



**ALGORITMO NÃO-LINEAR BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL APLICADO A PROBLEMAS DE  
FRATURA ELASTOPLÁSTICA**

**MSc. ALVARO MARTINS DELGADO NETO**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ALGORITMO NÃO-LINEAR BASEADO NO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL  
APLICADO A PROBLEMAS DE FRATURA ELASTOPLÁSTICA**

**MSc. ALVARO MARTINS DELGADO NETO**

**ORIENTADOR: GILBERTO GOMES, DSc.**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO:**  
**BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO – 2023**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ALGORITMO NÃO-LINEAR BASEADO NO MÉTODO DOS**  
**ELEMENTOS DE CONTORNO COM RECIPROCIDADE DUAL**  
**APLICADO A PROBLEMAS DE FRATURA ELASTOPLÁSTICA**

**MSc. ALVARO MARTINS DELGADO NETO**

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO POR:

---

**Prof. Gilberto Gomes, DSc. (PECC - UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Marcio Augusto Roma Buzar, DSc. (FAU - UNB)**  
(Examinador Interno)

---

**Prof. Luiz Carlos Wrobel, PhD. (PUC-RJ)**  
(Examinador Externo)

---

**Prof. Daniel Nelson Maciel, DSc. (UFRN-RN)**  
(Examinador Externo)

**BRASÍLIA/DF, 22 DE NOVEMBRO DE 2023**

## FICHA CATALOGRÁFICA

**DELGADO NETO, ALVARO M.**

Algoritmo Não-Linear Baseado no Método dos Elementos de Contorno com Reciprocidade Dual Aplicado a Problemas de Fratura Elastoplástica [Distrito Federal] 2023.

xxi, 130 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, D.Sc., Estruturas, 2023)

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1. Método dos Elementos de Contorno      | 2. Método da Reciprocidade Dual |
| 3. Método dos Elementos de Contorno Dual | 4. Elastoplasticidade           |
| 5. Propagação de Trincas                 | 6. Zona Plástica                |
| I. ENC/FT/UnB                            | II. Título (série)              |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

**DELGADO NETO, ALVARO M.** (2023). Algoritmo Não-Linear Baseado no Método dos Elementos de Contorno com Reciprocidade Dual Aplicado a Problemas de Fratura Elastoplástica. Tese de Doutorado, Publicação 00XX/2023, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 151p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DO AUTOR:** Alvaro Martins Delgado Neto

**TÍTULO DA TESE DE DOUTORADO:** Algoritmo Não-Linear Baseado no Método dos Elementos de Contorno com Reciprocidade Dual Aplicado a Problemas de Fratura Elastoplástica.

**GRAU:** Doutor      **ANO:** 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



Alvaro Martins Delgado Neto

R. Lúcia Viveiros, 255, T06, Apto 206 – Neópolis

CEP: 59086-005 – Natal/RN – Brasil

*"Tem brinquedo espalhado pela casa toda  
E as paredes rabiscadas com o giz de cera  
Mudou de tal maneira  
Nossa vida já não é a mesma*

*A gente já não dorme mais a noite inteira  
Na mesa tem dois copos e uma mamadeira  
Mudou de tal maneira  
Nossa vida já não é a mesma*

*Tem um pinguinho de gente correndo na sala  
Com o sorriso banguelo, eu não quero mais nada*

*Sabe aquele amor que se multiplica?  
Quem nunca sonhou ter isso na vida?  
Ser herói de alguém e, melhor ainda  
Ter do lado a Mulher Maravilha"*

**Zé Neto e Cristiano – Mulher Maravilha**  
**(Uma homenagem a minha filha Luísa e minha esposa Alana)**

## **DEDICATÓRIA**

Dedico esta tese com todo amor aos meus pais, Antonio Martins e Maria Haide, pela força e proteção a mim proporcionadas, através de suas fortes orações, durante o período de desenvolvimento deste trabalho. Tudo que eu conquistei até hoje, eu dedico a vocês, e a vocês entrego toda a minha gratidão por várias vezes pensarem mais em mim do que em vocês próprios. Dedico também a minha esposa Alana Parente e a minha filha querida e amada, Luísa, o maior presente de vida que Deus me deu. Vocês fizeram meus dias mais felizes e belos. Obrigado e amo todos vocês.

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe Haide, meu pai Antonio e meu irmão Paulo Renato, pela compreensão, paciência e apoio dados, diante da minha decisão em deixar minha terra natal e vir tão longe conquistar meus sonhos. Amo muito vocês.

Aos amigos no Rio Grande do Norte, que me apoiaram e me incentivaram a minha vinda pra Brasília em um dos momentos mais difíceis da minha vida. Essa decisão eu não tomei sozinho, obrigado a todos.

A pessoa mais importante da minha vida, minha pequena Alana Parente, que durante esses últimos anos mesmo longe sempre me apoiou e, com muita paciência, me esperou com seu “abraço-casa” para me receber de volta. As poucas vezes que nos vimos, o pouco tempo que ficávamos juntos me dava forças para voltar a Brasília e acreditar que eu podia continuar e que eu ia terminar essa jornada. “Feliz do homem que tem a amiga, a namorada e a amante na mesma mulher”... e eu tenho você. Te amo, minha princesa.

Aos professores da UFRN, Roberto pelos conselhos e a quem devo toda minha vontade de ser professor também, Fernanda por todo o apoio desde a época de monitoria até hoje como uma grande amiga com seus apoios e ao professor Neres pelos conselhos e incentivo dados na fase final do meu doutorado e aos demais professores, a todos você eu devo uma imensa gratidão meus mestres.

Ao professor Gilberto Gomes, pelo incentivo, orientação, paciência e, principalmente, pela amizade e dedicação demonstradas ao longo de todos esses anos, desde a dissertação de Mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A **DEUS**, o nosso criador e como gosto de chama-lo “Meu Amigo confidente tímido”.

## RESUMO

Devido à aplicação de cargas em corpos fissurados, o comprimento da trinca existente em uma estrutura aumenta com o tempo, resultando em maior concentração de tensão em torno da ponta da trinca e causando, por conseguinte, um aumento na velocidade de propagação e uma diminuição na resistência residual da estrutura que, após determinado tempo, se torna tão baixa que a estrutura não pode mais suportar as cargas de serviço. Este trabalho apresenta uma nova abordagem para avaliar modelos elastoplásticos bidimensionais em cenário de propagação de trincas, baseada no método dos elementos de contorno e suas formulações duais.

A metodologia adotada consiste em duas etapas: a primeira é a simulação do comportamento elastoplástico, que considera o processo das tensões iniciais e possibilita o tratamento de diversos critérios de escoamento, sem levar em conta a incompressibilidade das deformações inelásticas. Nesta etapa, a integral de domínio, devido aos termos não-homogêneos na região de plastificação, é transformada em integral de contorno pelo Método da Reciprocidade Dual (MRD), primeira formulação dual, com uso de funções do tipo “poliharmonics splines” que têm comportamento local e, a partir do cálculo plástico, a integral  $J$  é usada para computar os fatores de intensidade de tensão.

A segunda etapa visa simular, de maneira incremental, o caminho de propagação da trinca utilizando o software BemCracker2D para modelagem e análise de trincas, com base na Mecânica da Fratura Elastoplástica e o Método dos Elementos de Contorno Dual, segunda formulação dual. Para validar a metodologia adotada, bem como simular corretamente o comportamento mecânico de trincas no regime plástico do material, oito modelos de chapas 2D com trincas de borda reta e inclinada são utilizados. Foram utilizados três critérios de plastificação para materiais perfeitamente plásticos e os resultados numéricos são comparados com modelos clássicos da literatura, tendo assim, demonstrados a eficácia do BemCracker2D ao prever a zona plástica com o uso do MRD na ponta da trinca. O mesmo programa apresentou, no tratamento da trinca, excelente predição do caminho de propagação e na determinação dos fatores de intensidade de tensão plásticos em modo misto.

**Palavras-Chaves:** Modelos Elastoplásticos, Propagação de Trincas, Método dos Elementos de Contorno Dual, Método da Reciprocidade Dual, Fratura Elastoplástica.

## ABSTRACT

Due to the application of loads on cracked bodies, the length of an existing crack in a structure increases over time, resulting in a higher stress concentration around the crack tip. Consequently, this leads to an increase in crack propagation velocity and a decrease in the residual strength of the structure. After a certain period, the structure's strength becomes so low that it can no longer support the service loads. This work presents a novel approach for assessing two-dimensional elastoplastic models in the context of crack propagation, based on the method of boundary elements and its dual formulations.

The adopted methodology consists of two steps: the first one involves simulating elastoplastic behavior, taking into account the initial stress process and allowing for the treatment of various yield criteria, without considering the incompressibility of inelastic deformations. In this stage, the domain integral, due to non-homogeneous terms in the plasticization region, is transformed into a boundary integral using the Dual Reciprocity Method (DRM), the first dual formulation, employing "poliharmonics splines" type functions that exhibit local behavior. From the plastic calculation, the J-integral is used to compute the stress intensity factors.

The second step aims to incrementally simulate the crack propagation path using the in-house software BemCracker2D for crack modeling and analysis, based on Elastoplastic Fracture Mechanics and the Dual Boundary Element Method, the second dual formulation. To validate the adopted methodology and accurately simulate the mechanical behavior of cracks in the plastic regime of the material, eight 2D plate models with straight and inclined edge cracks are employed. Three plasticity criteria for perfectly plastic materials are used, and the numerical results are compared with classical models from the literature, thus demonstrating the effectiveness of BemCracker2D in predicting the plastic zone using DRM at the crack tip. The same program exhibited excellent prediction of the crack propagation path and the determination of mixed-mode plastic stress intensity factors.

**Keywords:** Elastoplastic Models, Crack Propagation, Dual Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Elastoplastic Fracture.

# SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO .....	1
<b>1.1 - Generalidades</b> .....	1
<b>1.2 - Revisão da Literatura</b> .....	4
1.2.1 - Sobre o MEC Elastoplástico .....	4
1.2.2 - Sobre o MRD .....	6
<b>1.3 - Motivação e Objetivos</b> .....	8
1.3.1 - Motivação.....	8
1.3.2 - Objetivo Geral.....	10
1.3.3 - Objetivos Específicos .....	10
<b>1.4 - Organização do Trabalho</b> .....	11
2 - MECÂNICA DA FRATURA .....	14
<b>2.1 - MFLE x MFEP</b> .....	14
<b>2.2 - Taxa de Liberação de Energia</b> .....	15
<b>2.3 - Fator de Intensidade de Tensão</b> .....	16
<b>2.4 - Integral J</b> .....	19
<b>2.5 - Critérios de Propagação de Trincas</b> .....	24
3 - MODELO ELASTOPLÁSTICO .....	27
<b>3.1 - Conceitos Iniciais</b> .....	27
<b>3.2 - Critérios de Plastificação</b> .....	32
3.2.1 - Critério de Tresca .....	32
3.2.2 - Critérios de von Mises .....	32
3.2.3 - Critério de Gao .....	33
3.2.4 - Comparação entre os critérios .....	34
<b>3.3 - Formulação Elastoplástica</b> .....	36
<b>3.4 - Zona Plástica</b> .....	39

4 - FORMULAÇÕES DUAIS DO MEC .....	41
<b>4.1 - MEC para Elasticidade</b> .....	42
4.1.1 - EIC Elástica.....	42
4.1.2 - Sistema de Equações .....	44
4.1.3 - Cálculo das Tensões no Contorno.....	45
<b>4.2 - MECD</b> .....	46
4.2.1 - Equação Integral de Deslocamento .....	46
4.2.2 - Equação Integral de Força de Contorno .....	46
<b>4.3 - O MRD</b> .....	47
5 - FORMULAÇÕES ELASTOPLÁSTICA COM MECD/MRD.....	52
<b>5.1 - Equações Constitutivas</b> .....	53
<b>5.2 - Formulação do MEC Inelástica</b> .....	54
<b>5.3 - Formulação do MEC Elastoplástica</b> .....	58
5.3.1 - EIC Elastoplástica .....	58
5.3.2 - Tensor de Tensões nos Pontos Internos .....	60
<b>5.4 - Tratamento da Integral de Domínio via MRD</b> .....	61
5.4.1 - Avaliação do Tensor de Tensões em Pontos Internos.....	61
5.4.2 - Avaliação do Tensor de Tensões no Contorno.....	61
6 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....	63
<b>6.1 - O Programa BEMLAB2D</b> .....	63
<b>6.2 - O Programa BemCracker2D</b> .....	65
<b>6.3 - Algoritmo Não-Linear via MRD</b> .....	67
<b>6.4 - Estratégia de Modelagem da Trinca</b> .....	70
<b>6.5 - Interação Entre os Programas</b> .....	73
7 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	77
<b>7.1 - Exemplo I – Chapa Retangular Com Duas Trincas Retas de Borda</b> .....	79
<b>7.2 - Exemplo II – Chapa Retangular Com Uma Trinca Reta de Borda</b> .....	80

7.3 - Exemplo III – Chapa Retangular Com Trinca Reta Embutida .....	81
7.4 - Exemplo IV – Chapa Retangular Com Trincas Inclínada de Borda .....	82
7.5 - Exemplo V – Chapa retangular com trinca no centro .....	83
7.6 - Exemplo VI – Chapa retangular com trinca no centro .....	84
7.7 - Exemplo VII – Chapa retangular com trinca no centro .....	85
7.8 - Exemplo VIII – Chapa em Cruz com trinca .....	86
8 - RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	87
8.1 - Exemplo I – Chapa Retangular Com Duas Trincas Retas de Borda .....	87
8.2 - Exemplo II – Chapa Retangular Com Uma Trincas Retas de Borda .....	89
8.3 - Exemplo III – Chapa Retangular Com Trinca Reta Embutida .....	92
8.4 - Exemplo IV – Chapa Retangular Com Trincas Inclínada de Borda .....	94
8.5 - Exemplo V – Chapa retangular com trinca no centro .....	96
8.6 - Exemplo VI – Chapa retangular com trinca no centro .....	98
8.7 - Exemplo VII – Chapa retangular com trinca no centro .....	99
8.8 - Exemplo VIII – Chapa em Cruz com trinca .....	100
9 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	111
9.1 - Conclusões .....	111
9.2 - Sugestões .....	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	114
Apêndice A - ARTIGOS PUBLICADOS .....	124
A.1. A New Methodology to Predict Damage Tolerance Based on Compliance Via Global-Local Analysis .....	124
A.2. An Object-Oriented Approach to Dual Reciprocity Boundary Element Method Applied to 2D Elastoplastic Problems .....	124
A.3. An Efficient GUI Update For BEM-FEM Mixed Mesh Generation .....	124
A.4. Methodology for Simulating the Elastoplastic Behavior in Crack Propagation Problems Using Dual Formulations of the Boundary Element Method .....	124

