Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Álgebras de Lie restritas apenas infinitas

por

Hercules de Carvalho Bezerra

Orientador: Prof. Dr. Victor Petrogradskiy

Brasília

2023

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Álgebras de Lie restritas apenas infinitas

por

Hercules de Carvalho Bezerra

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

DIA 27 de Fevereiro de 2023

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Alex Carrazedo Dantas - Membro (MAT-UnB)

Prof. Dr. Victor Petrogradskiy - Orientador (MAT-UnB)

Profª. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova - Membro (UNICAMP)

Prof. Dr. Ivan Shestakov - Membro (USP)

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima - Suplente (MAT-UnB)

[1]

[1]*O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais e à minha esposa,

Agradecimentos

- Primeiramente agradeço aos meus pais, por todo apoio emocional e financeiro durante todo esse processo. Espero ser motivo de orgulho e um dia poder retribuir um pouco por todo o apoio que me deram.

- Agradeço em especial à minha esposa Thamires Pontes. Obrigado por ter sido tão paciente, dedicada e compreensiva. Este trabalho nunca seria possível se você não estivesse do meu lado me apoiando a todo momento.

- Agradeço ao meu orientador, professor Victor Petrogradskiy, por ter aceitado me orientar, pelas dicas de como escrever, pela paciência, e por todos os ensinamentos neste período.

- Agradeço também aos professores Alex Carrazedo Dantas, Dessislava Kochloukova, Ivan Shestakov e Igor dos Santos Lima, por aceitarem compor a banca da avaliação deste trabalho e contribuir para sua melhora.

- Aos professores, servidores e todos os demais funcionários do Departamento de Matemática da UNB, meus sinceros agradecimentos.

- Agradeço também aos amigos que fiz neste período em Brasília e que de alguma forma me ajudaram nessa caminhada.

- À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, construímos exemplos análogos aos grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki, que desempenham um papel importante na teoria de grupos moderna, pois são exemplos naturais de grupos periódicos finitamente gerados autossimilares, no campo das álgebras de Lie restritas.

Em 2021, Petrogradsky e Shestakov construíram um exemplo de uma superálgebra de Lie apenas infinita Q, 3-gerada, sobre um corpo arbitrário, que dá origem a um fecho associativo, uma superálgebra de Poisson, e duas superálgebras de Jordan. Devido à forma como essas cinco superálgebras foram construídas, foi possível obter uma base monomial clara para essas álgebras, além de estudar sobre a estrutura, crescimento e outras propriedades de cada uma delas.

Neste trabalho, construímos uma álgebra de Lie (restrita) L, sobre um corpo de característica positiva p, que dá origem a um fecho associativo A, e uma álgebra de Poisson P. Apresentamos no trabalho as seguintes propriedades: L e A são $\mathbb{N}^3$-graduadas por multigrau em seus geradores. Exibimos uma base monomial de L e mostramos que L e A têm crescimento polinomial lento. Também provamos que a álgebra de Lie L é apenas infinita, L tem $\mathbb{N}_0^3$-graduação com componentes no máximo uni-dimensionais, além disso a álgebra de Lie restrita L_p é uma álgebra nil. Mostramos que os pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3$ correspondentes aos componentes das $\mathbb{Z}^3$-graduações de L, A, e envelopante restrita sem unidade $u = u(L)$, pertencem a um sólido do tipo paraboloide de rotação. Usando esta observação provamos que L, A, e u são somas diretas de duas subálgebras localmente nilpotentes e existem infinitas dessas decomposições. Chamamos L, A e P álgebras fractais pois elas contêm infinitas cópias delas mesmas.

Palavras chave: Álgebras de Lie, álgebras de Lie restritas, álgebras autossimilares, álgebras nil, álgebras graduadas, graduações finas, p-grupos, crescimento, álgebras de Poisson.

Abstract

In this work, we build examples analogous to Grigorchuk and Gupta-Sidki groups, which play an important role in modern group theory as they are natural examples of self-similar finitely generated periodic groups, in the field of restricted Lie algebras.

In 2021, Petrogradsky and Shestakov constructec an example of just infinite, 3-generated, Lie superalgebra Q over an arbitrary field, which gives rise to an associative closure, a Poisson superalgebra, and two Jordan superalgebras. Due to the way these five superalgebras were constructed, it was possible to obtain a clear monomial basis, in addition to study the structure, growth, and other properties of each one of them.

Now, we construct a (restricted) Lie algebra L, over a field os any positive characteristic p, which gives rise to an associative closure A, and a Poisson algebra P. We present in the work the following properties: L and A are $\mathbb{N}^3$-graded by multidegree in the generators. We exhibit a monomial basis of L, and show that L and A have slow polynomial growth. We also prove that the Lie algebra L is just infinite, L has $\mathbb{N}^3$-grading with at most one-dimensional components, in addition that the restricted Lie algebra L_p is a nil algebra. We show that the lattice points of $\mathbb{Z}^3$ corresponding to $\mathbb{Z}^3$-graded components of L, A and the restricted enveloping algebra without unit $u = u(L)$, belong to a paraboloid type body of rotation. Using this observation we prove that L, A and u are direct sum of two locally nilpotent subalgebras and there are infinitely many such decompositions.

We call L, A and P fractal algebras because these contain infinite copies of themselves.

Keywords: Lie algebras, restricted Lie algebras, self-similar algebras, nil-algebras, graded algebras, fine gradings, p-groups, growth, Poisson algebras.

Conteúdo

Introdução

Citaremos alguns resultados que motivaram a construção dos nossos exemplos.

0.1 O problema geral de Burnside

O problema geral de Burnside faz o seguinte questionamento: *Um grupo periódico finitamente gerado é finito?*

A resposta para esta questão, à primeira vista, parece ser afirmativa, já que existe uma quantidade finita de geradores para o grupo e cada um destes geradores tem ordem finita. Porém, muitos outros episódios na hitória da matemática nos levam a duvidar de nossa intuição. A primeira resposta negativa foi dada por Golod e Shafarevich, que provaram que, para cada primo p, existe um p-grupo infinito, finitamente gerado. O trabalho é baseado em uma famosa construção de uma família de álgebras nil associativas finitamente geradas de dimensão infinita, veja [18]. Esta construção também garante exemplos de álgebras de Lie L finitamente geradas, de dimensão infinita, tais que $(\operatorname{ad} x)^{n(x,y)}(y) = 0$, para quaisquer $x, y \in L$, onde o corpo é arbitrário. Jacobson questiona se uma álgebra de Lie restrita L finitamente gerada é necessariamente finita quando cada elemento $x \in L$ é algébrico, isto é, quando cada $x \in L$ é raíz de um p-polinômio $f_{p,x}(x) = a_0 x^{[p^m]} + a_1 x^{\left[p^{m-1}\right]} + \ldots + a_m x$. Uma resposta negativa é dada pelo caso em que o corpo tem característica positiva p, pois obtém-se uma álgebra de Lie restrita L finitamente gerada de dimensão infinita cuja p-aplicação é nil, ou seja, $x^{\left[p^{n(x)}\right]} = 0$ para todo $x \in L$. A construção de Golod fornece álgebras associativas nil de crescimento exponencial. Lenagan e Smoktunowicz construíram álgebras associativas nil de crescimento polinomial, veja [31]. Para ler mais sobre as álgebras e os grupos de Golod-Shafarevich, veja [15, 71].

0.2 Grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki

Grigorchuk fez uma construção direta e elegante de um 2-grupo infinito gerado por 3 elementos de ordem 2, que pode ser melhor compreendida lendo [20]. O grupo consiste em transformações do intervalo $[0, 1]$ do qual são removidos números racionais da forma $\{k/2^n | 0 \leq k \leq 2^n, n \geq 0\}$. Gupta e Sidki fizeram uma construção direta de um p-grupo infinito com 2 geradores de ordem p, veja [23]. Esse grupo foi construido como subgrupo de um grupo de automorfismos de uma árvore regular infinita de grau p.

Os grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki são respostas negagivas para o problema geral de Burnside, além de responderem problemas importantes na teoria de grupos. Por exemplo, uma conjectura de Milnor menciona que grupos de crescimento intermediário [21] não existem, o que foi respondido negativamente com os grupos de Grigorchuk e suas generalizações, que foram os primeiros exemplos de grupos com crescimento intermediário. A construção de Gupta-Sidki também resulta em grupos de crescimento subexponencial, veja [16]. Os grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki são *autossimilares*, [40]. A seguir falaremos sobre a existência de análogos aos grupos de Gupta-Sidki e Grigorchuk para outras estruturas algébricas.

0.3 Álgebras associativas nil graduadas autossimilares

O estudo dos grupos mencionados na seção anterior influenciou a investigação acerca de anéis de grupo e outras álgebras associativas relacionadas, [66]. Surgiram então álgebras associativas autossimilares definidas por matrizes de maneira recorrente, [5]. Sidki sugeriu dois exemplos de álgebras de matrizes associativas autossimilares, [67]. Uma família mais geral de álgebras com as mesmas características foi introduzida em [52]. A partir dessa família, que generaliza o segundo exemplo de Sidki, [67], é possível obter exemplos de álgebras de Lie restritas de Fibonacci em termos de matrizes autossimilares, [52]. Relembremos de que uma álgebra é dita *localmente nilpotente* se toda subálgebra finitamente gerada é nilpotente. As álgebras associativas autossimilares construidas em [52] são ainda somas de duas subálgebras localmente nilpotentes $A = A_+ \oplus A_-$.

Porém, os análogos dos grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki devem ser álgebras associativas autossimilares nil, para que se possam produzir novos exemplos de grupos periódicos finitamente gerados. Tais exemplos ainda não são conhecidos. Problemas em aberto na teoria de álgebras de dimensão infinita podem ser vistos em [72].

0.4 Álgebras de Lie restritas nil

Mencionamos que exemplos análogos naturais aos grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki não existem para álgebras associativas. Para álgebras de Lie restrita, felizmente existem. Petrogradsky construiu um exemplo de uma álgebra de Lie restrita de dimensão infinita L, sobre um corpo de característica 2, gerada por dois elementos, denominada *álgebra de Lie restrita de Fibonacci*, [45]. Seja $\operatorname{char} L = 2$ e seja $R = K[t_i | i \geq 0]/(t_i^p | i \geq 0)$ um anel de polinômios truncado. Fazendo $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$, $i \geq 0$, são definidas duas derivações de R:

$$v_1 = \partial_1 + t_0(\partial_2 + t_1(\partial_3 + t_2(\partial_4 + t_3(\partial_5 + t_4(\partial_6 + \cdots))))), \tag{1}$$

$$v_2 = \partial_2 + t_1(\partial_3 + t_2(\partial_4 + t_3(\partial_5 + t_4(\partial_6 + \cdots)))). \tag{2}$$

Essas derivações geram uma álgebra de Lie restrita $L = \operatorname{Lie}_p(v_1, v_2) \subset \operatorname{Der} R$ e uma álgebra associativa $A = \operatorname{Alg}(v_1, v_2) \subset \operatorname{End} R$. Bergman mostrou que a dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra associativa não pode pertencer ao intervalo $(1, 2)$ [29]. Isso, porém, não é válido para álgebras de Lie. A dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra de Lie finitamente gerada pode ser qualquer número pertencente ao intervalo $\{0\} \cup [1, +\infty]$ [43].

Uma propriedade interessante de L é que ela possui uma p-aplicação nil, [45], o que é análogo à periodicidade dos grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki. Porém, não se sabe se a sua envoltória associativa A é uma álgebra nil, mas Petrogradsky e Shestakov provaram uma afirmação mais fraca. As álgebras L e A são somas diretas de duas subálgebras localmente nilpotentes [51]:

$$L = L_+ \oplus L_-, \quad A = A_+ \oplus A_-. \tag{3}$$

Existem exemplos de álgebras associativas de dimensão infinita que são soma direta de duas subálgebras localmente nilpotentes, [28, 13]. No caso em que o corpo possui característica prima arbitrária, Shestakov e Zelmanov sugeriram um exemplo de uma álgebra de Lie restrita finitamente gerada com uma p-aplicação nil, [64].

Um exemplo de álgebra de Lie restrita nil p-gerada L foi estudado em [56]. Neste exemplo, para qualquer p primo, temos uma decomposição (3) em somas diretas de duas subálgebras localmente nilpotentes. A desvantagem destes exemplos é a dificuldade em efetuar computações.

Observe que apenas o exemplo original tem uma clara base monomial, [45, 51], diferentemente de outros exemplos onde os elementos da álgebra de Lie são combinações lineares de monômios. Trabalhar com tais combinações lineares pode envolver processos técnicos que apresentam certa dificuldade, [64, 56]. Em [47], uma família contínua de álgebras de Lie restritas nil de crescimento lento com bases monomimais satisfatórias é construída.

0.5 Álgebras de Lie sobre um corpo de característica zero

No caso em que o corpo tem característica zero, não existem análogos naturais dos grupos de Grigorchuk no campo das álgebras de Lie, devido ao seguinte resultado.

Teorema 0.5.1. (Martinez e Zelmanov, [36]) *Seja* $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} L_\alpha$ *uma álgebra de Lie sobre um corpo* K *de característica zero e graduada por um grupo abeliano* Γ*. Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Existe $d > 0$ *tal que* $\dim_K L_\alpha \le d$ *para todo* $\alpha \in \Gamma$*;*

(ii) Todo elemento homogêneo $a \in L_\alpha$*,* $\alpha \in \Gamma$*, é ad-nilpotente.*

Então L *é localmente nilpotente.*

0.6 Superálgebras de Lie graduadas fractais

Petrogradsky construiu exemplos de superálgebras de Lie análogas aos grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki em característica arbitrária, [46]. Esses exemplos são também análogos à álgebra de Lie restrita de Fibonacci e a outras álgebras de Lie autossimilares já mencionadas anteriormente. Nas superálgebras de Lie construídas, os elementos homogêneos com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação são ad-nilpotentes, o que configura como uma propriedade análoga à periodicidade dos grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki. Ambas as álgebras são autossimilares e, em particular, contêm infinitas cópias de si mesmas. Portanto, graças a essa propriedade, dizemos que essas álgebras são *fractais*. Segue a descrição do primeiro exemplo de [46] :

Seja $\Lambda = \Lambda[x_i, y_i | i \geq 0]$ uma álgebra de Grassmann nas infinitas variáveis $x_i, y_i, i \geq 0$. Considere os seguintes elementos ímpares na superálgebra de Lie das superderivações $W(\Lambda)$:

$$a_i = \partial_{x_i} + y_i x_i(\partial_{x_{i+1}} + y_{i+1}x_{i+1}(\partial_{x_{i+2}} + y_{i+2}x_{i+2}(\partial_{x_{i+3}} + \cdots))), \quad i \geq 0$$
$$b_i = \partial_{y_i} + x_i y_i(\partial_{y_{i+1}} + x_{i+1}y_{i+1}(\partial_{y_{i+2}} + x_{i+2}y_{i+2}(\partial_{y_{i+3}} + \cdots))), \quad i \geq 0$$

Define-se então a superálgebra de Lie $R = \mathrm{Lie}\,(a_0, b_0) \subset W(\Lambda)$ e sua envoltória associativa $A = \mathrm{Alg}\,(a_0, b_0) \subset \mathrm{End}\,\Lambda$. A superálgebra R é autossimilar e possui crescimento lento ($\mathrm{GKdim}\, R \approx 1,44$). Além disso, $R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$ é nil graduada.

Petrogradsky e Shestakov construíram uma superálgebra de Lie fractal sobre um corpo arbitrário, que dá origem a uma superálgebra associativa, uma superálgebra de Poisson e duas superálgebras de Jordan, [55]. Estas álgebras são análogas aos grupos de Grigorchuk e Gupta-Sidki nas respectivas classes das álgebras. O fato principal inédito é que nós desenvolvemos novas construções que produzem superálgebras de Poisson e Jordan nil-graduadas.

0.7 Álgebras de Lie restritas nil de crescimento lento e crescimento oscilante

Petrogradsky construiu, para um corpo de característica arbitrária, uma família $L(\Xi)$ de álgebras de Lie restritas 2-geradas de lento crescimento polinomial ($\mathrm{GKdim}\, L(\Xi) \leq 2$) com uma p-aplicação nil, onde Ξ é uma infinita tupla de inteiros positivos, [47], a saber, $\mathrm{GKdim}\, L(\Xi) \leq 2$ para todas as tais álgebras. Essas álgebras são construídas através de derivações de uma álgebra de infinitas potências divididas Ω. A álgebra de Lie L e sua envoltória associativa $A \subset \mathrm{End}\,(\Omega)$ são $\mathbb{Z}^2$-graduadas pelo multigrau em relação aos geradores. Além disso, se a tupla Ξ é periódica, então $L(\Xi)$ é autossimilar.

Como caso particular, foi construída uma família contínua de álgebras de Lie restritas nil não isomorfas $L(\Xi_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, com crescimento muito lento. A saber, elas possuem dimensão de Gelfand-Kirillov igual a 1, mas o crescimento não é linear. As envoltórias associativas A têm dimensão de Gelfand-Kirillov 2, mas o crescimento não é quadrático. A virtude desses exemplos é que eles possuem bases monomiais explícitas.

Petrogradsky construiu exemplos de álgebras de Lie restritas, que têm p-aplicação nil e crescimento oscilando intermediário, [48], semelhante aos exemplos de grupos de crescimento oscilando intermediário de Kassabov e Pak e usando exemplos de álgebras de Lie restritas construídas especialmente por ele [49].

0.8 Álgebras de Poisson

Álgebras de Poisson foram introduzidas em 1976 por Berezin [8], veja também Vergne [70] (1969).

Álgebras de Poisson aparecem naturalmente em diferentes áreas da álgebra, topologia e física. A noção de superálgebra de Poisson livre foi sugerida por Shestakov, [62]. Usando álgebras de Poisson, Shestakov e Umirbaev resolveram um problema de longa data sobre automorfismos de Nagata do anel polinomial em três variáveis $\mathbb{C}[x, y, z]$; eles provaram que este é selvagem, [65]. Propriedades algébricas diferentes das álgebras de Poisson livres foram estudadas por Makar-Limanov, Shestakov e Umirbaev [33, 34, 63].

Capítulo 1

Definições básicas

Neste capítulo iremos definir os objetos principais deste trabalho, como álgebras de Lie e álgebras de Lie restritas, além de citar, sem demonstração, alguns resultados preliminares de fundamental importância para o entendimento do texto. Nos nossos exemplos, o corpo base será denotado por K. Iremos ainda utilizar a notação $\langle X \rangle_K$ para o subespaço linear gerado por um subconjunto X de um espaço vetorial sobre K.

1.1 Álgebras de Lie e álgebras de Lie restritas

Definição 1.1.1. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial L sobre um corpo K, com uma operação bilinear $L \times L \to L$, denotada por $(x, y) \mapsto [x, y]$ e chamada de colchete ou comutador de x e y, que satisfaz os seguintes axiomas:*

(L1) $[x, y] = -[y, x]$ *para todos* $x, y \in L$ *(anticomutatividade);*

(L2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (x, y, z \in L)$

Caso $\operatorname{char} K \neq 2$, a anticomutatividade do colchete de Lie garante que $[x, x] = 0$ para todo $x \in L$. Quando $\operatorname{char} K = 2$, incluímos essa condição nos axiomas da definição anterior. Neste trabalho, colchetes de grandes comptimentos serão sempre *normados* à direita, da seguinte forma: $[x, y, z] = [x, [y, z]]$.

Definição 1.1.2. *Dado $x \in L$, definimos o operador adjunto* $\operatorname{ad} x : L \to L$ *por* $\operatorname{ad} x(y) = [x, y]$. *Denotamos* $[x^k, y] := (\operatorname{ad} x)^k y$, $x, y \in L$. *Se* $(\operatorname{ad} x)^n = 0$ *para algum inteiro positivo n, dizemos que o elemento $x \in L$ é ad-nilpotente.*

Dada uma álgebra associativa A, ao definirmos em A o produto *comutador*

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in A,$$

o espaço vetorial A torna-se uma álgebra de Lie, denotada por $A^{(-)}$. Desta forma, a cada álgebra associativa associamos uma álgebra de Lie. Por outro lado, a cada álgebra de Lie L, podemos associar uma álgebra associativa com identidade, chamada *álgebra envelopante universal*, que definiremos a seguir.

Definição 1.1.3. *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo K. Uma álgebra envelopante universal é um par (U, i), onde U é uma álgebra associativa unitária sobre K e $i : L \to U^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie com a propriedade universal:*

Se A é uma álgebra associativa unitária qualquer sobre K e $\sigma : L \to A^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\phi : U \to A$ tal que $\phi(1_U) = 1_A$ e $\phi \circ i = \sigma$.

Para qualquer que seja a álgebra de Lie L, um par (U, i) definido como acima existe e é único, a menos de isomorfismos. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [25]. Mostraremos a seguir uma construção do par (U, i), que pode ser feita utilizando o conceito de *álgebra tensorial*. Inicialmente, vamos definir o *produto tensorial* de espaços vetoriais.

Definição 1.1.4. *Dados dois espaços vetoriais A e B sobre um mesmo corpo K, o produto tensorial entre A e B é um espaço vetorial $A \otimes B$ sobre K com uma operação bilinear*

$$\otimes : A \times B \to A \otimes B,$$

denotada por $(a, b) \mapsto (a \otimes b)$ e que satisfaz a condição: se $\{a_i | i \in I\}$ e $\{b_j | j \in J\}$ são bases de A e B, respectivamente, então $\{a_i \otimes b_j | i \in I, j \in J\}$ é uma base de $A \otimes B$.

Agora podemos definir o produto tensorial entre álgebras.

Definição 1.1.5. *Sejam A e B duas álgebras sobre um mesmo corpo K. O produto tensorial $A \otimes B$ é a álgebra cujo espaço é o produto tensorial dos espaços A e B, e o produto é definido por*

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, \quad a_i \in A, b_i \in B.$$

Com a definição acima, podemos considerar o produto tensorial entre n cópias de uma álgebra A (não necessariamente unitária) sobre um corpo K. Denotemos $T^0(A) = K$, $T^1(A) = A$ e por $T^n(A) = A \otimes \cdots \otimes A$ o produto tensorial entre n copias da álgebra A.

Definição 1.1.6. *Seja A um espaço sobre um corpo K. A álgebra tensorial de A é a álgebra associativa unitária $T(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(A)$.*

Agora, através do conceito de álgebra tensorial, podemos construir uma álgebra envelopante universal (U, i) de uma álgebra de Lie L sobre um corpo K. Considere o quociente

$$U(L) := T(L)/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y] | x, y \in L),$$

onde $T(L)$ é a álgebra tensorial do espaço vetorial L. Se $\pi : T(L) \to U(L)$ é o homomorfismo canônico e $i = \pi|_L : L \to U(L)$ é a sua restrição a L, então o par $(U(L), i)$ constitui uma álgebra envelopante universal para L.

Abaixo, enunciamos o famoso Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que fornece uma base para a álgebra envelopante universal $U(L)$ a partir de uma base ordenada arbitrária da álgebra de Lie L. Frequentemente, esse teorema é referido abreviadamente por PBW.

Teorema 1.1.7. *Seja $\{x_i | i \in I\}$ uma base arbitrária da álgebra de Lie L, onde I é um conjunto ordenado de índices. Os monômios*

$$\{x_{i_1} \cdots x_{i_n} | i_1 \leq \ldots \leq i_n, i_j \in I, n \geq 0\}$$

constituem uma base para a álgebra envelopante $U(L)$.

Definição 1.1.8. *Uma álgebra de Lie L sobre um corpo K de característica $p > 0$ é dita uma álgebra de Lie restrita (ou p-álgebra de Lie) se em L está definida uma operação unária $x \mapsto x^{[p]}$, $x \in L$, denominada p-aplicação, que satisfaz os seguintes axiomas:*

(i) $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $\lambda \in K$, $x \in L$;

(ii) $\mathrm{ad}\,(x^{[p]}) = (\mathrm{ad}\,x)^p$, $x \in L$;

(iii) $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$, *para quaisquer* $x, y \in L$, *onde* $is_i(x, y)$ *é o coeficiente de* t^{i-1} *no polinômio* $\mathrm{ad}\,(tx + y)^{p-1}(x) \in L\,[t]$.

Note que, se A é uma álgebra associativa sobre um corpo K de característica $p > 0$, então a aplicação $x \mapsto x^p$, $x \in A^{(-)}$, satisfaz os três axiomas acima, o que é uma motivação para essa definição. Além disso, podemos ainda definir o comutador sobre os elementos de A por $[x, y] = xy - yx$ e com isso obter uma álgebra de Lie restrita.

