Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações de Blowfly não autônomas de Nicholson e suas aplicações

Mirelly Nascimento Oliveira

Brasília

2023

Mirelly Nascimento Oliveira

Equações de Blowfly não autônomas de Nicholson e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita

Brasília

2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações de Blowfly não autônomas de Nicholson e suas aplicações

por

Mirelly Nascimento Oliveira *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, de 20 Outubro de 2023.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita - MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Ma To Fu - MAT/UnB

Prof. Dr. Geraldo Nunes da Silva - UNESP

*A autora foi bolsista da Capes e CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Aos meus pais, Dimas e Edir, que sempre me incentivaram durante meus estudos, sem sua ajuda não teria chegado até aqui. Obrigada por sempre terem apoiado minhas escolhas e me dado suporte financeiro e emocional em todos os momentos.

Ao meu noivo, Lucas Gabriel, que esteve ao meu lado durante esse período, e me deu meus maiores presentes: a Laura e o Felipe, que, por mais que tenham trazido um pouquinho mais de dificuldade nessa trajetória, me fazem a pessoa mais feliz do mundo. Aos meus sogros, Madalena e Célio, por todo suporte à família que eu e o Lucas construímos.

À Jaqueline Godoy, minha orientadora, por todos os ensinamentos, pela paciência e compreensão em tantos altos e baixos que passamos. Obrigada por não me deixar desistir, e por hoje poder colher os frutos desse trabalho.

Aos meus amigos e amigas, em especial, à Amanda e ao Marcos, pela parceria, e pelos momentos de descontração. Aos amigos que a UnB me deu, em especial à Luiza e à Débora, por todas as conversas e lanches, ao Danilo, Melissa, Henrique, Rodrigo, Amadeus, Roberto, à Katianny e ao Vinícius pela amizade, desabafos e toda ajuda em tudo que eu precisei, à Maristela por ouvir meus desabafos, ao Daniel Raom, por ter me salvado em momentos de desespero, aos meus colegas de representação discente, aos do CAMAT e por fim, mas não menos importante, aos meus irmãos acadêmicos, em especial à Carol Lafetá, Mateus Fleury, Felipe Netto, Jucileide e Aryel, pela amizade, pela ajuda e pelo ombro amigo.

Aos professores, por todos os ensinamentos. Em especial agradeço aos professores e professoras Aline Pinto, João Marcos do Ó, Marcelo Furtado, Paulo Henrique Costa, Cátia Regina, Emerson Melo, João Paulo, Lucas Seco, Raimundo, Ricardo Ruviaro, Yuri Dumaresc, Noraí Rocco, Manuela Rezende e Luís Henrique de Miranda.

Aos membros da banca, Ma To Fu e Geraldo Nunes, por aceitarem fazer parte desse momento e pelas correções e sugestões propostas à versão final desta dissertação.

Por fim, agradeço à Capes e ao CNPq pelo financiamento durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo estudar a atratividade global de uma equação não-autônoma de Nicholson com um par de retardos dependendo do tempo. Mais precisamente, iremos investigar a permanência, estabilidade local e atratividade global de seu equilíbrio positivo K. Todos os resultados podem ser encontrados em [4].

Palavras-chave: retardos; equações com retardos dependendo do tempo; atratividade global; permanência; estabilidade local.

Abstract

This dissertation aims to study the global attractivity for a nonautonomous Nicholson's equation with a pair of time-varying delays. More precisely, we will investigate the permanence, local stability and global attractivity of its positive equilibrium K. All results can be found in [4].

Keywords: delays; equations with time-dependent delays; global attractivity; permanence; local stability.

Notação

$x'(t)$	Derivada de x em relação a t
C	Espaço das funções contínuas de $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^n$
C_0^+	Espaço das funções contínuas não-negativas de $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^n$
$\|\cdot\|_\infty$	Norma do supremo
$\|\cdot\|$	Norma em $\mathbb{R}^n$
$\lvert\cdot\rvert$	Norma em $\mathbb{R}$
$\|\cdot\|_{L_\infty}$	supremo essencial
x_t	função de $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ definida por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$
D	subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$
$\mathscr{L}$	σ-álgebra de Lebesgue
$\mathscr{B}$	σ-álgebra de Borel
K	equilíbrio
$\mathscr{P}(\cdot)$	conjunto das partes
$Sf(x)$	derivada Schwarziana
I	intervalo da reta
$\bar{I}$	fecho do intervalo I da reta

Sumário

Introdução

Diversos fenômenos da natureza podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias e elas ajudam a prever diferentes cenários e assim, auxiliam na tomada de decisões, de modo a trazer segurança e bem-estar para nossa população. Apesar da grande eficiência dos modelos descritos pelas equações diferenciais ordinárias, a maior parte dos fenômenos não acontecem de forma instantânea, mas possuem um certo tempo entre a sua causa e o efeito e este tempo quando introduzido na equação pode mudar drasticamente o comportamento de sua solução. Por exemplo, soluções que são estáveis podem se tornar instáveis, ou podem passar a descrever um comportamento oscilatório. Devido a isso, para entender de forma mais precisa um determinado fenômeno, é necessário considerar este parâmetro na equação que é chamado de *retardo*, ou *memória*. Uma equação com retardo se torna uma equação definida no espaço das funções, que é um espaço de dimensão infinita, não sendo mais considerada uma EDO e necessitando de técnicas mais sofisticadas para tratar o problema. Este tipo de equação descreve a influência que o passado tem no momento presente, trazendo mais precisão à descrição do fenômeno estudado.

Sabemos que a maior parte dos fenômenos deveriam ser descritos por estas equações com retardos, como, por exemplo, modelos que descrevem o uso de medicamentos que precisam levar em consideração o tempo entre a sua ingestão e o seu efeito; modelos que descrevem dinâmicas populacionais que precisam considerar o tempo entre o nascimento e entrar na fase reprodutiva; modelos de processamento de dados que precisam considerar o tempo entre o envio de certa informação e esta ser processada, entre outros, porém devido a grande dificuldade em se trabalhar com estas equações, usam-se as EDOs para estudar estes fenômenos e isso acaba trazendo uma análise não tão precisa para a previsão dos fenômenos.

É importante destacar que existem vários tipos de equações com retardo. Os tipos de equações mais simples são os que possuem retardos constantes, que apesar de trazerem mais precisão aos fenômenos estudados nem sempre são o ideal, pois normalmente este retardo depende de outros fatores, como tempo, estado, entre outros. Por outro lado, quanto mais variáveis e parâmetros o retardo depende, mais complexa se torna a equação e mais difícil se torna lidar com esta equação.

O foco neste trabalho será em uma classe chamada *Equações Diferenciais com Retardos Dependendo do Tempo*. Mais precisamente, estudaremos a equação de Nicholson e suas versões quando o retardo depende do tempo.

Um dos primeiros registros que temos conhecimento do surgimento das equações diferenciais com retardo são de Marquês de Condorcet e Poisson no século XVIII que, ao estudarem outros tipos de equações, se depararam com as equações com retardo e viram a necessidade de desenvolver técnicas para resolverem os problemas. Já no século XIX, Volterra e Picard viram a importância dessas equações e começaram a falar sobre elas em grandes eventos e congressos de matemáticos como o ICM, enfatizando a importância de levar em consideração o tempo passado, não apenas o imediato como vemos por exemplo na mecânica clássica.

A equação clássica de Nicholson foi introduzida em 1980 por Gurney, Blythe e Nisbet [13] após o estudo de dois trabalhos do entomologista australiano Alexander John Nicholson [14, 15] nos anos 1950, onde o biólogo estudou a população de moscas varejeiras da espécie *Lucilia cuprina*. Esta espécie de moscas era responsável por um grande praga: a mosca fêmea localiza uma ovelha com ferida, acúmulo de fezes ou urina na lã, e põe seus ovos, essas larvas colocadas ali causam grandes lesões nas ovelhas, que podem ser fatais. Por isso esses estudos foram tão importantes para a biologia e a equação de Nicholson ficou muito tempo conhecida como *Blowfly equation*, se referindo às moscas varejeiras.

Gurney, Blythe e Nisbet fizeram uma comparação entre os experimentos de Nicholson e o modelo logístico com retardo, que foi introduzido anteriormente por Hutchinson [20]:

$$N'(t) = rN(t)\left[1 - \frac{N(t-T_D)}{K}\right]. \tag{1}$$

Aqui é importante enfatizar que Hutchinson foi o primeiro a apresentar um retardo na versão da equação logística, introduzida por Pierre François Verhulst em 1838. Este retardo tinha como interpretação o tempo entre o nascimento e a entrada na fase de maturação.

Observe que na equação (1) as constantes r e K que são consideradas são positivas e, portanto, uma análise mais minuciosa do modelo nos leva a perceber que Hutchinson colocou o retardo na taxa negativa, enquanto que, dada a interpretação deste retardo, este deveria ser considerado na taxa positiva. Ao repararem esta inconsistência, propuseram a equação clássica de Nicholson para moscas varejeiras

$$x'(t) = -\delta x(t) + px(t-\tau)e^{-ax(t-\tau)} \tag{2}$$

onde $p, \delta, \tau > 0$ e $x(t)$ representa o tamanho da população adulta de moscas no tempo t, δ é a taxa de mortalidade adulta, p é a taxa máxima de produção de ovos, $1/a$ é o tamanho da taxa máxima em que a população produz ovos. A função de nascimento é dada pela não-linearidade de Ricker xe^{-ax}, com x avaliado no tempo $t-\tau$ onde τ é o tempo do ciclo da vida da mosca do ovo até a fase adulta, ou seja, o tempo que os ovos gastam para se tornar sexualmente maduros.

Desde que foi apresentada na literatura, a equação de Nicholson tem sido extensivamente estudada, e várias versões do modelo analisadas em diferentes contextos da biologia matemática. Estes estudos tiveram um enorme impacto, não somente do ponto de vista teórico da matemática pura, mas também em aplicações em outras áreas do conhecimento.

Citamos por exemplo, os modelos que descrevem as redes neurais, eles consideram que a transmissão da informação de um neurônio para outro demanda um certo tempo e é possível associar um modelo de Nicholson com múltiplos retardos a este fenômeno, veja [16], onde Gopalsamy e He estudam uma equação do tipo

$$x'(t) = -\delta x(t) + \sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j)e^{-a_j x(t-\tau_j)}. \tag{3}$$

A seguinte versão não-autônoma de (2), considerando dois retardos dependentes do tempo, foi sugerida em [1] por Berezansky e Braverman:

$$x'(t) = \beta(t)(px(t-\tau(t))e^{-ax(t-\sigma(t))} - \delta x(t)) \tag{4}$$

onde $p, a, \delta \in (0, \infty)$, $\beta, \sigma, \tau \colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ e $\tau(t), \sigma(t)$ representam, respectivamente, o período de incubação e de maturação da mosca.

Neste trabalho, Berezansky e Braveman [1] conseguiram critérios para estabilidade local e global dos equilíbrios positivos da equação de Mackey-Glass

$$x'(t) = \beta(t)\left[-x(t) + \frac{ax(t-\tau(t))}{1+x^v(t-\sigma(t))}\right]$$

com $v > 0, a > 1$ e definiram como um problema aberto considerar outros modelos em que a versão clássica envolve dois retardos coincidentes, mas analisando também quando esses retardos podem variar, tanto na versão (4) da equação de Nicholson para moscas varejeiras, como na versão abaixo

$$x'(t) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j(t))e^{-a_j x(t-\sigma_j(t))} - \delta x(t)\right), t \geqslant t_0 \tag{5}$$

que considera múltiplos pares de retardo dependendo do tempo, onde $p_j, a_j, \delta \in (0,\infty)$ e $\beta, \tau_j, \sigma_j\colon [t_0,\infty) \to (0,\infty)$ são contínuas, não-negativas e limitadas, com $\beta(t)$ limitada por baixo por uma constante positiva.

Observamos aqui que considerar o retardo dependendo do tempo neste modelo já traz várias complicações para a análise do modelo, uma vez que temos que lidar com o comportamento das funções σ_j, τ_j, ao invés de uma constante. Também existem estudos recentes que vão mais além e investigam versões deste modelo para o caso em que o retardo depende do estado, precisando de uma análise ainda mais profunda, dado que é necessário avaliar a regularidade das funções envolvidas.

Recentemente, a versão autônoma de (4)

$$x'(t) = -\delta x(t) + px(t-\tau)e^{-ax(t-\sigma)} \tag{6}$$

com retardos constantes, onde $p > \delta > 0$ e $\tau \geqslant \sigma \geqslant 0$, foi estudada por El-Morshedy e Ruiz-Herrera em [2], que estabeleceram critérios para a atratividade global do equilíbrio positivo. Os modelos de Nicholson (6) e (4) envolvem um termo não-linear chamado *monotonicidade mista*, que em (6) é dado por $g(x(t-\tau), x(t-\sigma))$, onde $g(x,y) = pxe^{-ay}$ é monótona crescente na primeira variável e monótona decrescente na segunda variável.

Em 2020, Long e Gong [3] consideraram a equação (5) e mostraram que se $\sum_j p_j \leqslant \delta$ o equilíbrio 0 é um atrator global de todas as soluções positivas, e mais ainda, é globalmente exponencialmente estável se $\sum_j p_j < \delta$.

A equação (5) é tipicamente utilizada em dinâmica populacional, sistemas de regulação fisiológica e em outros contextos, onde a interpretação dada de se obter 0 como um atrator global corresponde à extinção da população representada por $x(t)$.

Do ponto de vista biológico, o estudo da atratividade global de um equilíbrio positivo é mais interessante, neste caso, veremos que o equilíbrio positivo K existe e é único se, e somente se, $\sum_{j=1}^{m} p_j > \delta$.

No artigo estudado nesta dissertação [4], Faria e Prates sempre assumem $p :=$

$\sum_{j=1}^{m} p_j > \delta$, e neste caso a *capacidade de carga* $K > 0$ é definida pela identidade

$$\sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K} = \delta. \tag{7}$$

Para (6), se $p > \delta$, o equilíbrio positivo é avaliado explicitamente como

$$K = \frac{1}{a} \log\left(\frac{p}{\delta}\right) \tag{8}$$

enquanto para (5) é implicitamente definido por (7).

Motivados pelos trabalhos [1, 2, 3], o principal objetivo dos autores em [4] é estabelecer condições suficientes para o equilíbrio K de (5) ser um atrator global de todas as soluções positivas. Ao longo desta dissertação, veremos resultados de permanência e estabilidade de (5) e a atratividade global do equilíbrio positivo de (4), que é um caso particular.

Esta dissertação está baseada no estudo aprofundado da referência [4]. É importante enfatizar que apesar do estudo de [4] ser o principal objetivo desta dissertação, aqui fazemos um estudo de diversos artigos e livros que serviram como base para uma melhor compreensão dos resultados de [4]. Os artigos e livros estudados foram [2, 5, 6, 7, 8, 12, 18, 21, 23]. Investigaremos de maneira detalhada os passos utilizados para mostrar a atratividade global de K para todas as soluções positivas de (4).

Este trabalho está dividido em 3 capítulos. O primeiro capítulo apresenta os resultados e noções preliminares. No Capítulo 2, veremos resultados relacionados à versão autônoma da Equação de Nicholson com dois retardos constantes, e no último trazemos a construção das condições para a atratividade global da equação (5) e mostramos a atratividade global de (4).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conceitos, definições e resultados básicos que serão importantes para o bom entendimento desta dissertação.

Começaremos apresentando a teoria básica sobre equações com retardo. Após isso, iremos analisar as principais propriedades das soluções das equações diferenciais como persistência, estabilidade, entre outros. Para isso, utilizaremos como referências principais os livros [7], [12] e [23], além das referências [4], [5] e [6].

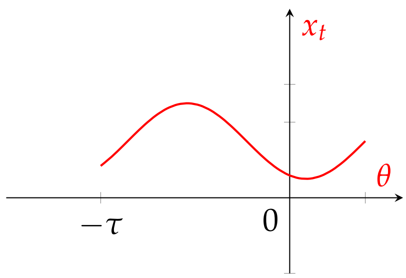
1.1 Noções básicas sobre Equações com Retardo

Nesta seção, começaremos com algumas definições e noções básicas sobre equações diferenciais com retardo.

Considere $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas $\phi \colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$, onde $\tau > 0$, equipado com a norma do supremo $\|\phi\|_\infty = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|$, onde $\| \cdot \|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Quando $n = 1$, denotaremos a norma euclidiana em $\mathbb{R}$ por $| \cdot |$.

Começaremos introduzindo a notação abaixo, que será bastante utilizada ao longo desta dissertação:

Definição 1.1.1. *Seja $x_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Definimos x_t por $x_t(\theta) := x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, para $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, $\sigma > 0$.*



Pela definição acima e pelo gráfico, conseguimos observar uma diferença clara entre equações com retardos e equações diferenciais ordinárias. As primeiras envolvem soluções definidas em espaço de dimensão infinita, pois lidam com funções, enquanto as segundas não necessariamente. No caso da EDO, depende do tipo de equação que estamos trabalhando.

Observação 1.1.2. *É possível estender esta definição para o caso em que se considera retardos infinitos, mas não entraremos neste tema, uma vez que para o propósito desta dissertação nos restringiremos apenas ao caso do retardo finito. Por outro lado, destacamos aqui que para se considerar retardos infinitos, é necessário definir as soluções em um espaço de fase mais sofisticado para garantir a boa colocação do problema. Para mais detalhes, veja [24].*

Definição 1.1.3 ([12])**.** *Se $\tau > 0$ é uma constante positiva dada, seja $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ e, se $x\colon [-\tau, \omega] \to \mathbb{R}^n$, $\omega > 0$, seja $x_t \in C$, $t \in [0, \omega)$, definido por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Se $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é uma função dada, onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$, uma* ***equação diferencial funcional com retardo*** *(usaremos EDFR para simplificar) é definida pela relação*

$$x'(t) = f(t, x_t). \tag{1.1}$$

Definição 1.1.4 ([12])**.** *Se $\phi \in C$ é dado, então a* ***solução*** *$x(t, \phi)$* ***de*** (1.1) ***com valor inicial ϕ em*** *$t = 0$ é uma função contínua definida num intervalo $[-\tau, \omega)$, $\omega > 0$, tal que $x_0(\theta) = x(\theta, \phi) = \phi(\theta)$ para $\theta \in [-\tau, 0]$, $x(t, \phi)$ tem derivada contínua em $(0, \omega)$, derivada à direita em $t = 0$ e satisfaz* (1.1) *para $t \in [0, \omega)$.*

Note que, diferentemente das equações diferenciais ordinárias, as equações diferenciais com retardo possuem como condição inicial uma função em um certo intervalo e também, para estudar as equações com retardos, precisamos trabalhar com o espaço de funções, o que nos leva a ter que lidar com espaços de dimensão infinita, o que traz mais complexidades do que o caso das EDOs. Sabemos que muitas propriedades que são válidas em espaço de dimensão finita não continuam válidas para espaços de dimensão infinita.

Observamos também que para se resolver uma equação diferencial com retardo, é necessário utilizar o método dos passos, e ir avaliando o comportamento da solução em cada etapa, pois a história recente pode modificar de forma significativa o comportamento da solução no momento seguinte. Este fato faz com que seja muito complicado realizar as simulações numéricas para as equações com retardo, pois é necessário iterar diversas vezes e isso exige um certo custo computacional que não é simples.

Chamamos a atenção do leitor ao fato de que nesta dissertação, estamos trabalhando com o espaço das funções contínuas, que será suficiente para nossos propósitos, entretanto é possível definir soluções dessas equações em espaços mais gerais como por exemplo, no espaço das funções contínuas por partes, bem como no espaço das funções regradas, ou seja, cujo os limites laterais da função existem, que permitem modelar fenômenos com mudanças mais abruptas no estado inicial. Essas equações são muito interessantes e existe uma vasta literatura sobre isso. Veja [25, 26] . Porém, apesar disso, não iremos tratar esses casos mais gerais nesta dissertação.

O próximo resultado é muito importante para garantir que a função f que aparece no lado direito em (1.1) esteja bem definida.

