí que o montante S é:

$$\boldsymbol{S} = P + Prt = P\,(1 + rt)$$

Os juros simples são tradicionais em operações de crédito liquidadas em uma só parcela. São, também, chamados de juros nominais, uma vez que não representam o custo real da operação, pela inexistência de composição. São, ainda, chamados de juros lineares, uma vez que seu conceito é de uma linha reta, e são bem diferentes do caráter exponencial dos juros compostos.

Os juros simples são, raramente, usados em Economia, dado que o conceito econômico incorpora, evidentemente, os juros ao capital, para gerar novo capital. No mercado financeiro internacional, as operações com bônus são calculadas, habitualmente, com juros simples, mas, no Brasil, os títulos públicos incorporam juros compostos por dia útil e expressos em percentagem ao ano.

No Brasil, costuma-se abreviar percentagem ao ano como **% a.a.**, ou **% aa** e percentagem ao mês como **% a.m.** ou **% am**. Nos mercados financeiros internacionais raramente se menciona o período e usa-se **%** como abreviação de **% aa**.

Exercícios resolvidos

Exercício 1. Determine o rendimento anual equivalente a 2,5% a.m., por calculadora: **a)** com 3 decimais (***f*** **6**); **b)** com seis decimais, calculado (***f*** **6**) a partir do resultado obtido com três decimais; **c)** com seis decimais, calculado a partir de seis decimais. Diga quais das respostas têm significado econômico.

Solução:

a) Com três casas decimais:

A resposta com resultado econômico só pode ter três decimais, como o enunciado, de modo que se usa ***f*3**

$$C_n = C_0(1+i)^n \text{, onde } C_0 = 1,\ n = 12 \text{ e } i = 0{,}025$$

$$(1+0{,}025)^{12} = (1{,}025)^{12} = 1{,}345$$

Resposta: 34,5% a.a.

b) Com seis decimais, partindo do número obtido no item anterior (1,345) e teclando ***f*6**, obtém-se:

1,344889, ou seja, 34,4889% a.a.

Resposta: 34,4889% a.a., que não tem significação econômica, já que exibe uma precisão que não existe. Esse número, aproximado para três casas decimais, dá a mesma resposta do item **a**.

c) Se se deseja o resultado diretamente com seis decimais, muito embora não seja significativo do ponto de vista econômico, tecla-se ***f*6**, $C_0 = 1$, $n = 12$, $i = 0{,}025$ e se encontra:

$(1 + i)^{12}$ = 1,344889, que é, exatamente, o mesmo resultado anterior (obtido a partir da aproximação de três casas decimais) e que não tem significado econômico.

Resposta: A mesma do item **b**.

Exercício 2. Determine, por calculadora, a taxa mensal equivalente a 34,5% a.a.

Solução:

Para ***f*3**

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Se $C_0 = 1$

$$1{,}345 = (1 + i)^{12}$$

$$(1 + i) = 1{,}345^{\frac{1}{12}} = 1{,}025$$

Resposta: 2,5% a.m.

Exercício 3. Determine, por calculadora, a taxa mensal equivalente a 52,70% a.a.

Solução:

Usando ***f*4**:

$$(1 + i)^{12} = 1{,}5270$$

A calculadora eletrônica fornece (1 + *i*) = 1,0359.

Resposta: 3,59% a.m.

1.3 Nota sobre aproximações de cálculos numéricos

A maior parte das calculadoras eletrônicas utiliza todos os algarismos existentes em suas memórias, como é o caso da HP – 12C, que foi usada para os cálculos deste livro, muito embora, o visor da calculadora mostre apenas um pequeno número de algarismos. Se cada operação numérica individual for aproximada para um determinado número de casas decimais previamente estipulado, o resultado final será diferente daquele derivado do uso da capacidade máxima da calculadora. Daí ser crucial manter todos os cálculos dentro da calculadora, evitando-se fazer aproximações numéricas individuais.

Em Economia, não é possível obter um número de casas decimais superior ao dos dados que foram objeto da coleta, como é o caso das taxas de juros, que normalmente se apresentam com duas casas decimais, e de valores monetários, que têm duas casas decimais, também. Algumas operações, no entanto, indicam a taxa de juros sem especificação do número de casas decimais, sugerindo que é número exato, mas é de boa cautela, mesmo nesse caso, apresentar o resultado com o mesmo número de casas decimais dos demais itens do enunciado. É errado mostrar resultados com suposta precisão, maiores até ao que se pode obter dos números originais.

O visor da HP–12C tem capacidade para 10 dígitos. A determinação do número de casas decimais é feita pela tecla **f**, de cor amarela, seguida do número de decimais desejado: **f4** indica aproximação para quatro casas decimais, muito embora todos os cálculos dentro da máquina sejam feitos com todos os algarismos disponíveis. Normalmente, **f4** é suficiente para se trabalhar com juros mensais ou anuais expressos em termos unitários (por exemplo, 1,23% a.m., ou 15,80% a.a. fornecem, respectivamente, na forma unitária 0,0123 e 0,1580), além de ser mais do que suficiente para aproximações de valores monetários, que não podem ser inferiores a 0,01. Deve-se evitar o uso de muitas casas decimais no visor, uma vez que reduzem a sensibilidade do economista para a grandeza dos números e tendem a complicar o resultado dos cálculos, sem ganho de precisão. Na verdade, tratando-se de juros anuais, é melhor trabalhar com ***f*****3**, já que, realmente, um único decimal em juros percentuais é satisfatório no caso de taxas anuais superiores a 10,0% a.a., que normalmente são apresentadas com uma única decimal. O visor só é importante para se ter certeza que se digitou corretamente o número desejado e para se ler o resultado final da operação, uma vez que os cálculos são realizados dentro da máquina, com todas as casas decimais existentes, quer apareçam no visor, quer não.

Imagine que se deseja achar $2{,}63^2$. O resultado da multiplicação com todas as casas decimais possíveis (quatro, no caso, já que o número original de duas casas decimais será quadrático) é $2{,}63^2 = 6{,}9169$. Com ***f*****4**, o visor mostrará 2,6300, após digitar-se 2,63 seguido de ***ENTER***, tecla-se **2** e y^x, o resultado mostrado no final será 6,9169. Esse resultado não satisfaz o critério de mensuração utilizado, que estabelece limite de duas casas decimais. Nessa linha de raciocínio, a resposta desejada será encontrada com ***f*****2**, e não com ***f*****4**, ***f*****3**, ***f*****1** ou ***f*****0**, que é 6,92.

Neste livro, adotou-se a regra de fazer os cálculos com todas as casas decimais disponíveis na calculadora, utilizando, sempre que possível, o resultado registrado no interior da máquina. Há uma razão para isso: as taxas de juros de contratos são, de modo geral, números exatos, isto é, com número ilimitado de casas decimais. As divisões podem ser facilmente invertidas na HP – 12C com a tecla x ≷ y e as somas podem ser arquivadas em uma memória com a tecla ***STO***, seguida de um número criado para a memória e recuperadas pela tecla ***RCL*** seguida do número da memória, o que permite utilizar todas as decimais existentes e capturá-las para uso da máquina. O cálculo numérico pela calculadora deve dispensar o uso de lápis e papel e mesmo de aproximações mentais do operador.

Em Economia, não se pode ter maior precisão que o instrumento de medição. Os valores monetários são expressos, normalmente, com duas casas decimais, já que não podem ser inferiores a R$ 0,01 (há algumas exceções: as taxas interbancárias têm, via de regra, seis decimais, e o preço unitário dos títulos públicos é, igualmente, cotado com seis decimais, mas a liquidação das operações é feita em moeda corrente com a precisão máxima de centavos). Como as taxas de juros com mais de quatro decimais raramente querem dizer alguma coisa em termos econômicos, adotou-se neste livro, quatro decimais como padrão de apresentação de taxas de juros, isto é, ***f*4**. Os resultados finais dos problemas devem ser apresentados com o mesmo número de casas decimais dos seus enunciados.

Diversos problemas em matemática financeira somente podem ser resolvidos por logaritmos, quer pela inexistência de tabelas apropriadas, quer pela indisponibilidade de calculadoras ou programas de computador. O uso de *softwares* deve ser feito com cautela, uma vez que esses programas sacrificam a precisão numérica pela necessidade de rapidez de cálculos. McCullough e Vinod (1999) testaram os pacotes financeiros e econométricos mais comuns no mercado e concluíram que existem numerosos e importantes erros de cálculos na maior parte dos softwares, já que a velocidade nos cálculos compromete a qualidade dos resultados. Normalmente, os erros desses softwares não causam problemas, porque os resultados de regressões e de outras séries estatísticas são apenas indicativos na Economia.

Em matemática financeira quaisquer erros têm custos econômicos claros e podem, também, representar perdas financeiras para os profissionais envolvidos, se forem processados judicialmente e condenados – como devem sê-los – por negligência ou imperícia profissional. Todo cuidado é pouco e sugere-se que os cálculos objeto de parecer profissional sejam realizados no mínimo duas vezes, se possível utilizando-se dois métodos distintos e, se for o caso de perícias para fins judiciais, deve-se usar duas calculadoras diferentes. Assim, em pareceres e em problemas em geral, a resposta deve estar suficientemente clara, de modo a se evitar ambiguidades.

Os problemas de aproximações numéricas quase desapareceriam se os resultados pudessem ser expressos sem aproximações decimais e desprezados erros de até 1,00; desse modo, seria evitada perda de tempo precioso em discussões sobre aproximações numéricas que, se importantes em Física e em Astronomia, são quase sempre irrelevantes para a Economia. O imposto de renda brasileiro, na década de 1970, com o recrudescimento da inflação, desprezou os centavos, sem considerar aproximações, em todos seus cálculos, mas, com a queda da inflação, um novo padrão monetário foi criado e, com ele, a solicitação de centavos nas declarações de renda, com a consequente perda de tempo e de dinheiro para diferenças econômicas irrelevantes.

No padrão monetário inglês tradicional, já abolido, mas que vigorou por séculos, a libra esterlina (em inglês *sterling pound*, símbolo £) era dividida em 20 xelins (*shillings*, símbolo *s*) e cada xelim, em 12 dinheiros (*pence*, símbolo *d*, com o singular *penny*; o plural pode ser escrito também como *pennies*), daí a libra ter 240 dinheiros. Os números eram escritos separados por hífens e com o símbolo próprio (por exemplo, 10£-11*s*-9*d*, que é equivalente a 10 x 20 x 12 + 11 x 12 + 9 = 2.541*d*). As taxas de câmbio brasileiras eram expressas em relação ao *penny* (número de *pences* por hum mil réis – algumas vezes, neste texto, será empregada a grafia arcaica *hum*, para clareza) até o aparecimento do dólar como unidade internacional padrão, o que coincidiu com o advento do cruzeiro em 1942, quando passaram a ser expressas em números de cruzeiros por hum dólar. Assim, até a década de 1940, uma taxa de câmbio alta significava que a moeda nacional estava valorizada, o oposto do que se diz hoje. Era habitual traduzir *penny* por dinheiro, sem dúvida, devido ao símbolo *d* ser originário do latim *denarius*, que quer dizer dinheiro. O sistema monetário inglês antigo, dividido em subunidades monetárias, dava maior precisão que o centavo, mas era mais complicado para cálculos comparativamente aos centesimais. Hoje, a libra é simplesmente dividida em 100 *pence*.

1.4 Valor atual e taxa interna de retorno

A escolha entre dois investimentos depende da taxa de juros. Um dos critérios consiste em determinar a taxa interna de retorno de um investimento e compará-la com as opções existentes. Tal mecanismo independe do valor do capital inicial, daí uma das razões da universalidade da taxa de juros como o principal indicador de alternativas entre investimentos. É claro que quando se examinam vários investimentos sob o ângulo da rentabilidade (também chamada de rendimento por unidade de capital, ou, simplesmente, rendimento) e se adota esse conceito como sendo o fundamental para a escolha, está-se considerando, implicitamente, que os outros dois importantes fatores determinantes para a escolha entre investimentos – liquidez e risco – são, supostamente, iguais para todas as opções. Nem sempre isso acontece, de modo que cálculos realizados mecanicamente, sem levar em conta diferentes graus de liquidez e risco, não têm significado econômico. Cada caso precisa ser avaliado cuidadosamente.

Do mesmo modo, pode-se considerar, como critério fundamental de escolha, o capital acumulado no final do período. Entre dois investimentos de mesmo prazo e igual valor inicial, o investidor irá preferir aquele que tiver o maior montante, que, é claro, tem, simultaneamente, a maior taxa de rentabilidade. Os dois critérios de taxa de juros e de montante são rigorosamente iguais, desde que se estejam examinando investimentos com capitais iniciais e prazos iguais.

O valor atual corresponde *à quantia que saldará uma obrigação em data anterior à do seu vencimento*. Em linguagem corrente, o valor atual (também chamado, incorretamente, de valor presente) é o valor, na data de hoje, de uma obrigação a ser saldada no futuro, descontada à taxa de juros adequada para o investimento.

No regime de juros compostos, o valor atual de C_0 é derivado de **(1')**:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad \textbf{(2)}$$

Isto é, para um investidor, é optativo receber hoje C_0, ou receber daqui a *n* períodos C_n, desde que a taxa de juros seja *i* por período.

O cálculo da taxa interna de retorno de um investimento é derivado da próxima equação, onde a_i é negativo para despesas e positivo para receitas líquidas:

$$a_0 + \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(1+r)^n} = 0$$

Se $a_0 < 0$ e todos os demais a_i são ≥ 0, a equação anterior tem uma única solução: $1 + r > 0$, isto é, uma única taxa de retorno $r > -1$. A taxa será positiva se $\sum_{i=0}^{n} a_i > 0$ (o que inclui a_0, que é, normalmente, negativo), conforme Sydsaeter (2000, p. 167).

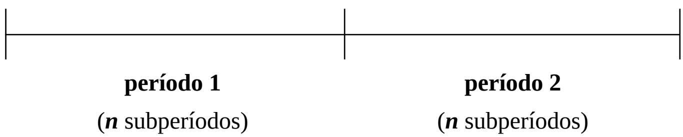
1.5 Composição de juros por subperíodos

No sistema financeiro, é tradicional compor os juros por subperíodos dentro do período em que se define a taxa de juros, que normalmente é expressa **ao ano**. Os subperíodos podem ser semestrais, trimestrais, mensais, semanais, diários, ou mesmo por dias úteis em um ano. A composição significa a incorporação dos juros ao capital, gerando novo capital sobre o qual incidirá a taxa de juros.

Por tradição, a taxa de juros mencionada contratualmente é chamada taxa de juros **simples**, muito embora os juros simples não prevejam a incorporação ao capital. É claro que, no momento em que se verifica a composição, a taxa de juros simples deixa de existir e passa-se a utilizar o conceito de taxa de juros **composta por subperíodo**.

Os economistas, para evitar o uso do termo **simples**, que se torna ambíguo quando composto, usam o termo **taxa de juros nominal** para a taxa que vai ser composta por subperíodos, o que permite diferenciá-la da taxa de juros efetiva, que é a que prevalece após todas as composições.

Até hoje, a nomenclatura **nominal** tem pouco uso corrente, e a maior parte dos livros didáticos cita, errada e contraditoriamente, o termo **simples** como a taxa que vai ser objeto de composição nos subperíodos em que se divide um período. Neste livro, as taxas de juros não especificadas de outra forma serão tomadas como taxas de juros nominais.



Sejam:

P = principal
r = taxa de juros, em termos unitários, por um período de composição, chamada, de agora em diante, de taxa nominal
n = nº de subperíodos considerados em um período
t = nº de períodos (também chamado de tempo)
S = montante

Segue-se que:

$\frac{r}{n}$ = taxa de juros por subperíodo
nt = nº de composições existentes no tempo *t*

Após a 1ª composição, tem-se, no final do 1º subperíodo, como principal + juros (isto é, **S**):

$$\mathbf{S} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{1}$$

No final do 2º subperíodo:

$$\mathbf{S} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{2}$$

No final dos *n* subperíodos que formam o 1º período:

$$\mathbf{S} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}$$

Terminado o 1º período, o processo de reinvestimento de juros continua no 2º período, em cujo final tem-se:

$$\mathbf{S} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{2n}$$

Assim, no final de *t* períodos,

$$\mathbf{S} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \textbf{(3)}$$

que define o montante quando os juros são incorporados por *n* subperíodos de um total de *t* períodos.

Exemplo: Determine o montante em um ano de um principal de 1,0000 a juros de 12% a.a., compostos trimestralmente.

Tomando ***f*4**:

$$S = 1\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4x1} = 1{,}0300^4 = 1{,}1255$$

1.6 Juros simples, compostos, nominais e efetivos

A taxa de juros simples ***r*** prevalece somente quando não há composição de juros. No momento em que os juros simples são compostos, o termo "simples" perde a razão de existência e ***r*** passa a ser chamada de taxa nominal. A taxa de juros composta, $\frac{r}{n}$, é a composição da taxa de juros nominal ***r*** em ***n*** subperíodos, gerando novos principais, sobre o quais ocorrerão novas incidências de juros. A taxa de juros efetiva ***i*** é a resultante, para o período, da composição dos juros nominais ***r*** em ***n*** subperíodos, reinvestidos nos subperíodos restantes; é, portanto, o custo da operação financeira.

Diz-se que dois capitais são equivalentes quando produzem o mesmo montante, com taxas de juros distintas e/ou diferentes períodos de acumulação. Em geral, se ***i*** é a taxa de juros efetiva e $\frac{r}{n}$ é a taxa de juros composta em ***n*** subperíodos em um tempo ***t***, tem-se que seus montantes serão equivalentes para um capital unitário, se:

$$(1+i)^t = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \textbf{(4)}$$

Ou, cancelando-se ***t***:

$$(1+i) = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n} \qquad \textbf{(5)}$$

A equação **(4)** determina a relação entre os juros efetivos $\boldsymbol{i}$ e os juros compostos $\frac{r}{n}$ e, consequentemente, a taxa de juros nominal $\boldsymbol{r}$.

Então, para uma perfeita identificação financeira, é necessário informar a taxa de juros nominal $\boldsymbol{r}$ e o período de composição $\boldsymbol{n}$ para determinar a taxa de juros $\frac{r}{n}$ que será utilizada na composição. A identificação de $\boldsymbol{r}$ e de $\boldsymbol{n}$ permite calcular $\boldsymbol{i}$, a taxa de juros efetiva, quase sempre expressa em percentagens ao ano ou ao mês.

A nomenclatura pode ser confusa e todo cuidado é pouco. Se a taxa de juros é chamada de simples $\boldsymbol{r}$ e é de 24% a.a., mas é composta ao mês, no final de 12 meses, já que $\frac{r}{n} = \frac{0,24}{12} = 0,02$, tem-se que $1,02^{12} = 1,268242$, ou seja, 26,82%, como juros efetivos $\boldsymbol{i}$; na verdade, $\boldsymbol{r}$ é simplesmente uma taxa nominal. Se, entretanto, o contrato prevê juros simples de 24% a.a., com composição somente ao final de 12 meses, então os juros efetivos $\boldsymbol{i}$ serão, também, de 24% a.a. Na tabela Price, a taxa de juros ao ano, com pagamentos mensais é simplesmente dividida por 12 para se calcular a taxa mensal de composição.

Assim, um empréstimo imobiliário de 30 anos, a uma taxa de 24% a.a, a ser liquidada em prestações mensais, tem uma taxa de $\frac{0,24}{12} = 2\%$ a.m, ou seja, $\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} = 1,2682$. Ou seja, o mutuário está pagando efetivamente 26,8% a.a, quando pensa que está pagando 24% a.a, que é, na verdade, a taxa de juros nominal anual.

Tecnicamente, os juros incidem sobre o saldo devedor no momento em que são devidos. No entanto, muitos credores, particularmente as empresas de cartões de crédito, definem métodos distintos de cálculo de juros, como a média do menor e do maior saldo do período, por exemplo. Embora tais sistemáticas, se previstas contratualmente, não provoquem grandes complicações no cálculo, dificultam comparações.

É claro que o principal deve ser determinado de modo que reflita, realmente, os recursos utilizados pelo devedor no período sobre o qual incidirão os juros, mas os credores usam formas sofisticadas de cálculo para aumentar seus ganhos sem chamar a atenção do devedor para o nível da taxa de juros. O devedor deve ficar atento para essas astúcias.

No Brasil, aplicam-se, para títulos públicos, juros compostos ao dia útil, que são anualizados considerando-se o ano de 252 dias. Não há, nesse caso, rendimento de juros para sábados e domingos (104 dias) e para 13 feriados adicionais no ano de 365 dias (ou 14 feriados no ano de 366 dias). No mercado internacional de títulos públicos, os juros são simples e adota-se o ano bancário de 360 dias, com mês de 30 dias. A precisão brasileira foi, sem dúvida, provocada pelas elevadíssimas taxas nominais de juros da década de 1990.

A imprecisão no cálculo das taxas efetivas de juros é grande nos EUA, devido à baixa inflação, o que faz com que, ao ano, elas, raramente, sejam superiores a um dígito e as diferenças de composição sejam pequenas. Muitas instituições americanas divulgam uma taxa de juros de rendimentos para depósitos a prazo fixo sem fazer referência ao tempo nem ao número de composições. Apenas recentemente a apresentação em publicidade foi padronizada em taxa nominal ao ano, chamada de *annual percentage rate* (APR). Muitas instituições divulgam, também, uma taxa de rentabilidade anual, *annual percentage yield* (APY), também denominada *yield*, que é, simplesmente, a taxa efetiva anual, resultante da composição da taxa de juros nominal ao ano (APR). Como resultado de variados períodos de composição, a mesma taxa de juros nominal APR produz diferentes taxas de juros efetivas APY.

As cooperativas de crédito americanas não pagam juros sobre seus depósitos a prazo, mas, sim, dividendos (*dividends*), expressos em APR; não há, formalmente, juros pagos aos depositantes, que são os proprietários da instituição. No final do exercício financeiro, é pago um dividendo extra calculado sobre o saldo médio do acionista no período, se houver lucros extraordinários acima daqueles pagos como antecipação dos lucros da instituição. O próprio nome *dividend* é muito recente, conforme mostra o *Oxford English Dictionary* (1989), que cita Morck e Young (2005, p. 64) e afirmam que *dividend* somente apareceu escrito pela primeira vez em 1690, no *London Gazette*, no contexto de uma empresa com acionistas, no caso, a famosa Hudson Bay Company, que tinha atividades monopolistas no Canadá. *Dividend* é derivado do latim *divenditum*, que quer dizer vender a muita gente, conforme o *Dicionário Escolar Latino-Português* (1967), do professor Ernesto de Faria.

Nos EUA, os dividendos nas cooperativas de crédito e os depósitos de poupança (*savings deposits*) nas demais instituições financeiras são expressos em uma taxa nominal anual (r) composta: trimestralmente ($n = 4$) para os depósitos de 90 dias, de 12 meses e de 5 anos; e semestralmente ($n = 2$) para os depósitos de 6 meses. O pagamento dos dividendos e depósitos é feito no período contratado. A legislação faz clara distinção entre composição e pagamento: o primeiro refere-se aos subperíodos do ano em que são realizados os créditos dos rendimentos sem que seja, necessariamente, permitido o saque; o pagamento significa a maturação do investimento no prazo contratado, sendo a liberação automática, normalmente, via crédito na conta de depósitos.

Na captação de recursos no mercado internacional, usam-se juros nominais; caso haja pagamento de juros por subperíodos inferiores a um ano, o cálculo é, sempre, linear. Em outras palavras: *annual percentage rate* é uma taxa de juros nominal.

Exercícios resolvidos

Exercício 4. Uma instituição financeira americana oferece depósitos a prazo, com composição e pagamento de juros no vencimento, para depósitos de seis meses de prazo, e com composição e pagamento de juros trimestralmente e no vencimento para os demais depósitos e fundos de renda fixa. A instituição, em anúncio publicado em novembro de 2005, indicou a taxa anual de dividendos, *annual percentage rate* (APR) e a taxa anual efetiva de rentabilidade, *annual percentage yield* (APY) da seguinte maneira:

a) taxa de dividendos de 1,60% sobre fundos de renda fixa à vista (*money market account*), equivalente a 1,61% *APY* (a diferença principal entre esses fundos e os depósitos à vista é que os primeiros têm rendimentos variáveis de acordo com as taxas de juros do mercado e não permitem o uso de cheque);
b) taxa de dividendos de 2,05% sobre depósitos de 90 dias de prazo, equivalente a 2,07% *APY*;
c) taxa de dividendos de 2,65% sobre depósitos de seis meses de prazo, equivalente a 2,67% *APY*;
d) taxa de dividendos de 3,15% sobre depósitos de 12 meses, equivalente a 3,19% *APY*;
e) taxa de dividendos de 3,75 % sobre depósitos de cinco anos, equivalente a 3,80% *APY*.

Verifique a integridade do anúncio (esta é uma questão real e não imaginada para efeitos didáticos), com aproximações para quatro e seis decimais na questão **a** e para seis decimais nas demais questões.

Solução:

O enunciado, depois de decifrada a publicidade, diz que o dividendo é composto trimestralmente (n = 4), e pago no vencimento, para os fundos de renda fixa à vista, para os depósitos de 90 dias, de 12 meses e de 5 anos; mas, é composto semestralmente (n = 2), e pago no vencimento, para os depósitos de 6 meses.

Os cálculos adiante foram feitos com a capacidade máxima da calculadora, mantendo os resultados parciais na calculadora até o resultado final.

Seja,

$$1 + i = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Em que i é a taxa efetiva ao ano, n é o número de composições por ano e r é a taxa nominal de dividendos, que pode ser composta de várias maneiras, conforme descrita no anúncio.

a) $1 + i = \left(1 + \frac{0,0160}{4}\right)^4 = 1,016096$

com ***f*6**, que aproximado para seis decimais, fornece 1,61 % *APY*

ou, usando ***f*4**, tem-se

$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}0160}{4}\right)^4 = 1{,}0161$

Ou, 1,61 % *APY*.

[Dessa forma, verifica-se que o mesmo resultado final foi achado pela calculadora com diferentes casas decimais iniciais, já que usou todos os algarismos disponíveis].

b) $1 + i = \left(1 + \frac{0{,}0205}{4}\right)^4 = 1{,}020658$ ou 2,07% *APY*.

c) $1 + i = \left(1 + \frac{0{,}0265}{2}\right)^2 = 1{,}026676$ ou 2,67% *APY*.

d) $1 + i = \left(1 + \frac{0{,}0315}{4}\right)^4 = 1{,}031874$ ou 3,19% *APY*.

e) $1 + i = \left(1 + \frac{0{,}0375}{4}\right)^4 = 1{,}038031$ ou 3,80% *APY*.

O anúncio está, assim, correto.

Observe que, se a taxa nominal dos depósitos de seis meses (item c) fosse composta trimestralmente, seria:

$\therefore 1 + i = \left(1 + \frac{0{,}0265}{4}\right)^4 = 1{,}026765$; ou 2,68% *APY*, que é ligeiramente maior que a taxa de composição semestral adotada pela instituição financeira.

Exercício 5. Considere um depósito em que os juros são pagos e reinvestidos à razão de 2,00% por trimestre. Calcule: **a)** a taxa de juros efetiva ao semestre, **b)** a taxa nominal de juros ao semestre, **c)** a taxa mensal de juros equivalente à taxa trimestral efetiva

Solução:

a) Taxa de juros efetiva ao semestre;

Usa-se ***f*4**, já que os juros dados têm quatro decimais. Tem-se 2% ao trimestre como a taxa efetiva trimestral (r)

$$S = (1 + i) = P\,(1 + r)^t \text{ para } P = 1$$

$$S = (1 + i) = P\ \ (1 + 0{,}02)^2 = 1{,}0404 \text{ ou } i = 0{,}0404,$$

$$\text{ou } i = 4{,}04\% \text{ ao semestre.}$$

b) Taxa nominal de juros;

0,02 x 2 = 0,04 ou 4% ao semestre.

c) Taxa mensal de juros equivalente à taxa trimestral efetiva:

Os juros equivalentes (q) ao mês (sendo três subperíodos de um mês em um trimestre) são:

$$1{,}02 = (1 + q)^3 \therefore q = 0{,}006623 \text{ ao mês ou } q = 0{,}0066$$

Assim, 4% ao semestre é a taxa nominal de juros, 2% ao trimestre é o juro composto ao trimestre, o juro efetivo é 4,04% ao semestre ou 0,66% ao mês. Ou, mais diretamente,

$$S = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{0{,}04}{2}\right)^{2x1} = (1 + 0{,}02)^2, \text{ desde que } t = 1.$$

Exercício 6. Um investidor faz um depósito a prazo, com um mínimo de três meses, juros de 8% a.a., com reinvestimento de juros e principal a cada três meses. Calcule a taxa de juros efetiva *(i)*, com quatro casas decimais.

Solução:

$\boldsymbol{r}$ = taxa de juros nominal = 8% a.a.

$\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{n}}$ =taxa de juros composta = $\frac{8}{4}$ = 2% ao trimestre

$\mathbf{1} + \boldsymbol{i} = \left(\mathbf{1} + \frac{r}{n}\right)^n = 1{,}02^4 = 1{,}082432$ ou

$\boldsymbol{i}$ = 8,24% a.a.

Resposta: 8,24% a.a

Exercício 7. Calcule o montante de um depósito de poupança de uma unidade monetária, a juros simples de 6% a.a., que são creditados, mensalmente, na conta de depósitos durante 12 meses.

Solução:

$$S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 1\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12x1} = 1{,}005^{12} = 1{,}061678 \text{ ou R\$ } 1{,}06,$$

ou seja, os valores são tão pequenos para os juros e para o principal que, na aproximação para centavos, o resultado de juros compostos fica igual ao dos juros simples. Se, entretanto, o principal fosse de R$ 100,00, os juros compostos seriam de R$ 6,17 e não os R$ 6,00 de juros simples, o que sugere que se deve deixar, em conta de poupança, quantia bem acima de R$ 1,00, digamos R$ 100,00, para ter o benefício dos juros compostos, quando então o saldo da conta seria R$ 106,17 e não os R$ 106,00 dos juros simples.

Exercício 8. Uma aplicação financeira de 12 meses de prazo rende 24%; calcule a taxa equivalente para uma aplicação com reinvestimento mensal de juros.

Solução:

$S = (1 + r)^t$, em que r é a taxa equivalente.

$$1{,}24 = (1 + r)^{12} \therefore (1 + r) = 1{,}018088 \text{ ou } 1{,}81\% \text{ a.m.}$$

1.7 Juros contínuos

Quando os juros são incorporados ao capital, temos juros contínuos a todo momento, isto é, instantaneamente. Banqueiros italianos, da época do Renascimento, descobriram que se os juros fossem incorporados ao capital, várias vezes ao ano, dariam um resultado muito melhor para o banqueiro do que a simples composição anual de juros.

Se os juros anuais ***r*** forem convertidos em juros por *n* subperíodos, à razão de $\frac{r}{n}$, isto é, a composição dos juros for feita por períodos inferiores a um ano (por exemplo, ***n*** = 2, semestral, ***n*** = 3, quadrimestral, ***n*** = 4, trimestral, ***n*** = 6, bimestral, ***n*** = 12, mensal, ***n*** = 365, diário), tem-se, ao final de ***t*** anos, como visto anteriormente, a equação **(3)**, repetida a seguir:

$$\mathbf{S} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \textbf{(3)}$$

Examinemos com cuidado **(3)**: a taxa de juros anual ***r*** é incorporada ao capital ***P*** à razão $\frac{r}{n}$, na qual *n* é o nº de vezes em que o juro é incorporado ao capital no período. A inclusão dos juros ao capital fornecendo um novo capital é chamada de **composição, capitalização ou reinvestimento de juros**. Para cada período de composição de juros, o banqueiro usa a taxa de juros $\frac{r}{n}$; em ***t*** anos há ***nt*** períodos de conversões.

Note que:

$$\boldsymbol{S} = P\,(1 + r)^{t} \qquad \textbf{(1)}$$

é, evidentemente, um caso especial de

$$\mathbf{S} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \textbf{(3)}$$

já que sua composição é realizada somente por um único subperíodo (*n* = 1).

Há um caso especial ainda mais interessante que os banqueiros renascentistas perceberam imediatamente. Se ***r*** = 1 (ou seja 100%) e o prazo é ***t*** = 1 (pode ser um ano, um trimestre, um século) tem-se, no limite da composição, para ***P*** = 1:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \textbf{(6)}$$

Existe um conflito permanente em **(6)**. À medida que n cresce, o resultado da potência aumentaria, mas $\frac{1}{n}$ decresce, e o resultado final é um número, que hoje se sabe, é irracional e simbolizado pela letra *e* que é, aproximadamente,

$$\boldsymbol{e} = 2{,}718281...$$

Sabe-se que os banqueiros italianos, conforme assinala Maor (1994), descobriram o resultado de *e* com uma aproximação adequada para os valores expressos em centavos de uma unidade monetária, que é o padrão relevante para as operações bancárias.

O limite de ***S*** quando ***n*** → ∞, como em **(6)**, somente foi calculado, com precisão matemática, muito tempo depois de ser usado no dia a dia, mediante utilização da fórmula do binômio de Newton, a saber:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\frac{1}{n^5} + \cdots + \left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

que fornece elegantemente:

$$= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$= 2 + 0{,}5 + 0{,}111111 + 0{,}027777 + 0{,}005555 + \ldots + \frac{1}{n!} = e = 2{,}718281\ldots$$

Apenas em 1665, Newton inventou a fórmula do binômio, vários séculos após o uso intenso de **(6)**, com aproximações, pelos renascentistas. Com auxílio dos logaritmos para facilitar os cálculos (já descobertos por Neper, em 1624), foi então possível usar a fórmula de Newton de 1655 para o cálculo de *e*. Observe que a soma dos cinco primeiros termos do binômio anterior nos dá 2,716667, ou seja, mais de 99% do valor de *e*.

Somente 72 anos após Newton, em 1737, Euler provou que *e* é um número irracional. Os matemáticos designaram o resultado de **(6)** como *e* em homenagem a Euler. O número racional mais próximo de *e* é $\frac{878}{323}$ ≅ **2,718266**. Demonstra-se, adiante, para uma taxa *r* contínua, com um principal $P = 1$ em um tempo $t = 1$, que:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r \qquad \textbf{(7)}$$

O número *e*, de acordo com **(6)**, é o resultado da acumulação de uma taxa de juros instantânea de 100% sobre um principal de 1, ou, ainda, é a taxa de juros efetiva de, aproximadamente, 172%, resultante de uma taxa de juros simples de 100%, quando composta *n* vezes e $\boldsymbol{n} \to \infty$, conforme se vê no quadro 1, adiante.

Quadro 1: Composição de juros de uma taxa r = 100%, em um principal de 1

n	$\frac{r}{n}$	$S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + i = 1 +$ taxa efetiva
1	1	2,000000
10	0,1	2,593742
100	0,01	2,704814
365	0,002739..	2,714567
10000	0,0001	2,718146
∞	0	2,718281... = e

No quadro anterior foram usados dois pontos (..) para $\frac{r}{n}$, cujo resultado foi armazenado pela calculadora para cálculos posteriores, respeitada sua capacidade, sem arredondamentos. Já o resultado ***S*** foi arredondado para se obter seis casas decimais. Utilizam-se três pontos (...) para indicar um número irracional, sem arredondamentos.

A questão de arredondamentos é bem visualizada para ***n*** = 365 e ***r*** = 1, como anteriormente. Com arredondamento para 6 decimais, tem-se $\frac{r}{n}$ = 0,002740. Após a limpeza das memórias da calculadora, se o número anterior for utilizado nos cálculos posteriores, o resultado será 2,714838, que é superior ao número correto, do quadro anterior, de 2,714567.

Então, a composição de 100% em 365 subperíodos representa 99,86%, isto é, $\left(\frac{2{,}714567}{2{,}718281}\right)$ da acumulação da taxa de juros instantânea de 100%. Para os que têm dificuldade em visualizar uma acumulação instantânea, é conveniente pensá-la como a acumulação de uma taxa de juros *r* em 365 subperíodos, cujo resultado é pouco inferior ao da taxa de juros contínua, principalmente para taxas pequenas, como se vê no quadro adiante.

Quadro 2: Composição de juros de uma taxa de juros nominal de 5% a.a. sobre um principal de 100 unidades monetárias

Composição	N° de subperíodos n	Taxa de juros por subperíodo $\frac{r}{n}$	$S = 100\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
Anual	1	0,05	105
Semestral	2	0,025	105,062500
Trimestral	4	0,0125	105,094534
Mensal	12	0,004166..	105,116190
Diário	365	0,000136..	105,126738
Infinita	$n \to \infty$	$\frac{0,05}{n}$	$100e^{0,05}$=105,127110

Assim, para efeitos práticos, uma taxa de juros **contínua** para pequenos percentuais (por exemplo, 5%) em um principal de 100, sem referência ao tempo, dá um resultado apenas levemente superior (105,127110) ao de juros **nominais** de composição diária (105,126738).

As taxas de juros instantâneas são muito usadas em Economia, devido à facilidade de cálculos que permite, principalmente quando se utiliza o cálculo infinitesimal. Não fazem referência ao tempo, mas podem ser, facilmente, transformadas em taxas efetivas (***i***) ao ano, ao trimestre ou ao semestre.

1.8 Desenvolvimento de $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{nt} = e^{xt}$

A demonstração, como assinala Simon-Blume (1994), é dada por substituição a partir de $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Define-se $m \equiv \frac{n}{x}$; se *m* é grande e tende para o infinito, *n* também tenderá para o infinito.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x, \text{ já que } \frac{x}{n} = \frac{1}{m} \text{ e que } n = mx,$$

tomando o limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x \therefore \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x = e^x$$

Se x^r é uma função contínua de *x;* e se $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de números que converge para x_0, então a sequência de potências $\{x_m{}^r\}_{m=1}^{\infty}$ converge para $x_0{}^r$.

Assim, se uma conta de depósitos cresce por *t* anos, a juros $\frac{x}{n}$ e $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^t = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^t = (e^x)^t = e^{xt},$$

então,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{nt} = e^{xt}$$

1.9 Equivalência entre juros contínuos, efetivos e nominais

Sejam:

r = taxa de juros nominal, vulgarmente chamada de simples.
$\frac{r}{n}$ = a taxa de composição de juros em cada subperíodo de um período de tempo
t = nº de períodos (tempo)
n = nº de subperíodos de composição existentes em 1 período
i = taxa de juros efetiva resultante de uma taxa de juros *r* composta *n* vezes por 1 período
x = taxa de juros instantânea resultante de uma taxa de juros nominal r
S = montante (capital mais juros).

Então, definem-se *r*, *i*, *x* como sendo taxas de juros equivalentes que geram um montante *S* para:

$$S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P(1+i)^t = \lim_{n\to\infty} S = Pe^{xt}$$

cancelando *P*, *t*

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n} = (1 + i) = ex \qquad \textbf{(8)}$$

tomando logaritmos neperianos, tem-se:

$$x = \ln(1 + i)$$

Muitas vezes, os resultados finais são apresentados em forma percentual, embora todos os cálculos sejam feitos com juros na forma unitária, utilizando-se as fórmulas básicas da matemática financeira. Conforme dito anteriormente, a Economia usa juros contínuos sem fazer referência a tempo. Outras vezes, no entanto, em operações financeiras, os juros informados são simplesmente juros nominais ao ano, em que o termo "ao ano" não é mencionado.

Os juros sem menção temporal são contínuos e raramente são utilizados pelos bancos. São muito utilizados em Economia. Assim, um empréstimo com custo instantâneo de 5%, a ser liquidado em prestações mensais, terá, na verdade, custo de 5,1271% a.a. e não o custo mais baixo, de 5,1162% a.a., como poderia pensar um devedor brasileiro que trabalha com juros compostos ao mês e não juros contínuos, já que pensaria somente em:

$$\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{12} = 1{,}051162$$

O cálculo correto de juros contínuos devidos é superior ao apontado anteriormente e é dado por

$$e^{0{,}05} = 1{,}051271$$

Do mesmo modo, um certificado de depósito (CD) de três meses de prazo com juros contínuos de 5% rende, efetivamente, 5,1271% a.a. Na verdade, os juros anuais de 5,1271% a.a. são os mesmos para os CD de três, seis e 12 meses, muito embora, erradamente, um investidor pudesse supor que os juros efetivos de um CD de três meses fossem 5,0945% a.a., já que faria o cálculo:

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^{4} = 1{,}050945$$

Ou seja, o investidor estaria supondo, de maneira equivocada, que receberia rendimentos com um juro mais baixo que o que efetivamente ocorre.

a) Cálculo de juros efetivos (*i*) e contínuos (*x*) a partir de juros nominais (*r*)

(1) Cálculo dos juros efetivos (*i*)

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} = 1+i$$

$$i = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} - 1$$

(2) Cálculo dos juros contínuos (*x*)

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} = e^{x}$$

ou, tomando logaritmos neperianos (ln)

$$x = n\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

b) Cálculo de juros efetivos (*i*) e nominais (*r*) a partir de juros contínuos (*x*)

(1) Cálculo de *i*

$$e^{x} = 1 + i$$

$$i = e^{x} - 1$$

Daí que muitas calculadoras eletrônicas têm, isoladamente, a tecla $\boldsymbol{e^x}$; o resultado de apertar a tecla $\boldsymbol{e^x}$ é $1 + i$, para cada taxa de juros contínuos x, expressa na forma unitária.

(2) Cálculo de *r*

$$e^{x} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}$$

$$e^{\frac{x}{n}} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$r = n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right)$$

c) Cálculo de juros nominais (*r*) e contínuos (*x*) a partir de juros efetivos (*i*)

(1) Juros nominais (*r*)

$$1 + i = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}$$

$$(1 + i)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{r}{n}$$

$$\frac{r}{n} = (1 + i)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$r = n\left[(1 + i)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$$

(2) Juros contínuos (*x*)

$$(1 + i) = e^{x}$$

tomando logaritmos neperianos,

$$x = \ln(1 + i)$$

Assim, a forma mais rápida de se obter os juros contínuos *x*, é, simplesmente, somar 1 aos juros efetivos em forma unitária (*i*) e tomar o logaritmo.

d) As teclas ***e***^{x}, **LN** e ***y***^{x} de uma calculadora

As teclas ***e***^{x} e **LN** das calculadoras dão o resultado imediato de e^x e do logaritmo neperiano de *x*, este último sempre tomado em sua forma unitária, isto é, sem percentuais. A tecla ***y***^{x} dá o resultado imediato da potência *x* (positiva ou negativa com **CHS**) sobre uma base *y*. No caso de uma raiz, a tecla **1/*x*** transforma imediatamente *x* em 1/*x* para extrair a raiz utilizando ***y***^{x}.

Exemplos de uso das teclas ***e***^{x}, **LN** e ***y***^{x}

(1) Para $x = 100\%$

$x = 1$, ou seja, aperta-se 1, **Enter** e aperta-se ***e***^{x}

$$e^x = e = 2{,}718282, \text{ daí que}$$

$$i = e^x - 1 = 1{,}718282 \text{ ou } 171{,}8282\%.$$

(2) Para $i = 171{,}8282\%$ ou $i = 1{,}718282$.

$$\text{Como } x = \ln(1 + i) = \ln(1 + 1{,}718282) = \ln 2{,}718282$$

Apertando-se **LN** para 2,718282 tem-se $x = 1{,}000000$ ou $x = 100\%$.

Ou seja, uma taxa contínua de $x = 100\%$ é o mesmo que uma taxa efetiva de $i = 172\%$, conforme já visto no quadro 1.

y^x para 2^3 tem-se 2, **ENTER** e 3, y^x, tem-se, imediatamente, $y^x = 8$
Para $\sqrt[2]{9} = 9^{\frac{1}{2}}$ tem-se 9 **ENTER**; 2, $\frac{1}{x}$ e y^x. O resultado final é 3.

A montagem dos quadros 3 e 4 adiante, baseados na equação (8), utilizou a tecla y^x, que fornece o resultado imediato da potência *x* sobre *y*, e as teclas **LN** e e^x.

Quadro 3: Equivalência percentual de juros nominais (ao ano e ao mês), efetivos ao ano, e contínuos

Juros simples (%)		Juros efetivos ao ano	Juros contínuos
Ao ano	Ao mês		
r	$\frac{r}{12}$	$i = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1$	$x = \ln(1 + i)$
24	2	26,8242	23,7632
36	3	42,5761	35,4706
48	4	60,1032	47,0649
60	5	79,5856	58,5482
71,3557..	5,9463..	100	69,3147
104,2848..	8,6904..	171,8282	100

Quadro 4: Equivalência percentual de juros contínuos, efetivos ao ano e juros nominais anuais compostos ao mês

Juros contínuos (%)	Juros efetivos ao ano	Juros nominais anuais compostos ao mês (%)
x	$i = e^{x} - 1$	$r = \left(e^{\frac{x}{12}} - 1\right)12$
2	2,0201	2,0017
3	3,0455	3,0038
4	4,0811	4,0067
5	5,1271	5,0104
10	10,5171	10,0418
100	171,8282...	104,2849

Exercício resolvido

Exercício 9. O que um depositante deve preferir: 5% contínuos ou 5% compostos mensalmente?