O Axioma (iii) por vezes é de difícil aplicação nas computações. Portanto, utilizaremos a seguinte versão:

$$(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + (\operatorname{ad} y^{p-1})(x) + \sum_{i=2}^{p-1} s_i(x, y), \tag{1.1}$$

onde $s_i(x, y)$ envolve comutadores que contêm i letras x e $p - 1$ letras y.

A seguir, definimos um homomorfismo respeitando a estrutura algébrica de uma álgebra de Lie restrita. Com esta definição, podemos definir *álgebra envelopante universal restrita.*

Definição 1.1.9. *Sejam L e H álgebras de Lie restritas sobre um mesmo corpo K. A aplicação $f : L \to H$ é um homomorfismo de álgebras de Lie restritas se:*

(i) $f([x, y]_L) = [f(x), f(y)]_H$;

(ii) $f(x^{[p]_L}) = f(x)^{[p]_H}$, *para quaisquer $x, y \in L$.*

Definição 1.1.10. *Seja H uma álgebra de Lie restrita. A álgebra envelopante universal restrita de H é um par (u, i) onde u é uma álgebra e $i : H \to u^{(-)}$ é uma aplicação entre álgebras de Lie restritas, satisfazendo a seguinte propriedade universal:*

Dada qualquer álgebra A e qualquer aplicação de álgebras de Lie restritas $f : H \to A^{(-)}$, existe uma única aplicação de álgebras $g : u \to A$ tal que $f = g \circ i$.

O próximo teorema, é uma versão do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para álgebras envelopantes restritas. Afirma que dada uma base ordenada qualquer de uma álgebra de Lie restrita L, podemos obter uma base para $u(L)$.

Teorema 1.1.11. *Para qualquer base $\{x_i | i \in I\}$ de uma álgebra de Lie restrita L, onde I é um conjunto ordenado de índices, os monômios*

$$\{x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n} | i_1 < \ldots < i_n, 0 \leq \alpha_j \leq p - 1, n \geq 0\}$$

constituem uma base para a álgebra envelopante restrita $u(L)$.

1.2 Álgebras graduadas

Definição 1.2.1. *Sejam A uma álgebra sobre um corpo K e G um grupo. Então A é dita uma álgebra G-graduada se existe uma decomposição em espaços vetoriais*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

onde os subespaços A_g satisfazem $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$. Os subespaços A_g são chamados de componentes homogêneas da graduação.

Dado $g \in G$, qualquer elemento $a \in A_g$ é chamado *homogêneo* e denotamos da seguinte forma $\deg a = g$. Pela definição de graduação, qualquer elemento $x \in A$ pode ser escrito de forma única como soma finita

$$x = \sum_{g \in G} x_g, \quad x_g \in A_g.$$

Definição 1.2.2. *Dizemos que uma G-graduação de uma álgebra $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é fina se não existem um grupo H e uma graduação $A = \bigoplus_{h \in H} A_h$ tal que para qualquer $0 \neq A_h$, $h \in H$, existe $g \in G$ tal que $A_h \subset A_g$ e alguma inclusão é própria.*

Em particular, se todas as componentes A_g, $g \in G$, são no máximo unidimensionais, obtemos uma graduação fina.

Definição 1.2.3. *Um subespaço $V \subseteq A$ é chamado de subespaço graduado (ou subespaço homogêneo) se*

$$V = \bigoplus_{g \in G} (V \cap A_g).$$

Uma subálgebra de A é dita graduada se esta é um subespaço graduado.

Definição 1.2.4. *Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ duas álgebras G-graduadas. Um homomorfismo (isomorfismo) de álgebras $f : A \to B$ é chamado um homomorfismo(isomorfismo) de álgebras graduadas se f preserva a estrutura da graduação, ou seja, $f(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$.*

1.3 Crescimento de álgebras e dimensão de Gelfand-Kirillov

Seja K um corpo. Uma K-álgebra unitária finitamente gerada A com conjunto gerador $\{a_1, \dots, a_m\}$ tem um *subespaço gerador* de dimensão finita V(o espaço vetorial gerado por $a_1, \dots, a_m$) de modo que cada elemento de A é uma combinação linear de monômios formados com os elementos $a_1, \dots, a_m$. Se $V^0 = K$, e para $n \geq 1$, V^n denota o subespaço gerado por todos os monômios em $a_1, \dots, a_m$ de comprimento n, então

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

onde $A_n := K + V + V^2 + \cdots + V_n$. Note que, em geral, a função $d_V(n) = \dim_K(A_n)$ é monótona crescente e é utilizada para distinção entre K-álgebras , entretando d_V depende do subespaço gerador V. Esta dependência pode ser removida introduzindo a seguinte relação de equivalência:

Definição 1.3.1. *Seja Φ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, as quais são eventualmente monótonas crescentes e que assumem apenas valores positivos, ou seja, para as quais existe $n_0 = n_0(f) \in \mathbb{N}$, tal que*

$$f(n) \in \mathbb{R}^+ \quad e \quad f(n+1) \geq f(n), \quad \forall n \geq n_0.$$

Dadas $f, g \in \Phi$, temos que $f \leq^* g$ se, e somente se, existem $c, m \in \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) \leq cg(mn),$$

para quase todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos que $f \sim g$ se e somente se $f \leq^* g$ e $g \leq^* f$. Para $f \in \Phi$, a classe de equivalência $\mathcal{G}(f) \in \Phi/\sim$ é chamada de crescimento de f.

O próximo lema garante que o *crescimento* de uma K-álgebra finitamente gerada não depende da escolha particular de um subespaço gerador de dimenção finita V. A demonstração deste lema pode ser vista em [29].

Lema 1.3.2. *Seja A uma K-álgebra finitamente gerada com subespaços geradores de dimensão finita V e W. Se $\gamma_A(V, n)$ e $\gamma_A(W, n)$ denotam as dimensões de $\sum_{i=0}^{n} V^i$ e $\sum_{i=0}^{n} W^i$, respectivamente, Então $\mathcal{G}(\gamma_A(V, n)) = \mathcal{G}(\gamma_A(W, n))$.*

Definição 1.3.3. *Seja A uma K-álgebra finitamente gerada, e seja V um subespaço gerador de dimensão finita para A. Então $\mathcal{G}(A) := \mathcal{G}(\gamma_A(V, n))$ é chamada crescimento de A.*

Sabe-se que o crescimento exponencial é o maior crescimento possível para álgebras associativas e álgebras de Lie finitamente geradas. Uma função de crescimento é comparada com funções polinomiais n^k, $k \in \mathbb{R}^+$, ao se computar a dimensão de *Gelfand-Kirillov*, definida a seguir

Definição 1.3.4. *Seja A uma álgebra associativa (ou de Lie). A dimensão de Gelfand-Kirillov de A é definida por*

$$\mathrm{GKdim}\,(A) = \sup_V \lim_{n\to\infty} \log_n \gamma_A(V, n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n \gamma_A(V, n),$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços de dimensão finita V de A.

Pelo Lema 1.3.1, para uma K-álgebra finitamente gerada B com subespaço gerador de dimensão finita V, o crescimento de B independe da escolha particular de V. Portanto,

$$\mathrm{GKdim}\,(B) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n \gamma_A(V, n).$$

Definimos também a *dimensão de Gelfand-Kirillov inferior*

$$\underline{\mathrm{GKdim}}(B) := \inf_V \lim_{n\to\infty} \log_n \gamma_A(V, n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \log_n \gamma_A(V, n),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços de dimensão finita V de A.

Sejam L uma álgebra de Lie e $X \subset L$. Denotamos por $\mathrm{Lie}\,(X)$ a subálgebra de L gerada por X, incluindo a aplicação quadrática no caso $\mathrm{char}\, K = 2$. Se L é uma álgebra de Lie restrita, denotamos por $\mathrm{Lie}_p\,(X)$ a subálgebra restrita de L gerada por X. Semelhantemente, se X é um subconjunto de uma álgebra associativa A, denotamos por $\mathrm{Alg}\,(X) \subset A$ a subálgebra associativa gerada por X.

1.4 Álgebra de Lie das derivações especiais

Suponhamos que $\mathrm{char}\, K = p > 0$. Usando a notação $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $\mathbb{N}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, consideremos a *álgebra polinomial truncada*

$$\Delta = K[x_i | i \in I]/(x_i^p | i \in I).$$

Seja $\mathbb{N}_p^I$ o conjunto de funções com um número finito de valores não nulos. Para $\alpha \in \mathbb{N}_p^I$, denotamos $|\alpha| = \sum_{i\in I} \alpha_i$ e $x^\alpha = \prod_{i\in I} x_i^{\alpha_i} \in \Delta$. O conjunto $\{x^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}_p^I\}$ é claramente uma base de Δ. Consideremos o ideal Δ^+ gerado por todos os elementos x^α, $\alpha \in \mathbb{N}_p^I$, $|\alpha| > 0$. Denotemos por $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i \in I$, as derivações parciais de Δ. Introduzimos a denominada *álgebra de Lie das derivações especiais de* Δ:

$$W(\Delta) = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_p^I} x^\alpha \sum_{j=1}^{|\alpha|} \lambda_{\alpha,i_j} \frac{\partial}{\partial_{x_{i_j}}} \middle| \lambda_{\alpha,i_j} \in K, i_j \in I \right\}.$$

É essencial que a soma para cada x^α, $\alpha \in \mathbb{N}_p^I$, seja finita. Sobre álgebras das derivações especiais veja [57, 59, 50].

Monômios acima na forma $x_{i_1} \cdots x_{i_k} \frac{\partial}{\partial x_j}$ são chamados *derivadas puras.*

Lema 1.4.1 ([**51**]). *Para números complexos arbitrários* $a_i \in \mathbb{C}$*,* $i \in \mathbb{N}$*, existem graduações nas álgebras* Δ*,* $W(\Delta)$ *tais que* $\mathrm{wt}\,(x_i) = -a_i$*,* $\mathrm{wt}\,(\partial_i) = a_i$*.*

1.5 Álgebras de Poisson

Definição 1.5.1. *Um espaço vetorial* A *munido com duas operações bilineares,* $\cdot$ *e* $\{,\}$*, se chama álgebra de Poisson se*

1) $(A, \cdot)$ *é uma álgebra associativa com unidade;*

2) $(A, \{,\})$ *é uma álgebra de Lie;*

3) Essas operações respeitam a regra de Leibniz

$$\{a, b \cdot c\} = \{a \cdot b\} \cdot c + a \cdot \{b, c\}, \qquad a, b, c \in L.$$

Exemplo 1.5.2. *Seja* $A = K[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m]$ *o anel polinomial com operação associativa comutativa regular. Consideramos o produto de Lie definido por*

$$\{x_i, y_j\} = \delta_{ij},\ \{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

A álgebra A *munida com estes dois produtos é uma álgebra de Poisson.*

Exemplo 1.5.3. *Seja* L *a álgebra de Lie com uma base* $\{x_i | i \in I\}$*. Consideramos a álgebra envelopante* $U(L)$ *com filtração* $\{U_n(L) | n \geq 0\}$ *onde* U_n *é o espaço gerado por* *produtos com no máximo n elementos de L. A álgebra associada graduada*

$$S(L) := \bigoplus_{n\geq 0} U_n(L)/U_{n-1}(L),$$

é uma álgebra isomorfa ao anel polinomial $S(L) \cong K[x_i | i \in I]$. *Definimos colchetes nos geradores*

$$\{x_i, x_j\} := [x_i, x_j] \in L.$$

*Obtemos a álgebra de Poisson chamada **álgebra simétrica** de L.*

Capítulo 2

Resultados principais

Neste capítulo, listaremos os principais resultados obtidos acerta dos exemplos estudados no texto. Construímos um análogo ao exemplo de Petrogradsky, Shestakov e Zelmanov, [56], mas nossas construções e computações são “mais lindas”. Nossa construção é um análogo direto das superálgebras de Lie fractais sugeridas e estudadas por Petrogradsky e Shestakov [55].

2.1 A álgebra de Lie L

Consideremos um corpo K de característica positiva p e a *álgebra polinomial truncada* definida da seguinte forma:

$$\Delta := K[x_i | i \geq 0]/(x_i^p | i \geq 0).$$

Consideramos o conjuntos dos geradores dessa álgebra, e as respectivas derivadas parciais $\{x_i, \partial_i | i \geq 0\} \subset \operatorname{End}\Delta$. Temos as seguintes relações

$$[\partial_i, x_i] = 1, \quad [\partial_i, \partial_j] = [x_i, x_j] = 0, \quad i \neq j. \tag{2.1}$$

Dentre as derivações desta álgebra, destacamos os seguintes elementos:

$$v_i = \partial_i + x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1}(\partial_{i+3} + x_{i+3}^{p-1} x_{i+4}^{p-1}(\partial_{i+6} + x_{i+6}^{p-1} x_{i+7}^{p-1}(\partial_9 + \ldots))), \quad i \geq 0. \tag{2.2}$$

A esses elementos $v_i \in \operatorname{Der}\Delta$ damos o nome *elementos pivô*. Estes elementos podem ser escritos na seguinte *forma recursiva*:

$$v_i = \partial_i + x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}, \quad i \geq 0. \tag{2.3}$$

Definimos a álgebra de Lie $L := \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2) \subset \mathrm{Der}\,\Delta$, a álgebra de Lie restrita $L_p := \mathrm{Lie}_p\,(v_0, v_1, v_2)$ e sua envoltória associativa $A := \mathrm{Alg}\,(v_0, v_1, v_2)$. Estabelecemos as seguintes propriedades principais das álgebras L, L_p, A, e da álgebra envelopante restrita sem unidade $u(L)$.

i) No Capítulo 3, obtemos relações básicas entre os elementos de L e L_p.

ii) Uma base da álgebra de Lie $\mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ é composta por monômios standard de primeiro tipo (Teorema 3.2.2). Uma base da álgebra de Lie restrita $\mathrm{Lie}_p\,(v_0, v_1, v_2)$ é formada pelos monômios standard de tipos 1 e 2 (Corolário 3.2.3). Então, temos bases nítidas.

iii) No Capítulo 4, introduzimos funções peso wt, swt_1 e swt_2, que são aditivas em produtos de monômios. No caso $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, usamos também funções de peso reais torcidas wt_1, wt_2.

iv) Obtemos uma $\mathbb{N}_0^3$-graduação para a álgebra L, a álgebra de Lie restrita L_p, e para sua envoltoria associativa A (Teorema 4.5.1), e.g:

$$L = \bigoplus_{n_1, n_2, n_3 \geq 0} L_{(n_1, n_2, n_3)}, \quad A = \bigoplus_{n_1, n_2, n_3 \geq 0} A_{(n_1, n_2, n_3)}.$$

v) Encontramos limitações para os pesos dos monômios de L e A (Seções 5.1 e 8.2). Na representação geométrica, os monômios de L e A estão em uma região do tipo paraboloide de rotação ou em uma região do tipo funil retangular (Seções 5.3 e 7.3).

vi) $\mathrm{GKdim}\, L = \underline{\mathrm{GKdim}}\; L = \log_\lambda p \in (1{,}65,\ 2)$ (Teorema 5.2.1), temos o mesmo valor para $L_p(v_0, v_1, v_2)$.

vii) $\mathrm{GKdim}\, A = \underline{\mathrm{GKdim}}\; A = 2\log_\lambda p \in (3{,}3,\ 4)$ (Teorema 8.2.2).

viii) No Capítulo 6, mostramos que a $\mathbb{N}_0^3$-graduação de L tem componentes no máximo uni-dimensionais. Então a $\mathbb{N}_0^3$-graduação é fina.

ix) Existe limite que é igual a parte dos pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ dentro do paraboloide de rotação (ou funil retangular) ocupados pelas componentes não-nulas de L (Teorema 5.3.5).

x) No Capítulo 6, provamos que L é uma álgebra apenas infinita (Teorema 6.2.2) e não hereditariamente apenas infinita.

xi) Provamos que a álgebra de Lie restrita $\mathrm{Lie}_p\,(v_0, v_1, v_2)$ é nil (Teorema 7.2.1).

xii) Determinamos um paraboloide de rotação (ou funil retangular) a qual pertencem os pontos da álgebra envelopante restrita sem unidade (Teorema 8.3.3).

xiii) Mostramos que as álgebras: álgebra de Lie (restrita) L, envelopante associativa A e envelopante restrita sem unidade $u = u(L)$, são somas de duas subálgebras localmente nilpotentes (Teorema 8.5.1).

xiv) No Capítulo 9, definimos álgebras de Poisson P e $\hat{P}$ determinadas pela álgebra de Lie L e estudamos suas propriedades. Mostramos que existe uma filtração de $A = \hat{A}$ tal que $\mathrm{gr}\,\hat{A} \cong \mathrm{Poisson}\,(\hat{L})$, onde $\hat{L}$ é a álgebra de Lie com base que consiste nos monômios standard de 3 tipos.

Capítulo 3

Base monomial da álgebra de Lie L

3.1 Relações entre os elementos pivô

Antes de discutir relações entre elementos da álgebra $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$, fazemos uma pequena observação:

Observação 3.1.1. *Identificamos cada elemento $x_i \in \Delta$ com o endomorfismo:*

$$l_{x_i} : \Delta \to \Delta$$

definido por $l_{x_i}(q) = x_i q, \quad \forall q \in \Delta$. Desta forma, $\{x_i, \partial_i | i \geq 0\} \subset \mathrm{End}\,\Delta$.

Valem as seguintes relações:

- $x_i x_j = x_j x_i, \quad \partial_i x_j = x_j \partial_i, \quad \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i,$ *se* $i \neq j$;
- $x_i^p = \partial_i^p = 0,$ *para* $i \geq 0$;
- $\partial_i x_i - x_i \partial_i = 1,$ *para* $i \geq 0$.

Vejamos agora como os elementos pivô agem sobre as variáveis comutativas.

Lema 3.1.1. *As seguintes relações valem:*

- $v_n(x_k) = 0,$ *se* $k < n$;
- $v_n(x_k) = 1,$ *se* $k = n$;
- $v_n(x_k) = x_n^{p-1} x_{n+1}^{p-1} \hat{x}_{n+2} x_{n+3}^{p-1} x_{n+4}^{p-1} \ldots \hat{x}_{n+3l-4} x_{n+3l-3}^{p-1} x_{n+3l-2}^{p-1},$ *se* $k = n + 3l,\ l \geq 1$;
- $v_n(x_k) = 0,$ *se* $k > n$ *e* $k \not\equiv n \pmod 3$.

Demonstração. No primeiro item, temos que

$$v_n(x_k) = (\partial_n + x_n^{p-1}x_{n+1}^{p-1}(\partial_{n+3} + x_{n+3}^{p-1}x_{n+4}^{p-1}(\partial_{n+6} + \ldots)))(x_k) = 0.$$

Pois nenhuma das derivadas tem índice k. No segundo item temos que:

$$(\partial_n + x_n^{p-1}x_{n+1}^{p-1}v_{n+3})(x_k) = (\partial_n)(x_k) + (x_n^{p-1}x_{n+1}^{p-1}v_{n+3})(x_k) = 1.$$

Para o terceiro item, temos que:

$$\begin{aligned} v_n(x_k) &= (\partial_n + x_n^{p-1}x_{n+1}^{p-1}(\partial_{n+3} + \ldots + x_{n+3l-3}^{p-1}x_{n+3l-2}^{p-1}(\partial_{n+3l} + \ldots)\ldots))(x_{n+3l}) \\ &= x_n^{p-1}x_{n+1}^{p-1}\hat{x}_{n+2}x_{n+3}^{p-1}x_{n+4}^{p-1}\ldots\hat{x}_{n+3l-4}x_{n+3l-3}^{p-1}x_{n+3l-2}^{p-1}. \end{aligned}$$

E, finalmente, para o último item temos que:

$$v_n(x_k) = 0.$$

Pois o nenhum índice das derivadas coincide com k.

□

Agora veremos como se relacionam os elementos pivô da álgebra de Lie $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$.

Lema 3.1.2. *São válidas as seguintes relações para $i \geq 0$:*

i) $[v_i, v_{i+1}] = x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-2}v_{i+3}$;

ii) $[v_i, v_{i+3}] = 0$;

iii) $[v_i, v_{i+2}] = -x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}x_{i+2}^{p-1}x_{i+3}^{p-2}v_{i+5}$;

iv) $[v_i^p, v_{i+1}] = -x_{i+1}^{p-2}v_{i+3}$.

Demonstração. Note que:

$$\begin{aligned} [v_i, v_{i+1}] &= [\partial_i + x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}v_{i+3}, \partial_{i+1} + x_{i+1}^{p-1}x_{i+2}^{p-1}v_{i+4}] \\ &= [\partial_i, \partial_{i+1}] + [\partial_i, x_{i+1}^{p-1}x_{i+2}^{p-1}v_{i+4}] + [x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}v_{i+3}, \partial_{i+1}] + [x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}v_{i+3}, x_{i+1}^{p-1}x_{i+2}^{p-1}v_{i+4}] \\ &= -[\partial_{i+1}, x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}v_{i+3}] = -(p-1)x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-2}v_{i+3} = x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-2}v_{i+3}. \end{aligned}$$

O que prova o primeiro item. Desde que $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ é uma álgebra de Lie, segue que:

$$[v_i, v_{i+3}] = [\partial_i + x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}v_{i+3}, v_{i+3}] = 0.$$

O que prova o segundo item. Utilizando então os itens *i*) e *ii*) temos:

$$[v_i^p, v_{i+1}] = (\mathrm{ad}\, v_i)^{p-1}[v_i, v_{i+1}] = (\mathrm{ad}\, v_i)^{p-1}(x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-2}v_{i+3}) = (p-1)!x_{i+1}^{p-2}v_{i+3} = -x_{i+1}^{p-2}v_{i+3}.$$

Provando assim o quarto item. Por fim, para provar iii), temos que:

$$\begin{aligned}[v_i, v_{i+2}] &= [\partial_i + x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}\partial_{i+3} + x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}x_{i+3}^{p-1}x_{i+4}^{p-1}v_{i+6}, \partial_{i+2} + x_{i+2}^{p-1}x_{i+3}^{p-1}v_{i+5}] \\ &= [x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}\partial_{i+3}, x_{i+2}^{p-1}x_{i+3}^{p-1}v_{i+5}] = -x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}x_{i+2}^{p-1}x_{i+3}^{p-2}v_{i+5}.\end{aligned}$$

□

Lema 3.1.3. *A seguinte relação vale para $i \geq 0$:*

$$[v_{i+1}^{p-1}, v_i^p] = v_{i+3}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.2, Item *iv*), temos que $[v_{i+1}, v_i^p] = x_{i+1}^{p-2}v_{i+3}$. Segue que

$$\begin{aligned}[v_{i+1}^{p-1}, v_i^p] &= (\mathrm{ad}\, v_{i+1})^{p-2}[v_{i+1}, v_i^p] = (\mathrm{ad}\, v_{i+1})^{p-2}(x_{i+1}^{p-2}v_{i+3}) \\ &= (p-2)!v_{i+3} = v_{i+3},\end{aligned}$$

pois a ação sobre v_{i+3} pela potência do fator x_{i+1} dá zero (veja o Item *ii*) do Lema 3.1.2) Portanto, $[v_i^p, v_{i+1}^{p-1}] = -v_{i+3}$. □

O lema a seguir mostra como calcular o colchete de Lie entre dois elementos pivô quaisquer, generalizando os itens do Lema 3.1.2.

Lema 3.1.4. *Para quaisquer inteiros $i, k \geq 0$, temos:*

i) $[v_i, v_{i+3k}] = 0$;

ii) $[v_i, v_{i+3k+1}] = (x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}\hat{x}_{i+2}\cdots x_{i+3k-3}^{p-1}x_{i+3k-2}^{p-1}\hat{x}_{i+3k-1})x_{i+3k}^{p-1}x_{i+3k+1}^{p-2}v_{i+3k+3}$;

iii) $[v_i, v_{i+3k+2}]$
$= -(x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}\hat{x}_{i+2}\cdots x_{i+3k-3}^{p-1}x_{i+3k-2}^{p-1}\hat{x}_{i+3k-1})x_{i+3k}^{p-1}x_{i+3k+1}^{p-1}x_{i+3k+2}^{p-1}x_{i+3k+3}^{p-2}v_{i+3k+5}$.