Apêndice B - IMPLEMENTAÇÃO NA FORMA DE CÓDIGO .....	125
<b>B.1. Interface Gráfica do BEMLAB2D</b> .....	125
<b>B.2. Módulos de Funcionamento do BEMLAB2D</b> .....	126
Apêndice C - IMPLEMENTAÇÃO NA FORMA DE CÓDIGO .....	130

## LISTA DE SÍMBOLOS

$G$  – Taxa de Liberação de Energia de Deformação ou Módulo de Elasticidade Transversal  
 $dU$  – Parte Infinitesimal da Energia Potencial  
 $t$  – Espessura da Chapa  
 $da$  – Comprimento da Propagação da Trinca  
 $t(da)$  – Área da Trinca  
 $a$  – Comprimento de Trinca  
 $E$  – Módulo de Elasticidade Longitudinal  
 $\nu$  – Coeficiente de Poisson  
 $\sigma$  – Campo de Tensão  
 $K$  – Fator de Intensidade de Tensão  
 $K_I$  – Fator de Intensidade de Tensão do Modo I  
 $K_{II}$  – Fator de Intensidade de Tensão do Modo II  
 $K_{III}$  – Fator de Intensidade de Tensão do Modo III  
 $K_{Ic}$  – Tenacidade à Fratura  
 $r$  e  $\theta$  – Coordenadas Polares do Ponto Distante da Ponta da Trinca associado ao Campo de Tensão  
 $k$  – Constante associada ao FIT e Conjunto de Forças de Encruamento  
 $f_{ij}$  – Função adimensional  
 $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  – Componentes do Campo de Tensão  
 $J$  – Integral J  
 $W$  – Densidade de Energia de Deformação  
 $\sigma_{ij}$  – Tensor de Tensão  
 $\varepsilon_{ij}$  – Deformação  
 $t_i$  – Forças de Superfície  
 $u_i$  – Deslocamentos  
 $\Gamma$  – Contorno da Trinca ou do Modelo Bidimensional  
 $x_1, x_2$  – Eixos de Coordenadas na Ponta da Trinca  
 $n_1$  – Direção Normal ao Contorno  
 $\varepsilon$  – Deformação Total  
 $\varepsilon^e, \varepsilon_h^e$  – Parcela da Deformação Elástica  
 $\varepsilon_h^p, \varepsilon^p$  – Parcela da Deformação Plástica  
 $W_e$  – Parcela da Densidade da Energia de deformação Elástica  
 $W_p$  – Parcela da Densidade da Energia de deformação Plástica  
 $\sigma_p^{eq}$  – Tensão Plástica Equivalente  
 $d\varepsilon_p^{eq}$  – Incremento de Deformação Plástica Equivalente  
 $\partial u/\partial x$  – Deslocamento Vertical na Direção da Trinca  
 $\partial u/\partial y$  – Deslocamento Horizontal Perpendicular à Trinca  
 $\partial \sigma/\partial y$  – Gradiente de Tensão na Direção Perpendicular à Trinca  
 $\partial \sigma/\partial x$  – Gradiente de Tensão na Direção Paralela à Trinca  
 $J_1$  – Parcela da integral J relativo ao Modo I  
 $J_2$  – Parcela da integral J relativo ao Modo II e Segundo Invariante das Tensões Desviadoras  
 $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$  – Campo de Tensões na Ponta da Trinca em Coordenadas Polares  
 $\sigma_1, \sigma_1^I$  – Tensão Principal Máxima  
 $\psi$  – Energia Livre

$\alpha$  – Conjunto de Variáveis Internas Associadas ao Fenômeno de Encruamento do Material e Coeficiente Angular Correspondente ao Módulo de Elasticidade ( $E$ )  
 $\sigma_y, \tau_y, Y, Y_0, Y_1$  e  $Y_n$  – Tensão de Escoamento do Material  
 $\Phi, F$  – Função de Escoamento  
 $\tau_{m\acute{a}x}$  – Tensão de Cisalhamento Máxima  
 $\sigma_{m\acute{a}x}$  – Tensão Principal Máxima  
 $\sigma_{m\acute{i}n}$  – Tensão Principal Mínima  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – Tensões Principais  
 $\sigma_{eq}$  – Tensão Equivalente de von Mises  
 $\sigma_h$  – Tensão Hidrostática  
 $I_1$  – Primeiro Invariante do Tensor de Tensão  
 $J_3$  – Terceiro Invariante do tensor das Tensões Desviadoras  
 $a, b, c$  – Constantes do Material usada no Critério de Gao  
 $\lambda$  – Fator de Redução do Carregamento  
 $\sigma_{eq}^{m\acute{a}x}$  – Tensão Equivalente Máxima  
 $X$  – Vetor Solução do Carregamento Total aplicado  
 $X_e$  – Vetor Solução da Fração Elástica Inicial  
 $\dot{\epsilon}^p$  – Lei de Fluxo Plástico  
 $\dot{\gamma}$  – Multiplicador Plástico  
 $N$  – Vetor de Fluxo Plástico e Número de Nós na Discretização do Contorno  
 $\dot{\sigma}$  e  $\dot{\sigma}_{ij}$  – Tensor de Tensão Incremental  
 $\dot{\epsilon}$  e  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – Tensor de Deformação Incremental  
 $\dot{\sigma}_{ij}^p$  – Parcela Plástica do Tensor Incremental de Tensão Total  
 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  – Parcela Plástica do Tensor Incremental de Deformação Total  
 $\dot{\sigma}_{ij}^e$  – Parcela Elástica do Tensor Incremental de Tensão Total  
 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  – Parcela Elástica do Tensor Incremental de Deformação Total  
 $S_{ij}$  – Tensor de Tensões Desviadoras  
 $\bar{E}$  – Matriz Elastoplástica  
 $r_p, \theta$  – Coordenadas Polares de um Campo de Tensão em Modo Misto onde Ocorre o Início do Escoamento em Relação a Ponta da Trinca  
 $\phi$  – Ângulo de Fase que Separa os Modos I e II  
 $t_y, T$  – Tensão Normalizada  
 $a, b, c, c^*$  – Constantes Adicionais da ZP  
 $\Gamma$  – Contorno Total de um Corpo  
 $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  – Porções do Contorno Total de um Corpo  
 $\Omega$  – Domínio de um Corpo  
 $u_k^*, p_k^*$  – Deslocamento e Força de Superfície no Campo de Ponderação  
 $\bar{u}_k, \bar{p}_k$  – Condições de Contorno de Deslocamento e Tração, respectivamente  
 $u_k, p_k$  – Variáveis de Contorno de Deslocamento e Tração, respectivamente  
 $\sigma_{k,j,j}$  – Derivada do Tensor de Tensões  
 $b_k$  – Força de Corpo  
 $C_{ijkl}$  – Tensor Isotrópico de Quarta Ordem das Constantes Elásticas  
 $u_{ij}^*, p_{ij}^*, \epsilon_{jki}^*$  – Soluções Fundamentais de Kelvin  
 $U_{ijk}^*, P_{ijk}^*$  – Derivada das Soluções Fundamentais de Kelvin  
 $c^i, c_{ij}, c_{ik}^i$  – Matriz 2x2 que Considera o Movimento de Corpo Rígido  
 $\xi$  – Ponto de Colocação

$x$  – Ponto Campo  
 $h_{ij}^k$  e  $g_{ij}^k$  – Submatrizes obtida das Equações Integrais  
 $H, \bar{H}_{ij}, G$  e  $\bar{G}_{ij}$  – Matrizes principais do MEC  
 $A$  – Matriz Reorganizada entre as Matrizes  $H$  e  $G$  dos Termos Desconhecidos  
 $X$  – Vetor dos Termos Desconhecidos  
 $Y$  – Matriz Reorganizada através do Produto entre as Matrizes  $H$  e  $G$  e as Condições de Contorno  
 $\sigma'_{ij}$  e  $\varepsilon'_{ij}$  – Tensor de tensão e de Deslocamento Local, respectivamente  
 $n_j$  – Cossenos Diretores da Normal ao Contorno  
 $f, f^j$  – Função de Aproximação para o MRD  
 $r$  – Distância do Ponto Fonte ao Ponto Internos no Domínio  
 $x$  e  $y$  – Coordenadas do Ponto Interno no Domínio  
 $\delta_{ij}$  – Delta de Kronecker  
 $\alpha_k^j$  – Coeficientes Inicialmente Desconhecidos  
 $L$  – Número de Pontos Internos Empregados no Domínio  
 $\hat{u}, \hat{p}, \hat{t}$  – Pseudo Vetores de Deslocamentos, Tração e Força de Superfície, respectivamente  
 $mr dV$  – Vetor Obtido Através do MRD para os Pontos Internos  
 $\sigma_h$  - Tensão Plástica no Ponto do Descarregamento  
 $\beta$  – Coeficiente Angular Correspondente ao Módulo Plástico  
 $\dot{\varepsilon}_{ij}^a$  – Parcela Inelástica do Tensor Incremental de Deformação Total  
 $\dot{\sigma}_{ij,i}$  – Derivada do Tensor de Tensões  
 $\dot{b}_j$  – Força de Corpo  
 $\dot{p}_i$  – Tração Incremental  
 $\dot{\sigma}_{ij}^a$  – Tensões iniciais incremental, ou Tensor de Tensão da Componente Inelástica  
 $\dot{\varepsilon}_{kl}^a$  – Deformações iniciais, ou Tensor de Deformação da Componente Inelástica  
 $\dot{u}_i, \dot{p}_i$  – Condições de Contorno de Deslocamento e Tração, respectivamente  
 $\dot{p}_j, \dot{u}_j, \dot{b}_j$  – Tração, Deslocamentos e Força de Corpo  
 $\bar{\varepsilon}^p$  – Função da Deformação Plástica Acumulada  
 $\dot{b}_j^p$  – Força de Corpo Plástica Incremental  
 $\dot{p}_i^p$  – Tração Plástica Incremental  
 $vet_U$  – Vetor de Deslocamento  
 $vet_P$  – Vetor de Tração  
 $vet_D$  – Vetor de Deformação  
 $vet_T$  – Vetor de Tensão  
 $P_0$  – Carga de Referência Inicialmente Aplicada  
 $\lambda_0$  – Fator de Carga  
 $a$  – Distância entre os Nós do Elemento (varia  $\pm 2/3$  nas funções de forma)  
 $\xi$  – Variável Interna (varia entre -1, 0, 1)  
 $a, b, h$  - Dimensões da Chapa Retangular e da Trinca  
 $\sigma_{h,0}$  e  $\sigma_{v,0}$  – Tensões de Tração Horizontal e Vertical Aplicado na Chapa Cruciforme

## LISTA DE ABREVIATURAS

EPT – Estado Plano de Tensão  
EPD – Estado Plano de Deformação  
MEC – Método dos Elementos de Contorno  
EIC – Equação Integral de Contorno  
FIT – Fator de Intensidade de Tensão  
MECD – Método dos Elementos de Contorno Dual  
MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica  
MRD – Método de Reciprocidade Dual  
MFEP – Mecânica da Fratura Elastoplástica  
Res-R – Resistência Residual Cíclica  
NCC – Número de Ciclos de Carga  
NPC – Número de Passos de Carga  
2D – Duas Dimensões  
3D – Três Dimensões  
MECDEP – Método dos Elementos de Contorno Dual Elastoplástico  
TPS – *Thin Plate Spline*  
ATPS – *Augmented Thin Plate Spline*  
ZP – Zona Plástica  
VPC – Integral de Valor Principal de Cauchy  
VPH – Integral de Valor Principal de Hadamard  
MECRD – Método dos Elementos de Contorno de Reciprocidade Dual  
GUI – *Graphical User Interface*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Modos de Fratura I, II e III, adaptado de Anderson (2005) .....	16
Figura 2.2 – Campo de tensão na ponta da trinca, (ANDERSON, 2005) .....	17
Figura 2.3 – Caminho de Integração da Integral J.....	20
Figura 2.4 – Pontos internos simetricamente definidos como caminho a Integral “J” .....	21
Figura 2.5 – Campo de Tensões na Ponta da Trinca .....	25
Figura 3.1 – Modelos de comportamento plástico dos materiais .....	28
Figura 3.2 – Diagrama Tensão-Deformação – Ensaio Uniaxial em Barra Metálica.....	29
Figura 3.3 – Diagrama Tensão-Deformação – Perfeitamente Plástico .....	31
Figura 3.4 – Superfície de escoamento Tresca/von Mises – (SOUSA NETO <i>et al.</i> , 2008) 34	
Figura 3.5 – Superfície de escoamento Tresca/von Mises/Gao.....	35
Figura 5.1 – Diagrama Tensão-Deformação Simplificado do Material .....	52
Figura 6.1 – Hierarquia de funcionalidade do BEMLAB2D (DELGADO NETO, 2017)..	63
Figura 6.2 – Hierarquia de funcionalidade do BEMLAB2D (DELGADO NETO, 2017)..	64
Figura 6.3 – Diagrama Sequencial do programa BemCracker2D (GOMES <i>et al.</i> , 2018) ..	66
Figura 6.4 – Diagrama sequencial do algoritmo plástico (GOMES <i>et al.</i> , 2019) .....	68
Figura 6.5 – Elementos de contorno contínuo/descontínuo .....	70
Figura 6.6 – Modelagem dos elementos de trinca (GOMES, DELGADO NETO e WROBEL, 2016).....	72
Figura 6.7 – Modelagem da região da trinca com destaque dos pontos internos .....	73
Figura 6.8 – Arquitetura básica de interação – BEMLAB2D/BemCracker2D .....	74
Figura 6.9 – Arquitetura Completa MECD/MRD .....	75
Figura 7.1 – Chapa retangular com duas trincas de borda reta.....	79
Figura 7.2 – Chapa retangular com uma trincas de borda reta .....	80

