



**MODELAGEM NUMÉRICA DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO
UTILIZANDO ELEMENTOS COESIVOS E ELEMENTOS DE CONTATO AÇO-CONCRETO**

Thiago Luiz Freire Rodrigues

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM NUMÉRICA DO CONCRETO REFORÇADO
COM FIBRAS DE AÇO UTILIZANDO ELEMENTOS
COESIVOS E ELEMENTOS DE CONTATO AÇO-CONCRETO**

Thiago Luiz Freire Rodrigues

ORIENTADOR: Raúl Darío Durand Farfán

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO
CIVIL**

BRASÍLIA - DF, AGOSTO DE 2023.

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM NUMÉRICA DO CONCRETO REFORÇADO COM
FIBRAS DE AÇO UTILIZANDO ELEMENTOS COESIVOS E
ELEMENTOS DE CONTATO AÇO-CONCRETO**

THIAGO LUIZ FREIRE RODRIGUES

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

APROVADO POR:

**Prof. Raúl Darío Durand Farfán (ENC-UnB)
(Orientador)**

**Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes (ENM-UnB)
(Examinador)**

**Prof. Jean-Marie Désir (DECIV-UFRGS)
(Examinador)**

BRASÍLIA - DF, AGOSTO DE 2023

FICHA CATALOGRÁFICA

RODRIGUES, THIAGO LUIZ FREIRE

Modelagem Numérica do Concreto Reforçado com Fibras de Aço Utilizando Elementos Coesivos e Elementos de Contato Aço-Concreto. [Distrito Federal] 2023.

vi, 98p., 210x297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2023).
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Método dos Elementos Finitos

2.Elementos Coesivos

I.ENC/FT/UnB

4. Fissuração do concreto

3.Concreto Reforçado com Fibras de Aço

II.Título (Mestre)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

RODRIGUES, T. L. F. (2023). Modelagem Numérica do Concreto Reforçado com Fibras de Aço Utilizando Elementos Coesivos e Elementos de Contato Aço-Concreto. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM - , Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 98p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Thiago Luiz Freire Rodrigues

TÍTULO: Modelagem Numérica do Concreto Reforçado com Fibras de Aço Utilizando Elementos Coesivos e Elementos de Contato Aço-Concreto.

GRAU: Mestre

ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Thiago Luiz Freire Rodrigues
Rua Duque de Caxias, 336, Centro
CEP: 63.190-000, Santana do Cariri - CE
E-mail: thiagolfrodrigues@gmail.com

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar minha profunda gratidão a Deus, cuja graça e orientação estiveram presentes em todos os momentos desta jornada. Sem Sua benevolência, nada disso teria sido possível. Sou imensamente grato pela força e inspiração que recebi da minha fé, que me sustentou durante os desafios e me incentivou a alcançar meus objetivos.

À minha família, meu porto seguro e minha maior fonte de amor e apoio, quero expressar minha eterna gratidão. Obrigado por estarem ao meu lado em cada passo do caminho, por acreditarem em mim e por me encorajarem quando eu mais precisava. Seu amor incondicional e dedicação são a base do meu sucesso, e sou verdadeiramente abençoado por tê-los como minha família.

Aos meus amigos, que compartilharam risadas, lágrimas e momentos inesquecíveis nesta jornada, quero agradecer por sua amizade sincera e por serem uma fonte constante de apoio e incentivo. Vocês me ajudaram a superar os obstáculos e me encorajaram a nunca desistir. Sou grato pela amizade genuína que temos e pelas memórias preciosas que criamos juntos.

Gostaria de estender meus agradecimentos especiais ao Professor Raul Durand, meu orientador dedicado e mentor excepcional. Sua orientação, conhecimento e expertise foram inestimáveis para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado. Sua paixão pelo ensino e sua abordagem encorajadora foram fundamentais para meu crescimento acadêmico e profissional. Agradeço sinceramente pela sua paciência, comprometimento e valiosas contribuições ao longo deste processo.

Por fim, gostaria de expressar minha gratidão a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para o sucesso deste trabalho. Seja por meio de discussões enriquecedoras, conselhos valiosos ou apoio logístico, cada contribuição foi fundamental e significativa.

A todos que mencionei e a todos que não foram mencionados individualmente, mas que de alguma maneira me apoiaram, meu mais sincero agradecimento. Esta conquista é nossa, e sou grato por ter tido a oportunidade de aprender e crescer ao lado de pessoas tão incríveis.

Que todos possamos continuar a compartilhar sucessos, inspirações e gratidão em nossas vidas.

Muito obrigado.

MODELAGEM NUMÉRICA DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO UTILIZANDO ELEMENTOS COESIVOS E ELEMENTOS DE CONTATO AÇO-CONCRETO

Autor: Thiago Luiz Freire Rodrigues

Orientador: Raúl Darío Durand Farfán

Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil

Brasília, agosto de 2023

RESUMO

O comportamento quase-frágil do concreto pode resultar na formação de fissuras em estruturas construídas com esse material. No entanto, a adição de fibras de aço tem se mostrado altamente eficaz na melhoria do comportamento pós-fissuração do concreto, aumentando sua capacidade de absorção de energia e reduzindo a probabilidade de danos estruturais. Como resultado, o concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) pode suportar cargas mais altas, resistir melhor às condições climáticas e à agressão química, e ter uma vida útil mais longa em comparação com o concreto convencional. Nesse contexto, esta pesquisa apresenta uma abordagem numérica para simular o comportamento do CRFA. A simulação do comportamento do concreto (incluindo a fratura) é realizada utilizando elementos finitos volumétricos combinados com elementos coesivos. Um modelo elástico linear é usado para os elementos volumétricos, enquanto o modelo para os elementos coesivos é baseado na teoria da plasticidade e na mecânica da fratura, permitindo a previsão do desenvolvimento e propagação de fissuras. As fibras de aço são modeladas usando elementos finitos de dois nós (elementos treliça) com um modelo constitutivo elasto-plástico unidimensional perfeito. Elas são posicionadas usando uma distribuição aleatória isotrópica, considerando o efeito da parede do molde. Elementos de contato especiais são usados para modelar o comportamento complexo e não linear da interface entre a fibra e a matriz, capazes de prever os deslocamentos relativos entre o concreto e as fibras de aço. A validação do método é realizada por meio de exemplos numéricos envolvendo conjuntos de fibras, com as curvas carga-deslocamento coincidindo com experimentos na literatura e os padrões de fratura alinhados com os modos de falha. A comparação com resultados experimentais reafirma que a aplicação dessa estratégia numérica na modelagem do comportamento do CRFA é altamente promissora, constituindo-se como uma ferramenta significativa para aprofundar a compreensão dos diferentes aspectos que regem o processo de falha desse material.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Elementos Coesivos, Concreto Reforçado com Fibras de Aço, Fissuração do Concreto.

NUMERICAL MODELING OF STEEL FIBER REINFORCED CONCRETE USING COHESIVE ELEMENTS

Author: Thiago Luiz Freire Rodrigues

Supervisor: Raúl Darío Durand Farfán

Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil

Brasília, August of 2023

ABSTRACT

The quasi-brittle behavior of concrete can lead to the formation of cracks in structures built with this material. However, the addition of steel fibers has proven to be highly effective in enhancing the post-cracking behavior of concrete, increasing its energy absorption capacity and reducing the likelihood of structural damage. As a result, steel fiber-reinforced concrete (SFRC) can withstand higher loads, better resist weather conditions and chemical attacks, and have a longer service life compared to conventional concrete. In this context, this research introduces a numerical approach to simulate the behavior of SFRC. The simulation of concrete behavior (including fracture) is carried out using volumetric finite elements combined with cohesive elements. A linear elastic model is employed for the volumetric elements, while the cohesive elements are based on the theory of plasticity and fracture mechanics, enabling the prediction of crack initiation and propagation. Steel fibers are modeled using two-node finite elements (truss elements) with a one-dimensional perfect elastoplastic constitutive model. They are positioned using a uniform and isotropic random distribution, accounting for the effect of mold walls. Special contact elements are utilized to model the complex and nonlinear behavior of the interface between the fiber and the matrix, capable of predicting relative displacements between the concrete and steel fibers. The validation of the method is performed through numerical examples involving sets of fibers, with load-displacement curves aligning with literature experiments and fracture patterns corresponding to expected failure modes. The comparison with experimental results reaffirms that the application of this numerical strategy in modeling SFRC behavior is highly promising, serving as a significant tool to further comprehend the diverse aspects governing the failure process of this material.

Keywords: Finite Elements, Cohesive Elements, Steel Fiber Reinforced Concrete, Concrete Cracking.

SUMÁRIO

| | |
|---|-------------|
| LISTA DE TABELAS | ix |
| LISTA DE FIGURAS | xiii |
| LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES | xiii |
| 1 INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Objetivos | 4 |
| 1.1.1 Objetivo Geral | 4 |
| 1.1.2 Objetivos Específicos | 4 |
| 2 Fundamentação Teórica | 5 |
| 2.1 MATERIAIS COMPÓSITOS | 5 |
| 2.1.1 Concreto Reforçado Com Fibras | 6 |
| 2.1.2 Fibras Utilizadas Para Reforço de Concreto | 8 |
| 2.1.3 Fibras de Aço | 13 |
| 2.2 MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO | 16 |
| 2.2.1 Zona de Processo de Fratura | 17 |
| 2.2.2 Modelo de zona coesiva | 19 |
| 2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS | 24 |
| 2.3.1 Aplicação de Elementos Finitos em Concreto | 26 |
| 2.3.2 Elementos de Interfaces Coesivas | 30 |
| 2.4 MODELAGEM DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS | 32 |
| 2.4.1 Métodos Para Simulação de Inclusões | 32 |
| 2.4.2 Modelagem do Contato Aço-Concreto | 34 |
| 2.4.3 Estudos Numéricos do Concreto Reforçado com Fibras de Aço | 37 |
| 3 METODOLOGIA | 43 |
| 3.1 FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA DOS ELEMENTOS COESIVOS | 43 |
| 3.2 MODELAGEM CONSTITUTIVA DO CONCRETO | 46 |
| 3.2.1 Matriz constitutiva | 48 |
| 3.2.2 Atualização das tensões | 51 |
| 3.3 MODELAGEM CONSTITUTIVA DO CONTATO AÇO-CONCRETO | 52 |
| 3.4 GERAÇÃO DAS MALHAS | 53 |
| 3.5 PROCEDIMENTOS DA SIMULAÇÃO | 55 |
| 4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS | 58 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.1 | SIMULAÇÃO DE TRAÇÃO EM UM CORPO DE PROVA CÚBICO | 58 |
| 4.1.1 | Parâmetros da modelagem | 60 |
| 4.1.2 | Resultados e discussões das análises numéricas | 62 |
| 4.2 | ENSAIO DE TRAÇÃO DIRETA CONDUZIDO POR BAEZ (2014) | 65 |
| 4.2.1 | Parâmetros da modelagem | 67 |
| 4.2.2 | Resultados e discussões das análises numéricas | 69 |
| 4.3 | ENSAIO DE FLEXÃO EM TRÊS PONTOS CONDUZIDO POR TRINDADE <i>ET AL.</i> (2020) | 71 |
| 4.3.1 | Parâmetros da modelagem | 73 |
| 4.3.2 | Resultados e discussões das análises numéricas | 75 |
| 4.4 | ENSAIO DE FLEXÃO EM QUATRO PONTOS CONDUZIDO POR YOO <i>ET</i> <i>AL.</i> (2015) | 78 |
| 4.4.1 | Parâmetros da modelagem | 79 |
| 4.4.2 | Resultados e discussões das análises numéricas | 81 |
| 5 | CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS | 83 |
| 5.1 | CONCLUSÕES | 84 |
| 5.2 | SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS | 85 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 98 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Classificação e geometria das fibras de aço para reforço de concreto (Figueiredo et al., 2008). | 15 |
| 4.1 | Parâmetros do material para os elementos de volume e coesivos. | 60 |
| 4.2 | Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço. | 60 |
| 4.3 | Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto. | 60 |
| 4.4 | Dados das malhas empregadas nas análises numéricas. | 61 |
| 4.5 | Parâmetros utilizados na modelagem dos elementos de volume e coesivos. | 67 |
| 4.6 | Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço | 68 |
| 4.7 | Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto | 68 |
| 4.8 | Dados da malha utilizada na análise numérica | 69 |
| 4.9 | Parâmetros utilizados na modelagem do concreto. | 73 |
| 4.10 | Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço | 73 |
| 4.11 | Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto | 73 |
| 4.12 | Dados das malhas empregadas nas análises numéricas | 75 |
| 4.13 | Parâmetros utilizados na modelagem do concreto. | 80 |
| 4.14 | Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço | 80 |
| 4.15 | Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto | 80 |
| 4.16 | Dados da malha empregada nas análises numéricas | 81 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Esquema de concentração de tensões para concreto sem reforço de fibras (Barros, 2009). | 6 |
| 2.2 | Esquema de concentração de tensões para concreto reforçado com fibras (Barros, 2009) | 7 |
| 2.3 | Arranjos de fibras em uma (a), duas (b, c) e três direções (d), para fibras discretas (b, d) e para fibras contínuas (a, c) (Bentur e Mindess, 2006). | 9 |
| 2.4 | Representação esquemática do modelo de simulação de aderência da fibra na interação fibra-matriz (Bentur e Mindess, 2006). | 9 |
| 2.5 | Distribuição de tensões em função do comprimento crítico. (Callister Junior e Rethwisch, 2012) | 10 |
| 2.6 | Curvas típicas de tensão-deformação para para ausência, baixo e alto volume de fibras em matrizes cimentícias (Bentur e Mindess, 2006). | 11 |
| 2.7 | Compósitos reforçados com volume de fibras (VF) abaixo (A), acima (B) e igual ao volume crítico de fibras durante o ensaio de tração na flexão (Figueiredo, 2000). | 12 |
| 2.8 | (a) Fator de Forma para fibras com seção circular; (b) Fator de Forma para fibras com seção retangular (Faria, 2017). | 13 |
| 2.9 | Exemplo da variação da eficiência entre a interface fibra-concreto com a forma da fibra (Sarzialejo, 2007). | 14 |
| 2.10 | Importância da resistência à tração da fibra (Sarzialejo, 2007). | 16 |
| 2.11 | Modos de fissuração: (a) modo I (ou modo de abertura), (b) modo II (ou modo de deslizamento), (c) modo III (ou modo rasgado). Adaptado de Kumar e Barai (2011). | 17 |
| 2.12 | (a) Zona de processo de fratura no concreto e (b) Distribuição da tensão coesiva na ZPF (Silva, 2017). | 18 |
| 2.13 | (a) Relação linear tensão-deformação do concreto fora da zona de fratura; (b) relação linear tensão-deslocamento do concreto na zona de fratura. Adaptado de Kumar e Barai (2011). | 20 |
| 2.14 | Energia específica de fratura como área entre a curva tensão abertura (Silva Neto, 2015). | 21 |
| 2.15 | Generalização da função de amolecimento bilinear. Adaptado de Kumar e Barai (2011). | 22 |
| 2.16 | Idealização do modelo de zona coesiva em conjunto com a função bilinear de amolecimento de acordo com Hillerborg et al. (1976).. | 23 |
| 2.17 | Exemplo de Malha de Elementos Finitos para um problema plano (Souza, 2003). | 25 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.18 | Exemplos de diferentes tipos de elementos finitos (Souza, 2003). | 25 |
| 2.19 | Representação de malhas com diferentes níveis de refino (Durand e Silva, 2021). | 26 |
| 2.20 | Estratégias de incorporação de fissuras em simulações numéricas. Adaptado de Saouma (2000). | 28 |
| 2.21 | Geração de elementos de interface: a) malha inicial; b elementos destacados; c malha final incluindo os elementos de interface gerados (Durand e Silva, 2021). | 31 |
| 2.22 | Representação de um elemento de reforço usando o método discreto. | 33 |
| 2.23 | Representação de um elemento de reforço pelo método embutido. | 33 |
| 2.24 | Representação de um elemento de reforço utilizando o método discreto combinado com elementos de contato. | 34 |
| 2.25 | Relação tensão-deslizamento da aderência. Adaptado de Modelo CEB-FIB (2010). | 35 |
| 2.26 | Representação do modelo tensão-deslizamento proposto por Durand et al. (2021). | 36 |
| 3.1 | Elemento coesivo de oito nós: (a) sistema de coordenadas global (x, y, z) e referência local dada pelos vetores \mathbf{n} , \mathbf{s} e \mathbf{t} ; (b) sistema de coordenadas paramétricas (ξ, η) (Durand e Silva, 2021). | 44 |
| 3.2 | Representação das funções de escoamento e potencial, acompanhadas pelos círculos de Mohr de compressão e tração (Durand et al., 2023) | 46 |
| 3.3 | Curva de amolecimento de Hordijk | 48 |
| 3.4 | Cálculo do comprimento representativo dos elementos de volume em uma malha não estruturada (Durand e Silva, 2019). | 50 |
| 3.5 | Atualização de tensões no regime elastoplástico: (a) retorno de tensão à superfície de escoamento quando $\sigma_n^{tr} \leq 0$; (b) retorno de tensão à superfície de escoamento quando $\sigma_n^{tr} \geq 0$ (Durand et al., 2023). | 51 |
| 3.6 | Sistema de coordenadas local ortogonal alinhado com a curva representativa de um elemento de barra (Durand et al., 2021). | 52 |
| 3.7 | Representação dos elementos finitos utilizados nas simulações antes do desenvolvimento de fissuras. | 54 |
| 3.8 | Representação dos elementos finitos utilizados nas simulações após o desenvolvimento de fissuras. | 55 |
| 3.9 | Fluxo do processo de simulação numérica. | 57 |
| 4.1 | Propriedades geométricas e condições de contorno do corpo de prova hipotético. Adaptado de Faria (2017). | 59 |
| 4.2 | Vista frontal da malha de elementos finitos. | 61 |
| 4.3 | Distribuição aleatória das fibras: (a) 93, (b) 185 e (c) 370. | 61 |
| 4.4 | Diagrama tensão-deformação para diferentes teores de fibras. | 62 |
| 4.5 | Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação: (a) $V_f = 0,0\%$ e (b) $V_f = 2,0\%$. Fator de escala 25. | 63 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.6 | Distribuições aleatórias de fibras de aço na malha de elementos finitos para a fração volumétrica $V_f = 0,5\%$ | 63 |
| 4.7 | Diagrama tensão-deformação para diferentes distribuições aleatórias da fração volumétrica $V_f = 0,5\%$ | 64 |
| 4.8 | Diagrama tensão-deformação de diferentes comprimentos de fibras (l_f) para a fração volumétrica $V_f = 0,5\%$ | 65 |
| 4.9 | Propriedades geométricas do corpo de prova. Adaptado de Baez (2014). | 66 |
| 4.10 | Ensaio de tração direta: (a) corpo de prova típico testado e (b) máquina de ensaio de tração (Baez, 2014). | 66 |
| 4.11 | Condições de contorno e aplicação do deslocamento prescrito. Adaptado de Baez (2014). | 67 |
| 4.12 | Malha de elementos finitos utilizada. | 68 |
| 4.13 | Distribuição das fibras na malha de elementos finitos. | 69 |
| 4.14 | Envoltória experimental e curva numérica força-deslocamento. | 70 |
| 4.15 | Padrões de fissuração obtidos em laboratório (Baez, 2014). | 70 |
| 4.16 | Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação. Fator de escala 05. | 71 |
| 4.17 | Dimensões geométricas e condições de contorno da viga ensaiada (medidas em mm). Adaptado de Trindade et al. (2020). | 72 |
| 4.18 | Esquema do ensaio de flexão em três pontos de uma viga com entalhe (Trindade et al. (2020)). | 72 |
| 4.19 | Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,19\%$). | 74 |
| 4.20 | Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,38\%$). | 74 |
| 4.21 | Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,58\%$). | 74 |
| 4.22 | Representação da malha de elementos finitos utilizada. | 75 |
| 4.23 | Curva carga <i>versus</i> CMOD ($V_f = 0,19\%$). | 76 |
| 4.24 | Curva carga <i>versus</i> CMOD ($V_f = 0,38\%$). | 76 |
| 4.25 | Curva carga <i>versus</i> CMOD ($V_f = 0,58\%$). | 77 |
| 4.26 | Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação. ($V_f = 0,19\%$) Fator de escala 05. | 77 |
| 4.27 | Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação ($V_f = 0,38\%$). Fator de escala 05. | 78 |
| 4.28 | Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação ($V_f = 0,58\%$). Fator de escala 05. | 78 |
| 4.29 | Propriedades geométricas e condições de contorno da viga ensaiada (Faria, 2017). | 79 |
| 4.30 | Representação da malha de elementos finitos utilizada | 81 |
| 4.31 | Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,5\%$) | 81 |
| 4.32 | Curvas numéricas e experimental de carga <i>versus</i> descocamento ($V_f = 0,5\%$). | 82 |
| 4.33 | Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação ($V_f = 0,5\%$). Fator de escala 30. | 82 |

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

Abreviaturas

| | |
|------|--------------------------------------|
| CMOD | Crack Mouth Opening Displacement |
| CRF | Concreto Reforçado com Fibras |
| CRFA | Concreto Reforçado com Fibras de Aço |
| MEF | Modelo dos Elementos Finitos |
| MFEL | Mecânica da Fratura Elástico Linear |
| MFNL | Mecânica da Fratura Não Linear |
| MZC | Modelo de Zona Coesiva |
| TFC | Teoria da Fratura Coesiva |
| ZPF | Zona de Processo de Fratura |

Símbolos do alfabeto grego

| | |
|-----------------|---|
| α | Parâmetro que controla o formato da função de escoamento no modelo de fratura |
| β | Função para modificar o tamanho da função de escoamento no modelo de fratura |
| $\beta_i n_i$ | Valor inicial da função β |
| β_{res} | Valor residual da função β |
| σ | Vetor contendo os componentes de tensão normal e de cisalhamento |
| σ | Vetor contendo os componentes de tensão normal e de cisalhamento |
| σ^n | Vetor de tensão tentativa na etapa n |
| σ^{tr} | Vetor de tensão tentativa da interface |
| σ^{tr} | Vetor de tensão tentativa |
| $\Delta\lambda$ | Incremento do multiplicador plástico |
| η | Coordenadas paramétrica |
| ν | Coefficiente de Poisson |

| | |
|------------------|---|
| $\sigma(w)$ | Tensão coesiva |
| σ_n | Componente de tensão normal |
| σ_{max} | Tensão equivalente a resistência do material à tração |
| σ_{max} | Tensão equivalente à resistência do concreto à tração |
| σ_{max}^0 | Tensão inicial equivalente a resistência do material à tração |
| τ | Componente de tensão de cisalhamento |
| τ_{max} | Tensão máxima de aderência |
| θ | Parâmetro que define a redução da função de escoamento no modelo de fratura |
| ξ | Coordenadas paramétrica |
| ζ | Fator que controla os deslocamentos elásticos relativos para elementos coesivos |
| $\dot{\lambda}$ | Multiplicador plástico |

Símbolos do alfabeto latino minúsculo

| | |
|-------|--|
| r | Vetor das derivadas do potencial plástico em relação a σ |
| v | Vetor das derivadas parciais da função de plasticidade em relação a σ |
| w_e | Vetor de deslocamentos relativos elásticos |
| w_p | Vetor de deslocamentos relativos plásticos |
| d_e | Diâmetro equivalente da fibra |
| d_f | Diâmetro da fibra |
| f | Função de escoamento |
| f_c | Resistência à compressão do concreto |
| f_t | Resistência à compressão do concreto |
| g | Função potencial plástica |
| h | Comprimento representativo dos elementos de volume |
| l | Coordenada longitudinal |
| s | Deslizamento da fibra |

| | |
|-------------|---|
| s_{peak} | Deslizamento da fibra correspondente ao pico da tensão de aderência |
| s_{res} | Deslizamento da fibra correspondente à tensão de aderência residual |
| u_c | Abertura crítica de fissura |
| u_p | Deslocamento relativo plástico efetivo |
| \bar{k}_n | Rigidez normal |
| \bar{w}_1 | Deslocamento relativo longitudinal em um elemento de contato fibra-concreto |
| k_n | Rigidez normal do contato fibra-concreto |
| k_s | Rigidez tangencial elástica do contato fibra-concreto |
| k_t | Rigidez tangencial |

Símbolos do alfabeto latino maiúsculo

| | |
|-------------|---|
| D | Matriz constitutiva |
| D_{ep} | Matriz constitutiva para o regime elastoplástico |
| D_e | Matriz constitutiva para o regime elástico |
| J | Matriz Jacobiana |
| K | Matriz de rigidez |
| N | Matriz das funções de forma dos elementos de volume |
| T | Matriz de rotação |
| U | Vetor dos deslocamentos nodais |
| \tilde{D} | Matriz constitutiva do elemento de contato fibra-concreto |
| \tilde{K} | Matriz de rigidez do elemento de contato fibra-concreto |
| W | Vetor dos deslocamentos relativos |
| E_c | Módulo de Young do concreto |
| E_s | Módulo de Young da fibra aço |
| E_s | Módulo de Young |
| G | Módulo de cisalhamento |

| | |
|---------------|------------------------------|
| G_F | Energia da fratura total |
| G_f | Energia da fratura inicial |
| A_s | Área da seção da fibra |
| L_c | Comprimento crítico da fibra |
| V_f | Volume de fibras |
| $V_{critico}$ | Volume crítico de fibras |

1 - INTRODUÇÃO

O comportamento quase-frágil do concreto é uma das principais causas do surgimento de fissuras em estruturas construídas com esse material. Apesar dos avanços tecnológicos nessa área, as fissuras ainda são uma patologia frequente e preocupante que podem surgir devido a vários fatores, como retração, efeitos térmicos, sobrecarga e proporções inadequadas da mistura. Uma vez formadas, as fissuras podem comprometer a integridade das estruturas e reduzir significativamente sua vida útil, resultando em custos adicionais com reparos e manutenção (Abdulhameed et al., 2021).

Ao discutir as vantagens dos compósitos cimentícios reforçados com fibras, Bentur e Mindess (2006) afirmam que as fibras de aço são altamente eficazes em melhorar o comportamento pós-fissuração do concreto, aumentando sua capacidade de absorção de energia e reduzindo a probabilidade de danos estruturais. A incorporação de fibras de aço no concreto cria uma rede tridimensional que ajuda a prevenir e minimizar problemas causados por fissuras. Essa rede restringe a abertura e propagação das fissuras, melhorando a tenacidade e resistência do concreto. Desse modo, o concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) consegue suportar cargas mais altas, resistir melhor às condições climáticas e à agressão química, e ter uma vida útil mais longa em comparação com o concreto convencional. As fibras de aço são altamente versáteis e podem ser utilizadas em diversas aplicações, como pavimentos, pisos industriais, lajes, colunas e vigas, contribuindo para melhorar a qualidade e segurança das estruturas (Brandt, 2008; Zollo, 1997).

A modelagem da propagação de fissuras em estruturas de concreto é uma área de pesquisa crucial para garantir a segurança e durabilidade dessas estruturas. Entre as várias teorias e modelos disponíveis, a Teoria da Fratura Coesiva (TFC) tem se destacado como uma ferramenta eficaz para analisar o comportamento de materiais frágeis ou quase-frágeis, como o concreto (Lubliner et al., 1989). A TFC estabelece que a fissura se propaga quando a tensão em sua ponta atinge a resistência à tração do material, a partir desse ponto inicia-se a separação das faces da fissura. Essas tensões podem ser estimadas por leis de abertura de tensão coesiva. A energia necessária para a propagação da fissura é absorvida pela formação de uma zona de deformação plástica à frente da fissura, conhecida como zona de processo de fratura (ZPF) (Bažant e Oh, 1983).

De acordo com Kumar e Barai (2011), a Zona de Processo de Fratura (ZPF) tem a capacidade de transferir tensões que tendem a fechar as faces da fissura, conhecidas como tensões coesivas. Essas tensões podem ser relacionadas à largura da fissura por meio de curvas de

amolecimento, também chamadas de relações tensão-separação. No entanto, essa capacidade diminui à medida que a distância entre as faces da fissura aumenta. Isso ocorre porque a propagação da fissura consome energia devido a vários mecanismos de microfissuração, como microfissuras na matriz, descolamento das interfaces da matriz cimentícia e ramificação da fissura, além da própria transferência de tensão na ZPF.

Uma das principais vantagens do uso dessa abordagem se dá por sua capacidade de considerar a heterogeneidade do material, como a presença de microfissuras e inclusões, e sua influência na propagação da fissura. Entre os métodos numéricos encontrados na literatura, os elementos finitos coesivos, também conhecidos como elementos de junta, são comumente utilizados para representar a interação entre superfícies de diferentes materiais ou descontinuidades dentro do mesmo material. Esses elementos são tipicamente modelados com uma espessura nula ou negligenciável, e consideram os efeitos de tensões normais e de cisalhamento, bem como a energia de fratura necessária para a propagação da fissura (Hillerborg et al., 1976). Dessa forma, os elementos coesivos permitem uma representação mais realista do processo de fissuração do material ao serem adicionados entre elementos de volume vizinhos.

O uso de elementos coesivos na análise de estruturas de concreto tem sido amplamente explorado em diversos estudos, abrangendo tanto dimensões bidimensionais (2D) quanto tridimensionais (3D). No campo da análise 2D, contribuições notáveis foram feitas por Gerstle e Xie (1992), Cendón et al. (2000), Yang e Chen (2005), Dai e Ng (2014), Benedetto et al. (2018), Morales-Alonso et al. (2018) e Jeon et al. (2023). Da mesma forma, no domínio da análise 3D, os elementos coesivos têm demonstrado sua eficácia na simulação de estruturas de concreto. Xu et al. (2016), Mauludin e Rabczuk (2021), Li et al. (2022), Qasim et al. (2023) e Abbas et al. (2023) contribuíram para essa área ao empregar elementos coesivos para modelar a fratura, iniciação de fissuras e propagação em estruturas tridimensionais de concreto. Suas pesquisas forneceram informações valiosas sobre o comportamento e a resposta do concreto sob diversas condições de carga, permitindo previsões mais precisas do desempenho estrutural e a capacidade de estudar fenômenos de fratura local em detalhes.

Além disso, nos últimos anos, tem-se observado a adoção de diversas abordagens para a modelagem de concretos reforçados com fibras de aço. Por exemplo, a tese apresentada por Sant'Ana (2005) propõe um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos para simular o comportamento do concreto reforçado com fibras, empregando três abordagens de discretização. Duas delas consideram o material como um compósito bifásico, variando na representação das fibras. A terceira abordagem trata o material como monofásico, com características definidas experimentalmente. Por outro lado, Etse et al. (2012) empregaram a "Teoria da Mistura" como método para apreender as interações que ocorrem entre as fibras e a matriz cimentícia adjacente, conjuntamente com a implementação de um modelo de interface fundamentado em um critério de resistência máxima hiperbólica. No estudo desenvolvido por

Congro et al. (2019), elementos de interface coesiva foram empregados nas fronteiras de elementos sólidos em escalas tanto macroscópicas quanto mesoscópicas, incorporando distintos comportamentos das fibras de forma a simular a resposta mecânica das mesmas. Na pesquisa realizada por Bitencourt Jr et al. (2019) foi proposto um modelo numérico que combina elementos finitos com uma representação discreta e explícita das fibras de aço, possibilitando uma análise precisa da contribuição das fibras para o comportamento do compósito. Posteriormente, Zhang et al. (2023) empregaram malhas não conformes e elementos de interface coesiva para modelar de modo explícito o comportamento de aderência entre as interfaces fibra-matriz, enquanto o modelo de plasticidade de dano do concreto capturava o dano e as fraturas do material matriz. Além dos aspectos já abordados, pesquisas envolvendo outras variáveis no estudo do concreto reforçado com fibras estão sendo desenvolvidas. A exemplo, o trabalho apresentado por Algourdin et al. (2020) analisou características mecânicas de três composições de concreto reforçado com fibras por meio de diferentes condições de carga térmica.

Neste trabalho, se propõe a modelagem computacional tridimensional de concreto reforçado com fibras de aço com base no uso de elementos coesivos, juntamente com um modelo de plasticidade para fratura e métodos de simulação para inclusões. Os métodos de simulação para inclusões consistem em técnicas para representar a inclusão de elementos de reforço no concreto, permitindo que as propriedades mecânicas das inclusões, como rigidez, resistência e ductilidade, sejam representadas por meio de relações constitutivas.

A presente pesquisa utiliza duas abordagens para modelar a inclusão das fibras: o método embutido e o método discreto combinado com elementos de contato. No método embutido, a rigidez dos elementos incluídos é incorporada à rigidez do elemento em que estão contidos, o que, por sua vez, representa aderência perfeita entre o aço e o concreto. Por outro lado, a inclusão de fibras discretas é realizada em conjunto com a adição de elementos de acoplamento que simulam a interação com a fase da matriz. A rigidez desses elementos é calculada por integração, garantindo uma representação precisa do comportamento do contato. Além disso, a estratégia proposta envolve a construção de uma malha de elementos finitos que incorpora quatro tipos distintos de elementos: volumétricos, coesivos, barras e de contato. Enquanto os elementos volumétricos e coesivos são empregados para modelar o comportamento do concreto, as fibras de aço são representadas por meio dos elementos de barra. Além disso, a interação entre as fibras e o concreto é simulada utilizando elementos de contato especializados, permitindo uma representação mais precisa e realista do desempenho mecânico na interface desses dois materiais.

Por sua vez, a discretização do domínio do concreto é executada com o auxílio da ferramenta computacional *Gmsh*, ao passo que a inserção das fibras de aço na malha tridimensional é efetuada mediante um algoritmo desenvolvido internamente. As análises são conduzidas por

meio da biblioteca *Amaru*, que já incorpora os modelos constitutivos empregados e é implementada na linguagem de programação *Julia*. A fim de aferir a pertinência da abordagem proposta, são executadas simulações numéricas de ensaios tanto experimentais quanto hipotéticos, possibilitando a comparação dos resultados de carga-deslocamento, bem como a avaliação dos padrões de fissuração obtidos.

Dessa forma, a abordagem proposta visa ampliar a inclusão de aspectos até então não explorados em estudos anteriores, apresentando um potencial significativo para avanços neste campo de pesquisa. As simulações numéricas realizadas com essas técnicas fornecem informações valiosas sobre o comportamento do material composto sob diversas condições de carga, o que se revela fundamental para a otimização do projeto de estruturas de concreto, resultando em maior resistência e durabilidade.

1.1 - OBJETIVOS

1.1.1 - Objetivo Geral

Investigar a modelagem numérica de concreto reforçado com fibras de aço, enfocando o processo de fratura e a influência das fibras de aço no comportamento mecânico do material, através da integração do método dos elementos finitos coesivos e técnicas de simulação de inclusões.

1.1.2 - Objetivos Específicos

- Avaliar a compatibilização das formulações do método dos elementos finitos coesivos e dos métodos de simulação de inclusões na simulação do concreto reforçado com fibras;
- Verificar a convergência dos modelos numéricos propostos bem como a sua aplicabilidade no concreto reforçado com fibras de aço;
- Analisar a sensibilidade e o impacto da variação de diferentes parâmetros na resposta do modelo numérico.

2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo fornece uma breve fundamentação teórica que aborda aspectos e temas relevantes para uma melhor compreensão do estudo em questão. Inicialmente, discutem-se questões relacionadas aos materiais compósitos, com foco no concreto reforçado com fibras. Em seguida, apresenta-se um resumo conciso dos conceitos relacionadas à mecânica da fratura. Na sequência, são abordados conceitos essenciais do Método dos Elementos Finitos (MEF), incluindo detalhes sobre elementos de interfaces coesivas e métodos para simulação de inclusões. Por fim, é conduzida uma análise sucinta e atualizada das investigações numéricas recentes concernentes ao concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), abarcando um período de cinco anos.

2.1 - MATERIAIS COMPÓSITOS

De forma simplificada, os materiais compósitos podem ser entendidos como aqueles resultantes da combinação de dois ou mais constituintes, que após a mistura ainda podem ser perfeitamente identificados, gerando um material combinado com propriedades superiores a de seus componentes de forma separada. Conforme descrevem Callister Junior e Rethwisch (2012), grande parte dos materiais compósitos são formados por duas fases. A primeira, conhecida como matriz, é contínua e envolve a outra fase, denominada de fase dispersa. As propriedades do material resultante são função das propriedades das fases constituintes, das suas quantidades relativas e da geometria da fase dispersa. Ainda de acordo com os autores, os compósitos são classificados em três classes principais: compósitos reforçados com partículas, compósitos reforçados com fibras e compósitos estruturais.

Os compósitos reforçados com partículas geralmente possuem a fase particulada mais dura e rígida que a matriz, com as dimensões das partículas sendo aproximadamente as mesmas em todas as direções. O concreto simples é um bom exemplo de material compósito reforçado com partículas, no qual a pasta de cimento representa a fase matriz, e, os agregados, a fase dispersa. Nos compósitos reforçados por fibras, a fase dispersa é caracterizada por possuir uma grande razão entre o seu comprimento e o seu diâmetro, apresentando a geometria de fibras. Exemplo disso é o concreto reforçado com fibras. Neste caso, o concreto assume o papel da fase matriz enquanto as fibras constituem a fase dispersa da mistura. Esta união promove uma combinação de características e propriedades de um material frágil, o concreto, com um outro geralmente dúctil, as fibras. Resumidamente, os materiais compósitos estruturais podem ser identificados como combinações tanto de outros compósitos, quanto de materiais homogêneos.

2.1.1 - Concreto Reforçado Com Fibras

O Concreto Reforçado com Fibras (CRF), como explanado anteriormente, é um material compósito formado por duas fases: a matriz de concreto e as fibras. Essas fibras podem ser constituídas de diferentes tipos de materiais, tais como aço, polipropileno, vidro, entre outros. Conforme explica Li (2002), as fibras devem ter sido inicialmente introduzidas na tentativa de fortalecer a matriz de cimento, sem levar em conta a diferenciação feita entre a resistência à tração do material e a sua tenacidade. Ao longo do desenvolvimento de estudos sobre o CRF, percebeu-se que o principal efeito da adição de fibras à matriz cimentícia frágil era o aumento de sua tenacidade, implicando em uma maior capacidade do material suportar carga de tração, embora em um nível decrescente perante o surgimento de trincas.

Mehta e Monteiro (2008) afirmam que o concreto simples apresenta algumas limitações, dentre elas o seu comportamento de ruptura frágil e a sua pequena capacidade de deformação, quando comparado a outros materiais estruturais. Ademais, sua resistência à tração é bem inferior à de compressão, cuja relação encontra-se em torno de 0,07 e 0,11. As características decorrentes do comportamento frágil do concreto simples associadas às fissuras que se formam ou já estão presentes nele acabam prejudicando muito mais o material quando solicitado à tração do que à compressão.