Lema 1.1.5 ([12], Lema 2.1). *Se x é uma função contínua, então x_t é uma função contínua de t, para todo $t \in [0, \omega]$.*

Demonstração. Como x é contínua em $[-\tau, 0]$, então x é uniformemente contínua, logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|t - s| < \delta$ então $\|x(t) - x(s)\| < \epsilon$, para todo $t, s \in [-\tau, \omega]$. Em particular, $t, s \in [0, \omega]$ tal que $|t - s| < \delta$, então $\|x(t + \theta) - x(s + \theta)\| < \epsilon$, para todo $\theta \in [-\tau, 0]$. □

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo, e nos fornece uma formulação integral para a EDF estudada. Essa formulação é muito importante, especialmente quando se usa resultados da Teoria de Ponto Fixo para nossa equação, com o objetivo de provar existência e unicidade de soluções, pois normalmente tomamos o operador nestes teoremas como a formulação integral da solução.

Lema 1.1.6 ([12], Lema 1.1). *Seja $\phi \in C$ e $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ contínua, onde $D \subset \mathbb{R} \times C$ é aberto. Então encontrar a solução da equação* (1.1)*, com condição inicial $x_0 = \phi$, é equivalente a resolver a equação integral*

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(s, x_s)ds, \ t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t x'(s)ds &= \int_0^t f(s,x_s)ds \\
x(t)-x(0) &= \int_0^t f(s,x_s)ds \\
x(t) &= \phi(0)+\int_0^t f(s,x_s)ds
\end{aligned}$$

já que pela condição inicial, $x(0)=x(0+0)=x_0(0)=\phi(0)$. A recíproca é trivial. □

Definição 1.1.7 ([12])**.** *Seja X um espaço de Banach e U um subconjunto de X, seja $T\colon U\to X$, então T é **completamente contínua** se T é contínua e para qualquer conjunto limitado $B\subseteq U$, o fecho de $T(B)$ é compacto.*

O próximo resultado é o famoso Teorema do Ponto Fixo de Schauder .

Lema 1.1.8 ([12], Lema 2.4 - Teorema do Ponto Fixo de Schauder)**.** *Se U é um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach X e $T\colon U\to U$ é completamente contínua, então T tem um ponto fixo em U.*

Uma consequência direta deste Teorema é o resultado de existência de soluções. Vamos omitir sua demonstração por ser clássica e bastante longa, mas o leitor interessado pode consultar [12].

Teorema 1.1.9 ([12], Teorema 2.1 - Existência)**.** *Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}\times C$ e $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ contínua. Para qualquer $(0,\phi)\in D$, existe uma solução da equação* (1.1) *que passa por $(0,\phi)$.*

Antes de prosseguirmos, vamos relembrar o conceito de funções que satisfazem a condição Lipschitz . Esta condição é muito importante para garantirmos a unicidade da solução.

Definição 1.1.10 ([7], Condição de Lipschitz)**.** *Dizemos que $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ assume a **condição de Lipschitz** em cada subconjunto limitado de D se para todo $a,b\in\mathbb{R}$ e $M>0$, existe $K>0$ tal que*

$$\|f(t,\phi)-f(t,\psi)\|\leqslant K\|\phi-\psi\|_\infty,\ a\leqslant t\leqslant b,\ \|\phi\|_\infty,\|\psi\|_\infty\leqslant M$$

Definição 1.1.11 ([5], Definição 2.1)**.** *A função $g\colon[0,\infty)\times\mathbb{R}^l\to[0,\infty)$, $g(t,u_1,u_2,\cdots,u_l)$ é dita **localmente Lipschitz** se, para todo intervalo compacto da forma $[a,b]$, existem constan-*

tes positivas $\alpha_k([a,b])$, $k = 1, \cdots, l$, tais que:

$$|g(t, u_1, u_2, \cdots, u_l) - g(t, v_1, v_2, \cdots, v_l)| \leqslant \sum_{k=1}^{l} \alpha_k([a,b])|u_k - v_k|,$$

$u_k, v_k \in [a,b]$, $k = 1, \cdots, l$, $t \geqslant 0$.

Teorema 1.1.12 ([12], Teorema 2.3 - Unicidade)**.** *Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$ e suponha que $f \colon D \to \mathbb{R}^n$ seja contínua e $f(t,\phi)$ seja Lipschitz com respeito a ϕ em todo subconjunto compacto de D. Se $(0,\phi) \in D$, então a equação* (1.1) *tem uma única solução passando por $(0,\phi)$.*

Este resultado acima também é bastante clássico e por isso iremos omitir a demonstração, mas lembramos que existem várias formas de demonstrar este resultado. Normalmente, usa-se a Desigualdade de Gronwall. Entretanto, pedindo algumas limitações na constante de Lipschitz, é possível também provar existência e unicidade de soluções com o Teorema do Ponto Fixo de Banach, mas para isso é necessário que a constante de Lipschitz seja suficientemente pequena.

Definição 1.1.13 ([7])**.** *A **órbita** de ϕ é o conjunto*

$$O_+(\phi) = \{x_t(\phi) : t \geqslant 0\} \subset C.$$

Definição 1.1.14 ([7])**.** *$\bar{x} \in C$ é um **equilíbrio** se sua órbita é $O_+(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.*

Proposição 1.1.15 ([7], Proposição 5.4)**.** *$\bar{x}$ é um equilíbrio se, e somente se, $\bar{x}$ satisfaz $f(\bar{x}) = 0$. Neste caso, $x(t) = \bar{x}$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução de* (1.1) *em $[-r, \infty)$.*

Demonstração. Se $\bar{x}$ é um equilíbrio, então $x_t(\bar{x}) = \bar{x}$, para todo $t \geqslant 0$, então $x(t+\theta) = \bar{x}$, para todo $t \geqslant 0$ e $\theta \in [-r, 0]$.

Tomando $\theta = 0$, temos $x(t) = \bar{x}$, para todo $t \geqslant 0$, então $x(t)$ é constante e $x'(t) = 0$ e então $f(\bar{x}) = 0$.

A recíproca é trivial, pela unicidade de soluções. □

Como estamos interessados em soluções positivas, vamos considerar o subespaço $C_0^+ := \{\phi \in C : \phi(\theta) \geqslant 0 \text{ em } [-\tau, 0), \phi(0) > 0\}$ do espaço das funções contínuas.

A seguir, definiremos alguns conceitos que serão muito importantes para provarmos nossos resultados principais.

Definição 1.1.16 ([4])**.** *O equilíbrio positivo $\bar{x}$ é **globalmente atrativo** em C_0^+ se $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$, para todo $x(t) = x(t; t_0, \phi)$ com condição inicial $x_{t_0} = \phi$.*

Definição 1.1.17 ([4]). *O equilíbrio positivo $\bar{x}$ é chamado **atrator global** se é globalmente atrativo em C_0^+.*

Definição 1.1.18 ([12], Definição 1.1). *Suponha $f(t,0) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. A solução $x \equiv 0$ da equação (1.1) é dita **estável** se para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ tal que $\phi \in B(0,\delta)$ implica $x_t(t_0,\phi) \in B(0,\epsilon)$, para $t \geqslant t_0$.*

Definição 1.1.19 ([4]). *O equilíbrio positivo $\bar{x}$ é **globalmente assintoticamente estável** se é estável e globalmente atrativo.*

Vamos definir o que seria "ordem" no espaço C das funções contínuas.

Definição 1.1.20 ([6]). *Dizemos que $\phi \leqslant \psi$ em C se, e somente se, $\phi(s) \leqslant \psi(s)$ em $\mathbb{R}^n$, para todo $s \in [-\tau, 0]$.*

Novamente aqui precisamos defnir "ordem" em $\mathbb{R}^n$. Diremos que $f(s) \leqslant g(s)$ em $\mathbb{R}^n$ se $f_i(s) \leqslant g_i(s)$, $i = 1, \cdots, n$. Usando a Definição 1.1.20, é possível apresentar a noção de quasi-monotonicidade para as funções f relativamente à segunda variável.

Definição 1.1.21 ([6], Quasi-monotonicidade). *Dizemos que $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ satisfaz a **condição de quasi-monotinicidade** quando, sempre que $\phi \leqslant \psi$ e $\phi_i(0) = \psi_i(0)$, tivermos $f_i(t,\phi) \leqslant f_i(t,\psi)$ para todo $t \in [0,\omega)$.*

Teorema 1.1.22 ([12], Dependência Contínua). *Suponha $D \subset \mathbb{R} \times C$ aberto, $(t_0, \phi_0) \in D$, $f^0 \in C(D, \mathbb{R}^n)$, e que x^0 é uma solução da EDFR $x'(t) = f^0$ passando por (t_0, ϕ_0) que existe e é única em $[t_0 - \tau, t_1]$. Seja $W^0 \subset D$ um conjunto compacto definido por $W^0 = \{(t, x_t^0)\colon t \in [t_0, t_1]\}$ e seja V^0 uma vizinhança de W^0 em que f^0 é limitado. Se (t^k, ϕ^k, f^k), $k = 1, 2, \cdots$, satisfaz $t^k \to t_0$, $\phi^k \to \phi_0$ e $|f^k - f^0|_{V^0} \to 0$ quando $k \to \infty$, então existe k^0 tal que para k^0 a EDFR $x'(t) = f^k$ é tal que cada solução $x^k = x^k(t^k, \phi^k, f^k)$ passando por (t^k, ϕ^k) existe em $[t^k - \tau, t_1]$ e dado $\epsilon > 0$, $x^k \to x^0$ uniformente em $[t_0 - \tau + \epsilon, t_1]$.*

Teorema 1.1.23 ([6], Teorema 1.1). *Sejam $f, g\colon D \to \mathbb{R}^n$ contínuas, Lipschitz em cada subconjunto compacto de D, onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$. Assuma que f ou g satisfaz a propriedade de quasi-monotonicidade e que $f(t,\phi) \leqslant g(t,\phi)$, para todo $(t,\phi) \in D$. Se $(t_0,\phi), (t_0,\psi) \in D$ satisfazem $\phi \leqslant \psi$, então $x(t, t_0, \phi, f) \leqslant x(t, t_0, \psi, g)$ para todo $t \geqslant t_0$, e ambas soluções estão definidas.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que f assume a condição de quasi-monotonicidade. Sejam $e = (1, 1, \cdots, 1)$, $g_\epsilon(t,\phi) = g(t,\phi) + \epsilon e$, $\psi_\epsilon(t,\phi) = \psi(t,\phi) + \epsilon e$, com $\epsilon > 0$.

Se $x(t, t_0, \psi, g)$ está definida em $[t_0 - \tau, t_1]$ para algum $t_1 > t_0$, então $x(t, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$ também está definida para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso,

$$x(t, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon) \to x(t, t_0, \psi, g), \text{ quando } \epsilon \to 0$$

para $t \in [t_0, t_1]$ pelo Teorema de Dependência Contínua 1.1.22.

Observe que a desigualdade que queremos provar segue direto para o caso em que $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. De fato, note que $x(t, t_0, \phi, f) = \phi$ e $x(t, t_0, \psi, g) = \psi$ e por hipótese, $\phi \leqslant \psi$, obtendo o resultado desejado para este caso. Agora resta mostrar a desigualdade para $(t_0, t_1]$. Para isso, basta mostrar que $x(t, t_0, \phi, f) < x(t, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$ em $(t_0, t_1]$ para ϵ suficientemente pequeno, e fazendo $\epsilon \to 0$ segue o resultado.

Se a afirmação acima for falsa para algum $\epsilon > 0$, então existe $s \in (t_0, t_1]$ tal que $x(t, t_0, \phi, f) < x(t, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$ para $t_0 \leqslant t < s$ e $x_i(s, t_0, \phi, f) = x_i(s, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$ para algum i. Pelo Teorema do Valor Médio devemos ter $x_i'(s, t_0, \phi, f) \geqslant x_i'(s, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$. De fato, como $x(t, t_0, \phi, f) < x(t, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$ e $x_i(s, t_0, \phi, f) = x_i(s, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$ para algum i, para $\theta \in [t_0, s)$, temos que

$$\frac{x_i(s, t_0, \phi, f) - x_i(\theta, t_0, \phi, f)}{s - \theta} > \frac{x_i(s, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon) - x_i(\theta, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)}{s - \theta}.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio existem $\alpha, \beta \in (\theta, s)$ tais que

$$\begin{aligned} x_i'(\alpha, t_0, \phi, f) &= \frac{x_i(s, t_0, \phi, f) - x_i(\theta, t_0, \phi, f)}{s - \theta} \\ &> \frac{x_i(s, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon) - x_i(\theta, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)}{s - \theta} \\ &= x_i'(\beta, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon) \end{aligned}$$

fazendo $\theta \to s$, temos $\alpha, \beta \to s$ e pela desigualdade acima, obtemos $x_i'(s, t_0, \phi, f) \geqslant x_i'(s, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x_i'(s, t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon) &= g_i(s, x_s(t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)) + \epsilon \\ &> f_i(s, x_s(t_0, \psi_\epsilon, g_\epsilon)) \\ &\geqslant f_i(s, x_s(t_0, \phi, f)) \\ &= x_i'(s, t_0, \phi, f) \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde a última desigualdade segue da condição de quasi-monotonicidade. A contradição (1.3) implica que não existe tal s, o que prova a afirmação. $\square$

Um dos nossos objetivos nesta dissertação, é investigar a persistência da seguinte versão da equação de Nicholson:

$$x'(t) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j(t))e^{-a_j x(t-\sigma_j(t))} - \delta x(t)\right), t \geqslant t_0,$$

onde $\beta\colon [t_0,\infty) \to (0,\infty)$.

Para isso, precisaremos de algumas definições importantes que podem ser encontradas em [4]. Vamos apresentar as definições para o caso geral (1.1) e depois investigaremos estas no nosso problema específico.

Definição 1.1.24 ([4]). *A equação* (1.1) *é dita* ***persistente*** *se existe* $m > 0$ *tal que para todo* $\phi \in C_0^+$ *existe* $t_* = t_*(\phi)$ *de modo que a solução* $x(t,t_0,\phi)$ *de* (1.1) *satisfaz* $x(t,t_0,\phi) \geqslant m$ *para* $t \geqslant t_*$.

Definição 1.1.25 ([4]). *A equação* (1.1) *é dita* ***dissipativa*** *se existe* $M > 0$ *tal que para todo* $\phi \in C_0^+$ *existe* $t_* = t_*(\phi)$ *de modo que a solução* $x(t,t_0,\phi)$ *de* (1.1) *satisfaz* $x(t,t_0,\phi) \leqslant M$ *para* $t \geqslant t_*$.

Definição 1.1.26 ([4]). *A equação* (1.1) *é dita* ***permanente*** *se é dissipativa e persistente, isto é, se existem* $m, M > 0$ *tais que para todo* $\phi \in C_0^+$ *existe* $t_* = t_*(\phi)$ *de modo que a solução* $x(t,t_0,\phi)$ *de* (1.1) *satisfaz* $m \leqslant x(t,t_0,\phi) \leqslant M$ *para* $t \geqslant t_*$.

Vamos relembrar agora alguns conceitos da teoria da medida que serão importantes neste trabalho.

Definição 1.1.27 ([23]). *Seja X um conjunto não vazio. Uma* ***álgebra*** *de conjuntos de X é uma coleção não vazia* $\mathscr{A}$ *de subconjuntos de X que é fechada para uniões finitas e complementares, ou seja,*

i. *se* $E_1, \cdots, E_n \in \mathscr{A}$, *então* $\cup_1^n E_j \in \mathscr{A}$;

ii. *se* $E \in \mathscr{A}$, *então* $E^c \in \mathscr{A}$.

Uma σ***-álgebra*** *é uma álgebra que é fechada para uniões enumeráveis.*

Definição 1.1.28 ([23]). *Seja X um conjunto equipado com a* σ*-álgebra* $\mathscr{A}$. *Uma* ***medida*** *em* $\mathscr{A}$ *é uma função* $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ *tal que*

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. *se* $\{E_j\}_1^\infty$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos em* $\mathscr{A}$, *então* $\mu\left(\cup_1^\infty E_j\right) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$.

A propriedade (ii) acima é chamada σ*-aditividade. Ela implica aditividade finita:*

ii′. se $E_1, \cdots, E_n$ são conjuntos disjuntos em $\mathscr{A}$, então $\mu\left(\cup_1^n E_j\right) = \sum_1^n \mu(E_j)$.

Definição 1.1.29 ([23]). *Se X é um conjunto e $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ é uma σ-álgebra, $(X, \mathscr{A})$ é chamado **espaço mensurável**. Se μ é uma medida em $(X, \mathscr{A})$, então $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é chamado **espaço de medida**.*

Definição 1.1.30 ([23]). *Lembramos que qualquer função $f\colon X \to Y$ entre dois conjuntos induz uma transformação $f^{-1}\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$, definida por $f^{-1}(E) := \{x \in X\colon f(x) \in E\}$, que preserva uniões, interseções e complementares. Portanto, se $\mathscr{N}$ é uma σ-álgebra em Y, então $\{f^{-1}(E)\colon E \in \mathscr{N}\}$ é uma σ-álgebra em X. Se $(X, \mathscr{M})$ e $(Y, \mathscr{N})$ são espaços mensuráveis, uma função $f\colon X \to Y$ é dita $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-**mensurável**, ou apenas **mensurável** quando $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ estiverem subentendidas.*

Definição 1.1.31 ([23]). *Sejam $\mathscr{L}$ e $\mathscr{B}$ as σ-álgebras de Lebesgue e Borel, respectivamente. Uma função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **Lebesgue mensurável** se $h^{-1}(E) \in \mathscr{L}$ para todo $E \in \mathscr{B}$ e é **Borel mensurável** se $h^{-1}(E) \in \mathscr{B}$ para todo $E \in \mathscr{B}$.*

Proposição 1.1.32 ([23]). *Toda função contínua $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável.*

Demonstração. Como h é contínua, $h^{-1}(E)$ é aberto em $\mathbb{R}$ sempre que E é aberto em $\mathbb{R}$. Lembrando que as σ-álgebras de Borel são geradas pelos abertos do espaço, o resultado segue diretamente. □

Definição 1.1.33 ([23]). *Seja $(X, \mathscr{A}, m)$ um espaço de medida e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. A função f é dita **essencialmente limitada** se existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$m(\{x \in X|\ |f(x)| > M\}) = 0.$$

Definimos

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\{M \geqslant 0 : m(\{x \in X|\ |f(x)| > M\}) = 0\},$$

o supremo essencial de $|f|$.

Definição 1.1.34 ([5], Definição 2.1). *Dizemos que $g\colon [0, \infty) \times \mathbb{R}^l \to [0, \infty)$, é uma **função de Carathéodory** se em seu domínio $g(t, u_1, u_2, \cdots, u_l)$ é contínua em $u_1, u_2, \cdots, u_l$ para quase todo t e é localmente essencialmente limitada em t, para todos $u_1, u_2, \cdots, u_l$.*

Observação 1.1.35. *Os resultados e definições acima podem ser estendidos para espaços mais gerais, como por exemplo, espaços topológicos.*

1.2 Solução de equações por iteração

É conhecido na literatura que uma forma de estudar as equações diferenciais com retardos pode ser por meio das equações diferenças, ou seja, no sentido das equações discretas. Existe uma forte conexão entre ambas e por isso, importantes propriedades para uma equação podem ser obtidas por meio de propriedades exploradas para a outra e vice-versa.

Por outro lado, para conseguir esta conexão é necessário compreender de forma mais aprofundada a teoria desenvolvida por Coppel em [21].

Portanto, nesta seção vamos focar no trabalho desenvolvido por Coppel em [21] onde para um intervalo $I = [a, b]$, ele mostra que se a equação $f(f(x)) = x$ não possui raízes, exceto as raízes de $f(x) = x$, então todas as soluções da equação

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.4}$$

convergem para um ponto fixo de f. Em particular, se existe um único ponto fixo x^* de f, e f^2 não possui outros pontos fixos, então x^* é um atrator global para a equação (1.4).

Estes resultados são de grande importância para entender o principal resultado desta dissertação.

Suponha que a equação que queremos resolver possa ser escrita na forma $x = f(x)$, e então, começando por um ponto x_1, nossas aproximações sucessivas são dadas por $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$,$\cdots$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\cdots$

Para que o método não nos leve para fora do domínio onde as funções estão definidas e para que as aproximações não convirjam para algo que não seja solução da equação, devemos ter $f(x)$ sendo uma função contínua num intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, tal que $a \leqslant f(x) \leqslant b$. Assim, se $x_n \to x$, então $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, pela continuidade da função.