Figura 7.3 – Chapa retangular com trinca embutida .....	81
Figura 7.4 – Chapa com trinca inclinada de borda .....	82
Figura 7.5 – Chapa retangular com trinca no centro – placa infinita de Irwin.....	83
Figura 7.6 – Chapa retangular com trinca no centro .....	84
Figura 7.7 – Chapa retangular com trinca no centro .....	85
Figura 7.8 – Chapa cruciforme com trinca de borda .....	86
Figura 7.9 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo I.....	88
Figura 7.10 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo I .....	89
Figura 7.11 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo II .....	90
Figura 7.12 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo II .....	91
Figura 7.13 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo III .....	92
Figura 7.14 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo III.....	93
Figura 7.15 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo IV .....	95
Figura 7.16 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo IV.....	96
Figura 7.17 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo V .....	97
Figura 7.18 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo VI.....	98
Figura 7.19 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo VII.....	99
Figura 7.20 – Chapa cruciforme com trinca: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo VIII.....	100
Figura 7.21 – ZP de von Mises: (a) passo elástico; (b) 1º passo plástico;.....	101
Figura 7.22 – ZP de Tresca: (a) passo elástico; (b) 1º passo plástico; .....	102

Figura 7.23 – ZP de Gao: (a) passo elástico; (b) 1º passo plástico; .....	103
Figura 7.24 – Evolução do número de pontos plastificados na ZP .....	105
Figura 7.25 – ZP de von Mises: (a) 1º incremento; (b) 5º incremento; (c) 10º incremento; .....	106
Figura 7.26 – ZP de Tresca: (a) 1º incremento; (b) 5º incremento; (c) 10º incremento;...	107
Figura 7.27 – ZP de Gao: (a) 1º incremento; (b) 5º incremento; (c) 10º incremento;.....	108
Figura 7.28 – Evolução da ZP: (a) 1º incremento; (b) 5º incremento; (c) 10º incremento; .....	110
Figura B.1 – Ambiente gráfico do pré-processador (DELGADO NETO, 2017).....	125
Figura B.2 – Ambiente gráfico do pós-processador (DELGADO NETO, 2017) .....	126
Figura B.3 – Modelo Geométrico (DELGADO NETO, 2017) .....	127
Figura B.4 – Malha de MEC com Detalhe da Trinca (DELGADO NETO, 2017) .....	127
Figura B.5 – Modelo Físico-Geométrico e Malha de MEC (DELGADO NETO, 2017) .	128
Figura B.6 – Módulo IV - Análise Elastostática (DELGADO NETO, 2017).....	129
Figura B.7 – <i>GUI</i> auxiliar - Malha deformada (DELGADO NETO, 2017) .....	129
Figura C.1 – Diagrama de Classes do programa BemCracker2D (GOMES, DELGADO NETO e WROBEL, 2016).....	130

## LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo I .....	87
Tabela 7.2 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo I.....	88
Tabela 7.3 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo II.....	90
Tabela 7.4 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo II.....	91
Tabela 7.5 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo III.....	92
Tabela 7.6 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo III .....	93
Tabela 7.7 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo IV .....	94
Tabela 7.8 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo IV .....	95
Tabela 7.9 – Fatores de Intensidade de Tensão Normalizado ( $\sigma/\sigma_y$ ) – Exemplo V.....	97
Tabela 7.10 – Fatores de Intensidade de Tensão Normalizado ( $\sigma/\sigma_y$ ) – Exemplo VI.....	98
Tabela 7.11 – Fatores de Intensidade de Tensão Normalizado ( $\sigma/\sigma_y$ ) – Exemplo VII.....	99

# 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 - Generalidades

Métodos numéricos têm sido cada vez mais utilizados para resolver problemas complexos de engenharia desde o desenvolvimento dos computadores e, principalmente, desde o crescimento significativo do poder computacional nas últimas décadas. Comumente, a utilização de métodos em problemas da mecânica da fratura, como o Método dos Elementos de Contorno (MEC), exigia o uso de algumas técnicas especiais para tratar a singularidade causada pelas duas faces coincidentes da trinca.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) aplicado a problemas com trincas pode gerar degeneração no sistema de equações quando a Equação Integral de Contorno (EIC) de deslocamento é usada nas duas faces coincidentes de uma trinca, como foi mostrado em Cruse (1972). Cruse e Van Buren (1971) exploraram a possibilidade de modelar a trinca como um entalhe arredondado para casos assimétricos, mas esse modelo apresentou algumas limitações, como a necessidade de um número elevado de elementos na ponta do entalhe e a precisão do Fator de Intensidade de Tensão (FIT) produzindo um erro alto, em torno de 14%.

A primeira técnica baseada no MEC amplamente utilizada para tratar essa singularidade foi a das sub-regiões (BLANDFORD, INGRAFFEA e LIGGETT, 1981). Esta técnica definia a utilização de duas sub-regiões e cada região mantém contato com uma face distinta da trinca, gerando, portanto, um sistema de equações não-singulares constituído de EIC de deslocamentos sobre cada região. Todavia, a implementação de um procedimento automático na criação das sub-regiões é incômoda, principalmente se for estudada a propagação de trinca. Para superar essas dificuldades, vários pesquisadores têm proposto como solução o emprego de duas equações integrais distintas, ou formulação dual do MEC. Um dos primeiros trabalhos se baseia em uma formulação na equação de deslocamento e sua derivada normal (WATSON, 1986), enquanto as bases teóricas do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) foram apresentadas por Hong e Chen (1988). Esta formulação atribuíu o uso da equação integral de contorno de deslocamento para uma face da trinca e, a equação integral de contorno de força, para a outra face. Contudo, essa formulação aplicada a problemas de trincas com a utilização de elementos

de contorno padrão produziam integrais hipersingulares devido às funções de interpolação nos nós de colocação sobre a trinca.

Portela *et al.* (1992) desenvolveram uma estratégia de modelagem de trincas para solucionar os problemas mais gerais de trincas internas e de borda com o MECD. Nesta formulação, os problemas que causariam a hipersingularidade nos pontos de colocação da trinca são contornados adotando a discretização em ambas as faces das trincas através de elementos de contorno quadráticos descontínuos. Esta estratégia resulta em uma vantagem prática e não só satisfaz automaticamente as condições necessárias impostas pela equação integral hipersingular de contorno de força, como também evita o problema do ponto de colocação nos vértices de trincas, dobras de trincas e trincas de bordo. Mi & Aliabadi (1992) apresentaram a técnica para problemas gerais de Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) tridimensional mista. A precisão e a eficiência do MECD bidimensional para problemas gerais de MFLE, como mostrado por Portela *et al.* (1992), sugere que uma extensão da formulação para a análise de problemas gerais da Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP) de modo misto também pode ser eficaz. Zhang *et al.* (2019), propôs resolver problemas da MFLE modelando o entalhe da trinca em forma de V, a singularidade devido a entalhes agudos foi contornada através do método de interpolação dupla, fornecendo uma previsão dos resultados maior que os obtidos pelo método de interpolação tradicional. Xie *et al.* (2013), estudou problemas com trincas tridimensionais em domínio finito e infinito, neste foi adotado o uso da Equação Integral de Contorno (EIC) de força em toda a superfície da estrutura e em uma das faces da trinca. Os resultados do FITs são obtidos por meio de um método de extrapolação modificado.

As funções de Green foram estudadas através de uma nova abordagem por (TELLES, CASTOR e GUIMARÃES, 1995) e (TELLES e GUIMARÃES, 2000), onde uma nova particularidade foi introduzida para evitar a discretização dos elementos formais das faces das trincas. A aplicação das funções de Green dependia da geometria real da trinca e suas configurações, sendo assim aplicável a casos específicos e requerendo uma teoria variável complexa. Nos trabalhos de Telles (1995; 2000) foram estudados problemas clássicos de múltiplas trincas, de geometria qualquer, aplicando a função de Green numérica. Em trabalhos posteriores, (VERA-TUDELA e TELLES, 2005) e (VERA-TUDELA e TELLES, 2016) apresentou-se um estudo com sucesso na MFLE para problemas estáticos e dinâmicos, considerando forças gravitacionais e problemas transientes de velocidade,

aceleração e fluxo, em que as integrais de domínio foram resolvidas através do Método da Reciprocidade Dual (MRD) (NARDINI e BREBBIA, 1982), transformando-as em integrais de contorno. Outro trabalho que fez uso da função de Green em uma abordagem em trincas de modelos aprimorados foi introduzido por Cruse e Polch (1986).

Todavia, um estudo particular sobre a não linearidade do material conduz o problema ao surgimento da parcela referente à integral de domínio presente na formulação do MEC quando se consideram forças de corpo. Porém, nos problemas que tratam forças de corpo, como forças gravitacionais, transitórias, de fluxo ou até problemas de plastificação do domínio, não devem desconsiderar a parcela da integral de domínio. Nesta situação, estas integrais devem ser resolvidas através de técnicas que tratam o domínio do corpo. No campo da Mecânica da Fratura, um dos primeiros trabalhos propulsores das pesquisas sobre a formulação elastoplástica através do MEC para problemas com trincas foi desenvolvido por Morjaria e Mukherjee (1981), adotando uma trinca em formato elíptico e utilizando as funções de Green para as análises do problema da fratura.

Problemas da Mecânica da Fratura Elastoplástica, na literatura do MEC, vem sendo cada vez mais estudados por pesquisadores. Assim, técnicas mais atuais de discretização em torno do contorno da trinca foram empregadas para obtenção dos dados de plastificação na mecânica da fratura (LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1993; LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1995c; LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1995b; LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1995a). Nestes, foram apresentadas discretizações com células internas em elementos quadráticos quadrilaterais nas regiões da ponta da trinca, onde se esperava o comportamento de escoamento do material. Mais recentemente, Teixeira (2006) apresenta um estudo da MFEP com modelos de trinca de bordo e centrais (retas e inclinadas) no regime elástico perfeitamente plástico, considerando o critério de von Mises. A região em torno da ponta de trinca dos modelos foi discretizada por células triangulares, sendo obtidos os parâmetros de FIT, Resistência Residual Cíclica (Res-R) e a zona plástica.

## 1.2 - Revisão da Literatura

### 1.2.1 - Sobre o MEC Elastoplástico

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) teve origem em estudos realizados por pequenos grupos de pesquisadores nos anos 60. Esses estudos foram baseados na aplicação das equações integrais de contorno para a resolução de problemas relacionados ao potencial e à análise de tensão. Jaswon e Symm (1963; 1963) foram os primeiros a desenvolver conceitos para a solução numérica de problemas baseados na equação de Laplace. Os autores utilizaram elementos retos e assumiram funções de potencial constantes no contorno, avaliando as integrais de contorno por meio da regra de Simpson, com exceção das integrais singulares eram avaliadas analiticamente.

Por volta da década de 70, o método dos elementos de contorno começou a ganhar destaque como uma alternativa ao método dos elementos finitos em muitos problemas práticos. Rizzo (1967) publicou um estudo que explorava a semelhança entre problemas de potencial e a teoria clássica da Elasticidade. Nesse estudo, o autor utilizou uma aproximação numérica semelhante à usada por Jaswon para resolver diversos problemas de elasticidade. Cruse (1969) expandiu esse trabalho para problemas tridimensionais. Com base nessas pesquisas, surgiu a ideia de utilizar elementos de contorno curvilíneos para representar variáveis em termos de funções de interpolação. Isso possibilitou que a técnica utilizasse a mesma versatilidade dos elementos finitos na representação da geometria do problema.

Os primeiros estudos sobre problemas inelásticos surgiram na década de 70. A primeira contribuição nesse assunto se deve a Sweldlon e Cruse (1971), que apresentaram a EIC para formulação direta do MEC em problemas tridimensionais. Nessa equação, os autores observaram a existência de uma integral de domínio que levava em consideração a contribuição da deformação plástica na formulação. Em seguida, Riccardella (1973), através de um processo de solução não iterativo, assumiu que as tensões eram constantes nas células de domínio, quando considerado o critério de escoamento de von Mises (encruamento isotrópico). Entretanto, essa solução requeria que o número de nós no contorno fosse igual ao número de nós no domínio, o que dificultou a extensão da técnica para o uso de polinômios de grau mais alto nas células de domínio como foi apresentado por Lee e Fenner (1986).

Nesse mesmo período, Mendelson (1973) discutiu diferentes formulações de integrais para problemas elastoplásticos. Essa contribuição permitiu que Mendelson e Albers (1975) apresentassem uma formulação para materiais perfeitamente plásticos e com encruamento. Foram estudados problemas de torção geral em barras com seções transversais quadradas, onde os resultados numéricos foram apresentados dentro do contexto da formulação direta e da teoria de deformações plásticas.

Como citado no item anterior, a primeira técnica amplamente utilizada para tratar a singularidade gerada pelas faces coincidentes da trinca foi a técnica das sub-regiões (BLANDFORD, INGRAFFEA e LIGGETT, 1981). Em seguida, Watson (1986) e Portela *et al.* (1992) abordaram novas técnicas com soluções eficientes para a MFLE utilizando as EIC Duais, as quais resolveram as singularidades presentes na trinca. Mais recentemente, Santana e Portela (2016) apresentaram uma aplicação bidimensional do MECD para análise do crescimento de múltiplas trincas em modo misto na MFLE aplicado à fadiga. A análise incremental de propagação da trinca foi definida pelo critério da tensão principal máxima. Baseado em um critério de escoamento, assume-se que quando duas zonas de plastificação nas pontas de duas trincas adjacentes se tocam, a falha acontece e as trincas coalescem. Os resultados desta análise incremental são apresentados para várias geometrias demonstrando a precisão e eficiência das estratégias adotadas na análise.