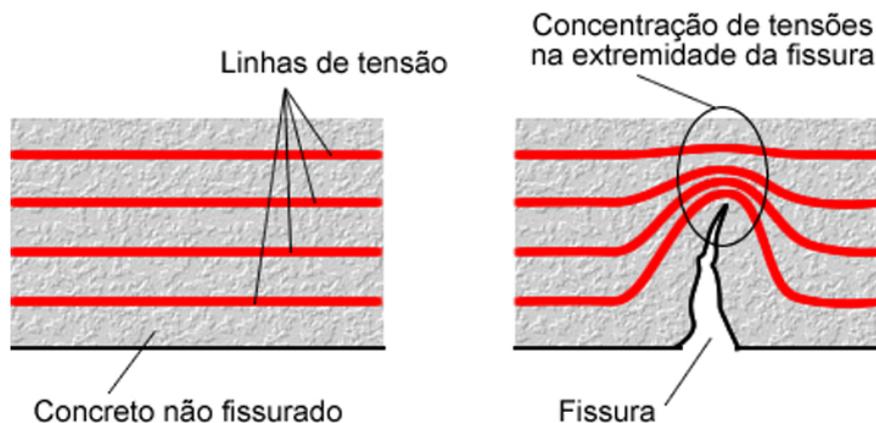


Figura 2.1 – Esquema de concentração de tensões para concreto sem reforço de fibras (Barros, 2009).

A reduzida capacidade resistente à tração do concreto acaba sendo diretamente ligada à dificuldade do material interromper a propagação de fissuras. Em decorrência disso, o crescimento de novas fissuras resulta em uma redução da área disponível de suporte de carga, conforme ilustrado na Figura 2.1. Assim, a tensão que antes atravessava um determinado trecho, necessita agora desviar o seu percurso para outra região mais próxima, que permita sua propagação, o que ocorre justamente na extremidade da fissura. Em decorrência disso, uma concentração de tensão é gerada na ponta da abertura, onde, no instante em que esta tensão superar a resistência do concreto, acontecerá uma ruptura frágil do material (Barros, 2009).

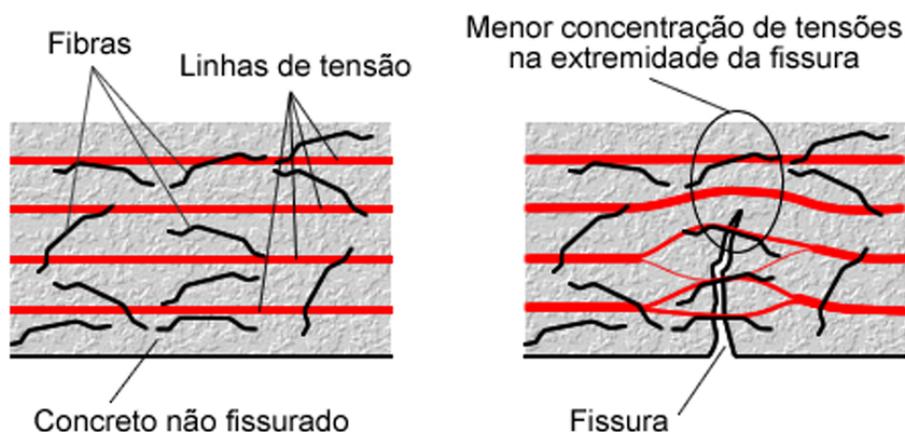


Figura 2.2 – Esquema de concentração de tensões para concreto reforçado com fibras (Barros, 2009)

Quando são adicionadas ao concreto fibras de resistência e módulo de elasticidade adequados, em um teor apropriado, o material deixa de ter o caráter marcadamente frágil. Isso se deve ao fato das fibras passarem a funcionar como pontes de transferência de tensões entre as fissuras, alterando o comportamento mecânico da matriz após o início da fissuração, como mostra a Figura 2.2. Dessa forma, há uma redução na velocidade de propagação das fissuras no concreto, minimizando as concentrações de tensões nas extremidades das aberturas, fazendo com que o compósito melhore sua capacidade portante pós-fissuração (Bentur e Mindess, 2006).

No concreto armado tradicional, as armaduras são dispostas em posições convenientes para resistir às tensões solicitantes. De modo análogo, as fibras nos compósitos teriam maior eficiência se alinhadas na direção das tensões de tração. Entretanto, esse alinhamento torna-se difícil, principalmente no caso das fibras curtas. Na prática, as fibras incorporadas ao concreto apresentam-se de forma descontínua, com pequenos espaçamentos e distribuídas aleatoriamente na matriz. Por esse motivo as fibras tornam-se mais efetivas no controle da fissuração e no aumento da tenacidade do que no ganho da resistência propriamente dita. Torna-se claro, portanto, que o uso de fibras não substitui o uso da armadura convencional, sendo geralmente ambos materiais usados em conjunto (Bastos, 1999).

Em resumo, Barros (2009) afirma que a principal característica mecânica que as fibras introduzem nos compósitos é o aumento da tenacidade ou capacidade de absorção de energia. Destaca-se também que após a tensão máxima, o decréscimo da tensão é acompanhado por uma grande deformação no material. Por fim, de acordo com Oliveira (2005), é válido salientar que a ruptura de um compósito cimentício fibroso pode estar relacionada ao alongamento elástico ou plástico das fibras, degradação da matriz de concreto na zona de transição fibra-matriz, deslizamento da fibra ou ainda pela ruptura da mesma.

2.1.2 - Fibras Utilizadas Para Reforço de Concreto

A utilização de fibras como reforço para materiais frágeis é conhecida desde os tempos antigos, como o uso de palha ou pelo de animais para reforçar tijolos de adobe e alvenaria de argamassa e gesso. Porém, essa técnica não é exclusividade do homem. Na natureza, o pássaro conhecido como joão-de-barro utiliza além de barro úmido, esterco misturado a palha para construir o seu ninho. Bentur e Mindess (2006) destacam como exemplos da antiguidade do uso desse recurso a citação de tijolos reforçados com palha no livro bíblico de Êxodo, como também sua utilização para construção do monumento Aqar Quf, há aproximadamente 3.500 anos, próximo de onde hoje se localiza a capital iraquiana Bagdá.

Ainda com base no que relatam Bentur e Mindess (2006), o primeiro composto manufaturado amplamente utilizado foi o cimento de asbesto (amianto), desenvolvido por volta de 1900 pelo austríaco L. Hatscheck. Desde então, diversos tipos de fibras são utilizadas para reforçar uma série de materiais diferentes, como epóxis, plásticos e cerâmicas. Essas fibras podem ser classificadas em três grandes grupos: fibras naturais (cisal, casca de coco, celulose), fibras poliméricas (polipropileno, polietileno e poliéster) e fibras metálicas (aço). De forma individual, as fibras podem ser constituídas de um único filamento (monofilamento) ou pela reunião de filamentos unitários (multifilamentos), sendo estas flexíveis e apresentando diâmetros inferiores a $10 \mu\text{m}$, dispostas na forma de um feixe.

No que diz respeito ao modo como estão inseridas na fase matriz, as fibras podem se apresentar de forma contínua, alcançando toda extensão da matriz na qual exerce sua função de reforço, ou discreta (não contínuas), geralmente com comprimentos menores do que 50 mm. Já em relação ao seu arranjo, podem ser dispostas em uma, duas ou três direções, conforme representa a Figura 2.3.

Outros aspectos relacionados às fibras são de extrema importância para o bom desempenho do CRF, entre eles pode-se destacar o comprimento, a concentração e o fator de forma. O comprimento da fibra (L_f) está diretamente associado à aderência entre as fases. Desse modo, quanto maior o comprimento, melhor será a aderência resultante. Entretanto, um maior comprimento também implicará em uma piora na trabalhabilidade do compósito. Por outro lado, se a fibra for muito curta, o comprimento poderá não ser suficiente para que ocorra a transferência de tensões e ela não atingirá o escoamento, o que pode levar a uma ruptura por arrancamento da fibra. Devido à maior energia necessária para que esse arrancamento aconteça, percebe-se um ganho na tenacidade do material. A Figura 2.4 apresenta uma representação esquemática do modelo de simulação de aderência da fibra na interação fibra-matriz. Em termos práticos, a ruptura por arrancamento da fibra é a mais comum, sendo também interessante sob o ponto de vista do aumento da tenacidade (Dumêt, 2003).

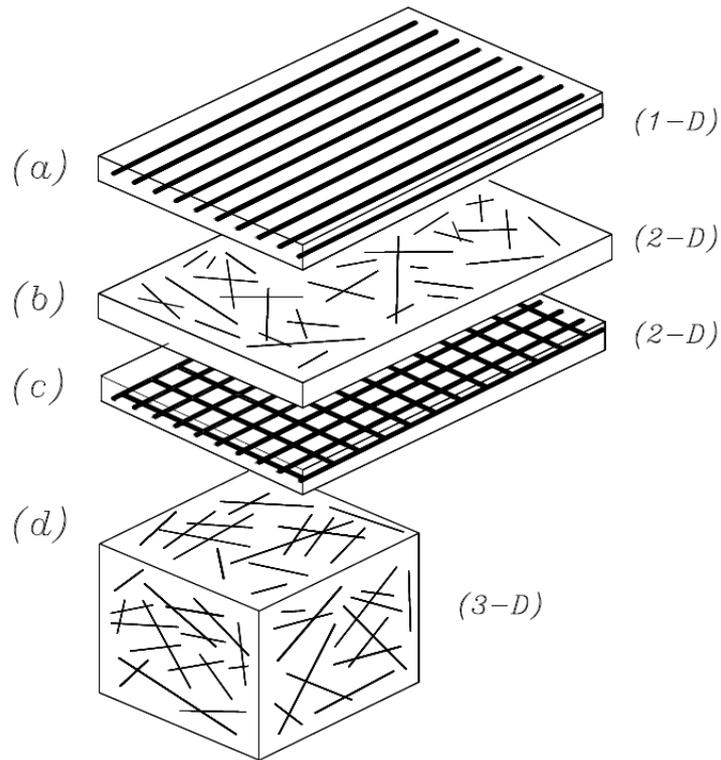


Figura 2.3 – Arranjos de fibras em uma (a), duas (b, c) e três direções (d), para fibras discretas (b, d) e para fibras contínuas (a, c) (Bentur e Mindess, 2006).

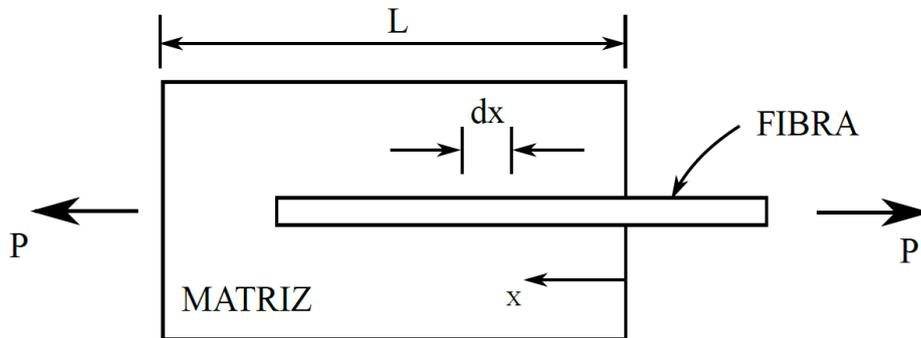


Figura 2.4 – Representação esquemática do modelo de simulação de aderência da fibra na interação fibra-matriz (Bentur e Mindess, 2006).

Figueiredo (2011) define o comprimento crítico de uma fibra (L_c) como sendo o mínimo comprimento necessário para se atingir no seu centro uma tensão igual à sua tensão de ruptura. Matematicamente, o comprimento crítico depende da tensão de aderência entre a fibra e a matriz (τ_{fu}), da tensão última da fibra (σ_{fu}) e do raio da seção transversal da fibra (r), conforme relaciona a Eq. 2.1. A Figura 2.5 apresenta as possíveis distribuições de tensão na fibra em relação ao seu comprimento crítico. É válido destacar que o comprimento crítico é baseado no modelo que descreve a transferência de tensão entre a matriz e a fibra como uma crescente linear dos extremos para o centro da fibra. Além disso, os estudos que produziram essa formulação foram feitos a partir de fibras retas e lisas. No caso da utilização de fibras com

ganchos em suas extremidades, a aderência será dada em função da ancoragem mecânica. Dessa forma, o uso da Eq. 2.1 não seria mais válido.

$$L_c = \frac{\sigma_{fu}}{\tau_{fu}} r \quad (2.1)$$

Quando a fibra possui um comprimento inferior ao comprimento crítico ($L < L_c$), a carga de arrancamento proporcionada pelo comprimento embutido na matriz não é suficiente para produzir uma tensão superior à tensão última da fibra. Neste caso, o aumento da deformação, que ocorre juntamente com o crescimento da fissura, fará com que a fibra seja arrancada do lado que possui o menor comprimento embutido. Já nas situações em que o comprimento da fibra é superior ao comprimento crítico ($L > L_c$), ocorre o travamento da fibra, impedindo o seu arrancamento e ocasionando o aumento da tensão atuante na mesma até que seja alcançada a tensão de ruptura. A máxima tenacidade do compósito é obtida quando o comprimento médio das fibras utilizadas é correspondente ao comprimento crítico ($L = L_c$) (Góis, 2010).

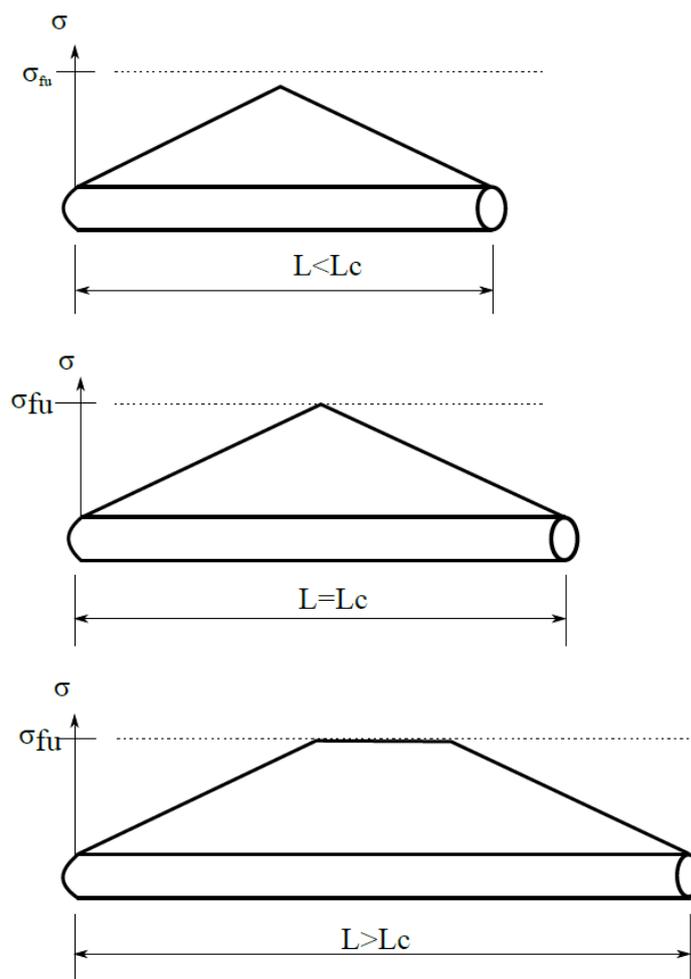


Figura 2.5 – Distribuição de tensões em função do comprimento crítico. (Callister Junior e Rethwisch, 2012)

É notável que a eficiência das fibras como reforço do concreto depende da sua atuação como ponte de transferência de tensões ao longo das fissuras. Desse modo, a capacidade de reforço acaba sendo diretamente influenciada pela concentração de fibras na fase matriz, ou seja, pelo teor de fibras utilizado na formação do compósito. Conforme o volume cresce, maior será o número de fibras interceptando uma fissura, contribuindo para a melhora do comportamento pós-fissuração do concreto. Estudos experimentais como os realizados por Hao e Hao (2013) e Wu et al. (2019) demonstraram que aumentos no teor de fibras implicam em ganhos na resistência, ductilidade e tenacidade do material.

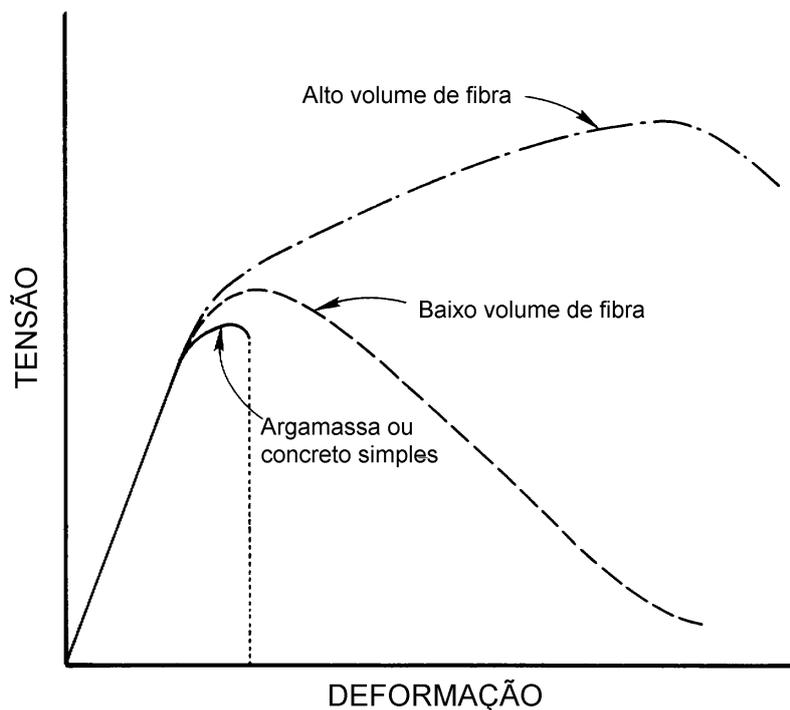


Figura 2.6 – Curvas típicas de tensão-deformação para para ausência, baixo e alto volume de fibras em matrizes cimentícias (Bentur e Mindess, 2006).

A Figura 2.6 exemplifica como a modificação do volume de fibras (V_f) altera a curva típica de tensão-deformação de matrizes cimentícias. Percebe-se que para a argamassa ou concreto simples sem adição de fibras tem-se um comportamento típico de um material frágil, caracterizado pela sua ruptura abrupta com a ocorrência de pouca ou quase nenhuma deformação plástica. Com a adição de um baixo volume de fibras, ocorre uma suavização da curva a partir do ponto em que se inicia a queda da tensão, o que indica um aumento da tenacidade em relação ao concreto sem fibras. Em conclusão, com a adição de um alto volume de fibras, nota-se um aumento da tensão do compósito mesmo após a sua ruptura, o que acaba por caracterizar um comportamento dúctil do material.

No tocante ao volume de fibras, assim como para o comprimento, busca-se definir parâmetros que consigam correlacionar termos quantitativos com a sua eficiência. Nesse contexto,

Figueiredo (2000) define o volume crítico ($V_{crítico}$) como sendo o teor de fibras que mantém a mesma capacidade resistente para o compósito após a ruptura da matriz. Bentur e Mindess (2006) afirmam que as fibras só contribuem para o aumento da resistência do compósito se o seu volume for maior que o volume crítico ($VF > V_{crítico}$), uma vez que nesta situação o compósito irá apresentar um ganho de resistência na fase pós-fissuração. No caso do volume de fibras ser menor do que o volume crítico ($VF < V_{crítico}$), as fibras não suportarão o aumento de carga no compósito, perdendo sua capacidade portante após a fissuração da matriz. Assim, neste ponto, haveria uma instabilidade pós-pico, provocando uma queda na carga que o material tem capacidade de suportar.

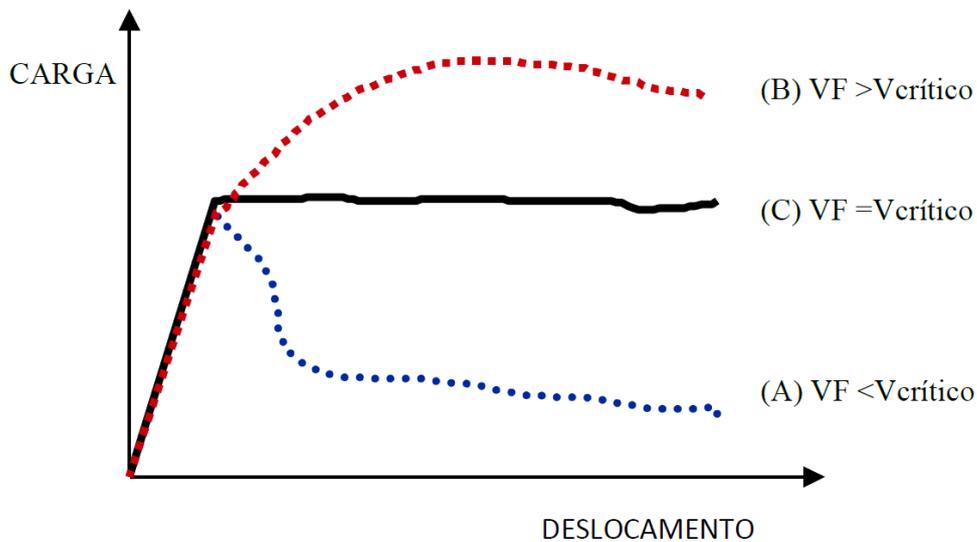


Figura 2.7 – Compósitos reforçados com volume de fibras (VF) abaixo (A), acima (B) e igual ao volume crítico de fibras durante o ensaio de tração na flexão (Figueiredo, 2000).

Os conceitos explanados anteriormente são ilustrados na Figura 2.7, na qual são apresentadas curvas de carga por deslocamento obtidas através de ensaios de tração na flexão de primas de concretos reforçado com fibras. Em cada uma das curvas pode-se observar um trecho elástico linear inicial, referente ao estágio de trabalho elástico da matriz do compósito (pré-fissuração), e outro que se assemelha a um patamar de escoamento, no qual se evidencia a influência da concentração de fibras no comportamento do concreto.

Além dos aspectos já citados, pode-se afirmar que o desempenho pós-fissuração do CRF também é bastante influenciado pela geometria da fibra. Para melhor compreensão dessa influência, é válido introduzir um parâmetro conhecido como fator de forma (λ), dado pela divisão do comprimento da fibra (L_f), não alongado, pelo seu diâmetro (d_f). Este índice é capaz de indicar a eficiência da fibra para melhorar a tenacidade do compósito. Nos casos em que as seções das fibras não sejam circulares, pode-se determinar um diâmetro equivalente (d_e) por meio da expressão:

$$d_e = \sqrt{\frac{4 \cdot e \cdot w}{\pi}} \quad (2.2)$$

em que e representa a espessura em mm e w a largura da fibra retangular em mm.

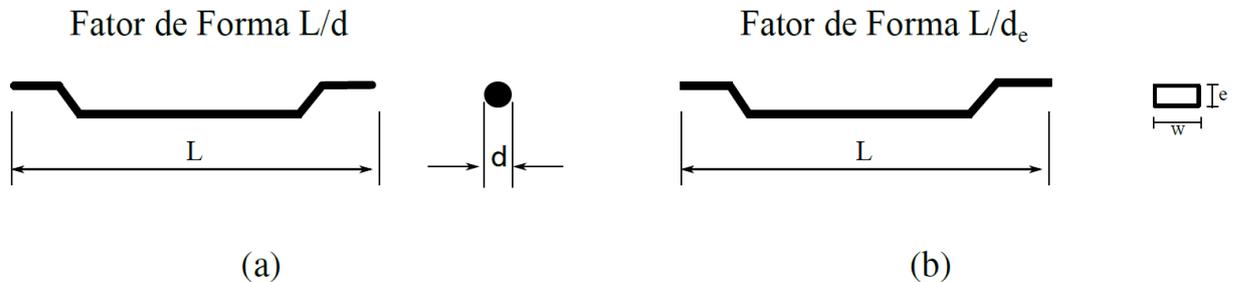


Figura 2.8 – (a) Fator de Forma para fibras com seção circular; (b) Fator de Forma para fibras com seção retangular (Faria, 2017).

Percebe-se que um aumento no fator de forma pode ser ocasionado tanto pelo aumento no comprimento da fibra quanto por uma diminuição do seu diâmetro equivalente. Mehta e Monteiro (2008) apontam que um fator de forma maior pode indicar uma melhora na resistência ao arrancamento da fibra, por meio de um acréscimo no comprimento de ancoragem, ou um maior número de fibras que interceptam uma fissura, devido a utilização de uma maior quantidade de fibras mais delgadas.

Conforme aponta Góis (2010), alguns estudos experimentais demonstraram que o conceito de fator de forma não se torna tão significativo no caso de fibras ancoradas, já que nesta condição o mecanismo predominante de transferência de tensões é a ancoragem mecânica e não o atrito. Entretanto, outros trabalhos citados pelos autores mostram que existe uma influência do fator de forma na tenacidade do CRF mesmo com a utilização de fibras ancoradas. A explicação dada para tal afirmação se baseia na hipótese de que as ancoragens acabam se retificando durante o arrancamento das fibras, permitindo assim um mecanismo de transferência de tensões exclusivamente por atrito, fazendo com que o parâmetro do fator de forma passe a ser significativo no comportamento mecânico do material.

2.1.3 - Fibras de Aço

As fibras metálicas, especialmente as de aço, são amplamente utilizadas em reforços de concreto por se apresentarem mais eficazes, econômicas, de fácil mistura e com boa aderência à fase matriz, conforme apontam Mehta e Monteiro (2008). O *American Concrete Institute (ACI)* define essas fibras como sendo comprimentos discretos de aço medindo entre 6,4 mm e 76

mm, com várias formas de seção transversal e pequenas o suficiente para serem dispersas aleatoriamente no concreto fresco por meio de procedimentos habituais de mistura. Além disso, possuem um fator de forma entre 20 e 100.

Apesar de não existir uma padronização internacional quanto à produção das fibras de aço, os tipos e geometrias geralmente não variam muito entre os países. No Brasil, a normalização desse material é feita com base na NBR 15530:2019 - Fibras de aço para concreto - Requisitos e métodos de ensaio (ABNT, 2019).

De forma geral, a NBR 15530:2019 apresenta dois critérios básicos para a identificação das fibras de aço: o primeiro relacionado com a técnica de conformação empregada (geometria da fibra) e o segundo ligado ao processo de produção e material base utilizado para a fabricação. Neste sentido são apontados três tipos e cinco classes de fibras. Os tipos A, C e R representam, respectivamente, fibras com ancoragem na extremidade, fibras corrugadas e fibras retas. Por sua vez, as classes I, II, III, IV e V indicam, respectivamente, fibras oriundas de arames treilados a frio, chapas cortadas, arames treilados a frio e escarificados (*shaved*), fibras produzidas por fusão (*melt extracted*) e fibras usinadas a partir de blocos de aço. Alguns tipos de fibras presentes no mercado nacional estão descritos na Tabela 2.1. Além das classificações apresentadas, a NBR 15530:2019 também estabelece limites para os valores de fator de forma e da resistência à tração das fibras.

Atualmente, grande parte das fibras de aço utilizada na construção civil possui ondulações nas extremidades (fibras com ancoragem em gancho) ou ao longo do seu comprimento (fibras onduladas). Esses ganchos e ondulações têm por objetivo melhorar a atuação da fibra em relação à aderência e ao deslizamento, o que é assegurado por meio da ancoragem mecânica. A Figura 2.9 apresenta um exemplo de como a geometria da fibra (presença ou não de ancoragem nas extremidades) influencia na eficiência da aderência fibra-concreto.

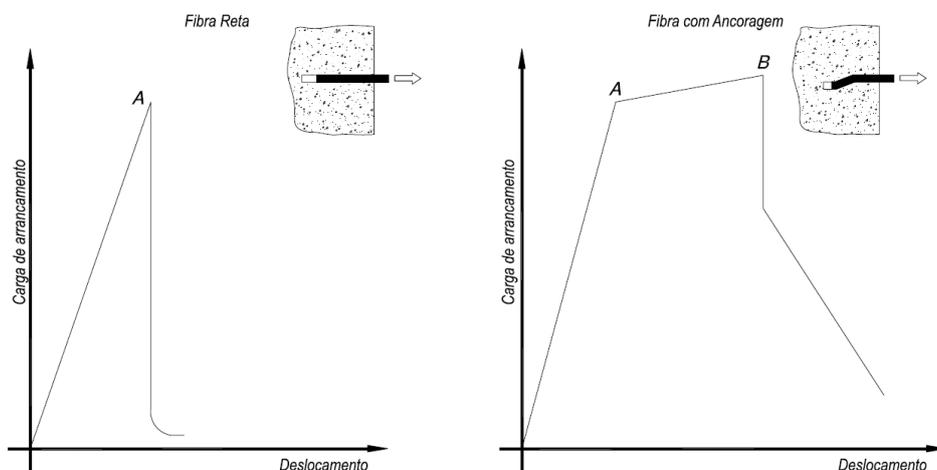
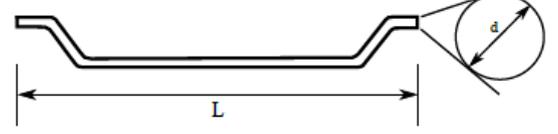
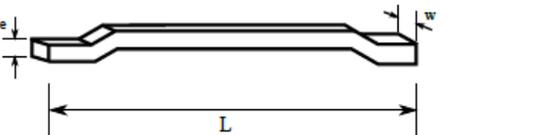
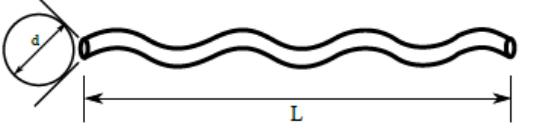
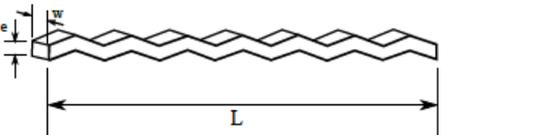
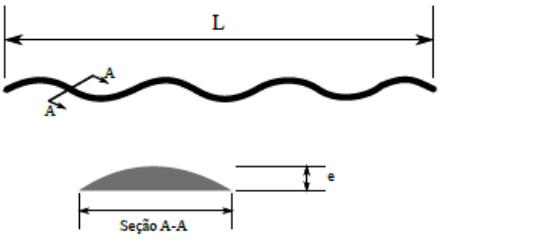
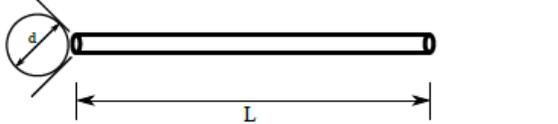
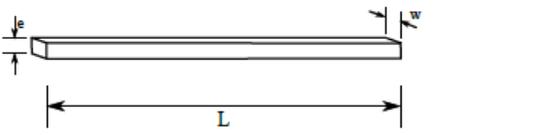


Figura 2.9 – Exemplo da variação da eficiência entre a interface fibra-concreto com a forma da fibra (Sarzalajo, 2007).

Tabela 2.1 – Classificação e geometria das fibras de aço para reforço de concreto (Figueiredo et al., 2008).

| Tipo | Classe da fibra | Geometria |
|------|-----------------|--|
| A | I |  |
| | II |  |
| C | I |  |
| | II |  |
| | III |  |
| R | I |  |
| | II |  |

Por último, destaca-se que as características mecânicas das fibras de aço, essencialmente sua resistência à tração, possuem grande impacto no comportamento do CRF. Ao não ocorrer o arrancamento da fibra, impedido pela aderência imposta entre a interface fibra-concreto, haverá a possibilidade de sua ruptura, no momento em que as tensões atuantes superarem sua resistência à tração (Sarzialejo, 2007). Desse modo, a fibra deixará de atuar como ponte de transferência de tensões e a capacidade portante do compósito pós-fissuração diminuirá drasticamente. Isso pode ser percebido por meio da análise da Figura 2.10.

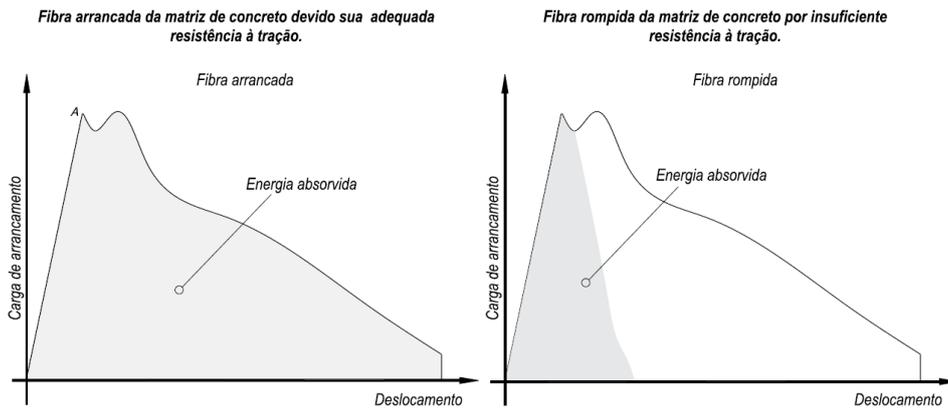


Figura 2.10 – Importância da resistência à tração da fibra (Sarzialejo, 2007).

2.2 - MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO

A formação e propagação de trincas e fissuras é um fenômeno crítico e complexo que tem um impacto significativo no comportamento mecânico dos materiais. Para abordar essa questão, a Mecânica da Fratura, um ramo da Mecânica dos Sólidos, concentra-se no estudo e análise de fissuras e defeitos. Seu principal objetivo é prever com precisão a resistência residual sob diferentes tipos de carregamentos. Devido às características distintas de cada material, existem diversos modelos disponíveis para simular a propagação de trincas e descrever o processo de fraturamento em cada situação.

A Mecânica da Fratura é comumente dividida em dois ramos principais: a Mecânica da Fratura Linear-Elastica (MFLE) e a Mecânica da Fratura Não-Linear (MFNL). A MFLE é um modelo de análise que assume a linearidade e a elasticidade do material. É amplamente utilizada para prever a propagação de trincas em materiais homogêneos e isotrópicos. Por outro lado, a MFNL leva em consideração a não-linearidade dos materiais, como o próprio nome sugere. Esse ramo é particularmente importante para materiais frágeis e heterogêneos, como o concreto.

De forma simplificada, a abertura de fissuras em um corpo sólido pode ocorrer de três modos distintos: modo I, modo II e modo III, dependendo do tipo da sollicitação aplicada. No modo I, a tensão normal predominante σ_{yy} leva a um movimento de abertura de fissura perpendicular ao seu plano, tornando esse modo o mais crítico para a propagação de fissuras (Figura 2.11 a). No modo II, o deslizamento relativo entre as faces da fissura ocorre devido ao cisalhamento paralelo à abertura, com a tensão cisalhante predominante τ_{yx} (Figura 2.11 b). Por fim, no modo III, o deslizamento relativo entre as faces da fissura ocorre devido ao cisalhamento na direção transversal ao defeito, com a tensão cisalhante predominante τ_{yz} (Figura 2.11 c) (Alves e Proença, 2010). É comum que os diferentes modos de ruptura ocorram simultaneamente em

situações práticas, e a interação entre eles é um fator determinante para a trajetória da fissura até o colapso do elemento.

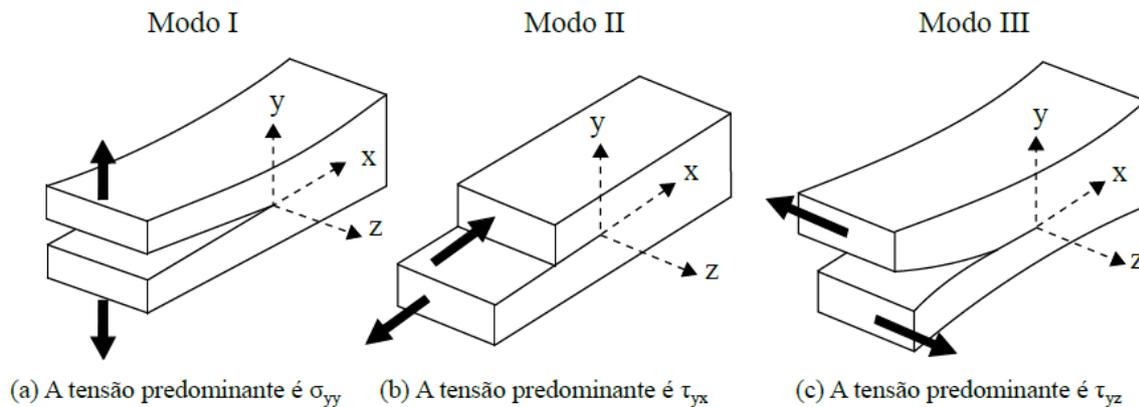


Figura 2.11 – Modos de fissuração: (a) modo I (ou modo de abertura), (b) modo II (ou modo de deslizamento), (c) modo III (ou modo rasgado). Adaptado de Kumar e Barai (2011).

2.2.1 - Zona de Processo de Fratura

Conforme apontado por Bhowmik e Ray (2019), o concreto é caracterizado como um material heterogêneo que apresenta um comportamento quase-frágil quando sujeito a cargas. Durante o processo de fissuração, uma zona inelástica significativa forma-se à frente da ponta da fissura (Figura 2.12 a), sendo conhecida como Zona de Processo de Fratura (ZPF). Como mencionado por Shi (2009), essa zona sofre danos parciais, mas ainda possui capacidade de transferência de tensões coesivas (Figura 2.12 b), que tendem a fechar as faces da fissura. Assim, a ZPF desempenha um papel de transição entre a fissura aberta, que representa uma descontinuidade completa, e o material íntegro adjacente.

Até meados da década de 1970, foram realizados estudos com o objetivo de aplicar os conceitos da mecânica da fratura linear-elástica e da mecânica da fratura elasto-plástica aos materiais cimentícios, buscando compreender a propagação de fissuras. No entanto, ao longo do tempo, ficou evidente que nenhum parâmetro isolado da mecânica de fratura seria capaz de quantificar adequadamente a resistência à propagação de fissuras. Em vez disso, observou-se uma zona de microfissuração, onde ocorrem fenômenos inelásticos, e que desempenha um papel crucial no comportamento de crescimento lento da fissura antes de atingir a condição de instabilidade. Essa zona é reconhecida atualmente como a origem do dano de amolecimento nos materiais cimentícios (Kumar e Barai, 2011).