Agora observe que, de $f(c) = c$, temos que $f(f(c)) = c$, ou seja, se c é solução de $f(x) = x$, então é solução de $f(f(x)) = x$. Suponha que a equação $f(f(x)) = x$ tenha c como solução, mas que c não seja solução de $f(x) = x$. Se tomamos $x_1 = c$, temos $x_2 = f(x_1) = f(c) \neq c$, $x_3 = f(f(c)) = c$ e em geral $x_{2n} = f(c)$ e $x_{2n-1} = c$, ou seja, a sequência iterativa não é convergente. Portanto, para que a sequência iterativa seja convergente é necessário que a equação $f(f(x)) = x$ não possua raízes além das raízes de $f(x) = x$. Mostraremos que, reciprocamente, se esta condição está satisfeita, então toda sequência iterativa converge.

Vamos utilizar as iterações de $f(x)$ para auxiliar nesta prova. Estas funções são definidas pelas relações $f_1(x) \equiv f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, com $n = 1, 2, 3, \cdots$. Estas funções são contínuas em $a \leqslant x \leqslant b$ e satisfazem $a \leqslant f_n(x) \leqslant b$ para todo n. Além disso, por indução, $f_n(f_m(x)) = f_{m+n}(x) = f_m(f_n(x))$, para todo n.

A próxima proposição será importante para a demonstração do principal teorema desta seção:

Proposição 1.2.1 ([21]). *Se toda raíz de $f_2(x) = x$ é uma raíz de $f(x) = x$, então para todo c e todo n, $f_n(c) > c$ se $f(c) > c$, $f_n(c) = c$ se $f(c) = c$ e $f_n(c) < c$ se $f(c) < c$, com $a \leqslant c \leqslant b$.*

Teorema 1.2.2 ([21]). *Uma condição necessária e suficiente para que a sequência iterativa convirja para qualquer ponto inicial escolhido, é que a equação $f(f(x)) = x$ não possua raízes além das raízes de $f(x) = x$.*

Demonstração. A necessidade da condição já foi mostrada acima. Suponha, então, que a condição seja satisfeita e que (x_n) seja a sequência iterativa. Se para algum m, $x_{m+1} = x_m$, então $x_n = x_m$, para todo $n > m$, de fato, obtemos $x_{m+2} = f(x_{m+1}) = f(x_m) = x_{m+1} = x_m$ e segue por indução. Neste caso, a sequência certamente converge. Vamos assumir então que $x_n \neq x_{n+1}$ para todo n. Além disso, como a sequência está em (a, b), ela converge se a partir de certo ponto ela é monótona. Assuma que $x_{n+1} > x_n$ para infinitos n e $x_{n+1} < x_n$ para infinitos n.

Denote por p os índices do primeiro caso, ou seja, para os quais $f(x_p) > x_p$, então pela Proposição 1.2.1, $x_n = f_{n-p}(x_p) > x_p$, para todo $n > p$. Logo a subsequência (x_p) converge para um limite l e $l = \liminf x_n$. Analogamente, se denotamos por q os índices do segundo caso, para os quais $f(x_q) < x_q$, vemos que a subsequência (x_q) decresce para um limite k e $k = \limsup x_n$.

Mas cada x_n pertence a uma destas subsequências, então para infinitos n devemos ter x_n na primeira subsequência e x_{n+1} na segunda. Tomando o limite, obtemos $x_n \to l$, $x_{n+1} \to k$, mas $x_{n+1} = f(x_n)$, então $f(l) = k$. Para infinitos n devemos ter também x_n na segunda subsequência e x_{n+1} na primeira. Tomando o limite devemos ter $f(k) = l$, então $f(f(l)) = l$, então pela hipótese do Teorema, obtemos $f(l) = l$, o que implica que $k = l$, logo $\liminf x_n = \limsup x_n$ e portanto x_n é convergente, terminando a demonstração. □

Teorema 1.2.3 ([21]). *Uma condição necessária e suficiente para que a equação $f(x) = x$ tenha apenas uma apenas uma raíz, para o qual toda sequência iterativa converge, e que as aproximações sempre melhorem a cada passo, é que exista um número r tal que $|r - f(x)| < |r - x|$ para $r \neq x$.*

Capítulo

2

Persistência e Estabilidade

2.1 Persistência de soluções

Nesta seção, iremos estudar a seguinte equação:

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(h_1(t)), \cdots, x(h_l(t))) - g(t, x(t)),\ t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

que é um caso geral da equação de Nicholson (5) com múltiplos retardos. Suponha que ela satisfaça as hipóteses abaixo:

(a1) Para cada $i = 1, \cdots, m$, $f_i\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^l \to [0,\infty)$ e $g\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ são *funções de Carathéodory e localmente Lipschitz*, tais que $f_i(t, 0, \cdots, 0) = 0$ e $g(t, 0) = 0$, para todo $t \in [0,\infty)$.

(a2) Para cada $k = 1, \cdots, l$, $h_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, é uma função Lebesgue mensurável, tal que $h_k(t) \leqslant t$, $\lim_{t\to\infty} h_k(t) = \infty$.

Considere também que a condição inicial abaixo esteja satisfeita:

$$x(t) = \varphi(t),\ t \leqslant 0, \tag{2.2}$$

onde

(a3) $\varphi\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ é uma função não negativa, limitada e Borel mensurável tal que $\varphi(0) > 0$.

Com estas hipóteses em mãos, estamos prontos para apresentar o próximo resultado que garante importantes propriedades para a solução de (2.1)–(2.2).

Teorema 2.1.1 ([5], Teorema 5.6)**.** *Suponha que (a1)-(a3) estejam satisfeitas, $f_i\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}^l \to [0,\infty)$, $f_i(t,u_1,\cdots,u_l)$ são monótonas crescentes em $u_1,\cdots,u_n$, para algum $n\in\{1,\cdots,l\}$, monótonas decrescentes em $u_{n+1},\cdots,u_l$ e existam constantes $\tau>0$, $A>0$, $\mu>0$, $M>0$, $0<\beta<B$ tais que $t-\tau<h_k(t)\leqslant t$, $k=1,\cdots,l$, $\sum_{i=1}^m f_i(t,u_1,\cdots,u_l)\leqslant Au_k$, $u_k>0$ para algum $k\in\{1,\cdots,l\}$, $0<\beta u\leqslant g(t,u)\leqslant Bu$ para $u>0$. Se existe $M>0$ tal que*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^m f_i(t,u,u,\cdots,u,M,M,\cdots,M)}{g(t,u)}<1$$

uniformemente em $u\in[M,\infty)$, então qualquer solução x de (2.1)–(2.2) *é limitada com limite superior*

$$\limsup_{t\to\infty} x(t)\leqslant Me^{2(A+B)\tau}.$$

Se existe $\mu>0$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^m f_i(t,u,u,\cdots,u,\mu,\mu,\cdots,\mu)}{g(t,u)}>1$$

uniformemente em $u\in[0,\mu]$, então qualquer solução x de (2.1)–(2.2) *é persistente e*

$$\liminf_{t\to\infty} x(t)\geqslant \mu e^{-2B\tau}.$$

Demonstração. Seja $x\colon\mathbb{R}\to[0,\infty)$ uma solução de (2.1)–(2.2). Assumindo a hipótese

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^m f_i(t,u,u,\cdots,u,M,M,\cdots,M)}{g(t,u)}<1,$$

podemos tomar a seguinte desigualdade:

$$\frac{\sum_{i=1}^m f_i(t,u,u,\cdots,u,M,M,\cdots,M)}{g(t,u)}\leqslant\alpha<1,\ \ t\geqslant\tilde{t},\ \ u\geqslant M. \tag{2.3}$$

Como $\lim_{t\to\infty}h_k(t)=\infty$, existe t_* suficientemente grande tal que $h_q(t)\geqslant\tilde{t}$ para todo $t\geqslant t_*$ e algum $q\in\{1,\cdots,l\}$. Note que aqui podemos tomar $t_*=\tilde{t}+\tau$. De fato, por hipótese, temos $h_q(t_*)=h_q(\tilde{t}+\tau)>\tilde{t}$. Para $t\geqslant t_*$, $h_q(t)>t-\tau\geqslant t_*-\tau=\tilde{t}+\tau-\tau=\tilde{t}$.

Além disso, como a solução x de (2.1)–(2.2) é contínua e positiva, então ela assume o máximo e o mínimo em compactos. Defina então a sequência de pontos $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ como $t_j=t_*+j\tau$. Logo para cada $j\in\mathbb{N}$, temos

$$m_j=\min_{t\in[t_{j-1},t_j]}x(t),\quad M_j=\max_{t\in[t_{j-1},t_j]}x(t).$$

Desta forma, considere t^*_{j-1} tal que $x(t^*_{j-1}) = M_{j-1}$, onde $t^*_{j-1} \in [t_{j-2}, t_{j-1}]$.

Note que:

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(h_1(t)), \cdots, x(h_l(t))) - g(t, x(t)) \geqslant -g(t, x(t)) \geqslant -Bx(t),$$

onde a primeira desigualdade segue do fato das funções f_i serem positivas e a segunda desigualdade segue da hipótese dada pela desigualdade $g(t, u) \leqslant Bu$.

Assim, temos uma EDO linear de 1ª ordem e, utilizando técnicas de cálculo, para $t \in [t_{j-1}, t_j]$, e condição inicial $x(t^*_{j-1}) = M_{j-1}$ temos:

$$\begin{aligned} x(t) &\geqslant x(t^*_{j-1})e^{-B(t-t^*_{j-1})} \\ &= M_{j-1}e^{-B(t-t^*_{j-1})} \\ &\geqslant M_{j-1}e^{-2B\tau}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

já que $t - t^*_{j-1} \leqslant t_j - t_{j-2} = 2\tau$ (lembrando que $t_{j-2} = t_* + (j-2)\tau$ e $t_j = t_* + j\tau$).

Logo, como (2.4) vale para todo $t \in [t_{j-1}, t_j]$, então temos que, em particular, vale para o instante t em que x assume o mínimo, ou seja,

$$m_j \geqslant M_{j-1}e^{-2B\tau}. \tag{2.5}$$

Por outro lado, pela definição de M_{j-1}, temos que

$$x(t_{j-1}) \leqslant M_{j-1}.$$

Também, como g é uma função positiva e $\sum_{i=1}^{m} f_i(t, u_1, \cdots, u_l) \leqslant Au_k$, para algum $k \in \{1, \cdots, l\}$ então, para $t \in [t_{j-1}, t_j]$, temos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(h_1(t)), \cdots, x(h_l(t))) - g(t, x(t)) \\ &< \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(h_1(t)), \cdots, x(h_l(t))) \\ &\leqslant Ax(h_k(t)) \\ &\leqslant A \max\left\{M_{j-1}, \max_{s \in [t_{j-1}, t]} x(s)\right\}. \end{aligned}$$

Logo, pela estimativa acima, vemos que $x(t)$ é menor do que a solução do PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_{j-1}) = M_{j-1} \end{cases}$$

que é dada por $M_{j-1}e^{A(t-t_{j-1})}$.

Logo,

$$x(t) \leqslant M_{j-1}e^{A(t-t_{j-1})},$$

para $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Considerando que isto vale para todo $t \in [t_{j-1}, t_j]$, em particular para t_j^* tal que $x(t_j^*) = M_j$, então temos:

$$x(t_j^*) = M_j \leqslant M_{j-1}e^{A(t_j^*-t_{j-1})} \leqslant M_{j-1}e^{A\tau}. \tag{2.6}$$

Por outro lado,

$$x(t) \leqslant M_{j-1}e^{2A\tau}$$

vale também para $t \in [t_j, t_{j+1}]$. De fato, pois procedendo como antes, temos que para $t \in [t_j, t_{j+1}]$, a seguinte desigualdade acontece:

$$x(t) \leqslant M_j e^{A\tau}.$$

Usando a desigualdade (2.6), temos para $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$x(t) \leqslant M_{j-1}e^{A\tau}e^{A\tau} = M_{j-1}e^{2A\tau}. \tag{2.7}$$

Agora, por contradição, assuma que a solução x não é limitada, isto é, para todo $\tilde{M} > Me^{2(A+B)\tau}$, onde M é a constante das hipóteses, existe um intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ em que a desigualdade $x(t) \geqslant \tilde{M}$ é alcançada para o primeiro momento.

Como x é contínua, existe t^* tal que $x(t^*) = \tilde{M}$ e existe $\epsilon > 0$ tal que $t \in [t^* - \epsilon, t^*] \subset [t_j, t_{j+1}]$ e $x(t) = \sup_{s\in[0,t]} x(s)$, para $t \in [t^* - \epsilon, t^*]$.

A estimativa (2.7) e a desigualdade $\tilde{M} > Me^{2(A+B)\tau}$ implicam que

$$M_{j-1}e^{2A\tau} \geqslant x(t^*) = \tilde{M} > Me^{2(A+B)\tau}.$$

Logo, segue que

$$M_{j-1} > Me^{2B\tau}. \tag{2.8}$$

Além disso, utilizando a desigualdade (2.5), ou seja, $m_j \geqslant M_{j-1}e^{-2B\tau}$ e a desigualdade (2.8), segue que $m_j > M$. Portanto, temos $x(t) \geqslant M$ em $[t_{j-1}, t^*]$.

Consequentemente, temos que $x(h_k(t)) \geqslant M$, para todo $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $k = 1, \cdots, l$ e para todo $t \in [t^* - \epsilon, t^*]$, temos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(h_1(t)), \cdots, x(h_l(t))) - g(t, x(t)) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(t), \cdots, x(t), M, \cdots, M) - g(t, x(t)), \end{aligned}$$

em que usamos o fato da f_i ser monótona crescente nas n-primeiras coordenadas e $x(t) \geqslant x(h_k(t))$, para todo $t \in [t^* - \epsilon, t^*]$ e monótona decrescente nas restantes e $x(h_k(t)) \geqslant M$, para obter a desigualdade acima.

Logo,

$$x'(t) \leqslant \alpha g(t, x(t)) - g(t, x(t)) = -(1 - \alpha) g(t, x(t)) < 0, \tag{2.9}$$

onde usamos (2.3) na primeira desigualdade. Como $\alpha < 1$ e g é não-negativa, temos a desigualdade.

Por outro lado, (2.9) implica que x é decrescente, contradizendo a hipótese que $x(t^* - \epsilon) \leqslant x(t^*) = \tilde{M}$.

Disto, concluímos que a solução é limitada com a limitação dada por $Me^{2(A+B)\tau}$.

Vamos mostrar agora a persistência. Para isso, pela hipótese sobre lim inf, podemos assumir que para $t \geqslant t_* - \tau$, temos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i(t, u, u, \cdots, u, \mu, \mu, \cdots, \mu)}{g(t, u)} \geqslant C > 1, t \geqslant \tilde{t}, 0 \leqslant u \leqslant \mu,$$

defina t_j, m_j e M_j como anteriormente.

Suponha, por contradição, que x não é persistente. Logo, $\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Isto implica que existem t^* suficientemente grande e ϵ suficientemente pequeno tais que

$$x(t) = \min_{s \in [0,t]} x(s)$$

e

$$x(t) < \mu e^{-2B\tau}$$

em $[t^* - \epsilon, t^*] \subset [t_j, t_{j+1}]$ pela continuidade de x.

Usando argumentos similares aos anteriores, obtemos que $x(t) < \mu$ em $[t_{j-1}, t^*]$, o que implica que:

$$x(h_k(t)) < \mu, k = 1, \cdots, l, \ t \in [t^* - \epsilon, t^*].$$

Portanto, para $t \in [t^* - \epsilon, t^*]$, temos:

$$\begin{cases} x(h_k(t)) < \mu \\ x(t) < \mu \end{cases}$$

e além disso,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(h_1(t)), \cdots, x(h_l(t))) - g(t, x(t)) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x(t), \cdots, x(t), \mu, \cdots, \mu) - g(t, x(t)) \\ &\geqslant Cg(t, x(t)) - g(t, x(t)) \\ &= (C-1)g(t, x(t)) > 0 \end{aligned}$$

pois $C > 1$ e g é não-negativa. Isto implica que x é crescente e contradiz a hipótese que $x(t^* - \epsilon) \geqslant x(t^*)$. Portanto, a solução é persistente e $\liminf_{t\to\infty} x(t) \geqslant \mu e^{-2B\tau}$, provando o resultado desejado. □

Vamos agora apresentar alguns exemplos para ilustrar nossos resultados. Eles podem ser encontrados em [5]. Começamos com a famosa equação de Mackey- introduzida em [27] por Michael Mackey e Leon Glass em 1977 com o objetivo de estudar o controle de células do sangue. Eles observaram que várias doenças podem ser descritas com modelos que possuem instabilidades oscilatórias e propuseram esta equação que foi um marco, pois chamou a atenção de vários matemáticos interessados em dinâmica não-linear e equações diferenciais funcionais.

Exemplo 2.1.2 ([5], Exemplo 5.7). *Considere a equação de Mackey-Glass*

$$x'(t) = \frac{a(t)x(h(t))}{1 + x^n(p(t))} - b(t)x(t)$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções Lebesgue mensuráveis e limitadas, satisfazendo $0 \leqslant \alpha \leqslant a(t) \leqslant A$, $0 < \beta \leqslant b(t) \leqslant B$, $t - h(t) \leqslant \tau$, $t - p(t) \leqslant \tau$, $n > 0$.

Aqui, $x(t)$ é a densidade das células maduras na circulação sanguínea, a função $\frac{a(t)x(h(t))}{1+x^n(p(t))}$ modela a reprodução das células, os retardos $x(h(t))$ e $x(p(t))$ descrevem a fase de maturação das células antes de serem lançadas na corrente sanguínea e $b(t)x(t)$ é a taxa de mortalidade.

Observe que tomando

$$f(t, x(h(t)), x(p(t))) = \frac{a(t)x(h(t))}{1 + x^n(p(t))}$$

e $g(t, x(t)) = b(t)x(t)$, *temos que* f *é monótona crescente na variável* $x(h(t))$ *e monótona decrescente na variável* $x(p(t))$.

De fato, $\frac{\partial f}{\partial x(h(t))} = \frac{a(t)}{1+x^n(p(t))} > 0$, *já que* $a(t) > 0$ *e* $x(p(t)) > 0$. *Da mesma forma,* $\frac{\partial f}{\partial x(p(t))} = -\frac{a(t)x(h(t))x^{n-1}(p(t))}{(1+x^n(p(t)))^2} < 0$, *já que* $a(t) > 0$, $x(h(t)) > 0$ *e* $x(p(t)) > 0$.

Note que a desigualdade

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i(t, u, u, \cdots, u, M, M, \cdots, M)}{g(t, u)} < 1$$

do Teorema 2.1.1, está satisfeita para qualquer $M > M_0$, *onde*

$$M_0 = \begin{cases} 1, \ \textit{se} \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leqslant 1 \\ \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{a(t)}{b(t)} - 1\right)^{\frac{1}{n}}, \ \textit{se} \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} > 1. \end{cases}.$$

De fato, como $a(t)$ *e* $b(t)$ *são limitadas, então* $\limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)}$ *é finito. Além disso:*

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i(t, u, u, \cdots, u, M, M, \cdots, M)}{g(t, u)} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{\frac{a(t)u}{1+M^n}}{b(t)u} = \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)u}{1+M^n} \cdot \frac{1}{b(t)u} \\ &= \limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \cdot \frac{1}{1+M^n} \end{aligned}$$

Se $\limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \leqslant 1$, *então para todo* $M > 1$ *temos*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \cdot \frac{1}{1+M^n} < 1.$$

Se $\limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} > 1$, *então para todo* $M > \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{a(t)}{b(t)} - 1\right)^{\frac{1}{n}}$ *temos*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} \cdot \frac{1}{1+M^n} < 1.$$

Portando, todas as soluções positivas da Equação de Mackey-Glass são dissipativas, com $\limsup_{t\to\infty} x(t) \leqslant Me^{2(A+B)\tau}$.