Demonstração. Caso (i):

$$\begin{aligned}[v_i, v_{i+3k}] &= [\partial_i + x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}(\partial_{i+3} + \ldots + h(x_j)v_{i+3k}), v_{i+3k}] \\ &= x_i^{p-1}x_{i+1}^{p-1}\hat{x}_{i+2}\cdots x_{i+3k-3}^{p-1}x_{i+3k-2}^{p-1}\hat{x}_{i+3k-1}[v_{i+3k}, v_{i+3k}] = 0.\end{aligned}$$

Caso (ii):

$$[v_i, v_{i+3k+1}] = x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} \hat{x}_{i+2} \cdots x_{i+3k-3}^{p-1} x_{i+3k-2}^{p-1} \hat{x}_{i+3k-1} [v_{i+3k}, v_{i+3k+1}]$$
$$= (x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} \hat{x}_{i+2} \cdots x_{i+3k-3}^{p-1} x_{i+3k-2}^{p-1} \hat{x}_{i+3k-1}) x_{i+3k}^{p-1} x_{i+3k+1}^{p-2} v_{i+3k+3}.$$

Caso (iii):

$$[v_i, v_{i+3k+2}] = x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} \hat{x}_{i+2} \cdots x_{i+3k-3}^{p-1} x_{i+3k-2}^{p-1} \hat{x}_{i+3k-1} [v_{i+3k}, v_{i+3k+2}]$$
$$= -(x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} \hat{x}_{i+2} \cdots x_{i+3k-3}^{p-1} x_{i+3k-2}^{p-1} \hat{x}_{i+3k-1}) x_{i+3k}^{p-1} x_{i+3k+1}^{p-1} x_{i+3k+2}^{p-1} x_{i+3k+3}^{p-2} v_{i+3k+5}.$$

□

Lema 3.1.5. *Para todo $i \geq 0$, vale*

$$v_i^p = -x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}.$$

Demonstração. Na álgebra de Lie $\operatorname{End}^{(-)} \Delta$, a correspondência $x \mapsto x^p$ define uma p-aplicação. Dessa forma, para $x, y \in \operatorname{End} \Delta$, temos que:

$$(x+y)^p = x^p + y^p + (\operatorname{ad} y)^{p-1}(x) + \sum_{i=2}^{p-1} s_i(x, y),$$

onde $s_i(x, y)$ são os comutadores que contêm i letras x e $p - i$ letras y. Segue então que:

$$v_i^p = (\partial_i + x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3})^p$$
$$= (\partial_i)^p + (x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3})^p + \operatorname{ad}(\partial_i)^{p-1}(x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}) + \sum_{i=2}^{p-1} s_i(x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}, \partial_i).$$

Para $2 \leq i \leq p-1$, o termo $s_i(x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}, \partial_i)$ envolve comutadores em que o elemento $x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}$ aparece em grau maior ou igual a 2 é trivial por causa do grau de x_{i+1}. Isso implica que $s_i(x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}, \partial_i) = 0$, para todo $i \in \{2, \ldots, p-1\}$. Segue então que

$$v_i^p = (\operatorname{ad} \partial_i)^{p-1}(x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}) = -x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}.$$

O que prova o lema. □

Lema 3.1.6. *Todos os elementos pivô pertencem a $L = \operatorname{Lie}(v_0, v_1, v_2)$.*

Demonstração. Temos que $v_0, v_1, v_2 \in L$. Seja $n \geq 3$ e suponha que $v_k \in L$ para todo $0 \leq k < n$. Pelo Lema 3.1.2, Item i), temos que

$$[v_{n-3}, v_{n-2}] = x_{n-3}^{p-1} x_{n-2}^{p-2} v_n.$$

Agindo com v_{n-2} e (ou) v_{n-3} (que por hipótese são elementos de L), um número suficiente de vezes, ganhamos que $v_n \in L$, o que conclui a prova. □

Definição 3.1.7. *Definimos álgebras de Lie (restritas) da seguinte forma*

$$L_{(i)} := \mathrm{Lie}\,(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}), \qquad i \geq 0.$$

Definimos também o endomorfismo "shift":

$$\tau(x_i) = x_{i+1},\ \ \tau(\partial_i) = \partial_{i+1} \qquad \text{para } i \geq 0.$$

Lema 3.1.8. *Seja $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$. Então*

1) $\tau : L \to L$ é um endomorfismo;

2) $\tau^i : L \to L_{(i)}$ é um isomorfismo, para $i \geq 0$;

3) Temos cadeia de subálgebras isomorfas:

$$L = L_{(0)} \supsetneq L_{(1)} \supsetneq \ldots \supsetneq L_{(i)} \supsetneq \ldots, \qquad \bigcap_{i=0}^{\infty} L_{(i)} = \{0\}.$$

Chamamos a álgebra L *fractal*. Provavelmente, a álgebra L não é *autossimilar* na definição de Bartholdi [5, 6].

3.2 Bases monomiais das álgebras L e L_p

A partir de agora, tentaremos exibir bases para a álgebra de Lie $L := \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ e para a álgebra de Lie restrita $L_p := \mathrm{Lie}_p\,(v_0, v_1, v_2)$, utilizando das relações estabelecidas anteriormente. Para simplificar a notação, denotaremos por r_n um monômio "cauda":

$$r_n = x_0^{\eta_0} \cdots x_n^{\eta_n}, \quad \eta_0, \ldots, \eta_n \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad n \geq 0.$$

Quando necessário, denotaremos outros monômios cauda por r'_n, r''_n, etc.

Definição 3.2.1. *a) Os monômios v_0, v_1, v_2 e todos os monômios do tipo*

$$r_{n-3} x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n, \quad 0 \leq \xi_{n-2} \leq p-2, \quad n \geq 3$$

*serão chamados de **monômios quasi-standard do primeiro tipo**.*

b) Os monômios da forma

$$x_{n-2}^{p-1} v_n, \quad n \geq 2$$

*serão nomeados como **monômios standard do segundo tipo**.*

*O número n é chamado de **comprimento do monômio**.*

Teorema 3.2.2. *Considere* $\operatorname{char} K = p > 0$. *Uma base da álgebra de Lie* $L = \operatorname{Lie}(v_0, v_1, v_2)$ *é dada pelos seguintes* ***monômios standard do primeiro tipo****:*

$$B =\{v_0, v_1, v_2\} \cup \{r_{n-3}x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n | \;\; 0 \leq \xi_{n-2} \leq p-2, \; n \geq 3\}$$
$$\setminus \{x_0^{\xi_0}x_1^{\xi_1}x_2^{\xi_2}v_4, x_0^{\xi_0}x_1^{\xi_1}x_2^{\xi_2}x_3^{p-1}x_4^{\xi_4}x_5^{p-2}v_7\}.$$

Onde acima $\xi_0 \neq 0$, *isto é*

a) *Em monômios de comprimento* 4 *não pode constar* x_0 *com* $\xi_0 \neq 0$.

b) *Em monômios de comprimento* 7, *caso* $\xi_5 = p-2$, *não podem constar simultaneamente os termos* $x_0^{\xi_0}$ *com* $\xi_0 \neq 0$ *e* x_3^{p-1}.

Nos referimos aos monômios excluídos como ***monômios falsos do primeiro tipo****.*

Demonstração. Devemos provar que todos os monômios standard pertencem a L. Sabemos pelo Lema 3.1.6 que $\{v_i | i \geq 0\} \subset L$. Usando o Lema 3.1.2, concluímos que $[v_0, v_1] = x_0^{p-1}x_1^{p-2}v_3$ e $[v_1, v_2] = x_1^{p-1}x_2^{p-2}v_4$. Considerando comutadores com v_0, v_1, v_2, podemos diminuir potências de x_0, x_1, x_2 nesses monômios. Portanto, todos os monômios não falsos do primeiro tipo, de comprimento no máximo 4, pertencem a L. Esta é a base da indução.

Seja agora $n \geq 5$ e assuma que os monômios standard do primeiro tipo de comprimento menor do que n pertencem a L. Pelo Lema 3.1.2, temos que:

$$[r_{n-6}v_{n-3}, v_{n-5}] = r_{n-6}[v_{n-3}, v_{n-5}] = r_{n-6}x_{n-5}^{p-1}x_{n-4}^{p-1}x_{n-3}^{p-1}x_{n-2}^{p-2}v_n \in L. \tag{3.1}$$

Multiplicando pelos elementos pivô conseguimos cada um dos monômios standard. Entretanto, este argumento falha quando $r_{n-6}v_{n-3}$ é um monômio falso.

a) Vamos então obter todos os monômios não falsos de comprimento 7. Caso $r_{n-6}v_{n-3} = r_2v_4$ seja falso, usamos computações diferentes. Consideramos

$$[v_2, x_1^{p-1}v_4] = -x_1^{p-1}x_2^{p-1}x_3^{p-1}x_4^{p-1}x_5^{p-2}v_7.$$

Deletando as letras x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, obtemos todos os monômios não falsos de comprimento 7 onde não consta o termo $x_0^{\xi_0}$ com $\xi_0 \neq 0$. Agora, se fizermos

$$[v_4, x_0^{p-1}x_1^{p-1}x_2^{p-1}x_3^{p-2}v_5] = x_0^{p-1}x_1^{p-1}x_2^{p-1}x_3^{p-2}x_4^{p-1}x_5^{p-2}v_7;$$

e deletando as letras $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, obtemos todos os monômios não falsos de comprimento 7 onde não consta o termo x_3^{p-1}. Temos também no caso $p \geq 3$

$$[x_3 v_5, x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} x_3^{p-2} x_4^{\xi_4} x_5^{p-2} v_7] = -2 \cdot x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} x_3^{p-1} x_4^{\xi_4} x_5^{p-3} v_7.$$

Desta forma obtemos todos os monômios não-falsos de comprimento 7, como desejado.

b) Agora vamos mostrar que podemos obter todos os monômios standard de comprimento 10, caso o primeiro termo em (3.1) seja falso. Note que $x_0^{p-1} \cdots x_4^{p-1} v_7$ não é falso. Temos

$$[x_0^{p-1} \cdots x_4^{p-1} v_7, v_5] = x_0^{p-1} \cdots x_4^{p-1} x_5^{p-1} x_6^{p-1} x_7^{p-1} x_8^{p-2} v_{10}.$$

Desta forma podemos obter todos os monômios standard de comprimento 10.

Vamos provar agora que produtos de monômios standard são combinações lineares de monômios standard. Escreveremos dois monômios standard do primeiro tipo da seguinte forma: $a = r_{n-2} v_n$, $b = \tilde{r}_{m-2} v_m$ onde assumiremos que $0 \leq n < m$ já que se $n = m$ então $[v_n, v_m] = 0$, pois L é álgebra de Lie. Observamos tambem que os produtos a seguir podem eventualmente resultar em elementos com alguns termos nulos caso algum termo x_i apareça com potência maior ou igual a p. Por simplicidade vamos supor que x_i apareça com potência no máximo $p-1$. Dividiremos esta parte da prova em três casos:

(1) Seja $n \equiv m \pmod 3$. Usando a forma recursiva (2.3) escreveremos o monômio a com a seguinte apresentação:

$$a = r_{n-2} \partial_n + r_{n+1} \partial_{n+3} + \ldots + r_{m-5} \partial_{m-3} + r_{m-2} v_m$$

logo:

$$[a, b] = (r_{n-2} \partial_n (\tilde{r}_{m-2}) + r_{n+1} \partial_{n+3} (\tilde{r}_{m-2}) + \ldots + r_{m-5} \partial_{m-3} (\tilde{r}_{m-2})) v_m. \tag{3.2}$$

Todos os termos são standard de primeiro tipo, pois b é monômio standard de primeiro tipo.

Devemos checar que a ação nas caudas em (3.2) não produz monômios falsos. Essa consideração é feita para todos os 3 casos dos resíduos módulo 3. Também temos 2 possibilidades: $m = 4$ ou $m = 7$.

a) O caso em que b é monômio standard de comprimento 4 é trivial, desde que em (3.2) temos $n \leq m-2 \leq 2$, logo a ação se dará por monômios a de comprimento no máximo 2, os quais não têm caudas, logo o monômio resultante não conterá termo $x_0^{\xi_0}$ com $\xi_0 \neq 0$.

b) Analisemos o caso em que b é um monômio standard de comprimento 7. Considere o termo sem $x_0^{\xi_0}$ com $\xi_0 \neq 0$. Estamos agindo sobre (3.2) com monômios finalizando com ∂_k, onde $k \leq 5$. Deletar o termo x_5 não tem sentido. Observe que todos os monômios standard de comprimento $1, 2$ e 4 não contêm o termo $x_0^{\xi_0}$ com $\xi_0 \neq 0$ logo a ação por estes monômios não pode gerar um monômio falso. Então, as possibilidades de obter o termo $x_0^{\xi_0}$ com $\xi_0 \neq 0$ são monômios de comprimento 0 ou 3. Temos $x_0^{\xi_0} v_3 = x_0^{\xi_0}(\partial_3 + x_3^{p-1} x_4^{p-1} v_6)$ ou $v_0 = \partial_0 + x_0^{p-1} x_1^{p-1} \partial_3 + x_0^{p-1} x_1^{p-1} x_3^{p-1} x_4^{p-1} v_6$. Portanto podemos obter $x_0^{\xi_0}$ no preço de perder o termo x_3^{p-1}, e o resultado é portanto um monômio não falso. Finalmente, se no monômio de comprimento 7 não consta o termo x_3^{p-1} então a ação acima não pode produzir x_3^{p-1} pois nos monômios de comprimento no máximo 4 não consta a letra x_3. Isto prova o caso (1).

(2) Seja $m - n \equiv 1 \pmod 3$.

Neste caso temos:

$$a = r_{n-2}\partial_n + r_{n+1}\partial_{n+3} + \ldots + r_{m-6}\partial_{m-4} + r_{m-3}v_{m-1}.$$

Logo

$$[a, b] = (r_{n-2}\partial_n(\tilde{r}_{m-2}) + r_{n+1}\partial_{n+3}(\tilde{r}_{m-2}) + \ldots + r_{m-6}\partial_{m-4}(\tilde{r}_{m-2}))v_m + r''_{m-2}[v_{m-1}, v_m].$$

Todos os monônios, exceto o último, não são falsos, pelas considerações feitas acima. Pelo Lema 3.1.2 o último termo é:

$$r''_{m-2}[v_{m-1}, v_m] = r''_{m-2} x_{m-1}^{p-1} x_m^{p-2} v_{m+2}, \tag{3.3}$$

que é um monômio standard do primeiro tipo. Precisamos checar que o monômio (3.3) não é falso. Consideremos que este tem comprimento 4, logo $m = 2$ e temos somente $[v_1, v_2] = x_1^{p-1} x_2^{p-2} v_4$. Agora, se o monômio (3.3) tem comprimento 7, ou seja, $m = 5$, então elementos da forma $x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} v_4$ são multiplicados por $x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} x_3^{\xi_3} v_5$ com $\xi_3 \in \{1, \ldots, p-2\}$ portanto não temos o termo x_3^{p-1}. Logo o produto não pode resultar em monômio falso.

(3) Seja $m - n \equiv 2 \pmod 3$. Neste caso temos:

$$a = r_{n-2}\partial_n + r_{n+1}\partial_{n+3} + \ldots + r_{m-7}\partial_{m-5} + r_{m-4}v_{m-2}.$$

Logo

$$[a, b] = (r_{n-2}\partial_n(\tilde{r}_{m-2}) + r_{n+1}\partial_{n+3}(\tilde{r}_{m-2}) + \ldots + r_{m-7}\partial_{m-5}(\tilde{r}_{m-2}))v_m + r''_{m-2}[v_{m-2}, v_m].$$

Pelo Lema 3.1.2, o último termo é:

$$r''_{m-2}[v_{m-2}, v_m] = -r''_{m-2}x_{m-2}^{p-1}x_{m-1}^{p-1}x_m^{p-1}x_{m+1}^{p-2}v_{m+3}, \tag{3.4}$$

o qual é standard do primeiro tipo. Precisamos verificar que o monômio (3.4) não é falso. Considere comprimento 4, logo $m = 1$ e desta forma não existem produtos. Consideremos agora o comprimento 7, então $m = 4$, $n = 2$ e temos

$$[v_2, x_1^{\xi_1}x_2^{\xi_2}v_4] = -x_1^{\xi_1}x_2^{p-1}x_3^{p-1}x_4^{p-1}x_5^{p-2}v_7,$$

que não é falso pois não consta o termo $x_0^{\xi_0}$ com $\xi_0 \neq 0$.

□

Corolário 3.2.3. *Seja $L_p := \mathrm{Lie}_p(v_0, v_1 v_2)$ a p-álgebra de Lie gerada por v_0, v_1, v_2. Uma base de L_p é dada por*

1) Os monômios standard do primeiro tipo;

2) Os monômios standard do segundo tipo.

Demonstração. Usamos o fato de que basta adicionar $\{w_j^{p^k} | j, k \geq 0\}$, onde $\{w_j | j \in J\}$ é uma base de L. Basta portanto, adicionar à base de L as p-potências dos elementos pivô. A independência linear do conjunto de todos os monômios standard é feita usando argumento padrão. □

Capítulo 4

Funções peso

4.1 Polinômio característico

Nosso objetivo agora é obter o crescimento da álgebra de Lie restrita $L = \mathrm{Lie}_p\,(v_0, v_1, v_2)$. Para isto recorreremos ao uso de *funções peso*. Suponhamos que os pesos da derivações ∂_i e das letras x_i satisfazem:

$$\mathrm{wt}\,(\partial_i) = -\,\mathrm{wt}\,(x_i) = \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad i \geq 0.$$

Queremos que todos os termos da relação de recorrência

$$v_i = \partial_i + x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}, \quad i \geq 0 \tag{4.1}$$

tenham o mesmo peso e que, além disso, a função peso seja aditiva em monômios nas letras $\{x_i, \partial_i, v_i | i \geq 0\}$. Temos então que:

$$\alpha_i := \mathrm{wt}\,(v_i) = \mathrm{wt}\,(\partial_i) = \mathrm{wt}\,(x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} v_{i+3}) = -(p-1)\alpha_i - (p-1)\alpha_{i+1} + \alpha_{i+3}.$$

Logo temos que, para $i \geq 0$:

$$\alpha_{i+3} = p\alpha_i + (p-1)\alpha_{i+1}.$$

O que nos dá a equação característica

$$x^3 - (p-1)x - p = 0. \tag{4.2}$$

Pela fórmula de Cardano para soluções de equações do terceiro grau, temos que uma das 3 soluções desta equação é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{(p-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{(p-1)^3}{27}}},$$

onde das raízes de terceiro grau são determinadas de modo específico. Destacamos aqui o radicando $D = \frac{p^2}{4} - \frac{(p-1)^3}{27}$:

a) Se $D > 0$ então a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

b) Se $D = 0$ a equação tem três raízes reais, onde uma delas tem multiplicidade dois.

c) Se $D < 0$ a equação tem três raízes reais distintas.

Uma verificação rápida nos mostra que se $p \leq 7$ então $D > 0$ e se $p > 7$ então $D < 0$. Iremos tratar separadamente estes dois casos.

4.2 Raízes do polinômio característico no caso $p \leq 7$

A equação possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas. Denotamos então:

$$\epsilon := \exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2};$$
$$\theta_1 := \sqrt[3]{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{(p-1)^3}{27}}};$$
$$\theta_2 := \sqrt[3]{\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{(p-1)^3}{27}}};$$

Observe que $\theta_1\theta_2 = \sqrt[3]{\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} - \frac{(p-1)^3}{27}} = -\frac{p-1}{3}$.

Por teoria as raizes de terceiro grau são escolhidas de mono a ter três raizes distintas da seguinte forma:

$$t_k := \epsilon^k\theta_1 + \epsilon^{-k}\theta_2, \quad k \in \{0,1,2\}. \tag{4.3}$$

Denotamos estas raízes como

$$\lambda = t_0 := \theta_1 + \theta_2;$$
$$\mu = t_1 := \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2;$$
$$\bar{\mu} = t_2 := \epsilon^2\theta_1 + \epsilon\theta_2.$$

A seguir, apresentamos uma tabela com os valores aproximados das raízes λ, μ e $|\mu|$, para $p = 2, 3, 5, 7$.

p	λ	μ	$\lvert\mu\rvert$
2	$1,5213...$	$-0,7606... + i0,8578...$	$1,1464...$
3	$1,8932...$	$-0,9466... + i0,8297...$	$1,2587...$
5	$2,4566...$	$-1,2283... + i0,7255...$	$1,4265...$
7	$2,9005...$	$-1,4502... + i0,5567...$	$1,5533...$

Tabela 4.2.1: Valores das raízes do polinômio característico para $2 \leq p \leq 7$.

Pelas fórmulas de Viete temos que

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \bar{\mu} = 0; \\ \lambda\mu + \lambda\bar{\mu} + \mu\bar{\mu} = 1 - p; \\ \lambda\mu\bar{\mu} = p. \end{cases}$$

Portanto $|\mu|^2 = \mu\bar{\mu} = \frac{p}{\lambda}$. A equação característica tambem garante:

$$\frac{p}{\lambda} = \lambda^2 + 1 - p; \quad \frac{p}{\mu} = \mu^2 + 1 - p; \quad \frac{p}{\bar{\mu}} = \bar{\mu}^2 + 1 - p.$$

Lema 4.2.1. *Seja $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Temos que $\lambda > |\mu| = |\overline{\mu}|$.*

Demonstração. Usando (4.3), $|\mu| = |\epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2| < \theta_1 + \theta_2 = \lambda$, pois $\epsilon\theta_1$ e $\epsilon^2\theta_2$ são vetores não paralelos. Temos que $|\overline{\mu}| = |\mu| < \lambda$.

□

4.3 Raízes do polinômio característico no caso $p \geq 11$

A equação possui 3 raizes reais distintas.

Lema 4.3.1. *Seja $p > 7$, então temos uma raíz positiva $\lambda := \lambda_1$ e duas raízes negativas λ_2, λ_3 de modo que $\lambda_1 > |\lambda_2|$ e $\lambda_1 > |\lambda_3|$.*

Demonstração. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as 3 raízes reais distintas, pelas fórmulas de Viete temos que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = p. \end{cases}$$

A primeira equação garante que existem raízes positivas e negativas. A segunda equação garante que uma das raízes é positiva e duas são negativas. Denotamos λ_1 a raíz positiva e λ_2, λ_3 as raízes negativas. Pelas fórmulas de Viete temos que $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$, portanto $\lambda_1 > |\lambda_2|$ e $\lambda_1 > |\lambda_3|$. $\square$

Podemos fazer um estudo do polinômio característico afim de obter uma estimativa para as raízes reais distintas. Considere

$$f(x) = x^3 - (p-1)x - p, \tag{4.4}$$

com $p > 7$ primo, então $f'(x) = 3x^2 - (p-1)$. Obtemos duas raízes da derivada, que são $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{p-1}{3}}$. Além disso temos que $f''(x) = 6x$, o que nos dá a informação de que $x = 0$ é um ponto de inflexão do gráfico de f. Note que a função $f'(x)$ é positiva em $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ e negativa em (x_1, x_2), além de que $f(x_1) = 2\left(\frac{p-1}{3}\right)^{3/2} - p,\quad f(x_2) = -2\left(\frac{p-1}{3}\right)^{3/2} - p$ e $f(-1) = -2$.

Com estas informações, conseguimos esboçar o gráfico da função $f(x)$ e determinar estimativas para as raízes α_1, α_2 e α_3 através do teorema do valor intermediário.

Lema 4.3.2. *Seja $f(t) = t^3 - (p-1)t - p$ o polinômio característico e λ uma raiz qualquer de f. Denotemos $g(t) = t^2 - t + (2-p)$ e $\theta := g(\lambda)$. Então $\theta = \frac{2}{1+\lambda}$.*

Demonstração. Desde que λ é raiz de g, temos que $\lambda^3 - (p-1)\lambda - p = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda\theta &= \lambda(\lambda^2 - \lambda + 2 - p) = \lambda^3 + \lambda(1-p) + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^3 - (p-1)\lambda - p + p + \lambda - \lambda^2 = 2 - (\lambda^2 - \lambda + (2-p)) = 2 - \theta.
\end{aligned}$$

Portanto $\theta(\lambda+1) = 2$ o que implica $\theta = \frac{2}{1+\lambda}$. $\square$

Corolário 4.3.3. *Dadas as notações do Lema 4.3.2, e considerando λ a raiz positiva do polinômio característico f, valem as seguintes desigualdades*

a) $\theta > \frac{2}{\lambda^2}$, se $p > 2$.

b) $\theta > 1,3\frac{2}{\lambda^3}$, se $p \geq 2$.