Ainda segundo Kumar e Barai (2011), a presença da ZPF em frente a uma fissura aberta representa um desafio significativo no campo da mecânica dos sólidos para o estudo da fratura do concreto. Macroscopicamente, a ZPF não pode ser caracterizada como uma região contínua,

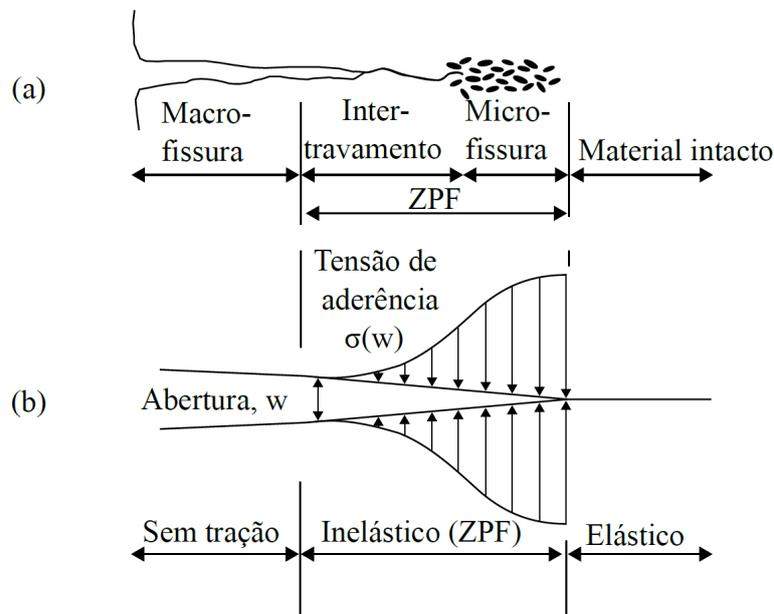


Figura 2.12 – (a) Zona de processo de fratura no concreto e (b) Distribuição da tensão coesiva na ZPF (Silva, 2017).

pois apresenta características distintas da matriz do material. No entanto, também não pode ser considerada uma região descontínua, pois ainda possui uma certa capacidade de transferência de tensões coesivas. Neste sentido, dois conceitos para modelar a ZPF têm ganhado popularidade no desenvolvimento de teorias computacionais para a mecânica da fratura aplicada ao concreto: a abordagem de fissura discreta e a abordagem de fissura difusa.

Na abordagem de fissura discreta, a ZPF é representada por meio de fissuras fictícias que são afetadas por forças externas, as quais correspondem às forças coesivas transferidas através da ZPF para o corpo elástico adjacente. De acordo com Carol et al. (1997), cada fissura é modelada individualmente, levando em consideração suas características geométricas e propriedades mecânicas específicas. As interações entre as fissuras e o material circundante são analisadas, considerando as forças de coesão e a transferência de tensões entre as superfícies da fissura. Uma vantagem dessa abordagem é que as forças exercidas sobre a zona elástica pela fissura fictícia permanecem inalteradas, assim como na presença da ZPF física, tornando-a uma descrição matemática precisa do problema (Kumar e Barai, 2011).

Por outro lado, na abordagem de fissura difusa, um conceito de modelagem diferente é adotado. Nessa abordagem, as deformações localizadas inelásticas que ocorrem na ZPF são consideradas como difusas em uma faixa de largura determinada, em termos de relações tensão-deformação. Isso implica que a ZPF é modelada de forma contínua, em contraste com a abordagem de fissura discreta. Em implementações por elementos finitos, a rigidez e a resistência do material em um elemento fissurado são reduzidas com base em uma relação de amolecimento por deformação. Essa redução de rigidez e resistência é equivalente à difusão de uma fissura discreta sobre uma

malha de elementos finitos, aproximando assim o efeito do dano material decorrente de uma única fissura. É importante destacar que esse método é uma abordagem aproximada para a análise de fissuras (Borst et al., 2004; Kumar e Barai, 2011).

Ambas as abordagens possuem vantagens e desvantagens e são aplicadas em diferentes contextos de modelagem da ZPF. A abordagem de fissura discreta, com foco nas interações entre fissuras, é amplamente utilizada em estudos que consideram a propagação de múltiplas fissuras no concreto. Por outro lado, a abordagem de fissura difusa tem demonstrado sucesso em simulações computacionais para analisar o comportamento de fratura em materiais heterogêneos. Em última análise, o objetivo de ambas é capturar o comportamento complexo da ZPF e sua influência na propagação da fratura. A escolha entre essas alternativas depende das características específicas do material, da escala de análise e dos objetivos do estudo.

2.2.2 - Modelo de zona coesiva

A mecânica da fratura linear elástica (MFLE) apresenta limitações na descrição de fenômenos de fratura em materiais quase frágeis, como o concreto, quando a deformação inelástica se estende além de uma pequena região próxima à ponta da fissura. Um dos desafios nesse contexto é lidar com as tensões infinitamente altas, conhecidas como singularidades, que se manifestam nessa região.

Para contornar essa problemática, a inclusão de comportamento inelástico nos sólidos surge como uma extensão natural da MFLE. Uma abordagem alternativa com esse mesmo objetivo é utilizada no conceito do modelo de zona coesiva (MZC). Estudos iniciais conduzidos por Barenblatt (1959; 1962) aplicaram o MZC para descrever o comportamento de materiais frágeis. Essa teoria se baseia na existência de uma região coesiva próxima à ponta da fissura, representada por duas superfícies mantidas juntas por uma tração coesiva. O tamanho dessas superfícies é significativamente menor em relação ao comprimento total da fissura e tem como propósito descrever o processo de fratura de maneira mais realista, evitando o uso de singularidades de tensão. Assim, busca-se considerar o comportamento não linear da fratura e estabelecer uma correspondência com o conceito de equilíbrio energético proposto por Griffith (1921).

Conforme apontam Sun e Jin (2012), a falha do material ocorre quando as superfícies coesivas se separam completamente, sendo esse processo de separação descrito por uma lei que relaciona a tração coesiva e o deslocamento relativo entre essas superfícies. Logo, uma extensão física da fissura ocorre quando o deslocamento de separação na cauda da zona coesiva (ponta física da fissura) atinge um valor crítico. A Figura 2.12 (b) mostra uma zona coesiva à frente de uma fissura, em que σ_w é a tração coesiva e w é o deslocamento de separação das superfícies.

Hillerborg et al. (1976) realizaram um estudo pioneiro utilizando o modelo de zona coesiva com a abordagem da fissura discreta para simular o processo de amolecimento em estruturas de concreto. Esse trabalho considerou algumas hipóteses importantes. A primeira hipótese está relacionada ao comportamento do material em volume, assumindo que ele é elástico linear e isotrópico, com propriedades definidas pelo módulo de elasticidade E e pelo coeficiente de Poisson ν . A segunda hipótese considera que a fissura se inicia em um ponto quando a tensão principal máxima naquele ponto atinge a resistência à tração f_t , e que a fissura se forma perpendicular à direção da tensão principal de tração. Por fim, a terceira hipótese estabelece que, à medida que a fissura se forma e sua abertura aumenta, ocorre transferência de tensão entre as superfícies da fissura até que um deslocamento de abertura crítico seja alcançado.

Com base na segunda hipótese, Hillerborg et al. (1976) discutem que o comportamento do concreto pode ser descrito por duas curvas características: a curva tensão-deformação até a carga de pico (tensão máxima) e a curva tensão-abertura após a carga de pico. Essas curvas são ilustradas na Figura 2.13. Desse modo, a fim de garantir uma dissipação adequada de energia e evitar variações abruptas de tensão que não correspondem à realidade, os autores afirmam que é necessário descrever gradualmente a perda de coesão. Isso se justifica fisicamente pelo fato de que a formação de fissuras em um material heterogêneo em nível macroscópico é precedida pela iniciação, crescimento e coalescência de um conjunto de microfissuras.

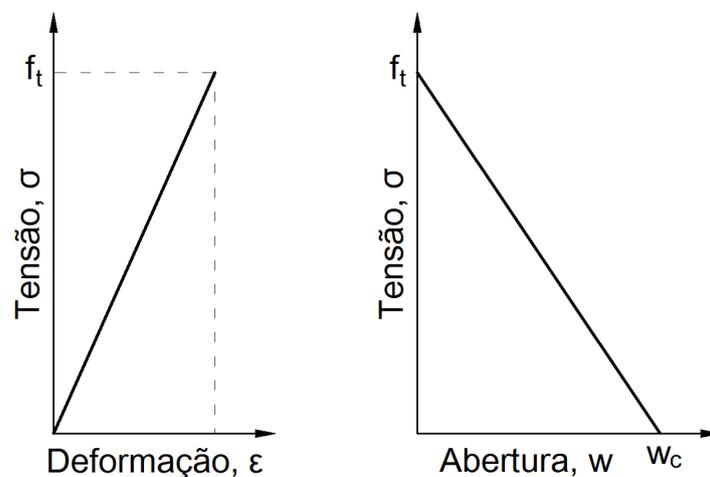


Figura 2.13 – (a) Relação linear tensão-deformação do concreto fora da zona de fratura; (b) relação linear tensão-deslocamento do concreto na zona de fratura. Adaptado de Kumar e Barai (2011).

A relação constitutiva pós-pico, expressa pela função $\sigma = f(w)$, é uma propriedade do material que estabelece a relação entre as tensões coesivas (σ) atuantes nas superfícies da fissura e a correspondente abertura da fissura (w). Essa relação, também conhecida como função de amolecimento, é determinada pelos parâmetros de resistência à tração (f_t) e energia coesiva de fratura (G_F). A resistência à tração representa a tensão na qual o processo de fratura é iniciado, resultando na abertura das fissuras. Por outro lado, a energia coesiva de fratura corresponde à

área abaixo da curva da relação pós-pico, conforme ilustrado na Figura 2.14. O ponto w_c , por sua vez, caracteriza a abertura crítica da fissura, definida como a magnitude da abertura na qual todas as tensões de contato deixam de existir. (Silva Neto, 2015).

A área sob a curva tensão-deslocamento, denotada por G_F , pode ser calculada por:

$$G_F = \int_0^{w_c} \sigma_w dw \quad (2.3)$$

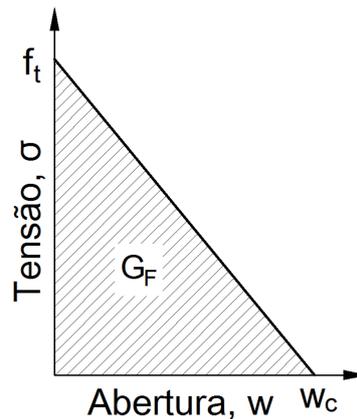


Figura 2.14 – Energia específica de fratura como área entre a curva tensão abertura (Silva Neto, 2015).

A escolha da função de amolecimento desempenha um papel fundamental na capacidade do modelo em simular a resposta estrutural do material, bem como o comportamento local da fratura. A seleção adequada dessa função permitirá uma representação mais precisa das propriedades de deformação e resistência do material, resultando em resultados mais confiáveis na análise estrutural e no estudo da fratura. Na literatura, existem diversas formas de curvas disponíveis, como as funções linear, bilinear, exponencial, não-linear e quase exponencial. Cada uma dessas funções tem suas características próprias e pode ser escolhida de acordo com as propriedades específicas do material e os objetivos da análise.

A função de amolecimento linear expressa a relação entre a tensão e a abertura da fissura de forma linear, conforme representado pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} \sigma(w) = f_t \left(1 - \frac{w}{w_c}\right), & \text{para } 0 \leq w \leq w_c \\ \sigma(w) = 0, & \text{para } w \geq w_c \end{cases} \quad (2.4)$$

Sendo possível obter o valor de w_c por meio da seguinte fórmula:

$$w_c = \frac{2G_F}{f_t} \quad (2.5)$$

Por sua vez, a função de amolecimento bilinear pode ser expressa por:

$$\begin{cases} \sigma(w) = f_t - (f_t - \sigma_s) \frac{w}{w_s}, & \text{para } 0 \leq w \leq w_s \\ \sigma(w) = \sigma_s \frac{w_c - w}{w_c - w_s}, & \text{para } w_s \leq w \leq w_c \\ \sigma(w) = 0, & \text{para } w \geq w_c \end{cases} \quad (2.6)$$

Enquanto a área sob a curva de amolecimento pode ser obtida por:

$$G_F = \frac{\alpha_s + \beta_s}{2} f_t w_c \quad (2.7)$$

Em que os valores dos coeficientes adimensionais são $\alpha_s = \sigma_s/f_t$ e $\beta_s = w_s/w_c$, sendo σ_s e w_s , respectivamente, a ordenada e a abscissa do ponto de mudança de inclinação da curva de amolecimento bilinear mostrada na Figura 2.15.

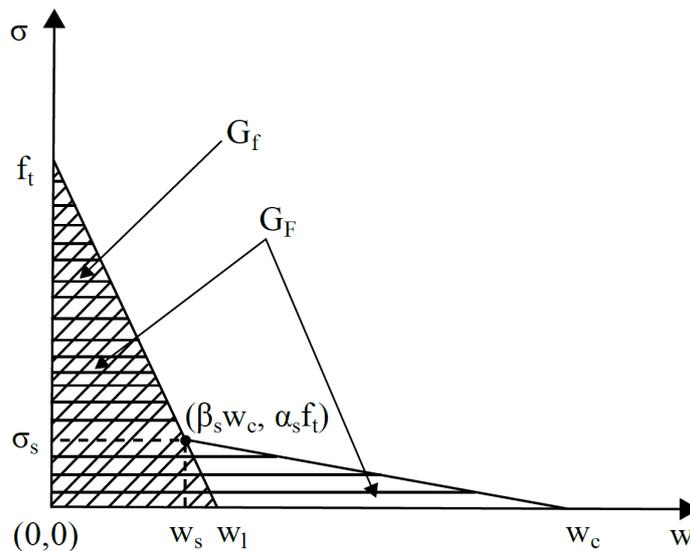


Figura 2.15 – Generalização da função de amolecimento bilinear. Adaptado de Kumar e Barai (2011).

A função bilinear de amolecimento tem sido amplamente utilizada em materiais quase-frágeis devido à sua simplicidade e capacidade de representar adequadamente cada estágio da fissura. Conforme destacado por Silva (2017), essa função é capaz de alterar a rigidez do material à medida que ocorre a transição das microfissuras para uma macrofissura, como ilustrado na Figura 2.16. Uma vantagem significativa desse modelo é que os parâmetros de fratura necessários, como energia de fratura inicial (G_f), energia de fratura total (G_F) e resistência à tração (f_t), podem ser obtidos experimentalmente a partir das amostras que se deseja simular. Isso significa que nenhum ajuste adicional é necessário no modelo bilinear para determinar a resposta do material. Essa característica simplifica a aplicação prática do modelo e torna os

resultados mais confiáveis Silva (2017).

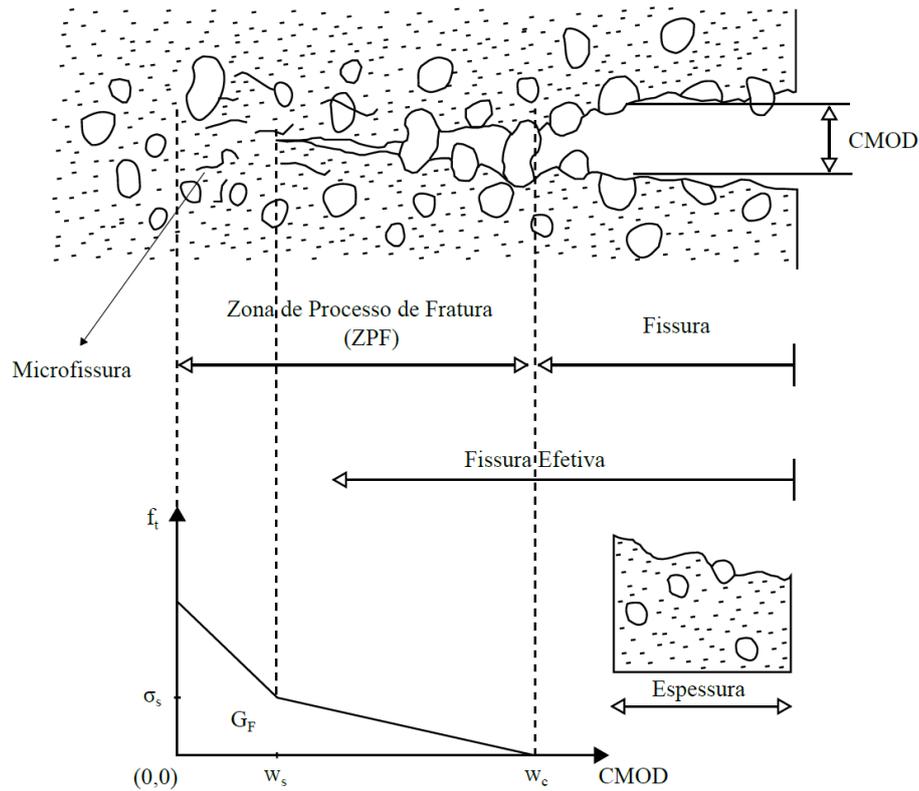


Figura 2.16 – Idealização do modelo de zona coesiva em conjunto com a função bilinear de amolecimento de acordo com Hillerborg et al. (1976)..

Por fim, a função exponencial de amolecimento proposta por Gopalaratnam e Shah (1985)), pode ser expressa como:

$$\sigma(w) = f_t \exp(-kw^\lambda) \quad (2.8)$$

Em que λ e k são constantes que valem, respectivamente, 1,01 e 0,063; enquanto w é dado em micrômetro (10^{-6} m). Outra variação para a função de amolecimento exponencial foi proposta por Karihaloo (1995), sendo apresentada como:

$$\sigma(w) = f_t \exp\left(-\mu \frac{w}{w_c}\right) \quad (2.9)$$

Em que μ é uma constante do material, sendo $\mu = 4,6052$ para $\sigma = 0,01f_t$ e $w = w_c$, enquanto w_c pode ser calculado por:

$$w_c = \frac{4,6517G_F}{f_t} \quad (2.10)$$

2.3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Grande parte dos problemas relacionados à engenharia costuma ser descrito por meio de equações diferenciais. Essas equações, por sua vez, apresentam geralmente um certo nível de complexidade na obtenção de soluções. Entretanto, com o advento do computador e o desenvolvimento de processadores cada vez mais avançados, uma ampla variedade de métodos numéricos foi desenvolvida com o intuito de prover ferramentas capazes de auxiliar na resolução dessa problemática. Nas últimas décadas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) ganhou grande destaque por se apresentar como uma ferramenta numérica poderosa e versátil na análise de diversos problemas, incluindo aqueles considerados mais complicados sob o ponto de vista físico ou geométrico.

A ideia básica do MEF é substituir um problema complexo por outro mais simples. Isso permite que seja possível encontrar uma solução aproximada ao invés da solução exata. Essa alternativa se torna bastante interessante visto que, para a maioria dos problemas práticos, as ferramentas matemáticas não são suficientes para encontrar a solução exata ou até mesmo uma solução aproximada (Rao, 2011). Em resumo, Souza (2003) apresenta o Método dos Elementos Finitos como um método numérico aproximado para análise de fenômenos físicos que ocorrem em meios contínuos, e que podem ser descritos por meio de equações diferenciais parciais, com determinadas condições de contorno (Problemas de Valor de Contorno), e possivelmente com condições iniciais, no caso de problemas variáveis no tempo. Por esse motivo, o MEF tem um alto poder de generalização, podendo ser aplicado em inúmeras soluções na engenharia.

A análise via MEF parte da divisão do domínio do problema em um conjunto de elementos contíguos. Esse processo é denominado discretização e define o que se chama de malha de elementos finitos, que pode ser regular ou irregular. Cada elemento da malha é representado por uma figura geométrica simples: linha, triângulo, retângulo, tetraedro, hexaedro, entre outras. A escolha do formato utilizado depende da dimensão (1D, 2D ou 3D) do domínio a ser discretizado. Cada elemento criado está conectado a outros elementos por meio de pontos, que são designados nós ou pontos nodais (Quevedo, 2017). A Figura 2.17 apresenta um exemplo de malha de elementos finitos para um problema plano, enquanto a Figura 2.18 expõe exemplos de elementos finitos que podem ser utilizados.

A partir da discretização, uma função complexa passa a ser representada por meio de trechos de funções mais simples, o que permite que a solução total seja representada mediante as equações definidas internamente em cada elemento, as quais são desenvolvidas de maneira a capturar os efeitos locais e de apresentar continuidade nas regiões de contato com os elementos vizinhos. Os resultados obtidos em cada elemento são então reunidos de forma específica para que cada um dos subdomínios possa ser considerado em sua posição original. Durante todo esse processo, aproximações são introduzidas, gerando erros que impedem o MEF de produzir o resultado

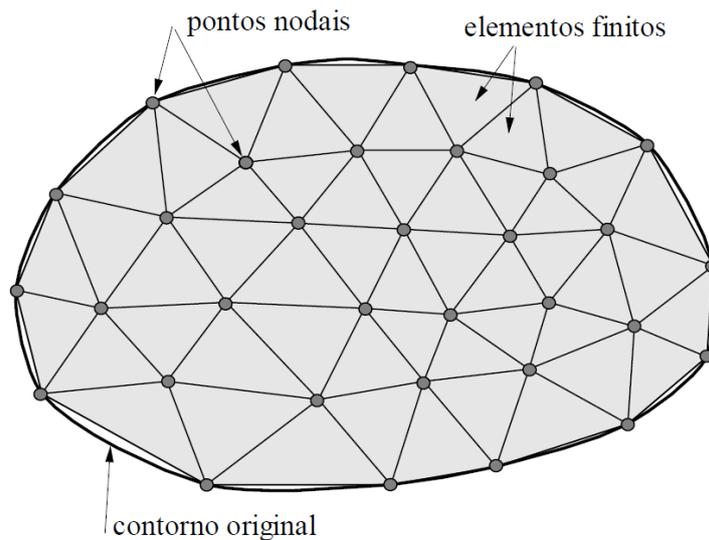


Figura 2.17 – Exemplo de Malha de Elementos Finitos para um problema plano (Souza, 2003).

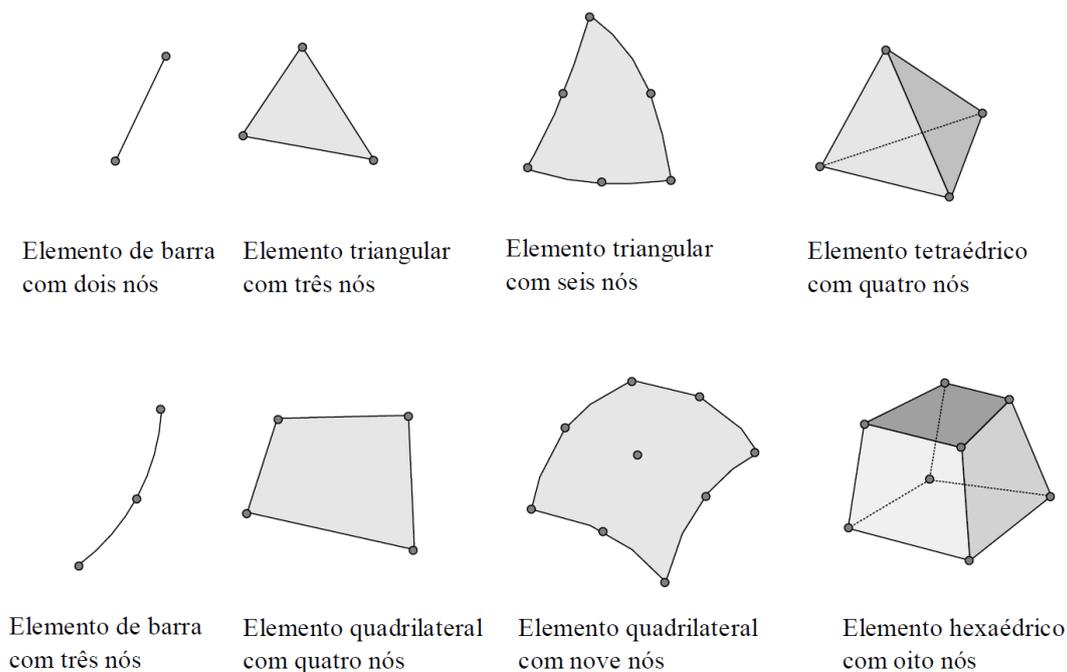


Figura 2.18 – Exemplos de diferentes tipos de elementos finitos (Souza, 2003).

exato para o problema analisado. A própria divisão geométrica em elementos finitos pode não ser fiel ao objeto de estudo, de modo que o domínio resultante da união de todos os subdomínios possa não necessariamente coincidir com o original (Almeida, 2016).

É importante destacar que a precisão desse método é diretamente influenciada pela quantidade de nós e de elementos, como também pelo tamanho e tipo de elementos finitos utilizados na formação da malha. Apesar de tratar-se de um método aproximado, pode-se demonstrar que para uma malha consistente, a medida que o tamanho dos elementos finitos tendem a zero e,

consequentemente, a quantidade de nós tende a infinito, a solução encontrada converge para a solução exata do problema. Isso significa que quanto menor for o tamanho e maior for o número de elementos finitos em uma determinada malha, mais precisos serão os resultados obtidos (Souza, 2003). A Figura 2.19 ilustra diferentes níveis de refino utilizados em malhas.

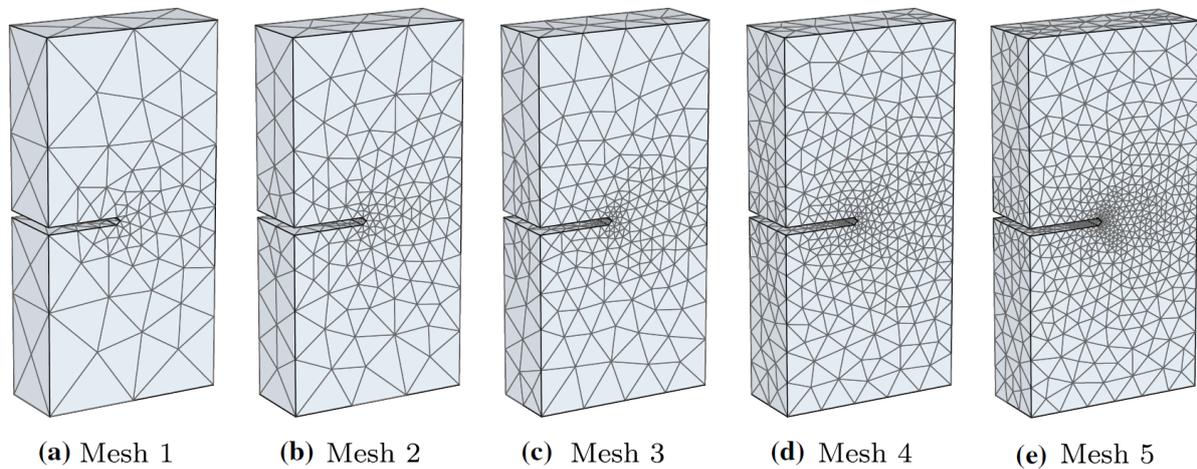


Figura 2.19 – Representação de malhas com diferentes níveis de refino (Durand e Silva, 2021).

De forma simplificada, a aplicação do método em questão envolve as seguintes etapas:

1. Transformação da forma forte da equação governante do problema em forma fraca (também denominada de forma variacional), por meio da integração por partes;
2. Discretização espacial das equações por meio de funções de forma, obtendo-se matrizes da grandeza incógnita para cada elemento da malha;
3. Montagem das matrizes de cada elemento, formando assim matrizes A e b globais do problema;
4. Aplicação das condições de contorno e resolução do sistema $Ax = b$.

Pode-se salientar a importância e relevância do MEF tomando como exemplo o seu uso por grandes marcas no desenvolvimento de *softwares* de cálculo estrutural no Brasil e no mundo. Esses programas são capazes de calcular complexas estruturas a partir dos conceitos e aplicações do método. Entre eles destacam-se o *TQS*, *Eberick*, *CypeCAD*, *SAP2000*, *ETABS*, *STRAP* e *Autodesk Robot*.

2.3.1 - Aplicação de Elementos Finitos em Concreto

O concreto, por ser um material composto, possui um comportamento estrutural bastante complexo. Para analisá-lo numericamente se faz necessário o conhecimento de modelos

teóricos que possam representar esse comportamento de forma adequada. Segundo Oller (2001), os modelos constitutivos podem ser entendidos como formulações matemáticas que descrevem o funcionamento físico e mecânico de um sólido ideal, a partir de hipóteses simplificadoras aplicadas sob um sólido real. Na simulação numérica via Método dos Elementos Finitos a escolha apropriada do tipo de modelo constitutivo a ser utilizado se torna determinante para o sucesso da aplicação.

Nas últimas décadas, diversos modelos têm sido formulados com base em algumas teorias, como a teoria da elasticidade, da plasticidade e da mecânica da fratura e do dano. Cada um desses modelos acabam fornecendo respostas coerentes com a situação em análise, porém nunca suficientemente gerais. A complexidade de incluir todos os fatores decorrentes do comportamento do concreto em um modelo confiável e eficiente tem provado ser uma tarefa difícil, fazendo desse campo de estudo uma área em investigação contínua (Tavárez, 2001). A seguir são comentados brevemente os principais modelos empregados e suas características.

A *teoria da elasticidade* considera que os materiais apresentam deformações instantâneas e reversíveis quando submetidos a um dado estado de tensões. Dessa forma, as deformações específicas vão surgindo à medida que as tensões aumentam, permanecendo constantes caso as tensões também permaneçam. Havendo a extinção das tensões, as deformações elásticas se anulam. Os modelos constitutivos baseados nessa teoria são relativamente simples e costumam representar adequadamente o comportamento dentro da faixa elástica de um material, entretanto demonstram-se pouco apropriados para análise de materiais frágeis quando submetidos a elevadas tensões.

Por sua vez, os modelos que seguem a *teoria da plasticidade* já consideram que as deformações apresentadas pelos materiais são imediatas e não reversíveis, isto é, as deformações não desaparecem por completo ao serem removidas as cargas que lhe deram origem. Essa teoria é usualmente utilizada para descrever o comportamento inelástico dos materiais, tendo suas primeiras aplicações realizadas no estudo de metais e materiais geotécnicos (Bono, 2008).

Os modelos que se baseiam na *mecânica do dano* seguem o conceito de que a perda progressiva de rigidez e resistência do material acontece exclusivamente devido ao processo de microfissuração. Esse processo ocorre por meio da presença de um grande número de microfissuras distribuídas aleatoriamente, com formas, tamanhos e orientações irregulares. Desse modo, utiliza-se de um parâmetro de dano determinista para medir a perda de integridade e rigidez, assumindo que a mudança da resposta macroscópica produzida por uma evolução estocástica do dano se dá de forma gradual (Krajcinovic e Van Mier, 2000).

Por fim, os modelos baseados na *mecânica da fratura* procuram representar as descontinuidades presentes no campo de deslocamentos ocasionadas pela fissuração do

concreto. Essa representação é de suma importância, uma vez que tais descontinuidades afetam drasticamente o comportamento mecânico do material. As fissuras, assim como sua propagação, podem ser incorporadas à malha de elementos finitos por meio de diferentes metodologias. Essas abordagens incluem fissuras distribuídas (*smearred cracks*), fissuras embutidas (*embedded cracks*), fissuras discretas (*discrete cracks*) e modelos de elementos reticulados (*lattice model*), como ilustrado na Figura 2.20. No contexto da modelagem de materiais quase-frágeis por meio do MEF, as principais estratégias utilizadas são as fissuras distribuídas (*smearred cracks*) e as fissuras discretas (Gálvez et al., 2002; Silva, 2017).

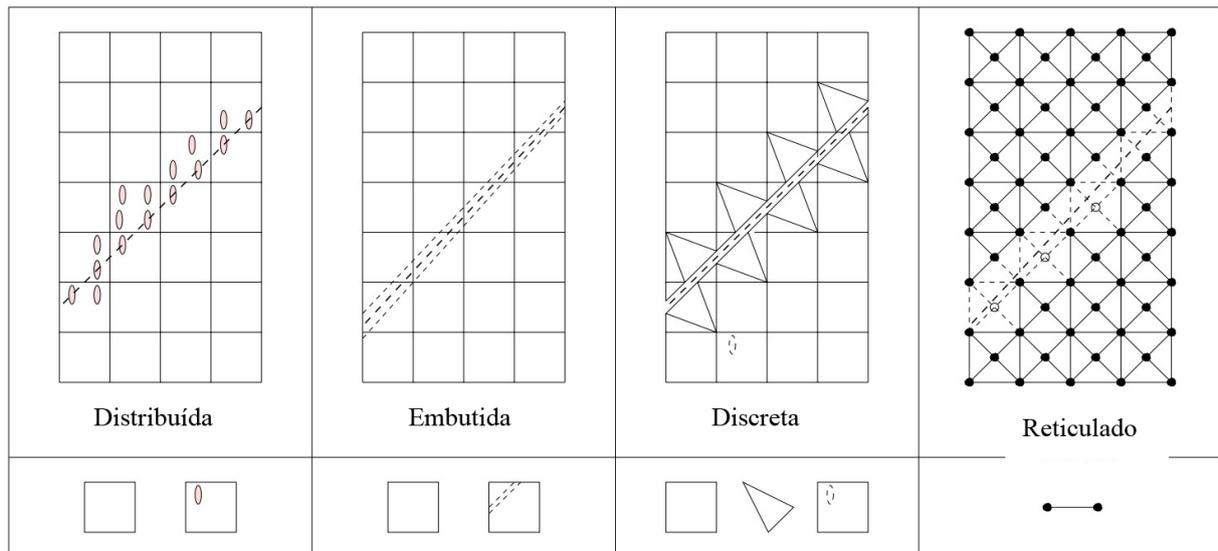


Figura 2.20 – Estratégias de incorporação de fissuras em simulações numéricas. Adaptado de Saouma (2000).

Na abordagem de fissuras distribuídas (*smearred cracks*), a fratura é representada por um conjunto infinito de fissuras paralelas com aberturas infinitesimalmente pequenas, distribuídas ao longo do elemento finito. Essas fissuras são geralmente modeladas em uma malha de elementos finitos fixos. A propagação das fissuras é simulada através da redução da rigidez e resistência do material, incorporadas por meio de leis constitutivas (tensão-deformação) não-lineares que apresentam o comportamento de amolecimento. Uma vantagem desse método é que, normalmente, a topologia da malha não precisa ser modificada durante a progressão da fratura, o que proporciona uma abordagem computacionalmente eficiente para analisar o comportamento de fratura em materiais (Bažant e Planas, 1997; Gálvez et al., 2002).

No entanto, é importante destacar algumas desvantagens desse método. O amolecimento da deformação introduz dificuldades na resolução do sistema de equações, tornando-o mal condicionado e dificultando a obtenção de soluções numéricas adequadas, conforme discutido por Bažant e Planas (1997). Além disso, a presença de fissuras distribuídas pode levar a instabilidades de localização e sensibilidade espúria da malha de elementos finitos, afetando a precisão e a confiabilidade dos resultados, como mencionado por Cervenka e Cervenka (2010).

Na abordagem de fissuras discretas, a fissuração é representada por meio de elementos de interface coesivos, conectando os nós de ambos os lados da fratura e permitindo o deslocamento relativo das faces da fissura. Essa abordagem proporciona uma modelagem mais precisa da fratura, considerando o comportamento local da fissura e a interação entre as partes separadas do material. Segundo Remmers et al. (2003), essa representação se torna mais fidedigna do processo de fissuração, pois permite a análise de problemas complexos com a presença de múltiplas fissuras, incluindo fraturas ramificadas e interconectadas. Além disso, é particularmente vantajosa para descrever detalhadamente o comportamento de fratura em materiais frágeis ou com comportamento heterogêneo, onde o processo de fratura é complexo e altamente não linear.

Ao utilizar elementos de interface coesivos, essa metodologia permite uma descrição mais detalhada do comportamento da fratura, abrangendo desde formação de microfissuras até o crescimento e a coalescência de fissuras adjacentes. De acordo com Ruiz et al. (2001), essa melhor compreensão do comportamento da fratura possibilita a análise de diferentes critérios de propagação. No entanto, é válido ressaltar que a implementação bem-sucedida da abordagem de fissuras discretas requer uma discretização adequada da malha de elementos finitos e a escolha criteriosa dos parâmetros dos elementos de interface coesivos. Conforme mencionado por Moës et al. (1999), a seleção dos parâmetros dos elementos de interface, como a rigidez e a resistência, pode ter um impacto significativo nos resultados obtidos.

Um desafio importante na aplicação da técnica de fissuras discretas é que a localização das descontinuidades é definida no início da análise e permanece constante ao longo do processo. Isso significa que a abordagem não permite a propagação espontânea de fissuras ou a variação na localização das mesmas conforme a carga ou outros fatores se alteram. Esse aspecto limita o número de caminhos disponíveis para a fratura, resultando em direções de propagação influenciadas diretamente pela malha utilizada (Camacho e Ortiz, 1996)

Para superar essa limitação de forma abrangente, seria crucial obter uma estimativa inicial precisa do caminho de propagação da fissura. No entanto, como observado por Carol et al. (2011), desde que o trajeto inicial da fissura seja razoável, sua localização exata não terá um impacto decisivo na resposta macroscópica. Os autores afirmam que o comportamento macroscópico da fratura em materiais pode ser reproduzido com uma boa aproximação, mesmo quando a localização exata das fissuras não é conhecida com precisão. Essa observação é importante, pois permite a realização da análise de fratura com um nível aceitável de incerteza em relação à localização exata das fissuras.

Outra opção disponível para lidar com essa deficiência é a utilização de algoritmos que refazem automaticamente a malha, gerando as chamadas malhas adaptativas. Essa ferramenta permite o refinamento da malha de elementos finitos na região das fissuras, o que viabiliza o aumento

das possíveis direções de propagação das trincas. No entanto, é importante destacar que essa técnica apresenta algumas desvantagens, como a limitação do número de fissuras simultâneas, o aumento do custo computacional e a aplicabilidade limitada a problemas menos complexos (Camacho e Ortiz, 1996; Bažant e Planas, 1997).

Por fim, uma alternativa adicional é posicionar os elementos coesivos em todas as linhas da malha, considerando-as como possíveis caminhos para a trinca, e deixar que a tensão local guie o processo. Nesse caso, é importante ressaltar que há um significativo aumento no número de nós utilizados na análise, bem como a possibilidade de influência no trajeto da trinca caso a discretização da malha não seja adequada (Alfano et al., 2007; Carol et al., 2011).