Assuma agora que $\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} > 1$. *Então a desigualdade*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i(t,u,u,\cdots,u,\mu,\mu,\cdots,\mu)}{g(t,u)} > 1$$

do teorema, está satisfeita, para todo $0 < \mu < \mu_0$, *onde* $\mu_0 = \liminf_{t\to\infty} \left(\frac{a(t)}{b(t)} - 1\right)^{\frac{1}{n}}$ *e, portanto, aplicando o Teorema 2.1.1, toda solução positiva da Equação de Mackey-Glass é persistente com* $\liminf_{t\to\infty} x(t) \geqslant \mu e^{-2B\tau}$.

Combinando as duas desigualdades, obtemos a permanência.

O próximo exemplo ilustra como a limitação dos retardos é necessária para a conclusão de que todas as soluções positivas são limitadas e persistentes. Para entendê-lo, utilizaremos a seguinte definição:

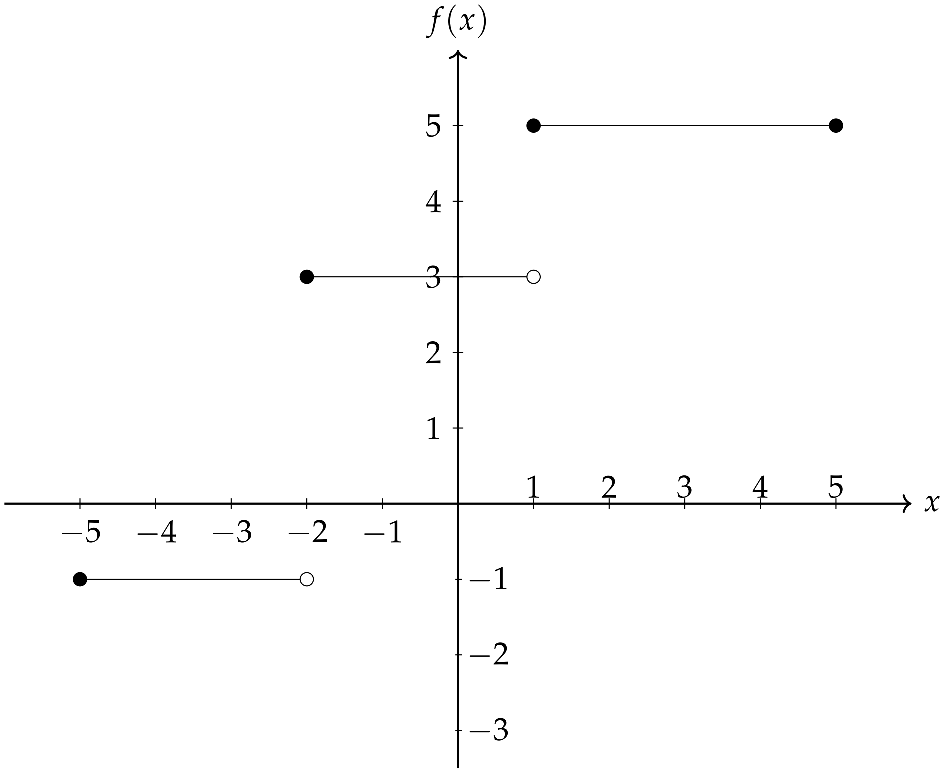
Definição 2.1.3 (Função escada)**.** *Uma função* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *é chamada* ***função escada*** *se existe uma partição finita* $a = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m = b$ *tal que em todo intervalo aberto* (β_{i-1}, β_i), $i = 1,\cdots,m$, *a função* f *é identicamente igual à constante* $c_i \in \mathbb{R}$.

Para ilustrar a definição acima, apresentamos um exemplo.

Exemplo 2.1.4. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-5,-2) \\ 3, & x \in [-2,1) \\ 5, & x \in [1,5] \end{cases}$$

com gráfico



é uma função escada.

Agora estamos preparados para o nosso próximo exemplo que também traz a equação de Mackey-Glass com algumas condições específicas.

Exemplo 2.1.5 ([5], Exemplo 5.8)**.** *Considere a equação*

$$x'(t) = \frac{a(t)x(h(t))}{1 + x^2(g(t))} - x(t)$$

de Mackey- Glass com $n = 2$ e $b(t) = 1$, onde $h\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ são funções escada. Observe que o PVI

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = A \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem solução $x(t) = (x_0 - A)e^{-(t-t_0)} + A$, então pelo Teorema do Valor Intermediário para qualquer B, entre A e x_0, existe $t_1 > t_0$ finito tal que $t_1 \in [t_0, t]$ e $x(t_1) = B$. Logo,

$$\begin{aligned} (x_0 - A)e^{-(t_1-t_0)} + A &= B \\ e^{-(t_1-t_0)} &= \frac{B-A}{x_0-A} \\ e^{t_1-t_0} &= \frac{x_0-A}{B-A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \ln \frac{x_0 - A}{B - A} \\ t_1 &= t_0 + \ln\left(\frac{x_0 - A}{B - A}\right), \end{aligned}$$

considerando $x_0 - A \neq 0$.

Seja $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência de números positivos tais que* $t_k < t_{k+1}$ *defina as funções abaixo:*

$$a(t) = \begin{cases} 2, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}) \\ 6, & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t_{2k-1}, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}) \\ t_{2k}, & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}) \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} t_{2k}, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}) \\ t_{2k-1}, & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}) \end{cases}$$

onde $t_0 = 0$, $x(t_0) = 1$, $t_{-1} = -1$, $x(t_{-1}) = \varphi(-1) = \frac{1}{4}$. *Podemos encontrar* t_i *tal que, se* i *for par temos* $x(t_{2k}) = 2^k$, *e se* i *for ímpar, temos* $x(t_{2k+1}) = 2^{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

De fato, em $[0, t_1)$ *temos* $k = 0$, *então* $a(t) = 2$, $h(t) = t_{-1}$ *e* $g(t) = t_0$, *e portanto* $x(h(t)) = x(t_{-1}) = x(-1) = \dfrac{1}{4}$, $x(g(t)) = x(t_0) = 1$, *então*

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1+1} - x(t) + x(t) = A$$

e o PVI é dado por

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = \dfrac{1}{4} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

então escolhendo $B = \dfrac{1}{2}$, *encontramos* t_1 *tal que* $x(t_1) = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$. *Mais explicitamente, nesse caso,*

$$t_1 = 0 + \ln\left(\frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}\right) = \ln\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1}\right) = \ln 3.$$

Em $[t_1, t_2)$, *temos também* $k = 0$, *então* $x(h(t)) = x(t_0) = 1$, $x(g(t)) = x(t_1) = \frac{1}{4}$, $a(t) = 6$, *o PVI é dado por*

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = \dfrac{6}{1+\frac{1}{16}} > 2 \\ x(t_1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

então escolhendo $B = 2$, encontramos t_2 tal que $x(t_2) = 2$.

Por indução, se $x(t_{2k}) = 2^k$, $x(t_{2k+1}) = 2^{-k-1}$, então em $[t_{2k}, t_{2k+1})$ temos o PVI

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = \dfrac{2 \cdot 2^{-k-1}}{1+2^{2k}} > 2^{-k-1},\ k \in \mathbb{N}, \\ x(t_{2k}) = 2^k. \end{cases}$$

Portanto existe t_{2k+1} tal que $x(t_{2k+1}) = 2^{-k-2}$. Em $[t_{2k+1}, t_{2k+2})$, temos o PVI

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = \dfrac{6 \cdot 2^k}{1+2^{-2k-2}} > 2^{k+1},\ k \in \mathbb{N}, \\ x(t_{2k+1}) = 2^{-k-2} \end{cases}$$

então existe t_{2k+2} tal que $x(t_{2k+2}) = 2^{k+1}$, o que conclui a indução.

Portanto, sempre encontramos t_i de modo que nossa solução não é limitada.

Aqui, $a(t)$ e $b(t)$ são limitadas, diferentes de zero, e além disso, $\frac{a(t)}{b(t)} \geqslant 2 > 1$, g e h satisfazem (a2), mas a solução não é limitada nem persistente, isto porque os retardos h e g não são limitados.

2.2 Estabilidade de equações lineares com retardos

Nesta seção, iremos investigar a estabilidade de equações lineares com retardos. Esta seção nos dará os resultados chave para provarmos os principais teoremas do próximo capítulo.

Iniciaremos considerando a equação linear abaixo:

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{l} a_k(t) x(h_k(t)) = f(t) \tag{2.10}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(H1) f é Lebesgue mensurável;

(H2) $a_k(t)$, $k = 1, \cdots, l$, são funções Lebesgue mensuráveis essencialmente limitadas em $[0, \infty)$;

(H3) $h_k(t)$, $k = 1, \cdots, l$, são funções Lebesgue mensuráveis, $h_k(t) \leqslant t$, $\sup_{t\geqslant 0}[t - h_k(t)] < \infty$;

(H4) $\varphi\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ é uma função limitada Borel mensurável, para a condição inicial $x(t) = \varphi(t), t < 0, x(0) = x_0$.

Considere também a equação homogênea abaixo:

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{l} a_k(t)x(h_k(t)) = 0. \tag{2.11}$$

Vamos começar relembrando a definição de *solução* para a equação (2.10). Para detalhes, veja [8].

Definição 2.2.1. *Uma função localmente absolutamente contínua $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada uma **solução do problema*** (2.10) *com condição inicial*

$$x(t) = \varphi(t), \;\; t < 0, \;\; x(0) = x_0 \tag{2.12}$$

se ela satisfaz a equação (2.10) *para quase todo $t \in [0, \infty)$ e* (2.12) *para $t \leq 0$.*

De agora em diante, iremos assumir que a equação (2.10) com a condição inicial (2.12) tem uma única solução global $x(t)$, $t \geq 0$.

Relembremos abaixo o conceito de *função fundamental* para o problema (2.10).

Definição 2.2.2. *A solução $X(t, s)$ do problema*

$$\begin{cases} y'(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k(t)y(h_l(t)) = 0, \; t \geq s \\ y(t) = 0, \;\; t < s, \;\; y(s) = 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

*é chamada a **função fundamental** de* (2.10).

Com este conceito em mãos, é possível aplicar o Fórmula da Variação das Constantes para obtermos a formulação integral abaixo para nossa solução, que será muito importante para as estimativas que obteremos aqui. Veja [12] para detalhes.

Lema 2.2.3. *Suponha que as condições (H1)–(H4) estão satisfeitas. Então a solução de* (2.10) *com condição inicial (2.12) tem a seguinte representação:*

$$x(t) = X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s) \sum_{k=1}^{l} a_k(s)\varphi(h_k(s))ds + \int_0^t X(t, s)f(s)ds \tag{2.14}$$

onde $\varphi(t) = 0$, $t \geq 0$.

Relembremos o conceito de uniformemente exponencialmente estável para equações com retardos da forma (2.10), que pode ser encontrado em [8].

Definição 2.2.4. *A equação* (2.10) *é dita* ***uniformemente exponencialmente estável*** *se existem* $K > 0$, $\lambda > 0$ *tais que a função fundamental* $X(t,s)$ *de* (2.10) *tem a seguinte estimativa*

$$|X(t,s)| \leq Ke^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0.$$

Vamos abaixo introduzir as notações dos espaços que iremos trabalhar nesta seção. Denote por L_∞ o espaço de todas as funções que são essencialmente limitadas em $[0,\infty)$ com a norma do supremo essencial

$$\|x\|_{L_\infty} = \text{ess sup}_{t\geq 0}|x(t)|.$$

Chamamos a atenção para o fato de que no capítulo anterior C se referia ao espaço das funções contínuas de $[-\tau, 0)$ em $\mathbb{R}^n$, entretanto a partir de agora, significará o espaço de todas as funções contínuas limitadas em $[0,\infty)$ com a norma do supremo. Por C_0 denotaremos o subespaço de C das funções $x(t)$ tais que $x(0) = 0$.

Consideraremos também a equação auxiliar abaixo:

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{l} b_k(t)x(g_k(t)) = f(t). \tag{2.15}$$

Iremos supor que as condições (H1)–(H4) estão satisfeitas para a equação (2.15) acima. Denotaremos por $X_0(t,s)$ a função fundamental da equação (2.15) e defina os seguintes operadores lineares:

$$(Lx)(t) := x'(t) + \sum_{k=1}^{l} a_k(t)x(h_k(t)) = f(t), \;\; x(t) = 0, \; t \leq 0 \tag{2.16}$$

$$(L_0x)(t) := x'(t) + \sum_{k=1}^{n} b_k(t)x(g_k(t)) = f(t), \;\; x(t) = 0, \; t \leq 0 \tag{2.17}$$

$$(L^{-1}f)(t) := \int_0^t X(t,s)f(s)ds \;\; (L_0^{-1}f)(t) := \int_0^t X_0(t,s)f(s)ds. \tag{2.18}$$

Enunciamos abaixo dois resultados que serão importantes para demonstrarmos os principais resultados desta seção. Ambos trazem condições para garantir que a equação (2.10) é exponencialmente estável. Os resultados abaixo podem ser encontrados em [8].

Proposição 2.2.5. *Suponha que para toda $f \in L_\infty$, a solução de* (2.16) *pertence a C. Então a equação* (2.10) *é exponencialmente estável.*

Proposição 2.2.6. *Suponha que a equação auxiliar* (2.17) *seja exponencialmente estável e o operador $L_0^{-1}L$ age no espaço C_0 e tem o operador inverso que é limitado. Então a equação* (2.10) *é exponencialmente estável.*

Observação 2.2.7. *Observe que para garantir que o operador inverso $L_0^{-1}L\colon C_0 \to C_0$ existe e é limitado, basta termos*

$$\|I - L_0^{-1}L\|_{C\to C} < 1$$

em que I é o operador identidade.

Agora estamos prontos para provarmos o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2.8 ([8], Teorema 1)**.** *Suponha que exista um conjunto de índices $I \subset \{1, 2, ..., l\}$ e números $\alpha > 0$, $1 > \gamma > 0$ tal que*

$$\sum_{k\in I} a_k(t) \geqslant \alpha > 0$$

$$\sum_{k\in I} |a_k(t)| \int_{h_k(t)}^{t} \sum_{i=1}^{l} |a_i(s)| ds + \sum_{k\in J} |a_k(t)| \leqslant \gamma \sum_{k\in I} a_k(t) \tag{2.19}$$

para t suficientemente grande, onde $J = \{1, ..., l\}\backslash I$. Então (2.10) *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $J \cup I = \{1, \dots, l\}$. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in I} a_k(t) \int_{h_k(t)}^{t} x'(s)ds - \sum_{k\in J} a_k(t)x(h_k(t)) &= \sum_{k\in I} a_k(t)[x(t) - x(h_k(t))] - \sum_{k\in J} a_k(t)x(h_k(t)) \\
&= \sum_{k\in I} a_k(t)x(t) - \sum_{k\in I} a_k(t)x(h_k(t)) - \sum_{k\in J} a_k(t)x(h_k(t)) \\
&= \sum_{k\in I} a_k(t)x(t) - \sum_{k=1}^{l} a_k(t)x(h_k(t)) \\
&= \sum_{k\in I} a_k(t)x(t) + x'(t).
\end{aligned}$$

Combinando a equação acima com (2.10), temos:

$$x'(t) + \sum_{k\in I} a_k(t)x(t) = \sum_{k\in I} a_k(t) \int_{h_k(t)}^{t} x'(s)ds - \sum_{k\in J} a_k(t)x(h_k(t))$$

$$= \sum_{k\in I} a_k(t) \int_{h_k(t)}^{t} \sum_{i=1}^{l} a_i(s)x(h_i(s))ds - \sum_{k\in J} a_k(t)x(h_k(t)).$$

Considere os seguintes operadores lineares:

$$(Lx)(t) := x'(t) + \sum_{k\in I} a_k(t)x(t) - \sum_{k\in I} a_k(t)$$

$$+ \int_{h_k(t)}^{t} \sum_{i=1}^{l} a_i(s)x(h_i(s))ds + \sum_{k\in J} a_k(t)x(h_k(t))$$

$$(L_0x)(t) := x'(t) + \sum_{k\in I} a_k(t)x(t)$$

$$(L_0^{-1}f)(t) := \int_0^t e^{-\int_s^t \sum_{k\in I} a_k(\tau)d\tau} f(s)ds.$$

Temos que a equação auxiliar (2.17) com o operador L_0 como acima é claramente exponencialmente estável. Logo, aplicando (2.19), temos:

$$|(I - L_0^{-1}L)x(t)| = |(L_0^{-1}L_0 - L_0^{-1}L)x(t)|$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-\int_s^t \sum_{k\in I} a_k(\tau)d\tau} \cdot \left[\sum_{k\in I} |a_k(s)| \int_{h_k(s)}^{s} \sum_{i=1}^{l} |a_i(\psi)||x(h_i(\psi))|)d\psi + \sum_{k\in J} |a_k(s)||x_k(s)|\right] ds$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-\int_s^t \sum_{k\in I} a_k(\tau)d\tau} \cdot \left[\sum_{k\in I} |a_k(s)| \int_{h_k(s)}^{s} \sum_{i=1}^{l} |a_i(\psi)|d\psi + \sum_{k\in J} |a_k(s)|\right] ds\|x\|_C$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-\int_s^t \sum_{k\in I} a_k(\tau)d\tau} \gamma \sum_{k\in I} a_k(s)ds\|x\|_C \leq \gamma\|x\|_C.$$

Disto, obtemos

$$\|I - L_0^{-1}L\|_{C\to C} \leq \gamma < 1.$$

Pela Observação 2.2.7, obtemos que o operador inverso $L_0^{-1}L\colon C_0 \to C_0$ existe e é limitado. Portanto, todas as condições da Proposição 2.2.6 estão satisfeitas, obtendo que (2.10) é exponencialmente estável. □

O corolário abaixo é uma consequência imediata do Teorema 2.2.8, considerando $I = \{i\}$.

Corolário 2.2.9 ([8], Corolário 1.1). *Suponha que, para a equação* (2.10), *existam* $\alpha > 0$, $1 > \gamma > 0$ *e índice i tais que*

$$a_i(t) \geq \alpha$$

e
$$|a_i(t)| \int_{h_i(t)}^{t} \sum_{k=1}^{l} |a_k(s)|ds + \sum_{k \neq i} |a_k(t)| \leq \gamma a_i(t)$$
para t suficientemente grande. Então a equação (2.10) *é exponencialmente estável.*

O próximo resultado também segue imediatamente do Teorema 2.2.8, tomando $I = \{1, \ldots, l\}$.

Corolário 2.2.10 ([8], Corolário 1.2)**.** *Suponha que, para a equação* (2.10)*, existam* $\alpha > 0$ *e* $1 > \gamma > 0$ *tais que*
$$\sum_{k=1}^{l} a_k(t) \geq \alpha$$
e
$$\sum_{k=1}^{l} |a_k(t)| \int_{h_k(t)}^{t} \sum_{i=1}^{l} |a_i(s)|ds \leq \gamma \sum_{k=1}^{l} a_k(t)$$
para t suficientemente grande. Então a equação (2.10) *é exponencialmente estável.*

O próximo resultado segue diretamente do Teorema 2.2.8, tomando a_k com uma definição específica.

Corolário 2.2.11 ([8], Corolário 1.3)**.** *Suponha que, para a equação* (2.10)*,*
$$a_k(t) = A_k r(t), \;\; k = 1, ..., l, \;\; r(t) \geqslant r_0 > 0,$$
exista um conjunto de índices $I \subset \{1, ..., l\}$*, tal que*
$$\sum_{k \in I} A_k > 0, \quad \limsup_{t \to \infty} \sum_{k \in I} |A_k| \int_{h_k(t)}^{t} r(s)ds < \frac{\sum_{k \in I} A_k - \sum_{k \in J} |A_k|}{\sum_{k=1}^{l} |A_k|} \tag{2.20}$$
onde $J = \{1, ..., l\} \backslash I$*, então a equação* (2.10) *é exponencialmente estável.*

Iremos agora enunciar alguns resultados que seguem como casos particulares dos resultados já demonstrados anteriormente para alguns tipos específicos de equações com retardos. Estes resultados são importantes para trazer uma motivação para a equação inicialmente estudada, mostrando a generalidade dos resultados que se obtêm por meio desta equação.

Considere a equação (2.10) para $l = 2$, $h_1(t) = t$ e $h_2(t) = h(t)$, $a_1(t) = a(t)$ e $a_2(t) = b(t)$:
$$x'(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(h(t)), \tag{2.21}$$

e suponha que as condições (H2) e (H3) estão satisfeitas para as respectivas funções acima.