Não é necessário de fato calcular. Para a mesma taxa de juros, a composição contínua será superior a composição periódica. Vejamos:

5% compostos mensalmente fornecem $\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} = 1{,}051162$ ou seja, 5,1162%, mas $e^{0{,}05} = 1{,}051271$, ou seja, 5,1271%

Resposta: O depositante deve preferir sempre a taxa contínua em relação a outras taxas de quaisquer composições.

CAPÍTULO 2

Tabela Price

2.1 Conceitos básicos

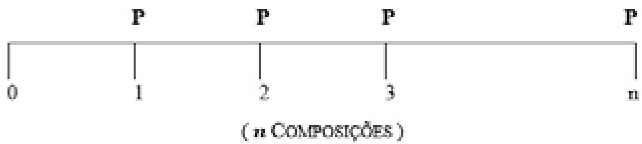
O Brasil é um dos poucos países do mundo que usa o nome **tabela Price** em honra a Richard Price (1723-1791), filósofo e pastor anglicano, que tinha, também, interesse em financiamentos, seguros de vida e planos de previdência, e que escreveu *Observations on Revisionary Payments* (1771), no qual introduziu sua tabela de matemática financeira, que mais tarde ganhou seu nome.

O **principal** é o capital inicial do financiamento; é, portanto, o valor líquido recebido pelo devedor, após o pagamento de comissões de abertura de crédito, despesas legais e impostos. Há que se distinguir, no financiamento do principal, dois componentes: **juros** e **amortização do principal** ou, simplesmente, **amortização**, que é a parcela deduzida do principal, reduzindo-o após o pagamento de juros.

Usa-se o termo **carência** para o período em que não há amortização do principal, fruindo-se, normalmente, o pagamento de juros sobre o principal.

A tabela Price, também chamada de sistema francês de pagamentos, é um sistema de pagamentos sucessivos tal que a soma de amortização e juros é constante para cada período, com incidência dos juros sobre o saldo devedor. Nos primeiros pagamentos, o saldo devedor é elevado. Em consequência, o pagamento de juros é alto e a amortização do principal é baixa, invertendo-se essa tendência à medida que o prazo do empréstimo se desenvolve.

Gráfico 1: Esquema de pagamentos de um principal C_0 em n prestações de P



A fórmula da tabela Price pode ser facilmente desenvolvida: seja um principal (ou valor presente) C_0 a ser amortizado, sem carência, em n pagamentos de P reais por período, com o primeiro pagamento devido no fim do período posterior à data do contrato, a uma taxa de juros i, por período. O valor presente C_0 quando tomado no final do contrato de n pagamentos é chamado de valor futuro e tem o símbolo C_n.

O valor presente dos n pagamentos é dado por:

$$C_0 = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}, \quad \text{ou}$$

$$C_0 = P\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \quad \textbf{(1)}$$

Efetuada a soma S_n da progressão geométrica entre colchetes, tem-se:

$$C_0 = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$ **(1')** e definindo

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad \textbf{(2)}$$

Em que $a_{\overline{n}|i}$ é uma notação francesa (onde se lê *ani* ou, vulgarmente, *a gôndola ni*, pela forma do ┐); devido às limitações de caracteres especiais no *Word* e da dificuldade em se digitar $a_{\overline{n}|i}$, pode-se usar, alternativamente, a forma *a¬n/i*.

$$C_0 = P\,a_{\overline{n}|i} \quad \textbf{(3')} \quad \text{e}$$

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} \quad \textbf{(3')}$$

Os termos entre colchetes da equação (1) são uma progressão geométrica, em que o primeiro termo, $\boldsymbol{a_1}$, é $\frac{1}{1+i}$, o último, a_n, é $\frac{1}{(1+i)^n}$, a razão q é $\frac{1}{(1+i)}$. A soma ***Sn*** dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$ tem-se que

a soma dos termos entre colchetes de (1) é:

$$S_n = \frac{\frac{1}{(1+i)^n}\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1-1-i}{(1+i)}} = \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}}}{\frac{-i}{(1+i)}}$$

$$= \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}} \times \frac{(1+i)}{-i}$$

Cancelando $(1 + i)$ em cima e embaixo e invertendo o sinal, tem-se:

$$S_n = \frac{1-(1+i)^n}{-i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = a_{\overline{n|}\, i}$$

A utilização de $a_{\overline{n|}\, i}$, também chamado de fator de recuperação de capital, segue as mesmas regras básicas anteriores: ***i*** é sempre expresso na forma unitária, e ***i*** e ***n*** devem estar na mesma unidade de tempo. Assim, se ***i*** for ao mês, *n* deve ser o número de meses, gerando, portanto, prestações mensais. Caso ***i*** seja por ano, ***n*** deverá ser em número de anos e ***P*** será a prestação anual. Em caso de prestação trimestral, ***i*** será a taxa ao trimestre e ***n*** será o número de trimestres, etc.

2.1.1 Definição de Progressão Geométrica

Denomina-se progressão geométrica (PG) uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$, na qual $a_n = a_{n-1}\, q$, onde q é uma constante.

A soma dos *n* primeiros termos é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad \textbf{(1)}$$

multiplicando-se por ***q***

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \cdots + a_{n-1} q + a_n q \qquad \textbf{(2)}$$

subtraindo **(1)** de **(2)** e rearranjando, tem-se:

$$S_n q - S_n = -a_1 + (a_1 q - a_2) + (a_2 q - a_3) + (a_3 q - a_4) + \cdots + (a_{n-1} q - a_n) + a_n q$$

onde os termos entre parênteses são nulos.

Então, $S_n(q-1) = a_n q - a_1$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Caso a PG seja decrescente e tenda ao infinito ($|q| < 1$ e $n \to \infty$), o que leva $a_n \to 0$ e consequentemente $\lim_{n\to\infty} a_n q = 0$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo de PG: títulos perpétuos

Uma aplicação interessante da PG decrescente e infinita é o *consol*, título de renda fixa perpétuo emitido pela Inglaterra vitoriana, que paga somente J de juros a partir do 1º ano, sobre um principal de 100, sem resgate.

Logo,

O preço atual do *consol* (P) é o valor atual do fluxo de juros J:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = J\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Já que é uma PG decrescente e $n \to \infty$, em que i é a taxa de juros de lançamento do título perpétuo, que é a taxa de juros do mercado na ocasião do lançamento, e q é a razão; $\therefore\ q = \frac{1}{1+i} = a_1$. Ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1+i}{i} = \frac{1}{i} \therefore P = \frac{J}{i}$$

para $J = 1$,

$$P = \frac{1}{i} \quad \textbf{(4)}$$

Assim, o preço à vista de um *consol* que paga juros anuais perpétuos de 1 é inversamente proporcional à taxa de juros de mercado. De modo geral, o preço é inversamente proporcional aos juros do título, com modificações na fórmula devido aos detalhes da periodicidade de pagamento de juros e do prazo do título. Os juros dos títulos de renda fixa antigos eram pagos mediante destaque de um papel apropriado acoplado à cautela por linhas picotadas, chamado de cupom, que até hoje é conhecido por esse nome.

Por exemplo, um título de valor nominal de 100 que paga juros de 3% a.a. uma vez por ano (ou seja $J = 3$), se a taxa de juros de mercado for $i = 3\%$ a.a., terá como preço de emissão e também preço de mercado P:

$$P = \frac{3}{0{,}03} = 100$$

Se, entretanto, a taxa de juros do mercado subir para $i = 4\%$ a.a., o preço do *consol* no mercado será de $P = \frac{3}{0{,}04} = 75$

Ou seja, somente com um preço de 75, os juros de 3 darão uma taxa de juros de 4% a.a., já que

$$\frac{3}{75} = 0{,}04$$

No início de 2004, diversas empresas brasileiras lançaram com sucesso, no mercado internacional, títulos perpétuos em moeda nacional, com liquidação em moeda estrangeira ao câmbio do dia.

2.2 Amortização na tabela Price

Em muitos casos é necessário conhecer, do valor da prestação, as parcelas que se referem a **juros** e **amortização**. Quase sempre as razões são de ordem tributária, uma vez que muitos países permitem deduzir do lucro tributável das empresas, ou da renda tributável das pessoas físicas, a parcela de juros. Outras vezes o devedor deseja pagar antecipadamente sua dívida, e para tanto, o saldo devedor deve ser conhecido.

No caso de pagamentos financeiros, a **prestação** é dividida em **amortização** e **juros**. Em relação a bens, dão-se os nomes de **serviço de capital** aos **juros**, **depreciação** à **amortização**. Observe-se que o valor da depreciação é reduzido no início do processo – já que a maquinaria é nova – aumentando, sucessivamente, com o número de prestações. Assim, a tabela Price tem sentido econômico para os bens físicos, adicionalmente a seu sentido financeiro.

É possível separar em $a_{\overline{n}|\,i}$ as parcelas de amortização e juros.

Definindo-se:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|\,i}} = a^{-1}_{\overline{n}|\,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \qquad \textbf{(2')}$$

Se

$$C_0 = P\, a_{\overline{n}|\,i}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}} = C_0\, a^{-1}_{\overline{n|}\,i}$$

Se $\boldsymbol{C}_0 = 1$

$$\boldsymbol{P} = a^{-1}_{\overline{n|}\,i}$$

Então, para um principal de 1, o valor da prestação é simplesmente igual a $a^{-1}_{\overline{n|}\,i}$ e por definição, a amortização é o resíduo em $a^{-1}_{\overline{n|}\,i}$, após o pagamento de juros. Manipulando-se $a^{-1}_{\overline{n|}\,i}$, de modo a separar-se o que é *i*:

$$a^{-1}_{\overline{n|}\,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \frac{i(1+i)^n + i - i}{(1+i)^n-1} = \frac{i}{(1+i)^n-1} + \frac{i(1+i)^n - i}{(1+i)^n-1} =$$

$$\frac{i}{(1+i)^n-1} + \frac{i[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n-1} = \frac{i}{(1+i)^n-1} + i$$

Define-se

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad \textbf{(5)}$$

que também será escrito, pelas mesmas dificuldades anteriores, $s_{\overline{n|}\,i}$, e poderá ser escrito como *s¬n/i*, daí que

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{i}{(1+i)^n-1}, \qquad \textbf{(5)}$$

em que $s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$ é denominado fator de depreciação ou de amortização. Daí que

$$a^{-1}_{\overline{n|}\,i} = s^{-1}_{\overline{n|}\,i} + i \qquad \textbf{(6)}$$

(6) permite calcular o valor da amortização em uma prestação.

Assim, para:

$$P = C_0 \; a^{-1}_{\overline{n|}\,i} \quad \text{e} \quad a^{-1}_{\overline{n|}\,i} = s^{-1}_{\overline{n|}\,i} + i$$

o valor da *k-ésima* amortização (Z_k) pode ser calculado por meio de $s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$, desde que obedecidas as seguintes particularidades:

a) O valor do $s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$ deve multiplicar o saldo devedor do período anterior (símbolo C_{n-1});

b) O número de períodos utilizados para o cálculo do valor da *k-ésima* amortização (Z_k) é dado pela diferença entre o número de prestação cuja amortização se quer achar, ou seja, para a *k-ésima* amortização de *n* pagamentos.

$$Z_k = C_{k-1} \; s^{-1}_{\overline{n\text{-}k+1|}\,i}$$

Ou,

$$Z_k = \frac{C_{k-1}}{s_{\overline{n\text{-}k+1|}\,i}} \qquad \textbf{(7)}$$

Assim, por exemplo, desejando-se achar o valor da amortização nº 3 (Z_3) de um empréstimo amortizável em 10 pagamentos a i% de juros, tem-se:

$$n - k + 1 = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$Z_3 = C_2 \; s^{-1}_{\overline{8|}\,i}$$

onde C_2 = saldo devedor no final do 2° período

No caso da primeira prestação (Z_1) tem-se:

$$Z_1 = C_0\, s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$$

onde C_0 é o principal e n – k + 1 = n – 1 + 1 = n

A demonstração de **(7)** é algo complexo, por indução matemática, mas pode ser comprovada, facilmente, para a 1ª amortização, definida como resíduo dos juros sobre a prestação:

$$P_1 = Z_1 + iC_0$$

$$Z_1 = P_1 - iC_0 = C_0\, a^{-1}_{\overline{n|}\,i} - iC_0 = C_0\left[a^{-1}_{\overline{n|}\,i} - i\right] = C_0\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i\right] =$$

$$= C_0 i\left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - 1\right] = C_0 i\,\frac{(1+i)^n - (1+i)^n + 1}{(1+i)^n - 1} = C_0 i\,\frac{1}{(1+i)^n - 1} =$$

$$= C_0\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} = C_0\, s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$$

$$Z_1 = C_0\, s^{-1}_{\overline{n|}\,i}$$

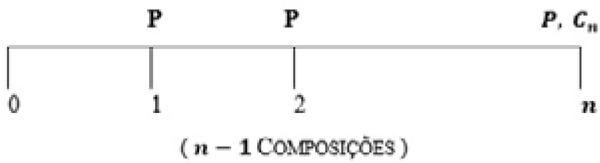
para a 1ª prestação, e assim, sucessivamente, para as demais amortizações.

2.3 Depósitos periódicos

2.3.1 Regra geral de acumulação

Antes de examinar o cálculo do saldo devedor de uma prestação, é conveniente discutir os depósitos periódicos, também chamados de anuidades periódicas. O termo anuidade deve ser entendido como depósitos por período, que podem ser anos, trimestres, etc. É comum a prática de se depositar P reais em cada período à taxa i de juros, por período, a fim de se obter um montante desejado (C_n) ao final de um período n.

Gráfico 2: Esquema de n depósitos de P para formar um montante C_n



Na sistemática das anuidades, existe uma data zero em que é celebrado o contrato, sendo o primeiro depósito realizado no final do primeiro período do contrato. Assim, se há n depósitos, a acumulação de juros se dá somente por n – 1 períodos e **não por *n* períodos,** já que o último depósito não rende juros. Tal sistemática pode parecer artificial, mas tem uma razão de ser: a fórmula básica de depósitos deve guardar relação com a liquidação de empréstimos pela tabela Price, em que a primeira prestação somente é paga no período posterior após a celebração do contrato. Caso haja pagamento de uma prestação ou de uma entrada na data de celebração de um crédito, tais valores são deduzidos do principal, diminuindo-o, já que não se trata de financiamento. Por exemplo, uma dívida de 100 que é paga em três “prestações” mensais de 40, em que o primeiro pagamento é devido quando da celebração do contrato, significa, na verdade, um principal de 60, que será financiado em duas prestações de 40, sendo que a primeira vence em um mês, a partir da data do contrato. Assim, adaptações das fórmulas básicas podem ser realizadas facilmente, quer para empréstimos, quer para depósitos.

Quadro 5: Soma das sucessivas parcelas de P,
de n depósitos periódicos, a juros compostos

Período	Total
0	0
1	P
2	$P + P(1 + i) = P[1 + (1 + i)]$
3	$P + P[1 + (1 + i)][1 + i] = P[1 + (1 + i) + (1 + i)^2]$
n	$P[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)n^{-1}]$

A soma em n períodos é uma PG, em que o primeiro termo é 1, a razão $(1 + i)$, e o último termo é $(1 + i)^{n-1}$;

calcula-se a soma

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i) - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n|}i}$$

$$s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \textbf{(5)}$$

Note que:

$$s_{\overline{n-1|}i} = s_{\overline{n|}i} + (1 + i)^{n-1}$$

Já que:

$$s_{\overline{n|}i} = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{n-1}$$

Assim,

$$C_n = P\, s_{\overline{n}|i} \qquad \textbf{(8)}$$

já que C_n é a contrapartida de C_0, como mostra a equação:

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

e dado que

$$C_n = P\, a_{\overline{n}|i}$$

e que

$$C_n = P\, s_{\overline{n}|i}$$

Temos,

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

$$P\, s_{\overline{n}|i} = P\, a_{\overline{n}|i}\, (1 + i)^n$$

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\, (1 + i)^n \qquad \textbf{(9)}$$

Agora se torna fácil a interpretação das gôndolas: $s_{\overline{n}|i}$ é o valor futuro de ***n* depósitos de 1, enquanto** $a_{\overline{n}|i}$ **é o valor presente de *n* pagamentos de 1;** em ambos os casos, o primeiro depósito ou pagamento é devido no primeiro período posterior à data do contrato. Então, é possível transformar o valor atual $a_{\overline{n}|i}$ no valor futuro $s_{\overline{n}|i}$, simplesmente, pela aplicação dos juros compostos sobre $a_{\overline{n}|i}$.

$s_{\overline{n}|i}$ é utilizado exaustivamente na tabela Price para o cálculo do saldo devedor. É necessário atentar para as diferenças entre **(6)**, que define a parcela de amortização em uma prestação, e **(9)**, que define a relação entre valor presente e valor futuro de um esquema de pagamentos.

No anexo desta obra, são apresentadas, para taxas de juros de 2,5%, 3%, 3,5%, 4% e 4,5% e *n* variando de 1 a 50, 60, 70, 80, 90 e 100, três tabelas clássicas:

Tabela 1, para $(1 + i)^n$, isto é o valor futuro, no período *n*, de 1 de valor atual

Tabela 2, para $a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ isto é, valor atual de *n* pagamentos de 1

Tabela 3, para $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, isto é, valor futuro de *n* depósitos e/ou pagamentos de 1

A tabela 1 no anexo mostra, imediatamente, a força dos juros compostos. Para i = 2,5% e n = 100 (ou seja, 8 anos e 4 meses), um valor de l, de hoje, será equivalente a 11,8 daqui a 100 meses, mas, se a taxa de juros aumentar para 4,5%, o valor futuro sobe de 11,8 para 81,5.

A tabela 2 no anexo mostra, imediatamente, o valor atual de *n* pagamentos de 1. Por exemplo, para i = 2,5% a.m. e n = 100 meses, o valor atual é de apenas 36,6, que se reduz ainda mais para 21,9 se os juros aumentarem para 4,5% a.m.

A tabela 3 no anexo é a mais radical de todas. Se uma acumulação de 1 é feita em 100 meses, se os juros forem de 2,5% a.m., o resultado será 432,5, que aumentaria ainda mais fortemente para 1790,8 se os juros subissem para 4,5% a.m. É impressionante a força dos juros compostos.

Sugere-se que todos os estudantes de matemática financeira memorizem os conceitos das duas gôndolas (ou cantoneiras) e suas fórmulas. Poupam tempo. É o equivalente, em aritmética, à tabuada. Na prática, quando a taxa de juros é conhecida, é mais rápido ter-se em mãos as três tabelas financeiras básicas do que usar uma calculadora, já que a taxa de juros é dada e os prazos comuns são conhecidos, para se determinar a prestação a ser paga. Esse é o caso de revendedores de automóveis, de departamentos de crédito varejista, etc.

2.3.2 Regras específicas de acumulação

Muitas vezes, em um problema de acumulação de capital, com n depósitos periódicos de P, o último capital é depositado em n e rende juros, até $n + 1$.

Gráfico 3: Esquema de n depósitos de P, a partir de $n = 1$, para formar um montante $C_n\,(1 + i)$

Isto é, se o último capital, P, é depositado em n e todos os capitais serão retirados em $n + 1$, há, portanto, n composições. Ou seja, deseja-se $C_n\,(1 + i)$ e então:

$$C_{n+1} = C_n(1 + i) = P\, s_{\overline{n|}\,i}\,(1 + i) \qquad \textbf{(10)}$$

O esquema de depósitos anteriormente citado também serve para ilustrar a situação comum vista no gráfico 4 em que o depositante, no ato de contratar com uma instituição financeira depósitos regulares de P em n depósitos, concretiza seu primeiro depósito: tudo se passa como se o tempo *0* fosse simultâneo com o tempo *1*, que é o primeiro período de uma série de depósitos; esse período se prolonga até o período $n-1$ e os depósitos são sacados somente no período n. Assim, diferentemente da regra geral que só tem $n-1$ composições, tem-se n composições de um valor de n depósitos. Assim, pelo gráfico 4, iniciando-se no período [zero] e terminando em $n-1$, com acumulação até n. A acumulação é dividida em quatro partes:

a) Pela regra geral: valor em $n-1$ com início em 1 e término em $n-1$: $\dfrac{s}{n-1\rceil i}$

b) Valor em $n-1$ do pagamento feito em zero = $(1+i)^{n-1}$

c) Valor total em $n-1$

$$\frac{s}{n-1\rceil i} + (1+i)^{n-1} = \frac{s}{n\rceil i}$$

d) Valor em n:

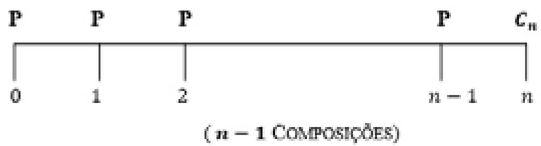
$$\frac{s}{n\rceil i} = (1+i)^{n}$$

Daí que:

$$C_n = P\,\frac{s}{n\rceil i}\,(1+i) \qquad \textbf{(11)}$$

Assim, o gráfico 4 é a justaposição do gráfico 3, já que os esquemas de pagamentos dos gráficos 3 e 4 produzem o mesmo resultado para C_{n+1} e C_n respectivamente, já que ambos têm n composições.

Gráfico 4: Esquema de n depósitos de P, a partir de n = 0, para formar um montante C_n



A situação anteriormente citada é muito comum nos depósitos em planos de previdência privada, quer em fundos de pensão, quer em instituições financeiras. A situação é explorada neste capítulo no exercício nº 9, para empréstimos, e no exercício nº 11, para depósitos. Para o melhor entendimento, veja-se o exame atento do item 2.5, Prestações e depósitos pagos no início do contrato.

2.4 O uso de calculadora eletrônica programada, HP–12C e calculadora Casio

Nas calculadoras, usa-se as teclas ***PV*** (isto é, valor atual, *present value*), ***PMT*** (prestação e/ou pagamento, *payment)*, ***FV*** (valor futuro, *future value),* no lugar de C_0, P e C_n. Nas calculadoras, a tecla ***i*** é utilizada para os juros expressos em percentuais e a tecla ***n***, para determinar o número de períodos, devendo juros e períodos estar na mesma unidade de tempo (por exemplo, juros ao mês e número de períodos em meses).

Os cálculos pela HP–12C, ou similar, são feitos de acordo com as seguintes convenções:

(1) A prestação P é paga no final (***end***) do período. Digita-se a tecla ***g*** para indicar que o significado da tecla deve ser lido em sua parte inferior, em azul. A tecla ***end*** indica que os pagamentos são feitos no final do período. A tecla ***end***, portanto, é ideal para os cálculos da tabela Price e de todos os outros nos quais o primeiro pagamento é feito no período posterior a data do contrato. A tecla ***Amort*** – que é utilizada para cálculos de juros e amortizações acumuladas – está em laranja e necessita que ***f*** seja previamente apertada;

(2) A taxa de juros i é expressa em forma percentual e assim deve ser colocada na máquina. Na apresentação de resultados comerciais, usa-se uma taxa de juros, na forma percentual, com duas casas decimais;

(3) Usa-se ao máximo a capacidade de memória da calculadora, evitando-se, sempre que possível, aproximações, que, se necessárias, devem ser tomadas com seis decimais (por tradição) em todos os cálculos, aproximando-se mentalmente o resultado desejado para duas casas decimais quando da apresentação final, dada a inexistência de unidade monetária inferior ao centavo;

(4) Os valores que dissipam o principal são negativos, que é o caso das prestações e de seus componentes, dos juros e da amortização. Os demais componentes são positivos.

Quadro 6: Fórmulas e teclas básicas da calculadora

	Neste texto	HP–12C
a)	$C_n = C_0(1+i)^n$	$\boldsymbol{FV} = \boldsymbol{PV}(1+i)^n$
b)	$C_0 = P\, a_{\overline{n}\rceil\, i}$	$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{PMT}\, a_{\overline{n}\rceil\, i}$
c)	$C_n = P\, s_{\overline{n}\rceil\, i}$	$\boldsymbol{FV} = \boldsymbol{PMT}\, s_{\overline{n}\rceil\, i}$

Em que:

PV (Present Value) = C_0 = Valor atual

FV (Future Value) = C_n = Valor futuro

PMT (Payment) = *P* = Prestação ou depósito

n e ***i*** = número de períodos e juros percentuais, na mesma unidade de tempo

O uso da calculadora é simples. A limpeza da calculadora deve ser feita previamente, com a tecla ***f*** seguida de ***FIN***, esta última, a tecla financeira *(finance*), ou ***fREG*** (*registers*) para limpar todos os registros. O modo deve ser ***end***. As teclas principais da calculadora ***n***, ***i***, ***PV***, ***PMT***, ***FV*** são utilizadas de modo que no visor não devem constar as letras ***f*** e ***g*** (este é um erro muito comum dos operadores: muitas teclas da HP–12C têm três significados ou modos, o normal, o ***f*** na cor laranja e o ***g*** na cor azul: todo cuidado é pouco). Dados três dos cinco itens financeiros da calculadora – ***n***, ***i***, ***PV***, ***PMT***, ***FV***– os outros dois podem ser calculados apertando-se a tecla apropriada. Usa-se, normalmente, ***PMT*** com o sinal negativo, já que representa saída de recursos, o que implica que ***PV*** e ***FV*** sejam positivos; a tecla ***CHS*** (*change signal)* troca o sinal quando necessário.

O uso da calculadora facilita todos os cálculos. Em relação ao quadro anterior, dados *i* e *n*:

a) $(1 + i)^n$ **= *FV*,** se ***PV*** = 1 em ***FV*** = ***PV*** $(1 + i)^n$, o que permite calcular a tabela I, do anexo;

b) $a_{\overline{n|}\,i}$ = ***PV,*** se ***PMT*** = –1 em ***PV*** = ***PMT*** $a_{\overline{n|}\,i}$, para a tabela II; e

c) $s_{\overline{n|}\,i}$ = ***FV***, se ***PMT*** = –1, em ***FV*** = ***PMT*** $s_{\overline{n|}\,i}$, o que permite calcular a tabela III.

Os valores de $(1 + i)^n$, $a_{\overline{n|}\,i}$, $s_{\overline{n|}\,i}$ e seus inversos podem ser facilmente tabelados a partir de uma calculadora. É recomendável, no entanto, que o profissional especializado tenha uma tabela impressa, como a Lloyd & Smail (1953), para familiarizar-se com a tendência das principais gôndolas e obter sensibilidade para o cálculo mental e aproximado dos juros. Além disso, é bom checar se a calculadora está funcionando bem, já que qualquer pequena sujeira na máquina polui os circuitos eletrônicos e ocasiona resultados errados. A fonte principal de erros dos resultados das calculadoras está na ausência de limpeza dos programas das calculadoras, que se não limpas, repetem os mesmos dígitos colocados anteriormente.

Algumas calculadoras, como a HP–12C, têm, também, um dispositivo em que o primeiro depósito é feito na data do contrato e o último, no penúltimo período do contrato, com rendimento de juros até o término do contrato. Usa-se a convenção ***beg*** (abreviatura de ***beginning***, início), para tanto. Essa sistemática não é recomendada aqui, uma vez que a constante mudança entre ***end***, que é usado para empréstimos, e ***beg***, usado para depósitos, ocasiona erros acidentais. É melhor trabalhar sempre com ***end***, que, além de tudo, força o profissional a manter claros os conceitos utilizados. Observe-se que a palavra ***beg*** referindo-se ao modo de operação aparece no visor da calculadora, já que é o modo incomum, raro em matemática financeira. A convenção ***end*** não aparece no visor, dado ser o modo habitual.

Nos problemas de matemática financeira, é importante ter uma ideia preliminar do resultado final, já que erros de digitação são muito comuns e podem dar resultados absurdos. Uma das formas habituais de se obter uma prévia do resultado é supor juros nulos ou, ainda, fazer, mentalmente, um cálculo rápido com juros simples, para se ter ideia da grandeza do número que vai ser encontrado.

2.4.1 Calculadora Casio fx – 82MS

A calculadora é das mais populares, o que já é razão suficiente para que seja citada aqui; é uma substituta da HP–12C, mesmo que parcial, no que diz respeito à resolução de alguns problemas envolvendo rendas.

Em termos de preços trata-se de uma calculadora bem mais acessível que a HP–12C, não tirando o mérito da HP–12C que é simplesmente a referência para os resultados que encontraremos nos problemas resolvidos aqui. Até onde se sabe, a diferença de preços reflete a grande superioridade na qualidade dos resultados encontrados pela HP–12C.

É possível encontrar bons resultados, muitas vezes resultados idênticos entre as duas calculadoras para certo número de casas decimais, para as incógnitas dos exercícios que envolvem rendas.

As equações mais comuns destes tipos de exercício são:

$$C_0 = P\, a_{\overline{n|}\,i} \quad \textbf{(1)}$$

$$P = C_0\, a^{-1}_{\overline{n|}\,i} \quad \textbf{(1')}$$

$$C_n = P\, s_{\overline{n|}\,i} \quad \textbf{(2)}$$

$$P = C_n \, s^{-1}_{\overline{n|}\, i} \quad \textbf{(2')}$$

E em adição uma relação que nos será útil:

$$s_{\overline{n|}\, i} = a_{\overline{n|}\, i} \, (1 + i)^n \quad \textbf{(3)}$$

Editar na Casio fx-82MS os termos $a_{\overline{n|}\, i}$ e $s_{\overline{n|}\, i}$ é o desafio desta seção.

Na Casio não há teclas ***i*** ou ***n*** como na HP–12C, porém, há algumas teclas que podem armazenar estes valores. Neste box serão utilizadas as teclas ***A*** e ***B*** para armazenar, consecutivamente, os valores de ***i*** e ***n***; e o símbolo ^ para indicar a potência. Para zerar a máquina, deve-se apertar ***SHIFT***, ***CLR*** e três seguidas de = . ***AC***.

Na Casio muitas teclas têm funções e subfunções, as funções escritas em branco são acessadas apenas pressionando-se a tecla. Quanto às outras subfunções que se apresentam acima da tecla, estas podem ser acessadas com o prévio pressionamento das teclas ***SHIFT*** ou ***ALPHA***, consecutivamente para a cor amarela e a cor vermelha, situadas no canto esquerdo superior da calculadora.

Para encontrar $a_{\overline{n|}\, i}$ para n = 36 e i = 4% na Casio fx-82MS:

Primeiro liga-se a calculadora na tecla ***ON***.

Para adicionar o valor de i = 4% em ***A*** digita-se:

0.04*SHIFTSTOA*

Ou seja, digita-se o valor da taxa na sua forma decimal; pressiona-se ***SHIFT*** para acessar ***STO*** (*store*, que é igual a armazenar), pressiona-se ***A***.

No visor surgem:

0.04 → ***A*** e **0.04**

O que indica que a taxa está armazenada em ***A***.

Para adicionar n = 36 em ***B*** pressiona-se ***AC*** para limpar o visor, e digita-se o seguinte comando:

36*SHIFTSTOB*

Que é similar ao procedimento anterior.

No visor surgem:

36 → ***B*** e **36**

O que indica que o valor do período está armazenado em ***B***.

Escolheu-se ***A*** para representar a taxa em sua forma decimal e ***B*** para representar o período: reescrevendo $a_{\overline{n}|i}$ na linguagem da Casio:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = (((1 + A)\text{^}B\,) - 1) \div (A \times (1 + A)\text{^}B\,)$$

Note que,

$$(1+i)^n - 1 = ((1+A)^\wedge B\,) - 1$$

É necessário que se coloquem os termos na ordem exata como são mostrados para se obter no visor a fórmula de $a_{\overline{n|}\,i}$.

Pressiona-se a tecla =, o que resulta, partindo do pressuposto que estão armazenados os valores anteriormente citados em ***A*** e ***B***, em:

$$a_{\overline{36|}\,4} = 18.90828195$$

Aproximando-se o resultado para sete decimais obtém-se 18.9082820, idêntico ao encontrado na tabela financeira II.

O leitor pode estar se questionando quanto à facilidade do processo, mas na prática, com o tempo $a_{\overline{n|}\,i}$ passa a ser digitado muito rapidamente. A tecla ***REPLAY*** (repetir) permite replicar a última equação escrita na máquina.

Digamos que agora deseja-se $a_{\overline{12|}\,2,5}$

Primeiramente o visor é limpo pressionando-se ***AC***; adiciona-se o novo valor de *i*, pelo comando:

0.025*SHIFTSTOA*

Tecla-se novamente ***AC*** e adiciona-se o novo valor do período pelo comando:

12*SHIFTSTOB*

O que fazer agora? Reescrever o $a_{\overline{n|}\,i}$? Não!

$a_{\overline{n}|i}$ foi escrito anteriormente e pode ser acessado teclando-se ***REPLAY*** duas vezes para cima e aparecerá a equação do exemplo anterior. Ao se pressionar a tecla **=** aparecerá o resultado para os novos valores de taxa e período memorizados, que é:

$$a_{\overline{12}|2,5} = 10.2577646$$

Precisamente igual ao valor encontrado na tabela financeira II.

Na tecla ***REPLAY*** as setas verticais permitem que se acessem todos os cálculos feitos até então. Sempre que pressiona-se a tecla ***AC*** dá-se início a uma nova expressão matemática.

Conclusão, não é necessário reescrever o termo $a_{\overline{n}|i}$, bastando apenas substituir os valores de taxa e período para então acessar a equação pela tecla ***REPLAY***. E quanto ao $s_{\overline{n}|i}$?

Suponha os mesmo dados do problema, porém, agora deseja-se saber o valor futuro, ou seja, $a_{\overline{12}|2,5}$.

O $s_{\overline{n}|i}$ pode ser escrito na Casio da seguinte forma:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (((1 + A)\text{^}B) - 1) \div A$$

No entanto, dada a equação $S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ **(3)**, pode-se chegar a esta fórmula multiplicando-se $a_{\overline{n}|i}$ por $(1 + i)^n$ na Casio. Ao se acessar a equação que representa o $a_{\overline{n}|i}$ pela tecla ***REPLAY***, digita-se depois o seguinte comando:

× (1 + A) ^ B

Ao apertar = tem-se 13.79555297, que aproximado dá 13.7955530, valor idêntico ao da tabela financeira III.

É possível encontrar o mesmo resultado escrevendo a fórmula para $s_{\overline{n}|i}$ citada anteriormente, porém, até então parece ser bem mais simples fazer uso da tecla ***REPLAY*** do que escrever tal equação.

Para alcançar as inversas relativas à (1') e (2')

Após inserir taxa e período e construir a equação e o resultado de $a_{\overline{n}|i}$, basta pressionar a tecla $\boldsymbol{x}^{-1}$ para se obter o resultado de $a^{-1}_{\overline{n}|i}$. O mesmo se verifica para $s_{\overline{n}|i}$.

Dessa forma podem ser resolvidas todas as equações para as variáveis *PV*, *FV* e *PMT* com o uso da Casio fx-82MS.

Exercício resolvido

Exercício 1. Considerando um financiamento de 100.000,00 pago em 100 prestações a uma taxa de 4% ao período, calcule o valor da prestação. (Este exercício também foi resolvido de maneira prática, na página 162)

Deseja-se $P = C_0 \, a^{-1}_{\overline{n}|i}$ onde $C_0 = 100{,}000.00$

De início acha-se $a_{\overline{100}|4}$

Ao adicionar-se o valor de i = 4% em ***A***:

0.04*SHIFTSTOA*

No visor surge:

$$\mathbf{0.04} \to \boldsymbol{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{0.04}$$

Após pressionar a tecla ***AC*** para limpar o visor, adiciona-se valor de $n = 100$ em ***B*** digitando-se o seguinte comando:

100*SHIFTSTOB*

No visor surge:

$$\mathbf{100} \to \boldsymbol{B} \quad \text{e} \quad \mathbf{100}$$

O visor é limpo com a tecla ***AC*** e então a programação de $a_{\overline{n}|i}$ é feita da forma a seguir:

$$a_{\overline{n}|i} = (((1 + A)\hat{}B) - 1) \div (A \times (1 + A)\hat{}B)$$

Pressionando-se a tecla = tem-se 24.504999, e posteriormente ***x*–1** tem-se:

$$a_{\overline{n}|i}^{-1} = 0{,}0408080$$

Multiplica-se este valor pelo principal, pressionando:

×100000

para então pressionar **=**, o que, aproximado para dois decimais, resulta em:

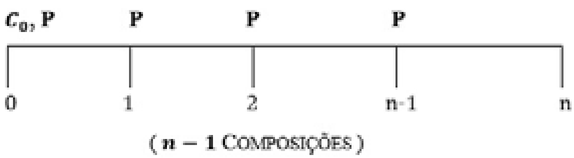
$$P = 4080{,}80$$

Observa-se que o resultado encontrado para valor da parcela é idêntico ao observado na HP–12C.

2.5 Prestações e depósitos pagos no início do contrato

Em empréstimos de curto prazo, é comum que o primeiro pagamento seja pago no ato de assinatura do contrato, o que torna necessário adaptar a fórmula básica da tabela Price, já que esta prevê que a primeira prestação seja paga no período posterior à assinatura do contrato. Quando um crédito de C_0 é pago em n pagamentos de P, vencendo-se o primeiro na data do contrato, na verdade o principal é $C_0 - P$, que vai ser liquidado em $n - 1$ prestações, como se dá no gráfico 5, a seguir.

Gráfico 5: Esquema de n pagamentos de P a partir de $n = 0$, de um principal de C_0



$$C_0 - P = P\, a_{\overline{n}|i} \text{ , daí que,}$$

$$C_0 = P\left(1 + a_{\overline{n-1}|i}\right),$$

$$P = \frac{C_0}{1 + a_{\overline{n-1}|i}} = \mathbf{(11')}$$

Conforme visto na seção 2.3.2, temos que $C_n = P\, s_{\overline{n|}\,i}\,(1 + i)$ para depósitos.

A resolução de **(11')** por meio de tabelas financeiras não apresenta problemas. Mas, na calculadora, não se pode usar a sistemática habitual, uma vez que esta utiliza o $a_{\overline{n|}\,i}$, e não $1 + a_{\overline{n-1|}\,i}$. Há duas formas de se resolver **(11')** por calculadora:

a) Determina-se $a_{\overline{n-1|}\,i}$ em $\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{PMT}\, a_{\overline{n-1|}\,i}$, $\boldsymbol{PMT} = -1$ e $n = -1$, e o resultado é $\boldsymbol{PV} = P\, a_{\overline{n-1|}\,i}$, em que n é o número de prestações total, inclusive a prestação paga no ato de contratação do empréstimo, e usa-se depois **(11')**.

b) Usa-se a calculadora no modo ***beg***, que significa que o primeiro pagamento será efetuado no início (***beginning***) do contrato, ou seja, no período *0* em que ocorre a celebração do contrato, e que o número total de prestações, inclusive a primeira, é *n*. Em,

$$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{PMT}\left(1 + a_{\overline{n-1|}\,i}\right)$$

teclando-se $\boldsymbol{PV} = C_0$ e $\boldsymbol{n} = n$, o resultado é $\boldsymbol{PMT} = -P$, e teclando-se $\boldsymbol{PMT} = -1$, $\boldsymbol{n} = n$, o resultado é:

$$\boldsymbol{PV} = 1 + a_{\overline{n-1|}\,i}$$

Nessa sistemática, o modo ***beg*** realiza, automaticamente, as operações previstas em **(11')**, com *n* pagamentos dos quais o primeiro é efetuado no momento da assinatura do contrato. Do mesmo modo, **(11)** pode ser resolvido facilmente em suas operações $s_{\overline{n|}\,i}$ e $(1 + i)$ no modo

end**;** ou em uma única operação pelo modo ***beg***. Veja o exercício nº 9 deste capítulo.

Exercícios resolvidos

Exercício 2. Um indivíduo deposita, trimestralmente, em uma conta de depósitos, R$ 100,00, que lhe proporcionam juros compostos de 2,5% ao mês. Qual será o montante e o total de juros no fim de três anos? O último depósito é realizado no último dia do contrato e não rende juros.

O problema será resolvido de três formas: **a** e **b**, com juros equivalentes trimestrais, calculados com auxílio de calculadora financeira e calculadora simples; e **c**, com juros mensais, mediante consulta a tabelas financeiras. Note-se que a sistemática de pagamentos periódicos e da tabela Price parte da hipótese que o primeiro pagamento será feito, somente, no período posterior ao período zero, que é o momento da assinatura do contrato (o exercício posterior faz mudanças mais realistas).

Para se ter uma ideia do número final do montante, e saber se o resultado está correto, considere a situação em que se adota juro zero: uma prestação de 100, em 12 trimestres, dá 1.200, o que define um mínimo para o montante que se deseja calcular. Por outro lado, 1.200 a juros simples de 30% (isto é, 2,5 × 12) por três anos, ou seja 90% no período, dá um montante, *grosso modo*, para facilitar os cálculos de cabeça, de 1.200 + 0,9 × 1.200 = 2.280, que define o máximo da questão. Assim, se forem encontrados montantes como 400 ou 8.000, eles estarão claramente errados e o cálculo deverá ser refeito.

a) Com calculadora financeira: é importante colocar juros e fluxos na mesma unidade de tempo. Escolha como base o trimestre, e tome como hipótese que o primeiro depósito é feito no 1º trimestre e que o último depósito é feito no 12º trimestre, ao término dos três anos (sem nenhum rendimento de juros no último trimestre), quando, então, é calculado o resultado final.

Solução:

Tomando ***f* 7**, que é o número de casas decimais utilizadas nas tabelas financeiras.

$$(1 + i)^3 = (1 + 0{,}025)^3 = 1{,}0768906..$$

$100[(1 + i)^3 – 1] = 100\ [(1 + 0{,}025)^3 – 1] = 7{,}6890625..$ que é teclado como ***i*,** e é mantido dentro da máquina.

$$C_n = P\, s_{\overline{n|}\, i}$$

$$\boldsymbol{PMT} = \mathrm{P} = –100$$

$$\boldsymbol{n} = 304 = 12 \text{ trimestres}$$

teclando-se ***FV*,** acha-se

$$C_n = 1863{,}081898 = 1.863{,}08$$

Esse é o valor correto, uma vez que usa o máximo de capacidade da calculadora.

Prestações = 12 × 100 = 1200

Juros = 1863,08 – 1200 = 663,08

b) Com calculadora simples: é também factível (a prática é calcular o resultado usando potências de 2, 3 e 4 e utilizar a regra de expoentes). Aqui usa-se aproximação para 7 decimais sem usar a memória da calculadora.

Solução:

$(1 + i)^3 = 1{,}025^2 \times 1{,}025 = 1{,}0768906$

$(1 + i)^4 = (1 + i)^2\,(1 + i)^2 = 1{,}103812$

$$s_{\overline{12}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}0768906)^{12} - 1}{0{,}0768906}$$

$$= \frac{(1{,}0768906)^{4\times 3} - 1}{0{,}0768906} = \frac{(1{,}3448887)^3 - 1}{0{,}0768906}$$

$$= \frac{2{,}4325346 - 1}{0{,}0768906} = 18{,}6308157 = s_{\overline{n}|i}$$

Dado que,

$C_n = P\, s_{\overline{n}|i}$ e $P = 100$

Logo,

C_n = 1.863,08157, que é ligeiramente menor que o anterior, uma vez que os cálculos fora da máquina foram feitos com sete decimais e com aproximações sucessivas para sete decimais.

Considerando ***PMT*** = P **=** –100, ***n*** = 12 e ***i*** = 7,689060 (exatos), nota-se que a calculadora financeira HP–12C fornece um valor de ***FV*** = 1.863,081623, superior ao de **b**, uma vez que numerosos cálculos foram feitos dentro da máquina com todas as casas decimais possíveis, acima do número de decimais da calculadora simples, mas ainda inferior ao resultado correto de **a**, uma vez que este último utilizou uma taxa de juros ligeiramente maior que a anteriormente determinada. A calculadora Casio fx-82MS fornece ***FV*** = 1863,081623, que é o mesmo valor alcançado pela HP–12C.

c) Deve-se escolher o trimestre como unidade de tempo, já que os depósitos são trimestrais. Pode-se, é claro, achar um valor mensal equivalente ao depósito trimestral de R$ 100,00 e aplicar juros compostos de 2,5% a.m., mas é uma solução quase artificial, uma vez que o primeiro depósito de R$ 100,00 é feito no primeiro dia do primeiro trimestre quando, supostamente, começa o processo de acumulação. Para esse caso, será utilizada a tabela financeira III, que dá os valores para $s_{\overline{n|}\,i}$ disponíveis para 2,5%.