2.3.2 - Elementos de Interfaces Coesivas

Os elementos de interfaces coesivas, ou elementos de junta, são elementos finitos específicos que possibilitam simular descontinuidades na malha de elementos finitos. Geralmente de espessura nula ou muito pequena, esses elementos podem ser utilizados para descrever o contato entre diferentes materiais ou ainda as descontinuidades existentes em um meio homogêneo. Por conta dessas características, têm sido bastante empregados em problemas envolvendo a interação solo-estrutura, concreto-rocha, concreto-reforço, entre outros (Şenol e Aytakin, 2008).

Bittencourt (1999) afirma que os elementos de interfaces coesivas possuem a finalidade de transmitir esforços entre os dois corpos ou partes do mesmo corpo entre as quais se encontra. Em estudos numéricos abordando o concreto, essa ferramenta possui ampla aplicação na modelagem de fissuras discretas, simulando o efeito de intertravamento entre agregados ou o efeito de pontes de tensão promovido pelas fibras.

Neste sentido, as interfaces coesivas permitem controlar a abertura de eventuais trincas por meio de relações constitutivas entre o deslocamento e a tensão aplicada nos elementos. Com isso, é possível representar o comportamento de fissuras por meio de uma região capaz de transmitir esforços entre suas faces. Os esforços transmitidos diminuem de forma gradual até que não haja transmissão deles entre as faces da fissura. Ao discretizar a malha de elementos finitos, juntamente com a aplicação dos elementos de interfaces coesivas, é possível mapear a propagação de trincas ao longo do contorno dos elementos, já que elementos adjacentes possuem deslocamentos independentes. Uma vez que estas forças de ligação ultrapassem os parâmetros de resistência do material, a ruptura é alcançada (Quinino, 2004). A Figura 2.21 ilustra a geração dos elementos de interfaces em uma malha.

Os modelos baseados em elementos coesivos podem ser classificados em intrínsecos e extrínsecos, dependendo de como a fissura é modelada. Na formulação intrínseca (Xu e

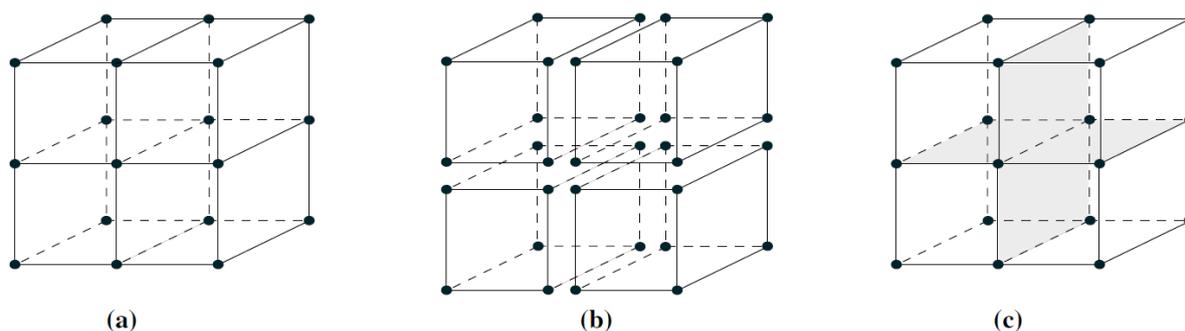


Figura 2.21 – Geração de elementos de interface: a) malha inicial; b) elementos destacados; c) malha final incluindo os elementos de interface gerados (Durand e Silva, 2021).

Needleman, 1994), os elementos coesivos são inseridos desde o início da simulação entre todos os elementos contínuos ou, pelo menos, em toda a região suscetível a fraturas, caso a trajetória da fratura não seja conhecida previamente. Nesse caso, os elementos coesivos possuem uma resposta inicial elástica, em que a tensão cresce de zero até atingir um ponto máximo, correspondente ao limiar para o início da fratura. Após esse ponto, a tensão decresce gradualmente até o estágio em que a separação das faces da fissura atinge um valor crítico, indicando a completa separação entre as faces da fratura e a ausência de tensões coesivas no material.

Por outro lado, na formulação extrínseca (Camacho e Ortiz, 1996; Ortiz e Pandolfi, 1999), os elementos coesivos são inseridos entre os elementos contínuos de forma adaptativa, utilizando algoritmos que reconstróem a malha após a previsão de falha nas interfaces dos elementos contínuos. Isso significa que quando as tensões ao longo da interface entre um par de elementos contínuos atingem um valor crítico, o elemento coesivo é inserido. Dessa forma, as fraturas podem ser iniciadas ou propagadas de acordo com a relação tensão-deslocamento relativo. Portanto, os modelos extrínsecos exigem a definição de um critério adicional que indique o início do processo de falha, evitando a simulação de um comportamento artificial antes da ocorrência da fratura. Devido a essa modificação contínua durante a execução da modelagem, os modelos extrínsecos apresentam um custo computacional adicional e requerem a identificação eficiente das faces dos elementos onde ocorrem as fraturas.

Por fim, a ampla utilização dos modelos baseados em elementos coesivos para a modelagem da fratura de diferentes materiais motivou o desenvolvimento de vários métodos de simulação (Karabataki e Hatzigogos, 2002), dos quais podem ser mencionados:

1. Elemento finito contínuo de espessura fina - *Thin continuum finite elements*, (Zienkiewicz et al., 1970);
2. Elemento de interface com espessura nula ou finita - *Interface elements with zero or finite thickness*, (Goodman et al., 1968);

3. Elemento de ligação, onde os nós opostos estão conectados entre si por molas (Ghaboussi et al., 1977).

2.4 - MODELAGEM DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

Nesta seção, são abordados aspectos fundamentais relacionados à modelagem numérica do concreto reforçado com fibras. Inicialmente, são discutidas diferentes abordagens para a inclusão das fibras no modelo de elementos finitos, com foco em aspectos relevantes para garantir uma representação precisa do comportamento do material compósito. Em sequência, são apresentados e comentados alguns modelos de tensão-deformação adotados para descrever a interação mecânica entre a matriz cimentícia e os elementos de reforço. Adicionalmente, é realizada uma breve revisão do estado da arte na simulação numérica desse tipo de compósito, com destaque para as principais contribuições da literatura científica nesse campo de estudo.

2.4.1 - Métodos Para Simulação de Inclusões

O MEF consegue representar a inclusão das fibras como elementos de reforço no concreto por meio de algumas abordagens, dentre as quais estão os métodos discreto, embutido e semi-embutido. A seguir são apresentadas pequenas descrições a respeito destas três metodologias.

Pelo *método discreto*, os nós dos elementos de reforço devem se localizar necessariamente nas facetas dos elementos sólidos que representam o concreto. Sendo assim, esta abordagem considera a hipótese de aderência perfeita entre o reforço e o concreto, desprezando o deslocamento relativo entre esses materiais. Apesar da simplicidade do conceito, o método discreto possui algumas desvantagens. Primeiramente, destaca-se a não consideração da ruptura (arrancamento) no contato entre o concreto e a fibra de aço. Em seguida, tem-se o fato de que a disposição dos reforços fica restrita à malha de elementos finitos do concreto. Além disso, ressalta-se a necessidade de geração de novas malhas sempre que houver alterações na configuração dos reforços, visto a necessidade de coincidência entre os nós. Vale destacar que a inclusão do escorregamento das fibras de aço em relação ao concreto pode ser realizada por meio da utilização dos elementos de interfaces coesivas. A Figura 2.22 mostra a representação de um elemento reforçado por meio do método discreto.

No *método embutido* não há restrição quanto à localização dos reforços. Estes podem atravessar a malha de elementos sólidos em qualquer posição, sem a obrigatoriedade de coincidência dos nós, possibilitando a representação da estrutura analisada por meio de uma única malha. Nessa metodologia, os reforços são segmentados nas interseções com as faces do elemento reforçado. Assim, a divisão desses segmentos passa a ser determinada pelos elementos sólidos

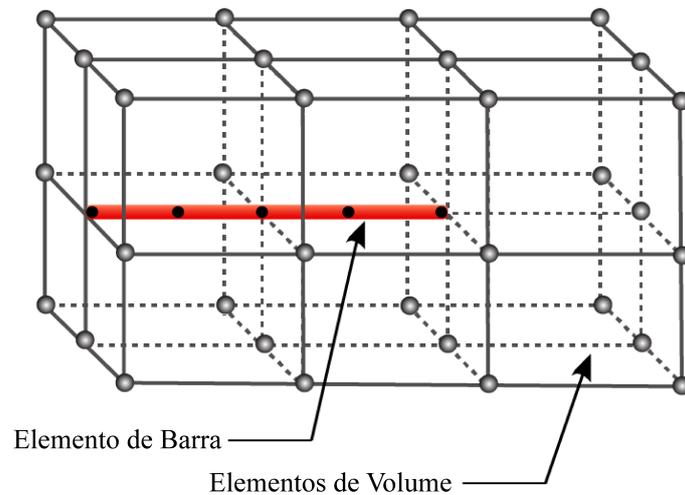


Figura 2.22 – Representação de um elemento de reforço usando o método discreto.

que o reforço atravessa, fazendo com que cada elemento sólido atravessado possua um segmento de barra embutido, que passa a contribuir com o aumento da sua rigidez (Del Río Gaitán, 2015; Faria, 2017). Essa formulação demonstra-se vantajosa para aplicação em estruturas de concreto onde a armadura tem uma distribuição complexa. Ademais, as análises realizadas por meio da representação embutida possuem maior eficiência computacional quando comparadas com a representação discreta (Yamaguchi e Ohta, 1993). A Figura 2.23 apresenta a ilustração de um elemento reforçado por meio do método embutido.

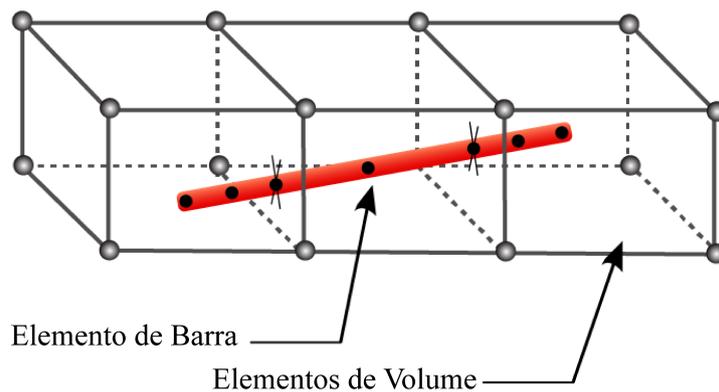


Figura 2.23 – Representação de um elemento de reforço pelo método embutido.

Por fim, o *modelo discreto combinado com elemento de contato* proposto por Durand (2008), combina características do modelo discreto e embutido. Nesta abordagem os reforços são embutidos arbitrariamente nos elementos de concreto, entretanto permanecem como elementos discretos, já que possuem nós próprios e independentes, que acabam acrescentando novos

graus de liberdade ao sistema. A conexão dos reforços com o concreto ocorre por meio de elementos de interface. Como vantagem, destaca-se a possibilidade da aplicação de condições de contorno nos elementos de reforço, possibilitando a consideração do deslocamento relativo entre o concreto e a fibra. Outro aspecto interessante dessa metodologia é o fato dos seguimentos de elementos de barra possuírem conexões entre si, permitindo que ocorra a transmissão de tensões. Desse modo, como os reforços não se encontram embutidos no elemento atravessado, torna-se possível a visualização da tensão axial ao longo do elemento das fibras.

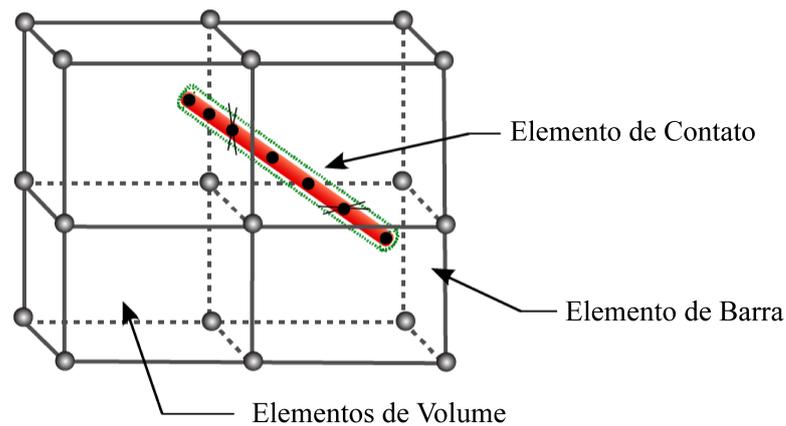


Figura 2.24 – Representação de um elemento de reforço utilizando o método discreto combinado com elementos de contato.

2.4.2 - Modelagem do Contato Aço-Concreto

Na área da engenharia, diversos cenários envolvem a interação entre superfícies de contato, sendo essencial compreender e modelar adequadamente o comportamento dessa região entre os materiais. A correta representação dessa interação é fundamental para obter respostas estruturais precisas, visto que esses efeitos influenciam significativamente o desempenho global do sistema em análise. Ao considerar os impactos da ligação entre as superfícies, é possível realizar análises mais acuradas e realistas, contribuindo para uma abordagem mais abrangente e eficaz na resolução de problemas complexos.

Modelo CEB-FIB 2010 para interface aço-concreto

Ao tratar da aderência entre o aço e o concreto, o Código Modelo CEB-FIP (2010) propõe um modelo que se baseia na relação entre a tensão de aderência e o deslizamento. Essa relação é estabelecida através de uma curva padrão, conforme apresentado na Figura 2.25. A variação da tensão de aderência é descrita como uma função segmentada, dividida em quatro partes distintas. Os pontos S_1 , S_2 e S_3 representam os valores representativos nos quais ocorrem

mudanças significativas no comportamento da relação tensão-deformação, caracterizando a mudanças das fases.

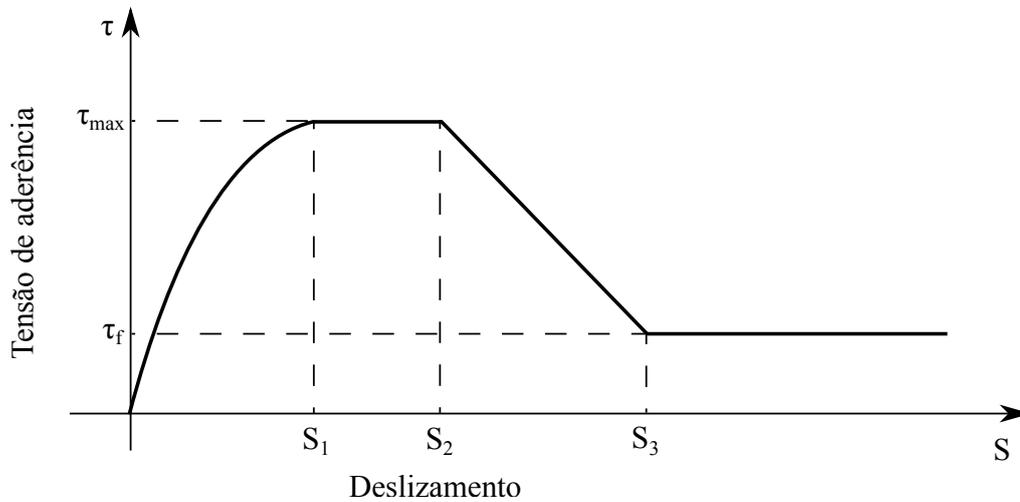


Figura 2.25 – Relação tensão-deslizamento da aderência. Adaptado de Modelo CEB-FIB (2010).

A primeira fase da curva é caracterizada pelo ramo ascendente, na qual o deslizamento S varia no intervalo de $0 \leq S \leq S_1$. Nessa fase, a tensão de aderência é dada por:

$$\tau(S) = \tau_{max} \left(\frac{S}{S_1} \right)^\alpha \quad (2.11)$$

Na equação apresentada, o símbolo τ representa a tensão cisalhante do contato entre o aço e o concreto, enquanto τ_{max} é a tensão cisalhante máxima e α é uma constante que permite calibrar a parte ascendente da curva. Na sequência, a segunda fase, correspondente ao intervalo $S_1 \leq S \leq S_2$, é caracterizada por um comportamento perfeitamente plástico, expresso como:

$$\tau(S) = \tau_{max} \quad (2.12)$$

Na terceira fase, onde os valores de deslizamento estão contidos no intervalo $S_2 \leq S \leq S_3$, ocorre um decréscimo linear da tensão cisalhante à medida que o deslizamento aumenta, até alcançar o valor da tensão residual τ_f , conforme expresso por:

$$\tau(S) = \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left(\frac{S_1 - S_2}{S_3 - S_2} \right) \quad (2.13)$$

Por fim, após atingir o deslizamento S_3 , onde $S_3 < S$, a tensão novamente exibe um comportamento perfeitamente plástico, sendo descrito por:

$$\tau(S) = \tau_f \quad (2.14)$$

Modelo de aderência-deslizamento cíclico (Durand et al., 2021).

Continuando a discussão sobre a aderência entre esses materiais, Durand et al. (2021) propuseram um modelo baseado na envoltória monótona do Código Modelo CEB-FIP (2010) e no modelo cíclico apresentado por Juan Murcia-Delso e Shing (2013). A característica cíclica dessa abordagem possibilita a variação das propriedades do elemento de reforço, simulando zonas ancoradas e zonas de deslizamento livre. Nessa formulação, a resistência ao cisalhamento é representada por uma função composta, definida como:

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \tau_{\max} \left(\frac{s}{s_{\text{peak}}} \right)^{\alpha} && \text{para } s \leq s_{\text{peak}}, \\ \tau(s) &= \tau_{\max} && \text{para } s_{\text{peak}} < s \leq 1,1s_{\text{peak}}, \\ \tau(s) &= \tau_{\max} - (\tau_{\max} - \tau_{\text{res}}) \times \left(\frac{s - 1,1s_{\text{peak}}}{s_{\text{res}} - 1,1s_{\text{peak}}} \right)^{\beta} && \text{para } 1,1s_{\text{peak}} < s \leq s_{\text{res}} \text{ e} \\ \tau(s) &= \tau_{\text{res}} && \text{para } s_{\text{res}} < s. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nessas equações, τ_{\max} denota a resistência de cisalhamento máxima, enquanto τ_{res} representa a resistência de cisalhamento residual. Os parâmetros α e β caracterizam a curvatura dos ramos ascendente e descendente, respectivamente. Adicionalmente, s_{peak} e s_{res} são valores característicos de deslocamento conforme ilustrado na Figura 2.26. Em condições elásticas, as variações de deslizamento e tensão de cisalhamento são relacionadas por meio da rigidez elástica k_s . É relevante destacar que todos esses parâmetros podem ser determinados a partir dos resultados dos ensaios de arrancamento.

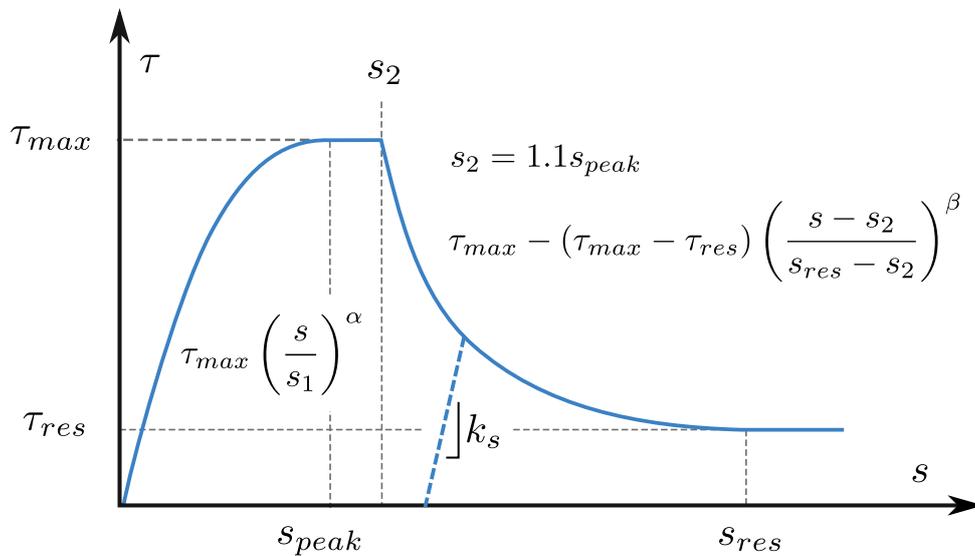


Figura 2.26 – Representação do modelo tensão-deslizamento proposto por Durand et al. (2021).

2.4.3 - Estudos Numéricos do Concreto Reforçado com Fibras de Aço

Esta seção proporciona uma análise concisa e atualizada das pesquisas numéricas recentes no âmbito do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), abrangendo os últimos cinco anos. O foco dessa análise está direcionado às diversas estratégias de modelagem empregadas para compreender e descrever as características mecânicas desse compósito. O intuito, nesse sentido, não se limita a mapear as contribuições recentes para o avanço do conhecimento, mas também a elucidar as abordagens analíticas adotadas, contemplando aspectos como o impacto da orientação das fibras, as interações nas interfaces e as modalidades complexas de falha. Por meio dessa explanação, busca-se conferir maior clareza ao panorama atual da pesquisa nesse campo e enfatizar o progresso das técnicas numéricas no entendimento das complexidades subjacentes ao comportamento estrutural do concreto reforçado com fibras de aço.

Inicialmente, o estudo conduzido por Zhang et al. (2018) evidencia os intrincados padrões de falha que permeiam os compósitos cimentícios reforçados com fibras, englobando a ruptura das fibras, a fissuração da argamassa, o esmagamento e o descolamento, bem como o desprendimento interfacial entre a fibra e a matriz cimentícia. Os autores ressaltam que a maioria dos modelos numéricos existentes até então não é capaz de reproduzir esses padrões de falha, que podem ocorrer de maneira simultânea ou sequencial em uma amostra, principalmente devido às complexidades na geração de malhas de elementos finitos com um grande número de fibras.

Nesse contexto, o estudo propõe uma abordagem de modelagem acoplada discreto-contínua por elementos finitos, com o objetivo de simular de maneira eficaz todos os principais padrões de falha. Para atingir esse propósito, o modelo de plasticidade danificada contínua é empregado na simulação do comportamento de dano e fratura da matriz, ao passo que o descolamento das interfaces fibra-matriz é modelado por meio de elementos interfaciais coesivos não lineares. A validação da abordagem de modelagem é obtida por meio da simulação de testes de arrancamento de fibra única com diferentes ângulos de inclinação, ensaios de tração direta com e sem entalhe e ensaios de flexão em viga de três pontos com múltiplas fibras distribuídas aleatoriamente.

No trabalho desenvolvido por Lamus et al. (2019) é proposto um modelo numérico bidimensional que trata a relação entre os campos de tensão e deformação do CRFA por meio da teoria da mistura. Nessa investigação, a matriz de concreto é representada por um modelo constitutivo de dano escalar, caracterizado por deformações e resistências distintas em tração e compressão. No que concerne às fibras de aço, sua deformação mecânica e o deslizamento relativo são simultaneamente descritos por meio de um modelo constitutivo de plasticidade unidimensional. A ocorrência de fissuração no material compósito é indicada por um salto no campo de deslocamento, bem como por valores não limitados no campo de deformação,

ambos retratados pela Abordagem de Descontinuidade Forte do Contínuo.

O modelo foi implementado no contexto da análise não linear utilizando o Método dos Elementos Finitos, empregando elementos triangulares de deformação constante. Adicionalmente, a distribuição e orientação das fibras são sujeitas a mudanças aleatórias em cada elemento finito e em cada simulação ou observação. A inovação central desse trabalho reside na conjugação de um procedimento numérico determinístico para a obtenção da resposta estrutural de elementos CRFA e um procedimento estocástico para incorporar a aleatoriedade na orientação e distribuição das fibras de aço. Isso viabiliza a determinação do intervalo de confiança da resposta estrutural estatística através das simulações numéricas.

A pesquisa realizada por Bitencourt Jr et al. (2019) apresenta uma abordagem numérica que se baseia no acoplamento de elementos finitos com uma representação discreta e explícita das fibras de aço. Nesse contexto, o material compósito é conceituado como composto por três fases distintas: o concreto, as fibras discretas descontínuas e a interface entre as fibras e a matriz. A modelagem das fibras de aço é executada por meio de elementos finitos de dois nós (elementos treliçados), os quais adotam um modelo constitutivo elastoplástico unidimensional. Para capturar o comportamento complexo e não linear da interface fibra-matriz, uma técnica de acoplamento não rígido é proposta, empregando um modelo constitutivo de dano para descrever a relação entre a tensão de cisalhamento (tensão de aderência) e o deslizamento relativo entre a matriz e cada fibra individualmente. Além disso, o comportamento do concreto em situações de tração e compressão é abordado por meio de um modelo de dano isotrópico que incorpora duas variáveis de dano escalares independentes.

Como resultado conclusivo, os autores enfatizam que o método proposto possibilita a geração independente de malhas de elementos finitos para o concreto e para o conjunto de fibras, evitando a necessidade de modelos homogeneizados e malhas perfeitamente conformes. Além disso, o esquema de integração implícito-explícito adotado no estudo demonstrou-se robusto, não apresentando quaisquer problemas de convergência durante as análises não lineares. Por fim, ressalta-se a relevância de considerar de forma separada os principais fatores que influenciam o comportamento do CRFA.

Por sua vez, Chu e Kwan (2019) empreenderam uma análise focada nos impactos da inclusão de fibras de aço nas propriedades de aderência das barras de aço, através da realização de testes de extração de barras embutidas no CRFA. A partir das observações obtidas, um novo modelo de aderência de barras de aço destinado ao contexto do CRFA foi desenvolvido, representando uma modificação do modelo preexistente aplicado ao concreto simples, como estabelecido no Modelo Code 2010.

Além de incorporar os efeitos das fibras de aço para contemplar a aplicação específica do CRFA, é adotada uma rigidez inicial de aderência finita, em contraposição à rigidez inicial infinita

presente no Modelo Code 2010. Essa escolha visa proporcionar uma abordagem mais realista na análise do comportamento aderência-deslizamento. Os coeficientes presentes no novo modelo foram determinados através da análise dos resultados experimentais obtidos nesse estudo, bem como por meio de dados previamente documentados na literatura científica.

O modelo de aderência desenvolvido oferece formulações que permitem a previsão da resistência de aderência, da rigidez de aderência e da tenacidade de aderência, tanto para o concreto simples quanto para o CRFA. Em última análise, a fórmula estabelecida para a previsão da resistência de aderência demonstra que a interação entre a resistência do concreto e as propriedades das fibras de aço gera um efeito sinérgico sobre a resistência de aderência das barras de aço.

A contribuição de Carvalho et al. (2020) apresentou uma formulação para a incorporação de fibras discretas e fissuras em elementos finitos. Nesse enfoque, as fibras são capazes de interagir com as fissuras e são modeladas sem a necessidade de introdução de graus de liberdade adicionais. Além disso, uma lei constitutiva abrangente foi proposta para modelar de forma direta os dois modos de falha possíveis das fibras: o arrancamento e a ruptura por tração.

No que concerne ao efeito de costura proporcionado pelas fibras que atravessam trincas ativas, a relação de arrancamento é sensível à largura da trinca vigente, orientação da fibra, bem como às propriedades mecânicas e geométricas pertinentes à fibra e à qualidade da matriz circundante. O deslocamento causado pelas aberturas de trincas é transmitido ao material adjacente como um movimento de corpo rígido. Importante destacar que as fibras são ativadas somente quando diretamente cruzadas por trincas com larguras que excedem o comprimento de engate. Dessa forma, apenas uma fração reduzida do total de fibras necessita ser explicitamente considerada nas simulações, tornando o modelo apto para lidar com um número significativo de fissuras discretas. Tal abordagem permite capturar de maneira adequada tanto as respostas estruturais locais quanto globais, como afirmam os autores em suas conclusões.

Uma análise adicional realizada por Chen et al. (2021) buscou investigar o impacto da orientação das fibras de aço em múltiplas escalas, através da execução de ensaios de arrancamento de fibras inclinadas em ambos os lados e ensaios de tração. Mediante as observações obtidas dos experimentos, os autores elaboraram um modelo numérico fundamentado no Modelo de Partículas Discretas de Treliça, considerando o efeito de costura proporcionado pelas fibras.

Os resultados indicam que tanto os testes de arrancamento de fibras quanto os testes de tração do CRFA demonstram que o ângulo de inclinação das fibras em relação à direção de tração, variando de 0° a 60° , ocasiona um incremento na ductilidade. Nesse sentido, foi constatado que o CRFA com um teor de fibras mais reduzido e com orientações distintas apresentou maior capacidade de dissipação de energia quando comparado ao CRFA com um teor de fibras mais

elevado. Ademais, a importância da orientação das fibras foi ressaltada quanto ao comportamento de deslizamento, aderência e às propriedades de tração do CRFA. Emerge desse contexto a noção de que o controle da orientação das fibras pode proporcionar o desenvolvimento de um CRFA economicamente viável, porém com desempenho aprimorado.

Por outro lado, a pesquisa empreendida por Naderi e Zhang (2022) empreendeu uma investigação sobre o processo de fratura no concreto reforçado com fibras de aço em situações de tração e compressão uniaxial. Isso foi realizado com base na aplicação de um modelo híbrido de dano, que incorporou tanto os métodos de elementos coesivos quanto de plasticidade de dano. Nesse contexto, uma abordagem de elementos finitos de custo computacional reduzido foi formulada, visando à simulação do comportamento de fratura do CRFA, contemplando aspectos como resposta tensão-deformação, dissipação de energia e morfologia das fissuras.

A mesoestrutura tridimensional empregada engloba componentes como argamassa, agregados, vazios, fibras e a zona de transição interfacial (ITZ), todos com propriedades estruturais realistas e parâmetros geométricos controláveis. Os resultados obtidos revelaram que, sob determinadas condições, as fibras de configuração reta e as fibras com extremidades ancoradas conferiram melhorias substanciais, superando em mais de 11,5% as tolerâncias de dano à compressão do concreto. Por outro lado, as fibras em espiral evidenciaram um efeito insignificante de apenas 2,6%. O índice de nível de macrodano em situações de tração foi reduzido em mais de 15% com o emprego de todas as tipologias de fibras. Quando comparadas às fibras retas, a maior capacidade de ancoragem das fibras em espiral foi associada a uma redução no desempenho do reforço, ao passo que as fibras com extremidades ancoradas em formato de gancho não apresentaram uma influência significativa.

O estudo realizado por Zhang et al. (2023) concebeu um método numérico que se baseia em malhas não conformes entre as fibras e a matriz de argamassa cimentícia. O comportamento de aderência-deslizamento interfacial é abordado de forma explícita através da introdução de elementos de interface coesiva de espessura negligenciável entre as fibras e suas réplicas, utilizando as denominadas "fibras de sombra" tal como propostas na pesquisa. As fibras de sombra são, então, vinculadas à matriz da argamassa subjacente por intermédio de uma técnica de acoplamento previamente proposta na literatura, assegurando a congruência de deslocamento e transferência de forças.

Os danos e fraturas na matriz de argamassa são devidamente capturados pelo emprego do modelo de plasticidade de dano do concreto, ao passo que as fibras são representadas por elementos de viga finitos que obedecem a relações constitutivas elastoplásticas. A validação da abordagem proposta foi realizada por meio de testes de arrancamento de fibra única, análises de peças de ensaio de tração com entalhe contendo ponte de fibra única e avaliações de tração

direta em amostras de concreto reforçado com fibra de ultra-alto desempenho contendo fibras de distribuição aleatória.

As conclusões do estudo destacam que os testes típicos de arrancamento de fibra única foram efetivamente modelados, considerando diferentes ângulos de inclinação (0° , 30° e 60°), demonstrando boa concordância com modelos que empregam malhas conformes e com os resultados experimentais. Isso é evidenciado através da análise das curvas de força-deslizamento e do comportamento de amento da matriz de argamassa. A observação crucial é que o pico de carga de arrancamento foi alcançado a 30° , em contrapartida aos ângulos de 0° e 60° , principalmente devido ao efeito de amortecimento proporcionado pelas fibras inclinadas, associado à flexão das fibras e ao lascamento da matriz. Uma limitação ressaltada é que o modelo está atualmente confinado a análises bidimensionais, sendo relevante notar que os padrões de falha podem ser substancialmente influenciados pela distribuição tridimensional real das fibras e pela propagação das trincas fora do plano.

Por sua vez, a abordagem empreendida por Huang et al. (2023) compreendeu uma série de experimentos de flexão em três pontos com o propósito de examinar o impacto do conteúdo de fibras nas características de fratura do concreto reforçado com fibras de aço, notavelmente aquelas com extremidades em gancho. A partir desses experimentos, uma abordagem numérica meso foi concebida, empregando o método dos elementos finitos coesivos/volumétricos. O objetivo central era capturar de forma precisa a fratura generalizada ao longo de trajetórias não preestabelecidas. Essa abordagem abarcou tanto a relação de aderência-deslizamento quanto a relação de tração-separação na interface entre as fibras e o concreto.

Subsidiado pelo modelo meso proposto, diversos testes numéricos foram conduzidos com o intuito de explorar a influência do ângulo de separação no fenômeno de ponteamto das fibras. A partir dos resultados experimentais, constatou-se que a capacidade de sustentação proveniente do efeito de ponteamto das fibras estabeleceu uma correlação linear com o teor de fibras. Essa associação foi especialmente evidenciada na fase de platô pós-pico nas curvas de carga-deslocamento. Contudo, vale ressaltar que o teor de fibras teve uma influência mínima na ductilidade da mencionada fase de platô pós-pico nas curvas de carga-deslocamento.

Analisando os resultados obtidos com o modelo meso, foi possível verificar que o ângulo de separação da interface de fratura do concreto reforçado com fibras de aço apresentou uma influência discreta no fenômeno de ponteamto das fibras. As configurações das curvas de carga-deslocamento interfacial com diferentes ângulos de separação exibiram semelhanças, embora houvesse uma leve discrepância no valor da carga máxima. Essa discrepância decorreu da alteração do modo de falha predominante nas fibras em função da variação do ângulo de separação.

No mesmo âmbito, Sarraz et al. (2023) apresentaram um modelo de mesoescala para o concreto

reforçado com fibras de aço (CRFA) fundamentado no Modelo de Molas de Corpo Rígido em 3D (*RBSM - Rigid Body Spring Model*), visando contemplar tanto as variações morfológicas das fibras (sejam elas retas ou com extremidades em gancho) quanto a sua orientação dentro do compósito. Nesse enfoque, as fibras de aço foram distribuídas no sistema de malha Voronoi do *RBSM*, sendo que nas interfaces onde a malha Voronoi é atravessada por fibras discretas, uma mola de dimensão nula foi aplicada. Tal mola foi projetada para transferir as cargas de tração da fibra aos nós mais próximos no *RBSM*. O modelo atribuiu uma relação de aderência-deslizamento local à fibra reta, enquanto a fibra de extremidade em gancho teve sua ação mecânica modelada adicionalmente. As capacidades do modelo se estenderam a prever tanto a resposta macroscópica quanto a ocorrência de fissuras no CRFA com diferentes tipos de fibras (reta ou de extremidade em gancho) sob carregamento de tração direta e flexão.

As conclusões do estudo salientaram que a orientação das fibras e o processo de lascagem da matriz, em resposta à componente de cisalhamento resultante da carga aplicada às fibras, surgiram como fatores fundamentais que influenciam o comportamento dos espécimes de CRFA, independentemente da morfologia das fibras. Entretanto, o estudo reconhece a existência de limitações relacionadas à ausência de critérios avançados para considerar efeitos decorrentes do emaranhamento das fibras, sugerindo uma possível direção para futuras investigações.

Finalmente, o estudo conduzido por Wu et al. (2023) elaborou um modelo mesoscópico tridimensional de quatro fases para investigar as propriedades compressivas do (CRFA). O modelo compreendeu agregados graúdos, argamassa, fibras de aço e zona de transição interfacial. A fim de alcançar maior precisão, foram utilizados modelos tridimensionais aleatórios dos agregados, caracterizados por superfície rugosa e formas angulares afiadas. Além disso, três tipos de fibras de aço (retas, ancoradas e espirais) foram incorporados no modelo. Através de um método de malha em duas etapas e uma técnica de acoplamento, foi desenvolvido um modelo de elemento finito para simular o comportamento compressivo do CRFA. As análises incluíram padrões de falha, curvas tensão-deformação e processos de fissuração. Os resultados indicaram que as fissuras no CRFA se originaram a partir de microfissuras na zona de transição interfacial, seguidas por macrofissuras que se propagaram na matriz de argamassa e foram contidas ou impedidas pelas fibras de aço circundantes. Considerando os resultados experimentais, o modelo mesoscópico proposto demonstrou ser altamente confiável na análise da resistência e padrões de danos do concreto reforçado com fibras de aço.

3 - METODOLOGIA

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia empregada para o desenvolvimento da pesquisa. Inicialmente, aborda-se a formulação utilizada para a implementação dos elementos coesivos, os quais são essenciais para a modelagem da fratura. Em seguida, são descritos os modelos constitutivos utilizados para simular o comportamento do concreto e sua interação com as fibras de aço. Ao final, são detalhados o processo de criação das malhas, incluindo o algoritmo para a geração das fibras, bem como o procedimento para a realização das simulações.

No que diz respeito aos modelos constitutivos empregados, destaca-se que os elementos volumétricos, representando a matriz de concreto, são tratados utilizando o modelo elástico linear, enquanto as fibras de aço são modeladas pelo modelo elástico perfeitamente plástico. Ambas as abordagens têm ampla discussão na literatura e, portanto, não são abordadas em detalhes neste trabalho. Modelos semelhantes têm sido utilizados para a simulação de concretos reforçados, conforme evidenciado em estudos anteriores (Nogueira et al., 2013; Tamayo et al., 2013; Ribeiro et al., 2020; Ortega et al., 2021). Assim, o foco recai sobre o modelo constitutivo adotado para os elementos coesivos, que desempenham papel crucial na simulação do processo de fissuração e perda de resistência do concreto, bem como na interação entre o concreto e as fibras de aço. Por fim, é crucial destacar que as formulações aqui abordadas estão apresentadas de forma resumida, sendo aconselhável consultar os trabalhos originais dos respectivos autores para uma compreensão mais aprofundada.

3.1 - FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA DOS ELEMENTOS COESIVOS

Elementos coesivos são elementos de contato com espessura zero ou negligenciável inseridos entre elementos sólidos de uma malha para criar trajetórias potenciais de fratura no domínio. Nesta seção, será descrita a formulação convencional dos elementos coesivos apresentada no trabalho de Durand e Silva (2021).