Corolário 2.2.12 ([8], Corolário 1.4). *Suponha que, para a equação* (2.21), *existam* $\alpha > 0$, $1 > \gamma > 0$, *tais que pelo menos uma das condições acontece:*

1. $a(t) \geq \alpha > 0, \;\; |b(t)| \leq \gamma a(t);$
2. $a(t) + b(t) \geq \alpha > 0, \;\; |b(t)| \int_{h(t)}^{t} (|a(s)| + |b(s)|) ds < \gamma(a(t) + b(t))$

para t suficientemente grande. Então a equação (2.21) *é exponencialmente estável.*

Corolário 2.2.13 ([8], Corolário 1.5). *Suponha que, para a equação* (2.21)*:*

$$a(t) = Ar(t), \;\; b(t) = Br(t), \;\; r(t) \geq r_0 > 0$$

e pelo menos uma das seguintes condições acontece:

1. $A > 0, \;\; |B| < A;$
2. $A + B > 0, \;\; |B| \limsup_{t \to \infty} \int_{h(t)}^{t} r(s) ds < \dfrac{A + B}{|A| + |B|};$
3. $A > 0, \;\; B > 0, \;\; B \limsup_{t \to \infty} \int_{h(t)}^{t} r(s) ds < 1.$

Então a equação (2.21) *é exponencialmente estável.*

Considere agora a equação (2.10) para $l = 3$ e $h_1(t) = t$, $h_2(t) = h(t)$ e $h_3(t) = g(t)$, $a_1(t) = a(t)$, $a_2(t) = b(t)$ e $a_3(t) = c(t)$:

$$x'(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(h(t)) - c(t)x(g(t)) \tag{2.22}$$

e a equação (2.10) para $l = 2$, $h_1(t) = h(t)$ e $h_2(t) = g(t)$, $a_1(t) = b(t)$ e $a_2(t) = c(t)$:

$$x'(t) = -b(t)x(h(t)) - c(t)x(g(t)). \tag{2.23}$$

Assuma que as condições (H2)–(H3) estão satisfeitas para as respectivas funções.

Supondo que $I = \emptyset$, $I = [1,2]$, $I = \{1\}$ e $I = \{2\}$, respectivamente, obtemos o resultado abaixo.

Corolário 2.2.14 ([8], Corolário 1.6). *Suponha que, para a equação* (2.22), *existam* $\alpha > 0$, $1 > \gamma > 0$, *tais que pelo menos uma das condições acontece:*

1. $a(t) \geqslant \alpha > 0, \;\; |b(t)| + |c(t)| \leqslant \gamma a(t);$

2. $a(t)+b(t)+c(t) \geqslant \alpha > 0$, *e*

$$|b(t)|\int_{h(t)}^{t}(|a(s)|+|b(s)|+|c(s)|)ds+|c(t)|\int_{g(t)}^{t}(|a(s)|+|b(s)|+|c(s)|)$$
$$\leqslant \gamma(a(t)+b(t)+c(t));$$

3. $a(t)+b(t) \geqslant \alpha > 0$ *e*

$$|b(t)|\int_{h(t)}^{t}(|a(s)|+|b(s)|+|c(s)|)ds+|c(t)| \leqslant \gamma(a(t)+b(t));$$

4. $a(t)+c(t) \geqslant \alpha > 0$ *e*

$$|c(t)|\int_{h(t)}^{t}(|a(s)|+|b(s)|+|c(s)|)ds+|b(t)| \leq \gamma(a(t)+c(t))$$

para t suficientemente grande. Então a equação (2.22) *é exponencialmente estável.*

Além disso, suponha que, para a equação (2.23)*, existam* $\alpha > 0$*,* $1 > \gamma > 0$*, tais que pelo menos uma das condições acontece:*

1. $b(t)+c(t) \geq \alpha > 0$ *e*

$$|b(t)|\int_{h(t)}^{t}(|b(s)|+|c(s)|)ds+|c(t)|\int_{g(t)}^{t}(|b(s)|+|c(s)|) \leq \gamma(b(t)+c(t));$$

2. $b(t) \geq \alpha > 0$ *e* $|b(t)|\int_{h(t)}^{t}(|b(s)|+|c(s)|)ds+|c(t)| \leq \gamma b(t)$;

3. $c(t) \geq \alpha > 0$ *e* $|c(t)|\int_{h(t)}^{t}(|b(s)|+|c(s)|)ds+|b(t)| \leq \gamma c(t)$

para t suficientemente grande. Então a equação (2.23) *é exponencialmente estável.*

Capítulo 3

Atratividade Global

3.1 Atratores estáveis globais para aplicações de uma dimensão

Nesta seção, iremos apresentar alguns resultados do artigo [18], que servirão de base para provarmos os resultados do último capítulo da dissertação.

Vamos considerar equações diferenciais de ordem superior da forma

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n \geqslant 0 \tag{3.1}$$

onde $g\colon I^{k+1} \to \bar{I}$ é contínua, k é um inteiro não negativo e I denota um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\bar{I}$ seu fecho, também um intervalo de $\mathbb{R}$.

Começaremos com algumas definições que são importantes para a boa compreensão dos objetos que estamos investigando.

Definição 3.1.1. *Se para uma sequência inicial $(x_n)_{n=-k}^{0} \subset I$ a sequência $(x_n)_{n=-k}^{\infty}$ está bem definida pela equação* (3.1)*, então a chamamos de* ***órbita completa*** *de* (3.1).

Definição 3.1.2 ([18], Definição 2.1). *Seja $h\colon I \to \bar{I}$ contínua e seja x^* um ponto fixo de h.*

- *Dizemos que x^* é um* ***atrator global*** *de h se todas as órbitas completas de h convergem para x^*.*

- *Dizemos que x^* é um* ***atrator não trivial*** *de h se toda vizinhança perfurada de x^* contém alguns pontos cuja a órbita completa converge para x^*.*

- *Dizemos que x^* é um **atrator estável** de h se para toda vizinhança U de x^*, existe uma vizinhança V de x^* tal que todo $x \in V$ tem sua órbita completa contida em U e ela converge para x^*.*

Observe que se x^* é um atrator global de h e, $h(I) \subset I$ ou x^* é atrator estável de h, então ele é um atrator não trivial.

Lema 3.1.3 ([18], Lema 2.3)**.** *Sejam J e K subintervalos compactos de I intersectando no máximo um ponto. Suponha que existe algum inteiro positivo k tal que $h^i(J \cup K) \subset I$ para cada $0 \leqslant i < k$ e $h^k(J) \cap h^k(K) \supset J \cup K$. Então h tem órbitas periódicas de períodos arbitrariamente grandes. Em particular, não existem atratores globais para a aplicação h.*

Demonstração. Este resultado é bem conhecido no caso em que I é um intervalo compacto. Além disso, as órbitas periódicas correspondentes estão contidas em $A = \cup_{i=0}^{k-1} h^i(J \cup K)$. No caso geral, basta substituir h por uma aplicação contínua $f \colon I' \to I'$ tal que $I' \supset A \cup h^k(J \cup K)$ e $f(x) = h(x)$ para todo $x \in A$ e aplicar a versão do Lema para intervalo compacto. □

O próximo lema segue como consequência imediata.

Lema 3.1.4 ([18], Lema 2.4)**.** *Se x^* é um atrator não trivial de h e x^* é o único ponto fixo de h, então existe $x^* \in I$ tal que $(h(x) - x)(x - x^*) < 0$ para todo $x \neq x^*$.*

Lema 3.1.5 ([18], Lema 2.5)**.** *Suponha que p é um atrator global não trivial de h. Então não existem pontos $c \neq d$ em I satisfazendo $h(c) \geqslant \max\{c, d\}$ e $h(d) \leqslant \min\{c, d\}$.*

Demonstração. Assuma que existem dois pontos c e d como na afirmação do Lema que leva a uma contradição.

Pelo Lema 3.1.4, temos que $c < p < d$. Além disso, existem pontos $c \leqslant c' < x^* < d' \leqslant d$ tais que $h(c') = d$, $h(d') = c$ e $h([c', p]) \subset (c', d]$, $h([x^*, d']) \subset [c, d')$. Portanto, h^2 está bem definida em $[c', d']$ e $h^2(c') < c'$, $h^2(d') > d'$. Como x^* é o atrator global de h, h^2 não pode ter um ponto fixo em $[c', d']$ além de x^*. Portanto, $h^2(x) < x$ (respectivamente, $h^2(x) > x$) para todo $x \in [c', x^*]$ (respectivamente, $x \in [x^*, d']$), o que também implica $h([c', x^*)) = (x^*, d]$, $h((x^*, d']) = [c, x^*)$.

Como x^* é localmente repulsivo para h^2, então também para h, se uma órbita completa $(h''(x))$ de h converge para x^*, então existe algum k tal que $h''(x) = x^*$ para cada $n \geqslant k$. Como x^* é um atrator não trivial, ele atrai algumas órbitas começando de um ponto diferente de x^*. Então $h(q) = x^*$ para algum ponto $q \neq x^*$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $q < x^*$. Além disso, como $h(x) > x^*$ para cada $x \in [c', x^*)$, vemos que $q < c'$. Portanto, podemos assumir que q é o maior ponto à esquerda de c' que é aplicado à x^* por h. Portanto, temos que a restrição de h a $[q, x^*]$ atinge seu máximo em um ponto $r \in (q, x^*)$.

Disto, segue duas possibilidades. Assuma que $h(r) \in I$. Se $h([x^*, h(r)]) \supset [q, x^*]$, então aplicamos o Lema 3.1.3 aos intervalos $J = [q, r]$ e $K = [r, x^*]$ e o número $k = 2$ para chegarmos a uma contradição. Portanto, temos que $h([q, h(r)])$. A continuidade da restrição $h\colon [q, h(r)] \to [q, h(r)]$ e o fato que $h^2(x) < x$ para todos os pontos x à esquerda de x^* próximos suficientemente de x^* para garantir a existência de um ponto fixo de h^2 no intervalo $[q, x^*)$, que é impossível, já que x^* é um atrator global de h.

Portanto, $h(r) \in \bar{I}$. Afirmamos que $h(x) > q$ para cada $x > x^*$. A razão é a seguinte: se existe um ponto $s > x^*$ satisfazendo $h(s) \leqslant q$ e x_1^* e q_1 são, respectivamente, os pontos mais próximos de x^* e q em (q, x^*) satisfazendo $h(x_1^*) = h(q_1) = s$, então $h([q, q_1]) = h([x_1^*, x^*]) = [x^*, s]$ e $h([x^*, s]) \supset [q, x^*]$, portanto podemos aplicar o Lema 3.1.3 para chegarmos em uma contradição.

Concluímos que $q < h(x) < x^*$ para cada $x > x^*$. Lembre também que $h((x^*, d']) = [c, x^*)$. Portanto, vemos que toda órbita completa de h começando em um ponto maior do que q fica à direita de q. Como a única pré-imagem de x^* neste intervalo é x^* e x^* é localmente repulsiva nenhuma das tais órbitas podem convergir para x^*. Isso contradiz o fato de que x^* é um atrator não trivial. □

Lema 3.1.6 ([18], Lema 2.7)**.** *Assuma que x^* é um atrator global não trivial de h e J é um intervalo compacto contendo x^*. Se $h(J) \subset I$, então $J \cup h(J)$ é invariante por h, ou seja, $h(J \cup h(J)) \subset J \cup h(J)$.*

Demonstração. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que x^* é um dos extremos de J. Caso contrário, podemos decompor o intervalo J em dois intervalos desta forma e aplicar à cada um deles o argumento. Portanto, suponha que $J = [x^*, q]$. Coloque $h(J) = [r, s]$, onde $s < q$ pelo Lema 3.1.4. Se $h(c) = d$ para algum $c \in [r, x^*]$, então temos $r = h(d) = c < d = h(c)$, que é impossível pelo Lema 3.1.5. Logo, $h([r, x^*]) \subset [r, d)$ (usando também o Lema 3.1.4) e

$$h(J \cup h(J)) = h([x^*, q] \cup [r, s]) = h([r, q]) \subset [r, q] = J \cup h(J),$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 3.1.7 ([18], Teorema A)**.** *Se x^* é um atrator não trivial global de h, então ele é estável.*

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 3.1.6. □

Lema 3.1.8 ([18], Lema 2.8)**.** *Seja $h\colon I \to \bar{I}$ uma aplicação contínua e seja x^* um ponto fixo de h. Escreva $B = \bar{I} \setminus I$. Então x^* é um atrator global estável de h se, e somente se, existem uma sequência $(I_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ de subintervalos de I satisfazendo $I_n \supset I_{n+1}$ e $h(I_n) \subset I_{n+1} \cup B$ para todo n e $\cap_n I_n = \{x^*\}$, e uma sequência $(J_m)_{m=-\infty}^{0}$ de subintervalos de I satisfazendo $J_m \supset J_{m+1}$ e $h(J_m) \subset J_{m+1} \cup B$ para todo $m < 0$, $J_0 = \cup_n I_n$ e $I = \cup_m J_m$.*

Demonstração. Observe que a parte do "se" segue diretamente. Portanto, iremos provar apenas a recíproca.

Seja U uma vizinhança pequena de x^* em I. Como x^* é estável, $h^n(U)$ está bem definida para todo inteiro positivo n e o intervalo $\cup_{n=0}^{\infty} h^n(U)$ é também pequeno. Em particular, o intervalo compacto $K = \cup_{n=0}^{\infty} \bar{h}^n(U)$ está contido em I e satisfaz $h(K) \subset K$. Definindo $I_n = h^n(K)$ para todo $n \geqslant 0$, trivialmente obtemos $I_n \supset I_{n+1}$ e $h(I_n) = I_{n+1}$ para todo $n \geqslant 0$. Além disso, temos que $h(C) = C$ para o conjunto $C = \cap_{n=0}^{\infty} I_n$, de modo que o Lema 3.1.5 implica que $C = \{x^*\}$. Note que aqui estamos assumindo implicitamente que $h^n(K) \neq \{x^*\}$ para todo n. Se $h^n(K) = \{x^*\}$ para algum número minimal $n = n_0$, então os intervalos I_n, $n \geqslant n_0$, podem ser escolhidos como desejamos.

Agora definimos indutivamente os intervalos I_n, $n < 0$, de modo que I_{n-1} é o maximal intervalo J contendo I_n tal que $h(J) \subset I_n \cup B$. Seja $J_0 = \cup_n I_n$. Se $J_0 = I$, então definimos $J_m = J_0$ para todo m e terminamos.

Digamos, por exemplo, que existam pontos em I à direita de J_0. É suficiente mostrar que não existem pontos de I à esquerda de J_0, para os quais em tal caso definimos indutivamente J_{m-1} como o intervalo maximal J contendo J_m tal que $h(J) \subset J_m \cup B$ e obtemos facilmente que $I = \cup_m J_m$ (note que $h(x) < x$ para todo $x \notin J$ pelo Lema 3.1.4.

Seja d o extremo à direito de J_0. Então $h(d) \in \bar{J}_0$. Se $h(d)$ pertence ao interior de J_0, então também pertence ao interior de I_{-k} para todo k suficientemente grande. Além disso, se k é suficientemente grande e v é o extremo à direita de I_{-k}, então $h(\mathrm{conv}\{v, d\})$ está contido no interior de I_{-k}, que contradiz a definição de I_{-k-1}. Isto implica que $h(d)$ é o extremo à esquerda de J_0. Se $h(d) \in I$, então usando o argumento similar concluímos que $h(h(d)) = d$, que contradiz que x^* é o atrator global de h. Portanto, $h(d) \notin I$, ou seja, não existem pontos de I à esquerda de J_0, e assim terminamos a demonstração. □

Teorema 3.1.9 ([18], Teorema B)**.** *Assuma que $h\colon I \to \bar{I}$ tem um atrator global estável x^*. Seja $f\colon I \to \bar{I}$ uma aplicação contínua satisfazendo $x < f(x) \leqslant \max\{h(x), x^*\}$ (respectivamente, $x > f(x) \geqslant \min\{h(x), x^*\}$) para todo $x < x^*$ (respectivamente, $x > x^*$). Então x^* é um atrator global estável de f.*

Demonstração. Seja $B = \bar{I} \setminus I$. Vamos mostrar que se J, K são subintervalos de I com $J \supset K$ e $h(J) \subset K \cup B$ e $x \in J$, então $f^n(x) \in J \cup B$ para todo n (sempre que $f^n(x)$ está bem definida). Além disso, ou $f^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$, ou $f^n(x) \in K \cup B$ para todo n suficientemente grande. Aplicando este resultado aos pares de intervalos I_n, I_{n+1} e J_m, J_{m+1} do Lema 3.1.8, o teorema segue imediatamente.

Começamos a observar que, pelas hipóteses de f e h, x^* é o único ponto fixo de f e $x^* \in J$. Logo, $h(x^*) = x^* \in K$. Seja $x \in J$ e digamos, por exemplo, que $x < x^*$. Se $f^n(x) \leqslant x^*$ para todo n, então a sequência crescente $(f^n(x))$ converge para x^*. Em particular, $f^n(x) \in J$ para todo n. Agora assuma que $f^k(x) > x^*$ para um inteiro minimal k. Então $f^n(x) \in J$ para todo $0 \leqslant n \leqslant k-1$. Em particular, $f^{k-1}(x) \in J$ implica que $h(f^{k-1}(x)) \in K \cup B$. Por hipótese das funções f e h, temos $f^k(x) \leqslant h(f^{k-1}(x))$, de modo que $f^k(x) \in K \cup B \subset J \cup B$.

Em particular, $[x^*, f^k(x)] \subset K \cup B$. Se $f^k(x) \in B$, então terminamos. Caso contrário, argumentando de forma similar como antes, temos que ou $f^n(x) > x^*$ para todo $n \geqslant k$ e a sequência decrescente $(f^n(x))_{n=k}^{\infty}$ converge para x^* em K, ou existe um inteiro minimal $l > k$ tal que $f^l(x) < x^*$, quando $f^n(x) \in K$ para todo $k \leqslant n \leqslant l-1$. No último caso, obtemos $[f^l(x), x^*] \subset K \cup B$. Se $f^l(x) \in K$, então repetimos o argumento pra concluir que $f^n(x) \in K$ sempre que ele estiver bem definido e $n \geqslant 1$, concluindo a prova. □

Como consequência imediata, obtemos o resultado abaixo que pode ser também encontrado em [18].

Considere a seguinte derivada $Sf(x)$, a derivada Schwarziana de f, definida por

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

Corolário 3.1.10 ([18], Corolário 2.9). *Seja $f\colon I \to \bar{I}$ uma aplicação contínua tal que existe $x^* \in I$ tal que $(f(x) - x)(x - x^*) < 0$ para todo $x \neq x^*$. Assuma que existem pontos $a \leqslant c < x^* < d \leqslant b$ tais que $f|_{(c,d)}$ tem, no máximo, um ponto de inflexão e $f(x) \leqslant f(c)$ para todo $x \leqslant c$ e $f(x) \geqslant f(d)$ para todo $x \geqslant d$. Se f é decrescente em x^*, assuma também que $f|_{(c,d)}$ tem derivada Schwarziana negativa exceto em, no máximo, um ponto crítico de f e $-1 \leqslant f'(x^*) < 0$. Então x^* é um atrator global estável de f.*

Demonstração. Os casos em que f seja crescente em x^* ou x^* seja um ponto de inflexão seguem facilmente. Então podemos assumir que $-1 \leqslant f'(x^*) < 0$ e que $a < c < d < b$ e que f tem um máximo local em $e \in (a, x^*)$. Seja $h\colon \bar{I} \to \bar{I}$ definida por $h(x) = h(e)$ se $x \leqslant e$, $h(x) = h(d)$ se $x \geqslant d$ e $h(x) = f(x)$, caso contrário. De acordo com o Teorema

3.1.9, é suficiente mostrar que x^* é atrator global estável de h. Provamos isto mostrando que $|h^2(x) - x^*| < |x - x^*|$ para todo $x \neq q$.