Para tratar a região de domínio de um modelo 2D e 3D, alguns pesquisadores adotaram o MRD em seus trabalhos relacionados a Mecânica da Fratura. Fedelinski *et al.* (1993) e Albuquerque *et al.* (2003) apresentam em seus trabalhos problemas da fratura dinâmica, tratando as integrais de domínio através do MRD. Albuquerque *et al.* (2003) determina soluções de parâmetros da trinca utilizando a técnica da sub-regiões, já na pesquisa de Fedelinski *et al.* (1993) as análises são realizadas através do MECD. Fedelinski (2004) apresenta uma continuação do estudo anteriormente citado. O autor faz uma aplicação prática avaliando o estudo dinâmico em peças de máquinas industriais fissuradas. Vera-Tudela e Telles (2005) realizaram um estudo elastodinâmico em problemas com trincas embutidas, comparando as análises dos parâmetros da mecânica da fratura através das funções de Green e pelo MRD.

Leitão *et al.* (1995b; 1995c) apresentam uma série de estudos sobre a MFEP utilizando o conceito do MECD. Nos seus estudos eles aplicaram em torno da região da ponta de trinca

(reta ou inclinada) uma discretização quadrática em elementos quadrangulares ou triangulares, denominadas células, assim, sendo possível determinar a zona plástica e demais parâmetros da mecânica da fratura. Nesse contexto, Leitão *et al.* (1995a) considera a influência do contato entre as duas faces da trinca no cálculo do fator de intensidade de tensão.

O Método dos Elementos de Contorno Dual Elastoplástico (MECDEP) é, portanto, proposto como uma técnica eficiente e precisa para a solução de problemas da MFEP de modo misto geral. Pineda León *et al.* (2013) apresenta em seu trabalho uma formulação combinada entre as análises de plasticidade e fluência bidimensional (2D) usando o MEC. Esta nova abordagem é desenvolvida para combinar a equação constitutiva do tempo de endurecimento por fluência e a equação constitutiva para plasticidade, esta última equação é baseada no critério de von Mises e no fluxo de Prandtl-Reuss. O domínio é discretizado em células quadrangulares quadráticas contínuas e descontínuas com o objetivo de obter a deformação por fluência através de integrais de domínio. Os resultados, obtidos com referência a três modelos da literatura, mostra que o Método dos Elementos de Contorno é uma ferramenta adequada para lidar com problemas não-lineares combinados. Yang e Zhou (2017) apresentaram mais recentemente uma solução semi-analítica para cálculo da distribuição de tensão e da zona plástica situada entre a região de uma trinca e um carregamento de contato. Esses trabalhos trouxeram uma nova abordagem de discretização da ponta da trinca, obtendo então informações de tensões e deformações plásticas nesta região. Esta abordagem é, no entanto, um tanto trabalhosa quando se tem que levar em conta os termos plásticos na vizinhança da ponta da trinca e, por esse motivo, o Método da Reciprocidade Dual (MRD), proposto aqui como uma técnica eficiente e precisa para a solução de problemas gerais de domínio, também será utilizado na resolução de problemas da MFEP.

### 1.2.2 - Sobre o MRD

A modelagem do domínio é um tanto trabalhosa devido à construção da malha na ponta da trinca. O MRD é proposto como uma técnica para a solução de problemas gerais sem a necessidade da discretização do domínio. Nardini e Brebbia (1982) apresentaram o procedimento do MRD para resolver problemas elastodinâmicos bidimensionais usando soluções estáticas fundamentais. Outros pesquisadores têm estudado o MRD com MEC em

diversos problemas, como em viscoelasticidade (SENSALE, PARTRIDGE e CREUS, 1996; SENSALE, PARTRIDGE e CREUS, 2001). Como já foi dito, essa técnica não requer qualquer tipo de discretização do domínio ou parte de uma região dele para estudos das tensões e deformações plásticas, as integrações são feitas através de uma aproximação numérica realizada sobre uma chuva de pontos internos no domínio.

Um trabalho mais recente sobre o comportamento da mecânica da fratura foi apresentado por Galvis e Sollero (2016), no qual foi estudado a fratura intergranular dinâmica de materiais policristalinos. Foram consideradas as heterogeneidades e anisotropias das propriedades do material elástico e incluem-se os efeitos da separação atômica. O Método da Reciprocidade Dual é usado para avaliar o campo de deslocamento dinâmico. A propagação da trinca de interações atômicas e um critério de falha inicial também são introduzidos nesta formulação.

Atualmente, importantes trabalhos sobre MRD apresentam soluções alternativas para a integral de domínio em problemas que envolvem dados no domínio do corpo. Baranoglu e Mengi (2006) apresentaram a formulação de elementos de contorno de forma unificada para a análise de problemas de termoviscoelasticidade com domínios de soluções finitas. A formulação da reciprocidade dual proposta é usada na análise de termoviscoelasticidade e permite também a análise em termos de soluções fundamentais da equação de viscoelastodinâmica e difusão. Yun e Ang (2012), em seu trabalho, usam o MRD para determinar problemas de campo axissimétricos independentes de temperatura e de deslocamentos termoelásticos e de tensões em um material não-homogêneo. Yan *et al.* (2017) e AL-Bayati e Wrobel (2018b) apresentam como opção para solucionar problemas bidimensionais de convecção – difusão, reação em estado estacionário com velocidade variável, uma nova formulação do MRD. AL-Bayati e Wrobel (2018a) estudam os mesmos problemas em situação transitória. A formulação relatada nos últimos três trabalhos trata os termos do domínio usando uma aproximação de reciprocidade dual para converter as integrais de domínio que surgem na formulação em integrais de contorno equivalentes. Hamzehei-Javaran e Khaji (2018) apresentam uma reformulação do método dos elementos de contorno usando novas funções complexas da forma de Fourier para resolver problemas elastostáticos e dinâmicos bidimensionais (2D). Para aproximar a geometria dos limites e as variáveis do domínio (deslocamentos e forças), o MRD é reconsiderado pelo emprego de funções complexas da forma de Fourier. No final, vários exemplos numéricos são

resolvidos para ilustrar a eficiência e precisão das funções complexas sugeridas as quais resultam em resultados muito mais precisos e estáveis.

Supriyono e Aliabadi (2007) apresentaram um trabalho sobre análise de placas deformáveis por cisalhamento com não-linearidade pelo MEC, onde o MRD é usado para lidar com a não-linearidade do material e o critério de von Mises usado para avaliar a zona plástica. Outros trabalhos foram desenvolvidos posteriormente envolvendo o estudo do MRD, entre os quais se destaca o trabalho realizado por (GOMES, DELGADO NETO, *et al.*, 2019), onde foi proposta uma nova formulação do MEC para problemas inelásticos sem trinca. Neste, o MRD foi empregado de forma modificada usando funções de aproximação do tipo splines polinomial para tratar a integral de domínio que surge, na EIC da formulação do MEC, devido as tensões inelásticas. Gomes *et al.* (2019) apresentaram a análise elastoplástica de modelos bidimensionais sem trincas pelo MRD. A análise elastoplástica utilizada pelos autores consideram os modelos no regime de comportamento plástico perfeito do material. Essa técnica, além de eficiente, não requer discretização do domínio em células para o tratamento dos termos não-homogêneos como mostrado nos trabalhos (LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1993; LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1995; LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1995; LEITÃO, ALIABADI e ROOKE, 1995), ela necessita apenas de uma discretização em pontos internos. Neste caso, a inovação proposta neste trabalho diz respeito ao desenvolvimento de um algoritmo não-linear para o estudo de problemas da MFEP baseado no MRD, o qual é usado na avaliação das tensões e deformações plásticas em torno da ponta da trinca. O algoritmo não-linear possui a finalidade de simular o comportamento de trincas, utilizando também as formulação dual devido a Portela *et al.* (1992), e avaliar a evolução da zona plástica a cada avanço da trinca. Em suma, é utilizado o MRD proposto por Gomes *et al.* (2019) no tratamento dos termos plásticos, porém adequando o mesmo à consideração da malha funcional exigida pela formulação MECD.

### **1.3 - Motivação e Objetivos**

#### **1.3.1 - Motivação**

A MFLE é uma linha de pesquisa consolidada no estudo de corpos com trinca no regime elástico do material. Modelos gerais da engenharia vêm sendo estudados desde o trabalho

realizado por Portela *et al.* (1992), que simplificou o estudo de trincas em apenas uma região. Atualmente existem diversos trabalhos relacionados a MFLE na literatura acadêmica impulsionados pelo trabalho de Portela. No entanto, há uma carência na literatura existente em termos de metodologias consistentes, simplificadas e adequadas para a modelagem da região em torno da ponta da trinca no estudo da MFEP. Desta forma, pelo menos duas importantes questões serão descritas a seguir.

Primeiro, a discretização dessa região em termos gerais tem deixado muito a desejar. Alguns autores consagrados e experientes como Leitão, Aliabadi e Rooke (1993) e Cisilino e Aliabadi (1999), apresentam estudos com discretizações do domínio na região em torno da ponta da trinca por células, técnica essa que torna a criação da malha custosa. Sendo assim, em nível de processamento e reprocessamento, ao gerar novas malhas, produz restrição dos resultados e se tornado cansativa a obtenção de resultados em modelos com diversas trincas. A modelagem da região em torno da trinca será bastante discutida no Capítulo 6, em que uma nova metodologia será apresentada, e sua praticidade será constatada em aplicações apresentadas no Capítulo 7. Essa nova metodologia utilizada no presente trabalho tem grande importância prática (especialmente no estudo de chapas com trinca), e sua correta e adequada implementação aplicada aos modelos fissurados é fundamental para uma maior aceitação dessa metodologia em diversas indústrias tais como as indústrias automobilística e aeroespacial.

Segundo, no estudo de modelos elastoplástico a realidade é sempre mais complexa do que qualquer modelo matemático. O problema é que muitas vezes os critérios de escoamento tradicionais (von Mises e Tresca) são demasiadamente simplificados para atenderem adequadamente determinadas aplicações, produzindo certa incerteza sobre os resultados obtidos em problemas complexos. Um exemplo é o caso de modelos com trincas estudadas em Modo Misto de fratura elastoplástica. Problemas, como o citado anteriormente, demandam soluções especiais que combinem critérios de escoamento mais refinados, por exemplo, Gao, com métodos mais simplificado e prático de análise das tensões e deformações plásticas do domínio (MRD), que será objeto dessa tese. Sendo assim, visto o crescimento dos estudos e preocupação com os fenômenos de ruína, objetos da mecânica da fratura em estruturas complexas, os poucos estudos relacionados à plastificação na ponta da trinca e seus efeitos danoso a estrutura, ainda exigem certa discretização da região (por exemplo células). Realizar uma análise plástica no domínio em torno da ponta da

trinca sem a preocupação de criar qualquer tipo de malha via MRD e a necessidade de compreender os efeitos danosos que a propagação da trinca produz em estruturas diversas são motivos que justificam o estudo desenvolvido nesta tese.

### 1.3.2 - Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um estudo de análise elastoplástica em problemas bidimensionais envolvendo a propagação de trincas em modo misto, considerando a evolução da zona plástica na ponta da trinca. Além disso, adaptar a implementação do MECD elastoplástico com o MRD. Utilizando esse último método como base de tratamento das integrais de domínio referente à parcela plástica que surgem nas EIC.

### 1.3.3 - Objetivos Específicos

A ideia consiste em desenvolver um programa completo para análise no campo da Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP), considerando-se o comportamento elastoplástico do material. Considerando que a implementação elastoplástica terá como base a MFEP, os objetivos específicos consistem de:

- Realizar uma compatibilização entre o algoritmo incremental de plastificação baseado em MRD para modelos 2D sem trincas de Gomes (2006) e o programa BemCracker2D baseado em MFLE e MECD, possibilitando analisar as tensões plásticas na região em torno da ponta da trinca; adequando o código do MRD à condição da malha funcional exigida pela formulação MECD;
- Implementar um algoritmo, baseado em MRD, para tratamento dos termos não-homogêneos, dentro do BemCracker2D. Compatibilizando as malhas geométrica/funcional utilizada no MECD considerando a análise plástica, a fim de contemplar a análise da MFEP;
- Implementar um algoritmo para reconhecer as possíveis regiões de plastificação e criar a chuva de pontos necessária para análise plástica baseada no MRD, de forma automática;
- Inserir mais dois novos critérios de escoamento ao programa de plastificação que não são tratados no algoritmo incremental de Gomes (2006), a saber (Tresca e Gao);

- Adequar o programa BemCracker2D, baseado na MFLE e MECD, bem como sua interface gráfica de pré e pós-processamento, BEMLAB2D, para obtenção de resultados da análise plástica via MRD. Obtendo, assim, o FIT inelástico, a resistência residual, número de ciclos de cargas à fadiga, a deformação (com ou sem propagação), o caminho de propagação da trinca e a evolução da zona de plastificação na ponta da trinca.

#### **1.4 - Organização do Trabalho**

No Capítulo 1 é apresentada uma breve revisão da literatura sobre os métodos que dão base para o estudo dessa tese. É introduzido os primeiros e principais trabalhos sobre a Mecânica da Fratura elástica e plástica com o MEC. Logo após são apresentados alguns trabalhos relacionados ao Método da Reciprocidade Dual (MRD). Por fim é apresentado o objetivo deste trabalho, onde são mostrados os principais dados que serão obtidos com o estudo da MFEP relacionando o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) com o Método da Reciprocidade Dual (MRD).

No Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos teóricos da Mecânica da Fratura Elástica Linear e Elastoplástica e suas diferenças, descrevendo seus parâmetros e aplicações. Mostram-se também os modos de fratura, assim como a integral J deve ser utilizada para materiais inelásticos, onde a densidade da energia de deformação é igual à soma das parcelas elástica e plástica. Apresentando o critério de propagação de trincas proposto neste trabalho.

O Capítulo 3 apresenta conceitos teóricos sobre o comportamento elastoplástico do material e as principais equações constitutivas da teoria. Em seguida é apresentado o modelo constitutivo plástico e são comparados diversos critérios de escoamento plástico encontrados na literatura (von Mises, Tresca, Gao), ressaltando suas vantagens e desvantagens. Em seguida, a formulação Elastoplástica é desenvolvida e, por fim, é apresentada a forma estimada de obtenção da zona plástica.

No Capítulo 4 é apresentada a base do MEC para a elasticidade, desenvolvendo desde a EIC elástica até o cálculo das tensões nos pontos internos e no contorno. Em seguida, são apresentadas as equações constituintes do MECD e suas técnicas de utilização. São apresentadas em seguida as equações integrais do MECD. Por fim, no mesmo capítulo é

apresentado o MRD e a forma com que são resolvidas as integrais de domínio presente nas EIC para o caso inelástico.