A Figura 3.1 apresenta um elemento coesivo com oito nós. À esquerda, ele pode ser visto no sistema de coordenadas global (x, y, z) , enquanto à direita, é exibido em um espaço paramétrico (ξ, η) . Este elemento apresenta três deslocamentos por nó e um total de 24 graus de liberdade. O vetor de deslocamentos para o elemento pode ser expresso como:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{z1} & u_{x2} & u_{y2} & u_{z2} & \dots & u_{x8} & u_{y8} & u_{z8} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

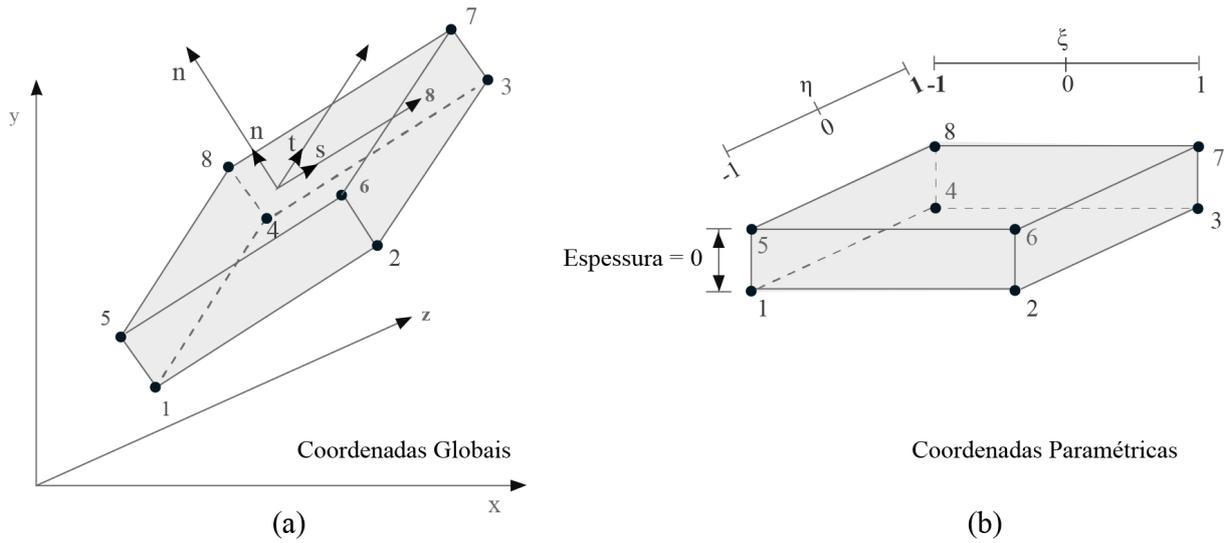


Figura 3.1 – Elemento coesivo de oito nós: (a) sistema de coordenadas global (x, y, z) e referência local dada pelos vetores \mathbf{n} , \mathbf{s} e \mathbf{t} ; (b) sistema de coordenadas paramétricas (ξ, η) (Durand e Silva, 2021).

Considerando o deslocamento relativo entre as faces de um elemento coesivo, é definido para cada ponto um vetor de deslocamentos relativos nas coordenadas paramétricas (ξ, η) como $\mathbf{W} = (w_n, w_s, w_t)$. O valor de \mathbf{w} pode ser obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{W}(\xi, \eta) = \mathbf{T}(\xi, \eta) \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{U} \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ é uma matriz de interpolação e $\mathbf{T}(\xi, \eta)$ é uma matriz de rotação usada para expressar deslocamentos globais no sistema de referência local. A matriz de rotação pode ser calculada da seguinte como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Aqui, n_i , s_i e t_i são as componentes dos vetores \mathbf{n} , \mathbf{s} e \mathbf{t} , respectivamente. Por sua vez, a matriz de rotação \mathbf{T} pode ser obtida a partir da matriz jacobiana de um elemento quadrilateral, definida como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A matriz Jacobiana é não quadrada devido à transformação entre os sistemas (x, y, z) e (ξ, η) .

Cada linha da matriz Jacobiana representa um vetor tangente à superfície da face, possibilitando encontrar os vetores \mathbf{n} , \mathbf{s} e \mathbf{t} de forma que sejam perpendiculares. Quanto à matriz de interpolação de deslocamento \mathbf{N} , ela é definida por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & \dots & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & \dots & 0 & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & \dots & 0 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde N_1 , N_2 , N_3 e N_4 são as funções de forma utilizadas para um elemento quadrilateral. A Equação 3.2 pode ser escrita em forma incremental como mostrado abaixo. Para maior clareza, os símbolos ξ e η foram omitidos.

$$\Delta \mathbf{W} = \mathbf{T} \mathbf{N} \Delta \mathbf{U} \quad (3.6)$$

O estado de tensão em cada ponto ao longo do elemento coesivo é representado pelo vetor $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_n, \tau_s, \tau_t]$, onde σ_n , τ_s e τ_t representam as componentes de tensão nas direções \mathbf{n} , \mathbf{s} e \mathbf{t} , respectivamente. Os incrementos nas componentes de tensão $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ estão relacionados aos incrementos dos deslocamentos relativos $\Delta \mathbf{W}$ por meio de uma matriz constitutiva \mathbf{D} :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{W} \quad (3.7)$$

A matriz constitutiva \mathbf{D} pode ser elástica (\mathbf{D}^e) ou elasto-plástica (\mathbf{D}^{ep}), dependendo das características da interface que se pretende simular. Assim, a partir das formulações já expostas, é possível utilizar um procedimento convencional de elementos finitos para obter a matriz de rigidez de um elemento coesivo como:

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (3.8)$$

em que $\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{N}$.

É importante destacar que os elementos coesivos são empregados para capturar o comportamento não linear do concreto, possibilitando a ocorrência de falha tanto em tração quanto em cisalhamento. No entanto, o modelo proposto não leva em consideração explicitamente o comportamento não linear dos elementos volumétricos, assumindo que eles apresentam uma resposta elástica linear.

3.2 - MODELAGEM CONSTITUTIVA DO CONCRETO

O modelo 3D constitutivo do elemento coesivo proposto por Durand et al. (2023) é uma extensão de um modelo anterior apresentado por Durand e Silva (2019), com uma modificação significativa consistindo na implementação de uma função de escoamento curva. Essa função abrange inicialmente tanto os círculos de Mohr de tração quanto de compressão, proporcionando uma representação mais precisa da resistência do material. Além disso, o modelo permite a redução da resistência movendo a ponta da função de escoamento e aproximando os ramos da curva. Aqui será apresentado um resumo dessa formulação, que é fundamentada na teoria da plasticidade e incorpora uma regra de fluxo não associada. A função de escoamento (Figura 3.2) é definida por:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{max}) = \beta(\sigma_{max})(\sigma_n - \sigma_{max}) + \left(\frac{\tau^2}{f_t^2}\right)^\alpha = 0 \quad (3.9)$$

Em que, de acordo com Durand et al. (2023), α pode ser aproximado como:

$$\alpha = 1,2 + 0,1\sqrt{\frac{|f_c|}{f_t}} \quad (3.10)$$

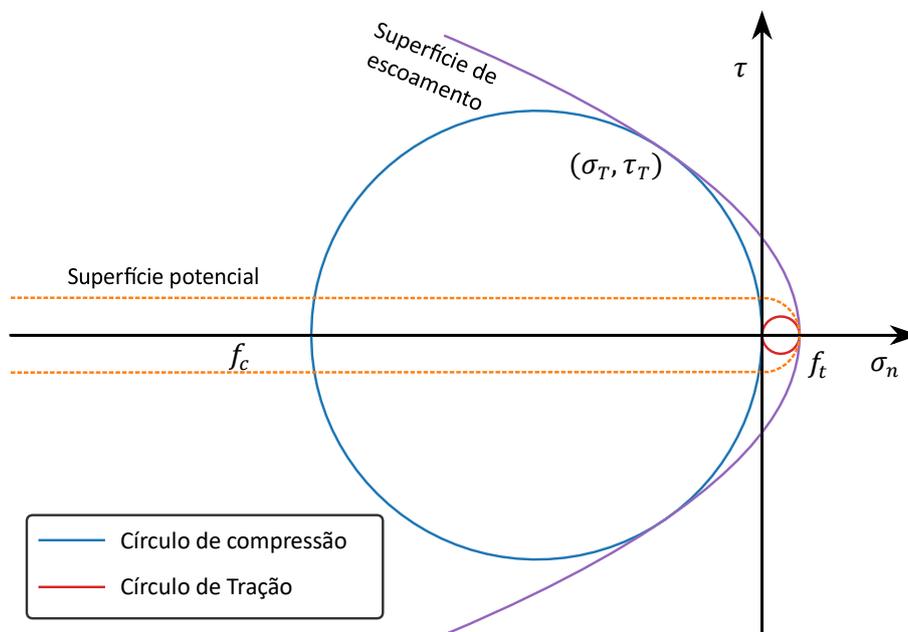


Figura 3.2 – Representação das funções de escoamento e potencial, acompanhadas pelos círculos de Mohr de compressão e tração (Durand et al., 2023)

Durante a análise, a resistência máxima à tração registrada, σ_{max} , é utilizada como a variável interna de enfraquecimento. O expoente α é um parâmetro de entrada que possibilita a criação

de uma função de escoamento curva (exponencial) que engloba as resistências f_t e f_c , representadas pelos círculos de Mohr de tração e compressão, respectivamente. Por outro lado, o parâmetro β é empregado para ajustar o tamanho da função de escoamento com base em σ_{max} , e é definido como:

$$\beta(\sigma_{max}) = \left(\beta_{res} + (\beta_{ini} - \beta_{res}) \left(\frac{\sigma_{max}}{f_t} \right) \right)^\theta \quad (3.11)$$

Aqui, θ é um parâmetro que determina a taxa de modificação da função de escoamento. O termo β_{res} na Eq. 3.11 representa o valor residual para β , que é assumido como uma fração de β_{ini} , denotada por $\beta_{res} = \gamma\beta_{ini}$. O valor de β_{ini} é dado por:

$$\beta_{ini} = \frac{\left(\frac{\tau_T^2}{f_t^2} \right)^\alpha}{f_t - \sigma_T} \quad (3.12)$$

Onde σ_T e τ_T são as coordenadas do ponto de interseção entre o círculo de Mohr de compressão e a superfície de escoamento. Essas coordenadas são determinadas da seguinte forma:

$$\sigma_T = \frac{2\alpha f_t + \alpha f_c - f_c - \sqrt{\alpha^2 f_c^2 - 4\alpha^2 f_c f_t + 4\alpha^2 f_t^2 - 2\alpha f_c^2 + f_c^2}}{4\alpha - 2} \quad (3.13)$$

$$\tau_T = \sqrt{\alpha(2\sigma_T - f_c)(f_t - \sigma_T)} \quad (3.14)$$

A função potencial plástica (ver Figura 3.2) é expressa como a função composta:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{max}) = \begin{cases} \tau^2 - \sigma_{max}^2 = 0 & \text{para } \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_{max}^2 = 0 & \text{para } \sigma_n > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

A variável interna $\sigma_{max} = \sigma_{max}(u_p)$ determina a posição do vértice da superfície de escoamento e simula a redução de resistência causada pelo surgimento e propagação das fissuras. O deslocamento relativo plástico efetivo (u_p) é definido como:

$$u_p = \int_0^t \left\| \dot{\mathbf{W}}_p \right\| dt = \int_0^t \sqrt{\dot{W}_{np}^2 + \dot{W}_{sp}^2 + \dot{W}_{tp}^2} dt \quad (3.16)$$

Na formulação, o vetor $\dot{\mathbf{W}}_p = [\dot{W}_{np}, \dot{W}_{sp}, \dot{W}_{tp}]$ representa as taxas de deslocamentos relativos no sistema local (n, s, t). A integração é idealizada ao longo de um incremento de carga de

duração t .

A relação entre σ_{max} e u_p é dada pelas curvas tensão-deslocamento. Hordijk (1992) propôs uma curva que depende apenas de dois parâmetros: f_t , que corresponde a σ_{max}^0 , e a abertura crítica u_c , definida como a magnitude da abertura de fissura em que todas as tensões de contato cessam completamente, sendo um parâmetro obtido de forma experimental. A curva de amolecimento de Hordijk é expressa da seguinte forma (ver Figura 3.3):

$$\sigma_{max}(u_p) = \begin{cases} \left[\left(1 + 27 \left(\frac{u_p}{u_c} \right)^3 \right) e^{-6,93 \frac{u_p}{u_c}} - 28 \frac{u_p}{u_c} e^{-6,93} \right] f_t, & \text{para } u_p \leq u_c \\ 0 & \text{para } u_p > u_c \end{cases} \quad (3.17)$$

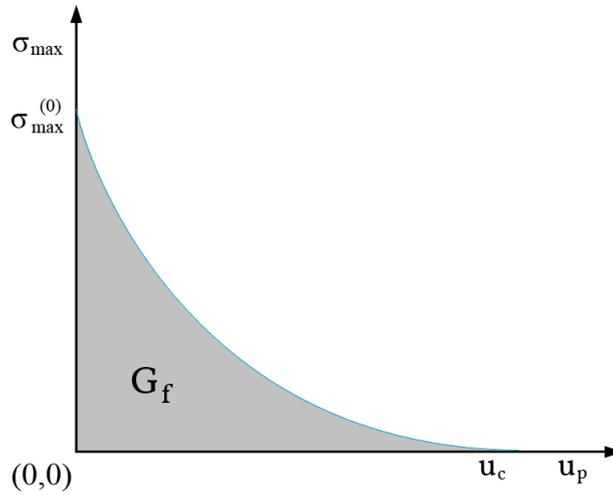


Figura 3.3 – Curva de amolecimento de Hordijk

A energia de fratura, representada por G_f , pode ser expressa em termos dos parâmetros u_c e f_t por meio da integração da Equação 3.17, resultando na relação $G_f = 0.1943 f_t u_c$.

3.2.1 - Matriz constitutiva

A matriz constitutiva D , que relaciona o vetor de incremento de deslocamento relativo \dot{W} ao vetor de incremento de tensão $\dot{\sigma}$ em um ponto de integração do elemento coesivo, é dada pela seguinte expressão no regime elástico:

$$D_e = \begin{bmatrix} \bar{k}_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Em que \bar{k}_n e k_t são componentes nas direções normal e tangencial, respectivamente. Esses coeficientes são definidos da seguinte forma:

$$\bar{k}_n = E \frac{\zeta}{h} \text{ e } k_t = G \frac{\zeta}{h} \quad (3.19)$$

Nessa formulação, h representa o comprimento representativo dos elementos volumétricos, E é o módulo de elasticidade do material, G é o módulo de cisalhamento e ζ é um fator de penalidade utilizado para controlar os deslocamentos relativos elásticos.

Conforme descrito por Durand e Silva (2019), a incorporação de elementos coesivos em uma malha convencional aumenta a flexibilidade do domínio, introduzindo graus adicionais de liberdade e a deformabilidade desses elementos. Para reduzir a dependência da malha e obter resultados confiáveis em análises de refinamento, é fundamental estabelecer uma correlação entre a rigidez dos elementos coesivos e o tamanho dos elementos volumétricos vizinhos. Para abordar essa questão, é atribuído a cada elemento coesivo um comprimento representativo que é calculado durante uma etapa de pré-processamento. Essa abordagem permite a determinação independente do fator de deslocamento elástico ζ , considerando a densidade da malha e os refinamentos locais. Como resultado, essa abordagem proporciona um melhor controle sobre os deslocamentos relativos dos elementos coesivos.

Considerando a malha apresentada na Figura 3.4, o valor de h para os elementos sombreados é calculado considerando dois elementos prismáticos com volumes equivalentes, V_1 e V_2 . Isso permite calcular duas larguras equivalentes: ($h_1 = V_1/A$) e ($h_2 = V_2/A$). O comprimento representativo é dado pela média destes valores:

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (3.20)$$

Ao considerar o parâmetro ζ , é importante escolher seu valor adequadamente para garantir deslocamentos relativos negligenciáveis no regime elástico. A utilização de valores pequenos resulta em malhas mais flexíveis, enquanto valores excessivamente altos resultam em coeficientes de rigidez elevados, o que pode causar problemas de condição inadequada nos sistemas de equações. De acordo com Durand e Silva (2021), após a realização de ensaios numéricos, um valor de $\zeta = 5$ é recomendado para minimizar os deslocamentos elásticos e mitigar possíveis problemas numéricos.

No regime elastoplástico, a matriz constitutiva D_{ep} é formulada com base nos princípios da teoria da plasticidade. Nesta formulação, os deslocamentos relativos incrementais em um ponto ao longo do elemento coesivo são expressos como o efeito combinado dos componentes elástico

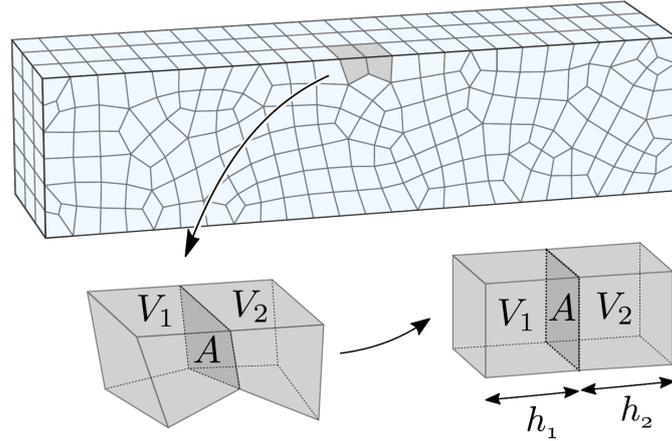


Figura 3.4 – Cálculo do comprimento representativo dos elementos de volume em uma malha não estruturada (Durand e Silva, 2019).

e plástico:

$$\dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{W}}_e + \dot{\mathbf{W}}_p \quad (3.21)$$

O cálculo do incremento dos deslocamentos relativos plásticos é realizado utilizando a regra de fluxo, a qual pode ser expressa da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{W}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{r} \quad (3.22)$$

onde $\mathbf{r} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ é um vetor normal à superfície potencial g , e $\dot{\lambda}$ é o multiplicador plástico. O incremento do deslocamento plástico relativo efetivo é dado pela seguinte equação:

$$\dot{u}_p = \left\| \dot{\mathbf{W}}_p \right\| = \dot{\lambda} \|\mathbf{r}\| \quad (3.23)$$

Ao aplicar a condição de consistência e isolar o incremento do multiplicador plástico, obtém-se a seguinte expressão:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{W}}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \mathbf{r} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{max}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{max}}{\partial u_p} \|\mathbf{r}\|} \quad (3.24)$$

Em que $\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$. Finalmente, a matriz constitutiva elastoplástica \mathbf{D}_{ep} é calculada utilizando a seguinte equação:

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e r v^T D_e}{v^T D_e r - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \|r\|} \quad (3.25)$$

3.2.2 - Atualização das tensões

Considerando uma análise incremental iterativa, dado o vetor de tensão atual representado por σ^n e o incremento dos deslocamentos relativos em um ponto de integração, o processo de atualização das tensões começa com o cálculo do vetor de tensão tentativa, denotado por σ^{tr} :

$$\sigma^{tr} = \sigma^n + D_e \Delta W \quad (3.26)$$

Posteriormente, a função de escoamento é avaliada em σ^{tr} por meio do seu sinal para determinar se o atual incremento é elástico ($f \leq 0$) ou elastoplástico ($f \geq 0$). No caso de incrementos elásticos, o que inclui condições de descarregamento/re carregamento, o vetor de tensão σ^{n+1} é considerado igual a σ^{tr} . Para carregamentos elastoplásticos, a variável interna σ_{max} diminui, resultando em uma função de escoamento modificada que considera a perda de resistência. Após a atualização da posição dessa superfície, a tensão tentativa σ^{tr} deve retornar a superfície de escoamento seguindo uma direção perpendicular à função potencial plástica, conforme ilustrado na Figura 3.5.

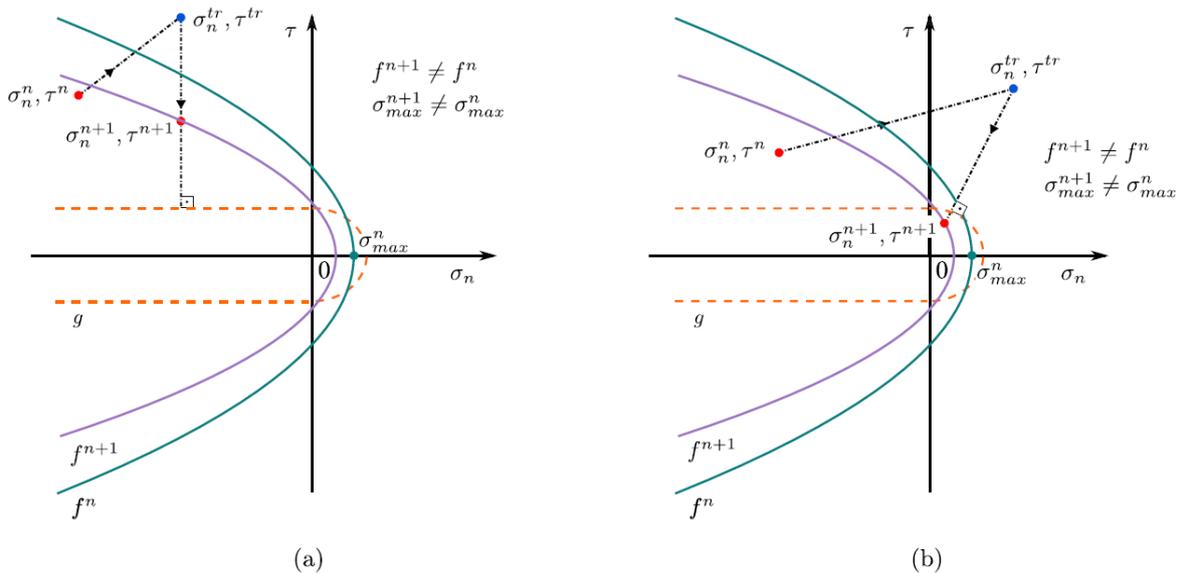


Figura 3.5 – Atualização de tensões no regime elastoplástico: (a) retorno de tensão à superfície de escoamento quando $\sigma_n^{tr} \leq 0$; (b) retorno de tensão à superfície de escoamento quando $\sigma_n^{tr} \geq 0$ (Durand et al., 2023).

Os valores do deslocamento plástico (u_p), σ_{max} e σ no passo $n+1$, como funções do incremento

no valor do multiplicador plástico ($\Delta\lambda$), são determinados por:

$$u_p^{n+1} = u_p^n + \Delta\lambda \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \quad (3.27)$$

$$\sigma_{max}^{n+1} = \sigma_{max}^n + \frac{\partial\sigma_{max}}{\partial u_p} \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - \Delta\lambda \mathbf{D}_e \mathbf{r}^{n+1}. \quad (3.29)$$

Por fim, pode-se calcular o incremento do multiplicador plástico, $\Delta\lambda$, substituindo as equações acima na equação de consistência $f(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1}) = 0$, avaliada no tempo $n + 1$, utilizando um método numérico, como o método de Newton-Raphson. Dessa forma, é possível atualizar o estado de tensão e os valores das variáveis internas no passo $n + 1$.

3.3 - MODELAGEM CONSTITUTIVA DO CONTATO AÇO-CONCRETO

Para o elemento de interface barra-sólido, é adotado um sistema de coordenadas local composto por três direções, conforme ilustrado na Figura 3.6. A primeira coordenada é alinhada com o eixo longitudinal do elemento de barra, enquanto as outras duas direções são escolhidas arbitrariamente, porém sempre perpendiculares entre si e ao eixo da barra. Essa abordagem permite considerar adequadamente as três componentes de deslocamento relativo envolvidas no problema.

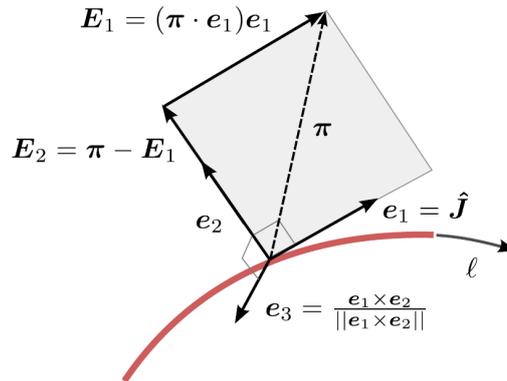


Figura 3.6 – Sistema de coordenadas local ortogonal alinhado com a curva representativa de um elemento de barra (Durand et al., 2021).

A matriz constitutiva dos elementos de interface barra-sólido $\tilde{\mathbf{D}}$ pode ser expressa como:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{d\tau}{d\bar{w}_1} & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

em que termo $d\tau/d\bar{w}_1$ representa a rigidez tangente longitudinal da interface, enquanto k_n é um parâmetro de penalidade que caracteriza a rigidez da interface nas direções perpendiculares e_2 e e_3 . As variáveis τ e \bar{w}_1 correspondem, respectivamente, a tensão de aderência e deslizamento utilizados no modelo constitutivo apresentado por Durand et al. (2021) e já descrito na Seção 2.4.2. Normalmente, valores elevados de k_n são adotados para garantir que a fibra mantenha sua orientação. Em estruturas de concreto armado convencionais, valores na faixa de 10^3 a 10^6 GPa/m são comumente utilizados. A matriz de rigidez do elemento de interface é expressa como:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_l \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}}_p dl \quad (3.31)$$

Na equação, l representa a coordenada longitudinal, e $\tilde{\mathbf{B}}_p$ é uma matriz escrita em termos das funções de forma dos elementos de fibra e dos elementos sólidos atravessados.

3.4 - GERAÇÃO DAS MALHAS

A abordagem proposta para simular o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço utiliza uma malha de elementos finitos composta por quatro tipos distintos de elementos: volumétricos, coesivos, barras e de contato (ver Figura 3.7). Os elementos volumétricos são empregados para modelar a massa do concreto, enquanto os elementos coesivos têm a função de reproduzir o desenvolvimento e a propagação de fissuras nesse material. As fibras de aço, por sua vez, são representadas usando elementos finitos de dois nós, também chamados de barras. Por fim, a interação entre as fibras e o concreto é simulada através dos elementos de contato.

A discretização do domínio do concreto com o objetivo de criar as malhas de elementos finitos foi realizada utilizando o *software* Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009). Em uma etapa subsequente, procedeu-se à incorporação das fibras de aço ao modelo tridimensional da malha, por meio da implementação de um algoritmo específico. Nesse algoritmo, empregou-se uma distribuição aleatória isotrópica, com cuidadosa consideração do efeito das paredes dos moldes. Essa operação pode ser dividida em quatro etapas:

1. **Inicialização:** Nesta fase, são definidos os parâmetros necessários para a geração das fibras, tais como seu comprimento e diâmetro. Os limites da geometria do corpo de prova

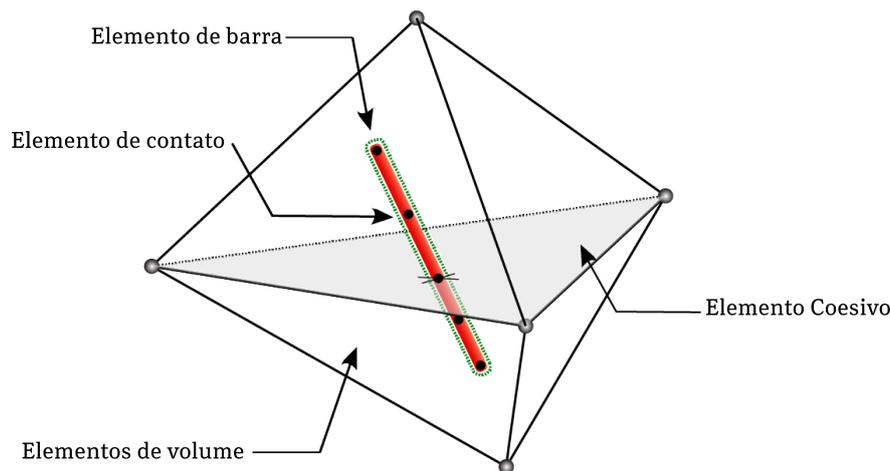


Figura 3.7 – Representação dos elementos finitos utilizados nas simulações antes do desenvolvimento de fissuras.

são capturados a partir da malha anteriormente criada, obtendo-se os valores mínimos e máximos para as coordenadas de cada eixo. Adicionalmente, é criada uma lista vazia destinada a armazenar as fibras geradas. Uma tolerância é estabelecida com o objetivo de prevenir que os valores das coordenadas das fibras fiquem posicionados exatamente nos limites da malha. Neste estudo, foi adotada uma tolerância de 0.01 mm.

2. **Geração das Fibras:** A partir do emprego de uma semente aleatória, é gerado, para cada fibra, um ponto $P = [x, y, z]$ dentro dos limites da malha, considerando a tolerância já especificada. É relevante ressaltar que a variação da semente aleatória permite a obtenção de diferentes distribuições a cada execução do algoritmo. Tal aspecto é de extrema importância para isolar e compreender o impacto da aleatoriedade na resposta numérica, bem como para conduzir análises de sensibilidade do modelo. Posteriormente, é criado um objeto de polilinha para representar a fibra, adaptando suas dimensões às características específicas da fibra em questão. O ponto inicial da polilinha é então deslocado para a coordenada determinada pelo ponto P , estabelecendo, assim, a posição inicial da fibra dentro da malha tridimensional.
3. **Ajuste de Localização das Fibras:** Nesta etapa, são realizadas verificações para garantir o correto posicionamento da fibra gerada (polilinha), evitando cruzamentos com entalhes ou arestas. Enquanto a fibra estiver fora da região especificada pela geometria da malha, o algoritmo gera um vetor de rotação aleatório utilizando valores randômicos nos eixos x , y e z . A polilinha é então rotacionada em torno do ponto base P usando o vetor de rotação criado e um ângulo também aleatório entre 0 e 360 graus. Em seguida, verifica-se novamente se a fibra está dentro da região de interesse. Caso esteja, o laço é interrompido e a fibra é adicionada à lista de fibras inseridas na malha.

4. **Saída:** Ao final do processo, o algoritmo retorna a malha original, acompanhada de todas as fibras geradas, resultando em um modelo de malha tridimensional completo.

Posteriormente, os elementos de barra, os quais representam as fibras, são submetidos a um procedimento de discretização utilizando o algoritmo proposto por Durand et al. (2015). Nesta fase, os elementos de contato (elementos com geometria linear, ver Durand et al. (2021)), responsáveis por estabelecer as interfaces entre as fibras e o concreto, são criados de forma simultânea para permitir as conexões entre os elementos de barra e seus elementos volumétricos correspondentes, viabilizando a simulação das condições de aderência entre os materiais.

Em sequência, a inclusão dos elementos coesivos é realizada por meio da aplicação do algoritmo introduzido por Durand e Silva (2019). Dentro da malha, ocorre a interseção entre os elementos de barra e os elementos coesivos. Diferentemente dos elementos volumétricos, os elementos de barra permanecem conectados mesmo quando fissuras se desenvolvem, o que dispensa a necessidade de elementos de contato adicionais para estabelecer conexões através das fissuras (ver Figura 3.8). Esta abordagem revela-se particularmente adequada para a simulação de pequenas deformações.

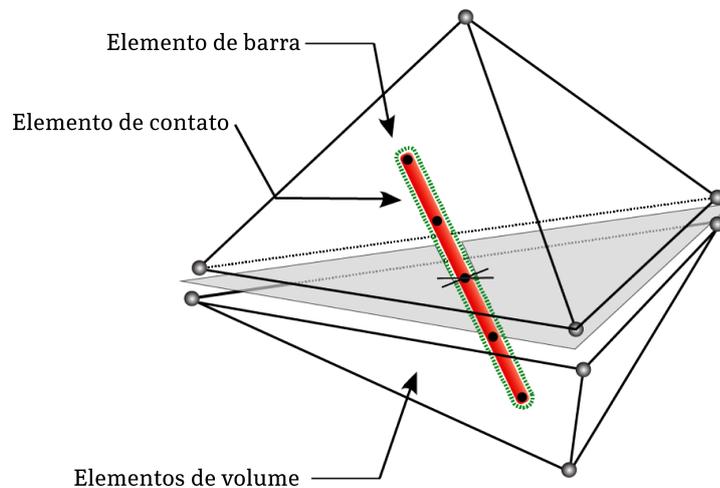


Figura 3.8 – Representação dos elementos finitos utilizados nas simulações após o desenvolvimento de fissuras.

3.5 - PROCEDIMENTOS DA SIMULAÇÃO

A fim de conduzir as análises por meio dos modelos propostos, foi realizado um extenso levantamento bibliográfico, abrangendo trabalhos acadêmicos de natureza numérica e experimental. Essa busca teve como objetivo obter os dados necessários para as simulações em

estudo. Foram consultados diversos repositórios acadêmicos contendo teses, dissertações e acervos de revistas científicas relacionadas à área de interesse. No entanto, a obtenção dos dados apresentou desafios significativos, uma vez que nem sempre se encontravam disponíveis todos os parâmetros requeridos para a modelagem dos diferentes elementos. Essa limitação exigiu abordagens cuidadosas para lidar com as lacunas identificadas e garantir a confiabilidade das análises realizadas.

Todas as simulações realizadas foram conduzidas utilizando a biblioteca Amaru (<https://github.com/NumSoftware/Amaru>), uma biblioteca de elementos finitos escrita na linguagem Julia, a qual oferece uma variedade de modelos previamente estabelecidos. Essa biblioteca possibilita a realização de análises mecânicas estáticas e dinâmicas em duas e três dimensões, além de análises termomecânicas. Para este estudo, optou-se por empregar o solucionador estático em conjunto com os elementos MechSolid (sólido), MechRod (barra), MechJoint (coesivo) e MecRSJoint (contato). Em relação aos modelos constitutivos utilizados, foram adotados, respectivamente, os seguintes modelos: ElasticSolid (elástico linear), PPRod (elástico perfeitamente plástico unidimensional), TCJoint (junta de concreto para tração e compressão) e CyclicRSJoint (contato concreto-reforço). É relevante mencionar que a geração aleatória de fibras foi implementada de forma independente à biblioteca em questão.

A Figura 3.9 ilustra o fluxo do processo de simulação numérica. Inicialmente, as propriedades geométricas dos corpos de prova utilizados nos estudos experimentais são importadas para a biblioteca a partir de uma malha de elementos finitos previamente gerada no software *Gmsh* (Geuzaine e Remacle, 2009), através de um arquivo no formato "vtk". Essas informações são lidas pelo software, que cria um objeto do tipo "Mesh" com base no arquivo importado. Em seguida, são definidos o número de fibras a serem incorporadas à malha, juntamente com suas características geométricas. O processo de inclusão das fibras na malha é realizado por meio do algoritmo descrito na Seção 3.4. Concluído esse processo, é possível estabelecer uma região específica onde os elementos coesivos serão inseridos, ou inseri-los por toda a malha. Nesse ponto, uma nova malha é gerada, incluindo os novos elementos adicionados, e pode ser salva em um arquivo de extensão "vtu".

O próximo passo consiste na definição das propriedades a serem utilizadas na modelagem dos materiais, representados pelos quatro tipos de elementos: sólidos (ou de volume), coesivos, barras e contatos, conforme já ilustrado na Figura 3.7. O estágio subsequente envolve a definição das condições de contorno, as quais são baseadas nos ensaios experimentais realizados. Com todas as propriedades e condições definidas, inicia-se a análise numérica incremental-iterativa até que a convergência seja alcançada.

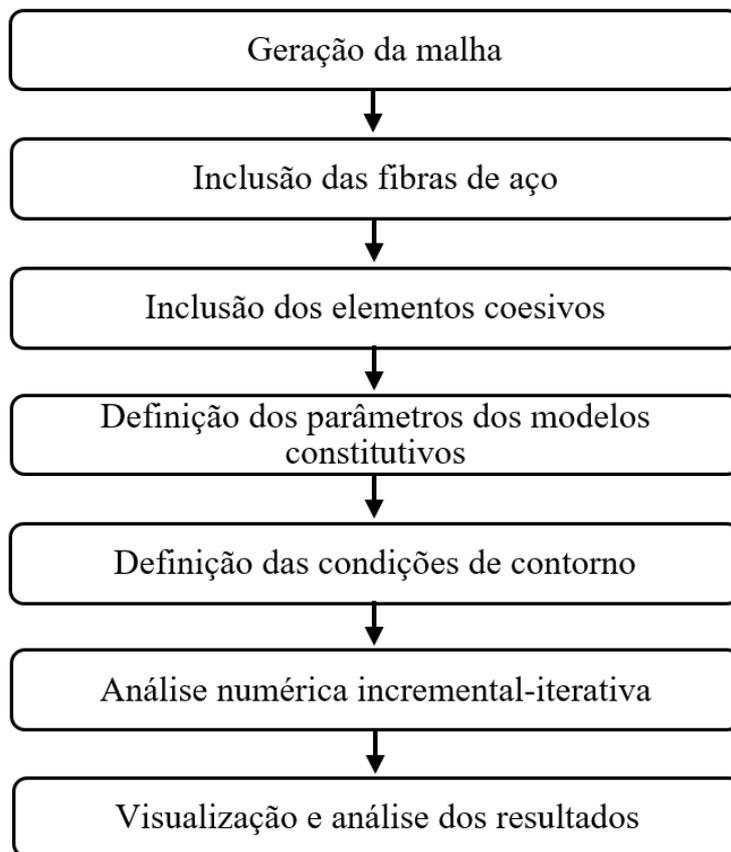


Figura 3.9 – Fluxo do processo de simulação numérica.

4 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentadas as simulações numéricas realizadas a partir dos modelos constitutivos descritos, com o objetivo de aferir seu desempenho. Inicialmente, as aplicações foram executadas com base em um ensaio de tração hipotético proposto por Faria (2017), com a intenção de verificar a influência de diferentes teores de fibras nos resultados da modelagem. Em seguida, novas aplicações foram efetuadas tomando como base ensaios experimentais dispostos na literatura, possibilitando a comparação de resultados.