Suponha o contrário. Então tome um ponto $e \leqslant u < x^*$ tal que $h^2(u) \leqslant u$. Como $-1 \leqslant h'(x^*) < 0$, obtemos que $h^2(x) > x$ para todo $x < x^*$ próximo suficiente de x^*. No caso em que $h'(x^*) = -1$, aplique o Princípio do Máximo para h^2 para obter que a derivada de uma aplicação com derivada Schwarziana negativa não pode ter um mínimo local positivo. Portanto, existe $u \leqslant u' < x^*$ tal que $h^2(u') = u'$. Claramente, podemos assumir que ambos u' e $v' = h(u)$ pertencem a $[e, d]$. Então $[u', v']$ é invariante por f e existem pontos $u' < u'' < x^* < v'' < v'$ tais que $(h^2)(u'') = (h^2)'(v'') = 1$. Como h^2 tem derivada Schwarziana negativa em (u', v') e $(h^2(x^*))' \leqslant 1$, isto contradiz o Princípio do Máximo.

$\square$

Capítulo

4

Atratividade global da versão autônoma da Equação de Nicholson

4.1 A versão autônoma da Equação de Nicholson

Neste capítulo, veremos os critérios para garantir a atratividade global do equilíbrio positivo $K = \frac{1}{a}\log(\frac{p}{\delta})$ da versão autônoma da equação abaixo:

$$x'(t) = \beta(t)(px(t-\tau(t))e^{-ax(t-\sigma(t))} - \delta x(t)) \tag{4.1}$$

dada por

$$x'(t) = -\delta x(t) + px(t-\tau)e^{-ax(t-\sigma)} \tag{4.2}$$

onde $a > 0$, $p > \delta > 0$, $\tau \geqslant \sigma \geqslant 0$ e $x\colon [-\tau, \omega) \to [0, \infty)$. Esta equação foi estudada por El-Morshedy e Ruiz-Herrera em [2]. Neste modelo, τ representa o período de incubação e σ o período de maturação.

Primeiramente, observe que, o equilíbrio positivo para a equação (4.2) é dado por $K = \frac{1}{a}\log(\frac{p}{\delta})$.

De fato, note que

$$-\delta x(t) + px(t-\tau)e^{-ax(t-\sigma)} = 0,$$

o que implica que

$$\frac{p}{\delta} = \frac{x(t)}{x(t-\tau)}e^{ax(t-\sigma)}.$$

Logo, aplicando o logaritmo, obtemos:

$$\log\left(\frac{p}{\delta}\right) = aK,$$

que implica que

$$\frac{1}{a}\log\left(\frac{p}{\delta}\right) = K.$$

Também note que $\frac{p}{\delta} = e^{aK}$.

Definição 4.1.1. *Uma **solução positiva** de* (4.2) *é uma função* $x\colon [-\tau,\omega) \to [0,\infty)$ *que satisfaz a equação* (4.2) *para todo* $t \in (0,\omega)$ *e* $x(t,\phi) = \phi(t)$ *para todo* $t \in [-\tau, 0]$ *com* $\phi \in C_0^+$*, onde* $C_0^+ := \{\phi \in C : \phi(\theta) \geqslant 0$ *em* $[-\tau,0), \phi(0) > 0\}$.

Vamos reescrever a equação (4.2) como

$$x'(t) = -\delta x(t) + pF(x(t-\sigma), x(t-\tau)). \tag{4.3}$$

Pela equação (4.3) obtemos a equação abaixo:

$$(e^{\delta t}x(t))' = pe^{\delta t}F(x(t-\sigma), x(t-\tau))$$

onde $F(x(t-\sigma), x(t-\tau)) = x(t-\tau)e^{-ax(t-\sigma)}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(e^{\delta t}x(t))' &= \delta e^{\delta t}x(t) + e^{\delta t}x'(t) \\
&= \delta e^{\delta t}x(t) + e^{\delta t}[-\delta x(t) + pF(x(t-\sigma), x(t-\tau))] \\
&= \delta e^{\delta t}x(t) - \delta e^{\delta t}x(t) + pe^{\delta t}F(x(t-\sigma), x(t-\tau)) \\
&= pe^{\delta t}F(x(t-\sigma), x(t-\tau)).
\end{aligned}$$

pela igualdade acima, inferimos as seguintes propriedades:

- $e^{\delta t}x(t)$ é não-decrescente, em particular:

$$x(t-\sigma) \geqslant e^{\delta(\sigma-\tau)}x(t-\tau) \tag{4.4}$$

para todo $t \in (0,\omega)$. De fato, como $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$, temos

$$\begin{aligned}
x(t-\sigma)e^{\delta(t-\sigma)} &\geqslant x(t-\tau)e^{\delta(t-\tau)} \\
x(t-\sigma) &\geqslant e^{\delta(t-\tau-t+\sigma)}x(t-\tau) \\
x(t-\sigma) &\geqslant e^{\delta(\sigma-\tau)}x(t-\tau)
\end{aligned}$$

- $x(t) > 0$, para todo $t \in (0, \omega)$, além disso

$$\liminf_{t \to \omega^-} x(t) > 0, \tag{4.5}$$

dado $\omega \in (0, \infty)$.

Agora vamos estabelecer as condições para garantir a atratividade global:

(A1) $F(x, y)$ é crescente na segunda variável.

(A2) Existe uma constante positiva M tal que $\alpha F(x, y) \leqslant y$, para todo $x \geqslant M$, $\alpha > 1$.

(A3) Existe uma constante positiva N tal que $\alpha F(x, y) \geqslant y$, para todo $x \leqslant N$, $\alpha > 1$.

Definição 4.1.2 ([2], Definição 2.1). *Seja $F\colon [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ uma função contínua que satisfaz $\alpha F(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ para algum ponto $\bar{x} \in (0, \infty)$. Dizemos que F é **controlável para o ponto $\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$** no conjunto$(\lambda, \Lambda)$ com $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant \infty$ se o sistema*

$$\begin{cases} L \geqslant \alpha F(S^*, L) \\ S \leqslant \alpha F(L^*, S) \end{cases}$$

para algum $\alpha \geqslant 1$, $L \leqslant S$ e $L^*, S^* \in [L, S]$, não admite soluções com $L, S \in (\lambda, \Lambda)$ diferentes de $S^* = L^* = S = L = \bar{x}$.

Observação 4.1.3. *Se F é controlável para o ponto $\bar{x}$ em (λ, Λ) então $\alpha F(x, x) = x$ não admite nenhuma solução em (λ, Λ) diferente de $\bar{x}$.*

Proposição 4.1.4. *Se as condições (A1), (A2) e (A3) estão satisfeitas, então qualquer solução positiva $x(t)$ da equação* (4.2) *é limitada e definida, para todo $t > 0$. Além disso,*

$$0 < \liminf_{t \to \infty} x(t).$$

Demonstração. Primeiramente, assumimos por contradição que existe uma solução positiva que não é limitada. Neste caso, podemos escolher uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendendo a $\omega \in (0, \infty]$ tal que:

i) $x(t_n) \to \infty$, quando $n \to \infty$;

ii) $x'(t_n) \geqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

iii) $x(t_n) = \max\{x(t) : t \in [0, t_n]\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ii) e pela expressão da equação (4.2), temos que

$$x'(t_n) = -\delta x(t_n) + pF(x(t_n - \sigma), x(t_n - \tau)) \geqslant 0,$$

o que implica que

$$\delta x(t_n) \leqslant pF(x(t_n - \sigma), x(t_n - \tau)). \tag{4.6}$$

Agora por iii) e (A1) temos que, como $x(t_n - \tau) \leqslant x(t_n)$, então

$$\delta x(t_n) \leqslant pF(x(t_n - \sigma), x(t_n)).$$

Segue de (A3) que existe $N > 0$ tal que

$$x(t_n - \sigma) \leqslant N, \tag{4.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. As expressões (4.7) e (4.4) implicam que

$$\begin{aligned} e^{\delta(\sigma-\tau)} x(t-\tau) &\leqslant x(t-\sigma) \leqslant N \\ x(t-\tau) &\leqslant Ne^{\delta(\tau-\sigma)}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora (4.7) e (4.8) implicam que existe uma constante positiva θ tal que

$$F(x(t_n - \sigma), x(t_n - \tau)) \leqslant \theta,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando (4.6), obtemos que $x(t_n)$ é limitada, o que contradiz i).

Até agora provamos que qualquer solução positiva $x(t)$ é limitada em $[0, \omega)$. Portanto, $x(t)$ é definida para todo $t > 0$ e $\limsup_{t\to\infty} x(t) < \infty$.

Agora, iremos provar que qualquer solução positiva de (4.2) satisfaz

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) > 0.$$

Suponha por contradição que existe uma solução positiva $x(t)$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Neste caso, podemos encontrar uma sequência $\{s_n\} \to \infty$ satisfazendo:

i') $x(s_n) \to 0$, quando $n \to \infty$;

ii') $x(s_n) = \min\{x(t) : t \in [0, s_n]\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

iii') $x'(s_n) \leqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por iii') e pela expressão da equação (4.2), temos que

$$\delta x(s_n) \geqslant pF(x(s_n - \sigma), x(s_n - \tau)) \geqslant pF(x(s_n - \sigma), x(s_n)).$$

Consequentemente, por (A2) temos que

$$x(s_n - \sigma) \geqslant M.$$

Lembrando que $e^{\delta t}x(t)$ é não-decrescente, obtemos

$$x(s_n) \geqslant e^{-\delta\sigma}x(s_n - \sigma) \geqslant Me^{-\delta\sigma},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.Isto contradiz i'). Portanto,

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) > 0,$$

para toda solução positiva de (4.2). □

Teorema 4.1.5. *Assumindo (A1), (A2) e (A3), se F é controlável para um ponto $\bar{x}$ no conjunto* $(0, \infty)$*, então $\bar{x}$ é um atrator global de* (4.2)*, ou seja,*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$$

para toda solução positiva de (4.2).

Demonstração. Suponha que exista uma solução positiva convergente, mas que não converge para $\bar{x}$. Observe que se $\lim_{t\to\infty} x(t) = \rho$ com $\rho \neq \bar{x}$, então ρ deve ser um equilíbrio da equação. Entretanto, como F é controlável para o ponto $\bar{x}$, $\bar{x}$ é o único equilíbrio positivo da equação e, portanto, $\lim_{t\to\infty} x(t = \bar{x})$ e terminamos neste caso.

Agora suponha que x não seja convergente, então usando a Proposição 4.1.4 existem duas constantes $L, S > 0$ satisfazendo

$$0 < L = \liminf_{t\to\infty} x(t) < \limsup_{t\to\infty} x(t) = S,$$

observe que aqui estamos assumindo que a solução positiva $x(t)$ não converge.

Agora, escolhemos duas sequências $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ tendendo a ∞ tais que

- $x'(s_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} x(s_n) = \liminf_{t\to\infty} x(t) = L$;
- $x'(t_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = \limsup_{t\to\infty} x(t) = S$.

Passando para subsequências, se necessário, podemos assumir que

$$x(s_n - \tau) \to L_\tau, x(s_n - \sigma) \to L_\sigma,$$

e

$$x(t_n - \tau) \to S_\tau, x(t_n - \sigma) \to S_\sigma,$$

com $L_\tau, L_\sigma, S_\tau, S_\sigma \in [L, S]$

Agora, usando a expressão da equação, temos que

$$\begin{cases} 0 = x'(t_n) = -\delta x(t_n) + pF(x(t_n - \sigma), x(t_n - \tau)) \\ 0 = x'(s_n) = -\delta x(s_n) + pF(x(s_n - \sigma), x(s_n - \tau)) \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$, temos

$$\begin{cases} \delta S = pF(S_\sigma, S_\tau) \\ \delta L = pF(L_\sigma, L_\tau). \end{cases}$$

Agora utilizando (A1) obtemos:

$$\begin{cases} \delta S \leqslant pF(S_\sigma, S) \\ \delta L \geqslant pF(L_\sigma, L). \end{cases} \tag{4.9}$$

Finalmente, como $p > \delta$ e F é uma função controlável para o ponto $\bar{x}$ em $(0, \infty)$, a única solução de (4.9) é $S_\sigma = L_\sigma = S = L = \bar{x}$. Isso é uma contradição, já que $L < S$. $\square$

Proposição 4.1.6. *O equilíbrio $K = \frac{1}{a}\log\left(\frac{p}{\delta}\right)$ de* (4.2) *é atrator um global de* (4.2).

Demonstração. Pela definição de controlável, se $\alpha F(K, K) = K$, dizemos que F é controlável para K se em $(0, \infty)$ o sistema

$$\begin{cases} L \geqslant \alpha F(S^*, L) \\ S \leqslant \alpha F(L^*, S) \end{cases}$$

tem solução única $L = L^* = S = S^* = K$

Temos que de fato $\alpha F(K, K) = K$, é só ver que

$$F(K, K) = Ke^{-aK} = K\frac{\delta}{p},$$

então

$$\frac{p}{\delta}F(K, K) = K$$

e como $\frac{p}{\delta} > 1$, obtemos que F satisfaz a hipótese da definição. Agora temos que mostrar que a solução do sistema é única, pra isso precisamos mostrar que a solução de

$$\begin{cases} L \geqslant \frac{p}{\delta}S^* e^{-aL} \\ S \leqslant \frac{p}{\delta}L^* e^{-aS} \end{cases}$$

é única e igual a K.

De fato,

$$\begin{cases} L \geqslant e^{aK}S^* e^{-aL} \\ S \leqslant e^{aK}L^* e^{-aS}, \end{cases}$$

como $L \leqslant S^*$ e $L^* \leqslant S$ obtemos

$$\begin{cases} L \geqslant e^{aK-aL}S^* \geqslant e^{aK-aL}L \\ S \leqslant e^{aK-aS}L^* \leqslant e^{aK-aS}S. \end{cases}$$

Por um lado

$$\begin{array}{rcl} 1 & \geqslant & e^{aK-aL} \\ e^{-aK} & \geqslant & e^{-aL} \\ -aK & \geqslant & -aL \\ K & \leqslant & L. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leqslant & e^{aK-aS} \\ e^{-aK} & \leqslant & e^{-aS} \\ -aK & \leqslant & -aS \\ K & \geqslant & S. \end{array}$$

Portanto, $L \geqslant K \geqslant S \geqslant L$, logo $L = K = S$. Como $L^*, S^* \in [L, S]$ obtemos $L = L^* = K = S^* = S$. Aplicando o Teorema 4.1.5 obtemos o resultado desejado. $\square$

Capítulo 5

Equação de Nicholson com múltiplos retardos dependentes do tempo

5.1 Unicidade do Equilíbrio Positivo

Neste capítulo, vamos apresentar os resultados para a permanência da equação:

$$x'(t) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j(t))e^{-a_j x(t-\sigma_j(t))} - \delta x(t)\right), t \geqslant t_0 \tag{5.1}$$

introduzida em [3], onde $p_j, a_j, \delta \in (0,\infty)$ e $\beta, \sigma_j, \tau_j \colon [t_0,\infty) \to (0,\infty)$ são contínuas, não negativas e limitadas, com β limitada por baixo por uma constante positiva. Mostraremos também que K é localmente exponencialmente estável para esta equação.

Além disso, obteremos os critérios de atratividade global do equilíbrio positivo da equação (4.1).

Lembrando que para a equação (5.1) a expressão do equilíbrio é definida pela identidade

$$\sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K} = \delta. \tag{5.2}$$

De fato,

$$x'(t) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j(t))e^{-a_j x(t-\sigma_j(t))} - \delta x(t)\right) = 0$$

$$\iff \sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j(t))e^{-a_j x(t-\sigma_j(t))} - \delta x(t) = 0$$

$$\iff \sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j(t))e^{-a_j x(t-\sigma_j(t))} = \delta x(t).$$

Se K é um equilíbrio, então a expressão acima implica (5.2).

Proposição 5.1.1. *Se $f(x) := \delta^{-1}\sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j x}$ é estritamente decrescente e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então existe único equilíbrio positivo K se, e somente se, $\sum_{j=1}^{m} p_j > \delta$.*

Demonstração. Suponha que $K > 0$, então

$$\delta = \sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K} < \sum_{j=1}^{m} p_j. \tag{5.3}$$

Agora assuma que K não é o único equilíbrio positivo, então existe $\bar{K} > 0$ tal que $f(\bar{K}) = \delta^{-1}\sum p_j e^{-a_j\bar{K}} = 1$, já que para um equilíbrio vale (5.2), mas sabemos que $f(K) = 1$ pelo mesmo motivo e que f é estritamente decrescente, então f é injetiva o que implica que $K = \bar{K}$, provando a unicidade de K quando $K > 0$.

Agora, suponha que $\sum p_j > \delta$, se $K < 0$, então

$$\delta = \sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K} > \sum_{j=1}^{m} p_j$$

um absurdo, portanto $K > 0$ é o único equilíbrio positivo de (6). □

5.2 Permanência e Estabilidade Local

Nesta seção, vamos investigar a permanência e a estabilidade local. Para isto, vamos considerar que:

$p_j, a_j, \delta \in (0,\infty), \beta, \sigma_j, \tau_j : [t_0,\infty) \to [0,\infty)$ são funções contínuas e limitadas para $(1 \leqslant j \leqslant m)$ com

$$0 < \beta^- := \inf_{t\geqslant t_0} \beta(t) \leqslant \beta(t) \leqslant \sup_{t\geqslant t_0} \beta(t) =: \beta^+. \tag{5.4}$$

Denotaremos por:

$$p = \sum_{j=1}^{m} p_j \tag{5.5}$$

$$a^+ = \max_j a_j \tag{5.6}$$
$$a^- = \min_j a_j. \tag{5.7}$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $p > \delta$ e seja $K > 0$ o equilíbrio positivo dado por

$$\delta = \sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K}.$$

Defina $\tau = \max\{\sup_{t\geqslant t_0} \tau_j, \sigma_j : j = 1, ..., m\}$. Para a equação (5.1), iremos utilizar o espaço $C := C([-\tau, 0]; \mathbb{R})$ equipado com a norma do supremo $\|\phi\| = \sup_{\theta\in[-\tau,0]} |\phi(\theta)|$ como espaço de fase, que será importante para os nossos propósitos.

Como estamos interessados apenas em soluções não-negativas, vamos considerar $C_0^+ := \{\phi \in C : \phi(\theta) \geqslant 0 \text{ em } [-\tau, 0), \phi(0) > 0\}$ como o conjunto das condições iniciais admissíveis. Para $t \geqslant t_0$, denotamos x_t como um elemento em C dado por $x_t(\theta) = x(t + \theta), -\tau \leqslant \theta \leqslant 0$.

Denotamos a solução de (5.1) com condição inicial

$$x_{t_0} = \phi \in C_0^+ \tag{5.8}$$

por $x_t(t_0, \phi)$ ou $x(t; t_0, \phi)$ definida num intervalo maximal $[t_0, \eta(\phi)]$.

Vamos escrever (5.1) de forma abstrata:

$$x'(t) = F(t, x_t), t \geqslant t_0,$$

onde

$$F(t, \phi) = \beta(t) \left(\sum_{j=1}^{m} p_j \phi(-\tau_j(t)) e^{-a_j \phi(-\sigma_j(t))} - \delta\phi(0) \right), t \geqslant t_0,\ \phi \in C_0^+ \tag{5.9}$$

Proposição 5.2.1. *Para $t \geqslant t_0$, $\phi \in C_0^+$, $F(t, \phi) \geqslant 0$ se $\phi(0) = 0$ e $F(t, \phi) \leqslant g(t, \phi)$, onde a função $g(t, \phi) := \beta(t) \left(\sum_{j=1}^{m} p_j \phi(-\tau_j(t)) - \delta\phi(0) \right)$ satisfaz a propriedade de quasi-monotonicidade.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $F(t, \phi) \geqslant 0$ se $\phi(0) = 0$. De fato, por (5.9), temos:

$$F(t, \phi) \quad = \quad \beta(t) \left(\sum_{j=1}^{m} p_j \phi(-\tau_j(t)) e^{-a_j \phi(-\sigma_j(t))} - \delta\phi(0) \right)$$

$$= \beta(t)\sum_{j=1}^{m} p_j\phi(-\tau_j(t))e^{-a_j\phi(-\sigma_j(t))} \geqslant 0$$

já que $\beta(t) > 0$, $\sum_{j=1}^{m} p_j > 0$, $\phi(-\tau_j(t)) \geqslant 0$ e $e^{-a_j\phi(-\sigma_j(t))} > 0$.