Solução:

O valor mensal (P), que rende juros de 2,5% a.m., equivalente a um depósito trimestral de 100, é calculado como:

Quadro resumo: Divisão mensal de um trimestre

$C_n = P\, s_{\overline{n|}\,i}$ Observe que para $n = 3$, $s_{\overline{n|}\,i} = 3{,}0756250$, pela tabela 2

$C_n = 100$

$s_{\overline{n|}\,i} = s_{\overline{3|}\,2{,}5}$

$\therefore P = 32{,}5137167..$

O valor de P não deve ser aproximado para duas casas decimais, uma vez que será usado no próximo cálculo.

Então:

$$C_n = P\, s_{\overline{n|}\,i}$$

em que P = – 32,513 7167.., $n = 3 \times 12 = 36$ meses e $i = 2{,}5\%$

$s_{\overline{n|}\,i} = s_{\overline{36|}\,2{,}5} = 57{,}3014126$, pela tabela 3

$$C_n = 1863{,}081896$$

que é quase o mesmo valor achado anteriormente para o item a, em que os dois últimos algarismos decimais (96) estão apresentados como 99. A diferença é residual.

O que se conclui da precisão de cálculos é que, tanto a calculadora financeira, quanto a tabela financeira dão o mesmo resultado, devendo--se evitar a calculadora simples.

Exercício 3. Um indivíduo deposita trimestralmente R$ 100,00 sendo o primeiro depósito realizado um trimestre após o contrato, com juros de 7,689060% ao trimestre, por três anos (a taxa é a mesma do final da forma b, por calculadora financeira, do exercício anterior). Qual será o montante após o rendimento do último depósito?

No 12º trimestre é feito um depósito de P que, com os outros 11 anteriores, fornece C_n, que será depositado por mais um trimestre, gerando portanto C_{n+1}.

Solução:

Gráfico 6: Esquema de 12 pagamentos de P, a partir de $n = 1$, para formar um montante no 13º período de $C_n\,(1+ i)$

Ou seja, deseja-se calcular C_{n+1}

$$C_{n+1} = (1 + i)\, C_n$$

$$C_n = (1 + i)\, P\, s_{\overline{n|}\, i}$$

foi calculado no exercício anterior

$$C_n = (1 + i)\, P\, s_{\overline{n|}\, i} = 1863{,}081623$$

e

$$C_{n+1} = (1 + i) = 1863{,}081623 \times 1{,}0768906 = 2006{,}335087$$

Resposta: R$ 2.006,34. A diferença é crucial em relação ao resultado do exercício anterior (que totalizou 1.863,08). Uma vez que o último depósito e os anteriores rendem juros por um trimestre adicional.

Exercício 4. Determine, por calculadora e por tabela financeira, o valor da prestação a ser paga por empréstimo de R$ 1.000,00, a ser liquidado em 24 prestações mensais, a juros efetivos de 42,58% a.a.

Solução:

a) Usando a calculadora para determinar a taxa ao mês pelas fórmulas básicas:

$$(1 + i)^{12} = 1{,}4258$$

Teclar

n = 12
PV = –1
FV = 1,4258
i = 0,030002 ∴ *i* = 3%

Ou, alternativamente, teclar 1,4258 ***ENTER***

$$\frac{1}{x} = 12ey^{x}$$

$$\sqrt[12]{1{,}4258} = 1{,}0300024$$

$$i = 3\%$$

Determinados os juros, calcula-se facilmente a prestação:

$$C_0 = P\, a_{\overline{n|}\, i}$$

PV = 1.000

n = 24

i = 3

$$a_{\overline{n|}\, i} = 16{,}9355421 \text{ na tabela}$$

$\therefore$ ***PMT*** = – = 9,05

b) Usando a tabela:

A primeira parte consiste em determinar a taxa de juros equivalente ao mês, ou seja, $(1+i)^{12}$ = 1,4258, c. Consultando a tabela 1, tem-se para n = 12, e i = 3,0% a.m., já que $(1+i)^{12}$ = 1,4257609.

Logo:

$$C_0 = P\, a_{\overline{n|}\, i}$$

Pela tabela 2, calcula-se

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{24|}\,3}} = \frac{1000,00}{16,9355421} = 59,05$$

Resposta: A prestação mensal é de R$ 59,05.

Exercício 5. Qual o total de juros pagos em um financiamento de R$ 300 mil, a 2,5% a.m., a ser liquidado em prestações mensais em 8 anos e 4 meses? O primeiro pagamento vence um mês após a data de assinatura do contrato, que é a forma habitual em matemática financeira. Use tabela financeira.

Solução:

Sabendo-se que:

8 anos + 4 meses = 100 meses

$$J = nP - C_0$$

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}}$$

e, utilizando a tabela financeira 2

$$J = 100 \times \frac{300000}{36,6141053} - 300000 = 519.356,36$$

Resposta: Juros = R$ 519.356,36

Exercício 6. Uma instituição financeira deseja fazer um plano de financiamento para R$ 15 mil a 2,5 % a.m. em 24 meses, de forma que haja pagamentos extras – além da prestação normal – de R$ 1.000,00 no 6º, 12º, 18º e 24º meses. Qual o valor da prestação normal a ser cobrada? Use tabela financeira.

Solução:

Determinando-se o valor atual das parcelas extras:

$$C_0 = \frac{P_1}{(1+i)^6} + \frac{P_1}{(1+i)^{12}} + \frac{P_1}{(1+i)^{18}} + \frac{P_1}{(1+i)^{24}}$$

$$= P_1\left(\frac{1}{(1+i)^6} + \frac{P_1}{(1+i)^{12}} + \frac{P_1}{(1+i)^{18}} + \frac{P_1}{(1+i)^{24}}\right)$$

e utilizando a tabela financeira 1:

$$C_0 = 1000\left(\frac{1}{1{,}1596934} + \frac{1}{1{,}3448888} + \frac{1}{1{,}5596587} + \frac{1}{1{,}8087260}\right)$$

$$= 1000 \times 2{,}7998940 \cong 2799{,}89$$

Portanto, quatro prestações de R$ 1.000, a serem pagas nos prazos de 6, 12, 18 e 24 meses, têm o valor atual de R$ 2.799,89. A parcela a ser financiada em 24 prestações iguais e consecutivas, vencendo a primeira um mês a partir da data de assinatura do contrato será de:

$$C_0 = 15.000{,}00 - 2.799{,}89 = 12.200{,}11$$

Logo, $C_0 = P\, a_{\overline{n|}\,i}$ e $P = \dfrac{C_0}{a_{\overline{24|}\,2,5}}$, utilizando a tabela financeira 2:

$$P = \frac{12200,11}{17,8849858} = 682,14$$

Resposta: A prestação normal, por 24 meses, será de R$ 682,14.

Exercício 7. Elabore dois planos de financiamento de R$ 20 mil em 24 e 30 meses, com parcelas intermediárias de R$ 1.000 no 7º mês e de R$ 1.500 no 15° mês, a 2,5% a.m. para ambos os planos. Use tabela financeira.

Solução:

Determinando o valor atual das prestações intermediárias pela utilização da tabela financeira 1.

$$PV = \frac{1000}{(1+i)^7} + \frac{1500}{(1+i)^{14}} = 1902,86$$

O novo principal será de

$$20.000 - 1.902,86 = 18.097,14$$

Em 24 meses a prestação mensal será, pela utilização da tabela financeira 2,

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{24|}\,2,5}} = \frac{18.097,14}{17,8849858} = 1.011,86$$

Em 30 meses, a prestação mensal será, pela utilização da tabela financeira 2,

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{30}|2,5}} = \frac{18.097,14}{20,9302926} = 864,64$$

Exercício 8. Um automóvel é oferecido a um comprador em dois planos de pagamentos:

I – entrada de R$ 2.000,00 e 24 prestações mensais de R$ 1.000,00; e
II – entrada de R$ 2.500,00 e 30 prestações mensais de R$ 800,00.

Admita que a taxa de juros do comprador, que é sua melhor aplicação no mercado financeiro, é de 2,5% a.m. Qual seria a melhor opção do comprador? Use tabela financeira.

Solução:

Será determinado o valor atual das duas opções: a que tiver o menor valor atual será a melhor solução (tudo se passa como se o comprador pagasse à vista: é claro que o preço menor seria a melhor opção). Será utilizada a tabela financeira 2.

I. $C_0 = P\, a_{\overline{24}|2,5} = 1.000,00 \times 17,8849858 = 17.884,99$

O valor atual é portanto 17.884,99 + 2.000,00 = 19.884,99

II. $C_0 = P\, a_{\overline{30}|2,5} = 800,00 \times 20,9302926 = 16.744,23$

O valor atual é de 16.744,23 + 2.500,00 = 19.244,23

Resposta: A segunda opção é a melhor.

Exercício 9. Um empréstimo de R$ 100 a 2,5% a.m. é concedido em quatro prestações mensais. Determine o valor da prestação com sete decimais, no caso (a) em que a primeira prestação é paga um mês após o contrato e (b) quando a primeira prestação é paga no ato da assinatura do contrato. Os cálculos devem ser feitos por calculadora e por tabelas financeiras.

Solução:

a) Quando a primeira a primeira prestação é paga um mês após o contrato.

Pela tabela 2:

$$P = C_0 \, a^{-1}_{\overline{n|}\, i}$$

para $n = 4$ e $C_0 = 100$

$$P = \frac{100}{3{,}7619742} = 26{,}5817878$$

Pela calculadora, com ***f*7**, ***n*** = 4, ***PV*** = –100, ***i*** = 2 encontra-se o mesmo resultado anteriormente citado.

b) Quando a primeira prestação é paga no ato da assinatura do contrato, conforme visto, o principal reduz-se em relação à situação anterior e, simultaneamente, o número efetivo de prestações reduz-se também de uma unidade.

Pela tabela financeira 2:

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|\,i}}$$

$$P = \frac{C_0}{1 + a_{\overline{n-1}|\,i}}$$

$$P = \frac{100}{1 + 2{,}8560236} = 25{,}9334512$$

Em:

$$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{PMT}\; a_{\overline{n-1}|\,i}$$

Se ***PMT*** = –1, ***n*** = 4 – 1 = 3, teclando-se ***PV*** acha-se $a_{\overline{n-1}|\,i}$ = $a_{\overline{3}|\,2,5}$ = 2,8560236, que é mantido na calculadora para se determinar *P* em:

$$P = \frac{C_0}{1 + a_{\overline{n-1}|\,i}} = \frac{100}{1+2{,}8560236} = 25{,}9334512$$

Ou, pelo método ***beg***. Em:

$$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{PMT}\left(1 + a_{\overline{n-1|}\,i}\right)$$

PV = –100, ***n*** = 4 e então ***PMT*** = *P* = 25,9334512, que é o mesmo resultado encontrado anteriormente.

Como se usa pouco a sistemática ***beg***, é interessante conferir o resultado achado, utilizando-se de uma adaptação do modo ***end***: o principal é agora *PV* = 100,00 – 25,9334515 = 71,0665485, a prestação é *PMT* = 25,9334515 e o número de prestações é *n* = 3. Espera-se achar teclando-se ***i*** uma taxa de juros de 2,50 (com duas casas decimais), que é de fato confirmado.

Exercício 10. Determine a taxa de juros efetiva ao ano de uma operação de 90 dias com desconto de 1,30% a.m. e imposto sobre operações financeiras (IOF) de 1% sobre o valor nominal da operação.

Solução:

Supondo que o desconto seja sobre o principal de R$ 100,00, e que seja simples, tem-se para três meses; utilizando-se ***f4***, já que a taxa de juros unitária tem duas casas decimais.

1,30 × 3 = 3,90 desconto

3,90 + 1 = 4,90 total dos custos em 90 dias por R$ 100 de capital.

Logo, $(1+i) = \left(\frac{100}{100-4{,}90}\right) =$1,0515

Ao ano, tem-se:

$$(1+i)^4 = (1{,}0515)^4 = 1{,}2225 \text{ ou } 22{,}25\%.$$

Exercício 11. Determine o depósito acumulado em 12 meses, terminando no período 11 e iniciando-se no período zero com um depósito mensal de R$ 100,00. Faça o cálculo por dois métodos distintos

Solução:

a) Método **end.**

$$C_n = P\frac{s}{n|\,i}(1+i).$$

Para $\boldsymbol{n}$ = 12, $\boldsymbol{i}$ = 2,5, ***PMT*** = –100,00, ***FV*** = 1379,56

C_n = 1379,56 x 1,025 = 1414,04

b) Método **beg.**

$$\boldsymbol{C_n} = P\frac{s}{n|\,i}(1+i).$$

Para $\boldsymbol{n}$ = 12, $\boldsymbol{i}$ = 2,5, ***PMT*** = –100,00 .:

$$C_n = 1414{,}04$$

2.6 Saldo devedor da tabela Price

2.6.1 Determinação do saldo devedor após o pagamento da prestação *k*

O saldo devedor é necessário a cada instante, uma vez que a maior parte dos contratos prevê a possibilidade de liquidação antecipada pelo devedor, e/ou refinanciamento do saldo devedor com novas condições de prazo e juros. As autoridades fiscais também desejam saber, nas declarações de bens dos contribuintes, o valor dos saldos devedores dos créditos recebidos, por isso os credores têm obrigação de informar esses saldos.

Há três características básicas do saldo devedor na tabela Price:

a) O saldo devedor é aquele observado após o pagamento da amortização do período correspondente.

b) A diferença entre saldos devedores em duas datas é a soma das amortizações do período compreendido entre as duas datas.

c) As amortizações crescem, geometricamente, à razão de $(1 + i)$, já que são a diferença entre saldos devedores consecutivos e o pagamento de juros de cada prestação, como se prova a seguir.

Seja, em valor absoluto:

P_k = k-ésima prestação;

Z_k = Amortização da prestação k;

J_k = Juros da prestação k;

C_k = Saldo devedor no período k após o pagamento da k-ésima prestação

Na primeira prestação:

$$P_1 = P = J_1 + Z_1$$

$$C_1 = C_0 - Z_1$$

$$J_1 = iC_0$$

O valor da segunda prestação será:

$$P_2 = P = J_2 + Z_2 = J_1 + Z_1 \therefore J_1 - J_2 = Z_2 - Z_1$$

mas $J_2 = iC_1 = i(C_0 - Z_1) = iC_0 - iZ_1 = J_1 - iZ_1$

então $J_1 - J_2 = iZ_1$, e tem-se então:

$$J_1 - J_2 = Z_2 - Z_1 = iZ_1$$

Assim, $Z_2 = Z_1(1 + i)$

O valor da terceira prestação é:

$$P_3 = P = J_3 + Z_3 = J_2 + Z_2 \therefore J_2 - J_3 = Z_3 - Z_2$$

mas, $J_3 = iC_2 = i(C_1 - Z_2) = iC_1 - iZ_2 = J_2 - iZ_2$

então $J_2 - J_3 = iZ_2$, daí que

$Z_3 - Z_2 = iZ_2$

Assim, $Z_3 = Z_2(1+i) = Z_1(1+i)^2$ e sucessivamente.

Portanto:

$Z_n = Z_{n-1}(1+i)$

E como $Z_{n-1} = (Z_{n-2})(1+i)$

$Z_n = Z_1(1+i)^{n-1}$

O saldo devedor pode ser agora determinado,

$C_k = C_0 - (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k)$

$C_k = C_0 - [Z_1 + Z_1(1+i) + Z_1(1+i)^2 + \cdots + Z_1(1+i)^{k-1}]$

$C_k = C_0 - Z_1[1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{k-1}]$

Os termos entre parênteses formam uma progressão geométrica de *k* termos em que o primeiro termo é 1, o último $(1+i)^{k-1}$, e a razão é $(1+i)$, que, conforme visto, é a soma de um pagamento periódico de 1 que totaliza $\frac{S}{k\rceil\, i}$.

Então:

$$C_k = C_0 - Z_1 \frac{S}{k\rceil\, i}$$

mas

$$Z_1 = C_0 \, s^{-1}_{\overline{n}|\,i}$$

E então:

$$C_k = C_0 - C_0 \, s^{-1}_{\overline{n}|\,i} \times s_{\overline{k}|\,i}$$

$$C_k = C_0 \left[1 - \frac{s_{\overline{k}|\,i}}{s_{\overline{n}|\,i}} \right]$$

Como C_0 e $s_{\overline{n}|\,i}$ são iguais para todas as prestações, o valor de C_k depende só de $s_{\overline{k}|\,i}$.

2.6.2 Uso da calculadora financeira para determinar o saldo devedor e para depósitos acumulados

O saldo devedor pode ser facilmente calculado com uma calculadora eletrônica: para determinar o saldo devedor após o pagamento da k-ésima prestação de um empréstimo a ser liquidado em N prestações, digita-se ***n*** = $N - k$, além de ***i*** e ***PMT***. O resultado da tecla ***PV*** é o saldo devedor. Do mesmo modo, para se calcular o total de depósitos acumulados após o k-ésimo depósito usa-se ***n*** = $N - k$ e **PMT**.

O exercício padrão na seção 2.12, a seguir, com uma tabela específica, dá um exemplo do uso da calculadora para determinar o saldo devedor.

2.7 Juros e amortização na tabela Price

Conhecido o saldo devedor C_{k-1} após o pagamento da $(k-1)$-ésima prestação, os juros são calculados facilmente por

$$J_k = iC_{k-1}$$

A amortização é calculada pela diferença entre dois saldos devedores, cuja fórmula foi apresentada anteriormente. Pode ser, também, calculada pela seguinte diferença,

$$Z_k = P - J_k$$

A mesma sistemática anteriormente citada é adotada com calculadoras eletrônicas.

2.7.1 Juros e amortizações totais

A determinação do total de juros pagos é realizada facilmente, já que:

$$\sum J = nP - C_0 = n\frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}} - C_0 = C_0\left[\frac{n}{a_{\overline{n|}\,i}} - 1\right]$$

é claro $J_k = iC_{k-1}$ e ainda

$\sum J = \sum P_k - C_0$, e que o total das amortizações deve ser igual ao principal, ou seja

$$\sum Z_k = C_0$$

2.7.2 Valor dos juros e amortização pagos até a k-ésima prestação e valor dos juros pagos entre duas prestações

É um pouco complicado, mas é possível calcular, a partir das fórmulas dos saldos devedores, juros e amortizações individuais, a soma do valor de juros e amortizações pagos até a k-ésima prestação ou entre as prestações de números ($n + k$) e k. A necessidade do cálculo decorre de regras fiscais adotadas em muitos países – como nos EUA – que permitem deduzir, da renda do contribuinte sujeita à imposto de renda, o total de juros pagos na compra de uma habitação, e ainda, para efeitos de planejamento financeiro, em que se deseja saber o total de juros e amortizações pagos em um determinado período.

Na HP-12C, dado o valor atual, juros e número de períodos, calcula-se de forma habitual a prestação com duas casas decimais. Limpa-se a máquina e seguem-se estas etapas:

1. Entra-se com ***PV***, ***PMT***, ***i***, com ***PMT*** negativo;
2. Entra-se com *k* ***f Amort***. O resultado é a soma dos juros pagos, até a *k*-ésima prestação, desde que *k* seja o número de períodos para os quais se deseja achar o total de juros ou o total de amortização;
3. Tecla-se **x≷y**. O resultado é a soma das amortizações pagas até a *k*-ésima prestação;
4. Tecla-se ***RCLPV***. O resultado é o saldo devedor após o pagamento da *k*-ésima prestação.

Novos cálculos devem começar sempre com a limpeza da máquina e o funcionamento inicial em ***end***.

É muito comum desejar saber, para efeitos fiscais, o total de juros pagos em um determinado período. Não há dificuldades: para calcular o valor da soma dos juros pagos entre duas prestações, k e $k + n$, a sequência anterior é repetida para $k + n$ e os valores encontrados são subtraídos, para se determinar o total de juros e o total de amortizações pagas entre as prestações k e $n + k$.

Exercícios resolvidos

Exercício 12. Calcule o total de juros e de amortização pagos até a terceira prestação, para um empréstimo de R$ 100,00, juros de 4,5% a.m., a ser liquidado em quatro prestações mensais. Confira o resultado achado com as somas derivadas do exercício padrão, que tem os mesmos valores anteriormente citados e estão mencionados no exercício resolvido da seção 2.11.

Solução:

Tecla-se ***f2***, ***PV*** = 100, ***i*** = 4,5 e ***n*** = 4. O resultado é uma prestação de P = 27,87.

Limpa-se a máquina. Tecla-se ***PV*** = 100, ***i*** = 4,5, e ***PMT*** = *MT*87

Tecla-se 3 ***f Amort***. O resultado é –10,30, que é o total de juros pagos até a terceira prestação.

Tecla-se **x≷y**. O resultado é –73,31, que é o total do valor das amortizações até a terceira prestação.

Tecla-se ***RCLPV***. O resultado é 26,69, que é o saldo devedor depois do pagamento da terceira prestação.

Confirmação dos resultados anteriormente citados com o exercício padrão da seção 2.12:

a) juros pagos até a terceira prestação: 4,50 + 3,45 + 2,35 = 10,30

b) soma das amortizações pagas até a terceira prestação: 23,37 + 24,42 + 25,52 = 73,31

c) saldo devedor para $k = 3$ é 26,69.

2.8 Prazo de liquidação de empréstimos na tabela Price

Muitas vezes, um tomador de empréstimo somente pode pagar uma prestação máxima de P em um crédito de C_0 oferecido por um credor a uma taxa i de juros por período e necessita saber o número de pagamentos n necessários para liquidar seu débito.

A demonstração da fórmula é complicada, e aqui somente será dado o resultado:

$$n = \frac{\ln \frac{P}{P - iC_0}}{\ln(1+i)} \qquad \textbf{(12)}$$

Conforme apresentado em Sydsaeter et al. (2000, p. 166).

Na calculadora eletrônica, o cálculo é fácil, uma vez que, depois de teclar ***i*, *PV*, *PMT***, teclando-se ***n*** obtém-se o número de pagamentos necessário para liquidar o principal.

Exercício 13. Determine o número de prestações necessárias para liquidar um empréstimo de R$ 100,00, a juros de 4,5% a.m., para um valor de prestação de R$ 27,87. Esses dados, para facilidade de comparação, são os mesmos utilizados no exercício padrão da tabela Price, na seção 2.12 a seguir.

$C_0 = 100,00$

$P = 27,87$

$i = 4,5\%$

$$n = \frac{\ln 1,192555}{\ln 1,045} = 4,000685$$

Ou, utilizando a calculadora com ***f* 6** (para permitir comparação com o resultado anterior), para ***i*** = 4,5; ***PV*** = 100; ***PMT*** = –27,87, obtém-se n = 4,000000.

Em ambos os casos, a aproximação para número inteiro fornece n = 4, o que é confirmado pelo exercício padrão na seção 2.12.

2.9 Fórmulas básicas da tabela Price

Considere

C_0 = principal

C_k = saldo devedor após o pagamento da *k*-ésima prestação

P = prestação

n = número de períodos

i = taxa de juros, na forma unitária, por período

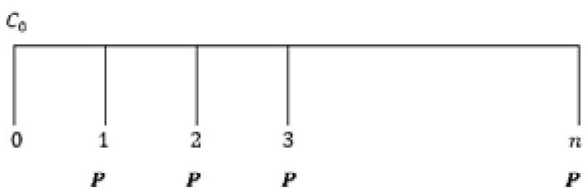
J = valor dos juros

Z = amortização

Na maior parte dos contratos conhece-se o principal, a taxa de juros e o número de períodos, convencionados na calculadora por ***PV***, ***i***, ***n***.

O primeiro pagamento é sempre realizado no período imediatamente posterior à assinatura do contrato, ou seja, com o seguinte cronograma:

Gráfico 7: Esquema de pagamentos de um principal C_0 em *n* prestações de *P*



$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$s_{\overline{n|}\,i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2.9.1 Prestação

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}}$$

Com calculadora, dado ***PV***, ***i***, ***n***, o cálculo de ***PMT*** é imediato.

2.9.2 Saldo devedor (C_k) após o pagamento da *k*-ésima prestação

$$C_k = C_0\left[1 - \frac{s_{\overline{k|}\,i}}{s_{\overline{n|}\,i}}\right]$$

Na calculadora: após o pagamento da *k*-ésima prestação de uma dívida originalmente prevista para ser liquidada em *N* pagamentos, dados ***i***, ***PMT***, toma-se $\boldsymbol{n} = N - k$, que é o número de prestações que faltam para encerrar o crédito, e acha-se ***PV***, que é o saldo devedor após o pagamento da *k*-ésima prestação. Esse método, mantidos os valores já digitados para ***i***, ***PMT***, permite determinar uma série de saldos devedores, variando-se apenas *k*.

2.9.3 Juros da *k*-ésima prestação

$$J_k = iC_{k-1}$$

Na calculadora usa-se a mesma fórmula anterior para C_{k-1}, e então, calcula-se J_k .

2.9.4 Valor da *k*-ésima amortização (Z_k)

$$Z_k = \frac{C_{k-1}}{\frac{s}{\overline{n\text{-}k+1}|\, i}}$$

$$Z_k = Z_1(1+i)^{k-1}$$

Na calculadora, tecla-se ***i***, ***n*** (este último determinado por $n - k + 1$) e ***PMT*** = –1, e acha-se $\frac{s}{\overline{n\text{-}k+1}|\, i}$, que é mantido na calculadora e, com C_{k-1}, calcula-se a amortização desejada.

Pode-se também conferir o resultado anteriormente citado, na calculadora, por

$$Z_k = P - J_k$$

2.10 Comprovação da veracidade dos cálculos na tabela Price

É de boa cautela, após a realização de um quadro-resumo da tabela Price, comprovar os resultados achados, efetuando todas as somas possíveis e utilizando os conceitos de somas calculadas (de acordo com o item anterior) e totais esperados, conforme demonstrado a seguir, para checar erros de cálculo, erros da calculadora, erros de aproximação. Um economista competente, pelas razões expostas, é sempre muito cético sobre o uso de fórmulas mecânicas. Todos os resultados devem ser testados e checados à luz da Economia e do bom senso.

2.10.1 Total das prestações

$$\sum P = nP$$

2.10.2 Valor de cada prestação

$$P = Z + J$$

Os saldos devedores calculados devem ser tais que $\mathbf{C_k = C_{k-1} - Z_k}$ até chegar a $\mathbf{C_n = 0}$

2.10.3 Amortização

1) $C_0 = \sum Z_k$

2) $Z_k = Z_{k-1}(1 + i)$

3) $Z_k = Z_1(1 + i)^{k-1}$

2.10.4 Total de juros

1) $\sum J = C_0 \left(\dfrac{n}{a_{\overline{n}|i}} - 1 \right)$

2) $\sum J = \sum J_k$

2.10.5 Prestação individual

$P_k = J_k + Z_k$

2.11 O método prático da tabela Price

A forma **prática** de cálculo de uma tabela Price é simples e utiliza intensamente todas as propriedades anteriores, particularmente o valor da prestação, como será mencionado adiante. Não há maiores preocupações para erros de aproximação, ao nível de centavos, já que são irrelevantes economicamente. As etapas do método prático são as seguintes:

1. Determinação do valor da prestação pela fórmula básica $P = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}i}}$, onde $a_{\overline{n|}i}$ é encontrado em tabelas financeiras ou pela calculadora com ***PV, n*** e ***i*** positivos resultando em ***PMT*** negativo, que é o valor de *P*.

A prestação determina a última linha do quadro que se deseja preparar, com o nome de **Total esperado,** que deve ser preenchida antes dos cálculos de cada prestação, de tal modo que:

a) saldo devedor = 0,00

b) amortização = valor do principal

c) juros = total das prestações – principal

d) prestações = *nP*

2. Os juros de cada prestação são calculados sobre o saldo devedor anterior (que é o principal no caso da primeira prestação), já que $J_k = iC_{k-1}$

3. A amortização é calculada pela diferença entre a prestação e os juros.

4. O saldo devedor corrente é a diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização corrente.

5. Determina-se o **total calculado** após o pagamento da última prestação, qual seja, o valor do saldo devedor após o pagamento da última prestação, bem como a soma das amortizações, a soma dos juros e a soma das prestações.

6. A primeira checagem consiste em determinar se a soma dos juros mais a soma das amortizações no total calculado é igual à soma das prestações.

Os erros de aproximação, decorrentes da inexistência de valor monetário inferior a R$ 0,01, são tão pequenos que se acumulam em valores desprezíveis para a última prestação. **Os ajustamentos de resíduos de cálculo na última prestação simplesmente não são feitos**.

Exercício resolvido – método prático

Exercício 14. Determinar os componentes de um empréstimo de R$ 100,00 a ser amortizado em quatro meses, a juros de 4,5% a.m., pela tabela Price. Adote sete decimais, visto que esse é o número de casas decimais da tabela financeira utilizada (LLOYD; SMALL, 1953).

Quadro 7: Exercício padrão da tabela Price pelo método prático para i = 4,5, C_0= 100,00 e n = 4

(continua)

k	Saldo devedor (C_k)	Amortização (Z_k)	Juros (J_k)	Prestação (P)
0	100,00	–	–	–
1	76,63	23,37	4,50	27,87

Quadro 7: Exercício padrão da tabela Price pelo método prático para i = 4,5, C_0= 100,00 e n = 4

(conclusão)

2	52,21	24,42	3,45	27,87
3	26,69	25,52	2,35	27,87
4	0,02	26,67	1,20	27,87
Total calculado anteriormente	0,02	99,98	11,50	111,48
Total esperado	0,00	100,00	11,48	111,48

A prestação é determinada pela tabela financeira 2 por:

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|\, i}} = \frac{100,00}{3,5875257} = 27,8743648 = 27,87$$

ou, pela calculadora: ***PV*** = 100, ***n*** = 4, ***i*** = 4,5, obtém-se ***PMT*** = –27,8743648 = –27,87.

Observe que o erro é relativamente baixo para a prestação, quando se toma seu valor com duas decimais, usando 27,8743648 como o dado correto, verifica-se que é superior em 0,016% ao valor utilizado de 27,87 para a prestação.

O total esperado é 0,00 para o saldo devedor final; 100,00 para o total da amortização; o total esperado da soma das prestações é $nP = 4 \times 27,87 = 111,48$; o total esperado de juros é $nP - C_0 = 111,48 - 100,00 = 11,48$ a partir do valor do principal e do valor da prestação, que são constantes.

Os valores calculados são determinados da seguinte forma:

Para a 1ª prestação:

$J_1 = 0{,}045 \times 100{,}00 = 4{,}50$

$$Z_1 = 27{,}87 - 4{,}50 = 23{,}37 Z_n = \frac{P_{n+1}}{(1+i)} + \cdots + \frac{P_n}{(1+i)}$$

$C_1 = 100 - 23{,}37 = 76{,}63$

$SD_1 = 25{,}52 + 26{,}67 = 76{,}63$

Para a 2ª prestação:

$J_2 = 0{,}045 \times 76{,}63 = 3{,}45$

$$Z_2 = 27{,}87 - 3{,}45 = 24{,}42 Z_n = \frac{P_{n+1}}{(1+i)} + \frac{P_{n+2}}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P_{k+m}}{(1+i)^{k+m}}$$

$C_2 = 76{,}63 - 24{,}42 = 52{,}21$

Para a 3ª prestação:

$J_3 = 0{,}045 \times 52{,}21 = 2{,}35$

$Z_3 = 27{,}87 - 2{,}35 = 25{,}52$

$C_3 = 52{,}21 - 25{,}52 = 26{,}69$

Na 4ª e última prestação, os cálculos indicariam:

$$J_4 = 0{,}045 \times 26{,}69 = 1{,}20$$

Nesse caso, a soma dos juros calculados é 11,50 (4,50 + 3,45 + 2,35 + 1,20), enquanto o total esperado pelas fórmulas da tabela Price exige 11,48. Há uma diferença de 0,02, que é simplesmente ignorada, já que não há importância econômica no erro de 0,02 em um total esperado de 11,48 (erro relativo de 0,17%).

$$Z_4 = 27{,}87 - 1{,}20 = 26{,}67$$

Nesse caso, o Z_4 calculado (26,67) deveria ser igual a C_3 (26,69) e não o é, por arredondamentos feitos. O erro é, simplesmente, ignorado, dado seu baixo valor.

Exercício resolvido – por fórmulas individuais

A sistemática é particularmente útil quando se deseja calcular saldos devedores e amortizações de prestações específicas, já que, dessa forma, não é necessário fazer o quadro resumo.

Prestação

Para:

$C_0 = 100{,}00$

$n = 4$

$i = 4{,}5$

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{100{,}00}{a_{\overline{4|}\,4{,}5}} = \frac{100}{3{,}5875257} = 27{,}87$$

ou ***PV*** = 100, ***i*** = 4,5; ***n*** = 4

Acha-se ***PMT*** = –27,87

Saldo devedor (após o pagamento da *k*-ésima prestação)

$$C_k = C_0\left[1 - \frac{s_{\overline{k|}\,i}}{s_{\overline{n|}\,i}}\right]$$

Usa-se a tabela financeira ou a calculadora (dado ***i*** = 4,5 e ***PMT*** = –27,87, varia-se sucessivamente ***n*** de 3 até 0)

Para a primeira prestação:

Pela tabela:

$$C_1 = C_0\left[1 - \frac{s_{\overline{1|}\,4,5}}{s_{\overline{4|}\,4,5}}\right] = 100\left[1 - \frac{1,000000}{4,2781911}\right] = 76,63$$

Na calculadora para ***n*** = 3, acha-se ***PV*** = 76,61

Para a segunda prestação:

Pela tabela:

$$C_2 = C_0\left[1 - \frac{s_{\overline{2}|4,5}}{s_{\overline{4}|4,5}}\right] = 100\left[1 - \frac{2,0450000}{4,2781911}\right] = 52,20$$

Na calculadora para $\boldsymbol{n}$ = 2, acha-se $\boldsymbol{PV}$ = 52,19

Para a terceira prestação:

Pela tabela:

$$C_3 = C_0\left[1 - \frac{s_{\overline{3}|4,5}}{s_{\overline{4}|4,5}}\right] = 100\left[1 - \frac{3,1370250}{4,2781911}\right] = 26,67$$

Na calculadora para $\boldsymbol{n}$ = 1, acha-se $\boldsymbol{PV}$ = 26,67

Para a quarta prestação:

$$C_4 = 0$$

Na calculadora, para $\boldsymbol{n}$ = 0, acha-se $\boldsymbol{PV}$ = 0,00

Juros

Tanto em termos da tabela Price prática, quanto em termos de calculadora, utiliza-se a mesma fórmula a seguir.

$$J_k = iC_{k-1}$$

Fazendo os cálculos com os valores determinados pela tabela financeira e pela calculadora:

$$J_1 = iC_0 = 0{,}045 \times 100{,}00 = 4{,}50$$

$$J_2 = iC_1 = 0{,}045 \times 76{,}63 = 3{,}45, \text{ pela tabela ou}$$

$$J_2 = iC_1 = 0{,}045 \times 76{,}61 = 3{,}45, \text{ pela calculadora.}$$

Dessa maneira, os saldos devedores diferentes da calculadora e da tabela não têm impacto sobre os juros, devido aos arredondamentos para duas casas decimais.

$$J_3 = iC_2 = 0{,}045 \times 52{,}20 = 2{,}35, \text{ pela tabela}$$

$$J_3 = 0{,}045 \times 52{,}19 = 2{,}35, \text{ pela calculadora, com o mesmo resultado anteriormente citado.}$$

$$J_4 = iC_3 = 0{,}045 \times 26{,}67 = 1{,}20, \text{ pela calculadora ou pela tabela}$$

Amortização

$$Z_k = \frac{C_{k-1}}{s_{\overline{n-k+1|}\,i}}$$

Será calculada apenas uma única vez pela fórmula anteriormente citada, para Z_1, fazendo $\boldsymbol{n}$ = 4, ou seja, $n - k + 1 = 4 - 1 + 1 = 4$, $\boldsymbol{i}$ = 4,5 e $\boldsymbol{PMT}$ = –1, acha-se $\boldsymbol{FV}$ = 4,2781911 = $s_{\overline{n-k+1|}\,i}$, que é mantido na máquina, e que divide 100, dando 23,3743648, que dá o mesmo resultado a seguir, quando aproximado para duas decimais e calculada a diferença entre o valor da prestação e os juros calculados, ou seja

$$Z_k = P - J_k$$

$$Z_1 = 27{,}87 - 4{,}50 = 23{,}37$$

Ou pela tabela 3:

$$Z_1 = \frac{C_0}{s_{\overline{4|}\,4,5}} = \frac{100{,}00}{4{,}2781911} = 23{,}37$$

$$Z_2 = \frac{C_1}{s_{\overline{3|}\,4,5}} = \frac{76{,}63}{3{,}1370250} = 24{,}43$$

Pela calculadora:

$$Z_2 = 27{,}87 - 3{,}45 = 24{,}42$$

$$Z_3 = \frac{C_2}{s_{\overline{2|}\,4,5}} = \frac{52{,}20}{2{,}0450000} = 25{,}53$$

Pela calculadora:

$$Z_3 = 27{,}87 - 2{,}35 = 25{,}52$$

$$Z_4 = \frac{C_3}{s_{\overline{1}|4,5}} = \frac{26{,}67}{1{,}0000000} = 26{,}67$$

Pela calculadora:

$$Z_4 = 27{,}87 - 1{,}20 = 26{,}67$$

Conclusão sobre a utilização das fórmulas individuais e de uso da calculadora em relação ao método prático: as diferenças são absolutamente desprezíveis e, portanto, o método prático deve ser usado.

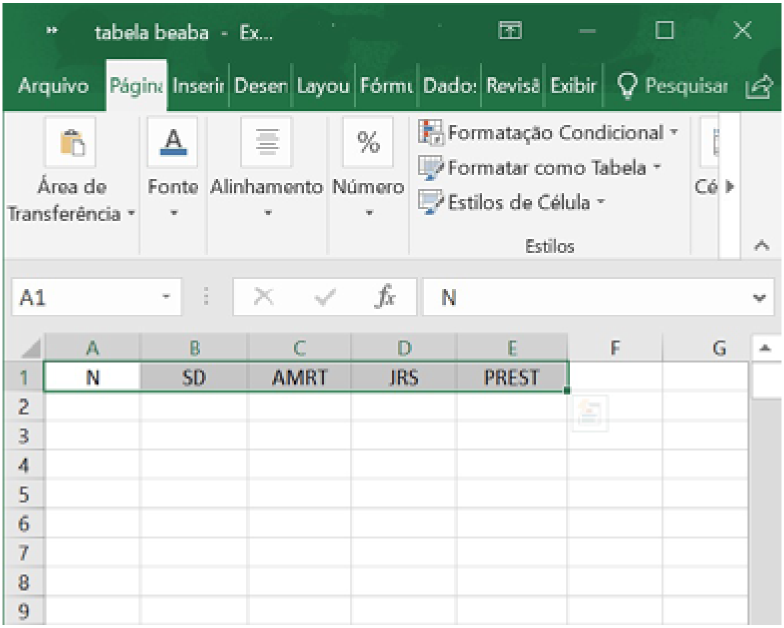
2.12 Tabela Price no Excel

Apresenta-se aqui um método simples para a edição de tabelas para financiamentos, tanto por Price como por SAC (que será discutido na seção 3.4 adiante), pelo Excel. Aqui é utilizado o Excel pertencente ao pacote Office 2018, porém, o método é válido para edições anteriores.

Abre-se então o Excel.

Primordialmente há uma estrutura basal, válida para ambos os casos, a ser construída, na qual se especificam as colunas relativas ao período (N), saldo devedor (SD), amortização (AMRT), juros (JRS) e prestação (PRST) como na figura:

Figura 1: Estruturando uma tabela de financiamento (Price/SAC) – nomeação das colunas pelas variáveis do problema

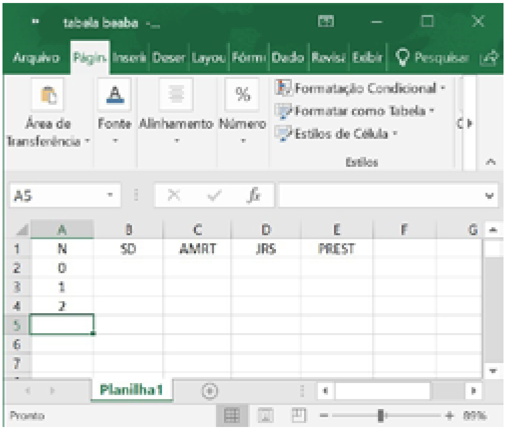


Sejam dois exemplos de um financiamento de a ser liquidado em quatro parcelas com juros de por período, que serão, por sua vez, realizados por distintos métodos de financiamento (o mesmo exemplo aparece no exercício 2 do capítulo 2 e no quadro 10 do capítulo 3, para o SAC).

Algo que pode ser adiantado, para ambos os casos, é o número de períodos (quatro). Tem-se a oportunidade de fazer uma pequena explanação sobre um importante recurso do Excel.

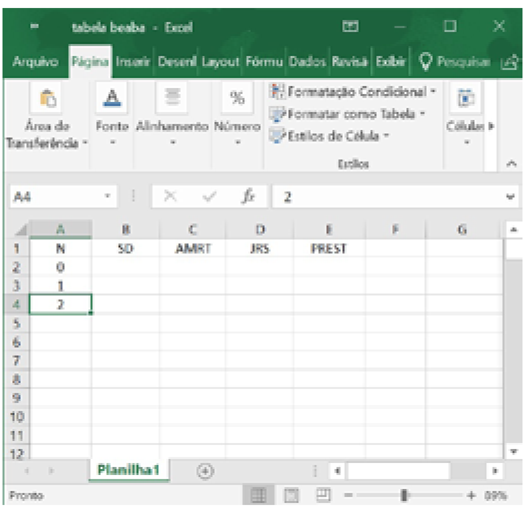
Na coluna N dá-se início ao preenchimento dos períodos a partir do zero, como na figura:

Figura 2: Estruturando uma tabela de financiamento (Price/SAC) – definindo o número de períodos, etapa um



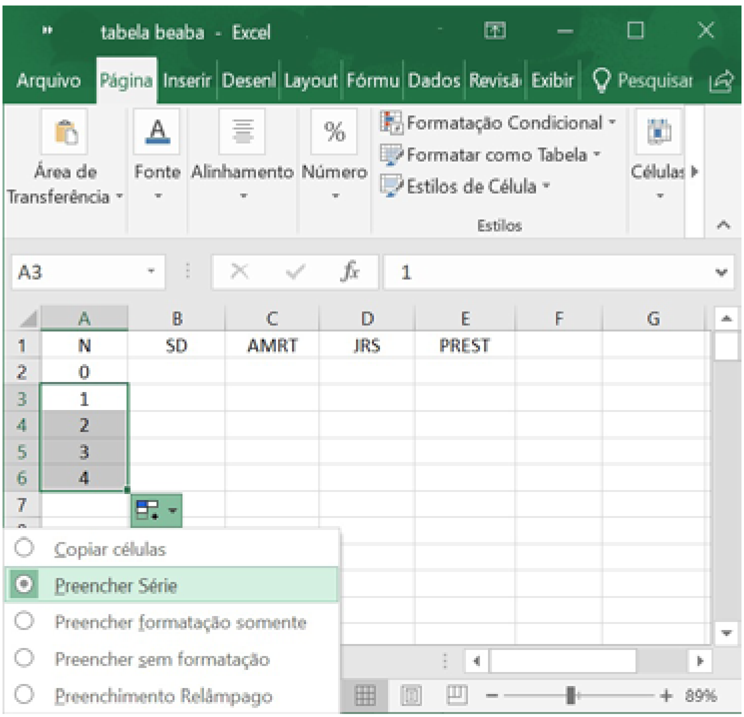
Agora as células preenchidas deverão ser selecionadas, como na figura a seguir:

Figura 3: Estruturando uma tabela de financiamento (Price/SAC) – definindo o número de períodos, etapa dois



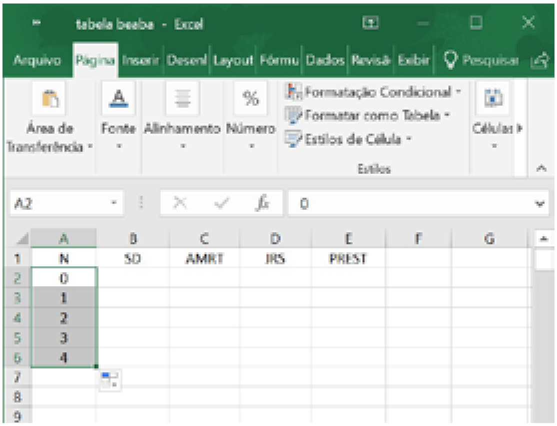
No canto inferior direito do objeto selecionado há um pequeno quadrado: quando o ponteiro é ali colocado surge uma cruz; pressiona-se então o botão esquerdo do mouse para realizar o "arraste" até o ponto em que o pequeno quadrado que aparece ao lado mostre o período desejado, como na figura 4.