Durante as simulações, foi adotado um comportamento mecânico linearmente elástico para os elementos de volume, considerando os parâmetros do módulo de elasticidade (E) e coeficiente de Poisson (ν) do concreto. Por outro lado, os elementos coesivos foram modelados seguindo a abordagem proposta por Durand et al. (2023), que incorpora a lei de tração-separação de Hordijk. Os parâmetros necessários para os elementos coesivos incluem a resistência à tração (f_t), resistência à compressão (f_c) e a energia de fratura (G_f), juntamente com os parâmetros α , γ , ζ e θ , além dos parâmetros elásticos mencionados anteriormente. Todos esses parâmetros, exceto os relacionados à superfície de escoamento no modelo constitutivo do concreto, foram obtidos por meio de resultados de testes experimentais. Para este estudo, foram adotados os seguintes valores de parâmetros, de acordo com as proposições dos autores: $\gamma = 0.01$, $\theta = 1.4$ e $\zeta = 5$. A interação entre os elementos de volume (concreto) e os elementos de reforço (fibras) foi simulada seguindo a abordagem proposta por Durand et al. (2021).

4.1 - SIMULAÇÃO DE TRAÇÃO EM UM CORPO DE PROVA CÚBICO

Este teste hipotético baseia-se na proposição de Faria (2017) e tem como objetivo avaliar o comportamento da modelagem numérica por meio do ensaio de tração de um corpo de prova cúbico com diferentes teores de fibras. O corpo de prova utilizado neste estudo possui dimensões de 10 cm em cada aresta. Foram realizadas três simulações para diferentes quantidades de fibras, considerando 93, 185 e 370 fibras, correspondendo a 0,5%, 1,0% e 2,0% do volume do corpo de prova, respectivamente. O objetivo da simulação é analisar o impacto da variação no volume de fibras nos resultados de resistência e fissuração alcançados pela abordagem proposta.

A Figura 4.1 apresenta uma vista frontal do cubo juntamente com as condições de contorno aplicadas. Observa-se que a base do cubo possui restrição de deslocamento vertical. No nó localizado no canto inferior direito, há restrição de deslocamento em todas as direções. Por

fim, é aplicado um deslocamento vertical de 0,1 mm na parte superior do cubo. A restrição de deslocamento na parte inferior do cubo impede a movimentação nessa região, enquanto o deslocamento aplicado na parte superior permite avaliar a resposta do material à carga de tração.

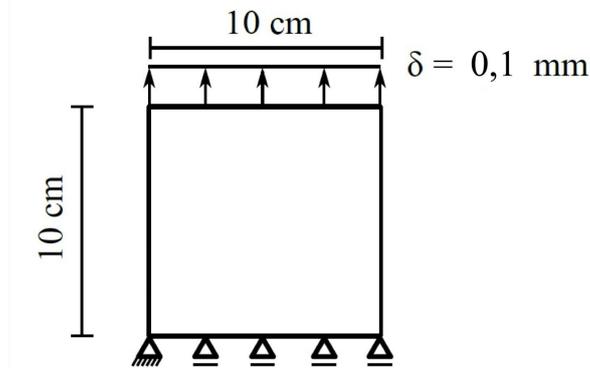


Figura 4.1 – Propriedades geométricas e condições de contorno do corpo de prova hipotético. Adaptado de Faria (2017).

Além da abordagem proposta pelo autor, foram conduzidas duas análises suplementares com o objetivo de aprimorar a compreensão do comportamento do modelo, considerando uma fração volumétrica de fibras $V_f = 0,5\%$. A primeira análise teve como objetivo investigar o impacto da aleatoriedade intrínseca à distribuição das fibras dentro da malha de elementos finitos. Por outro lado, a segunda análise concentrou-se na avaliação da influência das variações no comprimento das fibras na resposta numérica. Essas simulações adicionais foram estruturadas com o intuito específico de isolar esses dois fatores durante as simulações, proporcionando, assim, uma compreensão mais aprofundada do comportamento da modelagem em relação às suas variáveis.

No âmbito da análise direcionada à aleatoriedade na distribuição das fibras, realizaram-se modificações na semente da distribuição aleatória empregada no algoritmo de geração das fibras. É relevante ressaltar que todos os demais parâmetros foram mantidos constantes durante essa manipulação, resultando, portanto, em três cenários adicionais. Essa primeira abordagem ofereceu a oportunidade de confrontar e contrastar os resultados obtidos entre as diferentes distribuições, permitindo, desse modo, a identificação e compreensão do impacto da aleatoriedade nos resultados obtidos.

A segunda estratégia empreendida envolveu a manipulação do comprimento das fibras (l_f). De maneira análoga à abordagem anterior, todos os demais parâmetros do modelo permaneceram invariáveis. Novamente, foram definidos três cenários distintos nos quais comprimentos de fibras de 15 mm, 30 mm e 45 mm foram adotados. Através dessas variações, análises numéricas foram conduzidas com o propósito de avaliar as implicações decorrentes dessas modificações nas respostas do sistema modelado.

4.1.1 - Parâmetros da modelagem

A modelagem adotada considera os elementos de volume, que representam a massa do concreto, como linearmente elásticos, caracterizados por um módulo de elasticidade $E = 30$ GPa e um coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$. Adicionalmente, para a adequada modelagem dos elementos coesivos, são necessários também a resistência à tração (f_t), resistência à compressão (f_c), e energia de fratura (G_f) do concreto, juntamente com os parâmetros previamente estabelecidos no início desta seção.

A energia de fratura (G_F) não estava disponível nas informações originais do estudo de Faria (2017), sendo assim, foi adotada uma estimativa recomendada pelo CEB-FIP (2010) com base na seguinte expressão: $G_f = 73|f_c|^{0.18}$. Tal estimativa proporciona uma aproximação adequada em casos em que não há dados diretos disponíveis. Um resumo dos valores dos parâmetros mencionados pode ser encontrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros do material para os elementos de volume e coesivos.

| E (GPa) | ν | f_c (MPa) | f_t (MPa) | G_f (kN/m) | α |
|-----------|-------|-------------|-------------|--------------|----------|
| 30 | 0,2 | -35,0 | 3,5 | 0,138 | 1,52 |

A simulação foi baseada em dados de fibras retas do tipo B, caracterizadas por um diâmetro (d_f) de 1,07 mm e um comprimento (l_f) de 60 mm. Essas fibras exibem um módulo de elasticidade E_s de 200 GPa e uma resistência máxima f_y de 1153 MPa. Para a representação das fibras no modelo, foram utilizados elementos de barra de dois nós, empregando um modelo constitutivo elástico perfeitamente plástico para descrever seu comportamento mecânico. A Tabela 4.2 fornece os parâmetros relevantes desse modelo.

Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço.

| E_s (GPa) | Área (mm ²) | f_y (MPa) |
|-------------|-------------------------|-------------|
| 200 | 0,899 | 1.153 |

Por fim, para efetuar a simulação do contato entre as fibras e os elementos volumétricos de concreto, adotou-se o modelo proposto por Durand et al. (2021). Os parâmetros indispensáveis para a devida modelagem desse contato são apresentados na Tabela 4.3. Estes parâmetros são representativos do contato aço-concreto para fibras do tipo reta apresentados por Faria (2017).

Tabela 4.3 – Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto.

| τ_{max} (MPa) | τ_{res} (MPa) | s_{peak} (mm) | s_{res} (mm) | k_s (kPa/m) | k_n (kPa/m) |
|--------------------|--------------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|
| 6,84 | 3,96 | 0,34 | 1,00 | 10^9 | 10^6 |

Para representar os corpos de prova cúbicos, foi gerada uma malha não estruturada utilizando elementos tetraédricos, e posteriormente, os elementos coesivos foram adicionados entre eles. A

malha foi discretizada ao longo dos eixos x , y e z com oito divisões em cada direção, conforme ilustrado na Figura 4.2. A inclusão aleatória das fibras de aço na malha de elementos finitos foi realizada por meio do algoritmo descrito na Seção 3.4, resultando nas distribuições apresentadas na Figura 4.3. Cada simulação contou com um total de 4714 elementos de interface. A Tabela 4.4 fornece informações detalhadas sobre as malhas de elementos finitos utilizadas nas simulações de cada fração volumétrica de fibras.

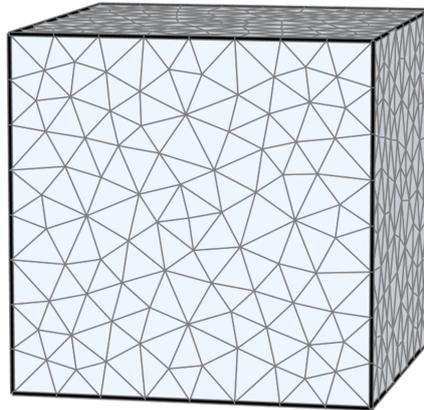
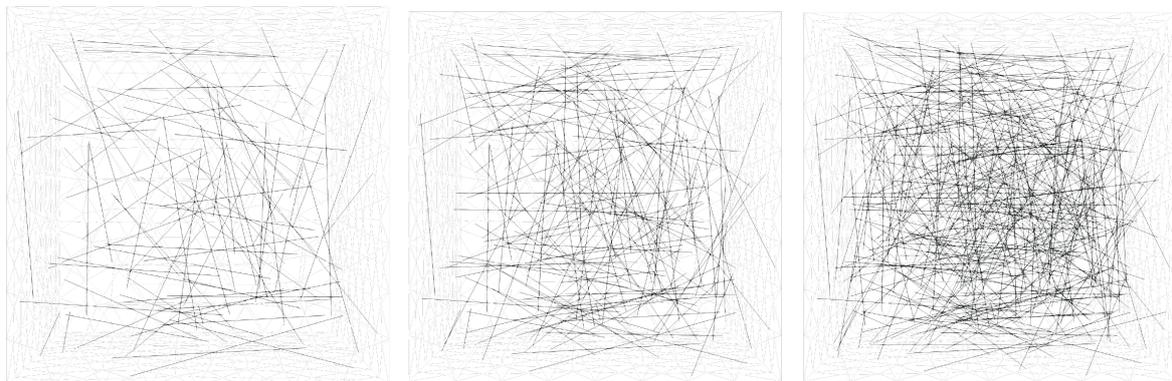


Figura 4.2 – Vista frontal da malha de elementos finitos.



(a)

(b)

(c)

Figura 4.3 – Distribuição aleatória das fibras: (a) 93, (b) 185 e (c) 370.

Tabela 4.4 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas.

| Volume de fibras | Graus de liberdade | Quantidade de nós | Quantidade de elementos |
|-------------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 0,0% | 29.576 | 10.524 | 7.345 |
| 0,5% | 39.313 | 13.757 | 10.485 |
| 1,0% | 48.787 | 16.915 | 13.551 |
| 2,0% | 67.558 | 23.172 | 19.623 |

4.1.2 - Resultados e discussões das análises numéricas

Inicialmente, são apresentados e discutidos os resultados das simulações do ensaio de tração em um corpo de prova cúbico, com o objetivo de avaliar o comportamento da modelagem adotada ao se aplicar diferentes teores de fibras. A Figura 4.4 mostra os resultados obtidos para a curva tensão-deformação do ensaio hipotético em questão. Pode-se observar que, nas simulações numéricas, ocorre um pequeno incremento na resistência à tração do corpo de prova à medida que se aumenta o número de fibras. Esse comportamento também é observado em ensaios experimentais. Assim, pode-se notar que a simulação do corpo de prova sem fibras resultou na menor tensão de pico, cerca de 3,91 MPa, enquanto a simulação com 370 fibras ($V_f = 2,0\%$) apresentou a maior resistência, aproximadamente 4,11 MPa. Esses resultados destacam a influência benéfica das fibras de aço na resistência à tração da mistura composta, evidenciando o potencial reforço proporcionado pelo acréscimo controlado de fibras.

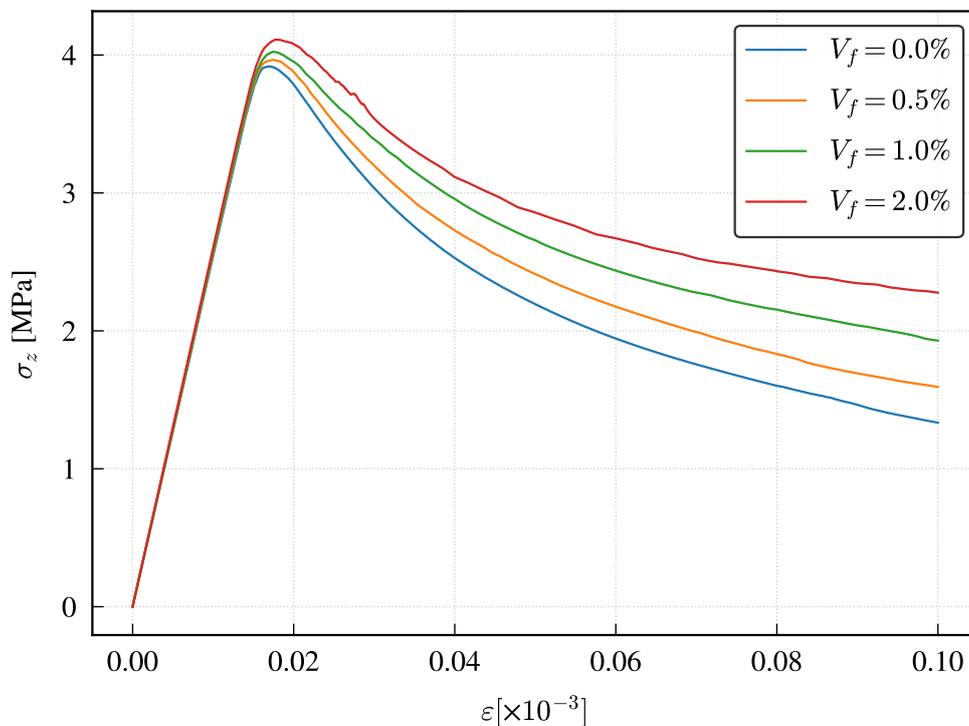


Figura 4.4 – Diagrama tensão-deformação para diferentes teores de fibras.

É importante salientar que a principal influência da adição de fibras ocorre através do aumento da tenacidade do compósito, um aspecto também observado em resultados de ensaios experimentais. Nesse sentido, pode-se constatar que o corpo de prova com 370 fibras apresentou a maior tensão residual, com um valor aproximado de 2,25 MPa, enquanto o corpo de prova sem fibras obteve uma tensão residual de cerca de 1,31 MPa. A Figura 4.5 apresenta o estado deformado final da peça analisada, evidenciando a abertura das fissuras na malha. Para facilitar a visualização, os deslocamentos foram ampliados por um fator de 25.

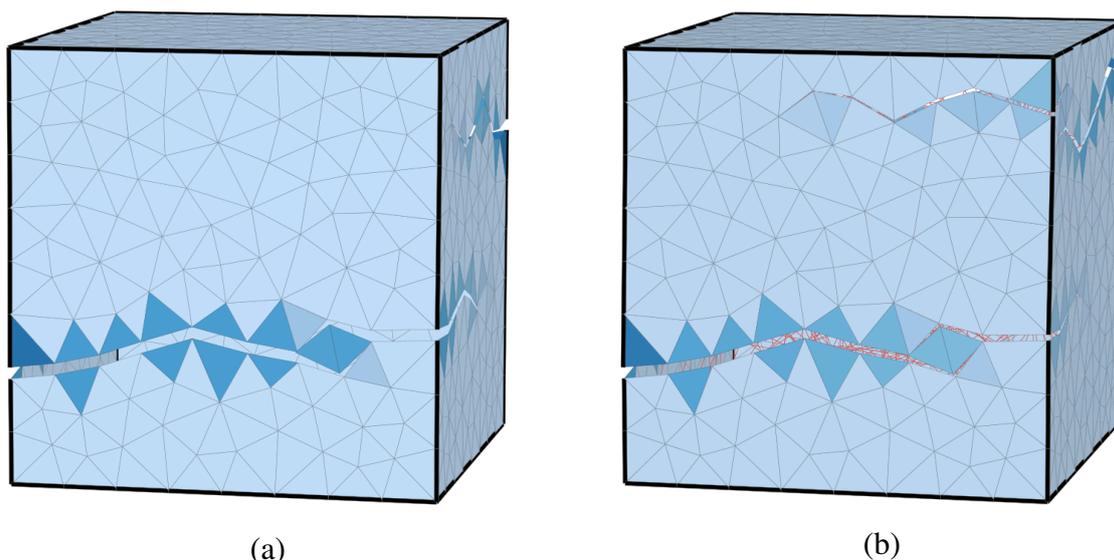


Figura 4.5 – Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação: (a) $V_f = 0,0\%$ e (b) $V_f = 2,0\%$. Fator de escala 25.

A Figura 4.6 apresenta três distribuições aleatórias distintas de fibras de aço inseridas na malha de elementos finitos, para a fração volumétrica $V_f = 0,5\%$ (a, b e c). Tais distribuições foram geradas por meio de modificações na semente da distribuição aleatória empregada no algoritmo detalhado na Seção 3.4. Conseqüentemente, novas simulações numéricas foram realizadas empregando essas configurações de malha, sob as mesmas condições previamente delineadas, conforme a abordagem proposta por Faria (2017).

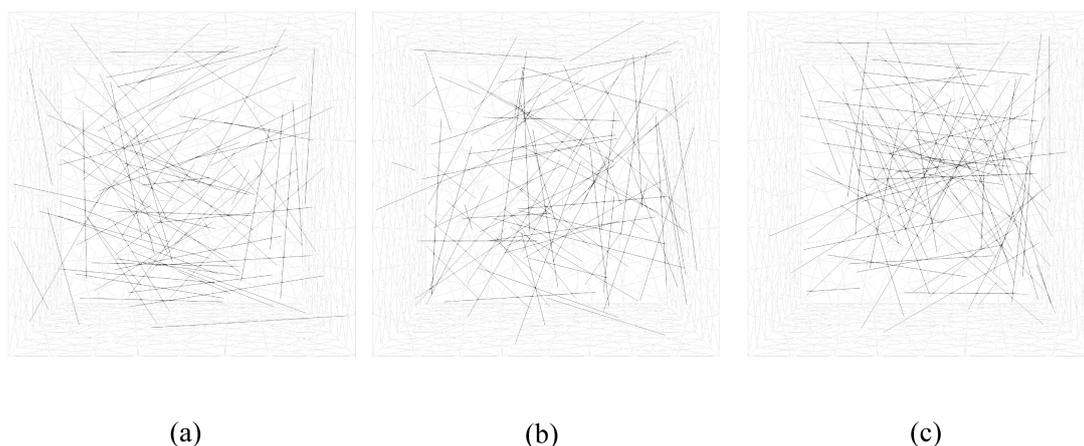


Figura 4.6 – Distribuições aleatórias de fibras de aço na malha de elementos finitos para a fração volumétrica $V_f = 0,5\%$.

Com o propósito de efetuar uma comparação dos resultados obtidos, as curvas de tensão-deformação oriundas de cada uma dessas simulações estão delineadas na Figura 4.7, conjuntamente à Distribuição 4, que corresponde à simulação anteriormente conduzida para a mesma fração volumétrica de fibras. A partir deste exame, é possível inferir que as

modificações na disposição das fibras de aço inseridas na malha de elementos finitos conduzem a resultados congruentes, demonstrando uma limitada variabilidade nas respostas modeladas. Dessa forma, compreende-se que os efeitos da aleatoriedade podem ser considerados como pouco significativos, evidenciando a estabilidade nas respostas numéricas alcançada pela presente proposta de modelagem.

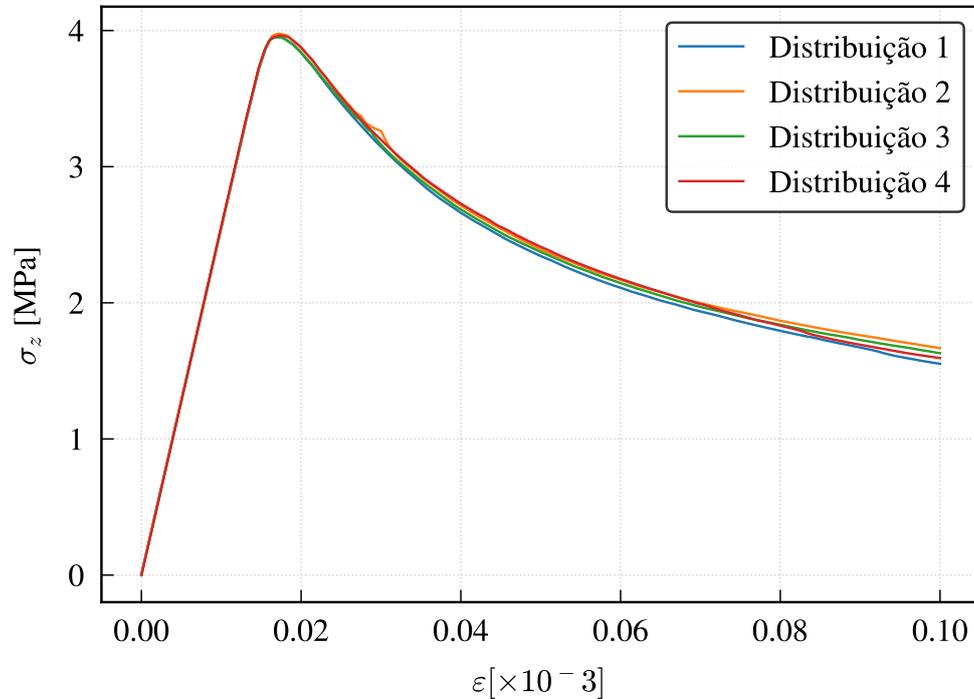


Figura 4.7 – Diagrama tensão-deformação para diferentes distribuições aleatórias da fração volumétrica $V_f = 0.5\%$.

Finalmente, em relação à análise proveniente da variação do comprimento das fibras, procederam-se a novas simulações sob as condições específicas detalhadas no estudo de referência proposto por Faria (2017). As curvas de tensão-deformação resultantes dessas análises são exibidas na Figura 4.8. É relevante destacar, no entanto, que a curva correspondente ao comprimento de fibra $l_f = 60$ mm coincide com aquela previamente representada na Figura 4.4, correspondente à fração volumétrica $V_f = 0,5\%$.

Com base nos resultados obtidos nesta análise suplementar, é possível afirmar que, de acordo com as previsões, o aumento no comprimento das fibras e, por conseguinte, na densidade do aço no interior do espécime, conduziu a melhorias substanciais e coerentes nas resistências à tração e residual do compósito simulado. Essa constatação reforça a eficácia da modelagem adotada em capturar de forma relativamente consistente as modificações no comportamento mecânico do material, resultantes do aumento no comprimento das fibras incorporadas. Além disso, fica evidente o caráter abrangente proporcionado pelo conjunto de técnicas de simulação empregadas, que possibilita a análise do impacto das variáveis de maneira isolada dentro do modelo escolhido. Essa característica se mostra extremamente vantajosa para o aprofundamento

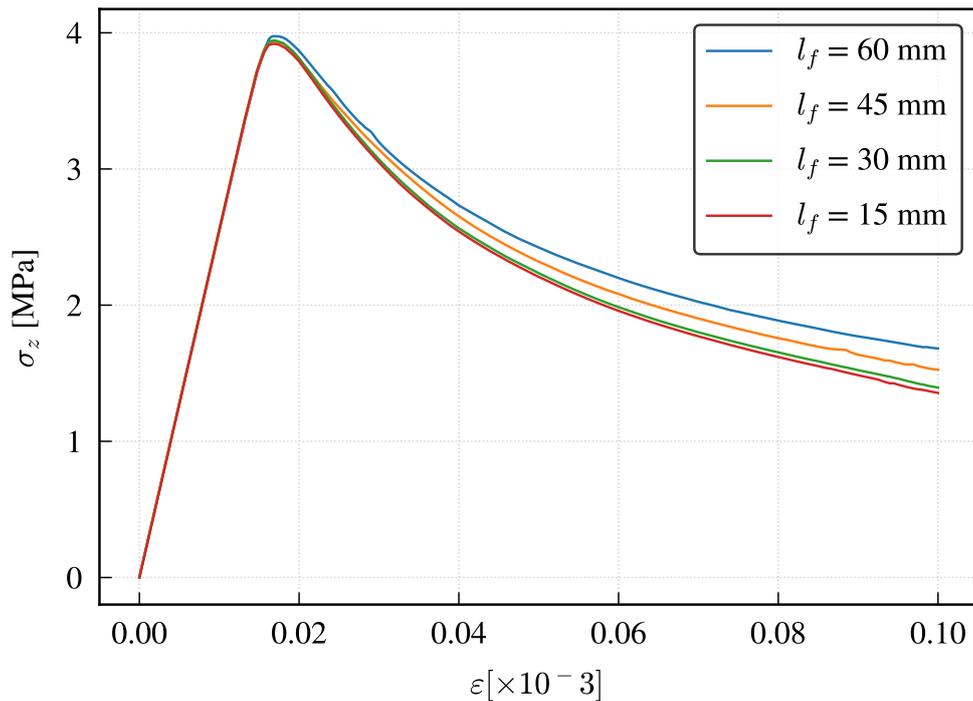


Figura 4.8 – Diagrama tensão-deformação de diferentes comprimentos de fibras (l_f) para a fração volumétrica $V_f = 0.5\%$.

de estudos sobre o comportamento do compósito reforçado com fibras de aço sem a necessidade inicial de testes experimentais, os quais poderiam ser posteriormente empregados para validar os resultados obtidos por meio das simulações numéricas.

4.2 - ENSAIO DE TRAÇÃO DIRETA CONDUZIDO POR BAEZ (2014)

Para esta análise, tomou-se como referência os ensaios experimentais de tração direta conduzidos por Baez (2014), nos quais foi utilizada uma fração volumétrica de 0,5% de fibras de aço com extremidades em gancho (Dramix® RL 45/50 BN) na moldagem de corpos de prova entalhados. As propriedades geométricas desses corpos de prova estão ilustradas na Figura 4.9. Um total de cinco espécimes foi testado para estudar a variabilidade dos resultados.

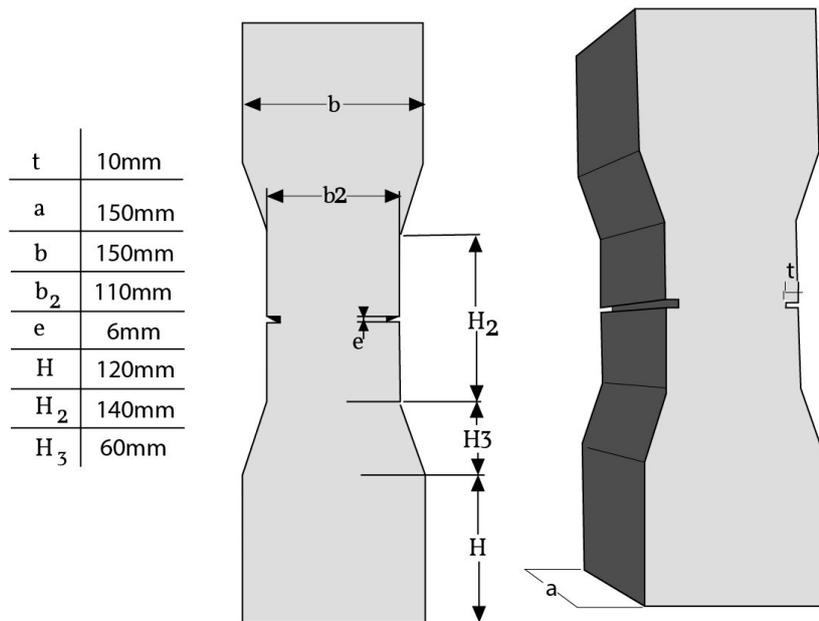


Figura 4.9 – Propriedades geométricas do corpo de prova. Adaptado de Baez (2014).

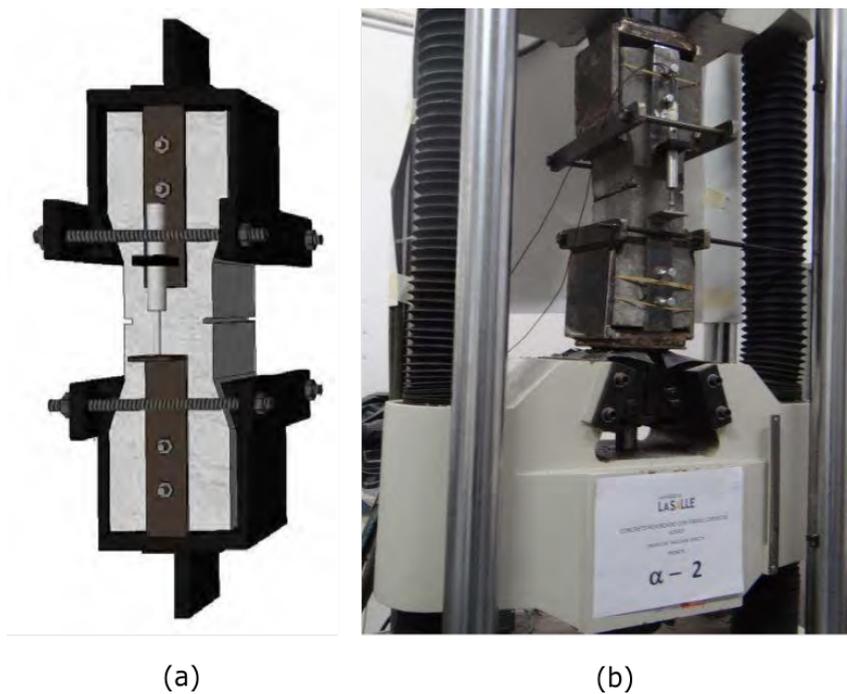


Figura 4.10 – Ensaio de tração direta: (a) corpo de prova típico testado e (b) máquina de ensaio de tração (Baez, 2014).

A Figura 4.10 ilustra um corpo de prova típico (a) e a montagem do ensaio experimental (b), enquanto que a Figura 4.11 demonstra as condições de contorno (a) e o deslocamento imposto (b) utilizados. Nota-se que foram estabelecidas condições de contorno de forma a restringir o deslocamento ao longo dos três eixos na zona de transição da parte inferior e restrição de

deslocamento nos eixos x e z para a zona de transição superior do corpo de prova. Ademais, observa-se que na parte de transição superior, o deslocamento imposto é aplicado ao longo do eixo y .

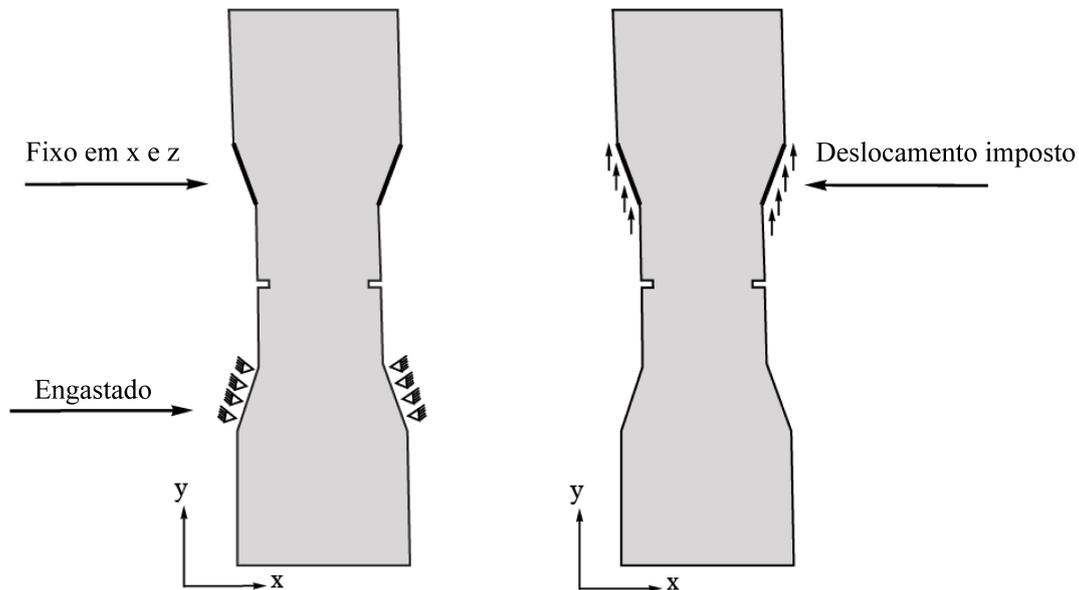


Figura 4.11 – Condições de contorno e aplicação do deslocamento prescrito. Adaptado de Baez (2014).

4.2.1 - Parâmetros da modelagem

A Tabela 4.5 resume os dados utilizados para a modelagem dos elementos volumétricos e coesivos. No contexto da modelagem das fibras de aço, a fração volumétrica $V_f = 0,5\%$ utilizada no ensaio experimental representou um total de 1282 fibras, sendo estas com comprimento $l_f = 50$ mm e diâmetro $d_f = 1,05$ mm. O módulo de elasticidade das fibras foi definido como $E_s = 200$ GPa, enquanto a resistência máxima foi estabelecida em $f_y = 1.153$ MPa. A representação das fibras foi feita por meio de elementos de barra de dois nós utilizando o modelo constitutivo elástico perfeitamente plástico. Os parâmetros empregados na modelagem das fibras de aço podem ser encontrados na Tabela 4.6. Detalhes adicionais dos parâmetros de contato entre o concreto e as fibras estão expostos na Tabela 4.7.

Tabela 4.5 – Parâmetros utilizados na modelagem dos elementos de volume e coesivos.

| E (GPa) | ν | f_c (GPa) | f_t (GPa) | G_f (kN/m) | α |
|-----------|-------|-------------|-------------|--------------|----------|
| 18,101 | 0,2 | -22,0 | 1,72 | 0,1 | 1,56 |

Para a discretização por elementos finitos, foi utilizada uma malha não estruturada composta por elementos tetraédricos. A Figura 4.12 ilustra uma visualização em perspectiva da malha

Tabela 4.6 – Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço

| E_s (GPa) | Área (mm ²) | f_y (MPa) |
|-------------|-------------------------|-------------|
| 200 | 0,866 | 1.153 |

Tabela 4.7 – Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto

| τ_{max} (MPa) | τ_{res} (MPa) | s_{peak} (mm) | s_{res} (mm) | k_s (kPa/m) | k_n (kPa/m) |
|--------------------|--------------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|
| 9,0 | 1,5 | 0,01 | 3,5 | 10^9 | 10^6 |

utilizada. Quanto à incorporação das fibras de aço, a distribuição aleatória resultante é apresentada na Figura 4.13.

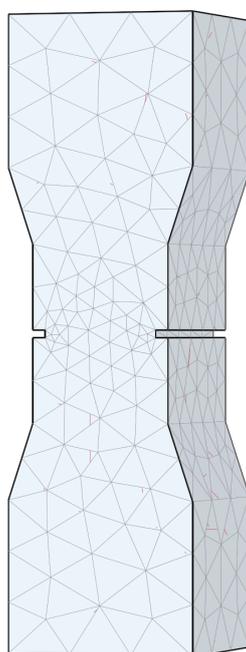


Figura 4.12 – Malha de elementos finitos utilizada.

Conforme mencionado por Bitencourt Junior (2014), as fibras localizadas fora do plano de ruptura exercem pouca influência na resposta final do ensaio. O plano de ruptura adotado para o corpo de prova em questão corresponde à região central, com dimensões de largura $b_2 = 110$ mm, altura $H_2 = 140$ mm e espessura $a = 150$ mm, conforme ilustrado na Figura 4.9. Para otimizar os recursos computacionais, as fibras presentes na região central foram inseridas utilizando elementos de interface barra-sólido, enquanto as demais foram incorporadas à malha através do método embutido. Adicionalmente, elementos coesivos foram inseridos apenas na região central do corpo de prova, resultando em uma redução dos graus de liberdade. A Tabela 4.8 apresenta informações detalhadas sobre a malha de elementos finitos utilizada na simulação.

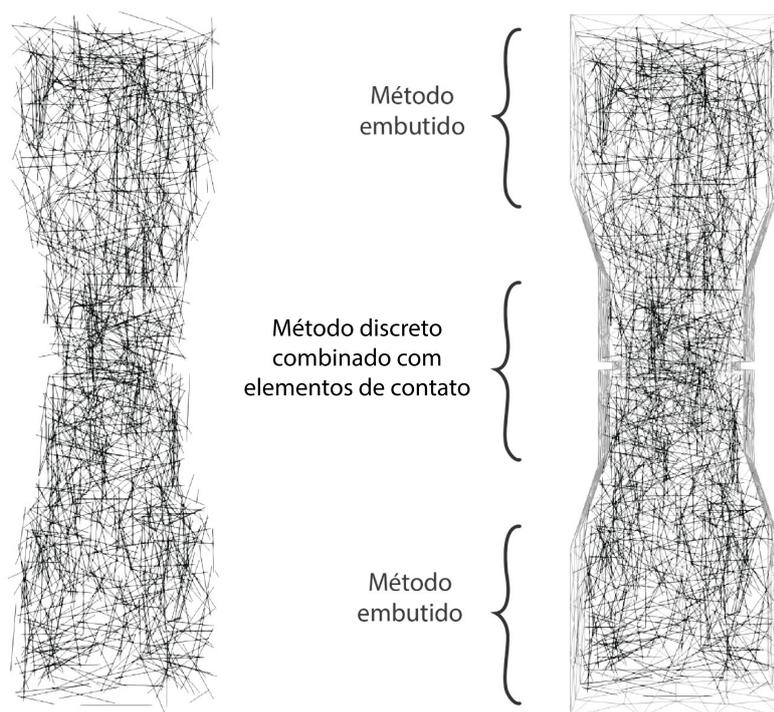


Figura 4.13 – Distribuição das fibras na malha de elementos finitos.

Tabela 4.8 – Dados da malha utilizada na análise numérica

| Graus de liberdade | Quantidade de nós | Quantidade de elementos | Elementos de junta |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| 37.881 | 20.701 | 14.909 | 1.822 |

4.2.2 - Resultados e discussões das análises numéricas

Após a realização das análises numéricas, foi possível obter a força resultante (F) das reações nas faces de transição superior da malha, em função dos deslocamentos verticais impostos, por meio do monitoramento dessas superfícies. Com esses dados, a curva força-deslocamento foi traçada para comparação com os resultados experimentais, conforme ilustrado na Figura 4.14. A envoltória experimental foi obtida a partir das cinco curvas disponibilizadas por Baez (2014). Observa-se que os resultados numéricos obtidos são bastante coerentes quando comparados à envoltória do ensaio experimental, extrapolando-se os limites das curvas obtidas em laboratório apenas em pequenos trechos. Além disso, destaca-se que o efeito da ancoragem das fibras são considerados nas propriedades do contato fibra concreto, a partir dos dados obtidos pelos ensaios de arrancamento no estudo em questão.