Por outro lado, note que $F(t,\phi) \leqslant g(t,\phi)$. De fato,

$$\begin{aligned} F(t,\phi) &= \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j\phi(-\tau_j(t))e^{-a_j\phi(-\sigma_j(t))} - \delta\phi(0)\right) \\ &\leqslant \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j\phi(-\tau_j(t)) - \delta\phi(0)\right) = g(t,\phi), \end{aligned}$$

pois $e^{-a_j\phi(-\sigma_j(t))} \leqslant 1$, $\sum_{j=1}^{m} p_j\phi(-\tau_j(t)) > 0$ e $\beta(t) > 0$.

E por fim, mostraremos que $g(t,\phi)$ satisfaz a propriedade de quasi-monotonicidade. Para isso, suponha $\phi \leqslant \psi$ e $\phi(0) = \psi(0)$. Temos que

$$g(t,\phi) - g(t,\psi) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j(\phi(-\tau_j(t)) - \psi(-\tau_j(t))) - \delta(\phi(0) - \psi(0))\right),$$

o que implica que:

$$g(t,\phi) - g(t,\psi) \leqslant 0,$$

já que $\phi(-\tau_j(t)) - \psi(-\tau_j(t)) \leqslant 0$, por hipótese. Logo,

$$g(t,\phi) \leqslant g(t,\psi),$$

provando a quasi-monotonicidade. □

Proposição 5.2.2. *As soluções de* (5.1) *com condições iniciais* (5.8) *são definidas e positivas.*

Demonstração. Para demonstrar essa proposição, vamos utilizar o Teorema 1.1.23.

Vamos tomar $f(t,\phi) \equiv 0$ e $g(t,\phi) = F(t,\phi)$. Sabemos que ambas são contínuas, agora note que ambas são Lipschitz.

De fato, utilizando a definição de condição Lipschitz 1.1.10, então $f(t,\phi) \equiv 0$ é claramente Lipschitz, pois $0 \leqslant \|\phi - \psi\|$. Por outro lado, $g(t,\phi) = F(t,\phi)$ é também Lipschitz, pois:

$$|F(t,\phi) - F(t,\psi)| = \left|\beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j\phi(-\tau_j(t))e^{-a_j\phi(-\sigma_j(t))} - \delta\phi(0)\right)\right.$$

$$-\beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j\psi(-\tau_j(t))e^{-a_j\psi(-\sigma_j(t))} - \delta\psi(0)\right)\Bigg|$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \left|\beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j[\phi(-\tau_j(t)) - \psi(-\tau_j(t))] - \delta[\phi(0)-\psi(0)]\right)\right| \\
&\leqslant \beta(t)\left|\left(\sum_{j=1}^{m} p_j|\phi(-\tau_j(t)) - \psi(-\tau_j(t))| - \delta|\phi(0)-\psi(0)|\right)\right| \\
&\leqslant \beta(t)\left|\left(\sum_{j=1}^{m} p_j\|\phi-\psi\| - \delta\|\phi-\psi\|\right)\right| = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j - \delta\right)\|\phi-\psi\|.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo do lado esquerdo, obtemos o resultado desejado. Além disso, $f(t,\phi)\equiv 0$ satisfaz a propriedade de quasi-monotonicidade, já que se $\phi\leqslant\psi$ e $\phi(0)=\psi(0)$ então $f(t,\phi)\leqslant f(t,\psi)$.

Pelo Teorema 1.1.23, como $0\leqslant F(t,\phi)$ e $0\leqslant\phi$, com $(t_0,0),(t_0,\phi)\in D$, onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}\times C$, então

$$0 = x(t,t_0,0,0)\leqslant x(t,t_0,\phi,F)$$

para todo $t\geqslant t_0$, onde $x(t,t_0,\phi,F)$ é a solução de (5.1). Portanto todas as soluções são definidas e positivas. □

O próximo resultado nos fornece condições suficientes para garantir a permanência de (5.1).

Teorema 5.2.3 ([4], Teorema 2.1)**.** *Se $p>\delta$, então* (5.1) *é permanente. Além disso*

$$Ke^{-2\delta\beta^+}\leqslant\liminf_{t\to\infty} x(t)\leqslant\limsup_{t\to\infty} x(t)\leqslant Ke^{2(\delta+p)\beta^+\tau} \tag{5.10}$$

para toda solução $x(t)$ de (5.1) *com condição inicial em C_0^+.*

Demonstração. A fim de utilizar o Teorema 2.1.1, vamos reescrever (5.1) como

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} f_j(t, x(t-\tau_j(t)), x(\sigma_j(t))) - w(t,x(t))$$

onde $f_j(t,u,v)=\beta(t)p_jue^{-a_jv}$ e $w(t,u)=\delta\beta(t)u$. As funções f_j são monótonas crescentes em u e monótonas decrescentes em v. De fato, note que

$$\frac{\partial f_j}{\partial u} = \beta(t) p_j e^{-a_j v} > 0$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial v} = \beta(t) p_j e^{-a_j v}(-a_j) < 0,$$

pois β é uma função positiva, $p_j, a_j > 0$ e u, v são funções positivas.

Além disso, note que

$$\sum_j f_j(t, u_j, v_j) = \beta(t) \sum_j p_j u_j e^{-a_j v_j} \leqslant \beta^+ \sum_j p_j \bar{u} = A\bar{u}$$

onde $\bar{u} := \sup_{i \leqslant j \leqslant m}\{u_j\}$ e $A := \beta^+ p > 0$. Também note que como

$$w(t, u) = \delta \beta(t) u$$

logo,

$$Bu \leqslant w(t, u) \leqslant Cu,$$

onde $B := \delta\beta^-$ e $C := \delta\beta^+$, pois claramente

$$\inf_{t \geqslant t_0} \beta(t) \leqslant \beta(t) \leqslant \sup_{t \geqslant t_0} \beta(t).$$

Seja $M > 0$. Então existe $L = L(M)$ tal que

$$L = L(M) := \limsup_{t \to \infty} \frac{\sum_j f_j(t, u, M)}{w(t, u)} = \limsup_{t \to \infty} \frac{\beta(t) \sum_j p_j u e^{-a_j M}}{\delta \beta(t) u} = \frac{\sum_j p_j e^{-a_j M}}{\delta}.$$

Note que $L < 1$ sempre que $M > K$. De fato, basta lembrar que $\sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K} = \delta$. Pelo Teorema 2.1.1, temos que

$$\limsup_{t \to \infty} x(t) \leqslant M e^{2(\delta + p)\beta^+ \tau}$$

que nos dá que (5.1) é dissipativa. Analogamente, para $\mu > 0$, temos:

$$l = l(\mu) := \liminf_{t \to \infty} \frac{\sum_j f_j(t, u, \mu)}{w(t, u)} = \frac{\sum_j p_j e^{-a_j \mu}}{\delta}.$$

Portanto, $l > 1$ se $\mu < K$. Do Teorema 2.1.1, para $\mu < K$, obtemos:

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) \geq \mu e^{-2\delta\beta^+\tau},$$

logo (5.1) é dissipativa. Combinando estes resultados e tomando $M = K + \varepsilon$ e $\mu = K - \varepsilon$, o resultado segue fazendo $\varepsilon \to 0^+$. □

Agora vamos estudar a estabilidade local do equilíbrio positivo K. Tomando $u(t) = x(t) - K$, vamos obter a equação linearizada sobre K:

Vamos tomar $u'(t) = f(u(t), u(t-\tau_j(t)), u(t-\sigma_j(t)))$. Como K é o equilíbrio de (5.1), o equilíbrio de $u'(t)$ é 0 e vamos utilizar a linearização dada por:

$$u'(t) = f_{u(t)}(0,0,0)u(t) + f_{u(t-\tau_j(t))}(0,0,0)u(t-\tau_j(t)) + f_{u(t-\sigma_j(t))}(0,0,0)u(t-\sigma_j(t)),$$

então

$$x'(t) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j x(t-\tau_j(t)) e^{-a_j x(t-\sigma_j(t))} - \delta x(t)\right)$$

$$u'(t) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j [u(t-\tau_j(t)) + K] e^{-a_j[u(t-\sigma_j(t))+K]} - \delta[u(t)+K]\right),$$

aplicando a linearização obtemos:

$$u'(t) = (-\delta\beta(t))u(t) + \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K} u(t-\tau_j(t))\right) - \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j K a_j e^{-a_j K} u(t-\sigma(t))\right)$$

o que implica que

$$u'(t) = \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j K}[u(t-\tau_j(t)) - a_j K u(t-\sigma(t))] - \delta u(t)\right). \tag{5.11}$$

O próximo resultado nos fornece condições suficientes para garantir que o equilíbrio seja localmente exponencialmente estável.

Teorema 5.2.4 ([4], Teorema 2.2). *Se $p > \delta$ e*

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j p_j e^{-a_j K} \int_{t-\sigma(t)}^{t} \beta(s)ds < \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j p_j e^{-a_j K}}{2\delta + K\sum_{j=1}^{m} a_j p_j e^{-a_j K}} \tag{5.12}$$

então K é localmente exponencialmente estável para (5.1).

Demonstração. Começaremos reescrevendo a equação (5.11) como

$$u'(t) + \sum_{j=0}^{2m} b_j(t)u(r_j(t)) = 0,$$

onde $b_j(t) = B_j\beta(t)$,

$$B_j = \begin{cases} \delta, \;\; j = 0, \\ -p_j e^{a_j K}, \;\; j = 1, \ldots, m, \\ a_j K p_j e^{-a_j K}, \;\; j = m+1, \ldots, 2m. \end{cases}$$

e

$$r_j(t) = \begin{cases} t, \;\; j = 0, \\ t - \tau_j(t), \;\; j = 1, \ldots, m, \\ t - \sigma_j(t), \;\; j = m+1, \ldots, 2m. \end{cases}$$

para todo $j = 0, \ldots, 2m$ e $\beta(t) \geq \beta^- > 0$. Note que estamos com todas as condições do Corolário 2.2.11 satisfeitas.

Seja $I = \{0, m+1, \ldots, 2m\}$ e $J = \{1, \ldots, m\}$. Então

$$\sum_{j \in I} B_j = \delta + K \sum_{j=1}^{m} a_j p_j e^{a_j K} > 0 \text{ e } \sum_{j \in J} B_j = -\delta.$$

Pelo Corolário 2.2.11, temos que (5.11) tem estabilidade exponencial se

$$\limsup_{t \to +\infty} \sum_{j \in I} |B_j| \int_{r_j(t)}^{t} \beta(s)ds < \frac{\sum_{j \in I} B_j - \sum_{j \in J} |B_j|}{\sum_{j=0}^{2m} |B_j|}.$$

Portanto, (5.11) é exponencialmente estável se (5.12) acontece. Aplicando o Princípio da Estabilidade Linearizada, obtemos o resultado desejado. □

Como consequência imediata, obtemos os corolários abaixo.

Corolário 5.2.5 ([4], Corolário 2.1)**.** *Seja $p > \delta$ e defina*

$$\xi_M := \max_{1 \leq j \leq m} \limsup_{j \to \infty} \int_{t-\sigma_j(t)}^{t} \beta(s)ds. \tag{5.13}$$

Se

$$\xi_M < \frac{1}{2\delta + K(\sum_j p_j a_j e^{-a_j K}},$$

então K é localmente exponencialmente estável para (5.1). *Em particular, isso acontece se*

$$\xi_M < \frac{1}{\delta(2 + a^+ K)}. \tag{5.14}$$

Corolário 5.2.6 ([4], Corolário 2.2)**.** *Se $p > \delta$ e*

$$\xi_M := \limsup_{t\to\infty} \int_{t-\sigma(t)}^{t} \beta(s)ds < \frac{1}{\delta(2 + \log(p/\delta))}, \tag{5.15}$$

então K é localmente exponencialmente estável para (4.1).

5.3 Atratividade Global do Equilíbrio Positivo

Nosso objetivo aqui é estabelecer condições para a atratividade global do equilíbrio positivo K.

Como em [2], vamos usar resultados de atratividade global para equações diferença da forma

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}_0 \tag{5.16}$$

onde $f : I \to I$ é uma função contínua no intervalo real I e o valor inicial $x_0 \in I$.

Lema 5.3.1. *Seja $f\colon I \to I$ uma função contínua no intervalo real $I = [a, b]$, ($a < b$, com $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \infty$) com um único ponto fixo $x^* \in (a, b)$ e tal que*

$$(f(x) - x)(x - x^*) < 0 \text{ para todo } x \in (a, b), x \neq x^*,$$

então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) Se x^* é um atrator global para (5.16)*, então não existem pontos $c, d \in I$ com $c < d$ e $f([c, d]) \supset [c, d]$.*

(b) Se f é uma função C^3, decrescente em I e tal que

1. *$Sf(x) < 0$, para $x \in I$, onde $Sf(x)$ é a derivada Schwarziana de f, definida por*

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2,$$

2. *$-1 \leqslant f'(x^*) < 0$,*

então x^* é um atrator global para (5.16).

O próximo resultado será crucial para que possamos demonstrar o nosso resultado principal desta seção. Para isso, iremos considerar as seguintes condições:

(M_1) $(F(x,y)-y)(x-\bar{x})<0$ para todo $(x,y)\in(0,\infty)^2$ com $x\neq\bar{x}$.

(M_2) $F(x,y)$ é crescente na segunda variável.

Teorema 5.3.2 ([2], Teorema 3.1)**.** *Considere que a equação*

$$x'(t)=-\delta x(t)+pF(x(t-\sigma),x(t-\tau)) \tag{5.17}$$

tenha um único equilíbrio positivo $\bar{x}>0$. Se (M_1) e (M_2) estão satisfeitas e

$$\widetilde{F}_\sigma(x,y)=e^{-\delta\sigma}\bar{x}+(1-e^{-\delta\sigma}F(x,y))$$

é controlável (ver 4.1.2) para o ponto $\bar{x}$ em $(0,\infty)$, então $\lim_{t\to\infty}x(t)=\bar{x}$ para toda solução positiva de (5.17).

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma solução positiva $x(t)$ que não converge para $\bar{x}$ quando $t\to\infty$. Usando a Proposição 4.1.4 e a unicidade do equilíbrio positivo, concluímos que $x(t)$ é necessariamente uma solução oscilatória. Ou seja, existem duas constantes $0<L<S$ satisfazendo

$$L=\liminf_{t\to\infty}x(t)<\limsup_{t\to\infty}x(t)=S,$$

observe que aqui estamos assumindo que a solução positiva $x(t)$ não converge.

Escolhendo duas sequências $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ tendendo a ∞ tais que

- $x'(s_n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty}x(s_n)=\liminf_{t\to\infty}x(t)=L$;
- $x'(t_n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty}x(t_n)=\limsup_{t\to\infty}x(t)=S$.

Passando para subsequências, se necessário, existem constantes $L_\sigma,L_\tau,S_\sigma,S_\tau\in[L,S]$ tais que $x(s_n-\tau)\to L_\tau, x(s_n-\sigma)\to L_\sigma, x(t_n-\tau)\to S_\tau, x(t_n-\sigma)\to S_\sigma$.

Agora, usando a expressão da equação, temos que

$$\begin{cases}0=x'(t_n)=-\delta x(t_n)+pF(x(t_n-\sigma),x(t_n-\tau))\\ 0=x'(s_n)=-\delta x(s_n)+pF(x(s_n-\sigma),x(s_n-\tau))\end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$, temos

$$\begin{cases} \delta S = pF(S_\sigma, S_\tau) \\ \delta L = pF(L_\sigma, L_\tau). \end{cases}$$

Agora utilizando que F é decrescente na segunda variável, obtemos:

$$\begin{cases} \delta S \leqslant pF(S_\sigma, S) \\ \delta L \geqslant pF(L_\sigma, L). \end{cases} \tag{5.18}$$

Por (M_1), temos que $S_\sigma \leqslant \bar{x} \leqslant L_\sigma$. Note que se, por exemplo, $S_\sigma > \bar{x}$, devemos ter $(F(S_\sigma, S) - S)(S_\sigma - \bar{x}) \geqslant 0$, uma contradição pela hipótese (M_1).

Por outro lado, pela expressão da equação, obtemos que

$$x(t) = e^{-\delta\sigma} x(t-\sigma) + p\int_{t-\sigma}^{t} e^{\delta(s-t)} F(x(s-\sigma), x(s-\tau))ds. \tag{5.19}$$

Agora, fixamos $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(t) \in [L-\epsilon, S+\epsilon]$ para todo $t \geqslant t_n - 2\sigma$ com $n \geqslant n_0$. Então

$$\begin{aligned} x(t_n) &= e^{-\delta\sigma} x(t_n - \sigma) + p\int_{t_n-\sigma}^{t_n} e^{\delta(s-t_n)} F(x(s-\sigma), x(s-\tau))ds \\ &\leqslant e^{-\delta\sigma} x(t_n - \sigma) + p\int_{t_n-\sigma}^{t_n} e^{\delta(s-t_n)} F(x(s-\sigma), S+\epsilon)ds. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$x(t_n) \leqslant e^{-\delta\sigma} S_\sigma + (1 - e^{-\delta\sigma}) F(\widetilde{L_n}(\epsilon), S+\epsilon)$$

com $L - \epsilon \leqslant \widetilde{L_n}(\epsilon) \leqslant S + \epsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Passando para subsequências, se necessário, podemos assumir que $\widetilde{L_n}(\epsilon) \to \widetilde{L}(\epsilon)$ quando $n \to \infty$. Além disso, para cada $\epsilon > 0$, obtemos

$$S \leqslant e^{-\delta\sigma} S_\sigma + (1 - e^{-\delta\sigma}) F(\tilde{L}(\epsilon), S+\epsilon) \tag{5.20}$$

com $\widetilde{L}(\epsilon) \in [L-\epsilon, S+\epsilon]$. Coletando todas as informações e usando que $S_\sigma \leqslant \bar{x}$, obtemos que

$$S \leqslant e^{-\delta\sigma} S_\sigma + (1 - e^{-\delta\sigma}) F(\widetilde{L}, S) \tag{5.21}$$

para algum $\widetilde{L} \in [L, S]$. De modo análogo, trabalhando com a sequência $\{s_n\}$, chegamos em

$$L \geqslant e^{-\delta\sigma}\bar{x} + (1 - e^{-\delta\sigma})F(\widetilde{S}, L) \tag{5.22}$$

para algum $\widetilde{S} \in [L, S]$. Como $\widetilde{F}_\sigma$ é controlável, $\widetilde{L} = \widetilde{S} = L = S = \bar{x}$. Isto é uma contradição, pois $L < S$. □

Agora temos o necessário para mostrar o principal resultado sobre a atratividade global do equilíbrio K. Como vimos, a expressão do equilíbrio K não pode ser escrita explicitamente para o caso das equações com múltiplos pares de retardo, por isso, mostraremos apenas o caso de um par de retardos, e o outro caso é uma generalização deste.

Considere abaixo o caso de um par de retardos:

Teorema 5.3.3 ([4], Teorema 3.1)**.** *Considere $p > \delta$, denote $\xi_M := \limsup_{t\to\infty} \int_{t-\sigma(t)}^{t} \beta(s)ds$ como em* (5.15) *e assuma*
(h_1) $(e^{\delta\xi_M} - 1)\log\frac{p}{\delta} \leqslant 1$.

Então o equilíbrio K de

$$x'(t) = \beta(t)(px(t-\tau(t))e^{-ax(t-\sigma(t))} - \delta x(t)) \tag{5.23}$$

é globalmente atrativo (em C_0^+).

Demonstração. Considere qualquer solução de (5.23) com condição inicial em C_0^+. Precisamos mostrar que existe $\lim_{t\to\infty} x(t) = K$. Pela permanência no Teorema 5.2.3, existem

$$l := \liminf_{t\to\infty} x(t) \text{ e } \limsup_{t\to\infty} x(t) =: L, \tag{5.24}$$

com $0 < l \leqslant L$.

Caso 1: Suponha que $l = L$, isto é, existe $\lim_{t\to\infty} x(t) = C > 0$.