Figura 4: Estruturando uma tabela de financiamento (Price/SAC) – definindo o número de períodos para quatro, adaptando-se ao exemplo de um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, etapa um



O que resulta em:

Figura 5: Estruturando uma tabela de financiamento (Price/SAC) – definindo o número de períodos para quatro, adaptando-se ao exemplo de um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, etapa dois



Até aqui se pode pensar: "talvez fosse mais fácil apenas preencher as células", mas o que há de se perceber é que o Excel soube identificar o comportamento da progressão existente entre as células, o que neste caso é a soma do valor da célula anterior mais um. Ademais, não seria de boa prática digitar séries longas termo a termo, os erros seriam muito grandes.

Aqui foram preenchidas as células A2, A3 e A4 com 0, 1 e 2 consecutivamente, entretanto, apenas por ilustração. O preenchimento das duas primeiras células, para o caso em questão, seria suficiente para o Excel identificar as características da sequência.

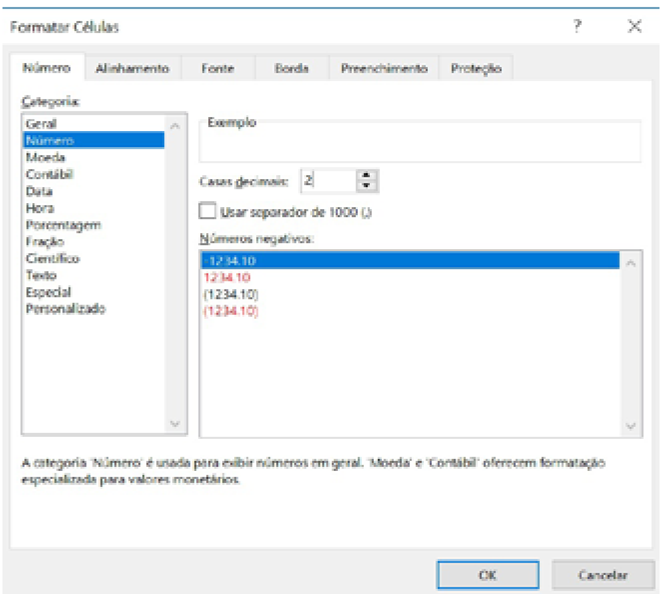
Este método de "arraste", que leva a uma autocomplementação por parte do Excel, será muito útil; por exemplo, se os juros do período n são sempre calculados sobre o saldo devedor do período $n-1$, então bastará somente programar a primeira célula para que o "arraste" do Excel dê o resultado das células posteriores, como será mostrado adiante.

A seguir, as colunas de SD até PRST (aqui de B até E) deverão ser selecionadas; então na guia “Início”, aba “Número”, clica-se sobre a seta transversal localizada no canto inferior direito (indicada pela seta).

Figura 6: Estruturando uma tabela de financiamento (Price/SAC): definindo o número de casas decimais

Aparecerá então a seguinte tela:

Figura 7: Estruturando uma tabela de financiamento (Price/SAC) – definindo o número de casas decimais para duas



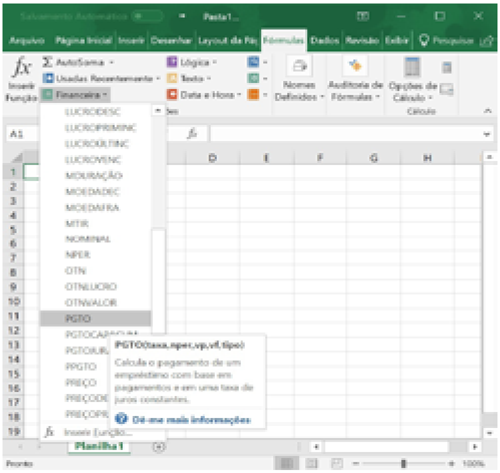
Nessa caixa de diálogo, na aba “número”, categoria “número” deve-se definir com quantas casas decimais aparecerão os valores expressos na tabela, que por serem de unidades monetárias terão duas casas decimais. Preferiu-se não usar "separador de mil", dado os baixos números do exemplo. Clica-se em OK.

2.12.1 Tabela Price

No sistema de prestação constante há de se calcular primordialmente o valor da prestação, e para tal usa-se a função PGTO. Existem dois métodos para acessar esta função.

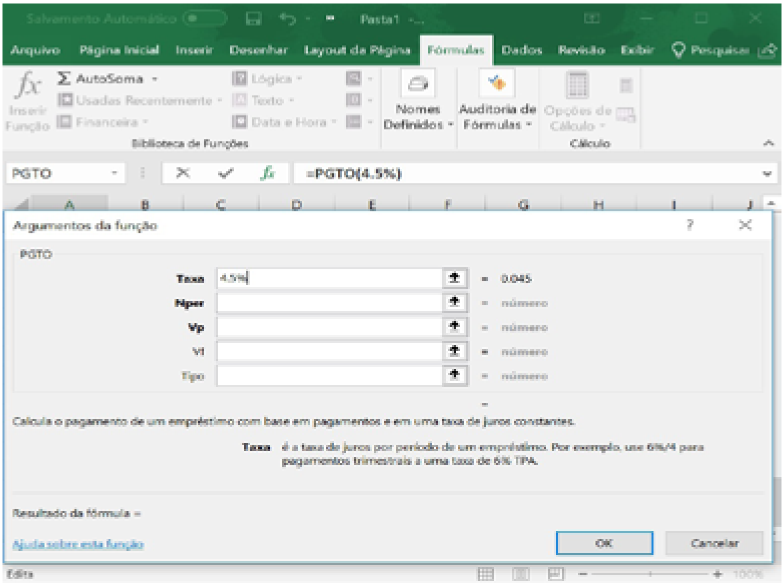
1º Escolhe-se uma célula que não pertença a nenhuma das colunas que foram editadas, neste caso G1, acessa-se a aba "Fórmulas", seleciona-se o item "Financeira", e na lista alfabética que aparecerá, escolhe-se a opção "PGTO", como na figura:

Figura 8: Estruturando uma tabela Price – determinação do valor da prestação pela função PGTO do Excel, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, método um, etapa um



Aparecerá então a tela:

Figura 9: Estruturando uma tabela Price – determinação do valor da prestação pela função PGTO do Excel, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, método um, etapa dois



Onde:

Taxa – é a taxa de juros por período de um empréstimo. Pode estar tanto na forma decimal quanto percentual (quando o sinal % é de uso obrigatório), além de poder ser fracionada pelos seus subperíodos de composição.

Nper – é o número total de pagamentos em um empréstimo.

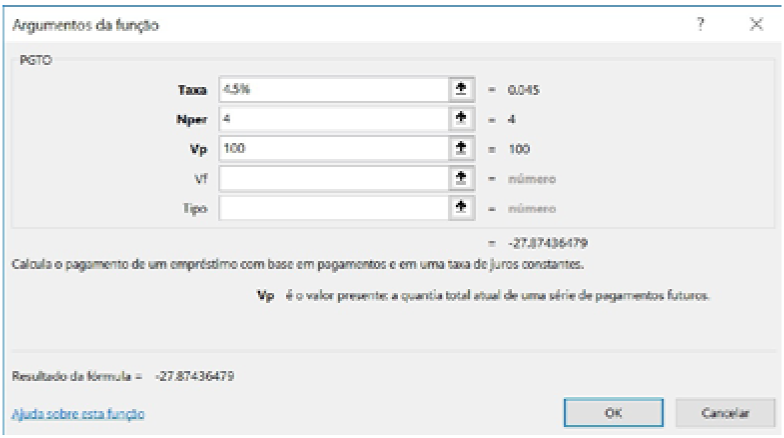
Vp – é o valor atual (isto é, o principal) de uma série de pagamentos.

Vf– é o valor futuro de uma série de pagamentos (isto é, o montante).

Tipo – é um valor lógico; pagamento no início do período: = 1; pagamento ao final do período: ou = 0 ou sem especificação (normalmente é deixado em branco).

Após o preenchimento do argumento, troca-se a linha com o *mouse*.

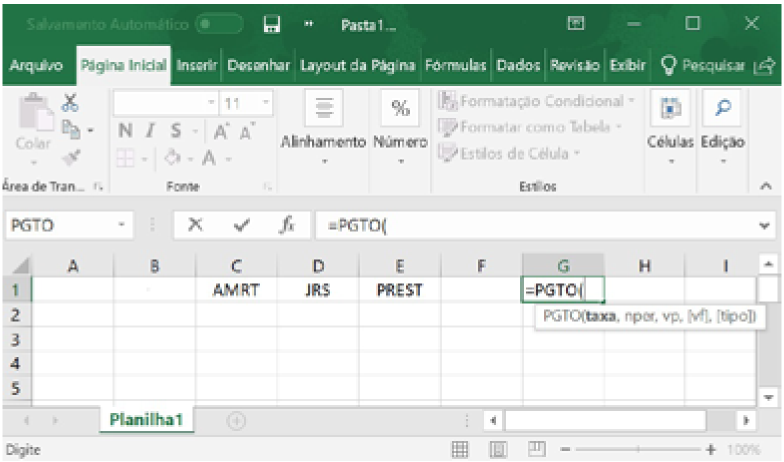
Figura 10: Estruturando uma tabela Price – determinação do valor da prestação pela função PGTO do Excel, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, método um, resultado



Clica-se em OK (ou tecla-se ENTER), o que resulta numa prestação de R$ 27,87 na célula G1.

2° Por sua vez, muito mais simples, este método inicia-se com a seleção de uma célula, neste caso (novamente) a G1. Digita-se "=pgto(" e o programa então solicitará os argumentos, como mostra a figura:

Figura 11: Estruturando uma tabela Price – determinação do valor da prestação pela função PGTO do Excel, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, método dois, etapa um



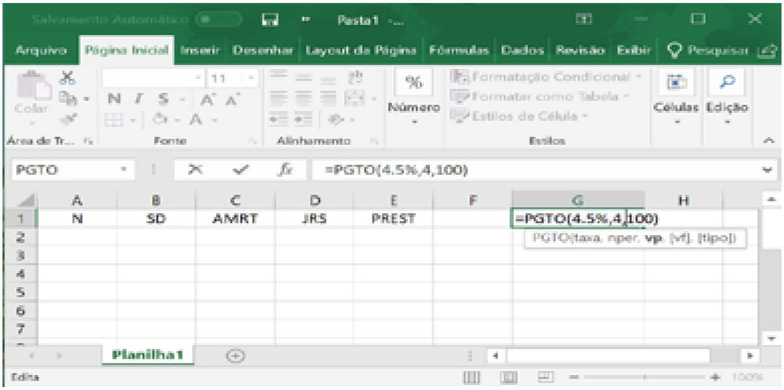
Que dado o exemplo em questão serão assim preenchidos:

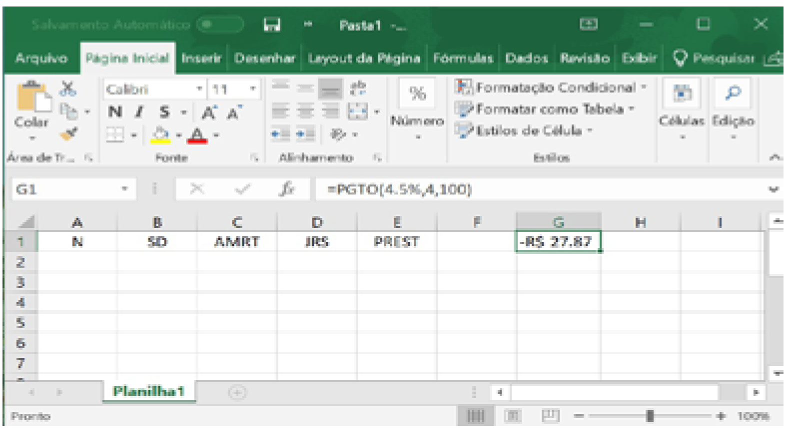
= pgto(0,045;4;100,00;;)

e tecla-se ENTER.

Como mostra a figura:

Figura 12: Estruturando uma tabela Price – determinação do valor da prestação pela função PGTO do Excel, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, método dois, resultado:



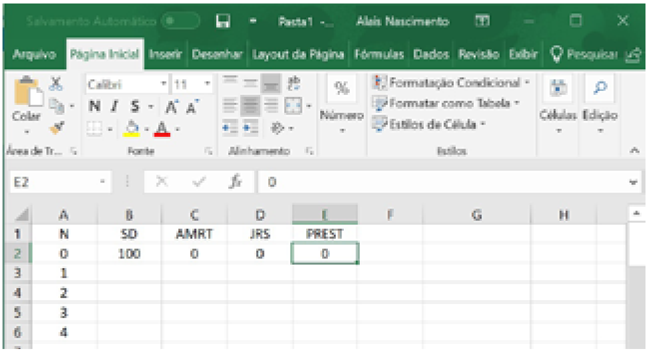


O valor da prestação resultará, novamente, em R$ 27,87.

Agora basta preencher a tabela com as informações correntes.

O saldo devedor no período zero é de R$ 100,00, a amortização, os juros pagos e a prestação do mesmo período são todos nulos.

Figura 13: Estruturando uma tabela Price – preenchimento dos dados iniciais, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, etapa um



Quanto aos próximos períodos sabe-se, até então, apenas os valores de R$ 27,87 das prestações. Essa informação é então adicionada à célula que representa a prestação do primeiro período, aqui a célula E3, que, ao ser selecionada, deve ser "arrastada" até o último período.

Figura 14: Estruturando uma tabela Price – preenchimento dos dados iniciais, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, etapa dois

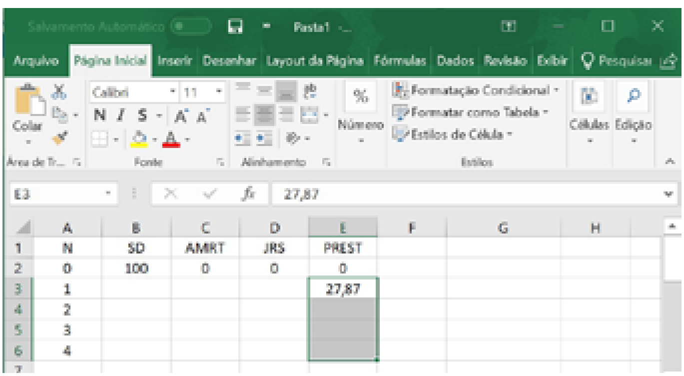
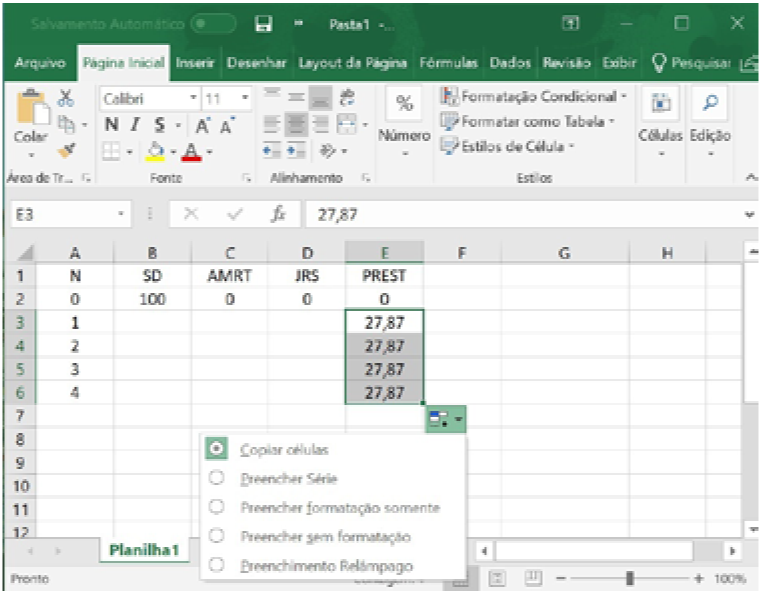


Figura 15: Estruturando uma tabela Price – preenchimento dos dados iniciais, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%, etapa final



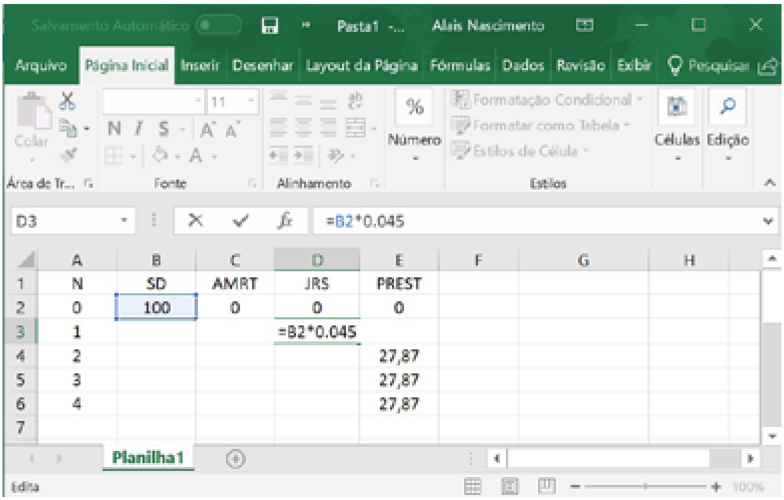
O valor dos juros do período um é calculado sobre o saldo devedor do período zero, o que funciona no Excel da seguinte forma:

Seleciona-se a célula que representa os juros do primeiro período, neste caso D3, e nela digita-se o comando:

= B2*0,045 ou digita-se = na célula D3; com o cursor na célula B2, clica-se no botão esquerdo do *mouse* (quando aparece =B2) e digita-se *0,045 e ENTER. Aparece o valor de 4,50.

B2 é a célula que representa o valor do saldo devedor no período zero multiplicada pela taxa de juros do problema, que representa exatamente os juros do primeiro período. Observa-se que, ao se escrever o comando, o Excel sinaliza quais células estão envolvidas na operação, como na figura a seguir:

Figura 16: Estruturando uma tabela Price – cálculo do valor do primeiro pagamento de juros, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



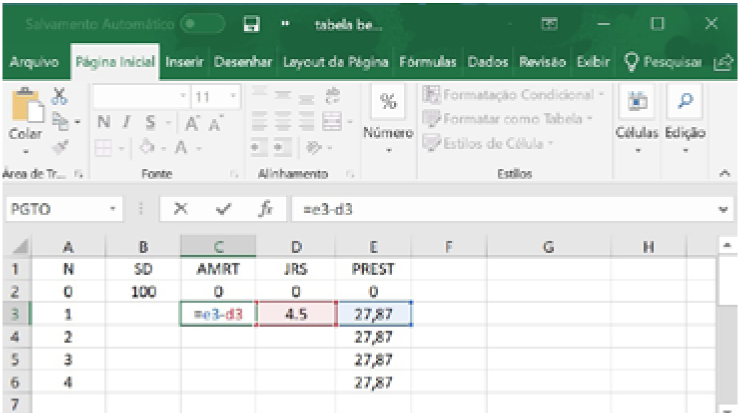
O valor da amortização do primeiro período é igual ao valor da prestação subtraído o valor dos juros, ambos também pertencentes ao mesmo período.

Seleciona-se a célula que representa a amortização do primeiro período, neste caso C3, para nela digitar-se o seguinte comando:

=E3-D3 e ENTER, aparece 23,37

Ou, digita-se = na célula C3 e clica-se na célula E3 seguido de –; clica-se a célula D3 e ENTER. Então aparece 23,37.

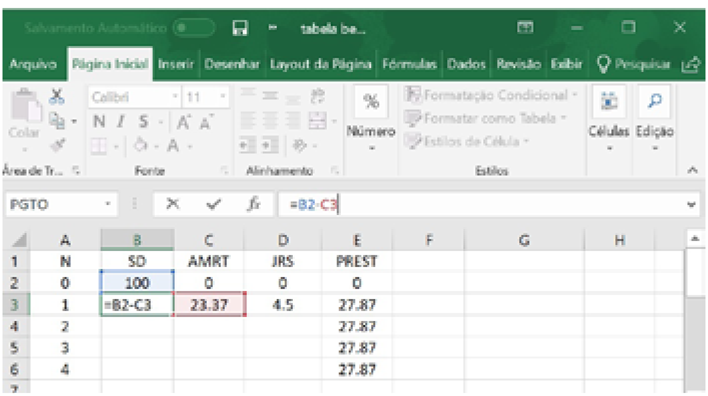
Figura 17: Estruturando uma tabela Price – cálculo do valor da primeira amortização, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



Por fim, o valor do saldo devedor do primeiro período é calculado subtraindo-se a amortização do primeiro período do valor do saldo devedor do período zero. No Excel, seleciona-se a célula que representa o saldo devedor do primeiro período, neste caso B3; nela digita-se o seguinte comando:

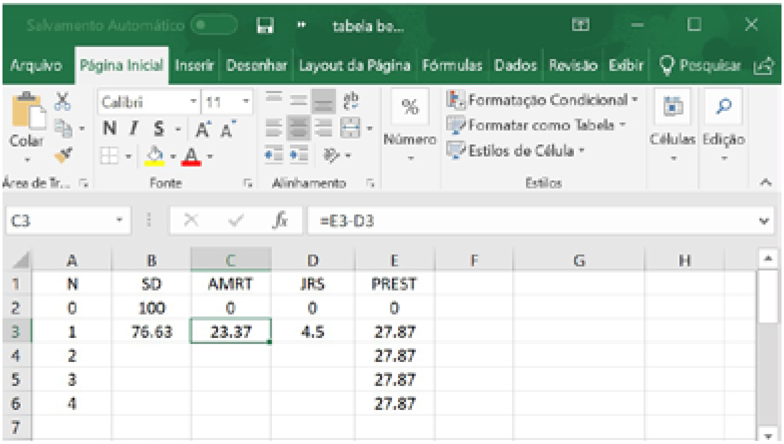
=B2-C3

Figura 18: Estruturando uma tabela Price – cálculo do saldo devedor do primeiro período, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



Ao apertar ENTER para o último comando, obtém-se o seguinte resultado:

Figura 19: Estruturando uma tabela Price – observação sobre as funções que ficaram definidas nas células, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



Seria possível então dar sequência aos procedimentos feitos até aqui para as próximas linhas, porém, como foi dito anteriormente, o Excel permite realização de "arraste".

Ao selecionar a célula C3 surge, na parte superior da figura, a definição de sua função. Para o Excel C3=E3-D3, então, ao autocompletar para C4, surgirá um resultado que é consequência de um comportamento análogo, ou seja, C4=E4-D4. Essa é a base para a edição de todo o resto da tabela.

As seguintes células estão assim programadas:

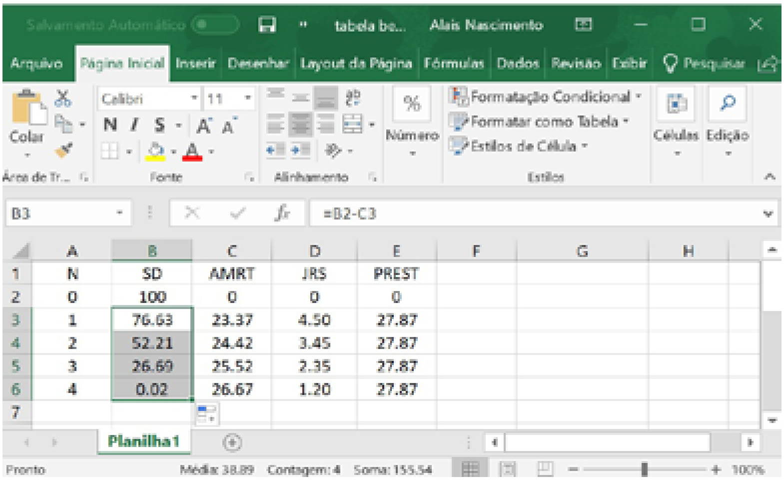
B3=B2-C3 (saldo devedor)

C3=E3-D3 (amortização)

D3=B2*0,045 (juros)

Basta agora selecionar cada uma destas células e “arrastar” até o último período, não importando a ordem desses “arrastes”, o que resultará então na tabela Price, como se vê a seguir:

Figura 20: Estruturando uma tabela Price – expansão dos resultados para os demais períodos, dadas as funções que ficaram definidas, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



	A	B	C	D	E
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST
2	0	100	0	0	0
3	1	76.63	23.37	4.50	27.87
4	2	52.21	24.42	3.45	27.87
5	3	26.69	25.52	2.35	27.87
6	4	0.02	26.67	1.20	27.87

2.12.1.1 Soma dos totais

Tem-se aqui a possibilidade de enriquecer a tabela com mais informação, podendo-se, então, colocar em uma linha posterior o valor das somas das amortizações, dos juros e até mesmo das prestações.

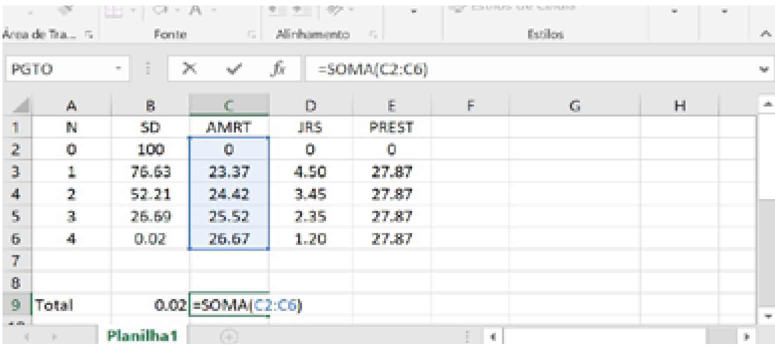
Escolhe-se uma nova linha, aqui, por exemplo, a linha nove, cuja célula A9 se denominará “Total”.

Segue o comando na célula C9:

=soma(C2:C6)

Ou, posiciona-se o cursor em ∑, na aba “Início”, subgrupo “Edição”, e clica-se com o lado esquerdo do *mouse;* automaticamente serão destacadas as células a serem somadas. Caso queira-se selecionar as células a serem somadas, usa-se o “arraste” sobre elas, passando-se o cursor com o *mouse* no lado esquerdo pressionado.

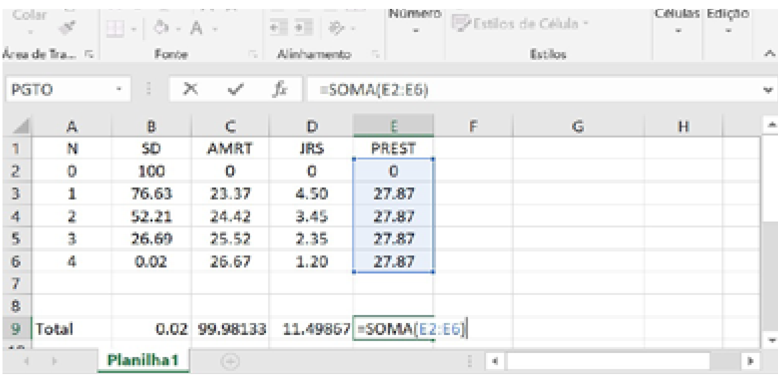
Figura 21: Totais das variáveis Price:
este comando representa a soma das células C2 a C6



	A	B	C	D	E
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST
2	0	100	0	0	0
3	1	76.63	23.37	4.50	27.87
4	2	52.21	24.42	3.45	27.87
5	3	26.69	25.52	2.35	27.87
6	4	0.02	26.67	1.20	27.87
7					
8					
9	Total	0.02	=SOMA(C2:C6)		

O mesmo procedimento pode ser repetido para os juros e as prestações:

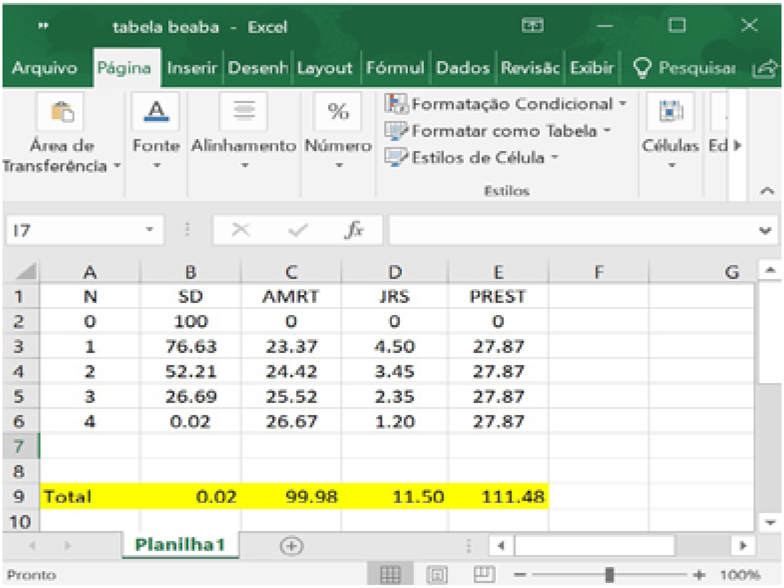
Figura 22: Totais das variáveis Price – caracterização de
uma linha de totais da tabela Price



	A	B	C	D	E
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST
2	0	100	0	0	0
3	1	76.63	23.37	4.50	27.87
4	2	52.21	24.42	3.45	27.87
5	3	26.69	25.52	2.35	27.87
6	4	0.02	26.67	1.20	27.87
7					
8					
9	Total	0.02	99.98133	11.49867	=SOMA(E2:E6)

O que finalmente resulta na tabela Price desejada, que é idêntica à do exercício 2 do capítulo 2 que foi resolvido por calculadora eletrônica.

Figura 23: Tabela Price para um principal de 100,00, com $n = 4$ e $i = 4{,}5\%$



	A	B	C	D	E
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST
2	0	100	0	0	0
3	1	76.63	23.37	4.50	27.87
4	2	52.21	24.42	3.45	27.87
5	3	26.69	25.52	2.35	27.87
6	4	0.02	26.67	1.20	27.87
7					
8					
9	Total	0.02	99.98	11.50	111.48
10					

2.12.2 Cálculo de juros e amortização intraperíodo da tabela Price por Excel

Ressalta-se uma importante informação sobre o uso da função soma: não necessariamente é de interesse saber a soma da totalidade de amortizações ou juros; muitas vezes, essas informações são interessantes parcialmente, ou seja, dentro de um subperíodo.

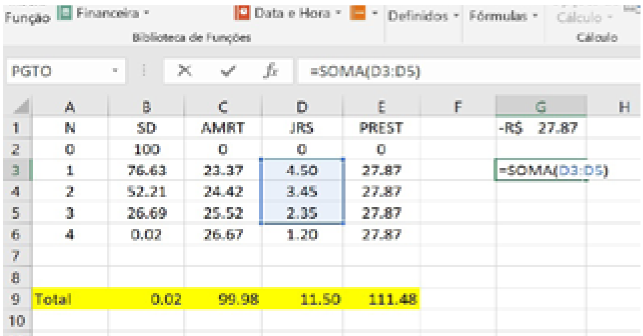
Exemplo: determinar a soma dos juros pagos da primeira à terceira prestação.

Seleciona-se uma célula externa à tabela, aqui G3, na qual se digita o comando,

=soma(D3:D5)

Ou seja, a soma do primeiro até o terceiro pagamento de juros.

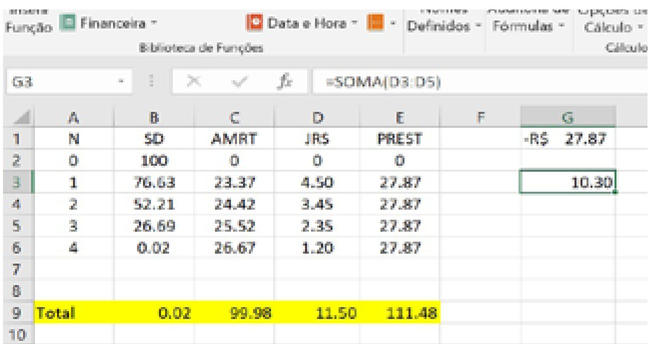
Figura 24: Primeira etapa do cálculo dos juros pagos do 1° ao 3° período por tabela Price para um principal de 100,00, n = 4 e i = 4,5%



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST		-R$ 27.87	
2	0	100	0	0	0			
3	1	76.63	23.37	4.50	27.87		=SOMA(D3:D5)	
4	2	52.21	24.42	3.45	27.87			
5	3	26.69	25.52	2.35	27.87			
6	4	0.02	26.67	1.20	27.87			
7								
8								
9	Total	0.02	99.98	11.50	111.48			
10								

Que, ao pressionar ENTER, resume-se em:

Figura 25: Resultado do cálculo dos juros pagos do 1° ao 3° período por tabela Price para um principal de 100,00, n = 4 e i = 4,5%



	A	B	C	D	E	F	G
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST		-R$ 27.87
2	0	100	0	0	0		
3	1	76.63	23.37	4.50	27.87		10.30
4	2	52.21	24.42	3.45	27.87		
5	3	26.69	25.52	2.35	27.87		
6	4	0.02	26.67	1.20	27.87		
7							
8							
9	Total	0.02	99.98	11.50	111.48		
10							

Totalizam-se 10,30 de juros pagos do 1° ao 3° período. Procedimento similar pode ser realizado para as amortizações no citado intervalo, que por sua vez, totalizam 73,31.

2.12.3 Carência na tabela Price

A carência é uma operação muito comum no mercado financeiro, e aqui é apresentado um método para Excel, em acréscimo ao da edição das tabelas Price e SAC, que permita incluir esse tipo de operação nas tabelas.

A carência é apresentada, de forma geral, como o número de períodos existentes entre o início do contrato e o início da amortização do principal.

Para um número *k* de períodos de carência, tem-se que, durante os *k* primeiros períodos do contrato não haverá amortização do principal.

Existem duas modalidades de carência:

a) com pagamento de juros durante a carência; ou

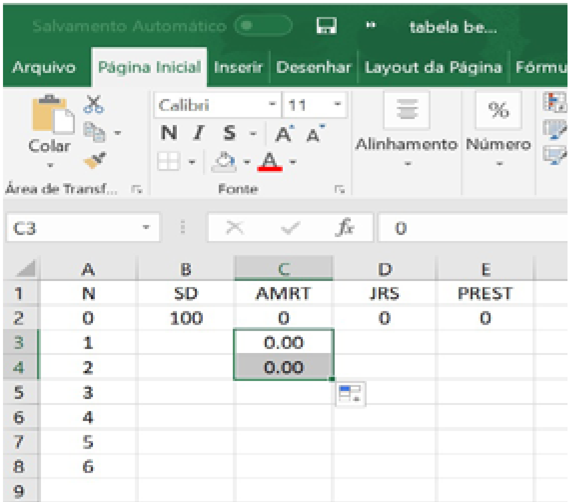
b) sem pagamento de juros durante a carência.

Considere-se um financiamento de 100,00, em seis parcelas, com juros de 4,5% por período pela tabela Price e com dois períodos de carência.

Em etapas iniciais a edição da tabela é equivalente a apresentada anteriormente, porém, o número de parcelas agora é a soma do número de períodos da carência e o número de prestações, tal que, neste exemplo, é igual a seis.

Nomeiam-se as colunas com as variáveis e imputa-se o número total de períodos e os outros dados iniciais do problema, com o adicional de dar valor zero às células relativas à amortização que pertencem aos períodos da carência, como na figura:

Figura 26: Financiamento por tabela Price de 100,00, em quatro prestações a uma taxa de 4,5% ao período, com dois períodos de carência



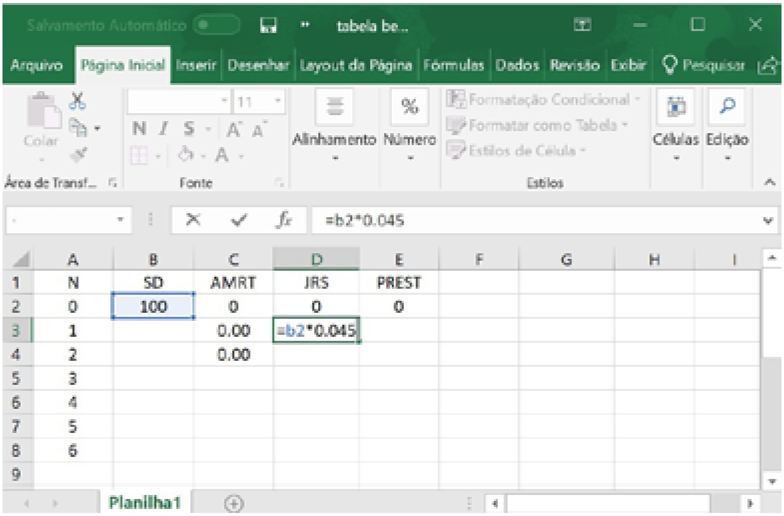
Na tabela anterior fica explícita a diferença, as células de amortização relativas aos dois períodos de carência, C3 e C4, apresentam valor zero, ou seja, não há amortização do principal.

A programação para o cálculo dos juros no primeiro período é:

D3=B2*0,045

Como na figura a seguir:

Figura 27: Última etapa anterior à definição do estilo de carência



A partir da estrutura apresentada na figura anterior pode-se dar início à edição de uma tabela que apresente, ou não, pagamento de juros durante a carência.

A diferenciação está na alocação dos juros do período, ou para o valor da prestação do período, modalidade (A), ou para ser adicionado ao saldo devedor, modalidade (B), caso em que o saldo devedor do período corrente é maior que o anterior.

Caso A: com pagamento de juros durante a carência

O valor dos juros de um período que pertença à carência serão deslocados, neste caso, para o valor da prestação do período em questão, havendo assim pagamento de juros durante a carência.

Durante os períodos de carência os valores assumidos pela prestação serão iguais aos valores dos juros em cada período, pois durante a carência a amortização é zero.

A prestação de um período e o saldo devedor são calculados, para esta modalidade, durante a carência, como:

E3=C3+D3 (Prestação)

B3=B2-C3 (Saldo Devedor)

Como nas figuras a seguir:

Figura 28: Construção da tabela Price no Excel I

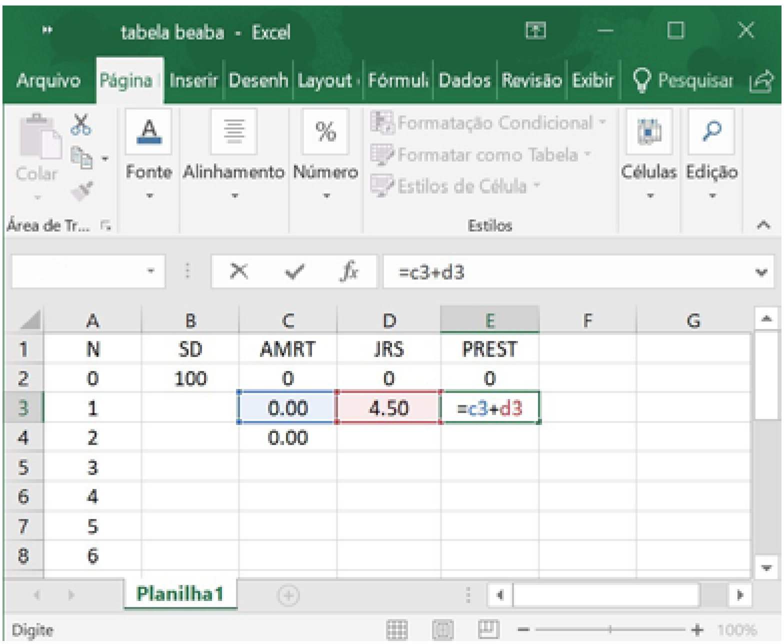
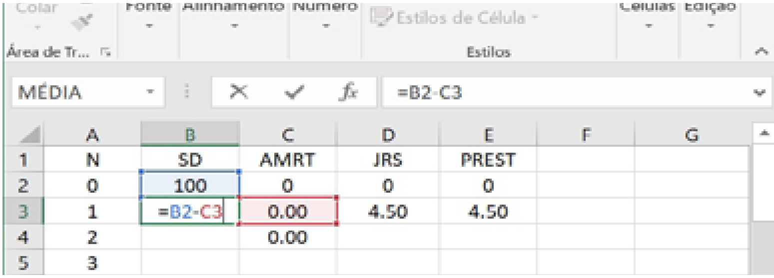


Figura 29: Construção da tabela Price no Excel II

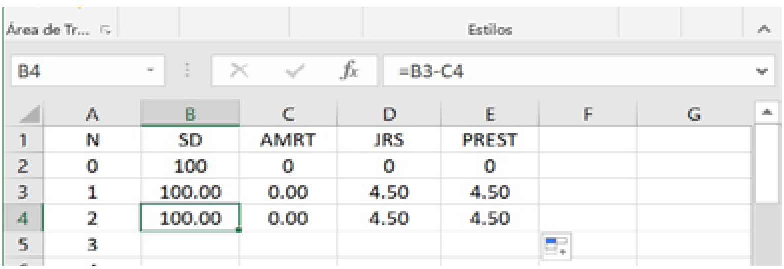


	A	B	C	D	E	F	G
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST		
2	0	100	0	0	0		
3	1	=B2-C3	0.00	4.50	4.50		
4	2		0.00				
5	3						

Os saldos devedores dos períodos da carência, para esta modalidade, serão sempre iguais, dado o fato de não haver amortização.

As programações das células que se encontram na linha relativa ao período um, podem agora ser estendidas até o fim da carência, como mostra a figura 30 a seguir:

Figura 30: Construção da tabela Price no Excel III



	A	B	C	D	E	F	G
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST		
2	0	100	0	0	0		
3	1	100.00	0.00	4.50	4.50		
4	2	100.00	0.00	4.50	4.50		
5	3						

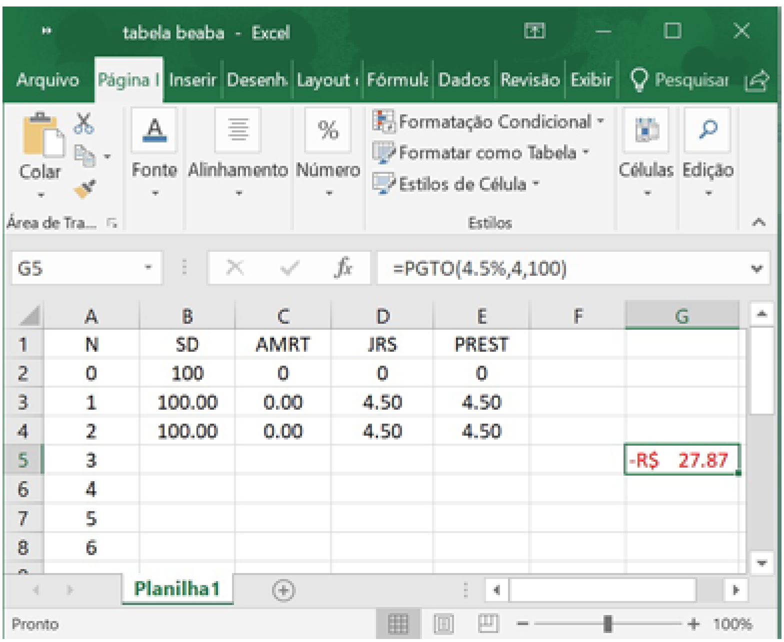
A lógica que determina o valor das variáveis durante a carência é diferente da que determina os valores após a mesma carência, portanto, a partir da etapa apresentada na figura anterior pode-se determinar o tipo de financiamento a ser realizado sobre o saldo devedor do último período da carência, dada a taxa de juros corrente e o número de períodos restantes, sendo que, para este caso, realiza-se por tabela Price.