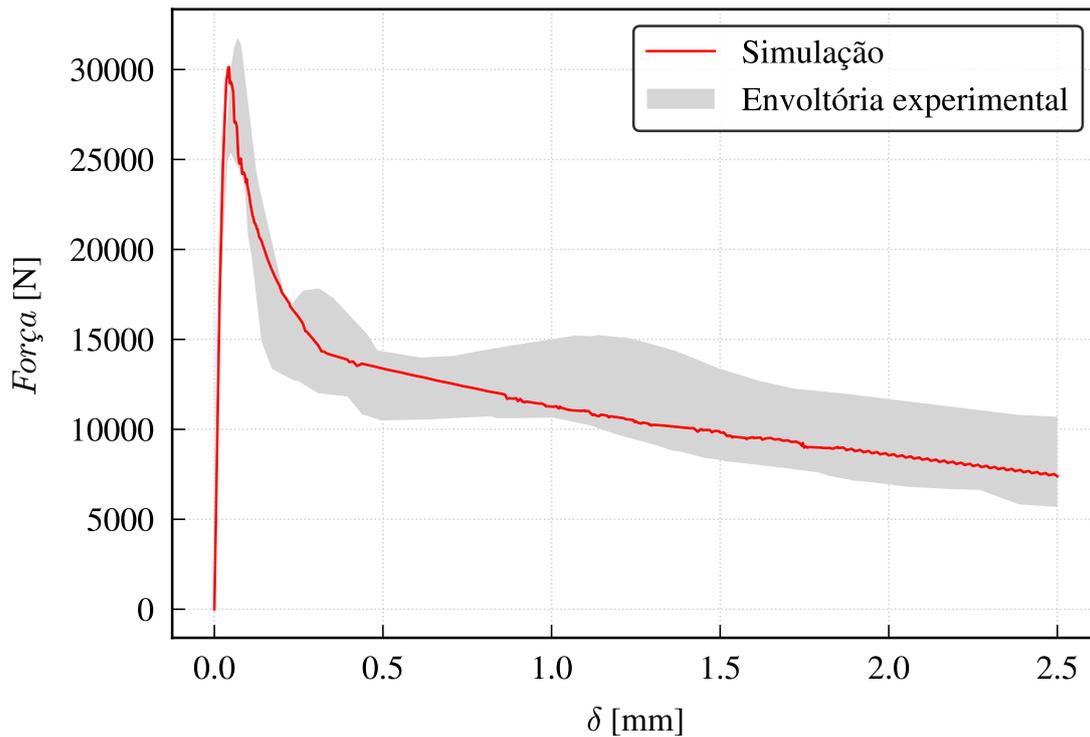


Figura 4.14 – Envoltória experimental e curva numérica força-deslocamento.

A Figura 4.16 apresenta os padrões de fissuração obtidos em laboratório por Baez (2014). Para fins comparativos, a Figura 4.15 exibe o estado deformado do elemento de concreto após a análise, sendo possível observar o desenvolvimento das fissuras na malha, evidenciado pela separação dos elementos. Vale ressaltar que os deslocamentos nas figuras estão ampliados em um fator 5 para facilitar a visualização das fissuras.



Figura 4.15 – Padrões de fissuração obtidos em laboratório (Baez, 2014).

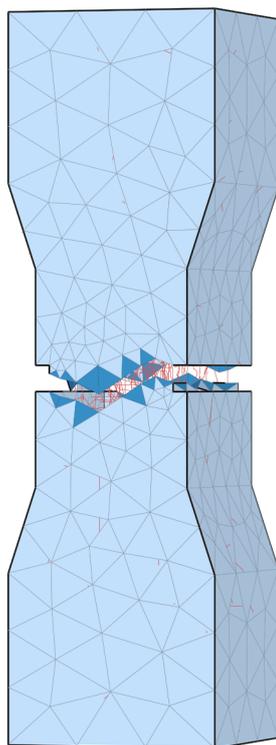


Figura 4.16 – Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação. Fator de escala 05.

A análise numérica demonstra que foram obtidos resultados satisfatórios, com uma boa reprodução da curva experimental. Os valores numéricos se aproximaram da carga máxima e do deslocamento correspondente. Além disso, a simulação foi capaz de representar adequadamente a perda de rigidez do concreto reforçado com fibras de aço devido à fissuração. Por fim, observou-se que o padrão de fissuras obtido numericamente correspondeu de forma consistente aos resultados experimentais.

4.3 - ENSAIO DE FLEXÃO EM TRÊS PONTOS CONDUZIDO POR TRINDADE *ET AL.* (2020)

Os dados do ensaio de flexão em três pontos de uma viga de concreto reforçado com fibras de aço foram obtidos no estudo conduzido por Trindade et al. (2020). Nesse estudo, fibras ancoradas do tipo Dramix[®] RC 80/60 BN foram utilizadas em frações de 0,19%, 0,38% e 0,58%, correspondendo aos teores de 15 kg/m³, 30 kg/m³ e 45 kg/m³, respectivamente. A viga ensaiada possui um comprimento total de 550 mm, com apoios posicionados a uma distância de 25 mm das faces laterais, resultando em um vão efetivo de 500 mm. A seção transversal da viga tem dimensões de 150 × 150 mm² e apresenta um entalhe de 25 mm de profundidade localizado no centro do vão. A Figura 4.17 exhibe detalhes da geometria da viga e as condições

de contorno adotadas.

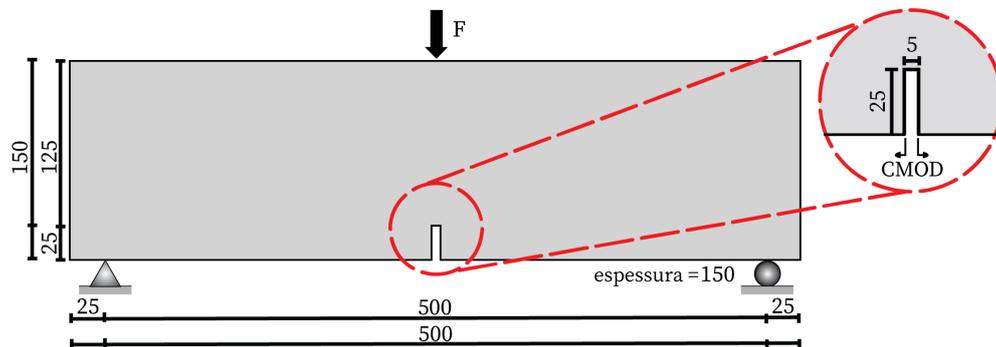


Figura 4.17 – Dimensões geométricas e condições de contorno da viga ensaiada (medidas em mm). Adaptado de Trindade et al. (2020).

Durante o ensaio, uma carga (F) é aplicada no centro da distância entre os apoios da viga, e a deformação é medida em termos de *Crack Mouth Opening Displacement (CMOD)*, que corresponde à abertura do entalhe na face inferior da viga. Essa medição é obtida por meio de um extensômetro do tipo *clip-gauge*. A Figura 4.18 apresenta um registro esquemático da realização do ensaio.

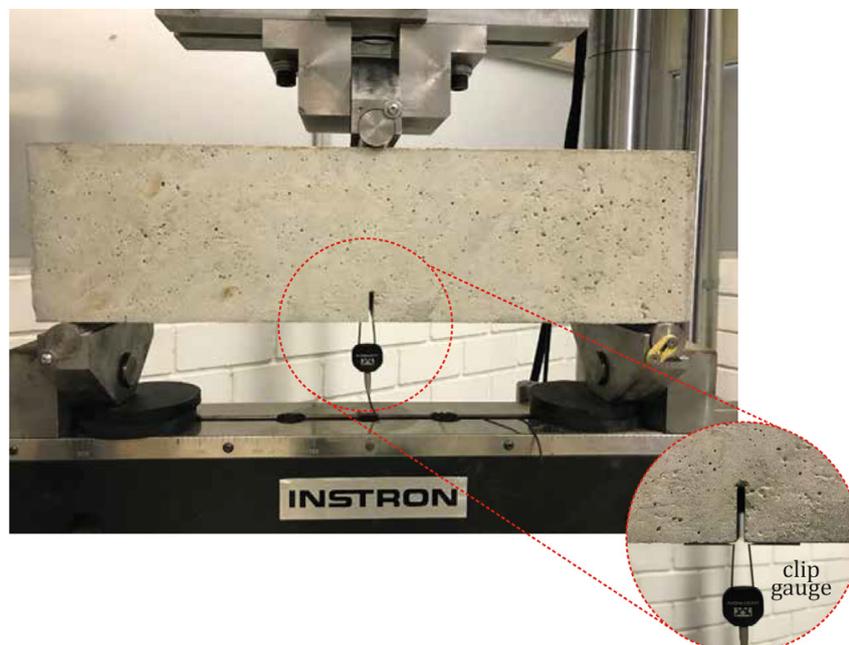


Figura 4.18 – Esquema do ensaio de flexão em três pontos de uma viga com entalhe (Trindade et al. (2020)).

Para realizar as simulações, foram aplicados deslocamentos prescritos na direção do eixo y nos

nós localizados no centro da face superior da viga, que é o local de aplicação das forças. Nos nós correspondentes ao primeiro apoio na face inferior, foram restringidos os deslocamentos em todas as direções, enquanto nos nós correspondentes ao segundo apoio, somente os deslocamentos verticais foram restritos, permitindo que a estrutura se deslocasse horizontalmente.

4.3.1 - Parâmetros da modelagem

A simulação do comportamento do concreto, por meio dos elementos de volume e coesivos, leva em consideração o módulo de Young e o coeficiente de Poisson. Nesse caso, os valores utilizados são $E = 35$ GPa e $\nu = 0,20$, respectivamente. Além desses, os demais parâmetros requeridos para o modelo constitutivo de elementos coesivos são apresentados na Tabela 4.9

Tabela 4.9 – Parâmetros utilizados na modelagem do concreto.

| E (GPa) | ν | f_c (MPa) | f_t (MPa) | G_f (kN/m) | α |
|-----------|-------|-------------|-------------|--------------|----------|
| 35 | 0,2 | -35,0 | 2,35 | 0,1 | 1,59 |

As fibras de aço foram inseridas na malha de elementos finitos como elementos de barra de dois nós, com um comprimento de 60 mm e um diâmetro de 0.75 mm. Essas fibras possuem uma resistência última de $\sigma_f = 1.225$ MPa e um módulo de elasticidade de $E_s = 210$ GPa, e foram modeladas como um material elástico perfeitamente plástico. As frações volumétricas utilizadas corresponderam a 853, 1.705 e 2.559 fibras, respectivamente. A Tabela 4.10 apresenta os parâmetros empregados na caracterização das fibras. Por fim, a Tabela 4.11 fornece os valores dos parâmetros adotados para o modelo proposto por Durand et al. (2021), que foi utilizado para simular a aderência entre os materiais.

Tabela 4.10 – Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço

| E_s (GPa) | Área (mm ²) | f_y (MPa) |
|-------------|-------------------------|-------------|
| 210 | 0,441 | 1.225 |

Tabela 4.11 – Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto

| τ_{max} (MPa) | τ_{res} (MPa) | s_{peak} (mm) | s_{res} (mm) | k_s (kPa/m) | k_n (kPa/m) |
|--------------------|--------------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|
| 12,5 | 4,5 | 0,01 | 6,5 | 10^9 | 10^7 |

Visando reduzir os custos computacionais, optou-se novamente por adotar um plano de ruptura nas análises, sendo este definido como a faixa central de 100 mm do comprimento total da viga. Neste contexto, as fibras localizadas nesse plano foram modeladas utilizando elementos de interface barra-sólido, enquanto o método embutido foi adotado para modelar as demais fibras na malha. Além disso, os elementos coesivos foram aplicados apenas nessa região específica,

totalizando 3.953 elementos desse tipo. As Figuras 4.19, 4.20 e 4.21 apresentam a distribuição das fibras de aço nas vigas para os teores simulados.

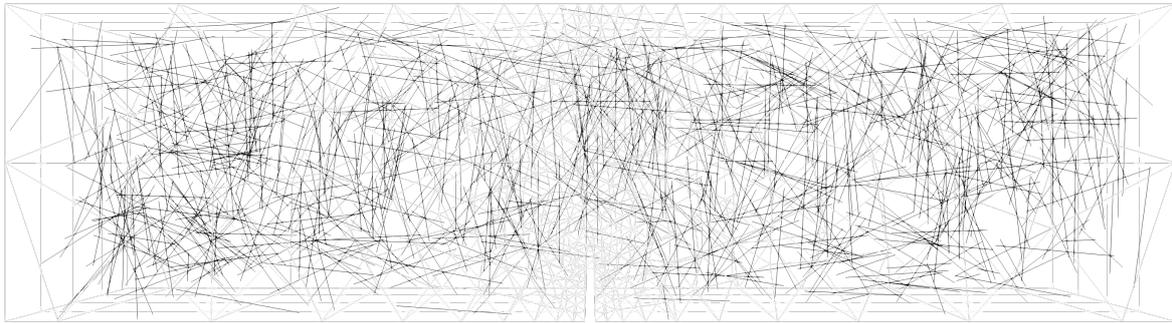


Figura 4.19 – Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,19\%$).

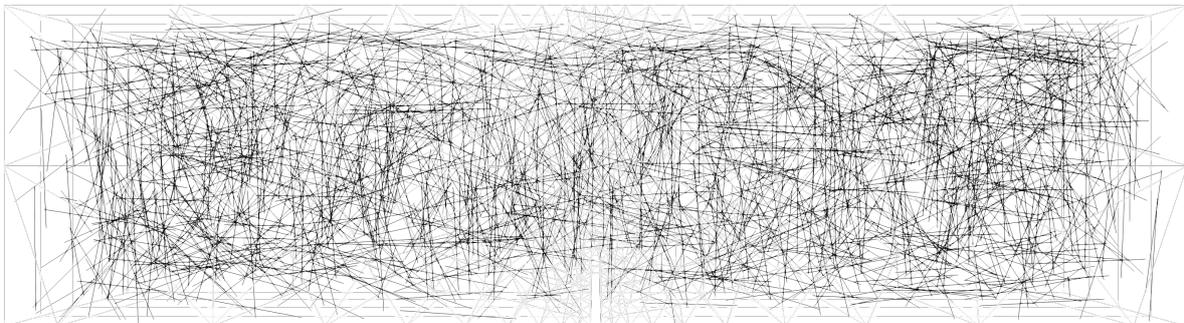


Figura 4.20 – Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,38\%$).

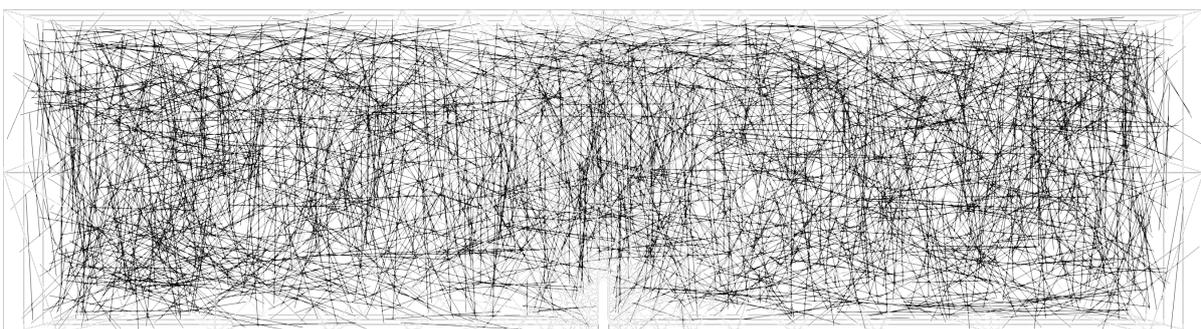


Figura 4.21 – Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,58\%$).

Com o objetivo de aumentar as possibilidades de caminhos para a propagação das fissuras, optou-se por utilizar malhas não-estruturadas compostas por elementos do tipo cunha. A Figura 4.22 ilustra a configuração da malha utilizada nas simulações, e informações complementares estão disponíveis na Tabela 4.12.

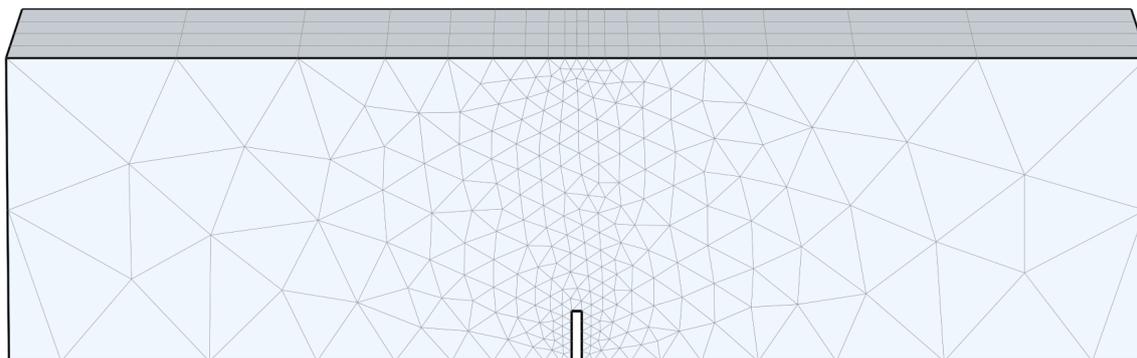


Figura 4.22 – Representação da malha de elementos finitos utilizada.

Tabela 4.12 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas

| Volume de fibras | Graus de liberdade | Quantidade de nós | Quantidade de elementos |
|-------------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 0,19% | 45.618 | 20.941 | 12.491 |
| 0,38% | 58.806 | 31.125 | 19.251 |
| 0,58% | 72.675 | 41.379 | 26.153 |

4.3.2 - Resultados e discussões das análises numéricas

Após realizar as análises numéricas, foi possível obter as forças resultantes na viga decorrentes da aplicação dos deslocamentos impostos, bem como os afastamentos horizontais entre as faces do entalhe (CMOD). Com esses dados, foram geradas as curvas de carga *versus* CMOD e realizadas comparações com os resultados experimentais, apresentados nas Figuras 4.23, 4.24 e 4.25.

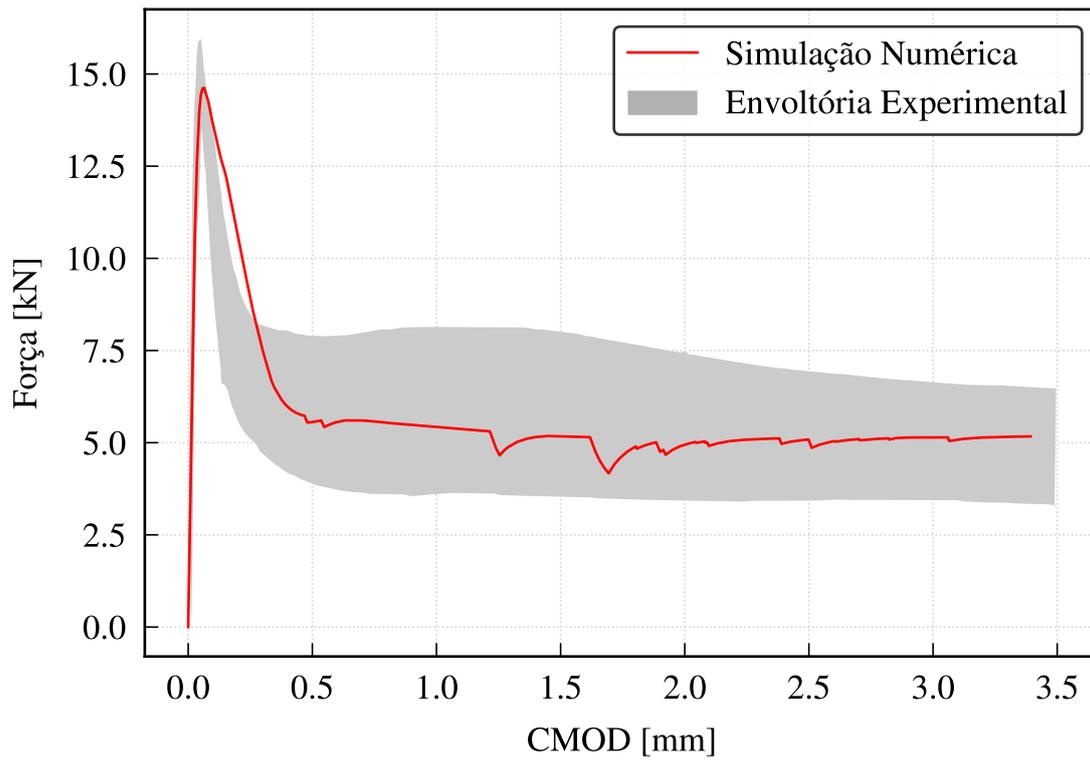


Figura 4.23 – Curva carga *versus* CMOD ($V_f = 0, 19\%$).

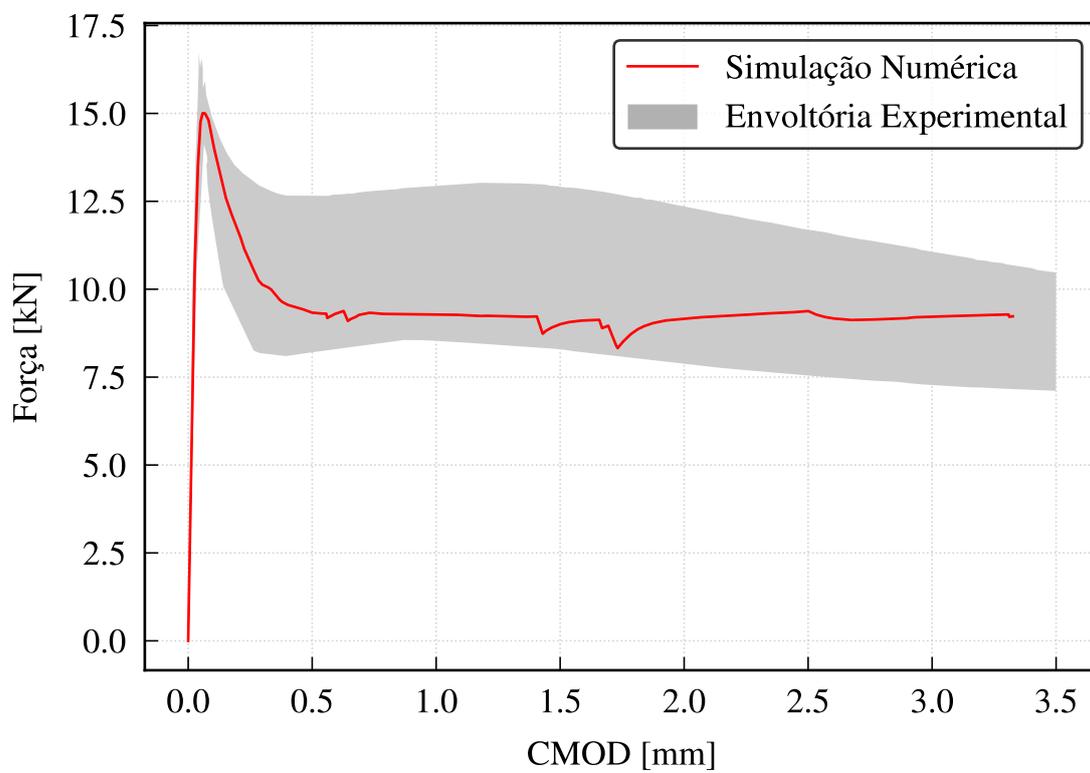


Figura 4.24 – Curva carga *versus* CMOD ($V_f = 0, 38\%$).

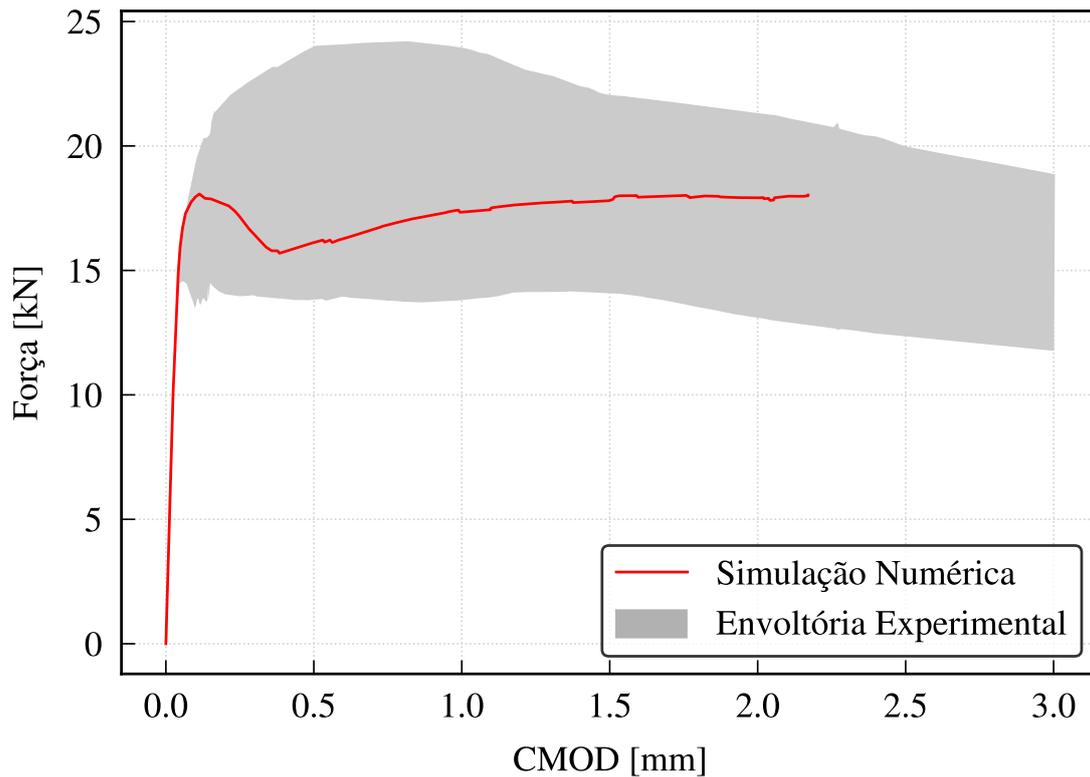


Figura 4.25 – Curva carga *versus* CMOD ($V_f = 0, 58\%$).

As Figuras 4.26, 4.27 e 4.28 ilustram o estado deformado da viga ao final da análise, permitindo observar a abertura da fissura na malha pela separação dos elementos. É importante destacar que os deslocamentos nessas figuras foram multiplicados por um fator de cinco para facilitar a visualização das fissuras.

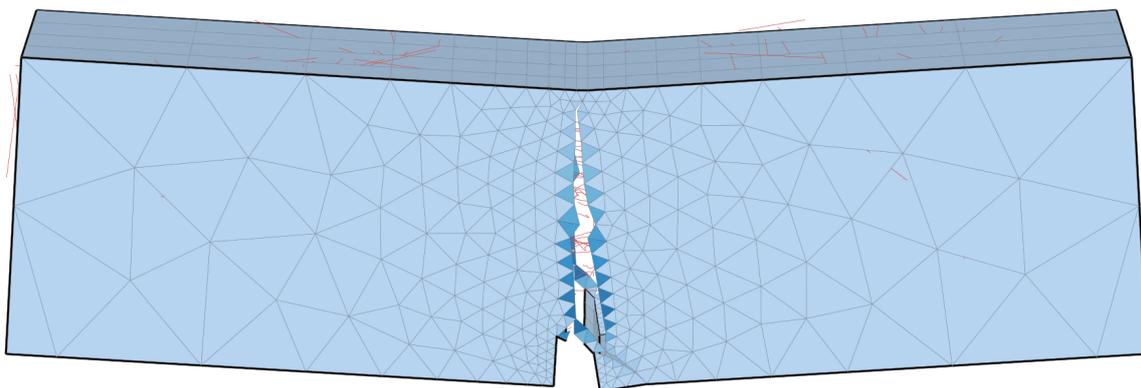


Figura 4.26 – Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação. ($V_f = 0, 19\%$) Fator de escala 05.

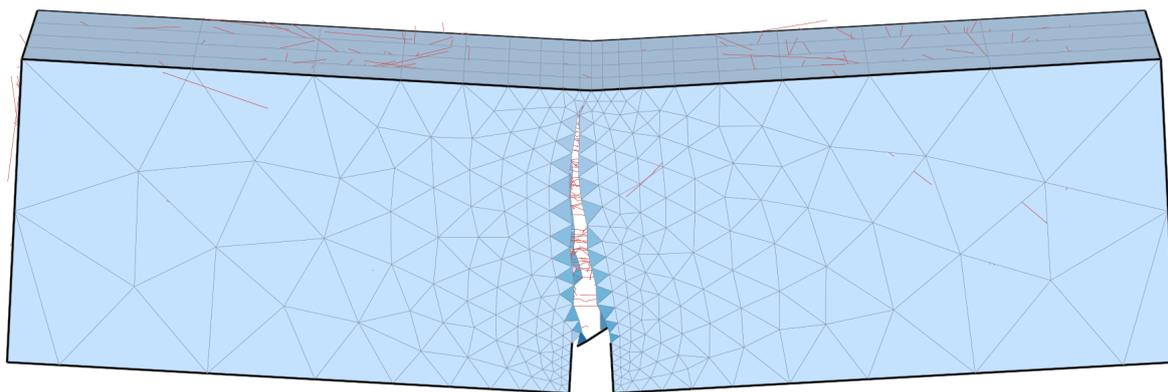


Figura 4.27 – Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação ($V_f = 0,38\%$). Fator de escala 05.

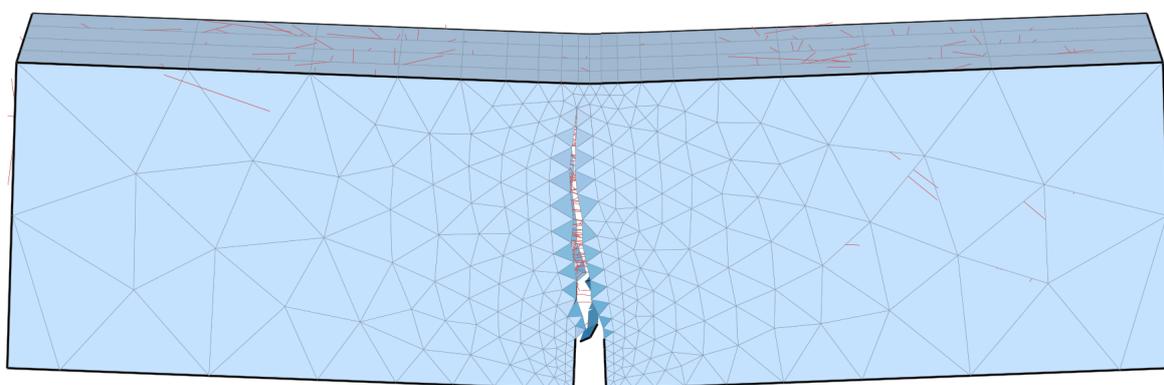


Figura 4.28 – Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação ($V_f = 0,58\%$). Fator de escala 05.

A partir dos resultados obtidos, pode-se inferir que a abordagem proposta conseguiu simular satisfatoriamente a curva experimental, além de simular a tendência de perda de resistência da viga de concreto reforçado com fibras de aço após a carga de pico devido à fissuração. Observa-se nas imagens das estruturas deformadas estão de acordo com o fenômeno físico, uma vez que a tensão de tração se concentra na ponta da fissura, enquanto a região comprimida da viga encontra-se logo acima da linha neutra. Por fim, verificou-se que o padrão de fissuração da viga nas análises numéricas está de acordo com o ensaio experimental.

4.4 - ENSAIO DE FLEXÃO EM QUATRO PONTOS CONDUZIDO POR YOO *ET AL.* (2015)

Os parâmetros adotados para a simulação do ensaio de flexão em quatro pontos foram derivados do estudo conduzido por Yoo et al. (2015). Nessa pesquisa, os investigadores utilizaram uma

viga com dimensões de 100 mm x 400 mm x 100 mm. Os pontos de apoio foram posicionados a uma distância de 50 mm das faces laterais da viga, resultando em um vão efetivo de 300 mm. Além disso, as forças responsáveis por induzir o deslocamento da viga foram aplicadas a uma distância de 150 mm das faces laterais, conforme representado na Figura 4.29.

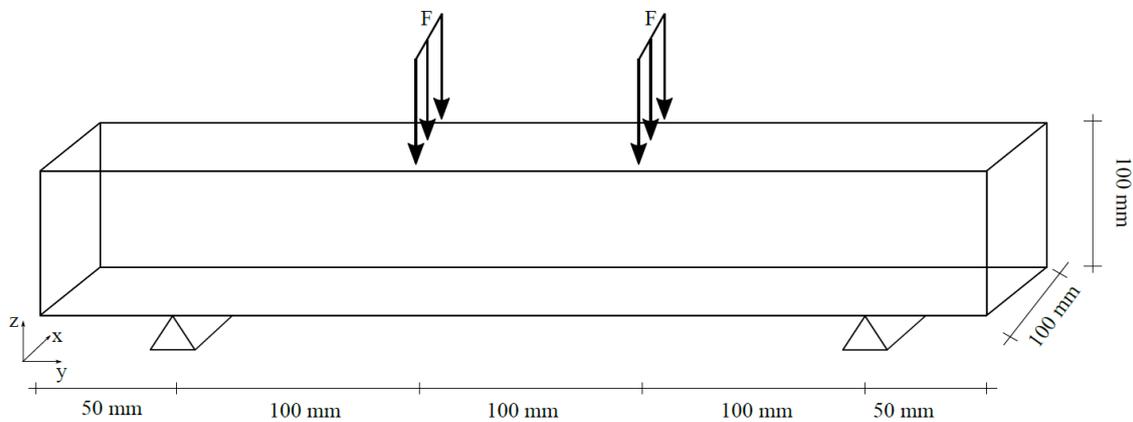


Figura 4.29 – Propriedades geométricas e condições de contorno da viga ensaiada (Faria, 2017).

Para a formulação da modelagem, foram adotadas condições de contorno específicas. Tais condições consistiram na aplicação de deslocamentos predefinidos de -0,15 mm ao longo do eixo z , correspondentes aos pontos de aplicação das forças na superfície superior da estrutura. Além disso, foram impostas restrições de deslocamento em todas as direções nos nós associados ao primeiro apoio, localizado a uma coordenada de 50 mm no eixo y . Nos nós que correspondem ao segundo apoio, situados a 350 mm no eixo y , foram implementadas restrições nos deslocamentos verticais, permitindo, no entanto, o deslocamento horizontal da viga.

4.4.1 - Parâmetros da modelagem

Durante a simulação dos elementos volumétricos e coesivos, usados para emular o comportamento do concreto, foram empregados um módulo de elasticidade E de 29,9 GPa e um coeficiente de Poisson ν de 0,2, em conformidade com os valores fornecidos por Yoo et al. (2015). Outros parâmetros necessários para a modelagem dos elementos coesivos foram devidamente detalhados na Tabela 4.13. Vale ressaltar que houve a necessidade de ajuste no parâmetro ζ . Com o objetivo de reduzir ainda mais os deslocamentos elásticos, optou-se por adotar o valor de 20 para este parâmetro, o qual permanece dentro da faixa sugerida por Durand et al. (2023).

Por sua vez, a modelagem das fibras de aço foi conduzida empregando fibras de configuração reta, com dimensões de 30 mm de comprimento, diâmetro de 0,5 mm, tensão última atingindo

Tabela 4.13 – Parâmetros utilizados na modelagem do concreto.

| E (GPa) | ν | f_c (MPa) | f_t (MPa) | G_f (kN/m) | α |
|-----------|-------|-------------|-------------|--------------|----------|
| 29,9 | 0,2 | -49,21 | 3,91 | 0,114 | 1,55 |

1195 MPa e um módulo de Young de 200 GPa. A fração volumétrica de fibras ($V_f = 0,5\%$) adotada para o ensaio experimental resultou na incorporação de 3395 fibras na malha de elementos finitos. Um resumo dos parâmetros empregados no modelo constitutivo de comportamento elástico perfeitamente plástico encontra-se apresentado na Tabela 4.14. Além disso, conforme detalhado por Faria (2017), os parâmetros que governam as características do contato entre os elementos volumétricos e os elementos de barra foram derivados da curva de comportamento da fibra do tipo B, conforme delineado no estudo de Cunha et al. (2011). Esta abordagem se justifica pela ausência de ensaios experimentais de arrancamento nos trabalhos de Yoo et al. (2015). Os parâmetros foram selecionados por exibirem resultados numéricos que demonstram maior proximidade com os dados experimentais, podendo ser consultados na Tabela 4.15.

Tabela 4.14 – Parâmetros utilizados na modelagem das fibras de aço

| E_s (GPa) | Área (mm ²) | f_y (MPa) |
|-------------|-------------------------|-------------|
| 200 | 0,196 | 1.195 |

Tabela 4.15 – Parâmetros utilizados no modelo de aderência fibra-concreto

| τ_{max} (MPa) | τ_{res} (MPa) | s_{peak} (mm) | s_{res} (mm) | k_s (kPa/m) | k_n (kPa/m) |
|--------------------|--------------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|
| 4,5 | 2,0 | 0,2 | 0,75 | 10^9 | 10^6 |

Finalmente, para efetuar a representação da viga por meio do MEF, foi escolhida uma abordagem de discretização do domínio utilizando uma malha não-conforme, composta por elementos do tipo cunha, como ilustrado na Figura 4.30. Novamente, nessa abordagem, foi adotada a delimitação de um plano de ruptura, localizado no centro da viga e correspondente a uma faixa de 160 mm nas coordenadas do eixo y . Desse modo, os elementos coesivos foram inseridos exclusivamente nessa região, juntamente com as fibras modeladas por meio do método discreto combinado com elementos de contato. Nas demais regiões da viga, optou-se pelo método embutido para a modelagem das fibras. Mais informações sobre a malha de elementos finitos adotada pode ser conferida na Tabela 4.16. Adicionalmente, a distribuição das fibras pode ser observada na Figura 4.31.