No Capítulo 5 é apresentada a formulação elastoplástica MECD/MRD, iniciando o capítulo apresentando as Equações constitutivas e as formulações do MEC inelástica. Em seguida, se desenvolvem as demonstrações das equações integrais de contorno (EIC) de deslocamentos e forças de superfície, que são usadas como base de desenvolvimento do MEC elastoplástico. Por fim, o tratamento da integral de domínio via MRD é apresentado.

No Capítulo 6, as implementações computacionais e as estratégias de modelagem são apresentadas. Inicialmente é apresentado como é o funcionamento básico da interface gráfica de pré- e pós-processamento BEMLAB2D. Em seguida é descrito o funcionamento do Solver principal, denominado BemCracker2D, com construção na base do MECD. O algoritmo não-linear com base estrutural do MEC para análise elastoplástica bidimensional é apresentado em seguida. O capítulo segue com a apresentação da estratégia de modelagem da trinca e no entorno da mesma. Finalmente é apresentada a interação entre os programas envolvendo MECD/MRD. Por fim é apresentada a estratégia de modelagem da trinca e no entorno da mesma.

No Capítulo 7, oito exemplos de aplicação são apresentados e no Capítulo 8 é abordada a discussão dos resultados comparando com os da literatura. Nos quatro primeiros exemplos, as chapas são feitas de material dúctil contendo trincas de borda ou embutida na chapa, onde a análise é feita em apenas metade da chapa considerando as condições de simetria do eixo vertical. O primeiro consiste na análise de uma chapa contendo duas trincas horizontais começando na altura média das faces verticais. No segundo exemplo é analisada metade da chapa semelhante ao primeiro exemplo, considerando apenas uma trinca de borda. No terceiro exemplo é analisada uma chapa com trinca horizontal embutida no centro, é considerado o eixo de simetria passando pelo meio da trinca do problema. No quarto exemplo é analisada uma chapa retangular com uma trinca inclinada a  $45^\circ$  de borda, começando em uma das faces laterais verticais. Para esses quatro primeiros exemplos é realizada uma comparação entre os resultados obtidos através das análises elásticas e na análise plástica na região da ponta da trinca, também é comparado com problemas encontrados na literatura. Os três próximos exemplos correspondem à análise da plastificação na ponta da trinca de chapas estudadas em trabalhos encontrados na literatura.

Os resultados são comparados com os resultados obtidos nesta Tese e, também, com outros modelos que levam em consideração a plastificação na ponta da trinca. Finalmente é estudado no último exemplo, um modelo clássico da literatura, considerando a plastificação na região em torno da ponta da trinca, através da análise elastoplástica por diversos critérios de escoamento.

O Capítulo 9 traz as conclusões dos resultados obtidos, assim como as restrições do estudo abordado nessa tese, por fim é sugerido possíveis caminhos para continuação da pesquisa em trabalhos futuros.

## **2 - MECÂNICA DA FRATURA**

As rupturas de uma estrutura que suporta uma determinada carga podem ser do tipo dominante de escoamento do material ou do tipo dominante de fratura. Os defeitos aparentes em ambas as falhas estruturais são importantes, mas a falha por fratura difere de maneira extrema da falha por influência do escoamento. Para falhas por fratura, ou seja, fratura antes do escoamento geral da seção, a escala de tamanho dos defeitos é essencialmente macroscópica. Neste capítulo é apresentada uma breve revisão sobre os principais conceitos teóricos sobre a Mecânica da Fratura Linear Elástica e Elastoplástica.

### **2.1 - MFLE x MFEP**

O campo da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) estuda o comportamento de uma trinca propagando instavelmente, obtendo análises de tensões e deformações que surgem nos corpos fissurados. Isto é observado, geralmente, em materiais de alta resistência mecânica e/ou com estrutura cristalina cúbica em baixa temperatura. Todavia, no estudo da Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP) a trinca propaga de maneira estável, antes da ruptura frágil. Durante a IIª Guerra Mundial, com o emprego do aço de alta resistência foi visto um crescente surgimento de trincas nas estruturas. Isso ocorreu devido a esse material possuir baixa resistência à propagação de trincas (tenacidade) e também de baixa resistência residual. Estruturas sob condições de carregamentos aparentemente seguros começaram a apresentar à ruína devido a propagação das trincas, esses tipos de falhas incentivaram os primeiros estudos da Mecânica da Fratura. Esses trabalhos apresentaram grande concentração de tensão na região da ponta da trinca, sendo acompanhada de uma ruptura frágil com pouca deformação plástica.

Nos últimos anos, o aumento do uso do aço estrutural de alta resistência empregado na construção civil tornou evidente a presença dessas falhas nas estruturas fazendo a necessidade da utilização de métodos de análise de tensões mais sofisticados. Com a confiabilidade da produção dessas peças, assumindo mais precisas as tensões resistentes e a redução dos coeficientes de segurança, materiais metálicos em geral amplificaram a presença de trincas devido a sua baixa tenacidade, ou seja, pouca resistência residual à propagação de trincas.

A estimativa da vida útil de uma estrutura com trinca deve ser garantida sob condições de serviço e também na fase de projeto. Sendo a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) utilizada nesta análise, mesmo com aplicação de cargas muito pequenas, a tensão na ponta da trinca tende para o infinito. O Fator de Intensidade de Tensão (FIT) é, então, definido como uma medida da intensidade de sollicitação na ponta da trinca. Como há uma forte concentração de tensões na ponta da trinca, forma-se uma zona de comportamento plástico nesta região. A aplicação da MFLE depende do tamanho da parte plastificada na ponta da trinca, ou seja, ela continua válida enquanto seu tamanho da zona plástica for pequeno em relação ao comprimento da trinca (DOWLING, 1999).

## 2.2 - Taxa de Liberação de Energia

Irwin (1956) propôs uma abordagem de energia para fratura excelente para resolver problemas de engenharia. Irwin definiu que para uma pequena propagação da trinca de comprimento “ $d_a$ ” em uma chapa com deslocamento constante, sua rigidez decresce. Com isso a chapa libera uma pequena parte de energia potencial “ $dU$ ”, que pode ser relacionada diretamente a Taxa de Liberação de Energia de Deformação “ $G$ ”, que é apresentado na Equação (2.1).

$$G = -\frac{1}{t} \frac{dU}{da} \quad (2.1)$$

Apesar do termo taxa usado neste contexto,  $G$  não é um parâmetro relacionado ao tempo, desta forma, à variação da área da trinca é dada por “ $t(da)$ ” apresentado na Equação (2.1) e o sinal negativo resulta em um valor positivo para “ $G$ ”. Portanto, “ $G$ ” representa a energia necessária para que uma unidade de área da trinca propague, sendo uma quantidade física fundamental para o controle do comportamento da trinca. Sabe-se que:

$$-\frac{1}{t} \frac{dU}{da} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (2.2)$$

Sendo assim, de acordo com a Equação (2.2), a taxa de liberação de energia para uma chapa no estado plano de tensão (EPT) com uma trinca de comprimento  $2a$  é dada por,

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (2.3)$$

### 2.3 - Fator de Intensidade de Tensão

A seguir são apresentados os modos de fratura (Figura 2.1), sendo o modo I chamado de modo de fratura de abertura, o modo II, de modo de fratura de deslizamento e o modo III, de modo de fratura de rasgamento.

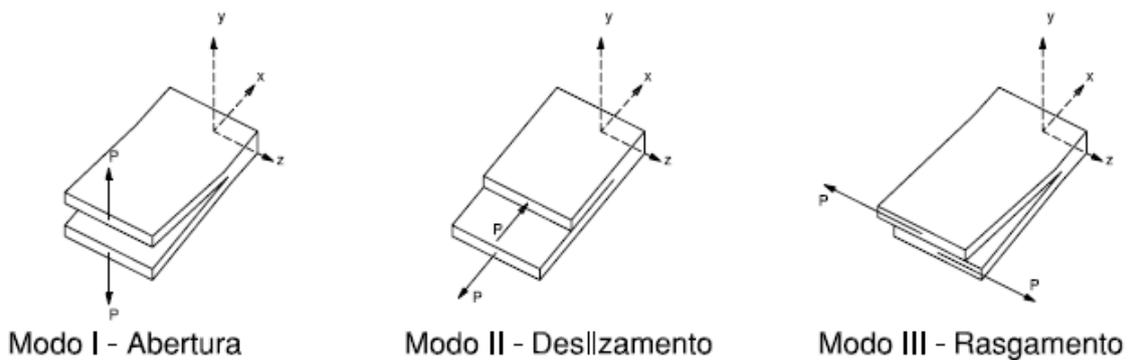


Figura 2.1 – Modos de Fratura I, II e III, adaptado de Anderson (2005)

Cada um desses Modos está associado a um tipo básico de campo de tensão em torno da ponta da trinca. Nos problemas gerais envolvendo a deformação na ponta da trinca pode ser tratado com uma combinação desses Modos de Fratura. De mesma forma o campo de tensão também pode ser tratado como uma combinação dos três tipos básicos do campo de tensão associados a cada Modo de Fratura. Nas estruturas mais gerais da engenharia, o Modo I de fratura é o mais comum e mais importante nas peças trincadas.

Na MFLE, o efeito na ponta da trinca pode ser caracterizado através do parâmetro simples,  $K$ , denominado de Fator de Intensidade de Tensão (FIT). Irwin (1957) e William (1957) em trabalhos distintos quantificaram o campo de tensões em torno da ponta da trinca numa peça no regime elástico do material e no estudo obtiveram os mesmos resultados. Cada Modo de Fratura está associado a um FIT:  $K_I$  para o Modo I,  $K_{II}$  para o Modo II e  $K_{III}$  para o Modo III.

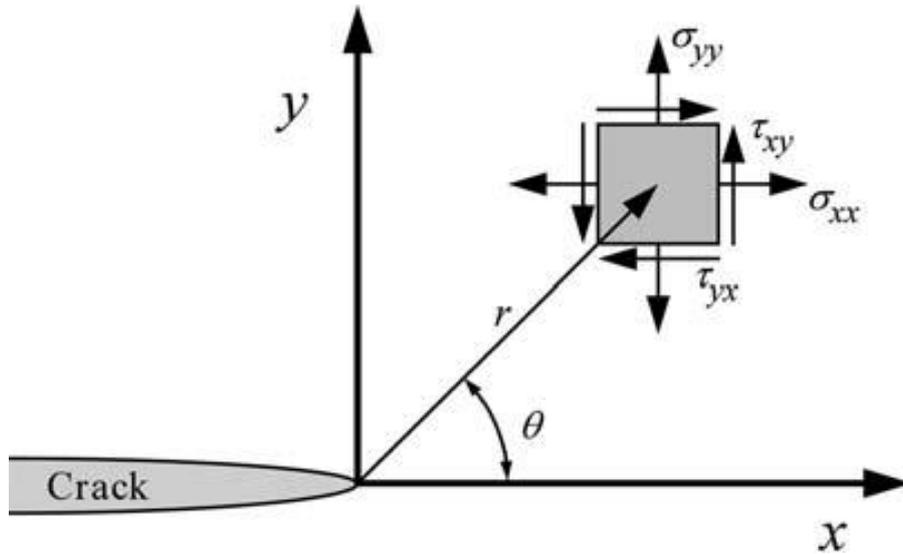


Figura 2.2 – Campo de tensão na ponta da trinca, (ANDERSON, 2005)

Na Figura 2.2 é apresentado o campo de tensões em um material elástico trincado definido através de um eixo de coordenadas polares com origem na ponta da trinca, e pode ser dado pela Equação (2.4), (ANDERSON, 2005),

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.4)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões,  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares do ponto distante da ponta da trinca associado ao campo de tensão,  $k$  é uma constante relacionada ao FIT e  $f_{ij}$  é a função adimensional de  $\theta$ . Usando funções harmônicas propostas por Williams (1957) e desenvolvendo a Equação (2.3), encontra-se o campo de tensões e deslocamentos na ponta da trinca para os três modos de fratura para o material isotrópico no regime linear elástico. Considerando  $K = k\sqrt{2\pi}$  por conveniência, o campo de tensão então é apresentado na Equação (2.5).

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\
&\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\
\sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Uma configuração para a qual existe uma solução de forma fechada é quando uma placa infinita com trinca embutida submetida a uma tensão de tração remota, ou seja, aplicada a uma grande distância. Considerando a tensão remota  $\sigma$  perpendicular ao plano da trinca, o carregamento é tido como puro de Modo I. Corpos no regime linear elástico produzem campos de tensão dentro do domínio proporcional às forças aplicadas. Assim, as tensões na ponta da trinca devem ser proporcionais à tensão remota, ou seja, o FIT em modo I pode ser calculado como apresentado na Equação (2.6),

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.6}$$

onde “ $K$ ” o Fator de Intensidade de Tensão (FIT), pode-se escrever a expressão de “ $G$ ” em função de “ $K$ ” para o modo I (abertura) e modo II (deslizamento), para materiais elásticos lineares e isotrópicos, segundo a Equação (2.7),

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad \text{e} \quad G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \tag{2.7}$$

sendo “ $E$ ” o módulo de elasticidade do material, “ $E' = E$ ” para EPT e “ $E' = E/(1 - \nu^2)$ ” para o estado plano de deformação (EPD). Os Fatores de Intensidade de Tensão podem ser obtidos de diversas maneiras. O uso de técnicas baseadas em extrapolações de tensões ou deslocamentos permitem o fácil cálculo dos FITs, porém esta técnica tem como desvantagem a necessidade de um refinamento apurado da malha na ponta da trinca para se obter valores em uma precisão satisfatória, causando um custo computacional alto. O MEC é um método adequado para avaliar a integral J porque as tensões, deslocamentos e derivadas dos deslocamentos nos pontos internos são obtidos diretamente das equações integrais de contorno.

## 2.4 - Integral J

Tenacidade à Fratura ( $K_{Ic}$ ) é uma propriedade do material que permite uma trinca propagar sem a ocorrência de ruptura frágil, ou seja, enquanto o Fator de intensidade de Tensão (FIT) for inferior ao valor crítico “ $K_{Ic}$ ” a trinca estará propagando de forma estável.