Determina-se então o valor da prestação para os quatro períodos restantes, com taxa de juros de 0,045 por período para um principal de 100,00, que, por sua vez, é igual ao saldo devedor alcançado no último período da carência. Escolhe-se alguma célula que não pertença à tabela, aqui G5, e digita-se o seguinte comando:

=PGTO(0,045;4;100;;)

O resultado é de 27,87 para o valor da prestação. Este resultado deve ser expandido para o valor de todas as outras prestações restantes, como mostra a figura 31 a seguir:

Figura 31: Construção da tabela Price no Excel IV



A programação das células aqui se dá da maneira habitual. Para o exemplo é:

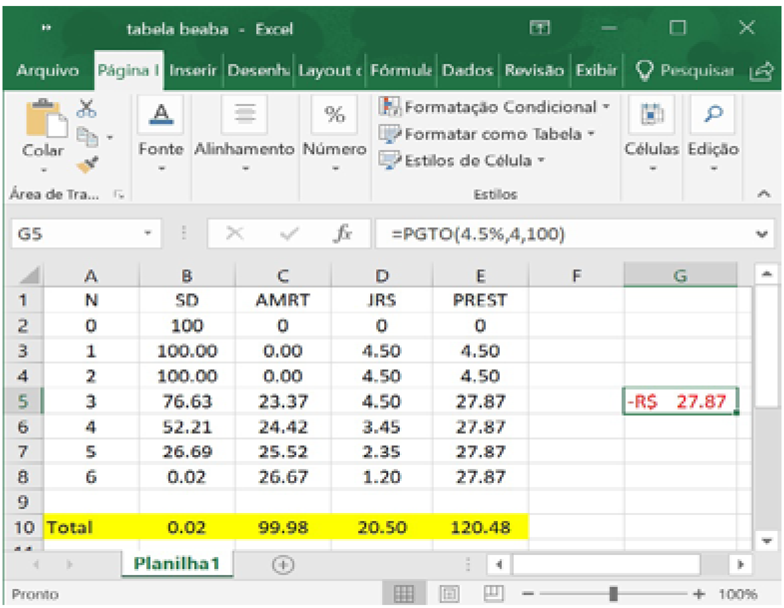
B5=B4-C5 (saldo devedor)

C5=E5-D5 (amortização)

D5=B4*0,045 (juros)

Estendendo-se as programações para as células restantes e posteriormente adicionando-se a linha “Total”, conclui-se como na figura 32:

Figura 32: Construção da tabela Price no Excel V



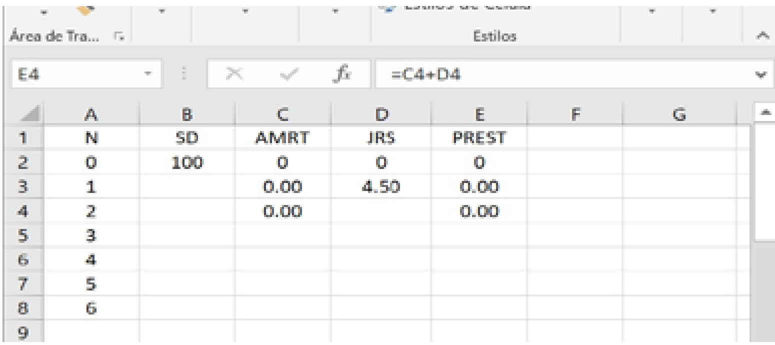
	A	B	C	D	E	F	G
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST		
2	0	100	0	0	0		
3	1	100.00	0.00	4.50	4.50		
4	2	100.00	0.00	4.50	4.50		
5	3	76.63	23.37	4.50	27.87		-R$ 27.87
6	4	52.21	24.42	3.45	27.87		
7	5	26.69	25.52	2.35	27.87		
8	6	0.02	26.67	1.20	27.87		
9							
10	Total	0.02	99.98	20.50	120.48		

Caso B: sem pagamento de juros durante a carência

Partindo da última etapa anterior à especificação da carência, define-se agora o caso em que, em vez de pagos, os juros são agregados ao saldo devedor do período.

Como nessa modalidade nem juros nem amortizações são pagos em seus períodos correntes, durante a carência, tem-se que os valores assumidos pelas prestações serão nulos. Essa nova informação é então imputada na tabela, como mostra a figura 33:

Figura 33: Construção da tabela Price no Excel VI



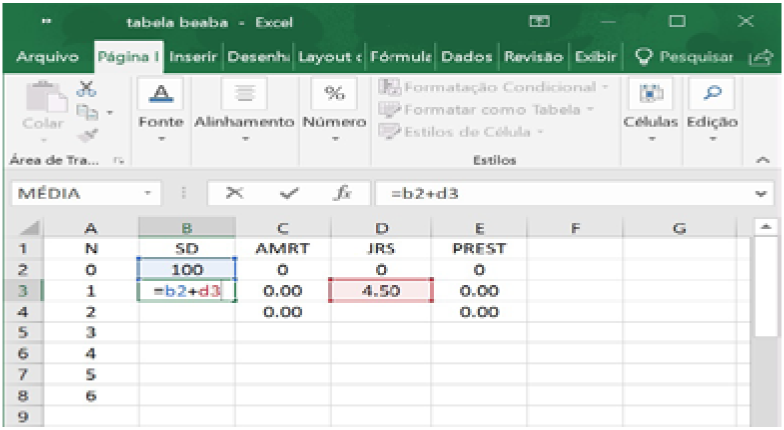
	A	B	C	D	E	F	G
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST		
2	0	100	0	0	0		
3	1		0.00	4.50	0.00		
4	2		0.00		0.00		
5	3						
6	4						
7	5						
8	6						
9							

O saldo devedor de um período que pertença à carência será igual a soma do saldo devedor do período anterior mais o valor dos juros do período corrente, juros estes que não foram pagos e que, portanto, se acumularam.

A célula que representa o primeiro saldo devedor (B3) terá a seguinte programação:

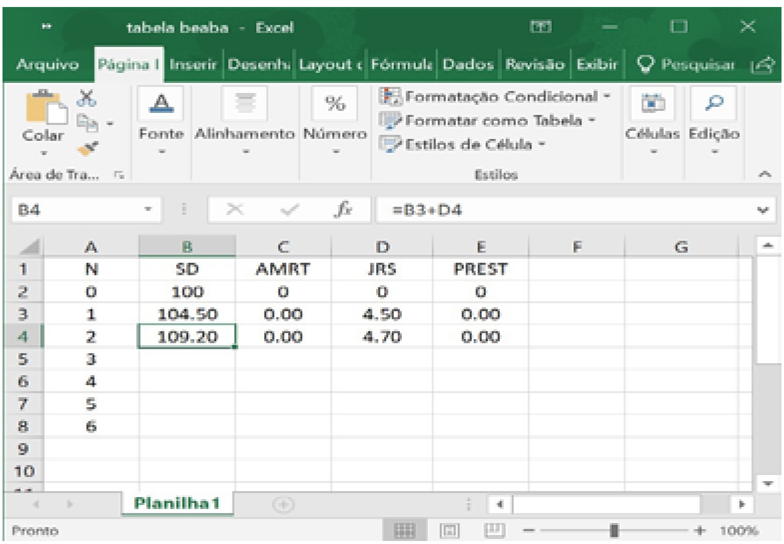
=B2+D3

Figura 34: Construção da tabela Price no Excel VII



Estendendo as programações existentes nas células do primeiro período até o fim da carência, tem-se:

Figura 35: Construção da tabela Price no Excel VIII



Basta agora calcular o valor da prestação para os quatro períodos restantes, com uma taxa de juros de 0,045 por período e principal de 109,20, que, por sua vez, é igual ao saldo devedor alcançado no último período da carência.

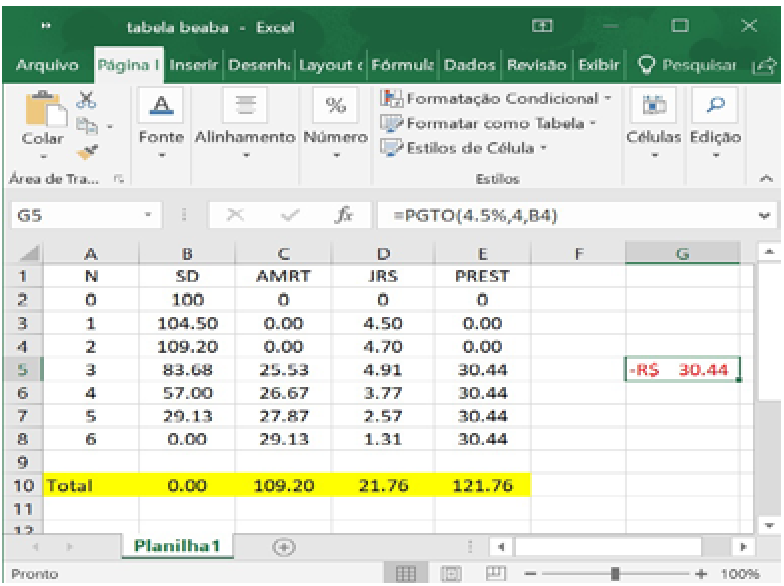
Em alguma célula que não pertença à tabela, aqui G5, digita-se o seguinte comando:

=PGTO(0,045;4;109,2;;)

O valor encontrado para prestação é de 30,44.

Realizando os procedimentos usuais para a edição da tabela Price, alcança-se o seguinte resultado:

Figura 36: Construção da tabela Price no Excel IX



G5 =PGTO(4.5%,4,B4)

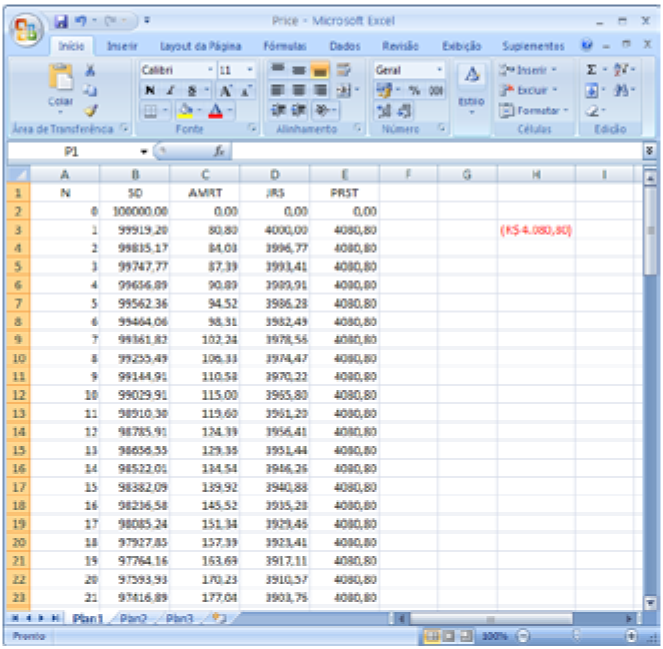
	A	B	C	D	E	F	G
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST		
2	0	100	0	0	0		
3	1	104.50	0.00	4.50	0.00		
4	2	109.20	0.00	4.70	0.00		
5	3	83.68	25.53	4.91	30.44		-R$ 30.44
6	4	57.00	26.67	3.77	30.44		
7	5	29.13	27.87	2.57	30.44		
8	6	0.00	29.13	1.31	30.44		
9							
10	Total	0.00	109.20	21.76	121.76		
11							

2.12.4 Tabela Price em gráficos no Excel

Apresenta-se um método para a construção de gráficos para as variáveis da tabela Price. O gráfico permitirá que se tomem conclusões visuais sobre a tabela.

Seja um financiamento de 100.000,00 em cem meses à taxa de 4% a.m., representado (parcialmente) pela tabela Price adiante:

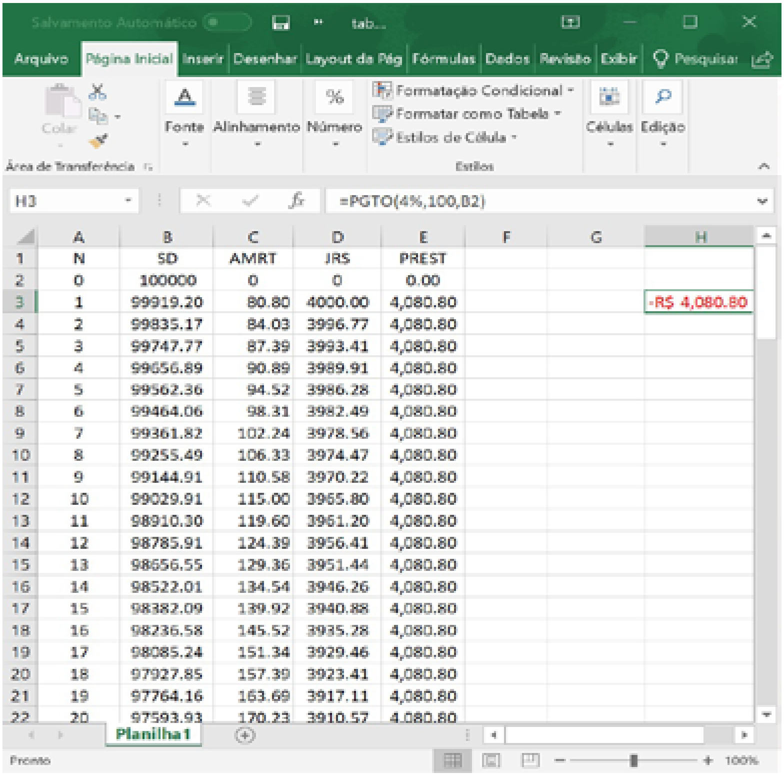
Figura 37: Tabela Price de um financiamento de 100.000,00 para $n = 100$ e $i = 4\%$;



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	N	SD	AMRT	JRS	PRST				
2	0	100000,00	0,00	0,00	0,00				
3	1	99919,20	80,80	4000,00	4080,80			(R$ 4.080,80)	
4	2	99835,17	84,03	3996,77	4080,80				
5	3	99747,77	87,39	3993,41	4080,80				
6	4	99656,89	90,89	3989,91	4080,80				
7	5	99562,36	94,52	3986,28	4080,80				
8	6	99464,06	98,31	3982,49	4080,80				
9	7	99361,83	102,24	3978,56	4080,80				
10	8	99255,49	106,33	3974,47	4080,80				
11	9	99144,91	110,58	3970,22	4080,80				
12	10	99029,91	115,00	3965,80	4080,80				
13	11	98910,30	119,60	3961,20	4080,80				
14	12	98785,91	124,39	3956,41	4080,80				
15	13	98656,55	129,36	3951,44	4080,80				
16	14	98522,01	134,54	3946,26	4080,80				
17	15	98382,09	139,92	3940,88	4080,80				
18	16	98236,58	145,52	3935,28	4080,80				
19	17	98085,24	151,34	3929,46	4080,80				
20	18	97927,85	157,39	3923,41	4080,80				
21	19	97764,16	163,69	3917,11	4080,80				
22	20	97593,93	170,23	3910,57	4080,80				
23	21	97416,89	177,04	3903,76	4080,80				

Observa-se que a planilha seguinte retrata tão somente 21 dos cem meses de financiamento observáveis no computador

Figura 38: Construção da tabela Price no Excel X

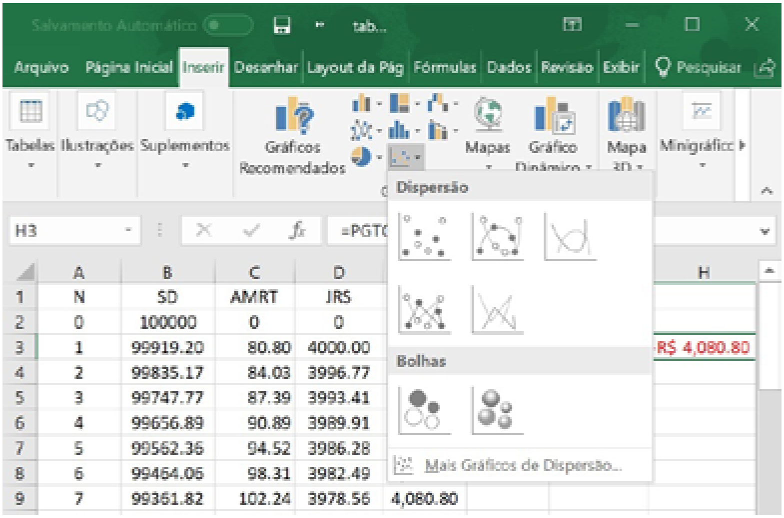


	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST			
2	0	100000	0	0	0.00			
3	1	99919.20	80.80	4000.00	4,080.80			-R$ 4,080.80
4	2	99835.17	84.03	3996.77	4,080.80			
5	3	99747.77	87.39	3993.41	4,080.80			
6	4	99656.89	90.89	3989.91	4,080.80			
7	5	99562.36	94.52	3986.28	4,080.80			
8	6	99464.06	98.31	3982.49	4,080.80			
9	7	99361.82	102.24	3978.56	4,080.80			
10	8	99255.49	106.33	3974.47	4,080.80			
11	9	99144.91	110.58	3970.22	4,080.80			
12	10	99029.91	115.00	3965.80	4,080.80			
13	11	98910.30	119.60	3961.20	4,080.80			
14	12	98785.91	124.39	3956.41	4,080.80			
15	13	98656.55	129.36	3951.44	4,080.80			
16	14	98522.01	134.54	3946.26	4,080.80			
17	15	98382.09	139.92	3940.88	4,080.80			
18	16	98236.58	145.52	3935.28	4,080.80			
19	17	98085.24	151.34	3929.46	4,080.80			
20	18	97927.85	157.39	3923.41	4,080.80			
21	19	97764.16	163.69	3917.11	4,080.80			
22	20	97593.93	170.23	3910.57	4,080.80			

O primeiro gráfico a ser editado mostrará como se comportam as variáveis: amortização, juros e prestação.

Abre-se o Excel para editar uma tabela como a que aparece anteriormente (usando o método desenvolvido para tal no início desta seção). A aba "Inserir", subgrupo "Gráficos", apresenta vários modelos para a construção de gráficos; opta-se pelo de dispersão, o mais comum dos gráficos. Da opção "Dispersão" seleciona-se a alternativa "Dispersão Somente com Marcadores", como na figura:

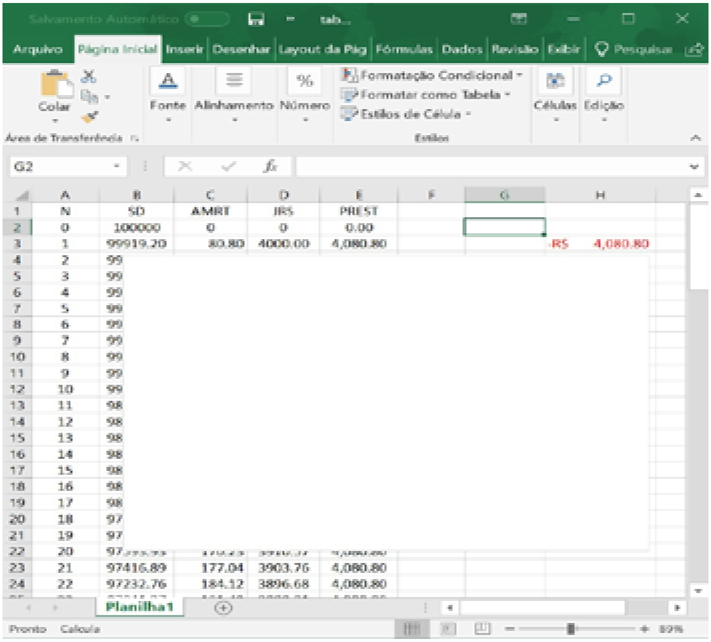
Figura 39: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para n = 100 e i = 4% – seleção do tipo de gráfico



O grande número de dados fará desta opção suficiente, pois, dada a limitação da área disponível para o gráfico, as unidades dos eixos ficarão dispostas de forma mais aglutinada e, consequentemente, os dados também, o que evidenciará a tendência.

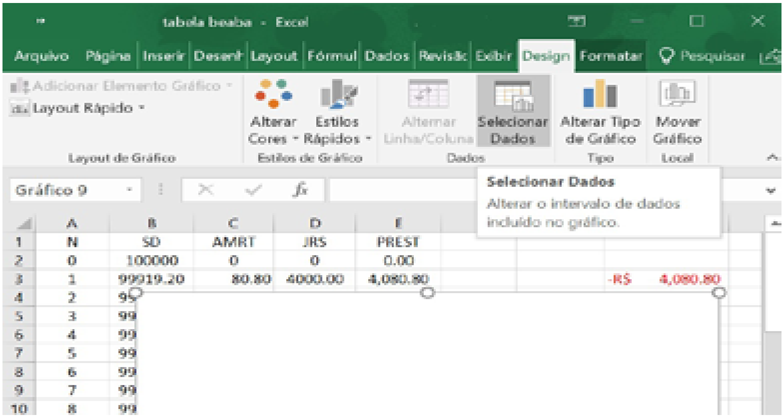
Após o comando surge na tela a área de plotagem do gráfico, como na figura a seguir:

Figura 40: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para *n* = 100 e *i* = 4%; área de plotagem do gráfico e recursos adicionais de edição



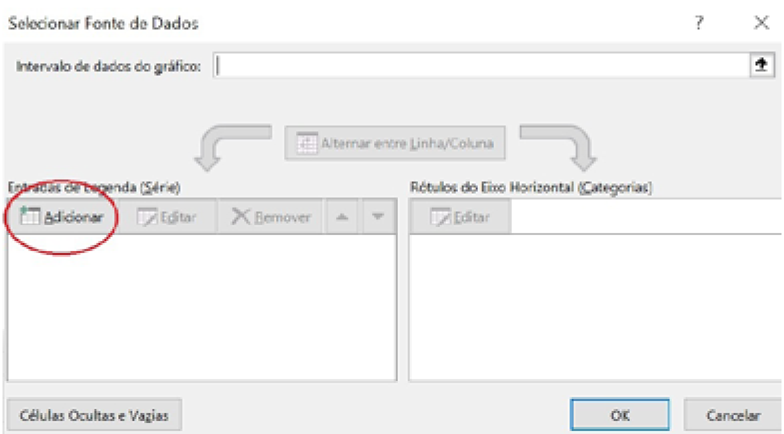
Concomitantemente ao surgimento desta área surgem novas abas na parte superior direita da janela, referentes a ferramentas para edição de gráficos. Em “Ferramentas de Gráfico” na aba “Design” clica-se na opção “Selecionar dados”, como mostra a figura:

Figura 41: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para n = 100 e i = 4% – seleção dos dados, etapa um



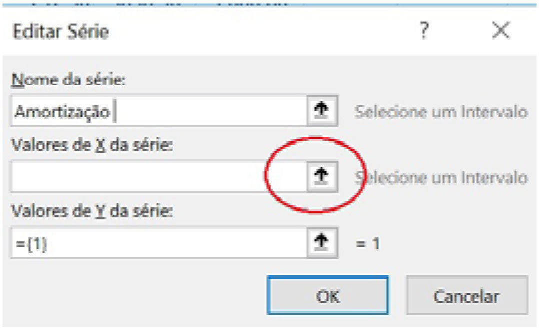
Na janela “Selecionar Fonte de Dados” clica-se em “Adicionar”,

Figura 42: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para n = 100 e i = 4% – seleção dos dados, etapa dois



Surge então a janela “Editar Série”:

Figura 43: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para n = 100 e i = 4% – seleção dos dados, etapa três

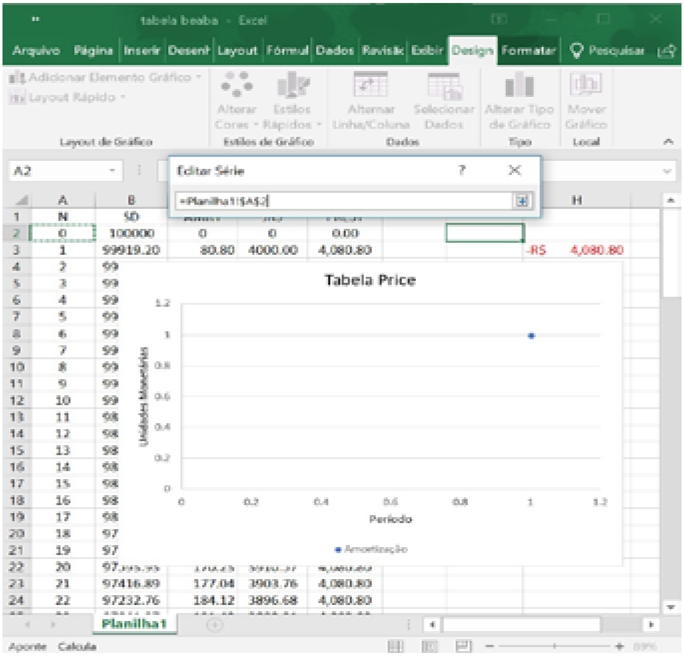


Optou-se aqui por dar início à edição pela série relativa à amortização; o método que será apresentado é o mesmo a ser utilizado posteriormente para as outras séries.

Como na figura anteriormente trazida, dá-se o nome de “Amortização” à série para então serem selecionados os dados relativos a essa variável. As figuras que lembram uma planilha, situadas ao lado das linhas, do qual é exemplo o objeto contornado na figura anterior, permitem o acesso aos dados que estão na tabela.

Deve-se clicar no botão que se situa ao lado da linha referente aos valores de X; estes valores, relativos ao eixo horizontal, representarão a variável período. A janela ativa reaparecerá no topo da planilha após o comando, o que permitirá a seleção. Seleciona-se primordialmente a célula relativa ao período zero, aqui A2, como mostra a figura:

Figura 44: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para n = 100 e i = 4% – seleção dos dados, etapa quatro

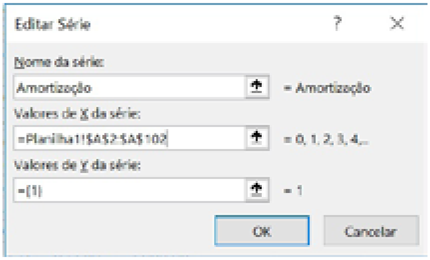


A seleção do resto dos dados se dá pressionando simultaneamente a tecla SHIFT e a tecla ↓ até que se alcance a célula que represente o último período, aqui a célula A102.

Uma outra forma de selecionar os dados se dá com o uso do *mouse*: clica-se na célula relativa ao período zero e mantém-se o botão esquerdo pressionado durante a seleção, realizada, por sua vez, com o arraste do *mouse* na direção dos dados demandados.

A seleção dos dados é evidenciada por um contorno pontilhado, permitindo ao editor observar se os dados foram selecionados corretamente. Feito isso, tecla-se ENTER; eis que surge:

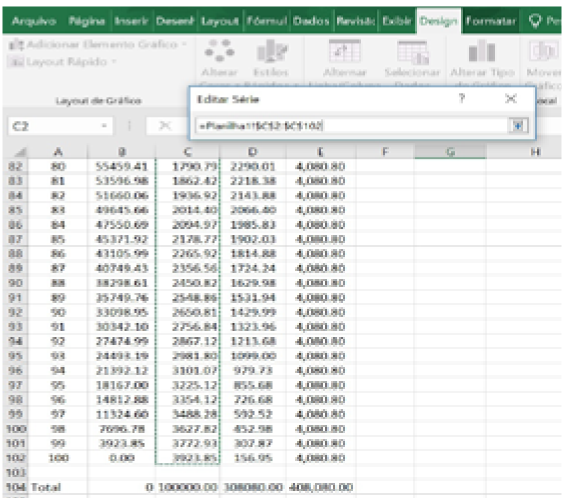
Figura 45: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para $n = 100$ e $i = 4\%$ – seleção dos dados, etapa cinco



Após apagar o ={1} da linha referente aos valores de Y, clica-se na figura ao lado. Os valores relativos ao eixo vertical representarão a variável amortização.

Selecionam-se as células relativas à amortização do período zero, representado aqui por C2, até a que representa o último período, aqui C102, como mostra a figura (observe o pontilhado):

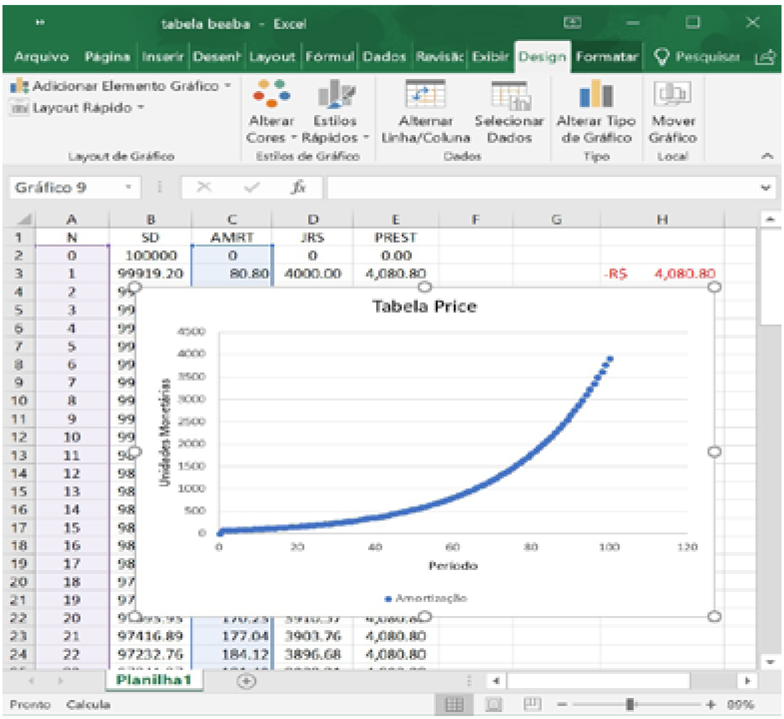
Figura 46: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para $n = 100$ e $i = 4\%$ – seleção dos dados, etapa seis



	A	B	C	D	E
82	80	55459.41	1790.79	2290.01	4,080.80
83	81	53596.98	1862.42	2218.38	4,080.80
84	82	51660.06	1936.92	2143.88	4,080.80
85	83	49645.66	2014.40	2066.40	4,080.80
86	84	47550.69	2094.97	1985.83	4,080.80
87	85	45371.92	2178.77	1902.03	4,080.80
88	86	43105.99	2265.92	1814.88	4,080.80
89	87	40749.43	2356.56	1724.24	4,080.80
90	88	38298.61	2450.82	1629.98	4,080.80
91	89	35749.76	2548.86	1531.94	4,080.80
92	90	33098.95	2650.81	1429.99	4,080.80
93	91	30342.10	2756.84	1323.96	4,080.80
94	92	27474.99	2867.12	1213.68	4,080.80
95	93	24493.19	2981.80	1099.00	4,080.80
96	94	21392.12	3101.07	979.73	4,080.80
97	95	18167.00	3225.12	855.68	4,080.80
98	96	14812.88	3354.12	726.68	4,080.80
99	97	11324.60	3488.28	592.52	4,080.80
100	98	7696.78	3627.82	452.98	4,080.80
101	99	3923.85	3772.93	307.87	4,080.80
102	100	0.00	3923.85	156.95	4,080.80
103					
104	Total	0	100000.00	308080.00	408,080.00

Após pressionar ENTER, surge a janela "Selecionar Fonte de Dados"; clica-se em OK. Na figura a seguir, a janela foi deslocada para que o leitor note que a curva da variável "amortização" está pronta, ou seja, para casos em que se deseje adicionar apenas a curva da "amortização no tempo", ou qualquer outra combinação de variáveis que forme uma curva somente, o procedimento citado até aqui é suficiente.

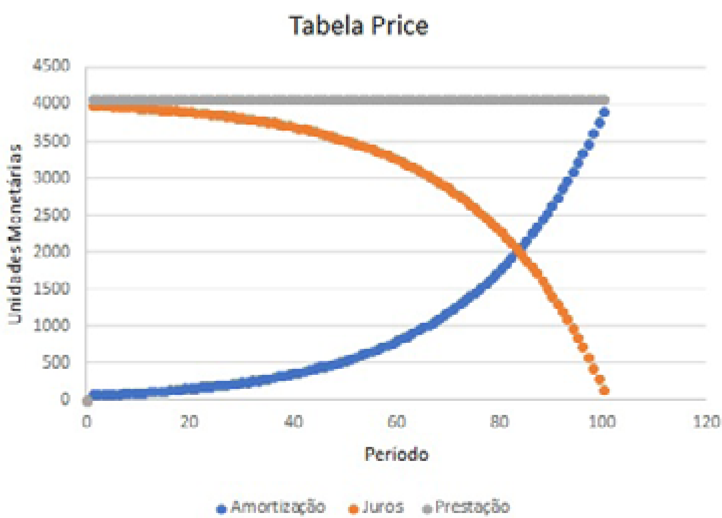
Figura 47: Estruturação de gráfico para os dados de uma tabela Price de um financiamento de 100.000,00, para n = 100 e i = 4% – gráfico parcial



Nosso próximo objetivo é inserir no mesmo gráfico as três curvas relativas à amortização, juros e prestação. Seleciona-se a opção "adicionar" na então ativa janela "Selecionar Fonte de Dados", repetindo-se o procedimento para as outras variáveis, lembrando-se sempre de usar os dados do período no eixo horizontal.

Procedendo da forma citada anteriormente, chega-se ao seguinte resultado:

Gráfico 8: Curvas de amortização, juros e prestação calculadas a partir de um principal de 100.000, n = 100 e i = 4% a.m.



Algumas informações como o título do gráfico ou os títulos dos eixos são feitas na guia "Ferramentas de gráfico" aba "Layout". O gráfico anteriormente apresentado explicita o que de fato caracteriza o sistema Price: o comportamento da variável prestação. A prestação, representada pela reta, assume sempre o mesmo valor indiferentemente do período observado. Os juros, calculados sobre um saldo devedor de comportamento decrescente, apresentam, também, uma tendência de decrescer a taxas decrescentes, caracterizando assim a prioridade, no tempo (perceptível em seus períodos iniciais), que o sistema Price dá ao pagamento dos juros.

Um dado valor de amortização pode ser visto como uma espécie de complementar ao correspondente valor de juros, quando a referência é o valor da prestação. Consequentemente, a curva que representa a amortização é a complementar da curva de juros, portanto, uma função de características antagônicas a ela. A curva que representa a amortização é crescente e cresce a taxas crescentes, assim, quanto mais próximo do término do contrato, maiores serão os valores amortizados. As técnicas de edição de gráficos apresentadas aqui permitirão ao leitor tomar consciência do comportamento das variáveis com maior facilidade. A disposição dos dados facilitará a tomada de conclusões.

2.13 Empréstimos em consignação

Os empréstimos em consignação em folha de pagamento tornaram-se populares no Brasil, no início da primeira década do século XXI, dada a mudança da legislação, que permitiu seu uso de maneira ampla – anteriormente eram permitidos somente para empréstimos imobiliários ou empréstimos dos empregadores e seus fundos de pensões para os empregados. Esses empréstimos provocaram uma revolução no crédito brasileiro, uma vez que possibilitaram uma redução dramática nas taxas de juros. Por exemplo, o correntista do Banco do Brasil que tomasse crédito no cheque especial, em janeiro de 2007, pagaria 7,5% a.m. de juros, mas, se tomasse pelo empréstimo em consignação, pagaria 1,2% a.m. Tipicamente, utiliza-se a tabela Price; o empréstimo em consignação pode ser obtido eletronicamente, e é permitido o pagamento parcial ou total de prestações vincendas; dessa forma, o empréstimo em consignação é um substituto do cheque especial ou do crédito ao consumidor.

2.14 A beleza da tabela Price

A tabela Price encanta os economistas. As suas características são de uma elegância incrível, a saber:

1. A prestação é constante – facilita tremendamente, ao mutuário, seu planejamento financeiro de longo prazo.

2. Os juros são calculados sobre o saldo devedor – o que é uma verdade econômica incontestável; paga-se sobre o que se deve e nada mais, nada menos.

3. A amortização cresce em progressão geométrica à razão de (1 + taxa de juros). É simples de entender a regra e dá ao mutuário uma satisfação crescente, já que seu débito desaparece, de início, lentamente e no final, rapidamente. Todos os cálculos são facilitados por essa regra.

4. O saldo devedor após o pagamento de uma prestação é a soma das amortizações das prestações a vencer (também chamadas de vincendas).

5. A diferença entre saldos devedores é a soma das amortizações do período entre os saldos devedores.

6. O saldo devedor é a soma do valor atual das prestações vincendas. A diferença entre dois saldos devedores é soma dos valores atuais das prestações entre os respectivos saldos devedores. Por exemplo:

$$\boldsymbol{PV} = P[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \frac{1}{(1+i)^5} + \frac{1}{(1+i)^6}]$$

$$\boldsymbol{PV_2} = P[\frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \frac{1}{(1+i)^5} + \frac{1}{(1+i)^6}]$$

$$PV_4 = P[\frac{1}{(1+i)^5} + \frac{1}{(1+i)^6}]$$

$$PV_2 - PV_4 = P[\frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4}]$$

Note-se que,

a) o saldo devedor não decresce em progressão geométrica – já que é resultado de uma subtração do saldo devedor anterior e a amortização, e só esta última, é uma PG;

b) os juros não decrescem em progressão geométrica, já que não são calculados sobre um saldo devedor que decresce conforme uma PG.

2.14.1 Erros de cálculo

As máquinas de calcular com programação eletrônica usam todas as casas decimais possíveis, enquanto as demais calculadoras fazem aproximações. Daí dever-se evitar achar $(1 + i)^n$ em calculadoras simples e usá-lo com os arredondamentos para cálculos posteriores. Os erros podem ser grandes, mesmo quando se adota um número elevado de decimais (por exemplo, sete), uma vez que a potenciação eleva o número de decimais dramaticamente (veja, por exemplo, o cálculo exato de $1{,}045^5$ terá 3^5 decimais, que não são captados nas calculadoras simples).

Quadro 8: Valor de $a_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$

Número de períodos e taxa de juros	HP-12C		Tabela de Lloyd e Small	Cálculo por log. neperianos
	Cálculo de $a_{\overline{n|}\,i}$ a partir de $(1 + i)^n$ com sete decimais	Calculando $a_{\overline{n|}\,i}$ em $PV = PMT\, a_{\overline{n|}\,i}$ e $PMT = -1$		
$n = 5$; $i = 4{,}5\%$	4,3899762	4,3899767	4,3899767	4,3899781
$n = 6$; $i = 4{,}0\%$	5,2421366	5,2421369	5,2421369	5,2421369

2.15 Custo Efetivo Total

O Custo Efetivo Total (CET) é a representação, por uma taxa anual (i_{CET}), do custo de oportunidade de uma operação financeira; ela considera todos os custos adicionais, entendidos como os valores que excedem a prestação ou que depreciem o valor do principal, dispostos em distintos pontos no tempo.

O que a regulamentação determina como CET é equivalente ao corrente conceito de Taxa Interna de Retorno (TIR) de uma operação, bem conhecida em matemática financeira, porém, com a especificidade de ser apresentada em termos anuais.

2.15.1 Cálculo do CET

A Resolução nº 3.517, de 6 de dezembro de 2007, do Conselho Monetário Nacional define o CET, que é regulamentado no Manual de Normas e Instruções (MNI)[1] do BC no item 2-1-32. C, cuja última atualização, de número 3.909 de 30 de setembro de 2010 –, ainda estava em vigor em 12 de junho de 2018 quando do término deste livro.

O CET é representado por uma taxa de juros anual i_{CET}, sendo esta a taxa que iguala no presente todos os fluxos de pagamentos ao valor presente líquido da operação (entendido aqui como o valor efetivamente recebido), sendo calculada da seguinte forma:

1 Por meio da Resolução nº 4.187, de 19 de fevereiro de 2013, o CMN extinguiu o Manual de Normas e Instruções (MNI).

$$CF_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1 + i_{CET})^{\frac{D}{365}}} \quad (1)$$

Em que:

CF_0: é o valor presente líquido, sendo este, o valor do crédito concedido, deduzido, se for o caso, das despesas e tarifas pagas antecipadamente;

CF_j: valores cobrados pela instituição, periódicos ou não, incluindo as amortizações, juros, prêmio de seguro e tarifa de cadastro ou de renovação de cadastro, quando for o caso, bem como qualquer outro custo ou encargo cobrado em decorrência da operação;

j: **-**ésimo intervalo existente entre a data do pagamento dos valores periódicos e a data do desembolso inicial, expresso em dias corridos;

n: prazo do contrato, expresso em dias corridos;

D: diferença em dias da data d_j para a data d_0;

d_j: data do pagamento dos valores cobrados, periódicos ou não (CF_j);

d_0: data da liberação do crédito pela instituição (CF_0).

A descrição anteriormente citada é quase a reprodução do anexo à Resolução do CMN nº 3.517; com alguns adicionais e a troca do símbolo das variáveis pelos das teclas da HP-12C.

Dois esclarecimentos a respeito da equação **(1)** são necessários. O primeiro, respectivo ao fluxo de caixa diário, pois a equação apresenta um fluxo de rendas diárias trazidas a valor presente líquido, e o segundo relativo à contagem de dias.

Ao expandir o somatório em **(1)** tem-se:

$$\frac{CF_1}{(1+i_{CET})^{\frac{1}{365}}} + \frac{CF_2}{(1+i_{CET})^{\frac{2}{365}}} + \cdots + \frac{CF_{30}}{(1+i_{CET})^{\frac{30}{365}}} + \cdots + \frac{CF_n}{(1+i_{CET})^{\frac{n}{365}}}$$

Os três exercícios adiante mostram os detalhes de uso da HP-12C. É fácil adaptar um esquema de pagamentos mensais à fórmula anteriormente apresentada.

Supondo pagamentos realizados a cada 30 dias, o fluxo anteriormente citado apresentaria para CF_1, CF_2 e todos os dias que não forem múltiplos de 30 valores iguais a zero, entretanto, CF_{30}, CF_{60}, CF_{90} e seus múltiplos, dentro do período contratual, assumiriam valores diferentes de zero.

Portanto com um fluxo de caixa diário é possível expressar outras formas de pagamentos periódicos.

O segundo esclarecimento torna-se necessário, pois, supondo pagamentos que se realizam sempre no mesmo dia de cada mês, esses não serão necessariamente realizados com igual espaçamento de dias, entre um pagamento e outro, dadas as diferenças nos números de dias que cada mês possui, de 28 a 31 dias.

Uma solução possível seria aproximar o número de dias de todos os meses para 30, porém, como se trata de uma norma oficial, esse tipo de procedimento só poderia ser realizado para outros fins que não fossem de interesse oficial. Uma boa aproximação obtida mais rapidamente é mais útil que o resultado preciso, que pode requerer cálculos delongados.

Quantos dias de diferença existem entre cada data de pagamento e a data de assinatura do contrato?

Apresentam-se aqui dois meios simples de se obter este resultado. Um a) via método da HP-12C; e outro b) por meio de substituição de variáveis em uma equação.

Na há uma tecla que permite a escrita de datas: ***D.MY*** (*Day, Month and Year*, em português, dia, mês e ano), acessada com o pressionamento prévio da tecla ***g***.

a) Após a limpeza da máquina, tecla-se ***D.MY***. Digita-se a data mais antiga (Ex: 27/3/86 é digitada como 27.031986) e tecla-se ***ENTER***; tecla-se a data mais recente e o comando ***g***, **ΔDYS**, que fará com que surja na tela o número de dias entre as datas. Caso seja interessante saber o número de dias baseado no ano comercial, basta, em continuidade ao procedimento anterior, teclar-se **x≷y.**

Exemplo: Qual a diferença em dias entre 13 de maio de 2009 e 26 de julho de 2009?

Na HP-12C, após limpar a calculadora (***f REG***), tecla-se:

g D.MY

13.052009 ***ENTER***

26.072009 ***g*ΔDYS**

Que resulta em 74 dias.

b) Supondo que não há disponibilidade de uma HP-12C, a maneira mais simples de resolução da questão se dará via determinação da semana do ano em que cada data está.

A maioria dos calendários indica em qual semana do ano se encontra tal data em questão, como semanas sempre têm número fixo de dias, sete, será mais fácil saber quantos dias de diferença existem entre uma data e outra do que se fosse necessário calcular com meses que apresentam diferentes números de dias. Por exemplo:

Fazendo uso do exemplo anterior, determina-se a diferença de dias entre 13 de maio de 2009 e 26 de julho de 2009. As datas estão consecutivamente numa quarta feira, quarto dia de uma semana, da semana 20 e num domingo, primeiro dia de uma semana, da semana 31 do devido ano.

As datas que habitualmente são apresentadas na forma Dia/Mês/Ano (DD/MM/AA) serão exibidas na forma Dia da Semana/Semana do ano/Ano (DS/SA/AA), portanto, as datas do exemplo serão apresentadas nesse molde consecutivamente como 04/20/2009 e 01/31/2009, o que permitem que a diferença no número de dias entre elas seja calculada substituindo-se os termos na fórmula a seguir:

$$D = (DS_F - DS_I) + 7\,(SA_F - SA_I) + 365\,(AA_F - AA_I) \quad (2)$$

Os subscritos *I* e *F* referem-se, consecutivamente, as datas iniciais e finais. Pela equação **(2)** o número de dias será:

$$D = (01 - 04) + 7\,(31 - 20) + 365\,(09 - 09) \Longleftrightarrow$$

$$D = (-3) + 7\,(11) + 365\,(0) = -03 + 77$$

$$D = 74$$

Um detalhe relativo aos anos bissextos (anos com dias): sabendo-se o número de ocorrências deste tipo de ano entre duas datas pode-se determinar o número de dias a mais a se adicionar no cálculo anteriormente citado.

Há tabelas que informam o número de dias entre duas datas, inclusive levando em conta anos bissextos.

Exercícios resolvidos

Exercício 15. Considere um financiamento de 100,00 em quatro parcelas mensais a taxa de juros de 4,5% a.m., com cobrança de taxa de abertura de crédito de 1,00 e de tributos no valor de 0,50. Calcule a TIR.