Demonstração. a) Note que $1 + x < x^2$ vale para $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Observando a Tabela 4.2.1 dos valores de λ para diferentes valores de p, a desigualdade vale para $p \geq 3$.

b) No caso em que $p = 2$ utilizamos a desigualdade $1 + \lambda < \frac{\lambda^3}{1,3}$, onde $\lambda = 1,5213...$, para verificar diretamente que:

$$\theta = \frac{2}{1+\lambda} > 1,3\frac{2}{\lambda^3}.$$

□

Lema 4.3.4. *Seja $p \geq 11$. As estimativas para as raízes reais distintas $\alpha_3 < \alpha_2 < 0 < \alpha_1$ são dadas por:*

i) $\sqrt{p} < \alpha_1 < \sqrt{p} + 1/2$ *(válido para a raíz positiva $\lambda = \alpha_1$, para qualquer p);*

ii) $-\sqrt{p} + 1/2 < \alpha_3 < -\sqrt{p} + 1$, *no caso $p \geq 13$;*

iii) $-1 - \frac{3}{p-4} < \alpha_2 < -1 - \frac{2}{p-4}$.

Demonstração. Vamos provar os três itens:

i) Note que

$$f(\sqrt{p}) = \sqrt{p} \cdot p - (p-1)\sqrt{p} - p = \sqrt{p} - p < 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{p} + 1/2) &= (\sqrt{p} + 1/2)^3 - (p-1)(\sqrt{p} + 1/2) - p \\ &= p\sqrt{p} + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4}\sqrt{p} + \frac{1}{8} - p\sqrt{p} + \sqrt{p} - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} - p \\ &= \frac{7}{4}\sqrt{p} + \frac{5}{8} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, Existe uma raiz de $f(x)$ entre $\sqrt{p}$ e $\sqrt{p} + 1/2$. Sabemos que existe apenas uma raiz positiva, para qualquer p, logo esta deve ser α_1.

ii) Note que

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{p} + 1/2) &= (-\sqrt{p} + 1/2)^3 - (p-1)(-\sqrt{p} + 1/2) - p \\ &= -p\sqrt{p} + \frac{3}{2}p - \frac{3}{4}\sqrt{p} + \frac{1}{8} + p\sqrt{p} - \sqrt{p} - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} - p \\ &= -\frac{7}{4}\sqrt{p} + \frac{5}{8} < 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{p} + 1) &= (-\sqrt{p} + 1)^3 - (p-1)(-\sqrt{p} + 1) - p \\ &= -p\sqrt{p} + 3p - 3\sqrt{p} + 1 + p\sqrt{p} - \sqrt{p} - p + 1 - p \\ &= p - 4\sqrt{p} + 2 = (\sqrt{p} - 2)^2 - 2 > 0, \end{aligned}$$

no caso $p \geq 13$. Portanto, $-\sqrt{p} + 1/2 < \alpha_3 < -\sqrt{p} + 1$.

iii) Note que

$$
\begin{aligned}
f\left(-1-\frac{2}{p-4}\right) &= -\left(1+\frac{2}{p-4}\right)^3-(p-1)\left(-1-\frac{2}{p-4}\right)-p\\
&= -1-\frac{6}{p-4}-\frac{12}{(p-4)^2}-\frac{8}{(p-4)^3}+p-1+\frac{2(p-1)}{p-4}-p\\
&= -\frac{12}{(p-4)^2}-\frac{8}{(p-4)^3}<0.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
f\left(-1-\frac{3}{p-4}\right) &= -\left(1+\frac{3}{p-4}\right)^3-(p-1)\left(-1-\frac{3}{p-4}\right)-p\\
&= -1-\frac{9}{p-4}-\frac{27}{(p-4)^2}-\frac{27}{(p-4)^3}+p-1+\frac{3(p-1)}{p-4}-p\\
&= 1-\frac{27}{(p-4)^2}-\frac{27}{(p-4)^3}>0,
\end{aligned}
$$

pois $p \geq 11$. Portanto, $-1-\frac{3}{p-4}<\alpha_2<-1-\frac{2}{p-4}$.

□

A origem das estimativas do Lema 4.3.4 pode ser explicada através do método de Newton-Raphson. Aproximamos, por exemplo, a raiz α_2 por um número θ_0 inicialmente. A reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(\theta_0, f(\theta_0))$ tem a equação

$$y = f(\theta_0) + f'(\theta_0)(x-\theta_0).$$

Aplicando uma iteração do método de Newton-Raphson, a interseção da reta tangente com o eixo x é um valor mais "próximo"da raiz:

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}.$$

Repetindo o processo, temos uma sequência gerada pelas iterações

$$\theta_{k+1} := \theta_k - \frac{f(\theta_k)}{f'(\theta_k)}, \quad k \geq 0.$$

Considerando então $\theta_0 = -1$, temos que $f(-1) = -2$ e $f'(-1) = 4-p < 0$. Pelo método de Newton $\theta_1 = -1-\frac{2}{p-4}$. Note que

$$
\begin{aligned}
f(\theta_1) &= -\left(1+\frac{2}{p-4}\right)^3-(p-1)\left(-1-\frac{2}{p-4}\right)-p\\
&= -1-\frac{6}{p-4}-\frac{12}{(p-4)^2}-\frac{8}{(p-4)^3}+p-1+\frac{2(p-1)}{p-4}-p\\
&= -\frac{12}{(p-4)^2}-\frac{8}{(p-4)^3}<0,
\end{aligned}
$$

além de que

$$f'(\theta_1) = 3\left(1 + \frac{2}{p-4}\right)^2 - p + 1 = 4 - p + \frac{12}{p-4} + \frac{12}{(p-4)^2}.$$

Portanto, desde que

$$\begin{aligned}\frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)} &= \frac{-\frac{1}{(p-4)^2}\left(12 + \frac{8}{p-4}\right)}{(4-p)\left(1 - \frac{12}{(p-4)^2} - \frac{12}{(p-4)^3}\right)} \\ &= \frac{12}{(p-4)^3}\left(1 + \eta(p)\right), \qquad \lim_{p\to\infty} \eta(p) = 0.\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)} = -1 - \frac{2}{p-4} - \frac{12}{(p-4)^3} + o\left(\frac{1}{(p-4)^4}.\right).$$

Repetindo este processo, conseguimos valores cara vez mais próximos da raíz α_2 o que nos dá um comportamento assintótico de α_2.

A seguir, apresentamos uma tabela com os valores aproximados das raízes α_1, α_2 e α_3, para $p = 11, 13, 17, 19, 23, 29$.

p	$\lambda = \alpha_1$	α_2	α_3
11	$3,6118...$	$-1,3413...$	$-2,2705...$
13	$3,9142...$	$-1,2436...$	$-2,6706...$
17	$4,4518...$	$-1,1601...$	$-3,2917...$
19	$4,6953...$	$-1,1372...$	$-3,5581...$
23	$5,1449...$	$-1,1071...$	$-4,0378...$
29	$5,7484...$	$-1,0808...$	$-4,6676...$

Tabela 4.3.1: Valores das raízes do polinômio característico para $p \geq 11$.

4.4 Funções de peso

No que segue, um monômio é qualquer produto (de Lie ou associativo) das letras $\{x_i, \partial_i, v_i | i \geq 0\} \subset \mathrm{End}\,(\Delta)$.

Lema 4.4.1. *Seja p arbitrário. Denotamos por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ as raízes, onde $\lambda = \lambda_1$ é a única raíz real positiva. Identificamos as funções peso com o espaço das soluções da equação de recorrência $\alpha_{i+3} = p\alpha_i + (p-1)\alpha_{i+1}$, então* *i) Uma base do espaço das funções peso é dada por*

$\mathrm{wt}\,(v_n) := \lambda_1^n, \quad n \geq 0$;

$\mathrm{swt}_1\,(v_n) := \lambda_2^n, \quad n \geq 0$;

$\mathrm{swt}_2\,(v_n) := \lambda_3^n, \quad n \geq 0$, *onde*

a) No caso $2 \leq p \leq 7$, *temos que* $\lambda = \lambda_1$ *é raíz real positiva e* $\lambda_2 = \mu$, $\lambda_3 = \overline{\mu}$ *são raízes complexas.*

b) No caso $p \geq 11$, *temos que* $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$, $\lambda_3 = \alpha_3$ *são raízes reais e* $\alpha_3 < \alpha_2 < -1 < 0 < \alpha_1$.

ii) Combinamos estas funções em uma função vetorial:

$\mathrm{Wt}\,(v_n) := (\mathrm{wt}\,(v_n), \mathrm{swt}_1\,(v_n), \mathrm{swt}_2(v_n)) = (\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n), \quad n \geq 0$ *(**vetor peso**);*

iii) As funçoes peso são bem definidas em monômios. Elas são aditivas sobre os produtos(de Lie ou associativos) de monômios, ou seja,

$$\mathrm{Wt}\,(ab) = \mathrm{Wt}\,(a) + \mathrm{Wt}\,(b),$$

onde a, b *são monômios em* A*;*

Para $p \leq 7$ as funções $\mathrm{swt}_1, \mathrm{swt}_2$ são complexas. Para evitar isso definimos também

Lema 4.4.2. *Seja* $p \leq 7$.

i) Denotamos as funções acima também como

$\mathrm{wt}\,(v_n) = \lambda^n, \quad n \geq 0$, *(**peso**);*

$\mathrm{swt}\,(v_n) = \mathrm{swt}_1\,(v_n) := \mu^n, \quad n \geq 0$ *(**super peso**);*

$\overline{\mathrm{swt}}\,(v_n) = \mathrm{swt}_2\,(v_n) := \overline{\mu}^n, \quad n \geq 0$ *(**super peso conjugado**).*

*ii) No lugar das funções complexas introduzimos duas **funções peso reais**:*

$\mathrm{wt}_1\,(v_n) = \mathrm{Re}\,(\mu^n) = \frac{\mu^n + \overline{\mu}^n}{2}, \quad n \geq 0$;

$\mathrm{wt}_2\,(v_n) = \mathrm{Im}\,(\mu^n) = \frac{\mu^n - \overline{\mu}^n}{2i}, \quad n \geq 0$.

iii) O vetor peso agora tem a seguinte forma:

$\mathrm{Wt}\,(v_n) = (\mathrm{wt}\,(v_n), \mathrm{swt}\,(v_n), \overline{\mathrm{swt}}\,(v_n)) = (\lambda^n, \mu^n, \overline{\mu}^n), \quad n \geq 0$ *(**vetor peso**);*

Introduzimos a função peso vetorial real:

$\mathrm{WtR}\,(v_n) = (\mathrm{wt}\,(v_n), \mathrm{wt}_1\,(v_n), \mathrm{wt}_2\,(v_n))$*(**vetor peso torçado**).*

iv) Seja w *um monômio, então* $\mathrm{WtR}\,(w) = (\mathrm{wt}\,w, \mathrm{Re}\,(\mathrm{swt}\,w), \mathrm{Im}\,(\mathrm{swt}\,w))$*;*

v) As funçoes peso são bem definidas em monômios. Elas são aditivas sobre os produtos(de Lie ou associativos) de monômios, ou seja,

$$\mathrm{WtR}\,(ab) = \mathrm{WtR}\,(a) + \mathrm{WtR}\,(b),$$

onde a, b são monômios em A.

Demonstração. Chequemos apenas a última afirmação. Seja w um elemento pivô, a igualdade segue por definição. Agora, as relações se extendem a todos os monômios por aditividade. □

4.5 $\mathbb{N}_0^3$-graduação e sistemas de 3 coordenadas

Como uma aplicação do Lema 4.4.2, vamos estabelecer uma $\mathbb{N}_0^3$-graduação.

Teorema 4.5.1. *Seja $p > 0$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ raízes distintas do polinômio característico 4.4. A álgebra de Lie $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ (ou álgebra de Lie restrita $\mathrm{Lie}_p\,(v_0, v_1, v_2)$) e seu fecho associativo $A = \mathrm{Alg}\,(v_0, v_1, v_2)$ são $\mathbb{N}_0^3$-graduadas por multigrau nos geradores $\{v_0, v_1, v_2\}$:*

$$L = \bigoplus_{n_1,n_2,n_3 \geq 0} L_{n_1,n_2,n_3}, \quad A = \bigoplus_{n_1,n_2,n_3 \geq 0} A_{n_1,n_2,n_3}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.4.2, os geradores têm os seguintes vetores peso:

$$\mathrm{Wt}\,(v_0) = (1, 1, 1), \quad \mathrm{Wt}\,(v_1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \mathrm{Wt}\,(v_2) = (\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2).$$

Para quaisquer $n_1, n_2, n_3 \geq 0$, seja $L_{n_1,n_2,n_3} \subset L$ o subespaço gerado por todos os monômios de Lie puros de multigrau (n_1, n_2, n_3) em $\{v_0, v_1, v_2\}$. Pelo Lema 4.4.2, todos os elementos $v \in L_{n_1,n_2,n_3}$ têm o mesmo vetor peso:

$$\mathrm{Wt}\,(v) = n_1\,\mathrm{Wt}\,(v_0) + n_2\,\mathrm{Wt}\,(v_1) + n_3\,\mathrm{Wt}\,(v_2).$$

Elementos de L_{n_1,n_2,n_3} são combinações lineares infinitas de monômios de Lie puros que têm o mesmo vetor peso. Desde que $\mathrm{Wt}\,(v_0)$, $\mathrm{Wt}\,(v_1)$ e $\mathrm{Wt}\,(v_2)$ são linearmente independentes, componentes diferentes L_{n_1,n_2,n_3} e $L_{n_1',n_2',n_3'}$, onde $(n_1, n_2, n_3) \neq (n_1', n_2', n_3')$, têm diferentes vetores peso, portanto seus elementos são expressos via conjuntos diferentes de monômios de Lie puros. Logo, a soma destas componentes é direta. A $\mathbb{N}_0^3$-graduação segue por definição destas componentes. □

Definição 4.5.2. *Dado um elemento homogêneo não-nulo* $v \in A_{n_1,n_2,n_3}$, $n_1, n_2, n_3 \geq 0$, *definimos seu* ***vetor multigrau*** *e seu* ***grau total****, respectivamente, da seguinte forma:*

$$\mathrm{Gr}\,(v) := (n_1, n_2, n_3), \quad \deg\,(v) := n_1 + n_2 + n_3.$$

Definição 4.5.3. *a) Pomos estes elementos no espaço utilizando coordenadas padrão* $(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$*, as quais chamamos de* ***coordenadas multigrau****. Então escrevemos,* $\mathrm{Gr}\,(v) = (n_1, n_2, n_3) = (X_1, X_2, X_3)$.

b) No caso p arbitrário, introduzimos também ***coordenadas peso***

$$(Z_1, Z_2, Z_3) := \mathrm{Wt}\,(v) \in \mathbb{C}^3.$$

c) Para $p \in \{2, 3, 5, 7\}$*, as coordenadas peso* Z_2, Z_3 *são complexas. Nesse caso introduzimos também* ***coordenadas reais peso torçadas***

$$(Y_1, Y_2, Y_3) := \mathrm{WtR}(v) \in \mathbb{R}^3.$$

No caso $p \geq 11$ *precisamos apenas das coordenadas peso reais* $\mathrm{Wt}\,(w) = (Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{R}^3$.

Definição 4.5.4. *a) Introduzimos as matrizes de transição no caso p arbitrário:*

$$B := (\mathrm{Wt}^T\,(v_0), \mathrm{Wt}^T\,(v_1), \mathrm{Wt}^T\,(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

b) No caso $p \leq 7$ *consideramos também a matriz real*

$$C := (\mathrm{WtR}^T\,(v_0), \mathrm{WtR}^T\,(v_1), \mathrm{WtR}^T\,(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \frac{\mu+\overline{\mu}}{2} & \frac{\mu^2+\overline{\mu}^2}{2} \\ 0 & \frac{\mu-\overline{\mu}}{2i} & \frac{\mu^2-\overline{\mu}^2}{2i} \end{pmatrix}.$$

Observe que os valores de λ*,* μ *e* $\overline{\mu}$ *dependem da característica do corpo p.*

Lema 4.5.5. *Seja* $p \leq 7$*, então:*

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p/\lambda}{3\lambda^2-p+1} & \frac{p/\mu}{3\mu^2-p+1} & \frac{p/\overline{\mu}}{3\overline{\mu}^2-p+1} \\ \frac{\lambda}{3\lambda^2-p+1} & \frac{\mu}{3\mu^2-p+1} & \frac{\overline{\mu}}{3\overline{\mu}^2-p+1} \\ \frac{1}{3\lambda^2-p+1} & \frac{1}{3\mu^2-p+1} & \frac{1}{3\overline{\mu}^2-p+1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Utilizando a fórmula da matriz inversa, podemos computar a inversa da matriz de Vandermonde e obter:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mu\overline{\mu}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\overline{\mu})} & \frac{\lambda\overline{\mu}}{(\mu-\lambda)(\mu-\overline{\mu})} & \frac{\lambda\mu}{(\overline{\mu}-\lambda)(\overline{\mu}-\mu)} \\ \frac{-\mu-\overline{\mu}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\overline{\mu})} & \frac{-\lambda-\overline{\mu}}{(\mu-\lambda)(\mu-\overline{\mu})} & \frac{-\lambda-\mu}{(\overline{\mu}-\lambda)(\overline{\mu}-\mu)} \\ \frac{1}{(\lambda-\mu)(\lambda-\overline{\mu})} & \frac{1}{(\mu-\lambda)(\mu-\overline{\mu})} & \frac{1}{(\overline{\mu}-\lambda)(\overline{\mu}-\mu)} \end{pmatrix}.$$

Trabalhando com os denominadores dessa matriz, pelas fórmulas de Viete, temos:

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)(\lambda-\overline{\mu}) &= \lambda^2 - (\mu+\overline{\mu})\lambda + \mu\overline{\mu} \\ &= 2\lambda^2 + \frac{p}{\lambda} \\ &= 3\lambda^2 - p + 1.\end{aligned}$$

Portanto

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p/\lambda}{3\lambda^2-p+1} & \frac{p/\mu}{3\mu^2-p+1} & \frac{p/\overline{\mu}}{3\overline{\mu}^2-p+1} \\ \frac{\lambda}{3\lambda^2-p+1} & \frac{\mu}{3\mu^2-p+1} & \frac{\overline{\mu}}{3\overline{\mu}^2-p+1} \\ \frac{1}{3\lambda^2-p+1} & \frac{1}{3\mu^2-p+1} & \frac{1}{3\overline{\mu}^2-p+1} \end{pmatrix}.$$

□

Lema 4.5.6. *Seja p qualquer e $v \in A$ um monômio com coordenadas multigrau* $\mathrm{Gr}\,(v) = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{N}_0^3$. *Sejam* $\mathrm{Wt}\,(v) = (Z_1, Z_2, Z_3)$. *No caso $p \leq 7$ consideramos* $\mathrm{WtR}\,(v) = (Y_1, Y_2, Y_3)$. *Então:*

i) $\mathrm{Wt}^T\,(v) = B \cdot \mathrm{Gr}^T\,(v)$*;*

ii) No caso $p \leq 7$ temos: $\mathrm{WtR}^T\,(v) = C \cdot \mathrm{Gr}^T\,(v)$*;*

iii) $(Y_1, Y_2, Y_3) = (Z_1, \mathrm{Re}\,(Z_2), \mathrm{Im}\,(Z_2))$*;*

iv) $Z_1 \in \mathbb{R}$ *e* $Z_3 = \overline{Z_2}$*;*

Demonstração. Provaremos apenas o item i). Por hipótese, v é um produto que envolve X_1 fatores v_0, X_2 fatores v_1 e X_3 fatores v_2. Utilizando a aditividade da função de peso, temos que:

$$\mathrm{Wt}^T(v) = X_1 \,\mathrm{Wt}^T(v_0) + X_2 \,\mathrm{Wt}^T(v_1) + X_3 \,\mathrm{Wt}^T(v_2) = B \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = B \cdot \mathrm{Gr}^T(v).$$

□

Lema 4.5.7. *Seja $2 \leq p \leq 7$ e $\tau := \log_\lambda |\mu|$, temos $\tau < 1$. Os elementos pivô $\{v_n | n \geq 0\}$ pertencem a uma superfície no espaço do tipo **paraboloide de rotação** com equação em coordenadas torçadas reais:*

$$\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} = Y_1^\tau.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.4.2 temos que

$$\mathrm{Wt}(v_n) = (Z_1, Z_2, Z_3) = (\lambda^n, \mu^n, \bar{\mu}^n);$$
$$\mathrm{WtR}(v_n) = (Y_1, Y_2, Y_3) = (Z_1, \mathrm{Re}(Z_2), \mathrm{Im}(Z_2)).$$

Então:

$$Y_2^2 + Y_3^2 = |Z_2|^2 = |\mu|^{2n};$$
$$Y_1 = Z_1 = \lambda^n = \lambda^{\frac{1}{2}\log_{|\mu|}(Y_2^2+Y_3^2)} = (Y_2^2 + Y_3^2)^{\frac{1}{2}\log_{|\mu|}\lambda};$$
$$\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} = Y_1^\tau.$$

□

p	τ
2	$0,3256...$
3	$0,3604...$
5	$0,3952...$
7	$0,4135...$

Tabela 4.5.1: Valores de τ, caso $p \leq 7$.

Lema 4.5.8. *Seja $p \geq 11$. As coordenadas peso reais (Z_1, Z_2, Z_3) dos elementos pivô $\{v_n | n \geq 0\}$ pertencem a uma superfície do tipo **funil retangular**:*

$$|Z_2| = Z_1^{\tau_1}, \qquad \tau_1 = \log_\lambda |\alpha_2| < 1;$$
$$|Z_3| = Z_1^{\tau_2}, \qquad \tau_2 = \log_\lambda |\alpha_3| < 1.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.4.2,

$$\mathrm{Wt}\,(v_n) = (Z_1, Z_2, Z_3) = (\lambda^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n).$$

Então, $Z_1 = \lambda^n$ e $n = \log_\lambda Z_1$. Temos

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \lambda_2^n = \alpha_2^{\log_\lambda Z_1};\\
|Z_2| &= |\alpha_2|^{\frac{\ln Z_1}{\ln \lambda}} = Z_1^{\log_\lambda |\alpha_2|} = Z_1^{\tau_1};\\
|Z_3| &= Z_1^{\tau_2}.
\end{aligned}$$

□

p	τ_1	τ_2
11	$0,6385...$	$0,2286...$
13	$0,7198...$	$0,1597...$
17	$0,7978...$	$0,0994...$
19	$0,8206...$	$0,0831...$
23	$0,8520...$	$0,0621...$
29	$0,8809...$	$0,0444...$

Tabela 4.5.2: Valores de τ_1, τ_2, caso $p \geq 11$.