De (5.23), podemos escrever $x'(t) = \beta(t)g(x_t)$, onde $\lim_{t\to\infty} g(x_t) = \delta C(f(C) - 1)$ e

$$f(x) := \frac{p}{\delta}e^{-ax},\ x \geqslant 0.$$

Seja $\eta = f(C) - 1$. Se $0 < C < K$, então para t suficientemente grande, temos $x'(t) \geqslant \beta^{-}\delta C\frac{\eta}{2} > 0$. Então $x(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, o que é uma contradição. De modo similar, $\eta < 0$ se $C > K$, e nesse caso $x(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, o que não é possível. Portanto $C = K$.

Caso 2: Suponha que exista solução $x(t)$ com $l < L$ em (5.24).

Vamos dividir a demonstração deste caso em vários passos. Para simplificar a exposição, vamos supor que existe

$$\xi := \lim_{t\to\infty} \int_{t-\sigma(t)}^{t} \beta(s)ds, \tag{5.25}$$

deixando a situação geral, onde ξ é substituído por ξ_M, para o último passo da demostração. Neste caso, (h_1) será dado por

$$(e^{\delta\xi} - 1)\log\frac{p}{\delta} \leqslant 1. \tag{5.26}$$

Passo 1: Como na demonstração do Teorema 5.3.2, considere sequências $(t_n), (s_n)$, tais que $t_n, s_n \to \infty$ e $x'(t_n) = x'(s_n) = 0$, $x(t_n) \to L$, $x(s_n) \to l$. Passando para subsequências, se necessário, existem $l_\tau, l_\sigma, L_\tau, L_\sigma \in [l, L]$ tais que

$$\begin{aligned} x(t_n - \tau(t_n)) \to L_\tau \quad &, \quad x(t_n - \sigma(t_n)) \to L_\sigma, \\ x(s_n - \tau(s_n)) \to l_\tau \quad &, \quad x(s_n - \sigma(s_n)) \to l_\sigma \end{aligned} \tag{5.27}$$

quando $n \to \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \beta(t_n) > 0$, $\lim_{n\to\infty} \beta(s_n) > 0$. De (5.23), segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(t_n)(px(t_n - \tau(t_n))e^{-ax(t_n-\sigma(t_n))} - \delta x(t_n)), \\ 0 &= \beta(s_n)(px(s_n - \tau(s_n))e^{-ax(s_n-\sigma(s_n))} - \delta x(s_n)). \end{aligned}$$

Usando os limites em (5.27), temos que $0 = pL_\tau e^{-aL_\sigma} - \delta L$, $0 = pl_\tau e^{-al_\sigma} - \delta l$, então

$$L = \frac{p}{\delta} L_\tau e^{-aL_\sigma} \text{ e } l = \frac{p}{\delta} l_\tau e^{-al_\sigma}. \tag{5.28}$$

Como $L_\tau \leqslant L$ e $l_\tau \geqslant l$, temos $L \leqslant \frac{p}{\delta} L e^{-aL_\sigma}$ e $l \geqslant \frac{p}{\delta} l e^{-al_\sigma}$. Além disso,

$$\left(\frac{p}{\delta} x e^{-ax} - x\right)(x - K) < 0,\ x > 0,\ x \neq K,$$

que combinado com as desigualdades acima nos dá

$$L_\sigma \leqslant K \leqslant l_\sigma. \tag{5.29}$$

Multiplicando a equação por $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \delta\beta(v)dv}$ e integrando sobre $[t-\sigma(t), t]$, obtemos

$$x(t) = x(t-\sigma(t))e^{-\int_{t-\sigma(t)}^{t} \delta\beta(v)dv} + \int_{t-\sigma(t)}^{t} p\beta(s)x(s-\tau(s))e^{-ax(s-\sigma(s))}e^{\int_{t}^{s} \delta\beta(v)dv}ds.$$

Seja $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(t) \in [l-\epsilon, L+\epsilon]$ para $t \geqslant t_n - 2\tau$ e $x(t_n - \sigma(t_n)) \leqslant L_\sigma + \epsilon$, para todo $n \geqslant n_0$. Da equação anterior, segue que

$$\begin{aligned} x(t_n) &= x(t_n-\sigma(t_n))e^{-\int_{t_n-\sigma(t_n)}^{t_n} \delta\beta(v)dv} + \int_{t_n-\sigma(t_n)}^{t_n} p\beta(s)x(s-\tau(s))e^{-ax(s-\sigma(s))}e^{\int_{t_n}^{s} \delta\beta(v)dv}ds \\ &\leqslant (L_\sigma+\epsilon)e^{-\int_{t_n-\sigma(t_n)}^{t_n} \delta\beta(v)dv} + \int_{t_n-\sigma(t_n)}^{t_n} p\beta(s)(L+\epsilon)e^{-ax(s-\sigma(s))}e^{\int_{t_n}^{s} \delta\beta(v)dv}ds. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio para integrais, existe $\widetilde{l_n}(\epsilon) \in [l-\epsilon, L+\epsilon]$ tal que

$$x(t_n) \leqslant (L_\sigma+\epsilon)e^{-\int_{t_n-\sigma(t_n)}^{t_n} \delta\beta(v)dv} + \frac{p}{\delta}(L+\epsilon)e^{-a\widetilde{l_n}(\epsilon)}\left(1-e^{-\int_{t_n-\sigma(t_n)}^{t_n} \delta\beta(v)dv}\right).$$

Tomando subsequências, se necessário, podemos supor que $\widetilde{l_n}(\epsilon) \to \widetilde{l}(\epsilon)$ quando $n \to \infty$. Tomando os limites e usando (5.25), obtemos

$$L \leqslant e^{-\delta\xi}(L_\sigma+\epsilon) + \frac{p}{\delta}(L+\epsilon)e^{-a\widetilde{l}(\epsilon)}(1-e^{-\delta\xi}).$$

Novamente, podemos supor que $\widetilde{l}(\epsilon) \to \widetilde{l}$ quando $\epsilon \to 0$ e passando o limite segue que

$$L \leqslant e^{-\delta\xi}L_\sigma + \frac{p}{\delta}Le^{-a\widetilde{l}}(1-e^{-\delta\xi}) \leqslant e^{-\delta\xi}K + \frac{p}{\delta}Le^{-a\widetilde{l}}(1-e^{-\delta\xi}). \tag{5.30}$$

Analogamente, utilizando a sequência (s_n) mostramos que

$$l \geqslant e^{-\delta\xi}l_\sigma + \frac{p}{\delta}le^{-a\widetilde{L}}(1-e^{-\delta\xi}) \geqslant e^{-\delta\xi}K + \frac{p}{\delta}le^{-a\widetilde{L}}(1-e^{-\delta\xi}), \tag{5.31}$$

onde $\widetilde{L}, \widetilde{l} \in [l, L]$.

Passo 2: Afirmamos que $\xi > 0$ e $l < K < L$.

Primeiramente, observe que, se $\xi = 0$, (5.29)–(5.31) implica

$$L \leqslant L_\sigma \leqslant K \leqslant l_\sigma \leqslant l,$$

então $l = L$, o que contradiz o que assumimos, pois estamos no caso 2 em que $l < L$. Agora, mostraremos que $\widetilde{l} < K < \widetilde{L}$.

Se $\widetilde{l} > K$, então $\frac{p}{\delta}e^{-al} < 1$ e de (5.30) temos $L < e^{-\delta\xi}K + L(1-e^{-\delta\xi}) \leqslant L$, o que não é possível. Então $l \leqslant \widetilde{l} \leqslant K$. Analogamente, de (5.31) deduzimos que $K \leqslant \widetilde{L} \leqslant L$.

Se $\widetilde{l} = K$, novamente de (5.30) obtemos

$$L \leqslant e^{-\delta\xi}K + L(1-e^{-\delta\xi}) \leqslant L,$$

então $L = \widetilde{L} = K$. Juntando isto com (5.31) obtemos

$$l \geqslant e^{-\delta\xi}K + l(1-e^{-\delta\xi}) \geqslant l,$$

então $l = K$, o que contradiz $l < L$. isto mostra que $\widetilde{l} < K$. Similarmente mostramos que $\widetilde{L} > K$. Então

$$l \leqslant \tilde{l} < K < \widetilde{L} \leqslant L.$$

Passo 3: Dos passos 1 e 2, observe que $l > e^{-\delta\xi}K =: \theta$. Agora, seja $f(x) := \frac{p}{\delta}e^{-ax}$ e $\mu := 1 - e^{-\delta\xi} = 1 - \frac{\theta}{K}$. Mostraremos que (h_1) implica

$$f(x) < \frac{1}{\mu},\ x \geqslant \theta. \tag{5.32}$$

Como f é decrescente, (5.32) é verdade se $f(\theta) < \mu^{-1}$, o que é equivalente a

$$\theta > \frac{1}{a}\log\frac{p}{\delta} + \frac{1}{a}\log(1-e^{-\delta\xi} =: \theta_1. \tag{5.33}$$

Inserindo a identidade $\theta = \frac{1}{a}\log\frac{p}{\delta}e^{-\delta\xi}$ em (5.33), temos $\theta > \theta_1$ se, e somente se,

$$(1-e^{-\delta\xi})\log\frac{p}{\delta} + \log(1-e^{-\delta\xi}) < 0. \tag{5.34}$$

Como $x + \log(1-x) < 0$ para todo $x \in (0,1)$, de (5.26) concluímos que

$$(1-e^{-\delta\xi})\log\frac{p}{\delta} + \log(1-e^{-\delta\xi}) \leqslant e^{-\delta\xi} + \log(1-e^{-\delta\xi}) < 0,$$

então vale (5.32). Portanto, a função

$$h(x) := \frac{\theta}{1-\mu f(x)} \tag{5.35}$$

está bem definida em $I := [\theta, \infty)$. Note que $h(K) = K$ e $(h(x) - K)(x - K) < 0$ para

$x \geqslant \theta$, $x \neq K$. De (5.30) e (5.31), segue que

$$L \leqslant h(\tilde{l}) \leqslant h(l) \tag{5.36}$$

$$l \geqslant h(\tilde{L}) \geqslant h(L). \tag{5.37}$$

Temos $f \in C^3$, $f'(x) < 0$ e $Sf(x) = -\frac{a^2}{2} < 0$ para $x \geqslant \theta$. Escreva $h(x) = h_1(f(x))$ onde $h_1(x) = \frac{\theta}{1-\mu x}$, e note que $Sh_1(x) \equiv 0$. Pela fórmula

$$Sh(x) = Sh_1(f(x))(f'(x))^2 + Sf(x)$$

(veja [22], Teorema 2.1), temos $Sh(x) < 0$ para todo $x \geqslant \theta$. Por outro lado, $h'(K) = -aK(e^{\delta\xi} - 1)$, e portanto $-1 \leqslant h'(K) < 0$ é equivalente a

$$0 < \log \frac{p}{\delta} \leqslant \frac{1}{e^{\delta\xi} - 1}.$$

que, com $\xi > 0$, é nossa hipótese (h_1). Então, pelo lema 5.3.1(b), temos que K é um atrator global da equação diferença

$$x_{n+1} = h(x_n), \tag{5.38}$$

com condição inicial $x_0 \geqslant \theta$. Pelo Lema 5.3.1(a), isto implica que não existem pontos $c, d \in [\theta, \infty)$, $c < d$, tais que $[h(L), h(l)] \supset [c, d]$. Isto entretanto contradiz (5.36) já que, claramente $h([l, L]) = [h(L), h(l)] \supset [l, L]$ com $l < K < L$. Isto mostra que não existem soluções com $l < L$ quando o limite ξ em (5.25) existe.

Passo 4: Retiramos agora a suposição de que o limite em (5.25) existe. Levando isso em consideração, a demostração segue como acima até as condições (5.30) e (5.31), agora tomando subsequências de (t_n) e (s_n), se necessário, tais que

$$\lim \int_{t_n-\sigma(t_n)}^{t_n} \beta(s)ds = \xi_1, \quad \lim \int_{s_n-\sigma(s_n)}^{s_n} \beta(s)ds = \xi_2$$

para alguns $\xi_1, \xi_2 \in [\xi_m, \xi_M]$, com ξ_M como em (5.15) e $\xi_m := \liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma(t)}^{t} \beta(s)ds$. Deste modo, para a solução $x(t)$ com $l < L$ em (5.24), as desigualdades (5.30) e (5.31) se tornam

$$L \leqslant e^{-\delta\xi_1}K + \frac{p}{\delta}Le^{-a\tilde{l}}(1 - e^{-\delta\xi_1}) \tag{5.39}$$

$$l \geqslant e^{-\delta\xi_2}K + \frac{p}{\delta}le^{-a\tilde{l}}(1 - e^{-\delta\xi_2}). \tag{5.40}$$

Como no passo 2, vemos que não é possível ter $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Se $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 = 0$, procedendo como no passo 2 chegamos em $l = l_\sigma = L_\sigma = K$ e $\tilde{l} \leqslant K$, então também $L = K$, o que contradiz a suposição $l < L$. Então deduzimos que $\xi_i > 0$, $(i = 1, 2)$ e, argumentando como acima, que $l \leqslant \tilde{l} < K < \tilde{L} \leqslant L$.

Agora definimos

$$h_i(x) = \frac{e^{-\delta\xi_i}K}{1 - \mu_i f(x)},\ i = 1, 2,$$

para $x > f^{-1}(\frac{1}{\mu_i})$, onde $\mu_i = 1 - e^{-\delta\xi_i}$. Seja

$$j(x, \xi) := \frac{1 - \mu}{1 - (x)} \text{ onde } \mu = \mu(\xi) = 1 - e^{-\delta\xi},$$

e note que $(x - K)\frac{\partial j}{\partial \xi}(x, \xi) < 0$ para todo $x \neq K$. Então $\xi(x, \xi)$ é crescente para $x < K$ e decrescente para $x > K$, logo para todo x tal que $f(x)\mu(\xi_M) < 1$, segue que

$$h_1(x) = Kj(x, \xi_1) \leqslant Kj(x, \xi_M), \text{ se } x < K \tag{5.41}$$

$$h_2(x) = Kj(x, \xi_2) \geqslant Kj(x, \xi_M), \text{ se } x > K. \tag{5.42}$$

Defina

$$h(x) = \frac{e^{-\delta\xi_M}K}{1 - (1 - e^{-\delta\xi_M})f(x)} = Kj(x, \xi_M). \tag{5.43}$$

De (5.39),

$$L \leqslant h_1(\tilde{l}) \leqslant h(l),$$
$$l \geqslant h_2(\tilde{L}) \geqslant h(L).$$

Daqui em diante, podemos resumir a prova do passo 3 e concluir que não existem soluções $x(t)$ com $l < L$ em (5.24). A demonstração de que K é um atrator global está completa. □

Observação 5.3.4. *Para* (6) *com* $p > \delta > 0$ *e retardos constantes* $\tau \geqslant \sigma \geqslant 0$, *foi provado em [2] que K é um atrator global de toda as soluções positivas se* $(e^{\delta\sigma} - 1)\log(\frac{p}{\delta}) < 1$. *Isto é um caso particular do resultado 5.3.3.*

Combinando o Corolário 5.2.6 e o Teorema 5.3.3 obtemos:

Teorema 5.3.5 ([4], Teorema 3.2). *Com as notações acima, seja $p > \delta$ e suponha que uma das condições abaixo seja satisfeita:*

(a) $\log(\frac{p}{\delta}) \leqslant \frac{2\delta\xi_M}{e^{\delta\xi_M} - \delta\xi_M - 1}$ *e* $\delta\xi_M(2 + \log(\frac{p}{\delta})) < 1$*;*

(b) $\log(\frac{p}{\delta}) > \frac{2\delta\xi_M}{e^{\delta\xi_M} - \delta\xi_M - 1}$ *e* $(e^{\delta\xi_M} - 1)\log\frac{p}{\delta} \leqslant 1$.

Então o equilíbrio K de (5.23) *é globalmente assintoticamente estável (em C_0^+).*

Demonstração. Defina $c = \frac{2\delta\xi_M}{e^{\delta\xi_M} - \delta\xi_M - 1}$, $g_1(x) = (e^x - 1)\log(\frac{p}{\delta})$, $g_2(x) = (2 + \log(\frac{p}{\delta}))x$. Como $g_1(\delta\xi_M) \leqslant g_2(\delta\xi_M)$ se, e somente se, $\log(\frac{p}{\delta}) \leqslant c$, a última condição e (5.15) implicam (h_1), e então K é estável e globalmente atrativo; se $\log(\frac{p}{\delta}) > c$ e (h_1) são satisfeitas, então (5.15) também é satisfeita. □

Referências Bibliográficas

[1] Berezansky, L., Braverman, E., A note on stability of Mackey-Glass equations with two delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 450, 1208–28, 2017.

[2] El-Morshedy, H. A., Ruiz-Herrera A., Global convergence to equilibria in non-monotone delay differential equations, *Proc. Am. Math. Soc.*, 147, 2095–105, 2019.

[3] Long, X., Gong, S., New results on stability of Nicholson's blowflies equation with multiple pairs of time-varying delays, *Appl. Math. Lett.*, 100, 106027, 2020.

[4] Faria, T., Prates H. C., Global attractivity for a nonautonomous Nicholson's equation with mixed monotonicities, *Nonlinearity*, 35, 589–607, 2022.

[5] Berezansky, L., Braverman, E., Boundedness and persistence of delay differential equations with mixed nonlinearity *Appl. Math. Comput.*, 27,9, 154–69, 2016.

[6] Smith, H. L., *Monotone Dynamical Systems (An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems, Mathematical Surveys and Monographs)* vol 41 (Providence, RI: American Mathematical Society), 1995.

[7] Smith, H. L., *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences* (Texts in Applied Mathematics) vol 57 (Berlin: Springer), 2011.

[8] Berezansky, L., Braverman, E., On stability of some linear and nonlinear delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 314, 391–411, 2006.

[9] Liz, E., Pinto, M., Tkachenko, V., Trofimchuk, S., A global stability criterion for a family of delayed population models, *Q. Appl. Math.*, 63, 56–70, 2005.

[10] Hale, J. K. *History of delay equations. Delay differential equations and applications*, 1–28, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 205, Springer, Dordrecht, 2006.

[11] Dads, E. A., *Some General Results and remarks on Delay Differential Equations. Delay differential equations and applications*, 31–40, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 205, Springer, Dordrecht, 2006.

[12] Hale, J. K., Lunel, S. M. V., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag New York, 1993.

[13] Gurney, W., Blythe, S., Nisbet, R., Nicholson's blowflies revisited. *Nature*, 287, 17–21, 1980.

[14] Nicholson, A. J., An outline of the dynamics of animal populations, *Australian Journal of Zoology*, 2, 9-65, 1954.

[15] Nicholson, A. J., The Self-Adjustment of Populations to Change, *Cold Spring Harb Symp Quant Biol.*, 22, 153-173, 1957.

[16] Gopalsamy, K., He, X,. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, *Physica D.*, 76, 344–58, 1994.

[17] Singer, D. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval, *SIAM J. Appl. Math.*, 35, 260–7, 1978.

[18] El-Morshedy, H. A., López, V. J. Global attractors for difference equations dominated by one-dimensional maps, *J. Differ. Equ. Appl.*, 14, 391–410, 2008.

[19] Hale, J. K. *Retarded functional differential equations: basic theory. In: Theory of Functional Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, vol 3. Springer, New York, NY, 1977.

[20] Hutchinson, G. E., Circular causal systems in ecology, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 50, 221–246, 1948.

[21] Coppel, W. A., The solution of equations by iteration, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 51, 41–3, 1955.

[22] Singer, D., Stable orbits and bifurcation of maps of the interval, *SIAM J. Appl. Math.*, 35, 260–7,1978.

[23] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, John Wiley Sons, Inc., 1999.

[24] Hino, Y., Murakami, S., Naito, T., *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lecture Notes in Mathematics, 1991.

[25] Federson, M., Mesquita, J. G., Slavík, A., Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales, *Journal of Differential Equations*, 252(6), 3816–3847, 2012.

[26] Federson, M., Mesquita, J. G., Slavík, A., Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses, *Mathematische Nachrichten*, 286(2-3), 181–204, 2012.

[27] Mackey, M. C., Glass, L., Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science*, 197, 287–289, 1977.

[28] Berezansky, L., Braverman, E., Mackey-glass equation with variable coefficients, *Computers Mathematics with Applications*, 51(1), 1–16, 2006.

Índice Remissivo