Solução:

Na HP-12C calcula-se o valor das prestações em termos brutos, ou seja, sem os custos adicionais, teclando-se:

$PV = 100{,}00$

$n = 4$

$i = 4{,}5$

Ao teclar PMT obtém-se:

$$PMT=-27{,}87$$

A i_{TIR} é calculada substituindo-se o valor bruto pelo líquido da operação (98,50), sendo este entendido como o que foi efetivamente recebido no contrato, portanto:

$$PV = 98{,}50$$

Com PMT = –27,87 e $n = 4$

Tecla-se *i:*

$$i_{\text{TIR}} = 5{,}14$$

Essa taxa representa o custo de oportunidade efetivo da operação, bem superior à taxa contratual de 4,5% a.m. Em termos de comparações posteriores com a i_{CET}, calcula-se, mantendo-se os cálculos na máquina, a sua equivalente anual.

$$(1{,}0514)^{12} = 1{,}8248$$

$$i_{\text{TIR}} = 82{,}48$$

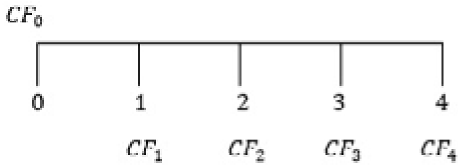
Exercício 16. Considere um financiamento de 100,00 a ser quitado em quatro pagamentos mensais de 20,00, 15,00, 35,00 e 40,00. Calcule a TIR.

Solução:

Na HP-12C existem em azul duas teclas, a CF_0 e a CF_j. Na primeira é armazenado o valor líquido recebido no contrato, a segunda, por sua vez, armazena todos os pagamentos posteriores na ordem em que se dão.

O fluxo de caixa da questão é similar ao apresentado a seguir:

Gráfico 9: Esquema de quatro pagamentos distintos para cálculo da taxa interna de retorno



Tecla-se, consecutivamente, *g* e CF_0 para o principal e *g* e CF_J para os pagamentos, digitados na ordem em que eles se dão, como expresso pelos comandos a seguir:

100*gCF*$_0$

20*CHSgCFj*

15*CHSgCFj*

35*CHSgCFj*

40*CHSgCFj*

Ao teclar-se *f* e *IRR* (*Internal Rate of Return*):

$$i_{CET} = 3{,}41$$

Eis a taxa interna de retorno da operação, que ao ano é:

$$i_{CET} = 49{,}52\%\ \text{aa.}$$

O número de pagamentos que podem ser armazenados na HP-12C é limitado; quando existem na série pagamentos consecutivos de mesmo valor, há um modo de poupar memória via o comando $k\mathbf{g}N_j$, onde k é o número de repetições consecutivas deste valor.

Exercício 17. Considere um financiamento de 100,00, pagável em quatro parcelas mensais, no primeiro dia de cada mês, onde d_0 = 01/02/2009, a uma taxa de juros de 4,5% a.m., com cobrança de comissão de abertura de crédito de 1,00 e de tributos no valor de 0,50. Calcule o CET.

Solução:

A seguir uma tabela com as datas do problema nas duas formas, e o número de dias entre datas calculado a partir da equação (2) ou por HP-12C.

Quadro 9: Cálculo do número de dias a partir de 1º de fevereiro de 2009

	DD/MM/AA	DS/SA/AA	D
Data do contrato	01/02/2009	01/06/2009	–
1° pagamento	01/03/2009	01/10/2009	28
2° pagamento	01/04/2009	04/14/2009	59
3° pagamento	01/05/2009	06/18/2009	89
4° pagamento	01/06/2009	02/23/2009	120

Portanto, o fluxo da operação será o seguinte:

$$CF_0 = \frac{CF_{28}}{(1+i_{CET})^{\frac{28}{365}}} + \frac{CF_{59}}{(1+i_{CET})^{\frac{59}{365}}} + \frac{CF_{89}}{(1+i_{CET})^{\frac{89}{365}}} + \frac{CF_{120}}{(1+i_{CET})^{\frac{120}{365}}}$$

Para $PV = 100{,}00$, $n = 4$ e $i = 4{,}5$

Ao teclar ***PMT*** obtém-se:

$$PMT = -27{,}87$$

Portanto,

$$CF_{28} = CF_{59} = CF_{89} = CF_{120} = 27{,}87$$

Limpa-se a calculadora (***f*** e ***REG***). Tecla-se o principal de 98,50 (100,00 – 1,00 – 0,50):

$$98{,}5\,\boldsymbol{gCF_0}$$

No primeiro dia após o pagamento não haverá pagamento algum, portanto,

$$0\boldsymbol{gCF_j}$$

Esses “pagamentos nulos” serão repetidos 27 vezes antes do pagamento da primeira prestação, a repetição desses fluxos é determinada pelo comando:

$$27\boldsymbol{gN_j}$$

Para ter-se então o pagamento da primeira prestação, representada pelo comando:

$$27{,}87\boldsymbol{CHSgCF_j}$$

A partir daí começam a se repetir os processos, consequentemente havendo repetição de comandos similares, estes, por sua vez, estão resumidos a seguir:

0$\boldsymbol{gCF_j}$
3$\boldsymbol{0gN_j}$
27,87$\boldsymbol{CHSgCF_j}$
0$\boldsymbol{gCF_j}$
29$\boldsymbol{gN_j}$
27,87$\boldsymbol{CHSgCF_j}$
0$\boldsymbol{gCF_j}$
30$\boldsymbol{gN_j}$
27,87$\boldsymbol{CHSgCF_j}$

Bastando agora executar o comando ***f*** e ***IRR*** para obter a TIR, diária, do problema:

$$fIRR = 0{,}17$$

Anualmente, tem-se:

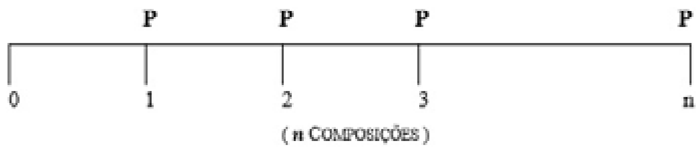
$$i_{CET} = 85{,}68$$

Com a mesma prestação, observa-se que os períodos de 28, 59, 89 e 120 dias (i_{CET} = 85,68) são inferiores ou iguais aos períodos de 30, 60, 90 e 120 dias (i_{CET} = 82,48%), redundando, portanto, em uma i_{CET} mais elevada.

Uma quantia paga ao final de 30 dias tem uma taxa de juros menor que a mesma quantia se paga ao final de 28 dias (e o oposto é verdadeiro quando paga em 31 dias).

2.16 Empréstimos na tabela Price – resumo

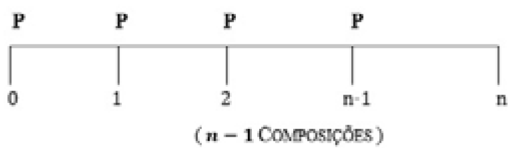
a) **Clássico:** Esquema de pagamentos de um principal, $\boldsymbol{C_0}$, em $\boldsymbol{n}$ prestações de $\boldsymbol{P}$ (como no gráfico 1 da seção 2.1). Usa-se ***end*.**



$C_0 = a_{\overline{n}|\,i}$

Dado $\boldsymbol{C_0}$, $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{i}$, acha-se ***PMT***.

b) **Extra:** Esquema de $\boldsymbol{n}$ pagamentos a partir de $\boldsymbol{n = 0}$, de um principal de $\boldsymbol{C_0}$ (como no gráfico 5 da seção 2.5). Usa-se ***beg*.**

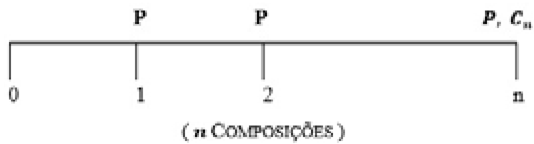


$C_0 - a_{\overline{n-1}|\,i} = P$, daí que $P = \dfrac{C_0}{1 + a_{\overline{n-1}|\,i}}$

beg faz o cálculo direto da expressão anteriormente citada para $\boldsymbol{n} = n$

2.17 Depósitos acumulados na tabela Price – resumo

a) Clássico: Esquema de **n** depósitos de **P** para formar um montante C_n (como no gráfico 2 da seção 2.2.1). Usa-se ***end***.



$$C_n = P \, s_{\overline{n}|\, i}$$

b) Extra I: Esquema de **n** depósitos de **P**, a partir de $n = 0$, para formar um montante C_n (Como no gráfico 4 da seção 2.3.2). Usa-se ***beg***.

$C_n = P \, s_{\overline{n}|\, i}$ $(1 + i)$, ***beg*** faz o cálculo direto sem a necessidade de multiplicar por $(1 + i)$

c) Extra II: Esquema de n depósitos de P, a partir de $n = 1$, para formar um montante $C_n\,(1 + i)$ (como no gráfico 3 da seção 2.3.2). Usa-se ***end.***

(n COMPOSIÇÕES)

$$C_{n+1} = C_n\,(1 + i)$$

$$C_{n+1} = p\, s_{\overline{n|}\,i}\,(1 + i)$$

beg faz o cálculo direto, idêntico ao item b, sem a necessidade de multiplicar por (1 + i)

Exercícios a resolver (respostas no final do capítulo 5)

Todos os cálculos devem ser feitos usando calculadora eletrônica e aproximados para quatro casas decimais. Na HP-12C inicia-se com o comando ***f*** 4.

Exercício 1. Considere um financiamento pela tabela Price, de R$ 10 mil em 36 meses e juros de 2% a.m. Determine:

1.1. O valor da prestação.

1.2. O saldo devedor após o pagamento da segunda prestação.

1.3. Total de juros e de amortização pagos da 2ª até a 13ª prestação, totalizando, portanto, 12 prestações.

1.4. Após o pagamento da 2ª prestação o mutuário, dispondo de R$ 1.000, resolve pagar antecipadamente um determinado número (inteiro) de prestações. Determine:

1.4.1. O valor a ser pago e o número de prestações se o pagamento for das próximas prestações.

1.4.2. O valor a ser pago e o número de prestações se o pagamento for das últimas prestações.

1.5. Imediatamente após pagar a segunda prestação o mutuário decide pagar antecipadamente seis prestações. Determine o valor pago, se:

1.5.1. Forem pagas imediatamente após a segunda prestação.

1.5.2. Forem pagas as últimas seis prestações.

Exercício 2. Seja um financiamento, pela tabela Price, de R$ 10.000,00 em 36 meses a uma taxa de juros de mercado de i = 2% a.m. Após o 13° pagamento, a taxa de juros do mercado cai para 1,5% a.m. O mutuário resolve liquidar seu empréstimo e fazer um novo, de 23 meses, pelo valor do antigo saldo devedor a juros de 1,5% a.m. Determine:

2.1. Quanto o mutuário deve pagar para quitar seu empréstimo, iniciado no 13º pagamento?

2.2. Qual será o valor da nova prestação?

Exercício 3. Seja um financiamento de R$ 10.000 em um prazo total de 36 meses e i = 2% a.m., com carência de dois meses para o pagamento da 1ª prestação. Determine:

3.1. Caso haja pagamento de juros durante a carência, calcule o valor dos juros pagos durante a carência mês a mês e o valor da prestação (a ser liquidada em 34 pagamentos) após a carência.

3.2. Calcule o valor da prestação após a carência (ou seja, em 34 meses) supondo que não haja pagamento de juros na carência, com os juros da carência incorporados ao capital.

Exercício 4. Seja um financiamento pela tabela Price de R$ 1.000,00 com prazo de 24 meses a uma taxa de juros de 2% a.m. Calcule:

4.1. O valor da prestação mensal.

4.2. O valor total dos juros pagos.

4.3. O valor total dos juros pagos da 3ª a 14ª prestação, totalizando 12 prestações.

4.4. Os saldos devedores após o pagamento da 2ª e da 14ª prestações.

4.5. Após o pagamento da 2ª prestação, o mutuário resolve pagar antecipadamente as próximas três prestações. Qual o valor deste pagamento?

4.6. Após o pagamento da 2ª prestação o mutuário resolve pagar as últimas três prestações. Qual o valor deste pagamento?

4.7. O mutuário sugere ao credor uma carência de dois meses, incorporando-os ao principal, sem pagamento de juros, mantendo-se o prazo total de meses. Qual o valor da prestação após a carência?

4.8. O mutuário sugere ao credor uma carência de dois meses, pagando-se juros no período. Calcule o valor da prestação após a carência e o valor dos juros pagos no primeiro e 2º mês do contrato.

4.9. O mutuário oferece ao credor pagamentos extraordinários de 100 no 6º, no 12º e no 18º mês. Qual deve ser o valor da prestação normal do primeiro ao 24º mês?

4.10. O mutuário oferece um pagamento extraordinário de R$ 100 no 6º mês para reduzir sua prestação. Qual o valor da prestação vigorante após o 6º mês?

4.11. O mutuário atrasa o pagamento da 3ª, 4ª e 5ª prestações, pagando-as com juros contratuais adicionais na 6ª prestação. Qual deve ser o valor do pagamento dos juros adicionais?

4.12. O mutuário atrasa o pagamento da 3ª e da 4ª prestações, e suas prestações quando em atraso estão sujeitas, além dos juros contratuais adicional, a juros de mora de 1% a.m. Na ocasião da 5ª prestação, o mutuário reestrutura a sua dívida incorporando ao novo principal as duas prestações não pagas, os juros adicionais contratuais e de mora, para pagamento em 20 meses a juros de 2,5% a.m. Calcule o valor da nova prestação? (Essa questão é extradifícil)

CAPÍTULO 3

O Sistema de Amortização Constante e o *sinking fund*

3.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

É também chamado de *outstanding* em inglês, e consiste em um sistema de cálculo financeiro em que a amortização é constante – igual ao principal dividido pelo número de prestações, incidindo os juros sobre o saldo devedor. O valor da amortização não depende da taxa de juros, mas sim, exclusivamente, do número de pagamentos. Consequentemente, o valor da prestação é mais elevado no início do pagamento, e mais baixo no final, sendo adequado, portanto, para longos pagamentos em que o mutuário tem expectativa decrescente de renda. O valor total de juros é menor que na tabela Price, uma vez que o saldo devedor cai mais rapidamente.

O saldo devedor após o pagamento da *k*-ésima prestação de um empréstimo de *n* prestações é:

$$C_k = C_0 - \frac{k}{n} C_0 = C_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

O quadro 10 adiante mostra um exercício típico de financiamento pelo SAC de um principal de R$ 100,00, em quatro prestações mensais e juros de 4,5% a.m., que é o mesmo do método prático da tabela Price (exemplo 21).

Quadro 10: SAC – C_0=100,00; n = 4; i = 4,5%

Período	Saldo devedor	Amortização (Z)	Juros (J)	Prestação (P)
k	C_k	$Z_k = \frac{C_0}{n}$	$J_k = 0{,}045C_{k-1}$	$P_k = Z_k + J_k$
0	100,00	–	–	–
1	75,00	25,00	4,50	29,50
2	50,00	25,00	3,38	28,38
3	25,00	25,00	2,25	27,25
4	0	25,00	1,13	26,13
Total	–	100,00	11,26	111,26

A amortização é constante, $Z = \frac{100}{4} = 25$. Portanto, o saldo devedor decresce, linearmente, à razão de R$ 20,00, ou, genericamente, à razão de $\frac{C_0}{n}$.

Dessa forma, o saldo devedor após a terceira prestação do empréstimo anteriormente citado de R$ 100,00, pagável em quatro prestações, a qualquer taxa de juros será:

$$C_3 = 100\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 25{,}00$$

Os juros incidem sempre sobre o saldo devedor anterior. Assim:

$J_1 = 0{,}045 \times 100 = 4{,}50$

$J_2 = 0{,}045 \times 75 \cong 3{,}38$

$J_3 = 0{,}045 \times 50 = 2{,}25$

$J_4 = 0{,}045 \times 25 \cong 1{,}13$

3.2 *Sinking fund*

O nome em português, ainda pouco comum, é **formação de provisões**. Trata-se de uma sistemática de cálculo em que o devedor paga, periodicamente, juros e retorna o principal ao credor, de uma só vez, ao final do período. A fim de poder retornar o principal à época devida, o devedor forma, paulatinamente, uma reserva por meio de depósitos em uma instituição financeira. Dessa maneira, o devedor consegue taxas de juros mais baixas, já que o credor tem conhecimento de que seu principal está sendo constituído lentamente em uma instituição financeira independente. É muito usado nos EUA (mercado hipotecário) e, apenas raramente, no Brasil.

A matemática é simples: os juros recebidos pelo público credor serão sempre iC; o total dos juros será niC, em que n é o número de prestações, i a taxa de juros e C o principal.

Para a constituição do fundo de reserva a ser investido à taxa de juros r, sendo preferencialmente $r \geq i$, ter-se-ia uma quantia P a ser depositada mensalmente em uma instituição financeira, tal que:

$$P \frac{s}{n|r} = C_n$$

3.2.1 Tabela Price por tabelas financeiras

Determine o saldo devedor após o pagamento da 50ª prestação, os valores da 50ª prestação, amortização e juros de um financiamento de R$ 100 mil a 4% a.m., pagável em 100 prestações pela tabela Price e pelo SAC. Os dados da tabela Price devem ser calculados pelas tabelas financeiras a partir das fórmulas básicas, por dois métodos distintos, e também pela calculadora, por outros dois métodos distintos. A 50ª prestação está na metade da vida do financiamento, o que possibilita uma comparação entre a Price e o SAC exatamente na metade do crédito.

Primeiro método: Determinam-se os valores da prestação, da amortização e do saldo devedor pelas fórmulas básicas da tabela Price. Somente os juros são determinados por valores derivados, isto é, por valores calculados anteriormente e que podem, portanto, ter erros de arredondamentos.

Para determinar os juros e amortização, torna-se necessário determinar o saldo devedor após a 49ª prestação:

a) Os saldos devedores da 49ª e da 50ª prestação podem ser calculados por:

$$C_k = C_0\left(1 - \frac{s_{\overline{k|}\,i}}{s_{\overline{n|}\,i}}\right)$$

Para o saldo devedor após o pagamento da 49ª prestação, tem-se n = 100 e k = 49, e com a tabela financeira 3, tem-se:

$$C_{49} = 100000\left(1 - \frac{145{,}8337343}{1.237{,}6237046}\right) = 88.216{,}63371..$$

ou seja, C_{49} = 88.216,63

O saldo devedor após o pagamento da 50ª prestação, onde $n = 100$ e $k = 50$

$$C_{50} = 100000\left(1 - \frac{152{,}6670837}{1.237{,}6237046}\right) = 87.664{,}49906..$$

ou seja, $C_{50} = 87.664{,}50$

b) A prestação é calculada por:

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{C_0}{a_{\overline{100|}\,4}} = \frac{100.000}{24{,}5049990} = 4.080{,}800003..$$

ou seja, $P = 4.080{,}80$

c) A amortização da 50ª prestação é dada pela fórmula a seguir, onde $n = 100$ e $k = 50$

$$Z_k = \frac{C_{k-1}}{s_{\overline{n\text{-}k+1|}\,i}} = \frac{C_{49}}{s_{\overline{51|}\,4}}$$

Como $s_{\overline{51|}\,4}$ não está disponível na tabela financeira 3, deve ser calculado por $(1 + i)^{50}$ que está disponível na tabela financeira 1.

$$s_{\overline{51|}\,4} = \frac{(1{,}04)^{51}-1}{0{,}04} = \frac{(1{,}04)^{50}(1{,}04)-1}{0{,}04} = \frac{7{,}1066834 \times 1{,}04-1}{0{,}04} = 159{,}7737684..$$

$$Z_{50} = \frac{88.216{,}63371..}{159{,}7737684..} = 552{,}1346501..$$

$$Z_{50} = 552{,}13$$

d) Os juros são calculados por

$$J_k = iC_{k-1}$$

Logo, J_{50} = 0,04 x 88.216,63371..=3.528,665348

Então os juros da 50ª prestação são: J_{50} = 3.528,67

Confirmando o valor da prestação pela soma dos juros e amortização

$$P = 3.528{,}67 + 552{,}13 = 4.080{,}80.$$

Segundo método: calcula-se o saldo devedor do período anterior ao corrente, a prestação, e utilizam-se as fórmulas derivadas

a) prestação

Conforme a fórmula básica,

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|\, i}} = \frac{C_0}{a_{\overline{100}|\, 4}} = \frac{100.000}{24{,}5049990} = 4.808{,}800003..$$

ou seja, P = 4.080,80

b) saldo devedor do período anterior

Conforme calculado pela fórmula básica,

$$C_{49} = 88.216{,}63371..$$

c) juros

Conforme o cálculo derivado

$$J_k = iC_{k-1}$$

Logo, J_{50} = 0,04 x 88.216,63371..=3.528,665348

d) amortização

Conforme o cálculo derivado

$$Z = P - J$$

$$Z_{50} = 4.080,80 - 3.528,67 = 552,13$$

e) saldo devedor após a 50ª prestação

$$C_k = C_{k-1} - Z_k$$

$$C_{50} = 88.216,63 - 552,13 = 87.664,50$$

3.2.2 Tabela Price por calculadora eletrônica

Determine o saldo devedor após o pagamento da 50ª prestação, os valores da 50ª prestação, amortização e juros de um financiamento de R$ 100 mil a 4% a.m., pagável em 100 prestações pela tabela Price e pelo SAC. Os dados da tabela Price devem ser calculados pelas tabelas financeiras, a partir das fórmulas básicas, por dois métodos distintos, e também pela calculadora, por outros dois métodos distintos. [A 50ª prestação está na metade da vida do financiamento, o que possibilita uma comparação entre a Price e o SAC exatamente na metade do crédito].

Calcula-se ***PMT*** com duas decimais, que será usado em cálculos posteriores, por dois métodos:

Primeiro método de calculadora eletrônica: pelo uso de fórmulas básicas dos saldos devedores

$$\boldsymbol{i} = 4;\ \boldsymbol{n} = 100;\ \boldsymbol{PV} = 100.000 \therefore \boldsymbol{PMT} = -4.080,80$$

a) Cálculo dos saldos devedores

$\boldsymbol{i} = 4$; $\boldsymbol{n} = 50$; $\boldsymbol{PMT} = -4.080,80 \therefore \boldsymbol{PV} = 87.664,50$, que é o saldo devedor (C_{50}) após o pagamento da prestação de número $k = 50$, ou seja $\boldsymbol{n} = N - k = 100 - 50 = 50$

$\boldsymbol{i} = 4$; $\boldsymbol{n} = 51$; $\boldsymbol{PMT} = -4.080,80 \therefore \boldsymbol{PV} = 88.216,63$, que é o saldo devedor (C_{49}) após o pagamento da prestação de número $k = 49$, ou seja $\boldsymbol{n} = N - k = 100 - 49 = 51$

b) O cálculo de juros e amortização segue-se imediatamente

$$J_{50} = 0,04 \times 88.216,63 = 3.528,67$$

$$Z_{50} = P - J_{50} = 4.080,80 - 3.528,67 = 552,13$$

c) A prestação é a soma dos juros e amortização calculados, ou seja:

$$P = 3.528,67 + 552,13 = 4.080,80$$

Confirmando, assim, o valor anteriormente calculado.

Segundo método pela calculadora eletrônica: pelo uso das fórmulas de amortização, conhecido o valor da prestação.

a) Cálculo do saldo devedor após a 50ª prestação:

i = 4; ***n*** = 100.000; ***PMT*** = – 4.080,80; 50 ***f AMORT*** ∴ –191.704,48 que é o total dos juros pagos até a 50ª parcela;

x ⪌ ***y*** = −12.335,52 que é o total das amortizações até a 50ª prestação;

RCL PV = 87.664,48, que é o saldo devedor (C_{50}) após o pagamento da 50ª prestação, ligeiramente menor (0,02) que o encontrado na tabela financeira.

i = 4; ***n*** = 100.000; ***PMT*** = 49 ***f AMORT*** ∴ –188.175,82, que é o total de juros pagos até a 49ª prestação.

x ⪌ ***y*** = −11.783,38

Que é o total das amortizações pagas até a 49ª prestação

RCL PV = 88.216,62

Que é o saldo devedor (C_{49}) após o pagamento da 49ª prestação, ligeiramente menor (0,01) que o encontrado anteriormente pela tabela financeira.

b) Cálculo de juros e amortização da 50ª prestação

Os juros e amortização da 50ª prestação são calculados pela diferença entre os valores acumulados da 50ª e 49ª prestações:

$$J_{50} = 191.704{,}48 - 188.175{,}82 = 3.528{,}66$$

$$Z_{50} = 12.335{,}52 - 11.783{,}38 = 552{,}14$$

Que são valores muito próximos (diferenças de 0,01) aos anteriormente calculados pelas tabelas financeiras.

Examinando os métodos pela calculadora eletrônica, é evidente que o primeiro método, em que são calculados os saldos devedores em primeiro lugar, é o mais eficiente quando se deseja determinar os valores da amortização e juros de uma prestação qualquer.

3.3 Cálculo do SAC

$Z = \frac{C_0}{n} = \frac{100.000}{100}$ = 1.000,00, sendo Z o valor da amortização

$$C_k = C_0\left(1 - \frac{k}{n}\right), \text{ para } k = 50,\ C_{50} = 100.000\left(1 - \frac{50}{100}\right) = 50.000{,}00$$

O saldo devedor após o pagamento da 50ª prestação é, pois, R$ 50.000,00.

Os juros da 50ª prestação incidem sobre o saldo devedor da 49ª prestação, que é o saldo devedor da 50ª prestação mais a amortização que é constante, ou seja:

$$J = 0{,}04 \times (50.000 + 1.000{,}00) = 2.040{,}00$$

Logo, a 50ª prestação tem o valor de 1.000,00 + 2.040,00 = 3.040,00.

Quadro 11: Valores da 50ª prestação para C_0=100.000,00; i = 4% a.m.; n = 100

Tipo de Cálculo	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
SAC	3.040,00	1.000,00	2.040,00	50.000,00
Price	4.080,00	552,13	3.528,67	87.664,50

Na metade da vida do empréstimo, o saldo devedor pelo SAC é bem menor que o da tabela Price, de modo que, se um mutuário crê que tem possibilidade de liquidar o empréstimo antes do término do período contratual, deve dar preferência ao SAC. Observe, no entanto, que as prestações iniciais do SAC são muito elevadas comparativamente às da tabela Price, o que pode inibir os mutuários jovens, que têm normalmente renda inferior aos mutuários maduros. A primeira prestação do SAC é de 1.000,00 + 0,04 × 100.000,00 = 5.000,00, enquanto a prestação da Price é sempre de R$ 4.080,80; daí, na metade da vida do empréstimo, o saldo devedor da Price ser 75% superior ao do SAC, representando, ainda, quase 88% do valor principal.

3.3.1 Por quanto tempo a prestação do SAC é maior que a do Price?

Um mutuário que tem a possibilidade de realizar um financiamento que pode se dar tanto por Price como por SAC está consciente que, em termos de prestações, optar por SAC significará arcar com pagamentos maiores nos períodos iniciais do financiamento até um período *k* a, no qual a tendência se inverte. Conhecer esse período *k* significa saber a medida de tempo em que manter o pagamento por SAC é mais difícil do que na Price.

Desenvolve-se aqui uma equação para determinar o período *k*: a demonstração desta equação é laboriosa, de tal forma que o leitor tem a possibilidade de seguir diretamente ao resultado. O resultado é dado pelo rearranjo para *k* da equação resultante da igualdade entre as duas prestações nos distintos sistemas de financiamento.

A *k*-ésima prestação por Price é dada pela equação a seguir:

$$P_k{}^{PRICE} = C_0 \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

A *k*-ésima prestação por SAC:

$$P_k{}^{SAC} = \frac{C_0}{n} + i\left[C_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]$$

Esta fórmula para prestação em SAC é desenvolvida a partir de:

$$P_k = Z_k + J_k$$

$$Z_k = \frac{C_0}{n}$$

$$J_k = iC_{k-1}$$

Tem-se,

$$P_k = \frac{C_0}{n} + iC_{k-1}$$

A fórmula para o saldo devedor é:

$$C_k = C_0\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

O que para o período $k - 1$,

$$C_{k-1} = C_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Substituindo tem-se:

$$P_k{}^{SAC} = \frac{C_0}{n} + i\left[C_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]$$

Dado o uso posterior, altera-se, aqui, a forma da fórmula da prestação para SAC:

$$P_k{}^{SAC} = \frac{C_0}{n} + i\left[C_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \Leftrightarrow P_k{}^{SAC} = \frac{C_0}{n} + i\left[C_0 - C_0\frac{k-1}{n}\right]$$

$$\Leftrightarrow P_k{}^{SAC} = \frac{C_0}{n} + iC_0 - iC_0\frac{k-1}{n} \Leftrightarrow P_k{}^{SAC} = \frac{C_0}{n} + iC_0\frac{n}{n} - iC_0\frac{k-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow P_k{}^{SAC} = \frac{C_0 + iC_0 n - iC_0(k-1)}{n} \Leftrightarrow P_k = \frac{C_0 + iC_0[n - (k-1)]}{n}$$

$$\Leftrightarrow P_k = \frac{C_0[1 + i(n - k + 1)]}{n}$$

O k representa o período onde os valores de prestação pelo sistema Price e SAC se igualam, dado um mesmo financiamento (i, n e C_0 iguais):

$$P_k^{PRICE} = P_k^{SAC}$$

$$C_0 \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{C_0[1 + i(n-k+1)]}{n}$$

$$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1 + i(n-k+1)}{n}$$

$$n[i(1+i)^n] = [1 + i(n-k+1)][(1+i)^n - 1]$$

$$ni(1+i)^n = (1+i)^n - 1 + i(n-k+1)[(1+i)^n - 1]$$

$$\frac{ni(1+i)^n - (1+i)^n + 1}{i[(1+i)^n - 1]} = (n-k+1)$$

$$k = n + 1 - \frac{ni(1+i)^n - (1+i)^n + 1}{i[(1+i)^n - 1]}$$

O que leva à seguinte conclusão:

$$k = n + 1 - \frac{(ni-1)(1+i)^n + 1}{i[(1+i)^n - 1]}$$

Observe que o resultado independe do valor financiado.

O resultado só tem sentido econômico para k inteiro e inferior ao encontrado com casas decimais. Para n = 108 e i = 1% tem-se k = 45,0102878, ou seja, as 45 primeiras prestações assumem valores maiores pela tabela SAC, quando comparativamente à tabela Price.

A tabela a seguir mostra os resultados alcançados, todos aproximados sem decimais, para financiamentos com a mesma taxa de juros do exemplo anterior de i = 1% a.m., que é a taxa habitual para financiamentos imobiliários, que quando não iguais a esta seguem muito próximas a ela.

Para distintos períodos de financiamento, tem-se:

Quadro 12: Número de meses que a prestação da tabela Price é menor que a do SAC para juros de 1% a.m.

Prazo inicial do financiamento (em meses)	Número de meses em que a prestação do Price é menor que a do SAC (k)	Razão percentual entre k e o número de períodos de financiamento $\frac{k}{n} \times 100$
36	17	47
72	32	44
108	45	42
144	55	38
180	64	36
216	72	33
252	78	31
288	83	29
324	87	27
360	90	25

A proporção do tempo em que a prestação pelo sistema SAC é maior que a do Price é apresentada na última coluna; uma característica dos dados dessa coluna é que os valores decrescem à medida que aumenta o prazo da operação; portanto, para financiamentos muito longos, o financiamento por SAC torna-se mais interessante.

A evidência anterior tem caráter prático: os financiamentos por SAC se dão com grande frequência no mercado imobiliário que tem como característica longos períodos contratuais. Dado o exemplo anterior, o que deve fazer o mutuário? Financiar por Price ou SAC? Existem duas condições que podem ser consideradas na tomada da decisão: a primeira é relativa às preferências de renda no tempo deste consumidor, ou seja, a escolha entre dispor de mais renda agora ou depois.

Um financiamento por Price, em vez de SAC, imporá ao mutuário uma prestação relativamente menor no presente, o que lhe permitirá ter à sua disposição um montante de renda relativamente maior para o custeio de outros bens. No futuro, a prestação Price será relativamente maior, o que, supondo uma renda constante no tempo, fará com que o montante de renda disponível para a aquisição de bens seja relativamente menor ao que seria por SAC.

Em relação às conclusões anteriores, observa-se que a renda é constante no tempo, uma afirmação questionável. Como se comporta na vida real a renda no tempo? Se o mutuário tem renda crescente, sabe-se que, com o passar do tempo, ele arcará com frações cada vez menores de sua renda para com o pagamento de prestações para qualquer um dos sistemas de financiamento aqui citados.

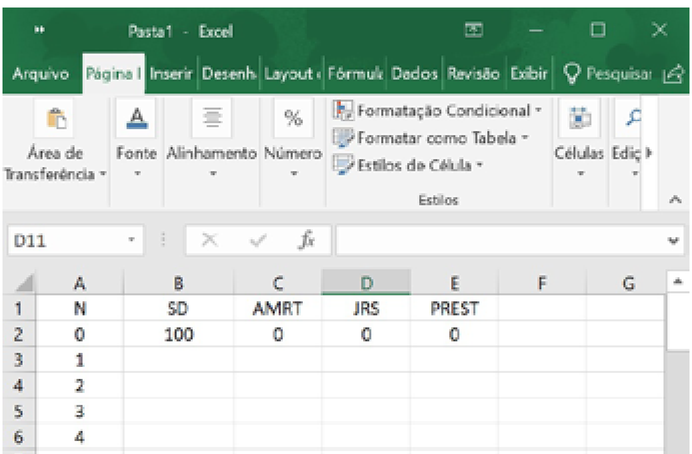
É válida aqui uma consideração: os juros do financiamento pagos por Price são sempre maiores que os juros pagos por SAC; portanto, o benefício avaliado pelo indivíduo de ter à sua disposição mais renda no presente tende a ser, dada a própria análise do mutuário, por suposição econômica um agente racional, maior ou igual ao custo de ter de pagar prestações maiores após o período *k* somado ao custo do acréscimo do montante de juros que surge da escolha do sistema de financiamento.

Concluindo, não existe uma modelação matemática fixa para a tomada de decisão entre Price e SAC. Depende das expectativas de crescimento da renda do mutuário, de sua idade, das expectativas de crescimento da economia, do grau de risco aceitável pelo mutuário, de seus seguros, etc.

3.4 SAC pelo Excel

O sistema de amortização constante inicia-se com a seguinte estrutura basal:

Figura 48: Estruturando uma tabela SAC – disposição dos dados iniciais para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%

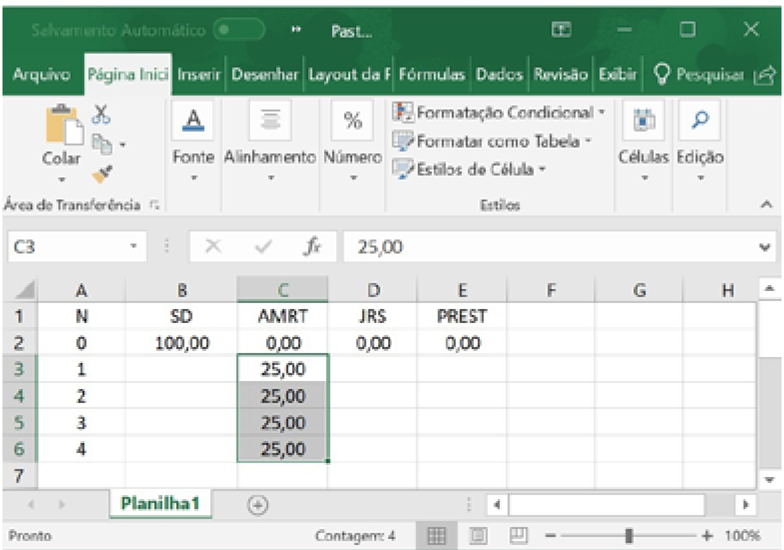


Para calcular o valor da amortização seleciona-se a célula que representa a amortização do primeiro período, aqui C3, na qual se escreve o comando

= 100 / 4

que é o valor do financiamento dividido pelo número de parcelas desse financiamento. Agora, com esse resultado, selecione a célula e "arraste" até o último período.

Figura 49: Estruturando uma tabela SAC – disposição dos dados iniciais, valores das amortizações, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST			
2	0	100,00	0,00	0,00	0,00			
3	1		25,00					
4	2		25,00					
5	3		25,00					
6	4		25,00					
7								

As definições de saldo devedor e juros continuam sendo as mesmas. Os comandos serão então:

B3=B2-C3 (saldo devedor)

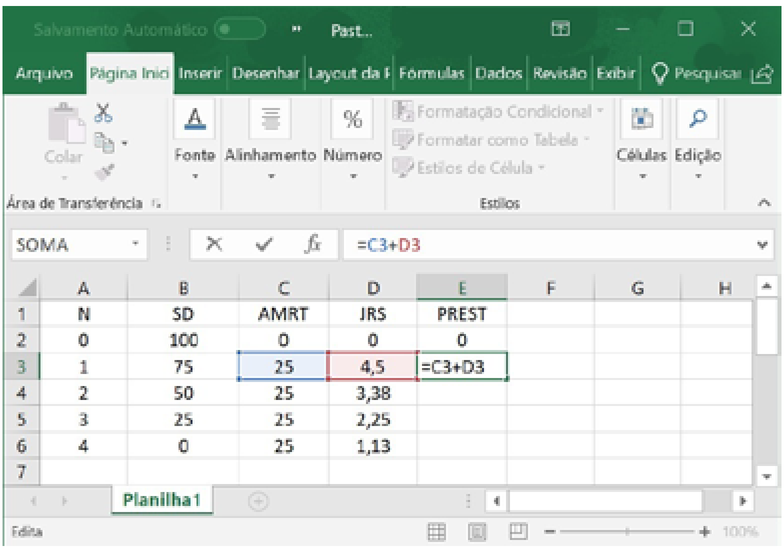
D3=B2*0,045 (juros)

O cálculo da prestação é dado segundo a definição: "a prestação é igual à soma de amortização e juros."

Então, na célula que representa a prestação do primeiro período, aqui E3, o seguinte comando:

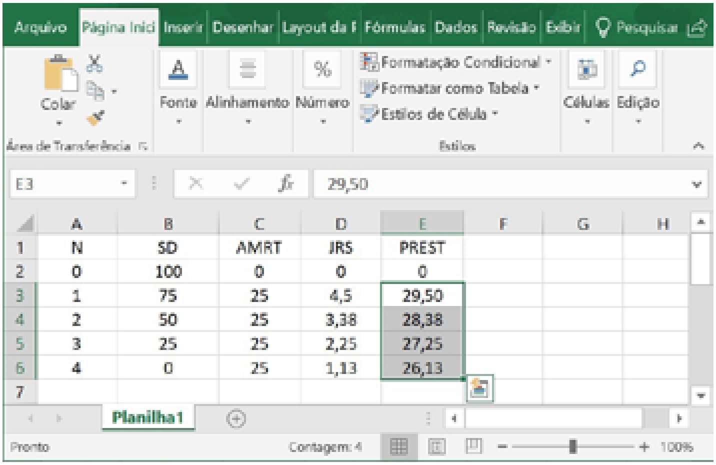
=C3+D3

Figura 50: Estruturando uma tabela SAC – programação das células, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



Com essas células programadas, basta então fazer o "arraste" em cada coluna até o último período, o que resultará em:

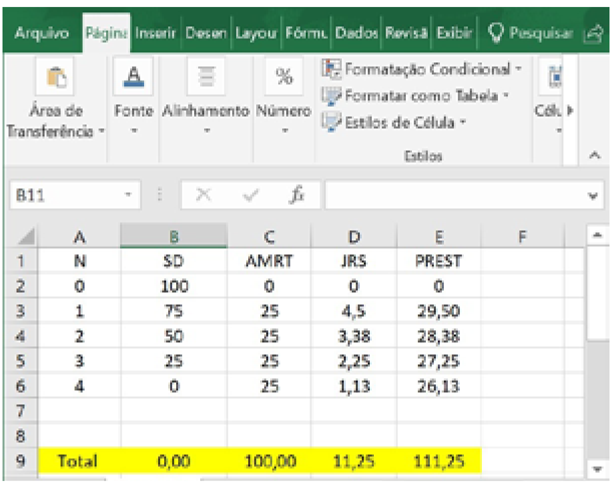
Figura 51: Estruturando uma tabela SAC – expansão dos resultados para os demais períodos, dadas as funções que ficaram definidas nas células, para um financiamento de 100,00, em quatro parcelas à taxa de 4,5%



	A	B	C	D	E
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST
2	0	100	0	0	0
3	1	75	25	4,5	29,50
4	2	50	25	3,38	28,38
5	3	25	25	2,25	27,25
6	4	0	25	1,13	26,13

Seguindo o mesmo método do problema anterior pode-se calcular a linha "total".

Figura 52: Tabela SAC para um principal de 100,00, com $n = 4$ e $i = 4,5\%$



	A	B	C	D	E
1	N	SD	AMRT	JRS	PREST
2	0	100	0	0	0
3	1	75	25	4,5	29,50
4	2	50	25	3,38	28,38
5	3	25	25	2,25	27,25
6	4	0	25	1,13	26,13
7					
8					
9	Total	0,00	100,00	11,25	111,25

Que é o mesmo resultado do SAC do exercício 1 do capítulo 2.

CAPÍTULO 4

Correção monetária e financiamentos imobiliários

4.1 Introdução

A correção monetária encontra diversas opções no caso brasileiro. Em quaisquer casos, as instruções do Banco Central e da Caixa Econômica são taxativas de que os juros devem incidir sobre o saldo devedor corrigido, ou seja, que devem ser pagos juros reais.

No início da correção monetária, em 1964, a taxa de juros especificada era efetiva ao ano, e os cálculos da tabela Price eram realizados de modo a que se encontrasse a taxa efetiva. Assim, um empréstimo contratado a 12% a.a., a ser amortizado em prestações mensais, iria ter juros de $\left(1{,}12^{\frac{1}{12}} - 1\right)100 = 0{,}95\%$a.m. e não de $\frac{12\%}{12}$ = 1% a.m. Nada, de fato, impediria que a prestação fosse paga, diariamente, a uma taxa de juros de $\left(1{,}12^{\frac{1}{365}} - 1\right)$100 = 0,03% ao dia. Na década de 1980, no entanto, os bancos comerciais começaram a atuar diretamente, com recursos próprios, de modo que trouxeram para as operações imobiliárias a prática financeira universal de prestações mensais e conversão da taxa de juros anual em mensal dividindo-a por 12 e instituindo o ano, para fins imobiliários, em 12 meses com 30 dias cada, ou seja, um ano financeiro imobiliário de 360 dias. Hoje, portanto, as taxas efetivas e as taxas nominais de juros convivem nas operações de crédito imobiliário no Brasil.

Os principais métodos de correção são:

1. Correção monetária pré-fixada, no qual a taxa de correção é determinada previamente no contrato ou pelo Conselho Monetário Nacional. A taxa de juros efetivamente cobrada j é tal que

$$(1 + j) = (1 + i)(1 + c)$$

em que i é a taxa de juros de operação e c é a taxa de correção monetária, ambas determinadas na mesma unidade de tempo. Essa sistemática está em desuso, mas é perfeitamente lícita de ser realizada atualmente, desde que haja seguro de crédito.

2. Correção monetária *a posteriori*, as normas do BC admitem diversos indicadores de correção monetária – IGP, IPCA, taxa de câmbio, ou simplesmente a TR (taxa referencial) – fazendo-se o reajuste normalmente uma vez por ano. Há total liberdade na escolha de índices de correção monetária. As operações do sistema financeiro habitacional e do Fundo de Assistência ao Trabalhador (FAT), de modo geral, permitem o uso do FGTS do trabalhador, mas quase sempre há limites para o valor do imóvel a ser financiado.

4.2 Financiamento baseado na TR + juros prefixados

A taxa referencial (TR), criada pela Lei n° 8.177, de 1º de março de 1991, pelo Plano Collor II, é uma tentativa exótica de se incorporar aos juros nominais a parcela que é devida estritamente à inflação. Apareceu quando a legislação proibiu, na década de 1980, a correção monetária com base em índices de preços, hoje permitida. Normalmente, os contratos imobiliários preveem uma taxa de juros, que é fixa para a vida do contrato, mais a TR. A TR é divulgada diariamente, sob forma de taxa de juros anual vigorante na data de sua divulgação. A maior parte dos contratos imobiliários dos bancos comerciais preveem uma TR anual, resultante do encadeamento das TR dos últimos 12 meses.

A TR era determinada pelo BC com base na Taxa Básica Financeira (TBF), e era calculada, desde a sua introdução, em 1991, até 2018, pela média das taxas de juros de certificados e recibos de depósitos a prazo fixo (CDB e Recibos de Depósitos Bancários, RDB), de 30-35 dias de prazo, das 30 maiores instituições financeiras, eliminadas as duas maiores e as duas menores taxas mensais. Sobre a TBF aplica-se um redutor para se determinar a TR. O assunto era regulamentado pela Resolução nº 3.446, de 5 de março de 2007, que modifica a Resolução nº 3.354, de 31 de fevereiro de 2006.