Capítulo 5

Crescimento de L

5.1 Cotas para funções de peso

Lema 5.1.1. *Seja λ a raíz positiva do polinômio característico $f(x) = x^3 - (p-1)x - p$, então $\lambda^2 - \lambda + 2 - p > 0$.*

Demonstração. A função $g(t) = t^2 - t + 2 - p$ tem raízes

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2-p)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{p - \frac{7}{4}}.$$

Enquanto o polinômio característico $f(t) = t^3 - (p-1)t - p$ tem raízes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ onde $\lambda = \lambda_1 > 0$. Temos que

$$\begin{aligned} f(t_2) = t_2(t_2^2 - p + 1) - p &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{p - \frac{7}{4}}\right)\left(p - \frac{3}{2} + \sqrt{p - \frac{7}{4}} - p + 1\right) - p \\ &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{p - \frac{7}{4}}\right)\left(\sqrt{p - \frac{7}{4}} - \frac{1}{2}\right) - p = -2. \end{aligned}$$

Portanto $t_2 < \lambda_1$ o que implica que $g(\lambda_1) > 0$. □

Teorema 5.1.2. *Vale a seguinte estimativa para o peso dos monômios quasi-standard do primeiro tipo $\{r_{n-3}x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n | 0 \le \xi_{n-2} \le p-2\}$:*

a) No caso $p \ge 3$:

$$\lambda^{n-4} < \mathrm{wt}\,(r_{n-3}x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n) \le \lambda^n, \quad n \ge 0,$$

b) No caso $p = 2$:

$$1,3\lambda^{n-5} < \mathrm{wt}\,(r_{n-3}x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n) \le \lambda^n, \quad n \ge 0.$$

Demonstração. Nota-se facilmente que $\mathrm{wt}\,(r_{n-3}x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n) \leq \lambda^n$, de modo que basta provar a outra desigualdade. Vejamos inicialmente o que ocorre com a cauda r_{n-3}. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{wt}\,(r_m) &= \mathrm{wt}\,(x_0^{\xi_0}x_1^{\xi_1}\dots x_m^{\xi_m}) \\
&= \mathrm{wt}\,(x_0^{\xi_0}) + \mathrm{wt}\,(x_1^{\xi_1}) + \dots + \mathrm{wt}\,(x_m^{\xi_m}) \\
&= -\xi_0\,\mathrm{wt}\,(v_0) - \xi_1\,\mathrm{wt}\,(v_1) - \dots - \xi_m\,\mathrm{wt}\,(v_m).
\end{aligned}$$

Sabe-se que $\xi_i \leq p-1$, $\forall i \in \{0, \dots, n-3\}$, logo $-\xi_i \geq -(p-1)$, o que implica:

$$\begin{aligned}
\mathrm{wt}\,(r_m) &\geq -(p-1)(\mathrm{wt}\,(v_0) + \dots + \mathrm{wt}\,(v_m)) \\
&= -(p-1)(\lambda^0 + \dots + \lambda^m) = -(p-1)\frac{\lambda^{m+1}-1}{\lambda-1} \\
&= -(p-1)\frac{\lambda^{m+1}}{\lambda-1} + \frac{p-1}{\lambda-1} > -(p-1)\frac{\lambda^{m+1}}{\lambda-1}.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{wt}\,(r_{n-3}) > -(p-1)\frac{\lambda^{n-2}}{\lambda-1}$. Agora, sabe-se que $\lambda^3 = (p-1)\lambda + p$. Seja $\theta = \lambda - 1$, temos então:

$$\begin{aligned}
&(\theta+1)^3 = (p-1)(\theta+1) + p, \\
&\theta^3 + 3\theta^2 + 3\theta + 1 = (p-1)\theta + 2p - 1, \\
&\theta^3 + 3\theta^2 + (4-p)\theta = 2(p-1), \\
&\theta^2 + 3\theta + 4 - p = \frac{2(p-1)}{\theta}.
\end{aligned}$$

Segue então que:

$$\begin{aligned}
\frac{p-1}{\lambda-1} &= \frac{p-1}{\theta} = \frac{1}{2}(\theta^2 + 3\theta + 4 - p) \\
&= \frac{1}{2}((\lambda-1)^2 + 3(\lambda-1) + 4 - p) = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda + 2 - p).
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{wt}\,(w) &> \lambda^n - (p-2)\lambda^{n-2} - (p-1)\frac{\lambda^{n-2}}{\lambda-1} = \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - (p-2) - \frac{p-1}{\lambda-1}\right) \\
&= \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - (p-2) - \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda + 2 - p)\right) = \frac{\lambda^{n-2}}{2}(\lambda^2 - \lambda + 2 - p) \\
&> \lambda^{n-4},
\end{aligned}$$

pois, pelo Corolário 4.3.3 temos que $\lambda^2 - \lambda + 2 - p > \frac{2}{\lambda^2}$ no caso $p \geq 3$. No caso $p = 2$, usamos o corolário 4.3.3 de forma semelhante. □

Lema 5.1.3. *Seja $w = x_{n-2}^{p-1} v_n$ um elemento standard do segundo tipo. Então*

a) $p\lambda^{n-3} = \mathrm{wt}\,(w) < \lambda^n$.

b) $\lambda^{n-2} < \mathrm{wt}\,(w) < \lambda^n$, *para* $p \geq 3$.

Demonstração. a) Desde que $f(\lambda) = \lambda^3 - (p-1)\lambda - p = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}\,(w) = \lambda^n - (p-1)\lambda^{n-2} &= \lambda^{n-3}(\lambda^3 - (p-1)\lambda - p + p)\\ &= p\lambda^{n-3}.\end{aligned}$$

b) Pelo Lema 4.3.4 sabemos que

$$\sqrt{p} < \lambda < \sqrt{p} + \frac{1}{2},$$
$$p > (\lambda - \frac{1}{2})^2.$$

Perceba que $(x - \frac{1}{2})^2 > x$ ocorre quando $x^2 - 2x + \frac{1}{4} > 0$, ou seja, quando $x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Note que $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,866$ e $\lambda > 1,866$ para $p \geq 3$. Portanto no caso $p \geq 3$ temos $p > \lambda$.

□

Lema 5.1.4. *No caso $2 \leq p \leq 7$ seja μ raiz complexa. No caso $p \geq 11$ seja $\mu \in \{\alpha_2, \alpha_3\}$ uma das raizes reais negativas. Consideramos a função de superpeso definida por $\mathrm{swt}\,(v_n) = \lambda^n, n \geq 0$. Considere w um monômio quasi-standard de comprimento $n \geq 0$. Então*

$$|\,\mathrm{swt}\,(w)| < C|\mu|^n \qquad \textit{onde } C := \frac{p-1}{|\mu|^2 - |\mu|} + 1.$$

Demonstração. Escrevemos w como $r_{n-2}v_n$. Sabendo que $|\mu| > 1$, segue que:

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{swt}\,(w)| = |\,\mathrm{swt}\,(r_{n-2}v_n)| &\leq (p-1)\sum_{i=0}^{n-2} |\mu|^i + |\mu|^n\\ &< (p-1)\frac{|\mu|^{n-1}}{|\mu|-1} + |\mu|^n = \left(\frac{p-1}{|\mu|^2 - |\mu|} + 1\right)|\mu|^n = C|\mu|^n.\end{aligned}$$

□

5.2 Dimensão de Gelfand-Kirillov de L

Teorema 5.2.1. *Considere a álgebra de Lie $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ (ou álgebra de Lie restrita $L = \mathrm{Lie}_p\,(v_0, v_1, v_2)$) sobre um corpo K de característica $p > 0$. Então*

$$\mathrm{GKdim}\, L = \underline{\mathrm{GKdim}}\ L = \log_\lambda p.$$

Onde λ é a raíz positiva do polinômio característico $x^3-(p-1)x-p$.

Demonstração. Vamos exibir um limitante superior para a funcão $\tilde{\gamma}_L(m)$ que conta os monômios stantard, dos dois tipos, w tais que $\operatorname{wt} w \leq m$, onde $m \geq 1$. Considere um tal monômio w de comprimento n. Pelo Teorema 5.1.2 temos que $\lambda^{n-4} < \operatorname{wt}(w) \leq m$, portanto $n \leq n_0 = [\log_\lambda m] + 4$. Contando todos os monômios, escritos como $w = r_{n-2}v_n$ de comprimento no máximo $n \leq n_0$, temos um limitante superior desejado:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_L(m) &= 2 + \sum_{n=0}^{n_0} p^{n-1} < 2 + \sum_{n=0}^{n_0} p^n \\
&= 2 + \frac{p^{n_0+1}-1}{p-1} < 2 + \frac{p^{n_0}}{1-1/p} < 2 + \frac{1}{1-1/p} p^{\log_\lambda(m)+4} \\
&= 2 + \frac{p^4}{1-1/p}(m)^{\log_\lambda p}.
\end{aligned}$$

Então temos a cota superior. Seja agora $n = [\log_\lambda m]$. Considere todos os monômios $w = r_{n-3}x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n$, do primeiro tipo, de comprimento n. Observamos que o número finito de monômios falsos não importa. Pelo Teorema 5.1.2 temos que

$$\operatorname{wt}(w) \leq \lambda^n \leq m.$$

Contando todos os monômios w, temos um limitante inferior:

$$\tilde{\gamma}_L(m) \geq p^{n-2}(p-2) \geq p^{\log_\lambda m - 3}(p-2) = p^{-3}(p-2)m^{\log_\lambda p}.$$

□

Corolário 5.2.2. *Considere a álgebra de Lie $L = \operatorname{Lie}(v_0, v_1, v_2)$ (ou álgebra de Lie restrita $L_p = \operatorname{Lie}_p(v_0, v_1, v_2)$) sobre um corpo K de característica $p > 0$. Então*

(a) $1,65 < \operatorname{GKdim} L < 2$.

(b) $\lim_{p\to\infty} \operatorname{GKdim} L = 2$.

Demonstração. (a) Pelo Lema 4.3.4 temos que $\lambda > p$, então

$$\operatorname{GKdim}(L) = \log_\lambda p < \log_{\sqrt{p}} p = 2.$$

Para $p \geq 7$, usando cota (5.1) abaixo, temos que $\operatorname{GKdim} L \geq \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{7}}\ln 7} > 1,65$. Para $p = 2, 3, 5$, observe os valores da tabela a seguir.

(b) Pelo Lema 4.3.4 temos $\lambda < \sqrt{p} + 1/2$. Segue então que

$$\begin{aligned}\operatorname{GKdim} L = \log_\lambda p &> \frac{\ln p}{\ln\left(\sqrt{p}+1/2\right)} = \frac{\ln p}{\ln\left(\sqrt{p}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)\right)} \\ &= \frac{\ln p}{\frac{1}{2}\ln p + \ln\left(1+\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)} > \frac{\ln p}{\frac{1}{2}\ln p + \frac{1}{2\sqrt{p}}} = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{p}\ln p}},\end{aligned} \tag{5.1}$$

onde usamos que $\ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$. Observe que último termo tende a 2 quando $p \to \infty$.

□

p	λ	$\operatorname{GKdim} L$
2	$1,5213...$	$1,6521...$
3	$1,8932...$	$1,7212...$
5	$2,4566...$	$1,7907...$
7	$2,9005...$	$1,8273...$
11	$3,6118...$	$1,8672...$
13	$3,9142...$	$1,8796...$
17	$4,4518...$	$1,8972...$
19	$4,6853...$	$1,9064...$
23	$5,1449...$	$1,9142...$
29	$5,7484...$	$1,9253...$

Tabela 5.2.1: Dimensão de Gelfand-Kirillov de L para diferentes valores de p.

5.3 Paraboloide para L e aplicações

Teorema 5.3.1. *Seja $2 \leq p \leq 7$ e $\tau := \log_\lambda |\mu|$, observamos que $\tau < 1$ (ver Lema 4.2.1). Existe uma constante $c > 0$, tal que os pontos do espaço representando os monômios (quasi)standard da álgebra L estão dentro de uma superfície do tipo paraboloide de rotação, cuja equação é escrita em termos das coordenadas torçadas reais $(Y_1, Y_2, Y_3) := \mathrm{WtR}\,(w)$:*

$$\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} < cY_1^\tau.$$

Demonstração. Seja w um monômio standard de L de comprimento $n \geq 0$ e coordenadas peso $\mathrm{Wt}(w) = (Z_1, Z_2, Z_3) = (\mathrm{wt}(w), \mathrm{swt}(w), \overline{\mathrm{swt}}(w))$. Pelo Teorema 5.1.2,

$$\lambda^{n-4} < \mathrm{wt}(w) = Z_1,$$

portanto $n < \log_\lambda Z_1 + 4$.

Pelo Lema 5.1.4 temos que:

$$\begin{aligned} |Z_2| &= |\,\mathrm{swt}(w)| < c|\mu|^n < c_1|\mu|^{\log_\lambda Z_1 + 4} \\ &= c|\mu|^4 Z_1^{\log_\lambda |\mu|} = c|\mu|^4 Z_1^{\tau}. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.5.6 concluimos com uma transição para as coordenadas torçadas reais:

$$\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}\, Z_2)^2 + (\mathrm{Im}\, Z_2)^2} = |Z_2| < c_1|\mu|^4 Y_1^{\tau}.$$

□

Teorema 5.3.2. *Seja $p \geq 11$. Seja w elemento homogêneo da álgebra de Lie (restrita) L com coordenadas de peso reais $\mathrm{Wt}(w) = (\mathrm{wt}(w), \mathrm{swt}_1(w), \mathrm{swt}_2(w)) = (Z_1, Z_2, Z_3)$. Então, esses pontos estão dentro do seguinte funil retangular:*

$$\begin{aligned} |Z_2| &\leq C_1 Z_1^{\tau_1}, \qquad \tau_1 = \log_\lambda |\alpha_2|; \\ |Z_3| &\leq C_2 Z_1^{\tau_2}, \qquad \tau_2 = \log_\lambda |\alpha_3|. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja w um monômio standard de comprimento m. Pelo Teorema 5.1.2

$$\lambda^{n-4} < \mathrm{wt}\, w = Z_1.$$

Temos então que $n < \log_\lambda Z_1 + 4$. Pelo Lema 5.1.4

$$\begin{aligned} |Z_2| &= |\,\mathrm{swt}(w)| < C_1|\alpha_2|^n < C_1|\alpha_2|^{\log_\lambda Z_1 + 4} \\ &= \tilde{C}_1 Z_1^{\log_\lambda |\alpha_2|}. \end{aligned}$$

□

Observação 5.3.1. *Os valores de τ_1 e τ_2 são dados pela tabela 4.5.2 acima.*

Teorema 5.3.3. *a) Seja $2 \leq p \leq 7$. Consideramos um corte do paraboloide de rotação do Teorema 5.3.1*

$$\begin{cases} \sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} \leq c Y_1^{\tau}, \\ \qquad 0 \leq Y_1 \leq m. \end{cases}$$

b) Seja $p \geq 11$. Consideramos um corte do funil retangular do Teorema 5.3.2

$$\begin{cases} 0 \leq Z_1 \leq m, \\ |Z_2| \leq c_1 Z_1^{\tau_1}, \\ |Z_3| \leq c_2 Z_1^{\tau_2}. \end{cases}$$

Então o volume desses cortes tem a forma

$$V(m) = c \cdot m^{\log_\lambda p}, \qquad m \geq 0.$$

Demonstração. A menos de um escalar, podemos considerar os sistemas (Y_1, Y_2, Y_3) e (Z_1, Z_2, Z_3) ortogonais. Pelas fórmulas de Viete, o produto dos três autovalores é igual a p.

a) Temos volume do corte gerado no paraboloide de rotação

$$\begin{aligned} v(m) = \int_0^m \pi (c Y_1^\tau)^2 dY_1 \; &= \pi c^2 \frac{Y_1^{2\tau+1}}{2\tau+1}\bigg|_0^m = \tilde{c} m^{1+\log_\lambda |\mu|^2} \\ &= \tilde{c} m^{\log_\lambda (\lambda |\mu|^2)} = \tilde{c} m^{\log_\lambda p}. \end{aligned}$$

b) De modo semelhante

$$\begin{aligned} v(m) = \int_0^m c_1 c_2 Z_1^{\tau_1+\tau_2} dZ_1 \; &= c_1 c_2 \frac{Z_1^{\tau_1+\tau_2+1}}{\tau_1+\tau_1+1}\bigg|_0^m = \tilde{c} m^{1+\log_\lambda |\alpha_2 \alpha_3|} \\ &= \tilde{c} m^{\log_\lambda (\lambda |\alpha_1 \alpha_2|)} = \tilde{c} m^{\log_\lambda p}. \end{aligned}$$

□

Corolário 5.3.4. *O número do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ nos corpos acima tem assintótica*

$$N(m) \approx c m^{\log_\lambda p}, \qquad m \to +\infty.$$

Teorema 5.3.5. *Denotamos por $N_{ocupados}(m)$ o número dos pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ que correspondem aos pontos da álgebra de Lie restrita L. Então existe um limite não-nulo*

$$0 < \lim_{m \to +\infty} \frac{N_{ocupados}(m)}{N(m)} \leq 1.$$

Demonstração. Segue do Corolário 5.3.4, da assintótica do crescimento de L (Teorema 5.2.1), e do fato de que as componentes da $\mathbb{N}^3$-graduação da álgebra L são no máximo uni-dimensionais (Teorema 6.1.2). □

Capítulo 6

L é apenas infinita

6.1 $\mathbb{N}_0^3$-graduação fina de L

Lema 6.1.1. *Seja $\tau : A \to A$ o endomorfismo shift. Considere um elemento multihomogêneo $0 \neq v \in A$ com $\mathrm{Gr}\,(v) = (n_1, n_2, n_3)$, $n_1, n_2, n_3 \geq 0$. Então:*

$$\mathrm{Gr}\,(\tau(v)) = (pn_3, n_1 - n_3 + pn_3, n_2).$$

Demonstração. A relação dada pelo Lema 3.1.3, implica que $\mathrm{Gr}\,(v_3) = (p, p-1, 0)$. Por hipótese, v é uma combinação linear de produtos envolvendo n_1, n_2, n_3 fatores v_1, v_2, v_3, respectivamente. Desde que τ é um endomorfismo, $\tau(v)$ é uma combinaão linear de produtos envolvendo n_1 fatores $\tau(v_0) = v_1$, n_2 fatores $\tau(v_1) = v_2$ e n_3 fatores $\tau(v_2) = v_3$. Pela aditividade da função multigrau, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}\,(\tau(v)) &= n_1\,\mathrm{Gr}\,(v_1) + n_2\,\mathrm{Gr}\,(v_2) + n_3\,\mathrm{Gr}\,(v_3) \\
&= n_1(0,1,0) + n_2(0,0,1) + n_3(p, p-1, 0) \\
&= (n_3 p, n_1 - n_3 + pn_3, n_2).
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.1.2. *As componentes da $\mathbb{N}_0^3-$graduação $L = \bigoplus_{n_1,n_2,n_3 \geq 0} L_{n_1,n_2,n_3}$ por multigrau nos geradores $\{v_0, v_1, v_2\}$ são no máximo uni-dimensionais.*

Demonstração. Relembramos que os monômios standard e os monômios falsos são chamados de monômios quasi-standard. Vamos listar os monômios quasi-standard de comprimento no máximo 4:

- Standard: $\{v_0, v_1, v_2, x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} v_3, x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} v_4\}$.
- Falsos: $\{x_0^{\xi_0} v_2, x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} v_4 | \xi_0 \neq 0\}$.

Vamos provar que monômios quasi-standard diferentes possuem multigraus diferentes, o que consiste em um resultado mais geral.

Antes de continuarmos, fazemos uma observação. Seja v um monômio quasi-standard, então podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$v = x_0^{\alpha} \tau(v'),$$

onde $\alpha \in \{0, \ldots, p-1\}$, τ é o endomorfismo "shift"e v' é um monômio do mesmo tipo de comprimento uma unidade menor. Existe uma única excessão: $v = v_0$. Vamos tratar deste caso separadamente.

Note que $\mathrm{Gr}\,(v_0) = (1, 0, 0)$ logo os monômios standard com o mesmo multigrau devem conter apenas o fator v_0, portanto o único monômio standard com o mesmo multigrau é o próprio v_0. Agora devemos comparar com os monômios falsos, vejamos inicialmente os monômios falsos de comprimento pequeno.

Temos que $\mathrm{Gr}\,(x_0^{\xi_0} v_2) = (-\xi_0, 0, 1) \neq (1, 0, 0)$. Desde que $[v_1^p, v_2^{p-1}] = v_4$ (veja Lema 3.1.3), temos $\mathrm{Gr}\,(v_4) = (0, p, p-1)$, então $\mathrm{Gr}\,(x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} v_4) = (-\xi_0, -\xi_1 + p, -\xi_2 + p - 1) \neq (1, 0, 0)$, pois $\xi_2 \leq p - 2$.

Agora considere v um monômio falso de comprimento $n \geq 5$. Dizer que dois monômios têm mesmo multigrau implica que os dois monômios têm o mesmo peso, porém, pelo Teorema 5.1.2, temos

$$\mathrm{wt}\,(v) > 1,3\lambda^{n-5} > 1 = \mathrm{wt}\,(v_0),$$

então v_0, v_1 têm multigraus diferentes. O caso onde um monômio é v_0 é considerado.

Agora, por contradição, suponha que $u \neq v$ são monômios quasi-standard de mesmo multigrau, ou seja, $\mathrm{Gr}\,(u) = \mathrm{Gr}\,(v)$. Além disso, suponha ainda que os comprimentos de u e v são mínimos respeitando esta propriedade. Pela observação anterior, podemos escrever $u = x_0^{\alpha} \tau(u')$ e $v = x_0^{\beta} \tau(v')$ onde u' e v' são monômios de mesmo tipo de u e v respectivamente, com comprimento menor por uma unidade e α,$\beta \in \{0, \ldots, p-1\}$. Seja $\mathrm{Gr}\,(u') = (n_1, n_2, n_3)$ e $\mathrm{Gr}\,(v') = (m_1, m_2, m_3)$. Desde que $\mathrm{Gr}\,(x_0) = (-1, 0, 0)$, pelo Lema 6.1.1 temos que:

$$\mathrm{Gr}\,(u) = (pn_3 - \alpha, n_1 - n_3 + pn_3, n_2) = (pm_3 - \beta, m_1 - m_3 + pm_3, m_2) = \mathrm{Gr}\,(v).$$

Dessa forma,

$$p(n_3 - m_3) = \alpha - \beta \in \{-(p-1), -(p-2), \dots, 0, \dots, p-1\},$$

concluindo que $\alpha = \beta$ e portanto $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$ e $n_3 = m_3$. Logo, $\mathrm{Gr}\,(u') = \mathrm{Gr}\,(v')$ o que implica, pela minimalidade assumida por hipótese, que $u' = v'$. Portanto $u = v$, uma contradição.

□

Corolário 6.1.3. *Se u e w são monômios standard de L tais que* $\mathrm{wt}\,(u) = \mathrm{wt}\,(w)$, *então* $u = w$.

Demonstração. Considere os respectivos multigraus e assuma que $\mathrm{Gr}\,(u) = (n_1, n_2, n_3) \neq \mathrm{Gr}\,(w) = (m_1, m_2, m_3)$. Temos

$$\mathrm{wt}\,(u) = n_1 + n_2\lambda + n_3\lambda^2 = \mathrm{wt}\,(w) = m_1 + m_2\lambda + m_3\lambda^2.$$

Portanto $(m_3 - n_3)\lambda^2 + (m_2 - n_2)\lambda + (m_1 - n_1) = 0$, uma contradição com o fato de que λ satisfaz um polinômio irredutível de grau 3. Portanto, $\mathrm{Gr}\,(u) = \mathrm{Gr}\,(w)$. Pelo Teorema 6.1.2, $u = w$. □

Definição 6.1.4. *Dizemos que uma G-graduação de uma álgebra $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ é fina se não existem um grupo H e uma graduação $A = \bigoplus_{h \in H} \tilde{A}_h$ tal que para qualquer $0 \neq \tilde{A}_h$, $h \in H$, existe $g \in G$ tal que $A_h \subset A_g$ e alguma dessas inclusões é própria. Em particular, se todas as componentes $A_g, g \in G$, são no máximo unidimensionais, obtemos uma graduação fina.*

Corolário 6.1.5. *A $\mathbb{N}_0^3$-graduação de L é fina.*

6.2 L é apenas infinita

Definição 6.2.1. *Uma K-álgebra A é dita apenas infinita dimensional, ou apenas infinita (just infinite em inglês), se $\dim_K A = \infty$ e cada ideal não nulo de A tem codimensão finita.*

Teorema 6.2.2. *A álgebra de Lie $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ é uma álgebra apenas infinita dimensional.*

Demonstração. No Teorema 3.2.2, exibimos uma base de L composta por infinitos monômios standard, logo $\dim_K L = \infty$. Agora consideramos I um ideal não nulo de L e seja $0 \neq a \in I$. Pelo Corolário 6.1.3, Temos que:

$$a = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m, \quad \lambda_j \in K, \tag{6.1}$$

onde w_j são monômios standard com $\mathrm{wt}\,(w_1) < \ldots < \mathrm{wt}\,(w_m)$. Vamos provar por indução sobre m que algum elemento pivô pertence a I. Denotamos o termo de maior peso w_m como o termo líder. Iremos multiplicar (6.1) por monômios, de modo que, após a multiplicação, o termo líder w_m se transforme em um novo termo líder, mantendo seu coeficiente não nulo. Pelo Teorema 6.1.2, após a multiplicação, os termos diferem por, no máximo, componentes multihomogeneas uni-dimensionais. Portanto, temos uma decomposição similar a (6.1) com o mesmo número, ou uma quantidade menor, de termos no máximo m. Consideremos o termo líder $w_m = x_1^{\xi_1} \cdots x_{i_k}^{\xi_k} v_n$, $i_1 < \ldots < i_k$. Multiplicamos w_m à esquerda sussecivamente por cada elemento pivô v_i tal que x_i compõe a cauda, de modo a eliminar as variáveis x_j. Conseguimos então um elemento pivô $w'_{m'} = v_n$ como termo líder em (6.1). Se $m' = 1$, a base da indução está provada.