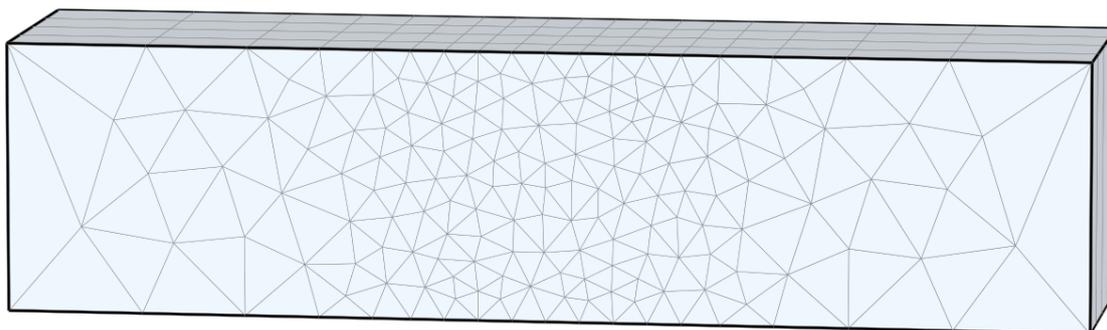


Figura 4.30 – Representação da malha de elementos finitos utilizada

Tabela 4.16 – Dados da malha empregada nas análises numéricas

| Graus de liberdade | Quantidade de nós | Quantidade de elementos | Elementos de junta |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| 63.705 | 40.057 | 24.995 | 2.696 |

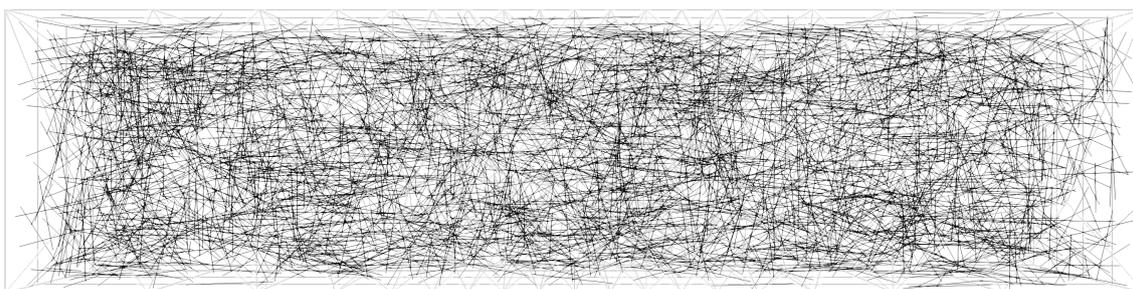


Figura 4.31 – Distribuição das fibras na malha de elementos finitos ($V_f = 0,5\%$)

4.4.2 - Resultados e discussões das análises numéricas

Após a realização das análises numéricas, os dados essenciais para a construção da curva de carga *versus* deslocamento foram adquiridos. Para fins comparativos, os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.32, juntamente com os resultados experimentais fornecidos por Yoo et al. (2015), assim como os resultados numéricos derivados dos modelos propostos por Kotsovos (2015) e Mazars (1984), extraídos do estudo conduzido por Faria (2017). Verifica-se que a abordagem de modelagem empregada nesta pesquisa exhibe avanços notáveis em relação aos modelos adotados no estudo anterior. Destaca-se, notadamente, a maior proximidade entre os valores da carga máxima e seu correspondente deslocamento, evidenciando uma melhor concordância com o fenômeno de amolecimento do concreto e sua consequente tensão residual pós-pico.

No entanto, percebe-se que a adoção da simplificação das fibras retas em contraste com as fibras ancoradas empregadas no estudo experimental, além da utilização de valores aproximados para os parâmetros do modelo de aderência fibra-concreto, podem ter exercido influências significativas na qualidade da modelagem. Esses fatores desempenham um papel crucial na resposta mecânica do compósito em análise. Portanto, é possível concluir que a utilização de parâmetros mais realistas poderia proporcionar resultados numéricos mais fidedignos, refletindo de maneira mais precisa os fenômenos observados nos estudos laboratoriais práticos. Para fins ilustrativos, a Figura 4.33 exibe o estado deformado da malha de elementos finitos após o fim da simulação.

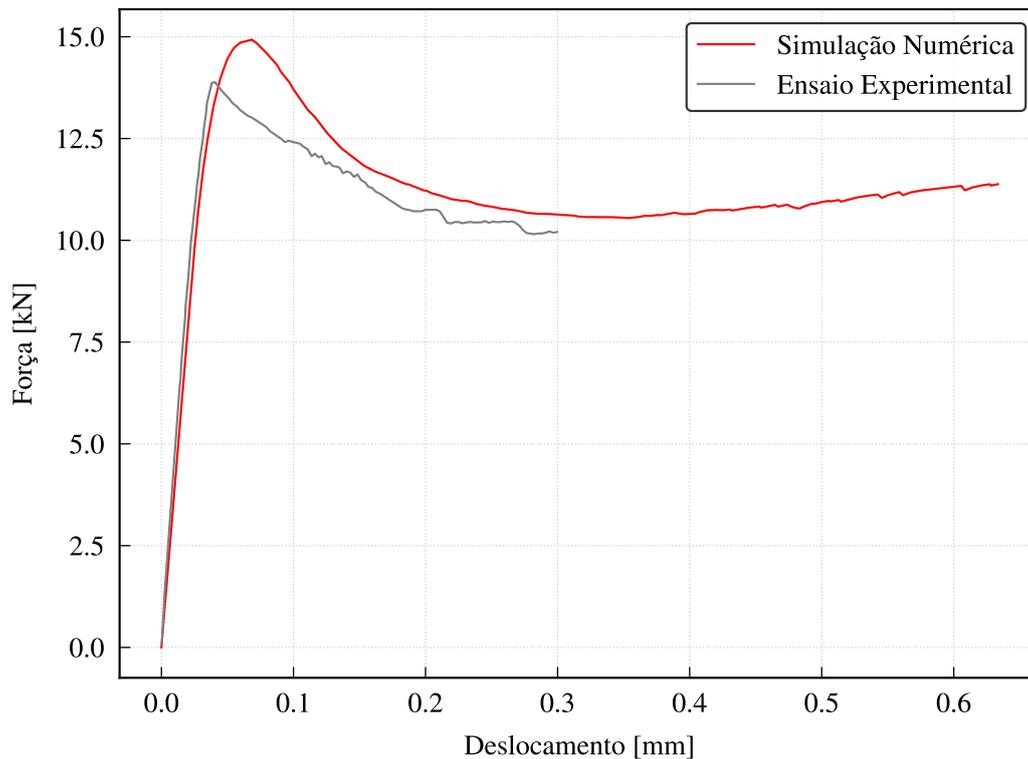


Figura 4.32 – Curvas numéricas e experimental de carga *versus* deslocamento ($V_f = 0,5\%$).

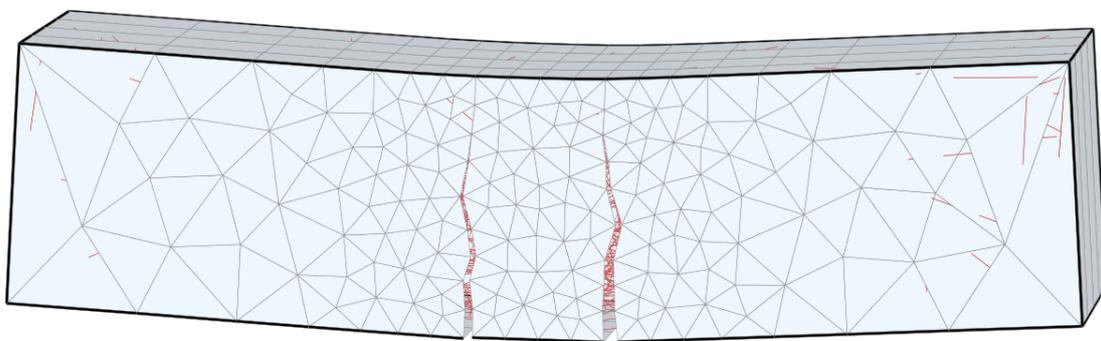


Figura 4.33 – Estado deformado do corpo de prova ao final da simulação ($V_f = 0,5\%$). Fator de escala 30.

5 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, foi proposta uma abordagem avançada para a modelagem numérica do concreto reforçado com fibras de aço, utilizando elementos coesivos. Essa metodologia consistiu em três fases distintas: modelagem do concreto, inclusão de fibras (discretas e embutidas) e representação da interface concreto-fibra.

A principal vantagem dessa abordagem é a sua flexibilidade e independência na geração das fibras de aço em relação à malha de elementos finitos do concreto, o que permitiu evitar a necessidade de modelos homogeneizados e malhas complexas, resultando em maior eficiência computacional.

A combinação da análise tridimensional com a implementação de elementos de interface coesiva e um modelo de plasticidade de fratura possibilitou uma simulação precisa do comportamento do concreto reforçado com fibras de aço. Além disso, a inclusão de elementos de contato proporcionou uma representação mais realista da interação entre as fibras e a matriz de concreto, tornando o modelo mais fiel à realidade.

Diferentes estratégias de inclusão das fibras foram exploradas durante as simulações numéricas, permitindo uma análise detalhada e abrangente do comportamento estrutural. Os resultados obtidos apresentaram excelente concordância com os ensaios experimentais, validando a precisão da metodologia proposta.

Essa abordagem oferece novas perspectivas para o estudo do concreto reforçado com fibras de aço, permitindo análises mais abrangentes e eficientes. A capacidade de considerar de forma independente os principais fatores que influenciam o comportamento do material, como a complexa interação entre o concreto e as fibras, contribui para uma compreensão mais profunda do processo de falha.

Assim, a metodologia apresentada nesta dissertação representa uma importante contribuição para o campo da engenharia civil no que tange a análise numérica do CRFA. A aplicação de métodos computacionais avançados permitiu realizar experimentos virtuais precisos, reduzindo custos e tempo de produção, o que resultou em maior eficiência na pesquisa e desenvolvimento de novos materiais e técnicas construtivas, trazendo benefícios significativos para o campo de estudo. Cabe mencionar que os resultados da presente pesquisa foram apresentados no Congresso Internacional sobre Patologia e Reabilitação das Construções (CINPAR 2023) e publicados no *Journal of Building Pathology and Rehabilitation* (Rodrigues e Durand, 2023)

5.1 - CONCLUSÕES

A metodologia empregada evidenciou sua eficácia na modelagem do compósito reforçado com fibras de aço (CRFA). Salienta-se que a seleção dos elementos utilizados nas simulações, aliada aos modelos constitutivos adotados, demonstrou uma capacidade notável de prever de maneira coerente a resposta mecânica do concreto reforçado com fibras de aço. Portanto, a aplicação desses distintos tipos de elementos possibilitou a incorporação de diferentes facetas à análise, destacando-se as propriedades intrínsecas das fibras de aço, do concreto e das interfaces entre esses elementos. Essa abordagem técnica permitiu um isolamento mais realista do efeito das variáveis e a incorporação de suas contribuições individuais.

A diversificação dos métodos utilizados para simular as inclusões demonstrou ser vantajosa para a metodologia proposta. Em virtude da natureza das fibras, que tendem a exercer sua influência de maneira mais notável nos planos de ruptura dos elementos, funcionando como pontes de tensão, a adoção de diferentes métodos de inclusão permitiu uma redução nos graus de liberdade do sistema. Isso conduziu a uma menor exigência computacional para as análises, sem comprometer a integridade dos resultados obtidos. Consequentemente, o impacto decorrente do considerável número de elementos presentes nas análises foi mitigado.

O algoritmo de geração de fibras demonstrou a capacidade de emular com sucesso o efeito da distribuição aleatória dentro dos corpos de prova. Evidenciou-se que a geração das fibras nas malhas de elementos finitos produziu distribuições notáveis, suscetíveis a modificações por meio de ajustes na semente de inicialização da distribuição aleatória, sem resultar em distorções ou tendências sistemáticas. Consequentemente, as fibras foram distribuídas de maneira abrangente por toda a malha, assumindo diversas angulações distintas e aproximando-se do comportamento real observado no compósito.

O modelo foi capaz de efetivamente capturar o aumento na resistência à tração e na tenacidade do compósito resultante do incremento na fração volumétrica das fibras. Isso foi confirmado através da análise de um ensaio hipotético de tração, no qual diferentes frações volumétricas de fibras foram consideradas nas simulações. O discreto aumento na resistência à tração, juntamente com um aumento mais substancial na resistência residual, evidencia a habilidade do modelo em incorporar o efeito do aumento das fibras em seus resultados. As curvas obtidas nas simulações são altamente congruentes com as curvas obtidas nos ensaios experimentais. Além disso, ressalta-se que um efeito semelhante foi observado ao variar o comprimento das fibras, o que por sua vez resultou no aumento da densidade do aço presente no corpo de prova. Essa variável também foi adequadamente capturada pela modelagem e apresentou as mesmas implicações nos resultados.

O impacto da aleatoriedade na distribuição das fibras pode ser considerado ínfimo, o que

ressalta a estabilidade numérica do modelo. Através da análise de diferentes distribuições de fibras para uma mesma fração volumétrica, foi possível constatar que a aleatoriedade presente nessas distribuições não acarreta impactos substanciais nos resultados, o que evidencia a maturidade da técnica de modelagem adotada. Tal observação proporciona maior confiabilidade nas análises, uma vez que as respostas geradas para distintas distribuições permaneceram coesas, apresentando variações mínimas entre si.

As respostas numéricas reproduziram satisfatoriamente os resultados experimentais. Foram conduzidas simulações numéricas dos ensaios experimentais delineados por Baez (2014), Trindade et al. (2020) e Yoo et al. (2015). Nesses estudos, foi notável a concordância entre os resultados obtidos nas simulações e os dados experimentais. No ensaio de tração, a curva numérica apresentou valores próximos para a carga de pico e seu respectivo deslocamento, resultando em padrões de fissuração condizentes com aqueles observados nos ensaios laboratoriais. No que se refere ao ensaio de flexão em três pontos, é digno de nota que as análises realizadas para diferentes frações volumétricas conseguiram simular de forma satisfatória grande parte dos resultados experimentais, apesar da complexidade envolvida devido à grande quantidade de elementos e graus de liberdade. No contexto do ensaio de flexão em quatro pontos, ressalta-se a importância da utilização de dados precisos durante a simulação. Embora o emprego de estimativas tenha resultando em resultados numéricos coesos, as simplificações e aproximações adotadas implicaram em uma degradação do desempenho do modelo. Contudo, a robusta e coesa convergência entre as simulações e os experimentos atesta a eficácia da abordagem proposta em reproduzir, de maneira consistente, os ensaios de tração e flexão relacionados ao CRFA.

5.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com o objetivo de dar sequência à investigação iniciada nesta pesquisa, são sugeridos alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos em etapas subsequentes:

1. Aprofundar a aplicação do modelo proposto para abranger elementos de concreto armado reforçado com fibras. Isso permitirá analisar de maneira mais abrangente como a interação entre as fibras de aço e o concreto impacta o comportamento estrutural, incorporando também as características do reforço convencional;
2. Expandir as análises numéricas para englobar diversos tipos de ensaios experimentais, incluindo compressão axial, compressão diametral, flexão em quatro pontos e ensaios de arrancamento. Isso possibilitará uma compreensão mais completa dos efeitos das fibras de aço em diferentes regimes de carregamento;

3. Realizar simulações numéricas detalhadas em ensaios de arrancamento, considerando variações nos comprimentos embutidos das fibras, diferentes seções transversais e angulações das fibras. Isso permitirá uma análise minuciosa dos mecanismos de ruptura e da influência das características das fibras na resistência do compósito;
4. Realizar investigações numéricas sobre o comportamento de elementos estruturais reforçados com diferentes tipos de fibras, incluindo compósitos híbridos. Isso permitirá explorar como diferentes combinações de fibras afetam a resistência e o comportamento global do material, proporcionando uma compreensão mais holística das interações;
5. Uma exploração adicional poderia envolver a investigação da viabilidade de formulações alternativas que se baseiam na representação implícita das fibras, por meio de modificações nos parâmetros do concreto convencional. Essa abordagem alternativa poderia oferecer insights sobre como as características mecânicas do concreto são influenciadas pelas fibras em níveis microestruturais, proporcionando uma perspectiva mais ampla sobre o comportamento compósito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abbas, Mohammad, Benoît Bary e Ludovic Jason (2023). “A 3D mesoscopic frictional cohesive zone model for the steel-concrete interface”. Em: *International Journal of Mechanical Sciences* 237, p. 107819. ISSN: 0020-7403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107819>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740322006993>.

Abdulhameed, Ali A. et al. (mar. de 2021). “Push-out test of steel-concrete-steel composite sections with various core materials: behavioural study”. Em: *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 21.1, 17, p. 17. DOI: [10.1007/s43452-021-00173-y](https://doi.org/10.1007/s43452-021-00173-y).

Alfano, Marco et al. (2007). “Fracture analysis of adhesive joints using intrinsic cohesive zone models”. Em: *Key Eng Mater* 348, pp. 13–16.

Algourdin, N. et al. (2020). “Influence of polypropylene and steel fibres on thermal spalling and physical-mechanical properties of concrete under different heating rates”. Em: *Construction and Building Materials* 259, p. 119690. ISSN: 0950-0618. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119690>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061820316950>.

Almeida, Guilherme Mesquita de (2016). “Aplicação de tuned-mass dampers para controle de vibrações em lajes.” Diss. de maestr. Universidade de São Paulo, p. 90.

Alves, Michell Macedo e Sergio Persival Baroncini Proença (2010). “Método da partição na análise de múltiplas fissuras”. Diss. de maestr. Universidade de São Paulo.

Baez, Fabian Augusto Lamus (2014). “Modelo numerico del comportamiento inelastico del concreto reforzado con fibras cortas de acero”. Universidad Nacional de Colombia.

Barenblatt, G.I (1959). “The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks”. Em: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 23.3, pp. 622–636. ISSN: 0021-8928. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90157-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90157-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892859901571>.

Barenblatt, G.I. (1962). “The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture”. Em: ed. por H.L. Dryden et al. Vol. 7. *Advances in Applied Mechanics*. Elsevier, pp. 55–129. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215608701212>.

Barros, Alexandre Rodrigues de (2009). “Avaliação do comportamento de vigas de concreto auto-adensável reforçado com fibras de aço”. Diss. de mestr. Universidade Federal de Alagoas, p. 155.

Bastos, Paulo Sérgio dos Santos. (1999). “Análise experimental de dormentes de concreto protendido reforçados com fibras de aço”. Tese de dout. Universidade de São Paulo, p. 252.

Bažant, Zdeněk P e Byung H Oh (1983). “Crack band theory for fracture of concrete”. Em: *Matériaux et construction* 16, pp. 155–177.

Bažant, Zdenek P e Jaime Planas (1997). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Vol. 16. CRC press.

Benedetto, Matías Fernando, Antonio Caggiano e Guillermo Etse (2018). “Virtual elements and zero thickness interface-based approach for fracture analysis of heterogeneous materials”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 338, pp. 41–67. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782518301713>.

Bentur, A. e S. Mindess (2006). *Fibre Reinforced Cementitious Composites, Second Edition*. Modern Concrete Technology. Taylor & Francis. ISBN: 9780203088722. URL: <https://books.google.com.br/books?id=zqJbJ4rNXvEC>.

Bhowmik, Sonali e Sonalisa Ray (2019). “An experimental approach for characterization of fracture process zone in concrete”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 211, pp. 401–419. ISSN: 0013-7944. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.02.026>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794418310890>.

Bitencourt Jr, Luís AG et al. (2019). “Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 159, pp. 171–190.

Bittencourt, Túlio Nogueira (1999). *Faturamento do concreto estrutural: aspectos teóricos, computacionais e experimentais, e suas aplicações*.

Bono, Giuliana Furtado Franca (2008). “Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos”. Tese de dout. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 181.

Borst, René de et al. (2004). “Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap”. Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28.7-8, pp. 583–607. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.374>. eprint: <https://doi.org/10.1002/nag.374>.

//onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nag.374. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nag.374>.

Brandt, Andrzej M (2008). “Fibre reinforced cement-based (FRC) composites after over 40 years of development in building and civil engineering”. Em: *Composite structures* 86.1-3, pp. 3–9.

Callister Junior, William D e David G Rethwisch (2012). *Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução*. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC.

Camacho, G.T. e M. Ortiz (1996). “Computational modelling of impact damage in brittle materials”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 33.20, pp. 2899–2938. ISSN: 0020-7683. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00255-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00255-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768395002553>.

Carol, Ignacio, Pere C. Prat e Carlos M. López (1997). “Normal/Shear Cracking Model: Application to Discrete Crack Analysis”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 123.8, pp. 765–773. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:8(765). eprint: <https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281997%29123%3A8%28765%29>. URL: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281997%29123%3A8%28765%29>.

Carol, Ignacio et al. (2011). “Cracking and fracture of concrete at meso-level using zero-thickness interface elements”. Em: *Numerical Modeling of Concrete Cracking*. Springer, pp. 51–97.

Carvalho, Marcelo R. et al. (2020). “A computational model for simulation of steel fibre reinforced concrete with explicit fibres and cracks”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 363, p. 112879. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112879>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578252030061X>.

Cendón, DA et al. (2000). “Modelling the fracture of concrete under mixed loading”. Em: *International journal of fracture* 103, pp. 293–310.

Cervenka, J e V Cervenka (2010). “On the uniqueness of numerical solutions of shear failure of deep concrete beams: comparison of smeared and discrete crack approaches”. Em: *Computational Modeling of Concrete Structures*, pp. 281–290.

Chen, Le et al. (2021). “Multiscale study of fibre orientation effect on pullout and tensile behavior of steel fibre reinforced concrete”. Em: *Construction and Building Materials* 283,

p. 122506. ISSN: 0950-0618. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.122506>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095006182100266X>.

Chu, S.H. e A.K.H. Kwan (2019). “A new bond model for reinforcing bars in steel fibre reinforced concrete”. Em: *Cement and Concrete Composites* 104, p. 103405. ISSN: 0958-9465. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2019.103405>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946519303580>.

Code, Model et al. (2010). “fib model Code for concrete structures”. Em: *Structural Concrete* 14.

Congro, Marcello et al. (2019). “Fracture modeling of fiber reinforced concrete in a multiscale approach”. Em: *Composites Part B: Engineering* 174, p. 106958. ISSN: 1359-8368. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.106958>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836819310285>.

Cunha, Vitor MCF, Joaquim AO Barros e JM Sena-Cruz (2011). “An integrated approach for modelling the tensile behaviour of steel fibre reinforced self-compacting concrete”. Em: *Cement and Concrete Research* 41.1, pp. 64–76.

Dai, Qingli e Kenny Ng (2014). “2D cohesive zone modeling of crack development in cementitious digital samples with microstructure characterization”. Em: *Construction and Building Materials* 54, pp. 584–595. ISSN: 0950-0618. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2013.12.095>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061814000154>.

Del Río Gaitán, Juan David (2015). “Aplicação do método de elementos finitos semi-embutidos na simulação de vigas de concreto armado”. Diss. de mestr. Universidade de Brasília, p. 100.

Dumêt, Tatiana Bittencourt (2003). “Aderência de cordoalhas em concretos de alta resistência com e sem fibras de aço”. Tese de dout. Universidade de São Paulo, p. 331.

Durand, R. (2008). “Análise tridimensional de estruturas geotécnicas submetidas a reforço e drenagem”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 176.

Durand, R., J.F. Vieira e M.M. Farias (2023). “Numerical analysis of bonded and unbonded prestressed RC beams using cohesive and non-compatible rod elements”. Em: *Engineering Structures* 288, p. 116157. ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116157>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029623005710>.

Durand, R et al. (2021). “Reinforcing bars modelling using a rod–solid interface element without the need for mesh compatibility”. Em: *Finite Elements in Analysis and Design*. Ed. por Elsevier.

Durand, Raul, Márcio M. Farias e Dorival M. Pedroso (2015). “Computing intersections between non-compatible curves and finite elements”. Em: *Computational Mechanics* 56.3, pp. 463–475. ISSN: 1432-0924. DOI: 10 . 1007 / s00466 - 015 - 1181 - y. URL: <https://doi.org/10.1007/s00466-015-1181-y>.

Durand, Raul e Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva (2019). “A Coulomb-based model to simulate concrete cracking using cohesive elements”. Em: *International Journal of Fracture* 220.1, pp. 17–43.

Durand, Raul e Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva (2021). “Three-dimensional modeling of fracture in quasi-brittle materials using plasticity and cohesive finite elements”. Em: *International Journal of Fracture* 228.1, pp. 45–70.

Etse, Guillermo, Antonio Caggiano e Sonia Vrech (2012). “Multiscale failure analysis of fiber reinforced concrete based on a discrete crack model”. Em: *International journal of fracture* 178, pp. 131–146.

Faria, Thalles Morais (2017). “Estudo numérico em concreto reforçado com fibras de aço utilizando o método dos elementos finitos e modelos constitutivos”. Diss. de mest. Universidade de Brasília, p. 78.

Figueiredo, Antônio Domingues, Pedro J CHAMA NETO e Hernando M FARIA (2008). “A nova normalização brasileira sobre fibras de aço [The new Brazilian standard on steel fibers]”. Em: *Concreto e Construção* 36, pp. 67–76.

Figueiredo, Antonio Domingues de (2000). “Concreto com fibras de aço”. Em: *Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP* BT/PCC/260.

Figueiredo, Antônio Domingues de (2011). “Concreto reforçado com fibras”. Tese de dout. Universidade de São Paulo.

Freire Rodrigues, Thiago Luiz e Raul Durand (2023). “Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete using cohesive elements”. Em: *Journal of Building Pathology and Rehabilitation* 8.2, p. 69. ISSN: 2365-3167. DOI: 10 . 1007 / s41024 - 023 - 00316 - z. URL: <https://doi.org/10.1007/s41024-023-00316-z>.

Gerstle, Walter H. e Ming Xie (1992). “FEM Modeling of Fictitious Crack Propagation in Concrete”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 118.2, pp. 416–434. DOI: 10 . 1061 / (ASCE) 0733 - 9399 (1992) 118 : 2 (416) . eprint: <https://ascelibrary.org/>

doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281992%29118%3A2%28416%29.
URL: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281992%29118%3A2%28416%29>.

Geuzaine, Christophe e Jean-François Remacle (2009). “Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.11, pp. 1309–1331. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2579>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2579>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2579>.

Góis, Fernanda Alves Pinto (2010). “Avaliação experimental do comportamento do concreto fluido reforçado com fibras de aço: influência do fator de forma e da fração volumétrica das fibras nas propriedades mecânicas do concreto”. Diss. de mestr. Universidade Federal de Alagoas, p. 162.

Gopalaratnam, VS e Surendra P Shah (1985). “Softening response of plain concrete in direct tension”. Em: *Journal Proceedings*. Vol. 82. 3, pp. 310–323.

Griffith, Alan Arnold (1921). “VI. The phenomena of rupture and flow in solids”. Em: *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593, pp. 163–198.

Gálvez, J.C. et al. (2002). “A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete”. Em: *Cement and Concrete Research* 32.10, pp. 1567–1585. ISSN: 0008-8846. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(02\)00825-6](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00825-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884602008256>.

Hao, Yifei e Hong Hao (2013). “Dynamic compressive behaviour of spiral steel fibre reinforced concrete in split Hopkinson pressure bar tests”. Em: *Construction and Building Materials* 48, pp. 521–532.

Hillerborg, A., M. Modéer e P.-E. Petersson (1976). “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”. Em: *Cement and Concrete Research* 6.6, pp. 773–781. ISSN: 0008-8846. DOI: [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0008884676900077>.

Hordijk, Dirk A (1992). “Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses”. Em: *Heron* 37.1.

Huang, Yiqun et al. (2023). “Experimental and numerical study of hooked-end steel fiber-reinforced concrete based on the meso- and macro-models”. Em: *Composite Structures* 309,

p. 116750. ISSN: 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116750>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822323000946>.

Jeon, Siwoo et al. (2023). “Prediction of concrete anchor pull-out failure using cohesive zone modeling”. Em: *Construction and Building Materials* 383, p. 130993. ISSN: 0950-0618. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.130993>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061823007055>.

Juan Murcia-Delso, Andreas Stavridis e P. Benson Shing (2013). “Bond Strength and Cyclic Bond Deterioration of Large-Diameter Bars”. Em: *ACI Structural Journal* 110.4.

Karabatakis, DA e TN Hatzigogos (2002). “Analysis of creep behaviour using interface elements”. Em: *Computers and Geotechnics* 29.4, pp. 257–277.

Karihaloo, B.L. (1995). *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. Concrete design and construction series. Longman Scientific & Technical. ISBN: 9780582215825. URL: <https://books.google.com.br/books?id=GHFhQgAACAAJ>.

Krajcinovic, Dusan e Jan Van Mier (2000). *Damage and fracture of disordered materials*. 1ª ed. New York: Springer.

Kumar, Shailendra e Sudhirkumar V Barai (2011). *Concrete fracture models and applications*. Springer.

Lamus, Fabián Augusto, Dorian Luis Linero e Rubén Darío Guevara (2019). “Two-Dimensional Numerical Model of the Fracture Process in Steel Fibre Reinforced Concrete with the Continuum Strong Discontinuity Approach and Functional Data Analysis”. Em: *Latin American Journal of Solids and Structures* 16, e180.

Li, Hui et al. (2022). “3D meso-scale fracture modelling of concrete with random aggregates using a phase-field regularized cohesive zone model”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 256, p. 111960. ISSN: 0020-7683. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111960>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768322004139>.

Li, Victor C. (2002). “Large volume, high-performance applications of fibers in civil engineering”. Em: *Journal of Applied Polymer Science* 83.3, pp. 660–686.

Lubliner, J. et al. (1989). “A plastic-damage model for concrete”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 25.3, pp. 299–326. ISSN: 0020-7683. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768389900504>.

Mauludin, Luthfi Muhammad e Timon Rabczuk (2021). “Computational modeling of fracture in capsule-based self-healing concrete: A 3D study”. Em: *Frontiers of Structural and Civil Engineering* 15.6, pp. 1337–1346.

Mehta, Povindar Kumar e Paulo Jose Melaragno Monteiro (2008). *Concreto: microestrutura, propriedades e materiais*. 3ª ed. São Paulo: IBRACON.

Morales-Alonso, Gustavo et al. (2018). “Numerical simulation of fracture of concrete at different loading rates by using the cohesive crack model”. Em: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 96, pp. 308–325. ISSN: 0167-8442. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.05.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167844217304056>.

Moës, Nicolas, John Dolbow e Ted Belytschko (1999). “A finite element method for crack growth without remeshing”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.1, pp. 131–150. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J). eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819990910%2946%3A1%3C131%3A%3AAID-NME726%3E3.0.CO%3B2-J>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819990910%2946%3A1%3C131%3A%3AAID-NME726%3E3.0.CO%3B2-J>.

Naderi, Sadjad e Mingzhong Zhang (2022). “3D meso-scale modelling of tensile and compressive fracture behaviour of steel fibre reinforced concrete”. Em: *Composite Structures* 291, p. 115690. ISSN: 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115690>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382232200472X>.

NBR 15530 (2019). *Fibras de aço para concreto - Requisitos e métodos de ensaio*. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Rio de Janeiro, p. 38.

Nogueira, C.G., W.S. Venturini e H.B. Coda (2013). “Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures considering the influence of shear strength complementary mechanisms”. Em: *Latin American Journal of Solids and Structures* 10.5, 953–980. ISSN: 1679-7825. DOI: [10.1590/S1679-78252013000500006](https://doi.org/10.1590/S1679-78252013000500006). URL: <https://doi.org/10.1590/S1679-78252013000500006>.

Oliveira, Carlos Antônio Silva (2005). “Taxa de armadura longitudinal mínima em vigas de concreto de alta resistência com fibras de aço”. Tese de dout. Universidade Federal do Rio de Janeiro, p. 115.

- Oller, Sergio (2001). *Fractura mecánica: un enfoque global*. Vol. 1. Cimne Barcelona.
- Ortega, Roger et al. (2021). “Evaluation and fitting of a numerical model for reinforced concrete thin walls through experimental results of monotonic and cyclic loading tests”. Em: *Latin American Journal of Solids and Structures* 18.5, e383. ISSN: 1679-7825. DOI: 10.1590/1679-78256575. URL: <https://doi.org/10.1590/1679-78256575>.
- Ortiz, M. e A. Pandolfi (1999). “Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44.9, pp. 1267–1282. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990330\)44:9<1267::AID-NME486>3.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990330)44:9<1267::AID-NME486>3.0.CO;2-7). eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819990330%2944%3A9%3C1267%3A%3AAID-NME486%3E3.0.CO%3B2-7>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819990330%2944%3A9%3C1267%3A%3AAID-NME486%3E3.0.CO%3B2-7>.
- Qasim, M., C.K. Lee e Y.X. Zhang (2023). “Flexural strengthening of reinforced concrete beams using hybrid fibre reinforced engineered cementitious composite”. Em: *Engineering Structures* 284, p. 115992. ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115992>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029623004066>.
- Quevedo, Felipe Pinto da Motta (2017). “Comportamento a longo prazo de túneis profundos revestidos com concreto: modelo em elementos finitos”. Diss. de mestr. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 209.
- Quinino, Uziel Cavalcanti de Medeiros (2004). “Uso do método das interfaces coesivas na análise da simulação do comportamento de fratura em materiais frágeis”. Diss. de mestr. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 150.
- Rao, Singiresu S (2011). *The finite element method in engineering*. 5ª ed. Butterworth-heinemann.
- Remmers, J. J. C., R. de Borst e A. Needleman (2003). “A cohesive segments method for the simulation of crack growth”. Em: *Computational Mechanics* 31.1, pp. 69–77. ISSN: 1432-0924. DOI: 10.1007/s00466-002-0394-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s00466-002-0394-z>.
- Ribeiro, Paula de Oliveira et al. (2020). “Numerical and experimental study of concrete I-beam subjected to bending test with cyclic load”. Em: *Latin American Journal of Solids and Structures* 17.3, e266. ISSN: 1679-7825. DOI: 10.1590/1679-78255880. URL: <https://doi.org/10.1590/1679-78255880>.

Ruiz, Gonzalo, Anna Pandolfi e Michael Ortiz (2001). “Three-dimensional cohesive modeling of dynamic mixed-mode fracture”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52.1-2, pp. 97–120. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.273>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.273>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.273>.

Sant’Ana, Marcos Vinicios Pereira (2005). “Modelo numérico para concreto reforçado com fibras de aço”. Tese de dout. Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF.

Saouma, VE (2000). “Lecture notes in fracture mechanics”. Em: *Department of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado*.

Sarraz, Atik, Hikaru Nakamura e Taito Miura (2023). “Mesoscale modelling of SFRC based on 3D RBSM considering the effects of fiber shape and orientation”. Em: *Cement and Concrete Composites* 139, p. 105039. ISSN: 0958-9465. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2023.105039>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946523001130>.

Sarzalejo, A.G. (2007). *Fibras como elemento estrutural para reforço de concreto: manual técnico*. Maccaferri, p. 238. URL: <https://books.google.com.br/books?id=kgogygAACAAJ>.

Şenol, Ahmet e Mustafa Aytakin (2008). “Finite element modeling of swelling soil pressures using joint/interface elements”. Em: *Geotechnical and Geological Engineering* 26.3, pp. 313–321.

Shi, Zihai (2009). *Crack analysis in structural concrete: theory and applications*. Butterworth-Heinemann. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8446-0.X0001-0>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780750684460000036>.

Silva, Fernando Hipólito Barros Trindade da (2017). “Análise numérica da fratura no concreto em modo I e modo misto utilizando elemento de junta”. Diss. de mestr. Universidade de Brasília, p. 106.

Silva Neto, Conrado Praxedes (2015). “Modelagem da fratura do concreto armado por meio de interfaces coesivas”. Diss. de mestr. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 107.

Souza, Remo Magalhães de (2003). “O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor”. Em: *Apostila, Universidade Federal do Pará, Belém*.

Sun, C.T. e Z.-H. Jin (2012). “Chapter 9 - Cohesive Zone Model”. Em: *Fracture Mechanics*. Ed. por C.T. Sun e Z.-H. Jin. Boston: Academic Press, pp. 227–246. ISBN: 978-0-12-385001-0. DOI:

<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385001-0.00009-2>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123850010000092>.

Tamayo, Jorge L. P., Inácio B. Morsch e Armando M. Awruch (2013). “Static and dynamic analysis of reinforced concrete shells”. Em: *Latin American Journal of Solids and Structures* 10.6, 1109–1134. ISSN: 1679-7825. DOI: 10.1590/S1679-78252013000600003. URL: <https://doi.org/10.1590/S1679-78252013000600003>.

Tavárez, Federico A (2001). “Simulation of behavior of composite grid reinforced concrete beams using explicit finite element methods”. Diss. de maestr. University of Wisconsin - Madison, p. 152.

Trindade, Yasmin T et al. (2020). “Design of SFRC members aided by a multiscale model: Part I–Predicting the post-cracking parameters”. Em: *Composite Structures* 241, p. 112078.

Wu, Zemei, Caijun Shi e Kamal Henri Khayat (2019). “Investigation of mechanical properties and shrinkage of ultra-high performance concrete: Influence of steel fiber content and shape”. Em: *Composites Part B: Engineering* 174, p. 107021.

Wu, Zhangyu et al. (2023). “3D mesoscale modelling of steel fiber-reinforced aggregate concrete”. Em: *International Journal of Mechanical Sciences* 257, p. 108550. ISSN: 0020-7403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108550>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740323004526>.

Xu, Wei, Mengyan Zang e Jiro Sakamoto (2016). “Modeling Mixed Mode Fracture of Concrete by Using the Combined Discrete and Finite Elements Method”. Em: *International Journal of Computational Methods* 13.01, p. 1650007. DOI: 10.1142/S0219876216500079. eprint: <https://doi.org/10.1142/S0219876216500079>. URL: <https://doi.org/10.1142/S0219876216500079>.

Xu, X.-P. e A. Needleman (1994). “Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids”. Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42.9, pp. 1397–1434. ISSN: 0022-5096. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(94)90003-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509694900035>.

Yamaguchi, Eiki e Toshiaki Ohta (1993). “Accurate and efficient method for analysis of reinforced concrete structures”. Em: *Journal of Structural Engineering* 119.7, pp. 2017–2035.

Yang, Z.J. e Jianfei Chen (2005). “Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 72.14, pp. 2280–2297. ISSN: 0013-7944. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.02.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794405000755>.

Yoo, Doo-Yeol, Young-Soo Yoon e Nemkumar Banthia (2015). “Flexural response of steel-fiber-reinforced concrete beams: Effects of strength, fiber content, and strain-rate”. Em: *Cement and Concrete Composites* 64, pp. 84–92.

Zhang, H. et al. (2018). “A discrete-continuum coupled finite element modelling approach for fibre reinforced concrete”. Em: *Cement and Concrete Research* 106, pp. 130–143. ISSN: 0008-8846. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2018.01.010>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884617304556>.

Zhang, Hui et al. (2023). “An explicit methodology of random fibre modelling for FRC fracture using non-conforming meshes and cohesive interface elements”. Em: *Composite Structures* 310, p. 116762. ISSN: 0263-8223. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116762>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382232300106X>.

Zollo, Ronald F (1997). “Fiber-reinforced concrete: an overview after 30 years of development”. Em: *Cement and concrete composites* 19.2, pp. 107–122.