Depois de determinada a TBF em percentagem ao ano, acha-se o redutor *R*, pela fórmula:

$$R = 1{,}005 + b\frac{TBF}{100}$$

Em que b varia inversamente em relação à TBF, de acordo com uma tabela, que se inicia em:

$TBF > 16\%$ a.a., $b = 0{,}48$; para 16% a.a. $\geq TBF > 15\%$ a.a., $b = 0{,}44$ etc..

O Redutor R é aplicado sobre a TBF para achar-se a TR, de acordo com a fórmula:

$$TR = \left[\left(\frac{1 + \frac{TBF}{100}}{R}\right) - 1\right] 100$$

Em 18 de janeiro de 2018, a Resolução n° 4.624 modificou radicalmente o cálculo da TBF e da TR, sem dúvida causada pelo baixo nível de inflação que se verificava nos anos anteriores. A TR vinha se reduzindo paulatinamente, dada a queda da inflação e das taxas de juros e desde 30 de agosto de 2017 era nula. Com a nova formulação de 2018, a TR continua nula.

Tanto a TBF quanto a TR passaram a ser calculados com base nas taxas de juros negociadas no mercado secundário das Letras do Tesouro Nacional (LTN). Em 12 de junho de 2018, quando a taxa da Selic era de 6,5% ao ano, a TBF era de 6,40% a.a., e a TR era de 0% a.a. Nessa data os CDB do Banco do Brasil situavam-se entre 3,7% a.a. e 4,3% a.a. e a meta de inflação era de 4,5% a.a.. A taxa de juros de empréstimos imobiliários da CEF era de 9% a.a. + TR enquanto o rendimento dos depósitos de poupança de 0,3715% a.m., em junho de 2018, ou seja, 4,5% a.a., a juros compostos.

Exercícios resolvidos

Exercício 1. Uma empresa lança R$ 200 mil de debêntures no mercado, com pagamento de juros mensais de 2,5% a.m. em 100 meses, e o principal a ser pago somente no final do 100º mês.

a) Qual deve ser o valor do depósito mensal para a formação de um *sinking fund* a ser aplicado a 4% a.m. em uma instituição, para a amortização do principal?

b) Qual o pagamento dos juros devidos aos tomadores de títulos?

c) Quanto a empresa deve alocar como despesas mensais de juros e de recursos para o *sinking fund*?

Resposta:

a) O valor mensal necessário para a constituição do *sinking fund*, que deverá ser igual ao valor do principal e que tem o mesmo valor no final da operação é:

$$P = \frac{C_0}{s_{\overline{n|}\, i}} = \frac{C_0}{s_{\overline{100|}\, 4}} = \frac{200.000{,}00}{1.237{,}6237046} = 161{,}60$$

b) Os juros mensais pagos aos tomadores são de $0{,}025 \times 200.000{,}00 = 5.000{,}00$

c) Portanto, a empresa terá como despesas mensais:

$$5.000{,}00 + 161{,}60 = 5.161{,}60$$

Evidentemente que a empresa receberá R$ 200 mil relativos à venda de suas debêntures no mercado.

Exercício 2. Um empréstimo habitacional típico é feito a 9% a.a. de juros, 25 anos de prazo, com pagamentos mensais. Determine a prestação relativa a um empréstimo de R$ 300 mil, adotando taxa de juros mensal com cinco casas decimais, considerando a taxa como nominal e como efetiva.

a) A solução por juros nominais seria:

$$\frac{i}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75;\ n = 25 \times 12 = 300;\ C_0 = 300.000$$

O que fornece,

$$P = 2.517{,}59$$

b) A solução com juros efetivos é bem melhor para o devedor:

$$(1 + i)^{12} = 1{,}09;\ \text{e}\ i = 0{,}72073\%$$

a taxa de juros cai, portanto, de 0,75% a.m. para aproximadamente 0,72% a.m. e, consequentemente, a prestação cai também, para:

$$P = 2.445{,}83$$

A confusão entre juros nominais e efetivos é uma armadilha proposital em que credores inescrupulosos usam juros nominais para enganar devedores incautos.

Exercício 3. Este é um exemplo histórico que ilustra o risco de se adotar índices de preços artificiais como a Obrigação Reajustável do Tesouro Nacional (ORTN) em operações financeiras. Um empréstimo de Cr$ 100 mil, contratado em 5 de junho de 1971, deve ser amortizado pela tabela Price em três parcelas anuais a juros reais de 9% a.a., com correção monetária das ORTN. Determine o valor das prestações pagas, adotando-se quatro casas decimais para a taxa de juros.

O indexador é a ORTN, já em desuso, mas com numerosos contratos ainda em vigor, por terem sido feitos, originalmente, por prazos longos; a sistemática é a mesma, para qualquer indexador. Acha-se o valor da prestação inicial e aplica-se o índice de correção sobre o saldo devedor e sobre o valor da prestação.

O valor nominal das ORTN em junho de 1971, 1972, 1973 e 1974 são, respectivamente, 54,01; 65,75; 74,97 e 86,91.

A correção monetária em relação ao ano anterior, que mede a inflação do ano é:

$$1^{\circ} \text{ ano } (1972) = \left(\frac{65{,}75}{54{,}01} - 1\right) 100 = 21{,}74\%$$

$$2^{\circ} \text{ ano } (1973) = \left(\frac{74{,}97}{65{,}75} - 1\right) 100 = 14{,}02\%$$

$$3^{\circ} \text{ ano } (1974) = \left(\frac{86{,}91}{74{,}97} - 1\right) 100 = 15{,}93\%$$

A questão pede apenas o valor das prestações, ou seja, o valor da prestação inicial multiplicado pela variação das ORTN.

A prestação é dada por:

$$C_0 = P\, a_{\overline{n|}\,i} \Leftrightarrow P = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}\,i}}$$

De uma calculadora,

n = 3; ***i*** = 9, ***PMT*** = –1; tecla-se ***PV*** e acha-se $a_{\overline{3|}\,9}$, que é confirmado pela tabela II.

O valor das prestações, sem correção, é

$$P = \frac{100000}{2{,}5312947} = 39.505{,}48$$

O valor da 1ª prestação, a ser paga, um ano após o contrato, tem correção monetária e é

$$39.505{,}48 \times \frac{65{,}75}{54{,}01} = 48.092{,}67$$

A 2ª prestação, com correção, é

$$39505{,}48 \times \frac{74{,}97}{54{,}01} = 54836{,}621$$

A 3ª prestação, com correção, é

$$39.505{,}48 \times \frac{86{,}91}{54{,}01} = 63.570{,}10$$

Exercício 4. Um empréstimo de Cr$ 10 mil, contratado em 5 de junho de 1971, deve ser amortizado pela tabela Price em três parcelas anuais, a juros de 9% a.a., com correção monetária das ORTN. A fim de "facilitar" os pagamentos do mutuário, é determinada uma taxa de correção monetária contratual que não poderá exceder a 14,5% a.a. nos três anos do contrato. A correção anual será de 14,5%, se a variação das ORTN lhe for superior. O saldo remanescente será liquidado em uma única parcela, corrigida pelas ORTN, com juros efetivos de 9% a.a., seis meses após o período inicialmente contratado (ou seja, em 5 de dezembro de 1974). Os índices de correção monetária devem ser calculados com duas casas decimais (os juros são calculados sobre o saldo devedor efetivo e a amortização é calculada como a diferença da prestação e juros).

Resolução:

A sistemática é a seguinte: aplicam-se os índices de correção monetária das ORTN para determinar o **saldo devedor (SD) efetivo**, isto é, o saldo devedor de responsabilidade do mutuário, que deve ser liquidado em qualquer hipótese. A prestação e o saldo devedor com correção máxima contratual, doravante chamado de **saldo devedor aparente**, são corrigidos pelo menor dos índices entre a variação percentual da correção monetária das ORTN e 14,50% a.a. Os juros são calculados sobre o saldo devedor efetivo, que é a forma tecnicamente correta de fruição de juros. A amortização consiste na diferença entre a prestação e os juros. Os valores da ORTN nos meses de junho de 1971 a 1973 estão no exercício anterior. Em dezembro de 1974, o valor da ORTN é 105,41. A correção monetária das ORTN foi 21,74% em 1972, 14,02%

em 1973 e 15,93% em 1974, ou seja, em dois dos três anos do contrato revelou-se superior a 14,5%, dando, portanto, um benefício provisório favorável ao mutuário. Todas as diferenças serão liquidadas seis meses após o término do contrato inicial, corrigidas pela variação das ORTN do período, que foi 21,29% a.a. (o saldo devedor de correção máxima contratual, calculado pelo menor dos índices entre a ORTN e 14,5%, não é necessário para o mutuário, mas aqui é calculado para saber-se a discrepância entre os dados formais e os efetivos).

O exercício mostra que o pagamento da prestação, supostamente constante pela tabela Price, nunca o é, e que o comportamento do saldo devedor efetivo é, aparentemente, absurdo: por exemplo, paga-se, de amortização, Cr$ 3.427,72 na primeira prestação, para um saldo devedor inicial de Cr$ 10.000,00, e o mutuário deve ainda, após a correção, um total de Cr$ 8.746,28. Aliado ao autoritarismo da época, a complexidade e a absoluta falta de transparência dos cálculos serviram para desmoralizar o instituto da correção monetária e o próprio sistema financeiro habitacional.

Quadro 13: Pagamento com correção monetária máxima e pelas ORTN

(continua)

Data	Saldo devedor		Amortização	Juros	Prestação
	Efetivo	Aparente			
5.6.71	10.000,00	10.000,00	-	-	-
5.6.72*	12.174,00	11.450,00	-	-	-
5.6.72	8.746,28	8.022,28	3.427,72	1.095,66	4.523,38
5.6.73*	9.972,51	9.147,00	-	-	-
5.6.73	5.712,48	4.886,97	4.260,03	897,53	5157,56
5.6.74*	6.622,48	5.595,58	-	-	-
5.6.74**	1.313,09	286,19	5.309,39	596,02	5.905,41

Quadro 13: Pagamento com correção monetária máxima e pelas ORTN

(conclusão)

5.12.74*	1.592,65	-	-	-	-
5.12.74	0,00	-	1.592,65	70,13	1.662,78

Notas:

[1]Principal de Cr$ 10.000, juros de 9% a.a., em três prestações, pela tabela Price, e uma residual; correção do saldo devedor efetivo pela ORTN; juros calculados sobre o saldo devedor efetivo; correção da prestação e do saldo devedor aparente pelo menor índice entre a variação das ORTN e 14,50% a.a. Amortização calculada por diferença entre a prestação e os juros.

[2]A data sem asterisco refere-se aos saldos devedores após o pagamento da prestação assinalada na data; o mutuário só toma conhecimento dos valores das operações nas datas sem asterisco e quando do término do contrato original (com dois asteriscos).

*A data refere-se à correção monetária dos saldos devedores feita antes do pagamento da prestação.

**Término do contrato original.

A prestação, os juros e a amortização iniciais calculadas sem correção que servirão de base para os cálculos futuros são:

$$P = \frac{C_0}{a_{\overline{3|}\,9}} = \frac{10.000}{2{,}5312947} = 3.950{,}55$$

$$J = 0{,}09 \times 10.000 = 900{,}00$$

$$Z = 3.950{,}55 - 900{,}00 = 3.050{,}55$$

A primeira prestação anual com correção em 5 de junho de 1972 é calculada da seguinte forma:

A primeira correção pelas ORTN é de 21,74%, o que dá um saldo devedor efetivo de

$$C_{efet} = 10.000,00 \times 1,2174 = 12.174,00$$

Mas o teto de correção é 14,50%, daí o saldo devedor aparente ser de

$$C_{CMm\acute{a}x} = 10.000,00 \times 1,1450 = 11.450,00$$

Portanto, os saldos corrigidos, antes mesmo do pagamento da primeira prestação, são determinados por índices distintos, com os problemas óbvios decorrentes da existência de dois saldos devedores. O valor da amortização é pequeno, já que os juros são pagos preferencialmente à época da amortização (como devem sê-lo).

A correção da prestação pelo índice máximo de dará uma prestação de

$$P = 3.950,55 \times 1,1450 = 4.523,38$$

Mas os juros são calculados sobre o SD efetivo corrigido pelas ORTN

$$J = 0,09 \times 12.174,00 = 1.095,66$$

E a amortização é calculada como o resíduo entre a prestação corrigida pelo índice fixo e os juros.

$$Z = 4.523,38 - 1.095,66 = 3.427,72$$

Daí que os saldos devedores após o pagamento da primeira prestação são:

$$C_{efet} = 12.174,00 - 3.427,72 = 8.746,28$$
$$C_{CMm\acute{a}x} = 11.450,00 - 3.427,72 = 8.022,28$$

Assim, já no pagamento da primeira prestação corrigida, aparece divergência entre o SD proveniente da correção pela ORTN e aquele derivado de correção fixa. Mesmo que a partir desse período a correção monetária seja nula, haverá necessidade, no futuro, de uma prestação adicional para liquidar o saldo devedor efetivo.

A segunda prestação anual com correção em 5 de junho de 1973 é calculada da seguinte forma:

A correção da ORTN em junho de 1973, comparativamente a junho de 1972, foi 14,02%, portanto inferior ao máximo contratual de 14,50%. Assim, prevalece 14,02% para a correção dos dois saldos devedores e da prestação. A divergência entre os saldos devedores anteriormente existente é, portanto, mantida em termos reais.

Os valores dos saldos devedores corrigidos antes do pagamento da segunda prestação serão:

$$C_{efet} = 1{,}1402 \times 8.746{,}28 = 9.972{,}51$$

$$C_{CMmáx} = 1{,}1402 \times 8.022{,}28 = 9.147{,}00$$

E a prestação é, simplesmente, a anterior corrigida pela variação de 14,02% da ORTN.

$$P = 1{,}1402 \times 4.523{,}38 = 5.157{,}56$$

Os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor efetivo, e a amortização é definida como o resíduo da prestação após o pagamento dos juros.

$$J = 0{,}09 \times 9.972{,}51 = 897{,}53$$

$$Z = 5.157{,}56 - 897{,}53 = 4.260{,}03$$

Após o pagamento da segunda prestação, em 5 de junho de 1973, os saldos devedores serão:

$$C_{efet} = 9.972{,}51 - 4.260{,}03 = 5.712{,}48$$
$$C_{CMmáx} = 9.147{,}00 - 4.260{,}03 = 4.886{,}97$$

A terceira prestação anual, com correção, em 5 de junho de 1974 é calculada da seguinte forma:

Para a terceira correção, em 5 de junho de 1974, a variação das ORTN (15,93%) é superior ao índice prefixado (14,50%). Nesse caso, deve ser usado o primeiro índice tanto para o saldo devedor efetivo quanto para os juros. O segundo índice será utilizado para o cálculo da prestação e do saldo devedor com correção máxima.

Assim, os saldos devedores corrigidos antes do pagamento da terceira prestação são:

$$C_{efet} = 1{,}1593 \times 5.712{,}48 = 6.622{,}48$$
$$C_{CMmáx} = 1{,}1450 \times 4.886{,}97 = 5.595{,}58$$

Mas a prestação não pode subir acima do índice máximo de correção

$$P = 5.157{,}56 \times 1{,}1450 = 5.905{,}41$$

e os juros são calculados sobre o saldo devedor efetivo

$$J = 0{,}09 \times 6.622{,}48 = 596{,}02$$

e a amortização pela diferença entre a prestação e os juros

$$Z = 5.905,41 - 596,02 = 5.309,39$$

Daí que nada é extinto após o que seria a última prestação (a terceira), nem o SD com correção máxima, nem o SD efetivo. Há um valor muito alto de amortização ainda para ser pago.

$$C_{efet} = 6.622,48 - 5.309,39 = 1.313,09$$

$$C_{CMmáx} = 5.595,58 - 5.309,39 = 286,19$$

Nota: Nesse momento, isto é em 5 de junho de 1974, o mutuário entra em pânico: ou por que imaginava que, em situações normais, extinguiria sua dívida, o que não aconteceu, ou porque imaginava que estaria devendo Cr$ 286,19, resultante da correção máxima prevista no contrato, quando na verdade está devendo muito mais, ou seja, Cr$ 1.313,09.

Liquidação do resíduo resultante de diferenças entre as correções monetárias das ORTN e as de índice fixo máximo de 14,5% a.a.:

O saldo devedor efetivo de Cr$ 1.313,09 existente em junho de 1974, será pago seis meses depois, como reza o contrato, com correção das ORTN e juros de 9% a.a. A taxa semestral equivalente a 9% a.a é derivada de:

$$\sqrt{1,09} = 1,0440307$$

ou 4,40307% ao semestre.

O valor nominal das ORTN em junho de 1974 é 86,91 e em dezembro de 1974 é 105,41, donde a correção ter sido de 21,29% no período. O novo saldo devedor é, pois:

$$C_{efet} = 1{,}2129 \times 1.313{,}09 = 1.592{,}65$$

Portanto, a última amortização deve ser:

$$Z = 1.592{,}65$$

a qual deve ser paga com juros adicionais de

$$J = 0{,}0440307 \times 1{,}592{,}65 = 70{,}13$$

gerando uma última prestação de

$$P = 1.592{,}65 + 70{,}13 = 1.662{,}78$$

Nota: o pobre do mutuário, que imaginava dever Cr$ 286,19 no final do contrato, acaba tendo que pagar Cr$ 1.662,78, por razões de descompasso entre diversos índices oficiais de correção que são exacerbados pela sistemática da tabela Price. Realmente, é pedir muito das pessoas: o resultado prático foi a desmoralização do sistema financeiro habitacional e sua extinção em 1985-1987, pelo ministro Funaro, na presidência de Sarney.

Exercício 5. Determine, por calculadora, os valores a seguir especificados para um empréstimo contratado em 29 de maio de 1973, de Cr$ 200 mil, amortizáveis com taxa de juros de 9,875% a.a., em 20 anos, em prestações mensais, com correção monetária pelo Plano de Equivalência Salarial, tanto com pagamentos pelo SAC como pela tabela Price. O Plano de Equivalência Salarial (PES) utiliza o menor dos índices de correção da UPC e a do salário-mínimo:

a) Prestação, amortização e juros do 1º, 14º e 15ª prestações.

b) Saldo devedor após o pagamento da 1ª, 14ª e 15ª prestações.

O valor em cruzeiros da UPC e do salário mínimo (SM) são:

Quadro resumo para a questão 32

Data	SM	UPC
1.5.73	312,00	73,19
1.5.74	376,80	83,73
Variação %	20,77	14,40

A primeira prestação é paga 30 dias após o contrato, ou seja, em 29 de junho de 1973, e a correção monetária é, pela legislação, somente efetivada 90 dias após a data do novo salário mínimo, portanto, a partir de 1º de agosto de 1974. Dessa maneira, a 14ª prestação, que vence em 29 de julho de 1974, não sofre correção, mas a 15ª, que vence em 29 de agosto de 1974, já tem correção. A taxa de juros anual, dividida por 12, fornece os juros mensais de 0,82291667% a.m. (aproximada para oito decimais).

Quadro 14: Comparação entre Price e SAC para
C_0= 200.000; i = 0,82291667% a.m. e n = 240 meses

n	Price				SAC			
	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
1	199732,32	267,68	1645,83	1913,51	199166,67	833,33	1645,83	2479,16
14	196045,44 s/correção	297,77	1615,74	1913,51	188333,34 (s/correção)	833,33	1556,68	2390,01
-	224275,98 (corrigido)	-	-	-	215453,34 (corrigido)	-	-	-
15	223932,52	343,46	1845,60	2189,06	214500,01	953,33	1773,00	2726,33

O PES utilizará a variação da UPC e não do salário mínimo, visto que o primeiro apresentou variação menor do que o segundo.

Pela tabela Price

Para a 1ª prestação

Pela calculadora,

$$\boldsymbol{i} = 0{,}82291667,\ \boldsymbol{n} = 240 \text{ e } \boldsymbol{PV} = -200.000{,}00$$

$$\text{daí que } \boldsymbol{PMT} = 1.913{,}51$$

Os juros são calculados sobre o saldo devedor

$$J_1 = 0{,}008229167 \times 200.000{,}00 = 1.645{,}83$$

e a amortização, por diferença

$$Z_1 = P_1 - J_1 = 1.913{,}51 - 1.645{,}83 = 267{,}68$$

E o saldo devedor no final do primeiro período é o principal menos a amortização do primeiro período

$$C_1 = C_0 - Z_1 = 200.000{,}00 - 267{,}68 = 199.732{,}32$$

Para a 14ª prestação

Para achar J_{14} é necessário antes achar C_{13}

$\boldsymbol{n} = N - k = 240 - 13 = 227$, $\boldsymbol{PMT} = -1.913{,}51$, mantido o mesmo $\boldsymbol{i}$ anterior

daí que $PV = C_{13} = 196.343{,}21$

E os juros da 14ª prestação são

$$J_{14} = 0{,}008229167 \times 196.343{,}21 = 1.615{,}74$$

E a amortização

$$Z_{14} = P_{14} - J_{14} = 1.913{,}51 - 1.615{,}74 = 297{,}77$$

O saldo devedor antes da correção é, pois,

$$C_{14} = 196.343{,}21 - 297{,}77 = 196.045{,}44$$

Para a 15ª prestação

O valor do saldo devedor após a correção de 14,40% e antes do pagamento da 15ª prestação é

$$C_{14} = 196.343{,}21 - 297{,}77 = 196.045{,}44$$

e, portanto, os juros serão de

$$J_{15} = 224.275,98 \times 0,008229167 = 1.845,60$$

e a prestação

$$P_{15} = 1.913,51 \times 1,1440 = 2.189,06$$

$$\text{e } Z_{15} = P_{15} - J_{15} = 343,46$$

O saldo devedor após o pagamento da 15ª prestação é:

$$C_{15} = C_{14} - Z_{15} = 224.275,98 - 343,46 = 223.932,52$$

Solução pelo SAC

Para a 1ª prestação

$$Z_1 = Z_{14} = \frac{C_0}{n} = \frac{200.000}{240} = 833,33$$

$$\text{e } J_1 = 0,008229167 \times 200.000,00 = 1.645,83$$

$$P_1 = Z_1 + J_1 = 833,33 + 1.645,83 = 2.479,16 \text{ e}$$

$$C_1 = 200.000 - 833,33 = 199.166,67$$

Para a 14ª prestação

Determinando C13 por $C_k = C_0\left(1 - \frac{k}{n}\right)$, onde $k = 13$, para determinar J_{14}

$$C_{13} = 200.000{,}00\left(1 - \frac{13}{240}\right) = 189.166{,}67 \text{ e}$$

e portanto $P_{14} = Z_{14} + J_{14} = 833{,}33 + 1.556{,}68 = 2.390{,}01$

o saldo devedor antes da correção é:

$$C_{14} = 189.166{,}67 - 833{,}33 = 188.333{,}34$$

Para a 15ª prestação

O valor do saldo devedor corrigido após o pagamento da 14ª prestação será:

$$C_{14} = 188.333{,}34 \times 1{,}1440 = 215.453{,}34$$

A nova amortização para a 15ª prestação, após a correção, será

$$Z_{15} = 833{,}33 \times 1{,}1440 = 953{,}33$$

e os juros corrigidos serão de

$$J_{15} = 0{,}008229167 \times 215.453{,}34 = 1.773{,}00$$

e, portanto, a prestação após a correção é

$$P_{15} = 953{,}33 + 1.773{,}00 = 2.726{,}33$$

e o novo saldo devedor, após a correção é

$$C_{15} = C_{14} - Z_{15} = 215.453,34 - 953,33 = 214.500,01$$

A vantagem do SAC em relação à tabela Price é clara: o SAC tem menor saldo devedor que a Price, o que facilita aos mutuários que querem liquidar antecipadamente seus débitos (é claro que, em contrapartida, as prestações iniciais do SAC são mais elevadas que as prestações pela Price).

CAPÍTULO 5

O poder dos juros compostos e a morte inevitável

Como dizia Benjamin Franklin, há duas certezas na vida: que todos irão morrer e todos irão pagar impostos. Esta seção se propõe a estudar os mecanismos para se ter uma velhice tranquila, quando não se consegue ou não se deseja trabalhar mais. Deixaremos os impostos para uma outra oportunidade. É impressionante a relevância dos juros compostos e da poupança continuada, para a sociedade em geral, e especialmente para a aposentadoria e para uma velhice tranquila, já que:

a) Valores depositados em uma conta para aposentadoria são mantidos por longos anos a juros compostos e os depósitos ocorrem por toda a vida ativa do trabalhador;

b) Os juros compostos aumentam exponencialmente e são devidos por toda a vida ativa e inativa, até o desaparecimento do último beneficiário.

A conclusão desta seção é que: *é importante poupar desde cedo na vida ativa, nem que seja um pouco, porque o esforço de se poupar mais no final da vida ativa será maior e, muitas vezes, impossível de ser concretizado.*

As razões da conclusão anteriormente apresentada são explicitadas adiante:

a) A tendência de queda da aposentadoria máxima do INSS é uma constante na história brasileira. Caiu de um valor equivalente a 20 salários mínimos em 1963 para 5,8 vezes o salário mínimo em 2022, ou seja, todos aqueles que têm renda superior a este valor precisam de uma complementação salarial para manter a renda ao nível anterior. Considerando uma vida ativa de 36 anos e juros reais de 6% a.a. tem-se que:

$$C_n = (1 + i)^{36} = 8{,}15, \text{ ou aproximadamente } 8$$

Ou seja, tudo que é poupado no começo da carreira vale 8, *quando da aposentadoria*, 36 *anos depois*.

b) O trabalhador não deve se iludir pensando que poderá aumentar sua poupança de maneira extraordinária nos últimos anos de trabalho e que isso será suficiente para compensar poupanças nulas ou baixas do começo de sua vida produtiva quando ganhava pouco. Por uma razão muito simples:

O salário do trabalhador cresce pouco, no máximo 1,7% a.a., em relação ao ano-base – esse foi o crescimento, de 1820-1998, na renda *per capita* do Ocidente (Europa ocidental, EUA, Canadá, Austrália e Nova Zelândia) e do Japão, aí considerado o período áureo da Revolução Industrial (séc. XIX), conforme Maddison (2001). É provável que o futuro jamais venha a repetir esse ritmo de crescimento, já que fenômenos recentes de elevada produtividade (informática e telecomunicações) são eventos econômicos históricos pálidos comparados aos da revolução industrial do século XIX. Há, ainda, um agravante: os salários são baixos no Brasil e vão continuar baixos por muitos anos, daí que para se ter uma reserva razoável para a velhice é necessário poupar, e muito, desde o início da sua carreira.

A renda *per capita* brasileira, no poder paritário de compra, era de aproximadamente US$ 7.000 por ano, em 2001, conforme o Banco Mundial (2003). Alguém que tivesse o dobro dessa renda teria US$ 14 mil anuais (aproximadamente US$ 1.200 mensais), o que seria uma renda excelente em 2001. Se essa pessoa desejasse formar uma reserva financeira que lhe possibilitasse 20 anos de uma boa aposentadoria, para si e/ou seus dependentes, equivalente a 70%[1] desse salário, a preços de de 2001, ou seja, de, US$ 9,8 mil anuais, como será visto adiante, teria que acumular um patrimônio de US$ 112 mil quando na aposentadoria. A hipótese de uma vida ativa de 36 anos, combinada com a hipótese de início do trabalho aos 21 anos fornece uma expectativa de vida ao nascer de 21+36+20=77 anos, bem acima da média brasileira que prevalecia

---

[1] Alguns economistas usam 80% como percentual da renda que se deseja manter após a aposentadoria, mas o Brasil é um país pobre e 80% parece generoso em demasia. O sistema de seguro social americano possibilita, em média, apenas 40% do salário dos últimos três anos do trabalhador, que é complementado com poupança pessoal, quase sempre existente sob a forma de fundos de pensão, de seguros e da moradia do trabalhador.

em 1924, já que para ter 77 anos em 2001, o trabalhador teria que ter nascido em 1924. Em caso de falecimento, os anos que restam até que se completem os 77 serão de rendas para os herdeiros do aposentado.

$P = 0{,}7 \times 14.000 = 9.800$ (valor da aposentadoria)

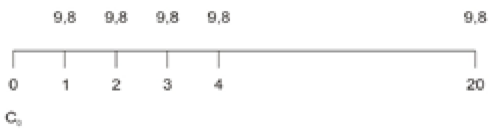
$n = 20$; $i = 6\%$

$C_0 = P\, a_{\overline{n|}\, i}$

$$C_0 = 9.800 \times 11{,}47 = 112.406$$

Uma aposentadoria de US\$ 9.800 por 20 anos implica despesas de US\$ 196 mil. O poder dos juros compostos requer, no entanto, um patrimônio, na aposentadoria, de apenas US\$ 112 mil, já que a reserva é dissipada lentamente à razão de US\$ 9.800 por ano, mas estará sempre rendendo juros reais de 6% a.a. sobre o saldo existente.

Gráfico 10: Esquema de pagamentos de uma aposentadoria de US\$9,8 mil anuais por 20 anos



$n = 20$ (20 anos de gastos após a aposentadoria), $i = 6\%$ a.a. (taxa prevista pela legislação brasileira, em termos reais, possivelmente elevada em excesso dada a produtividade do estoque de capital físico ser bem mais baixa no Brasil; no mundo está entre 2% a.a. e 4% a.a. de acordo com o Banco Mundial) e $C_0 = 112$.

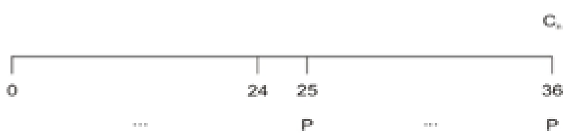
Há várias estratégias para se obter um patrimônio de US$ 112 mil ao final da vida ativa, mas não se deve esquecer que os salários somente aumentariam 1,7% a.a. e que, portanto, no final de 36 anos de trabalho, são, ainda, muito baixos para a média da população, já que aumentariam apenas 83%. Para $i = 0{,}017$ e $n = 36$

$$(1 + i)^n = (1 + 0{,}017)^{36} = 1{,}83$$

Para um salário inicial anual médio de US$ 7 mil, em 2001, pode-se esperar apenas US$ 12.843 no final de 36 anos. Mesmo o trabalhador que tinha, em 2001, o dobro do salário do trabalhador médio, teria uma aposentadoria de US$ 9.800, que é apenas 76% do salário que o trabalhador ativo teria em 2037, ou seja, 36 anos após 2001. **A vida é dura**. Muito embora haja muitas expectativas otimistas dos trabalhadores, só se pode esperar aumento de apenas 83% no salário em 36 anos.

A primeira estratégia para a formação de um patrimônio de US$ 112 mil é constituí-lo somente nos anos de salário mais alto, digamos, nos últimos 12 anos de vida ativa (que são o último terço de sua vida ativa):

Gráfico 11: Constituição de patrimônio com *P* de poupança só nos últimos 12 anos de vida ativa



Para determinar a poupança necessária nos últimos 12 anos de vida ativa, usam-se as técnicas habituais da matemática financeira, ou seja, deseja-se determinar uma poupança anual de *P* por 12 anos, para se obter US$ 112.406,00 no final da vida ativa.

$$C_n = P\, s_{\overline{n|}\,i}$$

em que:

n = 12 anos

i = 6% a.a.

P = poupança anual para obter C_n = 112.406 no 36º ano

$$112.406 = P \times 16{,}8699412 \therefore P = 6.663$$

[Para achar os valores de $s_{\overline{n|}\,i}$, dados *n* e *i*, basta utilizar a calculadora, e como $FV = \boldsymbol{PMT}\, s_{\overline{n|}\,i}$, fazendo-se *PMT* = 1, tem-se $FV = s_{\overline{n|}\,i}$]

Ora, poupar US$ 6.663 anuais por 12 anos entre o 25º e o 36º ano de trabalho, todo ano, é uma impossibilidade, já que o trabalhador ganha apenas US$ 7.000 no início de sua vida ativa e terá salários de US$ 10.491 no 24º ano, que aumentarão para US$ 12.843 no 36º ano, já que:

No 24º ano, $[7000\,(1 + 0{,}017)^{24}] = 10.491$.

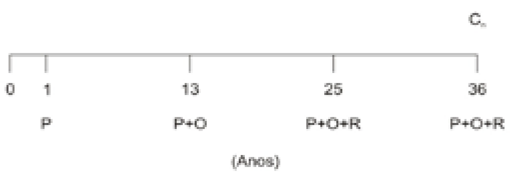
No 36º ano, $[7000\,(1 + 0{,}017)^{36}] = 12.843$.

O trabalhador jamais poderá poupar US$ 6.663 anuais, já que seu salário variará de US$ 10.491 a US$ 12.843, ou seja, sua poupança deveria estar na faixa de 52% a 64% de sua renda, o que é impraticável.

Conclusão: o trabalhador que espera poupar o que necessita para constituir um patrimônio para sua aposentadoria somente no último terço de carreira está muito enganado, não vai conseguir fazê-lo. É uma estratégia falha.

Uma segunda estratégia, mais razoável, seria começar a poupar alguma coisa desde cedo, de modo a criar hábito de poupança e um longo fluxo de recursos. No início, a poupança deve ser baixa, tanto absoluta, quanto relativamente à renda, aumentando em termos percentuais, significantemente, no meio da vida ativa e um pouco mais, ainda, no final da vida ativa. Parece claro que o trabalhador somente consegue poupar com tranquilidade se o faz mediante um valor fixo por ano, por vários anos (e não alternativamente, com uma poupança bruta variável a cada ano, de acordo com sua renda). Digamos que mantenha seus hábitos de poupança por cada 12 anos, isto é, que mude a poupança em cada $\frac{1}{3}$ da vida ativa.

Gráfico 12: Constituição de patrimônio em todos os anos da vida ativa



Seja *P* a poupança por ano até o 12° ano de vida ativa, *P* + *O*, do 13º ano ao 24º ano e *P* + *O* + *R*, do 25º ano ao 36º ano, com juros de 6% a.a.

A taxa de juros de 6% a.a. é altíssima, bem acima da taxa de crescimento dos salários (1,7% a.a.), e, possivelmente, não vai ser mantida no futuro. Essa é mais uma razão para se poupar hoje ainda mais, para se aproveitar dessa bonança, que não deve continuar por muito mais tempo.

Então:

$$C_n = P\, s_{\overline{36}|i} + O\, s_{\overline{24}|i} + R\, s_{\overline{12}|i}$$

em que: $\boldsymbol{i}$ = 6% a.a. e $\boldsymbol{C_n}$ = 112.406

Para achar os valores de $s_{\overline{n}|i}$, faz-se, sucessivamente, n = 36, 24 e 12 e i em uma calculadora e em $FV = PMT\, s_{\overline{n}|i}$ faz-se PMT = – 1, e calculam-se os diversos $s_{\overline{n}|i}$, daí que:

$$C_n = 119P + 51O + 17R = 112.406 \qquad \textbf{(1)}$$

Assim, a poupança feita em todos os 36 anos de vida ativa é multiplicada por **119** para a formação do patrimônio necessário para a aposentadoria; já a poupança adicional iniciada no segundo terço da vida ativa do trabalhador é multiplicada por apenas **51**, ou seja, menos da metade do valor anterior, e a poupança adicional no final da vida ativa é multiplicada apenas por 17, ou seja, pouco mais de 14% do valor encontrado para poupança de toda vida. Poupar só no final da vida ativa – mesmo que a poupança seja muito elevada – simplesmente não compensa a perda de rendimentos que resultam da poupança a juros compostos altíssimos.

Observe que o salário médio anual é 7.000 no primeiro ano e que cresce a uma taxa r = 1,7% a.a. e que é de 7.000 $(1 + r)^{12}$ = 8.569 no 13º ano, 7.000 $(1 + r)^{23}$ = 10.315 no 24º ano e 7.000 $(1 + r)^{35}$ = 12.628 no 36º e último ano da vida ativa. O salário cresce pouco, exceto para alguns poucos que vão ficar milionários e que, obviamente, não precisam de previdência. É certo que a poupança P deve ser baixa nos

12 primeiros anos, já que a renda é baixa, mas continua até o 36º ano, com *O* adicionais entre o 13º e 24º anos e *O* + *R* do 25º ao 36º ano. Note que *P* é multiplicado por 119 vezes – dada a força simultânea dos **juros compostos e da antiguidade da poupança inicial**.

Há uma infinidade de soluções para a equação **(1)**, mas o nível de salários é um dado crucial. As soluções podem ser desenvolvidas por uma equação em que a taxa de poupança aumenta de acordo com a renda, em uma regra automática. Mas o automatismo deve ser rejeitado em favor do bom senso.

No começo da vida, é difícil poupar mais do que 5%, ou seja, 0,05 × 7.000 = 350 anuais, mas isso, de acordo com a equação **(1)**, é multiplicado por 119 e já nos dá 350 × 119 ≅ 42 mil do total necessário de uma reserva de 112 mil, o que sugere que 5% da renda no início é até elevado. Talvez seja melhor começar moderadamente, digamos com 4% da renda inicial, já que é crucial criar o hábito de poupança, ou seja, 0,04 × 7.000 = 280 anuais ou um patrimônio de US$ 33 mil aproximadamente (já que 280 × 119 ≅ 33.320). Observe o poder dos juros compostos: US$ 280 acumulados sem juros por 36 anos fornecem um patrimônio de apenas US$ 10.080 e não os US$ 33.320 que se obtém com os juros compostos.

O subperíodo intermediário (13º ao 24º ano) deve ter um aumento significativo na poupança, uma vez que, além de prevalecer por 24 anos com um multiplicador de 51, já se tem uma renda bem alta. No 24º ano, o salário já é 10.315 e se pode pensar em uma poupança mais alta, de 12% a 13% da renda, digamos de 12,2% (ou seja, 0,122 × 10.315 ≅ 1.259), de modo que no 13º ano, o primeiro da nova série, a taxa de poupança seria a mais elevada, mas ainda razoável de

$\frac{1259}{8569} \cong 0{,}15$ do salário. Ou seja, $O = 1.259 - 280 = 979$, o que dá um patrimônio reserva adicional de $979 \times 51 = 49.929$. O que deve ser adicionado entre o 25º e o 36ºano é obtido como resíduo na equação **(1)**:

$$17\,R = 112.406 - 33.320 - 49.929 = 29.157$$

$$\text{ou } R = 1.715$$

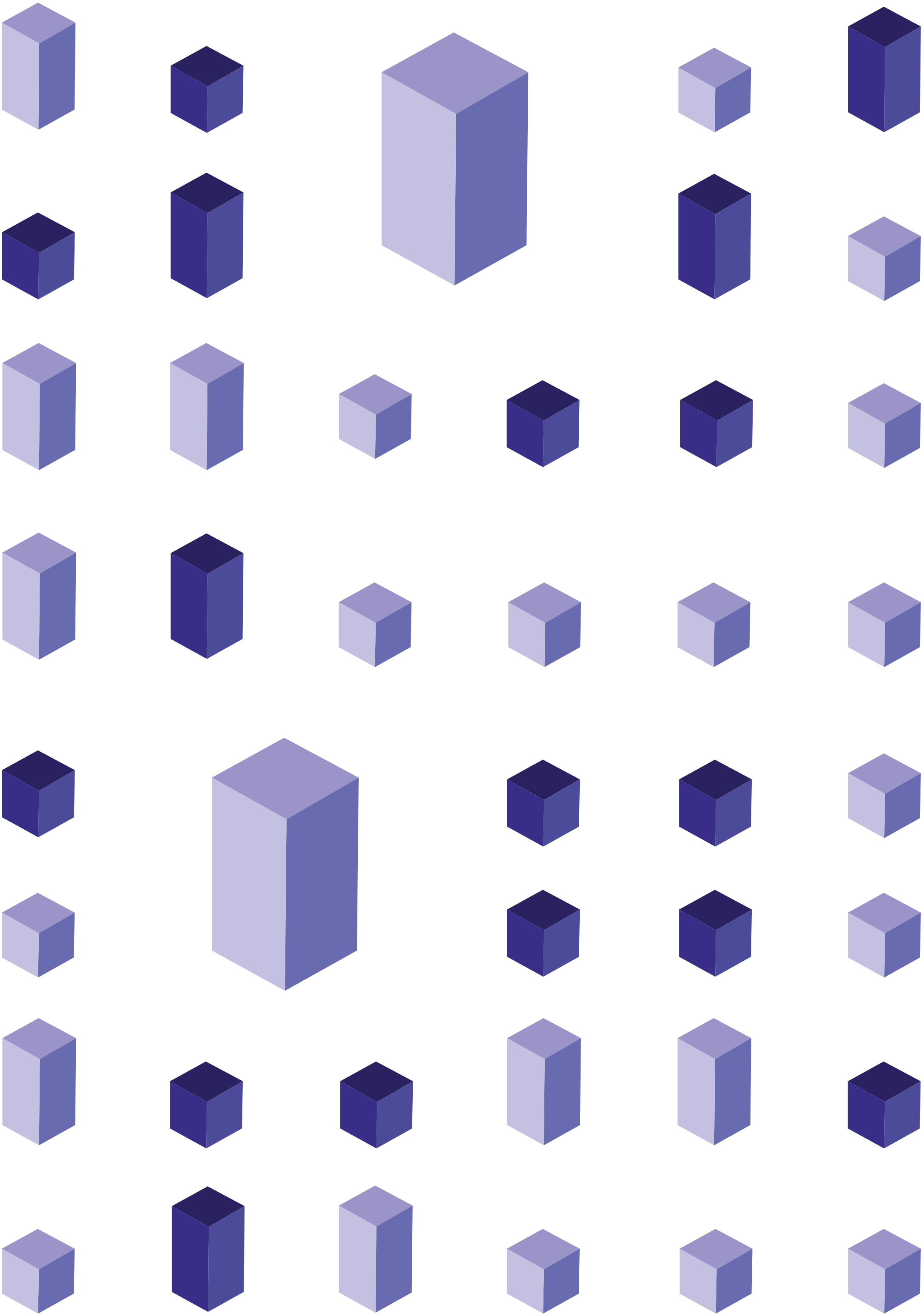
Ou seja, no 25º ano a poupança média é de $\frac{2.974}{10.491} = 28{,}8\%$ do salário, esta razão vai diminuindo até o 36º ano para $\frac{2.974}{12.628} = 24\%$ do salário. Não é brincadeira poupar nos últimos anos da vida ativa na faixa de 24 a 29% do salário, e mesmo esse índice que já é elevadíssimo só é possível de ser obtido quando se poupa desde o começo da vida ativa.

Em resumo: para obter uma reserva de US$ 112 mil ao final de 36 anos ativos, deve haver uma poupança anual de US$ 280 até o 12º ano, de US$ 1.259 entre o 13º e 24º anos e US$ 2.974 entre o 25º e o 36º anos. O poder dos juros se manifesta: o total acumulado sem juros seria de US$ 54 mil e não US$ 112 mil conseguidos com juros de 6% a.a.

Pode-se, é claro, melhorar os resultados anteriormente apresentados. Mas não se deve buscar precisão onde ela não existe. Programas de computador com modelos mais complicados podem ser mais precisos, mas são quase ridículos, já que dependem de numerosas hipóteses (como o número de anos de vida ativa, número de sobreviventes, expectativa de vida dos dependentes do trabalhador, aumento nos salários reais da categoria profissional, etc.), que têm uma margem de erro extremamente elevada.

Respostas dos exercícios a resolver – capítulo 2

Exercício 1:	**Resposta**
1.1	392,3285
1.2	9611,4597
1.3	2076,8243; 2631,1177
1.4.1	761,7292; 2
1.4.2	824,7292; 4
1.5.1	2197,6010
1.5.2	1262,2461
Exercício 2:	**Resposta**
2.1	7176,5538
2.2	371,2485
Exercício 3:	**Resposta**
3.1	200,0000; 200,0000; 408,1867
3.2	424,6775
Exercício 4:	**Resposta**
4.1	52,8711
4.2	268,9063
4.3	175,7719
4.4	936,6004; 474,9191
4.5	151,4577
4.6	103,9652
4.7	58,9193
4.8	56,6314; 20,000; 20,0000
4.9	40,3056
4.10	46,2009
4.11	6,4295
4.12	55,7767



CAPÍTULO 6

Logaritmos, derivadas e elasticidades

6.1 Conceito de logaritmo

Conforme assinala Maor (1994), Neper introduziu, em 1614, o conceito e o nome *logaritmo* em trabalho publicado originalmente em latim como *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (*Descrição do mundo maravilhoso canônico dos logaritmos*, em que o termo "canônico" significa *direito/regras* e é oriundo da parte principal da missa católica, que vai do Santo à Consagração). O termo *logaritmo* significa a proporção numérica – em grego antigo, *logos* (razão) e *arithmos* (número), latinizado por Napier (cujo nome em latim é Johannes Neper). A primeira tradução do livro de Neper foi para o inglês, em 1616, seguida de outra em 1626 para o flamengo (os holandeses eram os europeus com melhores índices econômicos do início do século XVII, destacando-se nas práticas comerciais) e, rapidamente, para as demais línguas europeias. A primeira tradução chinesa é de 1653, apenas 39 anos após o texto original, refletindo o elevado desenvolvimento da China à época.