O argumento anterior nos permite assumir que o termo líder é um elemento pivô $w_m = v_n$. Pelo Lema 3.1.2, afirmação (i), temos que

$$[v_{n-1}, v_n] = x_{n-1}^{p-1} x_n^{p-2} v_{n+2}.$$

Multiplicando por v_{n-1} e v_n de modo a eliminar, respectivamente, os fatores x_{n-1} e x_n, concluímos que podemos fazer n arbitrariamente grande. Desde que sempre multiplicamos por elementos homogêneos, ou a seguinte diferença se mantem ou esta se torna cada vez menor no caso do menor termo desaparecer:

$$\mathrm{wt}\, w'_{m'} - \mathrm{wt}\, w'_1 \leq \mathrm{wt}\, w_m - \mathrm{wt}\, w_1 = C.$$

Portanto $\mathrm{wt}\, w'_1 \geq \mathrm{wt}\, w'_{m'} - C = \lambda^n - C$, e o último termo e excede $\lambda^{n-1} = \mathrm{wt}\, v_{n-1}$, para n suficientemente grande. Podemos então considerar que todos os monômios em (6.1) têm comprimento no mínimo n (por enquanto monômios de comprimento maior são possíveis).

Por outro lado, sabemos que $\mathrm{wt}\, w_j \leq \mathrm{wt}\, w_m = \mathrm{wt}\, v_n = \lambda^n$, e da estimativa dada pelo Teorema 5.1.2 temos que (o caso $p = 2$ já foi considerado em [55], vamos supor $p \geq 3$):

$$\lambda^{n-4} < \mathrm{wt}\,(r_{n-3} x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n) \leq \lambda^n, \quad n \geq 0.$$

Pela conta inferior, podemos ter somente monômios do primeiro tipo de comprimento no máximo $n+3$, e segundo tipo de comprimento no máximo $n+1$. Seja $r_{k-2}v_k$, onde $n \leq k \leq n+3$, um monômio da decomposição (6.1), e assuma que este possui um fator x_i, $i < n$. Desde que $x_i^{p-1}v_{n+2} \in L$ é um monômio standard do primeiro tipo, conseguimos um novo termo líder:

$$[x_i^{p-1}v_{n+2}, v_n] = x_i^{p-1}x_n^{p-1}x_{n+1}^{p-1}x_{n+2}^{p-1}x_{n+3}^{p-2}v_{n+5} \neq 0,$$

enquanto $[x_i^{p-1}v_{n+2}, w] = \pm[x_i^{p-1}v_{n+2}, x_i r'_{k-2}v_n] = 0$, portanto reduzindo o número de monômios, de modo que podemos aplicar a hipótese de indução. Falta apenas considerar os monômios, com as restrições de comprimento dadas anteriormente, sem fatores x_i, $i < n$. Obtemos então os monômios:

a) $x_n^{\xi_n}x_{n+1}^{\xi_{n+1}}v_{n+3}$, $\xi_{n+1} \leq 2$;

b) $x_n^{\xi_n}v_{n+2}$, $0 \leq \xi_n \leq p-1$.

Note que, nos monômios do tipo a) temos

$$\begin{aligned}\operatorname{wt}(x_n^{\xi_n}x_{n+1}^{\xi_{n+1}}v_{n+3}) &\geq \lambda^{n+3} - (p-2)\lambda^{n+1} - (p-1)\lambda^n \\ &= \lambda^n(\lambda^3 - (p-1)\lambda - p + \lambda + 1) = \lambda^n(\lambda+1) > \lambda^n.\end{aligned}$$

De modo semelhante, nos monômios do tipo b) temos

$$\begin{aligned}\operatorname{wt}(x_n^{\xi_n}v_{n+2}) &\geq \lambda^{n+2} - (p-1)\lambda^n = \lambda^{n-1}(\lambda^3 - (p-1)\lambda) \\ &= \lambda^{n-1}(\lambda^3 - (p-1)\lambda - p + p) = p\lambda^{n-1} > \lambda^n.\end{aligned}$$

Portanto temos que $v_N \in I$ para N suficientemente grande. Pelo Lema 3.1.2,

$$[v_{N-1}, v_N] = x_{N-1}^{p-1}x_N^{p-2}v_{N+2}.$$

Multiplicando sucessivamente por v_{N-1} e v_N eliminamos, respectivamente, os fatores x_{N-1} e x_N e ganhamos que $v_{N+2} \in I$. Além disso,

$$[v_{N-2}, v_N] = -x_{N-2}^{p-1}x_{N-1}^{p-1}x_N^{p-1}x_{N+1}^{p-2}v_{N+3},$$

e de forma análoga garantimos que $-v_{N+3} \in I$. Por indução, concluímos que $v_k \in I$ para $k \geq N+2$. Considerando então $k \geq N+2$ fixo, pela afirmação (iii) do Lema 3.1.2 temos que

$$[r_{k-1}v_{k+2}, v_k] = r_{k-1}[v_{k+2}, v_k] = r_{k-1}x_k^{p-1}x_{k+1}^{p-1}x_{k+2}^{p-1}x_{k+3}^{p-2}v_{k+5} \in I.$$

Multiplicando por v_k e(ou) v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3} conseguimos provar que todos os monômios standard do primeiro tipo de comprimento $k+5 \geq N+7$ pertencem a I. Também mostramos que todos os monômios do segundo tipo de comprimento $k \geq N+5$ pertencem a I, pois $v_{k-3}^p = -x_{k-2}^{p-1} v_k$. Provamos então que I contem todos os monômios da base, de comprimento $n \geq N+7$, portanto $\dim L/I$ é limitada por um número finito de monômios da base, de comprimento no máximo $N+6$.

□

Definição 6.2.3. *Uma K-álgebra A é dita hereditariamente apenas infinita, se todo ideal J de A de codimensão finita é apenas infinito dimensional.*

Lema 6.2.4. *A álgebra de Lie $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ não é uma álgebra hereditariamente apenas infinita.*

Demonstração. Vamos fixar $m \geq 1$. Considere $L(m) \subset L$ o fecho linear dos monômios da base de L com comprimento no mínimo m, portanto $v_0 \notin L(m)$. Pelas regras multiplicativas (ver seção 2.1), $L(m)$ é um ideal de L. Observe que o ideal $L(m) \subset L$ tem codimensão finita. Em particular, se $m = 1$, $\dim L/L(1) = 1$. Seja $J = x_0 L(m)$ o subespaço de $L(m)$ gerado por todos os monômions da base de L envolvendo o termo x_0. Desde que x_0 pode ser deletado apenas multiplicando por v_0, que não pertence a $L(m)$, vemos que J é um ideal abeliano de $L(m)$. Desde que $v_i \in L(m) \setminus J$, $\forall i \geq m$, concluimos que $\dim L(m)/J = \infty$ e o ideal $L(m)$ não é apenas infinito. □

Capítulo 7

A álgebra de Lie restrita L é nil

7.1 Depleção

Temos como objetivo agora provar que a álgebra $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$ é nil. Inicialmente, apresentamos um lema importante:

Lema 7.1.1. *Considere uma subálgebra associativa $B \subset A$ que é gerada por monômios standard não-pivôs. Então B é localmente nilpotente.*

Demonstração. Vamos provar um resultado mais geral. Seja $N > 0$ um número fixado. Assuma que V é um conjunto de monômios quasi-standard não-pivô de comprimento no máximo N, isto é, contendo pelo menos uma variável em cada monômio. São os monômios da forma:

$$u = x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n, \tag{7.1}$$

onde $0 \leq \xi_i \leq n-1$ se $i \in \{0, \ldots, n-3\}$, $0 \leq \xi_{n-2} \leq n-1$ e $n \leq N$. Vamos provar que a álgebra associativa $\mathrm{Alg}\,(V) \subset \mathrm{End}\,(\Delta)$ é nilpotente.

Seja w um produto de M elementos u_i, $u_i \in V$ da forma (7.1). Desde que $\mathrm{wt}\,(u_i) \geq 1$, temos que $\mathrm{wt}\,(w) \geq M$. Assim como fizemos no Teorema 8.1.1, vamos mover todas as letras x_i para a esquerda e ordená-las, mantendo os elementos pivô v_i na mesma ordem. Como resultado, obtemos monômios da forma:

$$x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{N-2}^{\xi_{N-2}} v_{i_1} \cdots v_{i_m}, \quad i_j \leq N. \tag{7.2}$$

Podemos limitar superiormente o grau total das variáveis em (7.2) da seguinte forma:

$$N_1 := \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_{N-2} \leq N_0 = \sum_{i=0}^{N-2} (p-1).$$

Por hipótese, o grau total de variáveis no produto original w é maior ou igual ao número de cabeças v_i (durante a movimentação das letras, esta propriedade permanece válida). Portanto $N_1 \geq m$ onde m é o número de elementos pivô no monômio resultante (7.2). Computando o peso do monômio resultante temos:

$$M \leq \mathrm{wt}\,(w) \leq m\,\mathrm{wt}\,(v_N) \leq N_1\,\mathrm{wt}\,(v_N) \leq N_0\,\mathrm{wt}\,(v_N).$$

Portanto $\mathrm{Alg}\,(V)^{N_0\,\mathrm{wt}\,(v_N)+1} = 0.$ □

Vamos agora definir o conceito de *depleção*, que será de fundamental importância para os próximos resultados. Considere um monômio de Lie puro

$$v = r_{n-2}\partial_n = x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}} \partial_n,$$

onde $0 \leq \xi_i \leq p-1$, se $i \in \{0, \ldots, n-3\}$ e $0 \leq \xi_{n-2} \leq p-2$.

Definição 7.1.2. *Definimos uma depleção de x_i em r_{n-2} acima, onde $i \in \{0, \ldots, n-2\}$, da seguinte forma:*

$$\mathrm{depl}_{x_i}\,(r_{n-2}) = p - 1 - \xi_i.$$

Definição 7.1.3. *Definimos uma depleção (total) do monômio de Lie puro $v = r_{n-2}\partial_n$ por:*

$$\mathrm{depl}\,(r_{n-2}\partial_n) := \sum_{j=0}^{n-2} \mathrm{depl}_{x_j}\,(r_{n-2}).$$

Lema 7.1.4. *Considere dois monômios de Lie puros $u = r_{n-2}\partial_n$ e $v = r_{m-2}\partial_m$, onde $n < m$. Suponha que $[u, v] \neq 0$, então*

$$\mathrm{depl}\,([u, v]) \leq \mathrm{depl}\,(v) + 1.$$

Demonstração. Temos que $[u, v] = r_{n-2}r'_{m-2}\partial_m$, onde $r'_{m-2} = [\partial_n, r_{m-2}]$. Vamos comparar inicialmente as depleções de r_{m-2} e r'_{m-2}. Temos uma mudança de depleção apenas com respeito a x_n. Sabemos que $\mathrm{depl}_{x_n}\,(r_{m-2}) = p-1-\xi_n$. Note que a ação de ∂_n no respectivo fator x_n nos dá o seguinte:

$$[\partial_n, x_n^{\xi_n}] = \xi_n x_n^{\xi_n - 1}.$$

Portanto,

$$\mathrm{depl}_{x_n}\,(r'_{m-2}) = p - 1 - (\xi_n - 1) = p - 1 - \xi_n + 1 = \mathrm{depl}_{x_n}\,(r_{m-2}) + 1.$$

Agora, vamos calcular a depleção de $r_{n-2}r'_{m-2}$. Consideremos $i \in \{0, \dots, n-2\}$. No caso em que $i \geq n-1$, a variável x_i entra no segundo fator apenas, portanto

$$\operatorname{depl}_{x_i}(r_{n-2}r'_{m-2}) = \operatorname{depl}_{x_i}(r'_{m-2}).$$

Vamos considerar o caso menos trivial em que $i \leq n-2$. Sejam $x_i^{\xi_i}$ e $x_i^{\xi'_i}$ os respectivos termos em r_{n-2} e r'_{m-2}. Desta forma, usando que $\xi_i \geq 0$, temos

$$\operatorname{depl}_{x_i}(r_{n-2}r'_{m-2}) = p - 1 - (\xi_i + \xi'_i) \leq p - 1 - \xi'_i = \operatorname{depl}_{x_i}(r'_{m-2}).$$

Portanto

$$\operatorname{depl}(r_{n-2}r'_{m-2}) \leq \operatorname{depl}(r'_{m-2}) \leq \operatorname{depl}(r_{m-2}) + 1,$$

de onde concluímos que $\operatorname{depl}([u, v]) \leq \operatorname{depl}(v) + 1$.

□

Lema 7.1.5. *Seja $w \in L$ com depleção finita. Então* $\operatorname{depl}(w^p) \leq \operatorname{depl}(w) + p - 1$.

Demonstração. Podemos escrever w como combinação linear de monômios puros u_j. Pelas propriedades da p-aplicação, w^p é uma combinação linear de monômios da forma $[u_{i_1}, \dots, u_{i_p}]$ ou da forma $u_j^p = 0$. Pelo Lemma 7.1.4, temos que

$$\operatorname{depl}[u_{i_1}, \dots, u_{i_p}] \leq \max\{\operatorname{depl}, \dots, \operatorname{depl}(u_{i_p})\} + p - 1 \leq \operatorname{depl}(w) + p - 1,$$
$$\operatorname{depl}(w^{p^N}) \leq \operatorname{depl}(w) + p - 1.$$

□

7.2 A p-aplicação da álgebra de Lie restrita L é nil

Teorema 7.2.1. *Seja $\tilde{L}$ o espaço gerado por todos os monômios standard. A álgebra de Lie restrita $\tilde{L}$ tem uma p-aplicação nil.*

Demonstração. Seja $0 \neq w \in \tilde{L}$ e considere um inteiro positivo $N > 1$. Suponha que a expansão de w^{p^N} via monômios puros possua uma derivada pura ∂_n.

Note que w é uma combinação linear finita de monômios standard, portanto a depleção de w existe e é exatamente o máximo das depleções dos monômios que constituem a combinação linear. Denotamos $C := \operatorname{depl} w$.

Primeiramente vamos computar as depleções. Pelo Lema 7.1.5 temos que

$$\operatorname{depl}(w^{p^N}) \leq C + N(p-1). \tag{7.3}$$

Sabemos ainda, pela Definição 7.1.3, que $\operatorname{depl}(\partial_n) = n(p-1)$. Note que ∂_n faz parte da expansão de w^{p^N} via monômios standard, logo, por (7.3), temos que

$$\operatorname{depl}(\partial_n) \leq \operatorname{depl}(w^{p^N}) \leq C + N(p-1).$$

Portanto

$$\begin{aligned} n(p-1) &\leq C + N(p-1), \\ n &\leq \frac{C}{p-1} + N. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Agora, vamos calcular os pesos. Sabemos que $\operatorname{wt}(\partial_n) = \lambda^n$. Além disso, qualquer monômio que compõe a combinação linear de w tem peso no mínimo 1. Denotamos isso como $\operatorname{wt}(w) \geq 1$ o que implica, por aditividade da função peso, que $\operatorname{wt}(w^{p^N}) \geq p^N$. Isso implica que todos os monômios puros na expansão têm peso pelo menos p^N. Em particular $\lambda^n = \operatorname{wt}(\partial_n) \geq p^N$, o que implica que

$$n \geq N \log_\lambda p. \tag{7.5}$$

Seja $\Theta := \log_\lambda p$. Pelo Lema 4.2.1 sabemos que $\lambda < p$, temos que $\Theta > 1$. Devido a (7.4) e (7.5) temos que

$$\begin{aligned} N\Theta &\leq \frac{C}{p-1} + N, \\ N(\Theta - 1) &\leq \frac{C}{p-1}. \end{aligned}$$

O que é uma contradição, para N suficientemente grande. Esta contradição prova que a expansão de w^{p^N} via monômios standard não contem nenhuma derivada pura ∂_n, $n \geq 0$.

Afirmamos que, ao escrever w^{p^N} como combinação linear finita de monômios standard, esta combinação linear não pode conter elementos pivô v_n, $n \geq 0$. De fato, caso contrário, a expansão de w^{p^N} iria conter a respectiva derivada ∂_n.

Desta forma, $w' = w^{p^N}$ é uma combinação linear finita de monômios standard que contêm pelo menos uma variável em sua escrita. Portanto, pelo Lema 7.1.1, w' é nil.

□

Capítulo 8

Álgebra envelopante associativa

8.1 Base da envelopante associativa A

Agora que já obtemos a dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra de Lie (restrita) $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$, nosso objetivo neste capítulo é determinar o crescimento da álgebra envelopante associativa $A = \mathrm{Alg}\,(v_0, v_1, v_2)$. Para auxiliar este processo, vamos considerar uma álgebra de Lie um pouco maior. Definimos $\tilde{L}$ como o espaço gerado por todos os monômios quasi-standard da forma:

$$r_{n-3}x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n,$$

onde $0 \leq \xi_{n-2} \leq p-2$. Claramente, temos que $L \subset \tilde{L}$. Vamos estudar a envoltória associativa extendida $\tilde{A} := \mathrm{Alg}\,\tilde{L}$, que inclui a nossa álgebra $A = \mathrm{Alg}\,(v_0, v_1, v_2)$.

Teorema 8.1.1. *Seja $\tilde{A} = \mathrm{Alg}\,(\tilde{L})$. Uma base para $\tilde{A}$ consiste em todos os monômios da forma*

$$w = x_0^{\xi_0}x_1^{\xi_1}\cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n^{\alpha_n}v_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\cdots v_0^{\alpha_0}, \quad \alpha_i, \xi_i \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad n \geq 0, \tag{8.1}$$

onde $\alpha_n \geq 1$ (nos referimos a n como o comprimento de w), e os expoentes ξ_i seguem as seguintes restrições:

i) Se $\alpha_n = 1$, então $0 \leq \xi_{n-2} \leq p-2$ e $\xi_0, \ldots, \xi_{n-3}$ assumem qualquer valor do conjunto $\{0, \ldots, p-1\}$;

ii) Se $2 \leq \alpha_n \leq p-1$, então $\xi_0, \ldots, \xi_{n-2}$ assumem qualquer valor do conjunto $\{0, \ldots, p-1\}$.

Demonstração. Durante a prova, trabalharemos com produtos de monômios quasi-standard. Podemos reordenar estes produtos usando argumentos como no teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, fixando uma ordem total, que diz respeito ao comprimento desses monômios. Escreveremos então os produtos em ordem decrescente de comprimento. Observamos ainda que o produto entre p monômios quasi-standard de mesmo comprimento desaparecem, já que:

$$(r_{n-2}^{(1)}v_n)(r_{n-2}^{(2)}v_n)\cdots(r_{n-2}^{(p)}v_n) = r_{n-2}v_n^p = -r_{n-2}x_{n+1}v_{n+2}.$$

Teremos, portanto, produtos de monômios quasi-standard (no máximo $p-1$ para cada comprimento fixado), em ordem decrescente de comprimento. Um exemplo é dado pelo seguinte produto:

$$[(r_{n-2}^{(1)}v_n)\cdots(r_{n-2}^{(p-1)}v_n)][(r_{n-3}^{(1)}v_{n-1})\cdots(r_{n-3}^{(p-1)}v_{n-1})]\cdots[v_0\cdots v_0], \tag{8.2}$$

onde há pelo menos um monômio de comprimento n, enquanto os demais, de comprimento menor do que n podem ou não aparecer.

Seja x_i uma variável em um monômio $r_{j-2}v_j$ ($i \leq j-2$). Os monômios que o antecedem têm comprimento maior que j, consequentemente, maior que i. Logo, pelo Lema 3.1.1, x_i comuta com as cabeças v_k correspondentes ($k > i$). Desta forma, podemos mover todas as letras x_i em (8.2) para a esquerda.

No caso em que o produto (8.2) envolve apenas um monômio quasi-standard de comprimento n, a variável x_{n-2} deve aparecer em grau no máximo $p-2$, visto que não é possível obter essa variável através de produtos de monômios de comprimento menor ou igual a $n-2$. Já no caso em que o produto (8.2) envolve pelo menos dois monômios de comprimento n, a variável x_{n-2} pode aparecer em grau até $p-1$.

□

8.2 Dimensão de Gelfand-Kirillov de A

Lema 8.2.1. *Seja $p \geq 2$. Considere $w = x_0^{\xi_0}x_1^{\xi_1}\cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n^{\alpha_n}v_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\cdots v_0^{\alpha_0}$ um monômio pertencente a álgebra envoltória extendida $\tilde{A}$, com as mesmas restrições apresentadas no Teorema* 8.1.1. *O peso de w satisfaz as desigualdades:*

$$\lambda^{n-5} < \operatorname{wt}(w) < \lambda^{n+4}.$$

Demonstração. Vamos denotar $u := x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n$ a parte inicial de w, onde $0 \leq \xi_{n-2} \leq p-2$, temos que u é um monômio quasi-standard de L. Usamos a estimativa inferior que segue do Lema 5.1.2, válida para $p \geq 2$:

$$\lambda^{n-5} < \mathrm{wt}\,(r_{n-3} x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n).$$

Primeiramente vamos estabelecer a cota inferior. Perceba que no caso em que $2 \leq \alpha_n \leq p-1$, a letra x_{n-2} pode aparecer com potência $p-1$. Temos então pelo menos a seguinte situação:

$$w = r_{n-3} x_{n-2}^{p-2} v_n \cdot x_{n-2} v_n.$$

Neste caso, note que $\mathrm{wt}\,(x_{n-2} v_n) = -\lambda^{n-2} + \lambda^n > 0$. Portanto, $\mathrm{wt}\,(w) > \lambda^{n-5}$. De modo geral, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{wt}\,(w) &= \mathrm{wt}\,(x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n^{\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdots v_0^{\alpha_0}) \geq \mathrm{wt}\,(u) + \mathrm{wt}\,(v_n^{\alpha_n - 1}) + \ldots + \mathrm{wt}\,(v_0^{\alpha_0}) \\ &\geq \mathrm{wt}\,(u) > \lambda^{n-5}. \end{aligned}$$

Agora, vamos estabelecer a cota superior. Pelo Lema 5.1.4 temos $\lambda > \sqrt{p}$. Novamente, perceba que $\mathrm{wt}\,(x_j) < 0$, portanto temos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{wt}\,(w) &\leq \mathrm{wt}\,(v_n^{\alpha_n}) + \mathrm{wt}\,(v_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) + \ldots + \mathrm{wt}\,(v_0^{\alpha_0}) \\ &< (p-1)\lambda^n + (p-1)\lambda^{n-1} + \ldots + (p-1)\lambda^0 \\ &= (p-1)\frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} < \frac{p-1}{\lambda - 1}\lambda^{n+1} < \frac{p-1}{\sqrt{p} - 1}\lambda^{n+1} = (\sqrt{p} + 1)\lambda^{n+1} \\ &< (\lambda + 1)\lambda^{n+1} < \lambda^{n+4}. \end{aligned}$$

Usamos o fato de que $x + 1 < x^2$ para $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$. No caso $p = 2$ utilizamos a cota $1 + x < x^3$ para $x = \lambda \approx 1,52$. $\square$

Teorema 8.2.2. *Considere $A = \mathrm{Alg}(v_0, v_1, v_2)$ sobre um corpo K de característica $p > 0$. Então*

$$\mathrm{GKdim}\, A = \underline{\mathrm{GKdim}}\ A = 2 \log_\lambda p.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos encontrar um limitante superior para a função $\tilde{\gamma}_{\tilde{A}}(m)$ que faz a contagem dos monômios da álgebra envoltória extendida $w \in \tilde{A}$, tais que $\mathrm{wt}\, w < m$. Considere um tal monômio w de comprimento n. Pelo Teorema 8.2.1 temos que $\lambda^{n-5} < \mathrm{wt}\, w \leq m$, portanto $n \leq [\log_\lambda(m)] + 5 = n_0$.

Contando todos os monômios (8.1) de comprimento no máximo n_0, temos o limitante superior desejado:

$$\tilde{\gamma}_{\tilde{A}}(m) < p + \sum_{n=1}^{n_0} p^{2n} = p + \frac{p^2(p^{2n_0}-1)}{p^2-1} < p + \frac{1}{1-1/p^2} \cdot (p^2)^{\log_\lambda(m)+5}$$
$$= p + \frac{p^{10}}{1-1/p^2}(m)^{2\log_\lambda p}.$$

Seja agora $n := [\log_\lambda m] - 4$. Considere todos os monômios

$$w = x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n^{\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdots v_0^{\alpha_0},$$

de comprimento n. Para $n \geq 8$ eles pertencem a mesma álgebra A. Pelo Lema 8.2.1 temos que $\operatorname{wt} w < \lambda^{n+4} \leq m$. Contando todos os monômios w, temos um limitante inferior para o crescimento da álgebra A:

$$\tilde{\gamma}_A(m) \geq p^{2n-2} \geq \left(p^2\right)^{\log_\lambda m - 6} = p^{-12} m^{2\log_\lambda p}.$$

Concluimos que $\operatorname{GKdim} A = \underline{\operatorname{GKdim}}\ A = 2\log_\lambda p$.