A integral J foi inicialmente desenvolvida para materiais não lineares, sendo um método que se baseia em uma aproximação de energia. Desde que o caminho de integração possa se manter a uma distância consideravelmente grande da região próxima a ponta da trinca, os valores obtidos da integral J apresentaram precisão satisfatória, eliminando, assim, a necessidade de resolver o problema na região próxima a ponta da trinca. A integral J foi desenvolvida a partir da curva tensão-deformação apresentada na equação de Ramberg-Osgood (ANDERSON, 2005), ver Equação (2.8),

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} + \alpha \left[ \frac{\sigma}{\sigma_o} \right]^n \quad (2.8)$$

em que “ $\sigma_o$ ” é a tensão de fluência e “ $n$ ” é o expoente de encruamento na deformação. Assim a expressão da integral J foi definida pela Equação (2.9),

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma \quad (2.9)$$

sendo “ $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ ” a expressão da Densidade de Energia de Deformação, onde os tensores das tensões “ $\sigma_{ij}$ ” e das deformações “ $\varepsilon_{ij}$ ” referem-se aos pontos do contorno; “ $t_i$ ” é a componente das forças de superfície e “ $u_i$ ” é a componente dos deslocamentos, também consideradas nos pontos do contorno. “ $\Gamma$ ” é um contorno qualquer em torno da ponta da trinca começando e terminando em suas faces opostas. Sendo o eixo “ $x_1$ ” com origem na ponta da trinca e direção coincidente com a direção da trinca. “ $n_1$ ” é a direção da normal a esse contorno, esses parâmetros são apresentados na Figura 2.3.

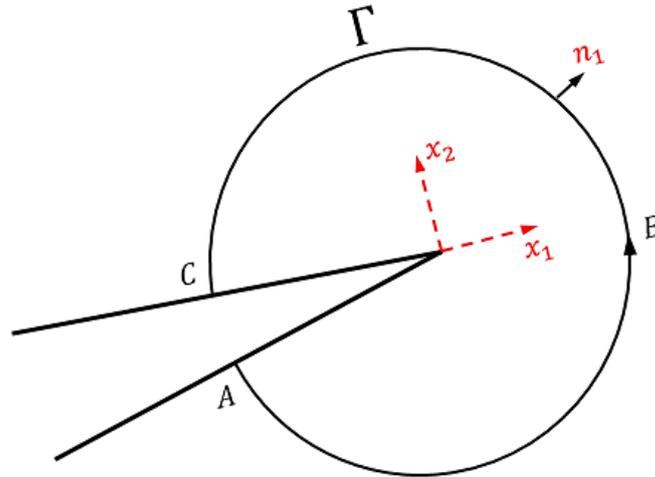


Figura 2.3 – Caminho de Integração da Integral J

Para o problema elastoplástico, sabe-se que “ $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ”, em que “ $\varepsilon$ ” é a deformação total e representa a soma das parcelas elásticas “ $\varepsilon^e$ ” e plástica “ $\varepsilon^p$ ”. Substituindo as duas parcelas de deformação na expressão da densidade da energia de Deformação obtêm-se a parcela elástica “ $W_e$ ” e a parcela plástica “ $W_p$ ”, expressas na Equação (2.10),

$$W_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \quad ; \quad W_p = \int_0^\varepsilon \sigma_p^{eq} d\varepsilon_p^{eq} \quad (2.10)$$

em que “ $\sigma_p^{eq}$ ” e “ $d\varepsilon_p^{eq}$ ” são respectivamente a tensão equivalente e o incremento de deformação plástica equivalente. Substituindo a Equação (2.10) na Equação (2.9) da integral J, obtêm-se a expressão da integral J para o caso inelástico, segundo Leitão *et al.*, (1993), ver Equação (2.11).

$$J = \int_{\Gamma} (W_e n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma + \int_{\Gamma} (W_p n_1) d\Gamma \quad (2.11)$$

No cálculo da integral “J”, considerando uma avaliação da Teoria da Plasticidade Incremental, é de extrema importância acompanhar todo o histórico de carregamento. Georgiadis & Grentzelou (2006) provaram que o contorno “ $\Gamma$ ” é independente do caminho de integração utilizando a Teoria da Elasticidade. Sendo assim, esse contorno é arbitrário também para o caso inelástico. Em geral escolhe-se a trajetória circular, como mostrado na Figura 2.4.

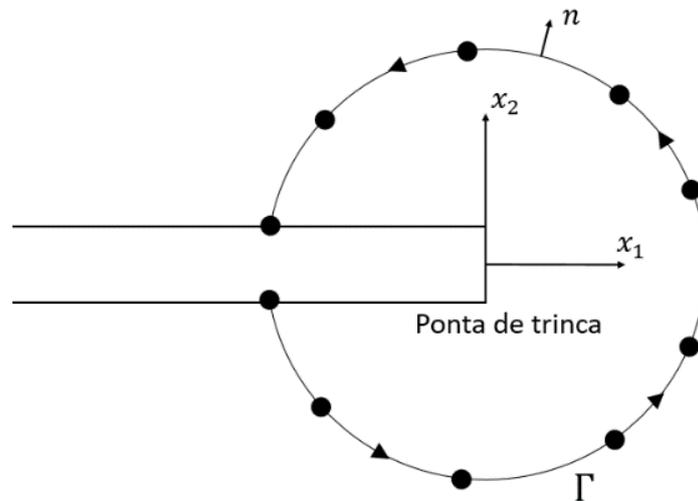


Figura 2.4 – Pontos internos simetricamente definidos como caminho a integral “J”

Segundo Rice (1968), a integral “J”, para materiais elásticos, possui valores idênticos ao da Taxa de Liberação de Energia de Deformação Elástica  $G$ , ver Equação (2.7), portanto é um método efetivo para a determinação de fatores de intensidade de tensão, pois o campo elástico pode ser determinado com precisão, com o método dos elementos de contorno. A consideração inicial de que o cálculo da integral J é independente do caminho adotado se perde quando uma certa quantidade significativa de energia na região da ponta da trinca é convertida em energia inelástica.

Sabe-se que soluções analíticas do FIT para comportamento elastoplástico, até o presente momento sobre o conhecimento do autor, não estão disponíveis na literatura. Contudo, a integral J pode fornecer valores significativos considerando o comportamento plástico dos modelos, sob certas condições de análise. Nguyen *et al.*, (2005) avaliaram a taxa de liberação de energia de deformação e sua dissipação por fratura em materiais inelásticos usando o MEF. Os autores afirmam que a aplicação da integral J em modelos elastoplásticos apresentam respostas confiáveis desde que sejam realizadas as seguintes considerações: o carregamento seja limitado a um comportamento monotônico estático, para evitar o descarregamento na zona plástica do material, ou considerar uma velocidade constante de propagação da trinca. Hutchinson e Paris (1979) apresentaram sugestão semelhante acrescentando apenas que a distância entre o contorno do corpo e a ponta da trinca fossem muito maior que “ $da$ ” e que o comprimento da propagação não superasse 2mm. Para os modelos estudados neste trabalho serão considerados propagações dentro deste limite.

A integral  $J$  é uma medida de energia que descreve a capacidade de um material se deformar e se fraturar. Nos contextos de Mecânica da Fratura, é uma ferramenta valiosa para quantificar a propagação de trincas. A integral  $J$  é definida como a integral da energia de deformação sobre uma região de interesse, normalmente ao redor da ponta da trinca. Ela pode ser expressa como na Equação (2.7),

$$J = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) ds \quad (2.12)$$

onde  $u$  é o deslocamento no material,  $\sigma$  é o campo de tensão e  $\Gamma$  é o contorno arbitrário da região ao redor da trinca com uma trajetória circular de integração (Figura 2.4). Nas situações de carregamento puramente de Modo I (abertura da trinca) ou Modo II (cisalhamento da trinca), a integral  $J$  pode ser desacoplada em seus componentes individuais:  $J_1$  (relativo ao Modo I) e  $J_2$  (relativo ao Modo II). Isso é alcançado considerando a propagação da trinca em cada modo separadamente. Para o Modo I e Modo II, têm-se:

$$J_1 = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} ds \quad e \quad J_2 = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} ds \quad (2.13)$$

Na Equação (2.13) o termo  $\partial u / \partial x$  é o deslocamento vertical na direção da trinca,  $\partial \sigma / \partial y$  é a variação da tensão na direção perpendicular à trinca,  $\partial u / \partial y$  é o deslocamento horizontal perpendicular à trinca e  $\partial \sigma / \partial x$  é a variação da tensão na direção paralela à trinca.

Os Fatores de Intensidade de Tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  podem então ser relacionados com as integrais  $J_1$  e  $J_2$  por meio das Equações de Irwin ou Equações de Sih. Essas equações fornecem uma relação quantitativa entre os FITs e as integrais  $J_1$  e  $J_2$ , permitindo a avaliação dos efeitos da propagação da trinca nos diferentes modos de carregamento. As relações entre os componentes da integral  $J$  e os FITs são apresentados na Equação (2.14),

$$J_1 = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} \quad e \quad J_2 = -\frac{(2K_I K_{II})}{E'} \quad (2.14)$$

em que  $E'$  é o módulo de elasticidade que é igual a “ $E$ ” para a condição de EPT e igual a “ $E / (1 - \nu^2)$ ” para a condição do EPD. Sendo que “ $K_I$ ” é o Fator de Intensidade de Tensão no modo de fratura I e refere-se à aplicação de um carregamento de tração

perpendicular ao eixo da trinca e “ $K_{II}$ ” é o Fator de Intensidade de Tensão no modo de fratura II e refere-se à análise da fratura submetida a cisalhamento puro, como mostrado na Figura 2.1. A combinação entre os dois modos é chamada de modo misto.

Vale ressaltar que o desacoplamento da integral J nos modos I e II simplifica a análise da propagação da trinca em diferentes condições de carregamento, tornando possível a determinação dos FITs e, assim, a avaliação da estabilidade da trinca e sua propagação. Portela *et al.* (1992) descreve um procedimento simples para desacoplar os fatores de intensidade de tensão de um problema de modo misto, baseado na decomposição do campo elástico em seus respectivos componentes de modo simétrico e antissimétrico. A integral “ $J_1$ ” é representada pela soma de duas integrais apresentadas na Equação (2.15),

$$J_1 = J_1^I + J_1^{II} \quad (2.15)$$

onde  $J_1^I$  e  $J_1^{II}$  podem ser expressos da seguinte forma:

$$J_1^I = \frac{K_I^2}{E'} \quad e \quad J_1^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (2.16)$$

Absolutamente, a integral J pode de fato ser usado tanto para Mecânica de Fratura Linear Elástica (MFLE) quanto para Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). No entanto, existem considerações, vantagens e possíveis limitações para sua aplicação em cada campo.

### **Integral J na MFLE:**

Vantagens:

- Na MFLE, a integral J fornece uma maneira direta e abrangente de determinar o Fator de Intensidade de Tensão (FIT) para análise de trincas;
- É particularmente valioso ao lidar com deformações relativamente pequenas e comportamento de material elástico linear.

Limitações:

- A MFLE assume comportamento elástico linear, o que pode não representar com precisão a resposta do material em casos de deformação plástica significativa. A integral J pode não capturar totalmente os efeitos de plasticidade.

## **Integral J na MFEP:**

Vantagens:

- No MFEP, a integral J ainda pode oferecer informações valiosas sobre a propagação de trincas, mesmo quando a plasticidade está presente;
- Fornece um meio para avaliar o impacto da deformação plástica no crescimento da trinca, considerando os componentes de energia elástica e plástica.

Limitações:

- Quando a plasticidade se torna significativa, a integral J pode exigir adaptações para levar em consideração a energia de deformação plástica, o que pode introduzir complexidade;
- Pode exigir técnicas numéricas mais intrincadas para lidar com o comportamento não linear do material e quantificar com precisão os efeitos da zona plástica.

Em resumo, a integral J é um conceito versátil que pode ser aplicado tanto ao MFLE quanto ao MFEP. No entanto, sua eficácia depende da precisão das suposições sobre o comportamento do material. Em MFLE, onde o comportamento elástico domina, a integral J é altamente eficaz. Na MFEP, onde a plasticidade é considerada, modificações podem ser necessárias para levar em conta o comportamento não linear do material. Como sempre, a escolha da metodologia depende das características específicas do problema em questão, e uma consideração cuidadosa das vantagens e limitações da integral J em cada contexto é essencial para uma análise de fratura precisa e significativa.

## **2.5 - Critérios de Propagação de Trincas**

Diversas pesquisas experimentais consolidaram que a direção de propagação da trinca não se dá obrigatoriamente segundo a direção original do eixo da trinca para situações de carregamento no modo misto. Os critérios mais conhecidos na literatura que tratam sobre a direção de propagação da trinca são: Critério da Tensão Principal Máxima, Critério da Densidade da Energia de Deformação Mínima e Critério da Taxa de Liberação de Energia Potencial Máxima. Inserindo as equações de Westergaard (1939), estes critérios podem ser melhorados, combinando os critérios de escoamento do material com os campos de tensões elásticas na região da ponta da trinca. Este procedimento fornece as expressões das tensões

e a forma da região plastificada. Então, o critério para a direção da propagação é aplicado à expressão destas tensões. Dentro do programa BemCracker2D foram implementados os três critérios de propagação citados acima (MOURA, 2019). Neste trabalho é considerado apenas o critério da Tensão Principal Máxima.