Neper não descobriu o número *e*, nem o conceito de *base* do logaritmo, introduzido por Briggs, em 1624. A definição de logaritmos que usamos hoje é de 1728 e é devida a Euler. Somente em 1737 Euler provou que *e* é um número irracional, e somente em 1879 Hermite provou que *e* é também um número transcendental, isto é, e não é a raiz de uma equação polinomial de coeficientes racionais.

Os logaritmos foram extensivamente utilizados para facilitar os cálculos até meados da década de 1970, quando a popularização das calculadoras eletrônicas os tornou obsoletos para cálculos de números elevados. Mas continuaram sendo muito usados pelos economistas para linearizar equações exponenciais e para gráficos.

Conforme dito, o logaritmo de Neper foi modernizado, em termos de linguagem, por Briggs em 1624 para a forma que hoje conhecemos:

Se,

$$N = 10^L$$

Então, o logaritmo de N, escrito como $\log_{10} N$, é

$$\log_{10} N = L, \log_{10} 10 = L$$

o que implica que

$$\log_{10} 10 = 1$$

Se,

$$N = 10 \text{ e } L = \log_{10} N; \text{ então } L = 1.$$

$L = \log_{10} N$ dá a mesma informação que $N = 10^L$ onde 10 é a base do logaritmo e L é o logaritmo decimal (*Briggsiano* ou *comum* são outros nomes). Os logaritmos decimais eram muito utilizados em matemática financeira, dada a facilidade de cálculos, mas hoje, com o aperfeiçoamento das calculadoras eletrônicas, usa-se mais os logaritmos naturais, que facilitam os cálculos infinitesimais.

6.1.1 Definições

A definição genérica de logaritmo parte de uma função exponencial $a^y = z$.

A **função inversa** de $a^y = z$ é tão importante que tem o nome de **logaritmo de base a**, tal que, $y \equiv \log_a (z) \Leftrightarrow a^y = z$

A definição fundamental de logaritmo é a potência à qual se deve elevar a base para obter o número original.

Daí que,

$$\mathrm{a}^{\log_a \mathrm{Z}} = \mathrm{z} \text{ e } \log_a (a^z) = z$$

Normalmente, abrevia-se e escreve-se $\log_a (z)$ sem parênteses e/ou sem menção da base, como em $\log_a z$ e $\log z$.

O logaritmo é, portanto, o índice de potência pelo qual a base deve ser elevada a fim de se obter um determinado número. Consequentemente, todo número positivo tem um único logaritmo para uma base >1. Como casos particulares, temos, por definição:

$$a^0 = 1 \text{ e } a^1 = a, \text{ então } \log_a 1 = 0 \text{ e } \log_a a = 1$$

c) As propriedades fundamentais dos logaritmos são, para qualquer base:

1. $\log a \times b = \log a + \log b$
2. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
3. $\log p^n = n \log p$

Observe que a regra 3 inclui potência fracionada.

Assim,

$$\log \sqrt[2]{p} = \log p^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log p$$

$$\log \sqrt[3]{p^2} = \log p^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log p$$

e que, por decorrência da regra 2, tem-se que:

$$\log \frac{1}{p} = \log 1 - \log p = 0 - \log p = -\log p = \log p^{-1}$$

d) Propriedade fundamental para os gráficos logarítmicos

A variação absoluta do logaritmo é igual ao logaritmo da variação relativa da variável.

Se $a = b\,(1 + i)$

Logo,

$a - b =$ Variação absoluta; $\frac{a}{b}$ = Variação relativa

Então,

log a – log b = log (1 + i)

Assim, para i = 0,10 em um gráfico em que os logaritmos estão na vertical, a distância entre 1,100 e 1,210 (diferença relativa de 10%) será a mesma que a distância entre 1,210 e 1,331 (diferença relativa de 10%), se expressa em logaritmos (a distância é igual a 0,0413927). Isso dá uma melhor ideia da série (taxa de crescimento constante de 10%) como se vê no quadro adiante.

Por outro lado, em um gráfico com escala linear, as diferenças de distâncias no eixo vertical podem ser iguais, por exemplo, entre 40 e 60 e entre 60 e 80, muito embora suas taxas de crescimento sejam distintas – de 50% e de 33%, respectivamente – daí a desvantagem dos gráficos lineares quando se estuda as taxas de crescimento, de juros, etc.

Se $\frac{a}{b} = (1 + i)$, então, $\log \frac{a}{b} = \log (1 + i)$

Ou seja, o logaritmo de uma proporção com uma taxa de variação constante é o logaritmo da soma de 1 mais a taxa.

Quadro 15: Variações absoluta, relativa e logaritmo de uma variável

n	a_n	Variação absoluta da variável $a_n - a_{n-1}$	Variação relativa $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right)$	ln a_n	Variação absoluta do logaritmo ln a_n – ln a_{n-1}
0	1,000	–	–	0	–
1	1,100	0,100	0,10	0,095310	0,095310
2	1,210	0,110	0,10	0,190620	0,095310
3	1,331	0,121	0,10	0,285931	0,095310
4	1,4641	0,1331	0,10	0,381241	0,095310
5	1,61051	0,14641	0,10	0,476551	0,095310
6	1,771561	0,161051	0,10	0,571861	0,095310

6.2 Derivada

Seja $y = f(x)$, a derivada, isto é, a taxa de mudança, é definida como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para $y = b^x$, se x aumenta em Δx, então:

$$\Delta y = b^{x+\Delta x} - b^x = b^x(b^{\Delta x} - 1)$$

Então,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^x (b^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Fazendo $\Delta x = h$, então,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{b^x (b^h - 1)}{h}$$

Como o limite só envolve h, pode-se extrair b^x,

$$\frac{dy}{dx} = b^x \lim_{h \to 0} \frac{(b^h - 1)}{h}$$

Prova-se, em textos de cálculos avançados como o de Granville, que para $y = b^x$,

$$\frac{dy}{dx} = Kb^x \qquad \textbf{(1)}$$

Ou,

$$\frac{dy}{dx} = Ky$$

Ou seja, a derivada de uma função exponencial é proporcional à própria função.

Um valor conveniente para simplificar a equação **(1)** é tomar a constante de proporcionalidade K como 1, ou seja, fazendo $\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = 1$, que é transformado em:

$$\boxed{b = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}} \qquad \textbf{(2)}$$

A transformação é simples: $\frac{b^h - 1}{h} = 1 \therefore b^h = 1 + h$ e $b = \sqrt[h]{1+h} = (1+h)^{\frac{1}{h}}$

Logo, para $\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ tem-se $b = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$

Fazendo em **(2)** $\frac{1}{h} = m$, então quando $h \to 0 \Longrightarrow m \to \infty$, daí que:

$$\boxed{b = \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e}$$

Ou seja, para

$$y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x = y$$

Tomando-se a função inversa de $y = e^x$, isto é, o seu logaritmo, tem-se:

$$\log y = x \log e$$

Tomando uma base *e* para os logaritmos, expresso como “*ln*”, tem-se:

$$\ln y = x \ln e$$

A função e^x é tão comum que é simplesmente conhecida como **função exponencial**. Sua aplicação permite concluir que **a taxa de variação de uma quantidade é proporcional à própria quantidade.**

Essa conclusão é útil para descrever vários fenômenos físicos, econômicos, financeiros, demográficos, etc., por exemplo:

1. Sendo T a temperatura no instante t, quando um corpo à temperatura T_0 é colocado em um meio de temperatura T_1, o corpo tem sua temperatura reduzida a uma taxa proporcional $a\ (T - T_1)$ no período t, ou seja,

$$\frac{dT}{dt} = a(T - T_1)$$; que tem como solução:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-at}$$

que é a Lei de Newton para esfriamento de corpos físicos.

2. A composição de um principal P a uma taxa contínua r em um período t é:

$$S = Pe^{rt}$$

Onde S é o montante.

3. A variação temporal da população (P) segue aproximadamente uma taxa exponencial de x e t, segundo:

$$P = P_0 e^{xt}$$

Esses resultados sugerem ser de grande vantagem para a Física, Economia e Demografia, em termos de simplificação de cálculo, adotar os logaritmos neperianos (e não os decimais) nas funções exponenciais.

Assim,

Para $v = f(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\frac{df}{dx}} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{v} = e^{v}\frac{df}{dx}}$$

e, principalmente, para $f(x) = e^x$

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$

Adotando-se a notação de derivada de linha (´):

$$(e^{x})' = e^{x}$$

E que a derivada de $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

Se $u(x)$ é diferenciável em x, então por **(3)**, temos:

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ou seja, tomando-se a derivada da função original dividida pela própria função, tem-se a derivada do logaritmo da função original.

A derivação logarítmica é, particularmente, útil para cálculos complexos: consiste simplesmente em igualar a derivada do logaritmo da função à própria derivada dividida pela função original.

Exercício resolvido

Exercício 1. Determinar a derivada em relação a x de $y = x^{e^x}$:

A forma mais simples consiste em resolver tomando-se os logaritmos

$$\ln y = e^x \ln x$$

Derivando-se logaritmicamente o lado esquerdo pela fórmula anterior $\frac{u'(x)}{u(x)} = (\ln u(x))'$ e, o lado direito pela regra do produto:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \frac{1}{x} + \ln x e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x y\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = e^x x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

6.3 Música e logaritmos

A Lei de Weber-Fechmer diz que se uma pessoa segurar pesos a partir de um peso inicial (W_0) e colocar pesos adicionais até um peso W, sentirá uma sensação de peso *(s)* proporcional ao aumento relativo do peso e não ao peso absoluto. Assim:

$$s = u \ln \frac{W}{W_0}, \text{ onde } u \text{ é uma constante.}$$

A lei aplicada à música afirma que intervalos musicais iguais (aumentos em diapasão) correspondem a iguais aumentos em frequência (em ciclos por segundo). Os intervalos musicais correspondem a proporções de frequências, uma oitava corresponde à proporção de frequência de 2:1, uma quinta de 3:2, etc. Assim, uma série de notas musicais separadas por oitavas aumentam na progressão geométrica 1, 2, 4, 8, 16...

Como resultado, a pauta (isto é, as linhas) em que as notas musicais são escritas estão em escala logarítmica em que a distância vertical é proporcional ao logaritmo da frequência.

6.4 Elasticidades e logaritmos

Se $q = F(p)$ é a curva de demanda. A elasticidade-preço de demanda (ε) é definida como:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Isto é, a elasticidade é a relação entre a variação relativa da quantidade e a variação relativa do preço. Observe que a fórmula não tem sinal negativo, que, se colocado, daria uma elasticidade de demanda positiva, o que é normalmente um absurdo em economia (com as exceções habituais dos bens de Giffen).

A vantagem do uso da elasticidade é sua independência das unidades monetárias e das quantidades adotadas. Observe que ε pode ser escrita como

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta q}{\Delta p}}{\frac{q}{p}}$$

Ou seja, ε é a demanda marginal sobre a demanda média

A aproximação infinitesimal da elasticidade é chamada **elasticidade-ponto**:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{d}p}\frac{p}{q}$$

Dadas as funções de demanda clássica, em que $\frac{dq}{dp} < 0$, temos que a elasticidade da demanda é definida como:

a) elástica – um bem cuja elasticidade de demanda está entre – 1 e – ∞ .

b) inelástica – um bem cuja elasticidade está entre 0 e – 1.

Para um bem inelástico, o aumento dos preços implica aumento da despesa; para um bem elástico implica redução.

Assim a despesa $E(p)$

$$E(p) = pq = pF(p)$$

tomando a derivada

$$E'(p) = pF'(p) + 1F(p)$$

Dividindo por *F (p)*, que é uma função estritamente positiva

$$\frac{E'(p)}{F(p)} = \frac{p.F'(p)}{F(p)} + 1 = \varepsilon + 1 \qquad \textbf{(13)}$$

Se o bem é inelástico – $1 < \varepsilon < 0$, tem-se que $\varepsilon + 1 > 0$ e, então, *E´(p)* é positivo, então *E(p)* é uma função estritamente positiva de *p*.

a) elasticidade de demanda constante

Uma curva de demanda $q = Kp^{\varepsilon}$ tem elasticidade constante

$$\varepsilon = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = \varepsilon K p^{\varepsilon - 1}\frac{p}{Kp^{\varepsilon}} = \varepsilon$$

tomando logaritmos:

$$\ln q = \ln K + \varepsilon \ln p$$

Então, em coordenadas logarítmicas, a curva de demanda é linear com uma declividade igual à elasticidade constante *ε*.

b) elasticidade da reta

Nunca é demais lembrar que a demanda linear tem uma elasticidade distinta em cada ponto da curva.

Se $q = a - bp$; $a, b > 0$;

$$\varepsilon = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = \frac{-bp}{q} = \frac{-bp}{a-bp} = \frac{1}{1-\frac{a}{bp}}$$

Então, a elasticidade varia de acordo com o comportamento de *p*.

Eis exemplos de casos especiais,

Para $p = 0$ e $q = a$; $\varepsilon = 0$;

Para $p = \frac{a}{b}$ e $q = 0$; $\varepsilon = -\infty$

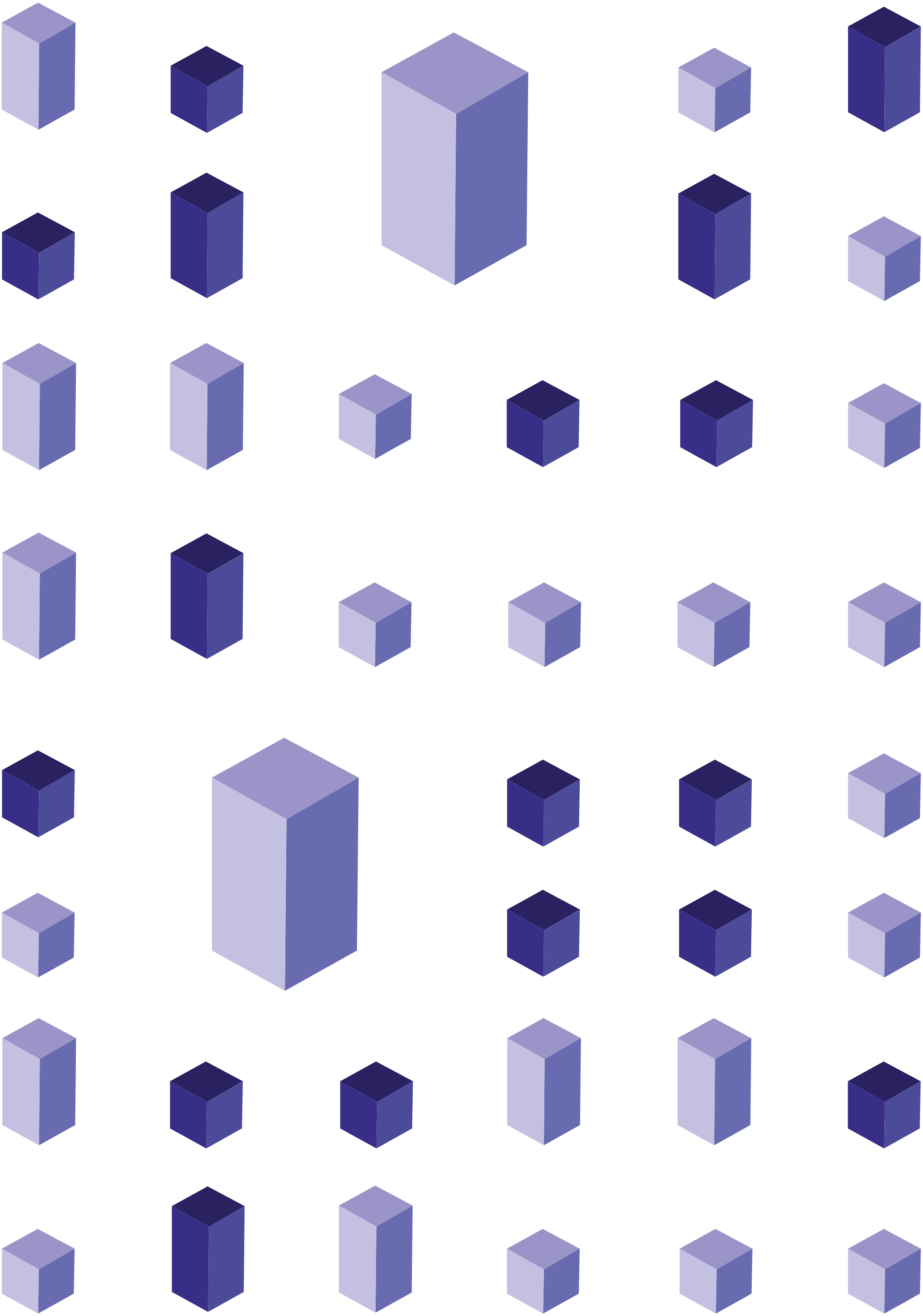
E a elasticidade unitária que é derivada de:

$$-1 = \frac{1}{1-\frac{a}{bp}}$$

e então

$$p = \frac{a}{2b}$$

E $q = \frac{1}{2}a$



Referências

ASHRAF, Nava; CAMERER, Colin F.; LOEWESTEIN George. Adam Smith, behaviorial economist. *Journal of Economic Perspectives*, v. 19, n. 3, Summer 2005, p. 131-145.

BOUZON, Emanuel. *O Código de Hamurabi*. Petrópolis: Vozes, 2003.

DRAPER, Jean E.; KLINGMAN, Jane S. *Mathematical analysis:* business and economic applications. 2. ed. Editado por Jane Draper Weber. New York: Harper & Row, 1972.

FARIA, Ernesto. *Dicionário escolar latino-português*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ministério da Educação e Cultura, 1967.

GRANVILLE, William Anthony; SMITH, Percery Franklin; LONGLEY, William Raymond. *Elementos de cálculo diferencial e integral*. [s.l.]: Científica, 1954.

MADDISON, Angus. *The world economy:* a millennial perspective. Paris: Organization for Economic Cooperation and Development, 2001.

MAOR, Eli. *e*: a história de um número. [s. l.]: Record, 2006.

MCCULLOUGH, B. D.; VINOD, H. D. The numerical reliability of econometric software. *Journal of Economic Literature*, v. 37, n. 2, p. 663-665, June 1999.

NAPIER, John. *Mirifici logarithmorum canonis constructio [...]*. [s.l.]: Edimburgo, 1614.

PRICE, Richard; MORGAN, William. *Observations on Revisionary Payments.* [s.l..]: Cadell, 1783.

SIMON, Carl P.; BLUME, Lawrence. *Mathematics for economists.* New York: W.W. Norton & Co, 1994.

SIMPSON, J.A.; WEINER, E.S.C. *Oxford English Dictionary*. Oxford: Oxford University Press, 1989.

SMAIL, Lloid Leroy. *Mathematics of finance.* New York: McGraw-Hill, 1953.

SYDSÆTER, Knut; STRØNG, Arne; BERCK, Peter. *Economists' mathematical manual.* 3. ed. rev. and enlarged. Berlin: Springer, 2000.

WORLD BANK. *World Development Report*. Washington DC: World Bank, 2003.

ANEXO A

A correção monetária antes da TR

Os sistemas de indexação utilizados nas décadas de 1960 e 1970 e até a extinção do Banco Nacional da Habitação e da correção monetária quando Dilson Funaro era Ministro da Fazenda (de 26 de agosto de 1985 a 29 de abril 1987) foram responsáveis parcialmente por alimentar a alta inflação do período (242% em 1985, 80% em 1986 e 363% em 1987). Até os dias atuais existem ações judiciais sobre o assunto. É necessário conhecer a correção monetária, nas seguintes modalidades:

a) ORTN – em que o principal é estipulado em unidades de Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN), um título público que tem o seu valor reajustado mensalmente de acordo com valores de correção monetária fixados pelo governo, com base no índice geral de preços (IGP) – disponibilidade interna, da FGV. Em diversas oportunidades, nos períodos de alta inflação, o governo mudou a fórmula de cálculo das ORTN, que nunca foi divulgada formalmente, retirando do IGP os aumentos de preços considerados atípicos, como petróleo, mudança de cálculo devido a planos econômicos, etc. Alguns contratos previam variação do saldo devedor e da prestação na mesma proporção das ORTN, e outros só previam a variação das ORTN nas prestações. A ORTN foi extinta formalmente pelo Decreto-lei nº 2.284, de 10 março de 1986.

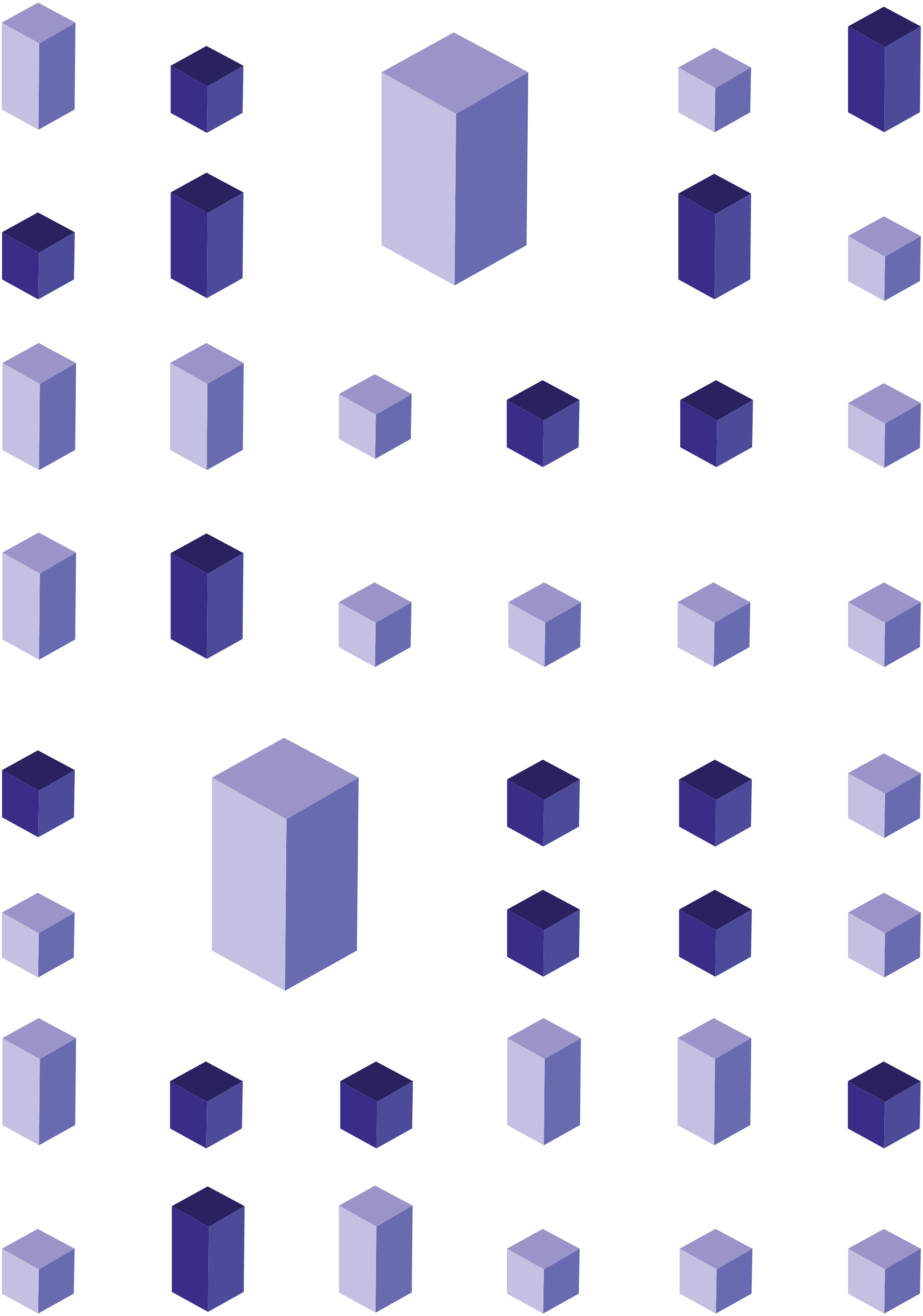
b) UPC – que significa Unidade Padrão de Capital, do antigo Banco Nacional da Habitação (BNH), inicialmente definida como sendo igual a uma ORTN no primeiro mês de cada trimestre e, posteriormente, modificada, quando do término da ORTN, para índices baseados em preços. O saldo devedor e a prestação eram corrigidos trimestralmente. Tal sistemática foi usada em vários programas de construção civil da Caixa Econômica Federal e do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES).

c) Plano de Equivalência Salarial (PES) – em que a prestação e o saldo devedor são corrigidos, respectivamente, pelo salário-mínimo (ou o índice da categoria profissional dos mutuários) e pela variação das UPC no período. Os percentuais distintos são aplicados, simultaneamente, sobre o saldo devedor e a prestação, entrando em vigor 60 dias após a divulgação do salário-mínimo. Se, entretanto, o crescimento dos preços fosse inferior ao dos salários, o que raramente acontecia no período de alta inflação, tanto a prestação quanto o saldo devedor seriam reajustados pela UPC. O PES apresenta uma particularidade extra: se a variação do salário-mínimo ou do salário da categoria profissional do mutuário for inferior à variação das UPC, tomar-se-á, como correção do saldo devedor, o índice de variação salarial. Nesse caso, as normas do BC determinam que o pagamento da diferença entre os saldos devedores corrigidos pela ORTN e pelo salário seria coberto pelo devedor, mediante um novo contrato com a instituição financeira, que deveria ter um prazo igual à metade do prazo inicialmente contratado e ser pago ao final do prazo contratado.

O descompasso entre inflação (medida pela variação das ORTN) e índices de correção monetária foi, em boa parte, responsável pela falência do sistema financeiro habitacional nas décadas de 1970 e 1980, quando se usou muito o PES. A correção do saldo devedor era pelo PES e o resíduo gerado por eventuais diferenças entre o saldo assim calculado e o saldo devedor efetivo (gerado pela variação das ORTN) seria coberto, no final do contrato, por recursos de um Fundo de Compensação de Variações Salariais (FCVS), com recursos orçamentários. O tal fundo jamais teve recursos suficientes e as instituições financeiras credoras – basicamente o Banco Nacional da Habitação – simplesmente perderam tanto dinheiro, que muitas delas abriram falência ou foram extintas por lei, como foi o caso do BNH.

d) Correção salarial – prática também permitida pelo Banco Central. O índice de correção é a variação do salário de uma classe profissional; eventuais diferenças entre o salário e os preços devem ser estabelecidas contratualmente e devem ser pagas com um novo empréstimo com prazo de até 50% do prazo original.

e) Correção mista – estimava-se uma correção monetária prefixada sobre a qual seriam pagos juros. Ao final do prazo contratado, determinava-se a diferença entre os valores efetivamente pagos e aqueles que deveriam ter sido pagos, sendo o resíduo pago em um número de parcelas adicionais. Era permitido pelo Banco Central – para instituições financeiras – sendo também aplicado no BNDES, Caixa e Banco do Brasil.



ANEXO B

Tabelas financeiras

(n de 1 a 100; i = 2,5%; i = 3%; i = 3,5%; i = 4% e i = 4,5%)

Tabela 1: Valor futuro (C_n) no período *n*: [$C_n = C_0 (1 + i)^n$ e $C_n = 1$]

n	2½ %	3 %	3½ %	4 %	4½ %	n
1	1.025 0000	1.030 0000	1.035 0000	1.040 0000	1.045 0000	1
2	1.050 6250	1.060 9000	1.071 2250	1.081 6000	1.092 0250	2
3	1.076 8906	1.092 7270	1.108 7179	1.124 8640	1.141 1661	3
4	1.103 8129	1.125 5088	1.147 5230	1.169 8586	1.192 5186	4
5	1.131 4082	1.159 2741	1.187 6863	1.216 6529	1.246 1819	5
6	1.159 6934	1.194 0523	1.229 2553	1.265 3190	1.302 2601	6
7	1.188 6858	1.229 8739	1.272 2793	1.315 9318	1.360 8618	7
8	1.218 4029	1.266 7701	1.316 8090	1.368 5690	1.422 1006	8
9	1 248 8630	1.304 7732	1.362 8974	1.423 3118	1.486 0951	9
10	1.280 0845	1.343 9164	1.410 5988	1.480 2443	1.552 9694	10
11	1.312 0867	1.384 2339	1.459 9697	1.539 4541	1.622 8530	11
12	1.344 8888	1.425 7609	1.511 0687	1.601 0322	1.695 8814	12
13	1.378 5110	1.468 5337	1.563 9561	1.665 0735	1.772 1961	13
14	1.412 9738	1.512 5897	1.618 6945	1.731 6764	1.851 9449	14
15	1.448 2982	1.557 9674	1.675 3488	1.800 9435	1.935 2824	15
16	1.484 5056	1.604 7064	1.733 9860	1.872 9812	2.022 3702	16
17	1.521 6183	1.652 8476	1.794 6756	1.947 9005	2.113 3768	17
18	1.559 6587	1.702 4331	1.857 4892	2.025 8165	2.208 4788	18
19	1.598 6502	1.753 5060	1.922 5013	2.106 8492	2.307 8603	19
20	1.638 6164	1.806 1112	1.989 7889	2:191 1231	2.411 7140	20
21	1.679 5818	1.860 2946	2.059 4315	2.278 7681	2.520 2412	21
22	1.721 5714	1.916 1034	2.131 5116	2.369 9188	2.633 6520	22
23	1.764 6107	1.973 5865	2.206 1145	2.464 7155	2.752 1664	23
24	1.808 7260	2.032 7941	2.283 3285	2.563 3042	2.876 0138	24
25	1.853 9441	2.093 7779	2.363 2450	2.665 8363	3.005 4345	25
26	1.900 2927	2.156 5913	2.445 9586	2.772 4698	3.140 6790	26
27	1.947 8000	2.221 2890	2.531 5671	2.883 3686	3.282 0096	27
28	1.996 4950	2.287 9277	2.620 1720	2.998 7033	3.429 7000	28
29	2.046 4074	2.356 5655	2.711 8780	3.118 6514	3.584 0365	29
30	2.097 5676	2.427 2625	2.806 7937	3.243 3975	3.745 3181	30
31	2.150 0068	2.500 0804	2.905 0315	3.373 1334	3.913 8574	31
32	2.203 7569	2.575 0828	3.006 7076	3.508 0588	4.089 9810	32
33	2.258 8509	2.652 3352	3.111 9424	3.648 3811	4.274 0302	33
34	2.315 3221	2.731 9053	3.220 8603	3.794 3163	4.466 3615	34
35	2.373 2052	2.813 8624	3.333 5904	3.946 0890	4.667 3478	35
36	2.432 5353	2.898 2783	3.450 2661	4.103 9326	4.877 3785	36
37	2.493 3487	2.985 2267	3.571 0254	4.268 0899	5.096 8605	37
38	2.555 6824	3.074 7835	3.696 0113	4.438 8134	5.326 2192	38
39	2.619 5745	3.167 0270	3.825 3717	4.616 3660	5.565 9991	39
40	2.685 0638	3.262 0378	3.959 2597	4.801 0206	5.816 3645	40
41	2.752 1904	3.359 8989	4.097 8338	4.993 0614	6.078 1009	41
42	2.820 9952	3.460 6959	4.241 2580	5.192 7839	6.351 6155	42
43	2.891 5201	3.564 5168	4.389 7020	5.400 4953	6.637 4382	43
44	2.963 8081	3.671 4523	4.543 3416	5.616 5151	6.936 1229	44
45	3.037 9033	3.781 5958	4.702 3586	5.841 1757	7.248 2484	45
46	3.113 8509	3.895 0437	4.866 9411	6.074 8227	7.574 4196	46
47	3.191 6971	4.011 8950	5.037 2840	6.317 8156	7.915 2685	47
48	3.271 4896	4.132 2519	5.213 5890	6.570 5282	8.271 4556	48
49	3.353 2768	4.256 2194	5.396 0646	6.833 3494	8.643 6711	49
50	3.437 1087	4.383 9060	5.584 9269	7.106 6834	9.032 6363	50
60	4.399 7898	5.891 6031	7.878 0909	10.519 6274	14.027 4079	60
70	5.632 1029	7.917 8219	11.112 8253	15.571 6184	21.784 1356	70
80	7.209 5678	10.640 8906	15.675 7375	23.049 7991	33.830 0964	80
90	9.228 8563	14.300 4671	22.112 1760	34.119 3333	52.537 1053	90
100	11.813 7164	19.218 6320	31.191 4080	50.504 9482	81.588 5180	100

Fonte: SMAIL, Lloyd Leroy. *Mathematics of Finance*. New York: McGraw-Hill, 1953.

Tabela 2: Valor atual (C_0) de *n* prestações: $a_{\overline{n}|i}$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \left[C_0 = Pa\neg n/i \text{ e } P = 1\right]$$

n	2½ %	3 %	3½ %	4 %	4½ %	*n*
1	0.975 6098	0.970 8738	0.966 1836	0.961 5385	0.956 9378	1
2	1.927 4242	1.913 4697	1.899 6943	1.886 0947	1.872 6678	2
3	2.856 0236	2.828 6114	2.801 6370	2.775 0910	2.748 9644	3
4	3.761 9742	3.717 0984	3.673 0792	3.629 8952	3.587 5257	4
5	4.645 8285	4.579 7072	4.515 0524	4.451 8223	4.389 9767	5
6	5.508 1254	5.417 1914	5.328 5530	5.242 1369	5.157 8725	6
7	6.349 3906	6.230 2830	6.114 5440	6.002 0547	5.892 7009	7
8	7.170 1372	7.019 6922	6.873 9555	6.732 7449	6.595 8861	8
9	7.970 8655	7.786 1089	7.607 6865	7.435 3316	7.268 7905	9
10	8.752 0639	8.530 2028	8.316 6053	8.110 8958	7.912 7182	10
11	9.514 2087	9.252 6241	9.001 5510	8.760 4767	8.528 9169	11
12	10.257 7646	9.954 0040	9.663 3343	9.385 0738	9.118 5808	12
13	10.983 1850	10.634 9553	10.302 7385	9.985 6478	9.682 8524	13
14	11.690 9122	11.296 0731	10.920 5203	10.563 1229	10.222 8253	14
15	12.381 3777	11.937 9351	11.517 4109	11.118 3874	10.739 5457	15
16	13.055 0027	12.561 1020	12.094 1168	11.652 2956	11.234 0150	16
17	13.712 1977	13.166 1185	12.651 3206	12.165 6688	11.707 1914	17
18	14.353 3636	13.753 5131	13.189 6817	12.659 2970	12.159 9918	18
19	14.978 8913	14.323 7991	13.709 8374	13.133 9394	12.593 2936	19
20	15.589 1623	14.877 4749	14.212 4033	13.590 3263	13.007 9364	20
21	16.184 5486	15.415 0241	14.697 9742	14.029 1600	13.404 7239	21
22	16.765 4132	15.936 9166	15.167 1248	14.451 1153	13.784 4248	22
23	17.332 1105	16.443 6084	15.620 4105	14.856 8417	14.147 7749	23
24	17.884 9858	16.935 5421	16.058 3676	15.246 9631	14.495 4784	24
25	18.424 3764	17.413 1477	16.481 5146	15.622 0799	14.828 2090	25
26	18.950 6111	17.876 8424	16.890 3523	15.982 7692	15.146 6114	26
27	19.464 0109	18.327 0315	17.285 3645	16.329 5858	15.451 3028	27
28	19.964 8887	18.764 1082	17.667 0188	16.663 0632	15.742 8735	28
29	20.453 5499	19.188 4546	18.035 7670	16.983 7146	16.021 8885	29
30	20.930 2926	19.600 4414	18.392 0454	17.292 0333	16.288 8885	30
31	21.395 4074	20.000 4285	18.736 2758	17.588 4936	16.544 3910	31
32	21.849 1780	20.388 7655	19.068 8655	17.873 5515	16.788 8909	32
33	22.291 8809	20.765 7918	19.390 2082	18.147 6457	17.022 8621	33
34	22.723 7863	21.131 8367	19.700 6842	18.411 1978	17.246 7580	34
35	23.145 1573	21.487 2201	20.000 6611	18.664 6132	17.461 0124	35
36	23.556 2511	21.832 2525	20.290 4938	18.908 2820	17.666 0406	36
37	23.957 3181	22.167 2354	20.570 5254	19.142 5788	17.862 2398	37
38	24.348 6030	22.492 4616	20.841 0874	19.367 8642	18.049 9902	38
39	24.730 3444	22.808 2151	21.102 4999	19.584 4848	18.229 6557	39
40	25.102 7750	23.114 7720	21.355 0723	19.792 7739	18.401 5844	40
41	25.466 1220	23.412 4000	21.599 1037	19.993 0518	18.566 1095	41
42	25.820 6068	23.701 3592	21.834 8828	20.185 6267	18.723 5498	42
43	26.166 4457	23.981 9021	22.062 6887	20.370 7949	18.874 2103	43
44	26.503 8494	24.254 2739	22.282 7910	20.548 8413	19.018 3830	44
45	26.833 0239	24.518 7125	22.495 4503	20.720 0397	19.156 3474	45
46	27.154 1696	24.775 4491	22.700 9181	20.884 6536	19.288 3707	46
47	27.467 4826	25.024 7078	22.899 4378	21.042 9361	19.414 7088	47
48	27.773 1537	25.266 7066	23.091 2442	21.195 1309	19.535 6065	48
49	28.071 3695	25.501 6569	23.276 5645	21.341 4720	19.651 2981	49
50	28.362 3117	25.729 7640	23.455 6179	21.482 1846	19.762 0078	50
60	30.908 6565	27.675 5637	24.944 7341	22.623 4900	20.638 0220	60
70	32.897 8570	29.123 4214	26.000 3066	23.394 5150	21.202 1119	70
80	34.451 8172	30.200 7634	26.748 7757	23.915 3918	21.565 3449	80
90	35.665 8685	31.002 4071	27.279 3156	24.267 2776	21.799 2408	90
100	36.614 1053	31.598 9053	27.655 4254	24.504 9990	21.949 8527	100

Fonte: SMAIL, Lloyd Leroy. *Mathematics of Finance*. New York: McGraw-Hill, 1953.

Tabela 3: Valor futuro ($\mathbf{C_n}$) de n prestações: $s_{\overline{n|}\,i}$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \left[C_n = P s_{\overline{n|}\,i}\right] \text{ e } [P = 1]$$

n	2½ %	3 %	3½ %	4 %	4½ %	n
1	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1
2	2.025 0000	2.030 0000	2.035 0000	2.040 0000	2.045 0000	2
3	3.075 6250	3.090 9000	3.106 2250	3.121 6000	3.137 0250	3
4	4.152 5156	4.183 6270	4.214 9429	4.246 4640	4.278 1911	4
5	5.256 3285	5.309 1358	5.362 4659	5.416 3226	5.470 7097	5
6	6.387 7367	6.468 4099	6.550 1522	6.632 9755	6.716 8917	6
7	7.547 4302	7.662 4622	7.779 4075	7.898 2945	8.019 1518	7
8	8.736 1159	8.892 3360	9.051 6868	9.214 2263	9.380 0136	8
9	9.954 5188	10.159 1061	10.368 4958	10.582 7953	10.802 1142	9
10	11.203 3818	11.463 8793	11.731 3932	12.006 1071	12.288 2094	10
11	12.483 4663	12.807 7957	13.141 9919	13.486 3514	13.841 1788	11
12	13.795 5530	14.192 0296	14.601 9616	15.025 8055	15.464 0318	12
13	15.140 4418	15.617 7904	16.113 0303	16.626 8377	17.159 9133	13
14	16.518 9528	17.086 3242	17.676 9804	18.291 9112	18.932 1094	14
15	17.931 9267	18.598 9139	19.295 6809	20.023 5876	20.784 0543	15
16	19.380 2248	20.156 8813	20.971 0297	21.824 5311	22.719 3367	16
17	20.864 7304	21.761 5877	22.705 0158	23.697 5124	24.741 7069	17
18	22.386 3487	23.414 4354	24.499 6913	25.645 4129	26.855 0837	18
19	23.946 0074	25.116 8684	26.357 1805	27.671 2294	29.063 5625	19
20	25.544 6576	26.870 3745	28.279 6818	29.778 0786	31.371 4228	20
21	27.183 2740	28.676 4857	30.269 4707	31.969 2017	33.783 1368	21
22	28.862 8559	30.536 7803	32.328 9022	34.247 9698	36.303 3780	22
23	30.584 4273	32.452 8837	34.460 4137	36.617 8886	38.937 0300	23
24	32.349 0380	34.426 4702	36.666 5282	39.082 6041	41.689 1963	24
25	34.157 7639	36.459 2643	38.949 8567	41.645 9083	44.565 2102	25
26	36.011 7080	38.553 0422	41.313 1017	44.311 7446	47.570 6446	26
27	37.912 0007	40.709 6335	43.759 0602	47.084 2144	50.711 3236	27
28	39.859 8008	42.930 9225	46.290 6273	49.967 5830	53.993 3332	28
29	41.856 2958	45.218 8502	48.910 7903	52.966 2863	57.423 0332	29
30	43.902 7032	47.575 4157	51.622 6773	56.084 9378	61.007 0697	30
31	46.000 2707	50.002 6782	54.429 4710	59.328 3353	64.752 3878	31
32	48.150 2775	52.502 7585	57.334 5025	62.701 4687	68.666 2452	32
33	50.354 0344	55.077 8413	60.341 2100	66.209 5274	72.756 2263	33
34	52.612 8853	57.730 1765	63.453 1524	69.857 9085	77.030 2565	34
35	54.928 2074	60.462 0818	66.674 0127	73.652 2249	81.496 6180	35
36	57.301 4126	63.275 9443	70.007 6032	77.598 3138	86.163 9658	36
37	59.733 9479	66.174 2226	73.457 8693	81.702 2464	91.041 3443	37
38	62.227 2966	69.159 4493	77.028 8947	85.970 3363	96.138 2048	38
39	64.782 9791	72.234 2328	80.724 9060	90.409 1497	101.464 4240	39
40	67.402 5535	75.401 2597	84.550 2778	95.025 5157	107.030 3231	40
41	70.087 6174	78.663 2975	88.509 5375	99.826 5363	112.846 6876	41
42	72.839 8078	82.023 1964	92.607 3713	104.819 5978	118.924 7885	42
43	75.660 8030	85.483 8923	96.848 6293	110.012 3817	125.276 4040	43
44	78.552 3231	89.048 4091	101.238 3313	115.412 8770	131.913 8422	44
45	81.516 1312	92.719 8614	105.781 6729	121.029 3920	138.849 9651	45
46	84.554 0344	96.501 4572	110.484 0314	126.870 5677	146.098 2135	46
47	87.667 8853	100.396 5010	115.350 9726	132.945 3904	153.672 6331	47
48	90.859 5824	104.408 3960	120.388 2506	139.263 2060	161.587 9016	48
49	94.131 0720	108.540 6478	125.601 8456	145.833 7343	169.859 3572	49
50	97.484 3488	112.796 8673	130.997 9102	152.667 0837	178.503 0283	50
60	135.991 5900	163.053 4368	196.516 8829	237.990 6852	289.497 9540	60
70	185.284 1142	230.594 0637	288 937 8646	364.290 4588	461.869 6796	70
80	248.382 7126	321.363 0186	419.306 7868	551.244 9768	729.557 6985	80
90	329.154 2533	443.348 9036	603.205 0270	827.983 3335	1145.269 0066	90
100	432.548 6540	607.287 7327	862.611 6567	1237.623 7046	1790.855 9563	100

Fonte: SMAIL, Lloyd Leroy. *Mathematics of Finance*. New York: McGraw-Hill, 1953.

A Editora UnB é filiada à

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

Este livro foi composto em Adelle, UnB Pro e Liberation

Em situações cotidianas, muitas vezes não sabemos se é melhor pagar à vista com desconto de 2% ou pagar a prazo em três pagamentos iguais sem juros. Este livro ensina que só vale a pena pagar a prazo se a taxa de juros do mercado no momento for acima de 2,05% a.m.

Não adianta nada fazer cálculos financeiros sem ter uma boa sensibilidade para a grandeza dos juros compostos. Com um pouco de prática e olho atento às tabelas deste livro, aprende-se com facilidade qual a taxa de juros ao ano para os prazos mais comuns. Em uma discussão acirrada de juros ou na hora de decidir opções de pagamentos, saber as taxas de cabeça é fundamental.

Para aguçar a sensibilidade do leitor para o poder dos juros compostos, apresentam-se três tabelas financeiras – inclusive a famosa tabela Price –, além do Sistema de Amortização Constante e do *sinking fund*. A calculadora financeira padrão HP-12C é explicada passo a passo, bem como o manejo do Excel e da popular Cassio fx-82MS.

São discutidas a correção monetária como é utilizada no Brasil e a TR, seguidas por uma visão de logaritmos, derivadas e elasticidades. Finalizam a obra 32 exercícios resolvidos e uma farta bibliografia para o leitor se aperfeiçoar.