$\square$

Corolário 8.2.3. *Para qualquer p temos*

a) $3,3 < \operatorname{GKdim} A < 4$;

b) $\lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{GKdim} A = 4$.

Demonstração. Segue do Corolário 5.2.2. $\square$

8.3 Paraboloide para A

Agora vamos encontrar um limitante superior para $|\operatorname{swt}(w)|$.

Lema 8.3.1. *No caso $2 \leq p \leq 7$ seja μ raiz complexa. No caso $p \geq 11$ seja $\mu \in \{\alpha_2, \alpha_3\}$ uma das raizes reais negativas. Agora, seja $\operatorname{swt}(v_n)$ a função de superpeso definida por $\operatorname{swt}(v_n) = \lambda^n, n \geq 0$. Consideramos um monômio $w \in \tilde{A}$ como (8.1). Temos a seguinte cota*

$$|\operatorname{swt}(w)| < c|\mu|^n.$$

Demonstração. Temos que $|\operatorname{swt}(v_k)| = |\operatorname{swt}(x_k)| = |\mu|^k$. Segue então a estimativa para (8.1):

$$|\operatorname{swt}(w)| \leq \sum_{j=0}^{n} 2(p-1)\cdot|\mu|^j \leq 2(p-1)\frac{|\mu|^{n+1}-1}{|\mu|-1} \leq \tilde{c}|\mu|^n.$$

□

Teorema 8.3.2. *Seja $p \leq 7$ e $\tau := \log_\lambda|\mu|$, onde $\tau < 1$. Existe uma constante $c > 0$ tal que os pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ representando os monômios da álgebra $\tilde{A}$ estão dentro de uma superfície do tipo paraboloide de rotação, cuja equação é escrita em termos das coordenadas torçadas $(Y_1, Y_2, Y_3) := \operatorname{WtR}(w)$:*

$$\begin{cases} 0 \leq Y_1 < +\infty, \\ \sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} < cY_1^\tau. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $w = x_0^{\xi_0}x_1^{\xi_1}\cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}}v_n^{\alpha_n}v_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\cdots v_0^{\alpha_0}$ um monômio de $\tilde{A}$ de comprimento $n \geq 0$ com coordenadas peso $\operatorname{Wt}(w) = (Z_1, Z_2, Z_3) = (\operatorname{wt} w, \operatorname{swt} w, \overline{\operatorname{swt}}\, w)$. Pelas estimativas para o peso dos monômios $w \in \tilde{A}$, dadas pelo Lema 8.2.1, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^{n-5} &< \operatorname{wt} w = Z_1, \\ n &< \log_\lambda Z_1 + 5. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Agora, pelo Lema 8.3.1, temos:

$$|Z_2| = |\operatorname{swt} w| < c|\mu|^n < c|\mu|^{\log_\lambda Z_1 + 5} = c\cdot|\mu|^5\cdot Z_1^{\log_\lambda|\mu|} = \tilde{c}Z_1^\tau.$$

Aplicando o Lema 4.5.6, fazemos a transição para as coordenadas torçadas:

$$\sqrt{Y_2^2+Y_3^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} Z_2)^2 + (\operatorname{Im} Z_2)^2} = |Z_2| < \tilde{c}Y_1^\tau.$$

□

Teorema 8.3.3. *Seja $p \geq 11$. Os pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ representando os monômios da álgebra $\tilde{A}$ estão dentro de uma superfície do tipo funil retangular em termos das coordenadas superpeso $(Z_1, Z_2, Z_3) = \operatorname{Wt}(w)$:*

$$\begin{cases} 0 \leq Z_1 < +\infty, \\ |Z_2| \leq c_1 Z_1^{\tau_1}, & \tau_1 = \log_\lambda|\alpha_2|, \\ |Z_3| \leq c_2 Z_1^{\tau_2}, & \tau_2 = \log_\lambda|\alpha_3|. \end{cases}$$

Demonstração. Pelas considerações feitas em (8.3), $n < \log_\lambda Z_1 + 5$. Pelo Lema 8.3.1

$$\begin{aligned}|Z_2| = |\operatorname{swt} w| < c|\mu|^n = c|\alpha_2|^n \\ \leq c|\alpha_2|^{\log_\lambda Z_1 + 5} = c|\alpha_2|^5 Z_1^{\log_\lambda |\alpha_2|} = c_1 Z_1^{\tau_1}.\end{aligned}$$

□

Corolário 8.3.4. *A* $\mathbb{N}^3$*-graduação da álgebra* $A = \operatorname{Alg}(v_0, v_1, v_2)$ *não pode ter componentes no máximo unidimensionais.*

Demonstração. Pelo Teorema 8.3.3 elementos homogêneos $w \in A$, $\operatorname{wt}(w) < m$ pertencem ao corpo, que está dilatado do corpo para L (Teorema 5.3.3). O número dos pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ dentro desse corpo é dado pelo corolário 5.3.4

$$N(m) \approx cm^{\log_\lambda p}.$$

Mas pelo Teorema 8.2.2 a função de crescimento de A se comporta como

$$\gamma_A(m) \sim m^{2 \log_\lambda p}.$$

Então existe componente da $\mathbb{N}^3$-graduação de dimensão maior do que 1. □

Podemos demonstrar o mesmo, usando outra abordagem.

Lema 8.3.5. *Seja A uma álgebra (Lie ou associativa)* $\mathbb{N}^3$*-graduada com* $\mathbb{N}^3$*-componentes no máximo uni-dimensionais. Então* $\operatorname{GKdim} A \leq 3$.

Demonstração. O crescimento do grupo abeliano $\mathbb{Z}^3$ é bem conhecido. A seguinte assintótica vale [32]:

$$\gamma_{\mathbb{Z}^3}(m) \approx c \cdot m^3.$$

□

Observamos que, pelo Corolário 8.2.3 acima, $\operatorname{GKdim} A \geq 3,3$ e usando Lema 8.3.5 temos mais uma demonstração do Corolário 8.3.4.

8.4 Paraboloide para álgebra envelopante restrita

Vamos primeiro estabelecer que monômios da álgebra envelopante restrita $u(L)$ tambem pertencem a uma superfície do tipo paraboloide.

Teorema 8.4.1. *Considere a álgebra envelopante restrita $u = u(L)$. No caso $2 \le p \le 7$ seja μ raiz complexa. No caso $p \ge 11$ seja $\mu \in \{\alpha_2, \alpha_3\}$ raiz real negativa. Consideramos a função superpeso* $\operatorname{swt}(v_n) = \mu^n$, $n \ge 0$. *Escolhemos θ tal que*

$$\overline{\theta} := \frac{\ln(p|\mu|)}{\ln(p\lambda)} < \theta < 1,$$

onde $\overline{\theta} < 1$ por estimativas para autovalores. Elementos do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ correspontes dos elementos homogêneos $w \in u(L)$ satisfazem, para algum $c > 0$:

$$|\operatorname{swt}(w)| \le c \cdot (\operatorname{wt} w)^{\theta}.$$

Demonstração. Seja $\tilde{L}$ a álgebra gerada como espaço vetorial por todos os monômios quasi-standard. Vamos considerar coordenadas dos elementos homogêneos da álgebra estendida $u(\tilde{L}) \supset u = u(L)$. Seja $\{w_i | i \in \mathbb{N}\}$ a base ordenada de $\tilde{L}$, que consiste nos elementos

$$w = x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n, \quad w = x_{n-2}^{p-1} v_n,$$

onde $0 \le \xi_i \le p-1$ e $0 \le \xi_{n-2} \le p-2$. Considere a função que mede o comprimento $l : \{w_i | i \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$, $l(x_0^{\xi_0} x_1^{\xi_1} \cdots x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n) = n$. Pelo Teorema 5.1.2 temos as estimativas

$$\lambda^{n-4} \le \operatorname{wt}(w) \le \lambda^n.$$

$$|\operatorname{swt}(w)| \le C|\mu|^n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.4}$$

Considere um elemento standard da base de $u(\tilde{L})$ do tipo $v = w_{i_1} \cdots w_{i_s}$, onde os w_{i_j} estão ordenados e cada w_j ocorre no máximo $p-1$ vezes. Seja $N = \max\{l(w_{i_j}) | 1 \le j \le s\}$. Denote por m_k o número dos w_{i_j} tais que $k = l(w_{i_j})$, para todo $k = 1, \ldots, N$. Considere as novas coordenadas peso $Z_1 = \operatorname{wt}(v)$ e $Z_2 = \operatorname{swt}(v)$. Aplicamos (8.4) e obtemos as estimativas

$$\frac{1}{\lambda^4} \sum_{k=1}^{N} m_k \lambda^k \le Z_1 \le \sum_{k=1}^{N} m_k \lambda^k$$

$$|Z_2| \le C \sum_{k=1}^{N} m_k |\mu|^k. \tag{8.5}$$

Seja $\alpha = \alpha(v)$ o número tal que $|Z_2| = Z_1^\alpha$. Então

$$\alpha(v) = \frac{\ln Z_2}{\ln Z_1} \leq \frac{\ln\left(C\sum_{k=1}^{N} m_k|\mu|^k\right)}{\ln\left(\frac{1}{\lambda^4}\sum_{k=1}^{N} m_k\lambda^k\right)}. \tag{8.6}$$

O número de diferentes elementos da base w_i tais que $l(w_i) = k$ é igual a $p^{k-2}(p-1)+1 < p^{k-1}$ para todo $k \geq 2$. Cada um desses pode compor v no máximo $(p-1)$ vezes. Portanto temos

$$m_k \leq p^{k-1}(p-1) < p^k, \qquad k = 1, \dots, N. \tag{8.7}$$

Vamos computar o valor máximo de $\alpha(v)$ dentre todos os $v's$ com valor de peso fixo $Z_1(v) = S$. De (8.5) temos $S \leq \sum_{k=1}^{N} m_k\lambda^k \leq \lambda^4 S$, esta estimativa implica o intervalo de valores para o denominador de (8.6). Para obter estimativas para o numerador de (8.6) consideramos o máximo da função linear

$$f(t_1, \dots, t_N) = \sum_{k=1}^{N} t_k|\mu|^k, \qquad 0 \leq t_k \leq p^k,\ k = 1, \dots, N, \tag{8.8}$$

sujeito a uma restrição da forma de um hiperplano $\sum_{k=1}^{N} m_k\lambda^k = A$, onde a constante A é tal que $S \leq A \leq \lambda^4 S$. Note que o denominador de (8.6) é fixado em cada hiperplano. Desde que $|\mu| < \lambda$, o máximo em cada hiperplano é alcançado quando tomamos o maior valor possível para t_k com menores $k's$. Por (8.7), temos os limitantes $0 \leq t_k \leq p^k$, $k = 1, \dots, N$. Portanto, tomamos o ponto sobre o hiperplano $t_{k+1} = p^k, k = 1, \dots, m$, para algum $m \leq N$, o valor apropriado $t_{k+1} \in [0, p^{k+1})$, e $t_{k+2} = \dots = t_N = 0$. Isto garante o limitante superior

$$\begin{aligned}\alpha(v) &\leq \frac{\ln\left(C\left(\sum_{k=1}^{m} p^k|\mu|^k + t_{k+1}|\mu|^{k+1}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{\lambda^4}\left(\sum_{k=1}^{m}(p\lambda)^k + t_{k+1}\lambda^{k+1}\right)\right)} \leq \frac{\ln(C_1 p^m|\mu|^m)}{\ln(C_2 p^m\lambda^m)} \\ &= \frac{\frac{1}{m}\ln C_1 + \ln(p|\mu|)}{\frac{1}{m}\ln C_2 + \ln(p\lambda)} \leq (1+o(1))\frac{\ln(p|\mu|)}{\ln(p\lambda)}, \qquad m \to \infty.\end{aligned}$$

Quando S cresce, o número m também aumenta. Vamos escolher o número θ tal que $\overline{\theta} < \theta < 1$. Então para Z_1 suficientemente grande temos $\alpha(v) \leq \theta$, portanto $|Z_2| \leq Z_1^\theta$. By choosing an appropriate constant C we get $|Z_2| \leq CZ_1^\theta$ para todo $Z_1 > 0$. □

Teorema 8.4.2. *Pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ que correspondem aos monômios da álgebra envelopante restrita sem unidade $u(L)$ satisfazem*

a) No caso $2 \leq p \leq 7$ usamos coordenadas peso reais torçadas $(Y_1, Y_2, Y_3) = \mathrm{WtR}\,(w)$:

$$\begin{cases} 0 \leq Y_1 < +\infty, \\ \sqrt{Y_2^2 + Y_3^2} < CY_1^{\theta}, & \text{onde } \overline{\theta} := \frac{\ln(p|\mu|)}{\ln(p\lambda)} < \theta < 1. \end{cases}$$

b) No caso $p \geq 11$ usamos coordenadas peso $(Z_1, Z_2, Z_3) = \mathrm{WtR}\,(w)$:

$$\begin{cases} 0 \leq Z_1 < +\infty, \\ |Z_2| < C_1 Z_1^{\theta_1}, & \text{onde } \overline{\theta_1} := \frac{\ln(p|\alpha_2|)}{\ln(p\lambda)} < \theta_1 < 1 \\ |Z_3| < C_2 Z_2^{\theta_2}, & \text{onde } \overline{\theta_2} := \frac{\ln(p|\alpha_3|)}{\ln(p\lambda)} < \theta_2 < 1. \end{cases}$$

Demonstração. Segue de forma semelhante ao Teorema 8.3.2 e ao Teorema 8.3.3. □

As seguintes tabelas mostram que agora a superfície do tipo paraboloide é maior do que tal para L ou A.

p	$\overline{\theta}$
2	$0,7071...$
3	$0,7649...$
5	$0,7832...$
7	$0,7925...$

Tabela 8.4.1: Valores de $\overline{\theta}$ para $2 \leq p \leq 7$.

p	$\overline{\theta}_1$	$\overline{\theta}_2$
11	$0,7309...$	$0,8739...$
13	$0,7082...$	$0,9027...$
17	$0,6891...$	$0,9302...$
19	$0,6842...$	$0,9382...$
23	$0,6781...$	$0,9492...$
29	$0,6733...$	$0,9592...$

Tabela 8.4.2: Valores de $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ para $p \geq 11$.

Observação 8.4.1. *Usando resultado de Petrogradsky [42], [44], a álgebra envelopante restrita tem a seguinte assintótica de crescimento para algum $C > 0$:*

$$\gamma_{U(L)}(m) = \exp\left((C + o(1))m^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\right), \qquad m \to \infty.$$

8.5 Decomposições nas somas diretas de duas subálgebras localmente nilpotentes

Teorema 8.5.1. *As seguintes álgebras*

a) Álgebra de Lie (restrita) $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$;

b) Álgebra envelopante associativa $A = \mathrm{Alg}\,(v_0, v_1, v_2)$;

c) Álgebra envelopante restrita $u = u(L)$ sem unidade,

são somas diretas de duas subálgebras localmente nilpotentes:

$$L = L_+ \oplus L_-, \qquad A = A_+ \oplus A_-, \qquad u = u_+ \oplus u_-.$$

Demonstração. a) Mostramos que o eixo $\mathrm{O}Z_1$ (que coincide com OY_1 no caso $p \in \{2, 3, 5, 7\}$) não tem pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3$ no sentido das coordenadas multigrau, além da origem. Assumimos que $\mathbb{Z}^3 \ni (n_1, n_2, n_3) = \mathrm{Gr}\, w \in \mathrm{O}Z_1$. Pelo Lema 4.5.6

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Wt}^T(w) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 0 &= n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_2^2 n_3, \\ 0 &= n_1 + \lambda_3 n_2 + \lambda_3^2 n_3, \\ n_2 &= -(\lambda_2 + \lambda_3) n_3. \\ \lambda &= -\lambda_2 - \lambda_3 = n_2/n_3 \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

uma contradição com o fato de que o polinômio característico é irredutível.

b) Existem continuum dos planos que passam pelo eixo $\mathrm{O}Z_1$. Pontos do reticulado $\mathbb{Z}^3$ são contáveis. Portanto, existem infinitos planos que passam pelo eixo $\mathrm{O}Z_1$ mas não passam por nenhum dos pontos de $\mathbb{Z}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$.

c) Vamos considerar o caso da álgebra envelopante restrita $u(L)$ sem unidade. Seja Γ um plano obtido acima. Por b) nenhum monômio tem ponto em Γ. Definimos u_+ como espaço gerado pelos monômios de $u(L)$ por um lado de Γ, e u_- os monômios do outro lado. Obtemos uma soma direta $u = u_+ \oplus u_-$.

d) Observamos que u_+ e u_- são subálgebras, por aditividade das funções peso.

e) Agora, veja que $W = \operatorname{Alg}(w_1, \ldots, w_k)$, $w_i \in u_+$. Pontos para essa álgebra ficam dentro do cone formado por esses vetores, $\{t_1 \operatorname{Wt}(w_1) + \ldots + t_k \operatorname{Wt}(w_k) | t_i \geq 0\}$. Observamos que esses vetores estão de um lado do plano Γ. Por argumentos geométricos, produtos longos devem sair do paraboloide de rotação

$$\sqrt{Z_2^2 + Z_3^2} < C Z_1^{\theta}, \qquad \text{onde} \quad \theta < 1.$$

Portanto, $W^N = 0$ para algum inteiro N.

$\square$

Capítulo 9

Álgebra de Poisson P

9.1 Definição da álgebra de Poisson P

Neste capítulo, vamos definir uma álgebra de Poisson $P(V_0, V_1, V_2)$, determinada pela álgebra de Lie $L = \mathrm{Lie}\,(v_0, v_1, v_2)$.

Consideramos a álgebra polinomial truncada em dois grupos de variáveis

$$H := K[x_i, y_i | i \geq 0]/(x_i^p, y_i^p | i \geq 0),$$

a qual se torna uma álgebra de Poisson munida com um colchete determinado pelas seguintes relações:

$$\{\partial_i, x_i\} = 1, \quad \{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0, \quad i \neq j. \tag{9.1}$$

Obtemos o colchete:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} \right), \qquad f, g \in H.$$

A seguir definimos um completamento de H. Denote por Ξ o conjunto de todas as tuplas $\alpha = (\alpha_i | \alpha_i \in \{0, \ldots, p-1\}, i \geq 0)$ com uma quantidade finita de entradas não nulas. Denote por $\varepsilon_i \in \Xi$ a tupla com entrada 1 na i-ésima posição e zero nas demais, $i \geq 0$. Seja $\alpha \in \Xi$, definimos

$$|\alpha| = \sum_{i \geq 0} \alpha_i, \;\; \overline{\alpha} = \max\{i \geq 0 | \alpha_i \neq 0\}, \;\; x^\alpha = \prod_{i \geq 0} x_i^{\alpha_i}, \;\; y^\alpha = \prod_{i \geq 0} y_i^{\alpha_i},$$

onde os produtos são tomados em ordem crescente. Seja $\alpha \in \Xi$ e considere que para algum $i \geq 0$, temos $\alpha_i = 0$ (ou $\alpha_i \geq p$), então consideramos que $x^{\alpha - \varepsilon_i} = 0$. Abaixo assumimos que as tuplas α, β pertencem a Ξ. Considere o seguinte completamento de H, que consiste em todas as somas formais infinitas:

$$\tilde{H} := \left\{ \sum_{\overline{\alpha}<\overline{\beta}} \lambda_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \Big| \lambda_{\alpha,\beta} \in K \right\}.$$

Desde que abaixo os termos y_i serão substituidos por derivadas parciais, definimos *operadores diferenciais de ordem finita k*:

$$\tilde{H}^k := \left\{ \sum_{\overline{\alpha}<\overline{\beta},\ |\beta|=k} \lambda_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \Big| \lambda_{\alpha,\beta} \in K \right\}, \quad k \geq 0;$$

$$\mathbf{H} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{H}^k.$$

Lema 9.1.1. *Extendemos formalmente os produtos de H para $\tilde{H}$. Então*

(i) $\tilde{H}$ é álgebra de Poisson;

(ii) $\boldsymbol{H} \subset \tilde{H}$ é uma subálgebra de $\tilde{H}$.

Demonstração. Claramente o produto associativo está bem definido. Vamos provar que o colchete de Poisson está bem definido:

$$\left\{ \sum_{\overline{\alpha}'<\overline{\beta}'} \lambda_{\alpha',\beta'} x^{\alpha'} y^{\beta'}, \sum_{\overline{\alpha}''<\overline{\beta}''} \mu_{\alpha'',\beta''} x^{\alpha''} y^{\beta''} \right\}$$

$$= \sum_{\substack{\overline{\alpha}'<\overline{\beta}' \\ \overline{\alpha}''<\overline{\beta}''}} \lambda_{\alpha',\beta'} \mu_{\alpha'',\beta''} \left(\beta'\alpha'' \sum_{\substack{i\leq\overline{\alpha}''<\overline{\beta}'' \\ i\leq\overline{\beta}'}} x^{\alpha'} y^{\beta'-\varepsilon_i} x^{\alpha''-\varepsilon_i} y^{\beta''} - \alpha'\beta'' \sum_{\substack{i\leq\overline{\alpha}'<\overline{\beta}' \\ i\leq\overline{\beta}''}} x^{\alpha'-\varepsilon_i} y^{\beta'} x^{\alpha''} y^{\beta''-\varepsilon_i} \right)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\substack{\alpha'+\alpha''=\alpha \\ \beta'+\beta''=\beta}} \left(\sum_{i<\overline{\beta}''} (\beta'+\varepsilon_i)(\alpha''+\varepsilon_i) \lambda_{\alpha',\beta'+\varepsilon_i} \mu_{\alpha''+\varepsilon_i,\beta''} - \right.$$

$$\left. \sum_{i<\overline{\beta}'} (\alpha'+\varepsilon_i)(\beta''+\varepsilon_i) \lambda_{\alpha'+\varepsilon_i,\beta'} \mu_{\alpha'',\beta''+\varepsilon_i} \right) x^\alpha y^\beta, \quad \overline{\alpha} < \overline{\beta}.$$

Acima deletamos i de α' e β'', existe $j > i$ em β'. Temos $\max\{j, \overline{\beta''-\varepsilon_i}\} > \alpha''$, trivialmente $\overline{\beta'} > \overline{\alpha'-\varepsilon_i}$. Portanto o produto pertence a $\tilde{H}$.

Sejam agora $f \in \tilde{H}^k$, $g \in \tilde{H}^m$, $k, m \geq 0$. Pelas computações acima temos que $f \cdot g \in \tilde{H}^{k+m}$ e $\{f, g\} \in \tilde{H}^{k+m-1}$. Portanto $\mathbf{H}$ é uma subálgebra.

$\square$

Os próximos elementos, pertencentes a $\operatorname{Der} H$, serão referidos como *elementos pivô*

$$V_i := y_i + x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1}(y_{i+3} + x_{i+3}^{p-1} x_{i+4}^{p-1}(y_{i+6} + x_{i+6}^{p-1} x_{i+7}^{p-1}(y_{i+9} + \cdots))), \quad i \geq 0. \tag{9.2}$$

Seja $\pi : \Delta \to H$ a imersão natural, ou seja, se $x_i^{\xi_i} \in \Delta$, com $0 \leq \xi_i \leq p-1$, então π leva $x_i^{\xi_i}$ no mesmo $x_i^{\xi_i} \in H$. Portanto, identificamos uma cauda $r_m \in \Delta$ com o respectivo elemento $r_m \in H$. Definimos tambem como π age sobre as derivadas parciais, da seguinte forma

$$\pi(x_i^{\xi_i} \partial_j) = x_i^{\xi_i} y_j \in \mathbf{H},$$

onde $i, j \geq 0$, $i < j$ e $0 \leq \xi_i \leq p-1$. Em particular, temos que $\pi(v_i) = V_i$, para todo $i \geq 0$. Seguem as imagens dos monômios standard

$$\pi(r_{n-3} x_{n-2}^{\xi_{n-2}} v_n) = r_{n-3} x_{n-2}^{\xi_{n-2}} V_n \in \mathbf{H}, \qquad n \geq 3. \tag{9.3}$$

Lema 9.1.2. *A aplicação*

$$\pi : L = \operatorname{Lie}(v_0, v_1, v_2) \to \operatorname{Lie}(V_0, V_1, V_2) \subset \boldsymbol{H}$$

é uma imersão isomorfa entre L e uma subálgebra da álgebra de Poisson $\boldsymbol{H}$.