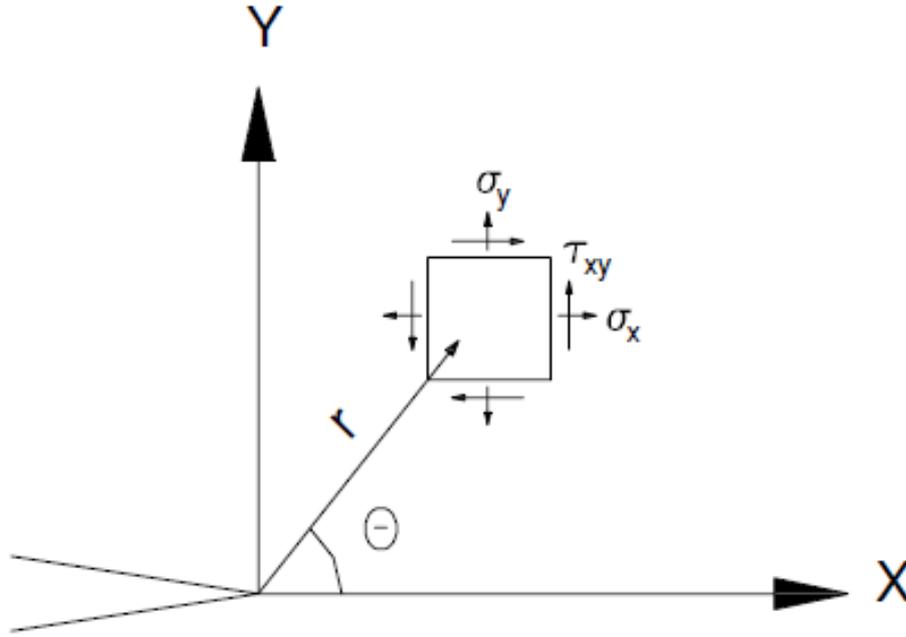


Figura 2.5 – Campo de Tensões na Ponta da Trinca

O critério da Tensão Principal Máxima considera que a propagação da trinca acontecerá no momento em que tensão principal máxima atingir um valor crítico, igual à tensão de fratura do teste de tração uniaxial. A propagação começa a partir da ponta da trinca em direção perpendicular à tensão principal máxima.

O campo de tensões (Figura 2.5), em coordenadas polares, na ponta da trinca para materiais elásticos lineares com origem na ponta da trinca e cujo eixo coincide com a direção do eixo da trinca, é apresentado pelas Equações (2.17), (ERDOGAN e SIH, 1963).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} \right] \\
 \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (3 - \cos \theta) \right\} - \left\{ K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right] \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \right\} - \left\{ K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 3 \cos \theta) \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

As direções dos eixos principais são aquelas onde a tensão de cisalhamento é “ $\tau_{r\theta} = 0$ ”. Então, a partir da Equação (2.17) referente a “ $\tau_{r\theta}$ ”, feito as devidas transformações trigonométrica determina-se a Equação (2.18).

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (2.18)$$

Se for considerado o modo misto, a solução da Equação (2.18) pode ser resolvida para  $\theta$ , gerando a Equação (2.19):

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (2.19)$$

A tenacidade à fratura ( $K_{IC}$ ) é obtida através de ensaios, em condições de EPD, executados com carregamento no modo I, considerando independente a espessura do corpo de prova. O critério de fratura no modo I é definido como: “ $K_I \geq K_{IC}$ ”. Utilizando-se a Equação (2.18), com “ $\theta = 0$ ”, tem-se “ $K_{II} = 0$ ”, reproduzindo a situação do modo I puro, considerando esta situação aplicável a Equação (2.17) referente a “ $\sigma_\theta$ ” obtém-se a Equação (2.20).

$$\sigma_1^I = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.20)$$

O valor da tensão principal máxima é dado pela Equação (2.17) substituindo “ $\theta_t$ ” dado na Equação (2.19), obtém-se a Equação (2.21):

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta_t}{2} \left[ K_I \cos \frac{\theta_t}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta_t}{2} \right] \quad (2.21)$$

Pode-se afirmar que, no modo misto, a fratura acontece quando a tensão principal máxima “ $\sigma_1$ ” atinge o valor de “ $\sigma_1^I$ ”. Igualando-se as Equações (2.20) e (2.21), tem-se, então a Equação (2.22) da Tenacidade à Fratura:

$$K_{IC} = \cos^2 \frac{\theta_t}{2} \left[ K_I \cos \frac{\theta_t}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta_t}{2} \right] \quad (2.22)$$

A expressão à direita do sinal de igualdade da Equação (2.22) é conhecida como Fator de Intensidade de Tensão do modo misto.

### **3 - MODELO ELASTOPLÁSTICO**

Na Teoria da Elasticidade consideram-se duas hipóteses: ao se retirar o carregamento de um corpo ele retorna integralmente ao estado inicial indeformado e que as deformações dependem apenas das tensões finais aplicadas, não interessando a história do carregamento. Na Plasticidade estas hipóteses não são válidas. A seguir uma breve descrição dos principais conceitos da Plasticidade, bem como alguns critérios de escoamento. Por fim, a formulação elastoplástica é apresentada, junto a estimativa da zona plástica sob condições de carregamento de modo misto.

#### **3.1 - Conceitos Iniciais**

A plasticidade é uma propriedade do material que possibilita ao mesmo se deformar continua e permanentemente sem sofrer ruptura durante o processo de carregamento. Este comportamento do material só é possível ocorrer em níveis de carregamento que superam o limite elástico do material. No processo de descarregamento é possível observar as deformações permanentes no material, bem como as deformações finais, que dependerão diretamente tanto das tensões finais quanto do histórico do carregamento desde o início do escoamento.

Um dos maiores problemas encontrado por pesquisadores vem da complexidade de se formular relações físicas que descrevam de forma adequada o comportamento real de um material durante a plastificação. Esta complexidade deve-se a não-linearidade, a irreversibilidade das deformações e também por haver um número de fenômenos incertos que ocorrem apenas após o material se tornar plástico. As características mecânicas dos materiais são modificadas devido a velocidade de aplicação do carregamento. Por outro lado, a fluência nos materiais metálicos também favorece a ocorrência do aumento das deformações devido aos longos períodos de exposição de tensão constante.

Através de um simples ensaio de tração uniaxial é possível se obter o diagrama tensão-deformação, onde o comportamento plástico da maioria dos materiais, usualmente empregados na engenharia, pode ser analisado segundo um dos modelos apresentados na Figura 3.1.

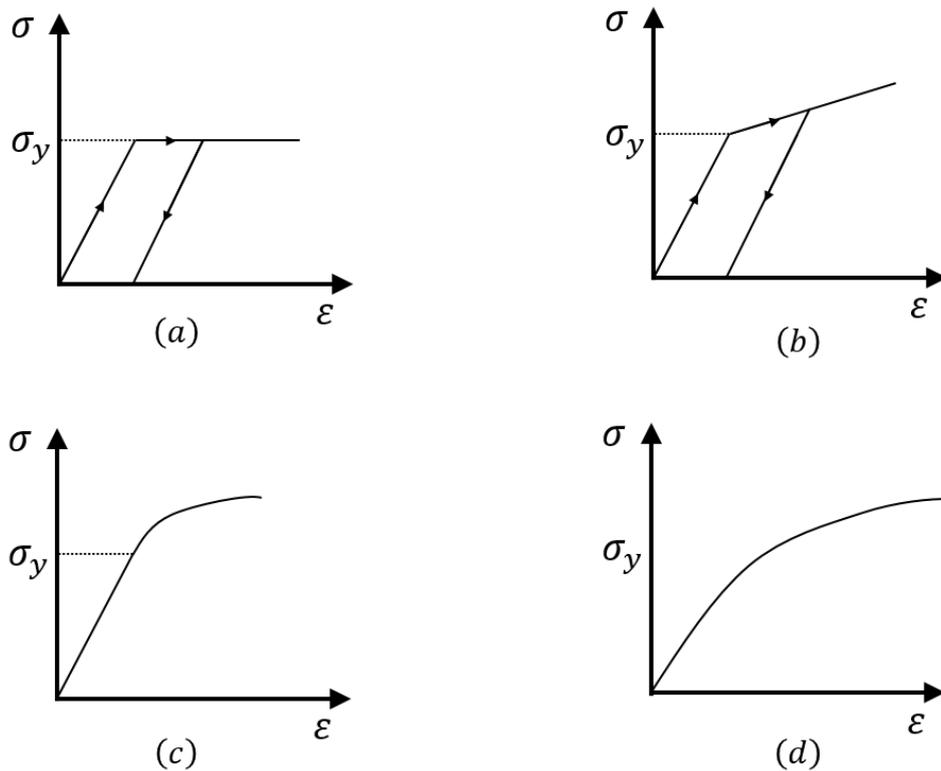


Figura 3.1 – Modelos de comportamento plástico dos materiais

Na Figura 3.1(a) é apresentado o modelo elastoplástico perfeito do material, onde os níveis de tensão e deformação são proporcionais até a tensão de escoamento  $\sigma_y$ . A partir deste ponto as deformações aumentam sem que haja acréscimo de tensões. Alguns aços comportam-se segundo este modelo.

Na Figura 3.1(b) observa-se o modelo elastoplástico com encruamento linear, neste caso o material possui uma reserva de resistência após a tensão de escoamento  $\sigma_y$  ser superada. Ou seja, neste caso, ao se deformar dentro do regime plástico, o material apresenta um acréscimo de tensão. Vários metais apresentam este comportamento, como o alumínio que pode ser representado por este modelo.

Na Figura 3.1(c), o trecho não-linear é definido após o material atingir a tensão de escoamento  $\sigma_y$ . Este modelo também representa o comportamento de alguns tipos de alumínio. Já na Figura 3.1(d), o comportamento não linear se destaca desde o início do carregamento, não ficando definidas as regiões elásticas e plásticas das fases de carregamento. Estes modelos podem ser empregados para estudo de materiais como o concreto.

A teoria matemática da plasticidade fornece uma estrutura geral para a descrição constitutiva contínua do comportamento de uma importante classe de materiais. Basicamente, a teoria da plasticidade diz respeito a sólidos que, após serem submetidos a um histórico de carregamento, podem sustentar deformações permanentes (ou plásticas) quando completamente descarregados. Materiais cujo comportamento pode ser adequadamente descrito pela teoria da plasticidade é chamada de plástico. Um grande número de materiais de engenharia, como metais, concreto, rochas, argilas e solos em geral, pode ser modelado como plástico sob uma ampla gama de circunstâncias de interesse prático.

Considerando um ensaio uniaxial de uma barra metálica, que tem a curva tensão-deformação aproximadamente idealizada mostrada na Figura 3.2, este terá um comportamento fenomenológico que torna o material receptível a modelagem por meio da teoria da plasticidade.

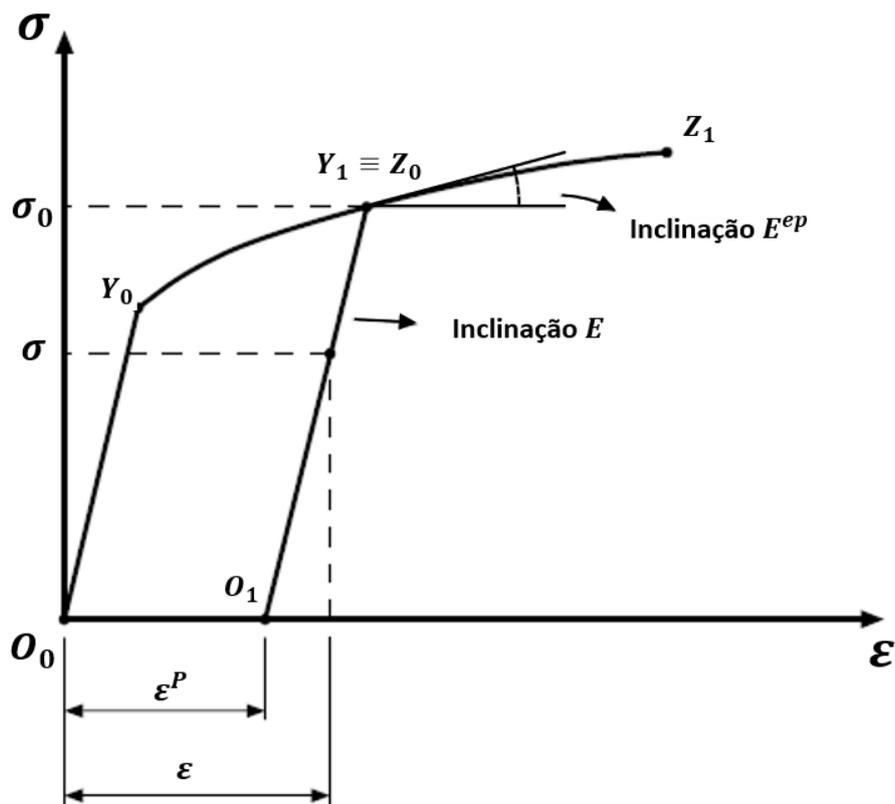


Figura 3.2 – Diagrama Tensão-Deformação – Ensaio Uniaxial em Barra Metálica

Algumas propriedades importantes sobre o fenômeno da plastificação podem ser identificadas com o ensaio uniaxial apresentado na Figura 3.2, A saber:

- Os segmentos “ $O_0Y_0$ ” e “ $O_1Y_1$ ” definem o regime puramente elástico do material em dois casos distintos. As tensões de escoamento associadas correspondem aos pontos “ $Y_0$ ” e “ $Y_1$ ”;
- Se o material for carregado além da tensão de escoamento “ $Y_0$ ”, então ocorrerá a plastificação, isto é, ocorrerá a evolução de tensões plásticas;
- Acompanhando a evolução da deformação plástica, também é observada um acréscimo na tensão de escoamento em relação a tensão de escoamento inicial (note que as tensões de escoamento correspondentes aos pontos “ $Y_0$ ” e “ $Y_1$ ” são diferentes). Esse fenômeno é conhecido como encruamento.

Apesar de sua simplicidade, o modelo constitutivo unidirecional contém todas as características essenciais que formam a base da teoria da plasticidade:

- A decomposição das deformações elastoplásticas;
- Uma lei elástica;
- Um critério de escoamento, inicializada com uma função simples de escoamento;
- Uma lei de fluxo plástico definindo a evolução da deformação plástica; e
- Uma lei de encruamento, caracterizada através do limite de escoamento.