Demonstração. Observe que os colchetes (2.1) e (9.1) são "o mesmo". Concluimos que os colchetes de Lie sobre os elementos pivô (2.2) e suas imagens (9.2) são "o mesmo", logo

$$\pi([v_i, v_j]) = \{V_i, V_j\}, \quad i, j \geq 0.$$

A mesma observação se aplica aos monômios standard e suas imagens. □

Definimos a subálgebra de Poisson $P = \operatorname{Poisson}(V_0, V_1, V_2) \subset H$ gerada por $\{V_0, V_1, V_2\}$. A relação recursiva (2.2) é reescrita da seguinte forma:

$$V_i = y_i + x_i^{p-1} x_{i+1}^{p-1} V_{i+3}, \quad i \geq 0.$$

Definimos álgebras de Poisson $P_i = \operatorname{Poisson}(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}) \subset \mathbf{H}$, $i \geq 0$, portanto $P_0 = P$. Estendemos o endomorfismo shift $\tau : L \to L$ para P por $\tau(1) = 1$ e $\tau(w_1 \cdots w_n) = \tau(w_1) \cdots \tau(w_m)$, onde $w_j \in L$.

Corolário 9.1.3. *Seja $P = \operatorname{Poisson}(V_0, V_1, V_2) \subset \boldsymbol{H}$. Então*

i) $V_i \in P$, $i \geq 0$;

ii) $\tau^i : P \to P_i$ *é um isomorfismo, para qualquer* $i \geq 0$*;*

iii) Obtemos uma cadeia de subálgebras de Poisson isomorfas:

$$P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \cdots \supsetneq P_i \supsetneq P_{i+1} \supsetneq \cdots, \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} P_i = \langle 1 \rangle_K.$$

iv) A álgebra de Poisson P *tem dimensão infinita.*

9.2 Propriedades das álgebras de Poisson P, $\hat{P}$ e relação com A

Sejam $w_j = r_{n-2}^{(j)} v_n$, $j = 1, \ldots, p$, monômios standard de primeiro e segundo tipos. Consideremos produtos deles em $A = \mathrm{Alg}\,(v_0, v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned} w_1 w_2 \cdots w_p &= r_{n-2}^{(1)} v_n r_{n-2}^{(2)} v_n \cdots r_{n-2}^{(p)} v_n = \tilde{r}_{n-2} v_n^p \\ &= -\tilde{r}_{n-2} x_{n+1}^{p-1} v_{n+3}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

No caso particular $w_j = x_n$ temos $v_n^p = -x_{n+1}^{p-1} v_{n+3}$, monômios standard do segundo tipo. Em geral, monômios (9.4) têm forma $r_{n-5} x_{n-1}^{p-1} v_n$, $n \geq 3$.

Definição 9.2.1. *1) Monômios obtidos como (9.4), que não são monômios standard tipo* 2*, são chamados **monômios standard de tipo** 3.*

2) Monômios da forma $r_{n-5} x_{n-1}^{p-1} v_n$, $n \geq 3$*, são chamados **monômios quasi-standard de tipo** 3.*

3) Monômios quasi-standard de tipo 3*, que não são standard, são chamados **falsos**.*

Lema 9.2.2. *1) Não existem monômios standard falsos do tipo* 3 *de comprimento* $n \geq 11$.

2) O número de monômios standard falsos do tipo 3 *é finito.*

3) Na definição (9.4) podemos usar como w_i*:*

a) Apenas monômios standard do tipo 1*;*

b) Usando monômios standard de tipos 1, 2, 3*, obtemos os mesmos monômios.*

Demonstração. Usamos que não existem monômios falsos do tipo 1 de comprimento $n \geq 8$. No produto (9.4), podemos usar monômios standard de tipo 1 para obter todas as caudas $\tilde{r}_{n-2}$. Usando monômios de tipo $1, 2, 3$, não muda nada. □

Lema 9.2.3. *Denotamos por $\hat{L}$ o espaço gerado pelos monômios standard de tipo* $1, 2, 3$. *Então*

1) $\hat{L}$ *é uma subálgebra de Lie restrita em* $\operatorname{Der} \Delta$.

2) Seja $\hat{A} := \operatorname{Alg}(\hat{L})$. *Temos* $\hat{A} = A = \operatorname{Alg}(v_0, v_1, v_2)$.

3 $\pi : \hat{L} \to \pi(\hat{L}) \subset \boldsymbol{H}$ *é uma injeção.*

Demonstração. 1) Sejam w_1, w_2 monômios standard de tipo $1, 2$ ou 3. Por computações do Teorema 3.2.2, $[w_1, w_2]$ é expresso por monômios standard do tipo 1. Observamos que p-potências dos monômios são não-nulas no caso dos elementos pivô, nesse caso obtemos monômios de tipo 2.

2) Segue da definição dos monômios standard dos tipos $2, 3$ (veja (9.4)).

3) Evidente.

□

Temos então subálgebra de Lie $\hat{L} \cong \pi(\hat{L}) \subset \mathbf{H}$, dentro da álgebra de Poisson, com base

$$\pi(r_{n-2}v_n) = r_{n-2}V_n,$$

onde $\{r_{n-2}v_n | n \geq 0\}$ são todos os monômios standard dos 3 tipos.

Consideramos a álgebra de Poisson gerada por esses elementos (espaço gerado por eles e álgebra de Lie $\pi(\hat{L})$). Então obtemos a álgebra de Poisson

$$\hat{P} := \operatorname{Poisson}(\pi(\hat{L})) \subset \mathbf{H}.$$

Lembramos que $\mathbf{H}$ é uma álgebra comutativa e associativa. Uma base de $\hat{P}$ tem forma

$$x_0^{\alpha_0} \cdots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} V_n^{\beta_n} V_{n-1}^{\beta_{n-1}} \cdots V_0^{\beta_0}, \qquad \alpha_i, \beta_i \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad \beta_n \neq 0, \tag{9.5}$$

onde $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}$ satisfazem algumas condições adicionais. Não especificamos estas condições, mas está claro que existe esta descrição precisa, originada da lista finita dos monômios falsos dos tipos $1, 3$.

Por exemplo, no caso $n \geq 8$ temos a condição seguinte: se $\beta_n = 1$, ocorre um dos seguintes casos

a) $\alpha_{n-2} \leq p-2$ ou

b) $\alpha_{n-2} = p-1$ e $\alpha_{n-3} = \alpha_{n-4} = 0$.

Denotamos por $\hat{P}^m$ o subespaço de $\hat{P}$, que tem número m de letras V_j. Obtemos uma graduação $\hat{P} = \bigoplus_{m\geq 0} \hat{P}^m$ do espaço e da álgebra associativa.

Teorema 9.2.4. *Seja $\hat{A}^m \subset \mathrm{End}\ \Delta$ o espaço gerado por todos os produtos associativos de no máximo m elementos de $\hat{L}$, onde $m \geq 0$. Então*

i) $\{\hat{A}^m | m \geq 0\}$ *é uma filtração de* $\hat{A} = A$*;*

ii) $\hat{A}^m$ *módulo* $\hat{A}^{m-1}$ *é gerada por produtos* $w_1 \cdots w_m$ *de monômios standard* w_i *de tipos* $1, 2, 3$*, de comprimentos estritamente decrescentes, onde* $m \geq 1$*;*

iii) Existe um isomorfismo natural de espaços vetoriais $\hat{A}_m \cong \hat{P}_m$*,* $m \geq 0$*;*

iv) $\mathrm{gr}\, \hat{A}$ *tem estrutura natural de álgebra de Poisson e* $\mathrm{gr}\, \hat{A} \cong \hat{P}$*.*

Demonstração. Vamos provar *ii*) por indução sobre m. Os casos $m = 0, 1$ são claros. Seja $m \geq 2$. Fixamos uma ordem total $\prec$ sobre os monômios standard que obedece seus comprimentos. Considere um produto $w_1 w_2 \cdots w_m \in \hat{A}^m$, onde w_i são monômios standard. Desde que o comutador de dois monômios diferentes $[w_i, w_{i+1}] \in \hat{L}$ é expresso via monômios standard, podemos comutar esses monômios módulo $\hat{A}^{m-1}$. Portanto, assumimos que $w_1 \succeq w_2 \succeq \ldots \succeq w_m$. Suponha que temos p elementos consecutivos w_i, de mesmo comprimento n, então por (9.4) o produto resulta em um monômio standard do tipo 3. Portanto, produtos que contenham tais p elementos pertencem a $\hat{A}^{m-1}$ e aplicamos a hipótese de indução. Como resultado, conseguimos produtos de monômios com comprimentos estritamente decrescentes, o que prova *ii*).

Por *ii*), $\hat{A}^m$ módulo $\hat{A}^{m-1}$ é gerado por produtos de m elementos standard, como segue:

$$r_{n_1-1}v_{n_1} \cdot r_{n_2-1}v_{n_2} \cdots r_{n_m-1}v_{n_m}, \qquad n = n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m \geq 0, \quad m \geq 1, \tag{9.6}$$

onde existem no máximo $p-1$ fatores para cada comprimento.

Agora, movemos todas as letras x_j em (9.6) para a esquerda. Procedemos como segue. Seja x_i uma variável em um monômio standard $r_{n_j-1}v_{n_j}$, $j \geq 2$, então $i < n_j$. Os monômios standard que aparecem antes deste em (9.6) têm comprimento maior que n_j, portanto, maior que i. Detsa forma, x_i comuta com as cabeças precedentes $\{v_{n_k}|1 \leq k < j\}$, e movendo todas as letras para a esquerda, não obtemos termos adicionais. Desde que a álgebra associativa $\hat{P}$ é comutativa, $\hat{P}_m$ é gerada por produtos ordenados de comprimento m de monômios standard, como em (9.6) (deve-se apenas substituir $v_i's$ por $V_i's$). Ambos os produtos são reordenados (ambos produzem zero, desde que uma letra apareça p vezes) para obter respectivas bases da mesma forma, uma delas obtida pela lista (9.5) sob as restrições especificadas. Conseguimos isomorfismos de espaços vetoriais

$$\rho_m : \hat{A}_m = \hat{A}^m/\hat{A}^{m-1} \cong \hat{P}_m, \qquad \forall m \geq 0.$$

Temos um isomorfismo $\rho : \operatorname{gr} \hat{A} \cong \hat{P}$. Desde que $\operatorname{gr} \hat{A}$ é comutativo, nós munimos este com um colchete como segue. Seja $a = w_1 \cdots w_n \in \hat{A}^n \backslash \hat{A}^{n-1}$ e $b = w_1' \cdots w_m' \in \hat{A}_n = \hat{A}^m \backslash \hat{A}^{m-1}$, onde $w_i s$, $w_j' s$ são monômios standard de $\hat{L}$, $n, m \geq 1$. Observe que a ordem em tais produtos não importa. Denote por $\overline{a}$, $\overline{b}$ as respectivas imagens em $\hat{A}_n = \hat{A}^n/\hat{A}^{n-1}$ e $\hat{A}_m = \hat{A}^m/\hat{A}^{m-1}$. Ponha

$$\{\overline{a}, \overline{b}\} = [a, b] \pmod{\hat{A}^{n+m-2}} = \sum_{p,q} \left(\prod_{i \neq p} w_i \prod_{j \neq q} w_j' \right) [w_i, w_j'] \in \hat{A}^{n+m-1} \pmod{\hat{A}^{n+m-2}}.$$

Este colchete satisfaz a regra de Leibniz pois vem de um comutador de uma álgebra associativa que satisfaz a regra de Leibniz. Obtemos um isomorfismo de álgebras de Poisson $\operatorname{gr} \hat{A} \cong \hat{P}$ pois os colchetes coincidem sobre $\hat{L}$ que gera ambas as álgebras como álgebras associativas, portanto garantindo *iv*). □

Corolário 9.2.5. *Seja $p > 0$ qualquer.*

1) A álgebra $\operatorname{Alg}(v_0, v_1, v_2)$ tem uma filtração $\{\hat{A}^m|m \geq 0\}$ tal que

$$\operatorname{gr} \hat{A} \cong \hat{P} = \operatorname{Poisson}(\hat{L}),$$

é isomorfismo de álgebras de Poisson (onde $\hat{L}$ tem uma base que consiste nos monômios standard dos 3 tipos);

2) Temos a inclusão propria $P \subsetneq \operatorname{gr} \hat{A}$.

Demonstração. 1) Como álgebra associativa temos que $A = \hat{A}$. (Lema 9.2.3).

2) Seja $w = r_{n-5}x_{n-1}^{p-1}v_n$ monômio standard do tipo 3. Temos $\pi(w) \in \hat{L}\backslash L$, então $\pi(w) \in \hat{P}\backslash P$.

□

Observação 9.2.1. *Consideramos as álgebras de Poisson P e $\hat{P}$. Então*

1) Temos as mesmas cotas para peso e superpeso obtidas para A.

2) Temos o mesmo crescimento obtido para A.

3) $P, \hat{P}$ pertencem ao mesmo paraboloide de A.

Demonstração. A diferença para A vem dos monômios standard do terceiro tipo. Note que não têm muito monômios deste tipo, portanto estes não influenciam nas propriedades acima. □

Bibliografia

[1] Bahturin Yu.A., Mikhalev A.A., Petrogradsky V.M., and Zaicev M. V., Infinite dimensional Lie superalgebras, de Gruyter Exp. Math. vol. 7, de Gruyter, Berlin, 1992.

[2] Bahturin, Yu.A.; Olshanskii, A., Large restricted Lie algebras, *J. Algebra* (2007) **310**, No. 1, 413–427.

[3] Bahturin, Yu.A.; Sehgal, S.K.; Zaicev, M.V., Group gradings on associative algebras, *J. Algebra* (2001) **241**, No. 2, 677–698.

[4] Bao, Y., Ye Y.,; Zhang, J., Restricted Poisson algebras. *Pac. J. Math.* **289**, No. 1, 1-34 (2017).

[5] Bartholdi L., Branch rings, thinned rings, tree enveloping rings. *Israel J. Math.* **154** (2006), 93–139.

[6] Bartholdi L., Self-similar Lie algebras. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17** (2015), no. 12, 3113–3151.

[7] Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Lie methods in growth of groups and groups of finite width. Computational and geometric aspects of modern algebra,1–27, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 275, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[8] Berezin, F. A., Several remarks on the associative hull of a Lie algebra. (Russian) *Funkcional. Anal. i Priložen* **1** (1967), no. 2, 1–14.

[9] Bezrukavnikov, R.; Kaledin, D. Fedosov quantization in positive characteristic. *J. Am. Math. Soc.* **21** (2008). No. 2, 409–438.

[10] Bouarroudj, S., Grozman, P., Leites, D. Classification of finite dimensional modular Lie superalgebras with indecomposable Cartan matrix, *SIGMA* **5** (2009), 060, 1–63.

[11] de Morais Costa O.A., Petrogradsky V., Fractal just infinite nil Lie superalgebra of finite width, *J. Algebra*, **504**, (2018), 291–335.

[12] Dixmier J., Enveloping algebras. AMS, Rhode Island, 1996.

[13] Drensky V. and Hammoudi L., Combinatorics of words and semigroup algebras which are sums of locally nilpotent subalgebras. *Canad. Math. Bull.* **47** (2004), no. 3, 343–353.

[14] Elduque, A. Fine gradings on simple classical Lie algebras. *J. Algebra* **324** (2010), No. 12, 3532–3571.

[15] Ershov M., Golod-Shafarevich groups: a survey, *Int. J. Algebra Comput.* **22**, (2012) No. 5, Article ID 1230001.

[16] Fabrykowski, J., Gupta, N., On groups with sub-exponential growth functions. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **49** (1985), no. 3-4, 249–256.

[17] Futorny F., Kochloukova D.H., Sidki S.N., On Self-Similar Lie Algebras and Virtual Endomorphisms, *Math. Z.* **292** (2019). No.3-4, 1123–1156.

[18] Golod, E.S. On nil-algebras and finitely approximable p-groups. *Am. Math. Soc., Translat., II. Ser.* **48**, 103–106 (1965); translation from *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **28**, 273–276 (1964).

[19] Golod, E.S. On some problems of Burnside type. *Am. Math. Soc., Translat., II. Ser.* **84**, (1969) 83–88; translation from Tr. Mezdunarod. Kongr. Mat., Moskva 1966, 284–289 (1968).

[20] Grigorchuk, R.I., On the Burnside problem for periodic groups., *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **14** (1980), no. 1, 53–54.

[21] Grigorchuk, R.I. Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means. *Math. USSR, Izv.* **25** (1985), 259–300; translation from *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **48** (1984), No.5, 939–985.

[22] Grigorchuk, R.I., Just infinite branch groups. New horizons in pro-p groups, 121–179, Progr. Math., 184, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2000.

[23] Gupta N., and Sidki S., On the Burnside problem for periodic groups., *Math. Z.* **182** (1983), no. 3, 385–388.

[24] Gupta, N.; Sidki, S. Some infinite p-groups. *Algebra Logic* **22**, (1983) 421–424; translation from: *Algebra Logika* **22** (1983) No. 5, 584–589.

[25] Humphreys J.E., *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, New York. 1970.

[26] Jacobson N., Lie algebras, Interscience, New York. 1962.

[27] Kac, V.G. Lie superalgebras. *Adv. Math.* **26**, (1977), 8–96.

[28] Kelarev A.V., A sum of two locally nilpotent rings may be not nil. *Arch. Math.* **60** (1993), no. 5, 431–435.

[29] Krause G.R. and Lenagan T.H., Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension, AMS, Providence, R.I., 2000.

[30] Krylyouk Ia., The enveloping algebra of the Petrogradsky-Shestakov-Zelmanov algebra is not graded-nil in the critical characteristics, *J. Lie Theory*, **21**, (2011), No. 3, 703–709.

[31] Lenagan, T.H., Smoktunowicz Agata., An infinite dimensional affine nil algebra with finite Gelfand-Kirillov dimension, *J. Am. Math. Soc.* **20**, (2007) No. 4, 989–1001.

[32] Lubotzky A. and Segal D., Subgroup growth, Basel etc.: Birkhäuser-Verlag, 2003.

[33] Makar-Limanov, L., Shestakov, I., Polynomial and Poisson dependence in free Poisson algebras and free Poisson fields. *J. Algebra* **349**, (2012) No. 1, 372–379.

[34] Makar-Limanov, L., Umirbaev, U., The Freiheitssatz for Poisson algebras. *J. Algebra* **328**, (2011) No. 1, 495–503.

[35] Martinez C., Zelmanov E., Jordan algebras of Gelfand-Kirillov dimension one. *J. Algebra* **180**,(1996). No.1, 211–238.

[36] Martinez C., Zelmanov E., Nil algebras and unipotent groups of finite width. *Adv. Math.* **147**, (1999) No.2, 328–344.

[37] Mikhalev A.A., Subalgebras of free Lie p-superalgebras. *Math. Notes* **43**, (1988) No.2, 99–106; translation from *Mat. Zametki* **43** (1988) No.2, 178–191.

[38] Millionschikov D.V., Naturally graded Lie algebras of slow growth. *Mat. Sb.* **210** (2019), no. 6, 111–160; translation in *Sb. Math.* **210** (2019), no. 6, 862–909.

[39] Mishchenko S.P., Petrogradsky V.M. and Regev A., Poisson PI algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359**, (2007), no. 10, 4669–4694.

[40] Nekrashevych, V., Self-similar groups. Mathematical Surveys and Monographs **117**. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (2005).

[41] Passman D.S. and Petrogradsky V.M., Polycyclic restricted Lie algebras, *Comm. Algebra*, **29** (2001), no. 9, 3829–3838.

[42] Petrogradsky V., Intermediate growth in Lie algebras and their enveloping algebras. *J. Algebra* **179**, no. 2, (1996), 459–482.

[43] Petrogradsky V.M., On Lie algebras with nonintegral q-dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 3, 649–656.

[44] Petrogradsky V., Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle. *Internat. J. Algebra Comput.*, **9** (1999), no. 2, 179–212.

[45] Petrogradsky V.M., Examples of self-iterating Lie algebras, *J. Algebra*, **302** (2006), no. 2, 881–886.

[46] Petrogradsky V., Fractal nil graded Lie superalgebras, *J. Algebra*, **466** (2016), 229–283.

[47] Petrogradsky V., Nil Lie p-algebras of slow growth, *Comm. Algebra.* **45**, (2017), no. 7, 2912–2941.

[48] Petrogradsky V., Nil restricted Lie algebras of oscillating intermediate growth, *J. Algebra*, **588**, (2021), 349–407.

[49] Petrogradsky V., Clover nil restricted Lie algebras of quasi-linear growth, *J. Algebra Appl.*, **21**, (2022), no. 3, 2250057.

[50] Petrogradsky V. M., Yu. P. Razmyslov, and E. O. Shishkin, Wreath products and Kaluzhnin-Krasner embedding for Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**, (2007), 625–636.

[51] Petrogradsky V.M. and Shestakov I.P. Examples of self-iterating Lie algebras, 2, *J. Lie Theory*, **19** (2009), no. 4, 697–724.

[52] Petrogradsky V.M. and Shestakov I.P. Self-similar associative algebras, *J. Algebra*, **390** (2013), 100–125.

[53] Petrogradsky V.M. and Shestakov I.P. On properties of Fibonacci restricted Lie algebra, *J. Lie Theory*, **23** (2013), no. 2, 407–431.

[54] Petrogradsky V., and Shestakov I.P., On Jordan doubles of slow growth of Lie superalgebras, *São Paulo J. Math. Sci.* **13** (2019), no. 1, 158–176.

[55] Petrogradsky V., and Shestakov I.P., Fractal nil graded Lie, associative, Poisson, and Jordan superalgebras, *J. Algebra*, **574** (2021), 453–513.

[56] Petrogradsky V.M., Shestakov I.P., and Zelmanov E., Nil graded self-similar algebras, *Groups Geom. Dyn.*, **4** (2010), no. 4, 873–900.

[57] Radford D. E., Divided power structures on Hopf algebras and embedding Lie algebras into special-derivation algebras, *J. Algebra*, **98** (1986), 143–170.

[58] Ratseev, S.M., Poisson algebras of polynomial growth, *Sib. Math. J.* **54**, (2013) No. 3, 555–565, translation from *Sib. Mat. Zh.* **54**, (2013) No. 3, 700–711.

[59] Razmyslov Yu.P., *Identities of algebras and their representations.* AMS, Providence RI 1994.

[60] Rozhkov, A.V. Lower central series of a group of tree automorphisms, *Math. Notes* **60**, No.2, 165–174 (1996); translation from *Mat. Zametki* **60**, No.2, 225–237 (1996).

[61] Scheunert, M. The theory of Lie superalgebras. Lecture Notes in Mathematics. 716. Berlin. Springer-Verlag. 1979.

[62] Shestakov I.P., Quantization of Poisson superalgebras and speciality of Jordan Poisson superalgebras. *Algebra i Logika* **32** (1993), no. 5, 571–584; English translation: *Algebra and Logic* **32** (1993), no. 5, 309–317.

[63] Shestakov, I.P. Alternative and Jordan superalgebras. *Sib. Adv. Math.* **9**, (1999). No.2, 83–99.

[64] Shestakov I.P. and Zelmanov E., Some examples of nil Lie algebras. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **10** (2008), no. 2, 391–398.

[65] Shestakov, I.; Umirbaev, U.U., The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. *J. Am. Math. Soc.* **17**, (2004) No. 1, 197–227.

[66] Sidki S.N., A primitive ring associated to a Burnside 3-group. *J. London Math. Soc.* (2) **55** (1997), no. 1, 55–64.

[67] Sidki S.N., Functionally recursive rings of matrices — Two examples. *J.Algebra* **322** (2009), no. 12, 4408–4429.

[68] Strade H., Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory. Berlin: de Gruyter. 2004.

[69] Strade H. and Farnsteiner R., Modular Lie algebras and their representations, New York etc.: Marcel Dekker, 1988.

[70] Vergne M., La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente. *C. R. Acad. Sc. Paris* **269** (1969), Sér. A-B, 950–952.

[71] Voden T., Subalgebras of Golod-Shafarevich algebras, *Int. J. Algebra Comput.* **19**, (2009) No. 3, 423–442.

[72] Zelmanov E., Some open problems in the theory of infinite dimensional algebras., *J. Korean Math. Soc.* **44** (2007), no. 5, 1185–1195.

[73] Zhelyabin, V.N., Panasenko, A.S., Herstein's construction for just infinite superalgebras, *Siberian El. Math. Reports* (2017) **14**, 1317–1323.