Generalizando essa aplicação à situação bidimensional e tridimensional, o ponto de partida das teorias da plasticidade tratadas por Sousa Neto *et al.*, (2008) é a suposição de que a energia livre,  $\psi$ , é dada por:

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, \alpha) \quad (3.1)$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação total,  $\varepsilon^p$  é a deformação plástica (tomada como variável interna) e um conjunto  $\alpha$  de variáveis internas associadas ao fenômeno de encruamento do material. Assumindo a deformação total subdividida em duas porções, uma elástica e outra plástica, pode-se escrever a Equação (3.2).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad \text{com} \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (3.2)$$

Admitindo a existência de um domínio elástico delimitado por uma tensão de escoamento  $\sigma_y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ , pode-se dizer que, para qualquer estágio de carregamento, a tensão aplicada não é permitida estar acima da tensão de escoamento atual, ou seja, tensões plásticas admissíveis estão no domínio elástico ou em seu limite de escoamento. Assim, a função de escoamento é escrita através da Equação (3.3) e qualquer tensão admissível, para o critério de escoamento uniaxial, deve satisfazer a restrição,

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (3.3)$$

onde  $|\sigma|$  é a tensão equivalente definida através dos critérios de escoamento. Neste trabalho os modelos estudados serão considerados perfeitamente plásticos. Neste caso, a tensão de escoamento,  $\sigma_y$ , permanece constante independentemente de qualquer processo de deformação que o material possa sofrer. Sendo assim, as forças termodinâmicas são desconsideradas nesse estudo. A Figura 3.3 mostra o gráfico tensão-deformação, típico de um ensaio uniaxial monotônico de um modelo perfeitamente plástico.

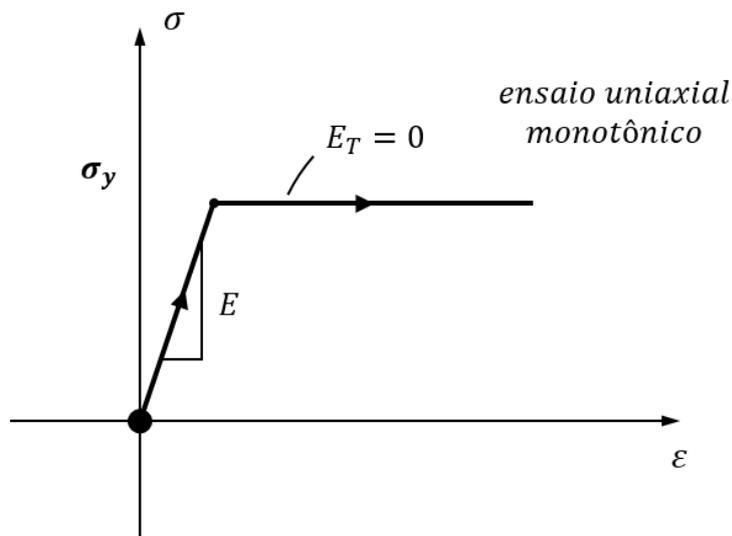


Figura 3.3 – Diagrama Tensão-Deformação – Perfeitamente Plástico

Até então o modelo constitutivo para materiais elastoplásticos foram estabelecidos de forma geral, sem referência a nenhum critério de escoamento específico. Nesta seção, alguns dos critérios de escoamento mais comuns usados na prática de engenharia para materiais metálicos são descritos em detalhes, ou seja, os critérios de von Mises, já implementado no BemCracker2D e os critérios de Tresca e Gao, implementados recentemente.

## 3.2 - Critérios de Plastificação

### 3.2.1 - Critério de Tresca

O critério de escoamento apresentado por Tresca (1868), baseado em resultados experimentais, considera o escoamento plástico iniciando quando a tensão de cisalhamento máxima atinge o valor limite,

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad (3.4)$$

onde “ $\sigma_{m\acute{a}x} = M\acute{a}x(\sigma_1, \sigma_2)$ ” e “ $\sigma_{m\acute{i}n} = M\acute{i}n(\sigma_1, \sigma_2)$ ”. Estas relações aplicadas à função de escoamento de Tresca são representadas pela Equação (3.5).

$$\Phi(\sigma) = \tau_{m\acute{a}x} - \tau_y = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2} - \frac{\sigma_y}{2} \quad (3.5)$$

É importante destacar que a formulação de Tresca, por ser exclusivamente em termos das tensões de cisalhamento, o critério de Tresca é insensível à pressão hidrostática (SOUZA NETO et al, 2008).

### 3.2.2 - Critérios de von Mises

von Mises (1913) formulou um critério de escoamento baseado no segundo invariante das tensões desviadoras “ $J_2$ ”, onde assumia que o início do escoamento acontecia quando a tensão atingia seu valor crítico. O segundo invariante do tensor das tensões desviadoras é definido pela Equação (3.6).

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} = -(\sigma'_1 \sigma'_2 + \sigma'_2 \sigma'_3 + \sigma'_3 \sigma'_1) \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, a função de escoamento de von Mises pode ser representada matematicamente pela Equação (3.7),

$$\Phi(\sigma) = \sigma_{eq} - \sigma_y = \sqrt{3J_2} - \sigma_y \quad (3.7)$$

em que  $\sigma_{eq}$  representa a tensão equivalente de von Mises e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento uniaxial para o critério de von Mises. É importante destacar que este critério não considera a presença da pressão hidrostática dentro do processo de fluxo plástico do material.

### 3.2.3 - Critério de Gao

Gao *et al.*, (2011) apresenta um novo modelo de plasticidade para materiais isotrópicos, que é função da tensão hidrostática, bem como do segundo e terceiro invariantes do desviadores de tensão. O modelo foi calibrado e verificado através de uma liga de alumínio 5083-H116. Esta liga possui uma gama de aplicação, desde peças estruturais sujeitas a pequenas cargas à aplicações na construção naval. Sendo  $\sigma_{ij}$  o tensor de tensões e  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  os valores das tensões principais, a tensão hidrostática é expressa como:

$$\sigma_h = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.8)$$

onde  $I_1$  representa o primeiro invariante do tensor de tensão. O terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras,  $J_3$ , é definido pela Equação (3.9).

$$J_3 = \det(\sigma'_{ij}) = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 \quad (3.9)$$

Assim, a função de escoamento de Gao pode ser representada matematicamente pela Equação (3.10),

$$\Phi(\sigma) = F(I_1, J_2, J_3) - \bar{\sigma} \quad (3.10)$$

sendo  $\bar{\sigma}$  o parâmetro de encruamento, ou para o material elástico perfeitamente plástico, a tensão de escoamento. Uma forma simplificada da função da tensão equivalente de Gao,  $F$  é dada segundo a Equação (3.11),

$$F = c(aI_1^6 + 27J_2^3 + bJ_3^2)^{1/6} \quad (3.11)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes do material. Como já foi dito, Gao *et al.*, (2011) estudou a liga de alumínio 5083-H116, assim os parâmetros obtidos usados na calibração são dados na Equação (3.12).

$$a = 0 \quad ; \quad b = -60,75 \quad ; \quad c = \left( a + \frac{4}{729} b + 1 \right)^{-1/6} \quad (3.12)$$

### 3.2.4 - Comparação entre os critérios

Uma vez considerado, que os critérios podem ter uma função de escoamento escalar isotrópica simétrica para os tensores, esta função pode ser definida através das tensões principais, assim, tais funções podem ser representadas graficamente como uma superfície no espaço dos valores das tensões principais. Sendo assim, traçar a superfície de escoamento de qualquer critério isotrópico torna-se um trabalho particularmente simples e útil ao se considerar o espaço tridimensional das tensões principais.

A superfície de escoamento de Tresca é representada graficamente por um prisma hexagonal infinito com eixo coincidente com a linha hidrostática. A superfície de escoamento associada ao critério de von Mises, por outro lado, é representada por uma superfície de um cilindro circular infinito, cujo eixo também coincide com o eixo hidrostático. A superfície de escoamento de von Mises é ilustrada na Figura 3.4, onde foi ajustada para coincidir com a superfície de escoamento de Tresca.

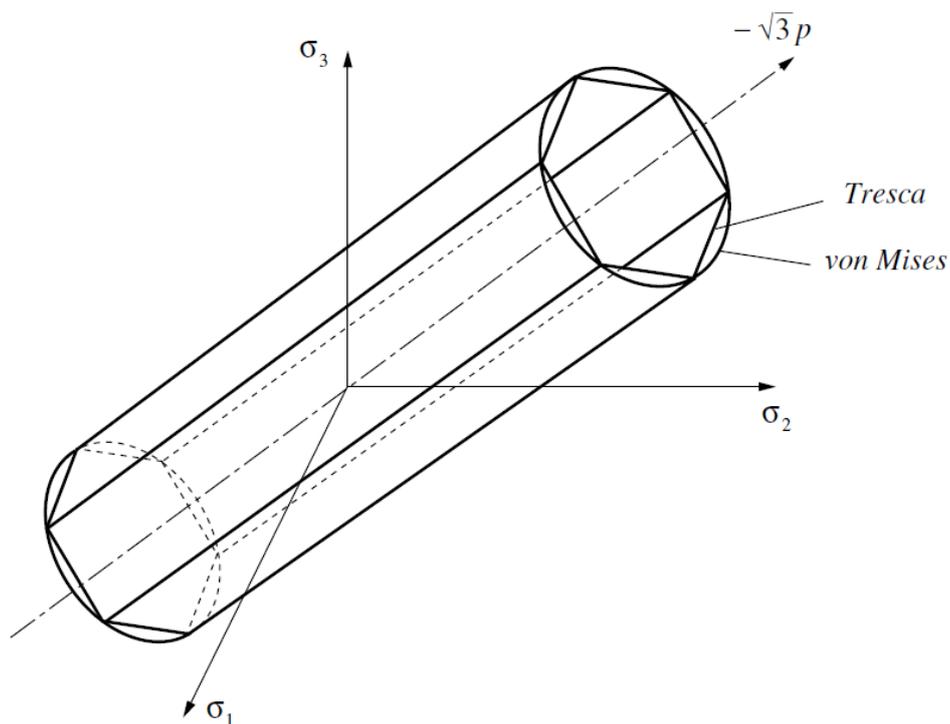


Figura 3.4 – Superfície de escoamento Tresca/von Mises – (SOUSA NETO *et al.*, 2008)

Observa-se que a superfície de von Mises intercepta a superfície de escoamento de Tresca através dos vértices do hexágono. Uma comparação entre os 3 critérios citados anteriormente é representado na Figura 3.5. Aqui fica visível que a superfície de escoamento associado ao critério de Gao intermedia as duas superfícies de Tresca e von Mises.

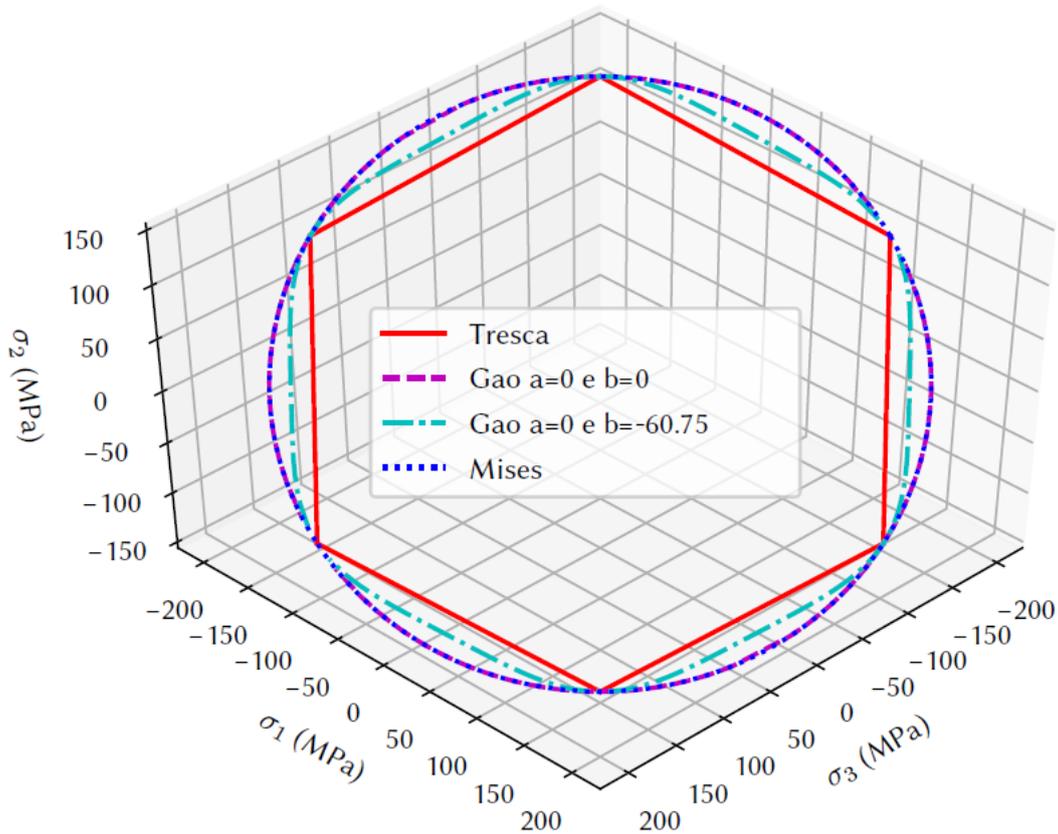


Figura 3.5 – Superfície de escoamento Tresca/von Mises/Gao

Além disso, pode-se dizer que tanto a superfície de von Mises, quanto a superfície de escoamento de Gao interceptam os vértices da superfície de Tresca. Fato importante a ser observado, é que quando os parâmetros  $a$  e  $b$  são nulos a superfície de escoamento de Gao coincide exatamente com a superfície de von Mises.

### 3.3 - Formulação Elastoplástica

Resolvendo um problema elastoplástico, a ideia é obter os primeiros pontos onde há deformações plásticas no corpo, ou seja, inicialmente aplica-se o carregamento total considerando um regime elástico, obtendo assim o vetor solução elástico  $\mathbf{X}$ . A partir desses dados, verifica-se se, em algum ponto, as condições do critério de escoamento adotado é alcançada ou superada. Considerando uma situação em que o problema resolvido no regime elástico apresente pontos com deformações plásticas devido ao critério de escoamento, pode-se definir um fator de redução de carregamento  $\lambda$ , que corresponde a fração do carregamento suportado em regime elástico, e apresentado na Equação (3.13),

$$\lambda = \frac{\sigma_y}{\sigma_{eq}^{m\acute{a}x}} \quad (3.13)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento adotada e  $\sigma_{eq}^{m\acute{a}x}$  é a tensão equivalente máxima obtida através de um dos critérios de escoamento. Desta forma, o vetor solução da fração elástica inicial pode ser obtido pela Equação (3.14).

$$\mathbf{X}_e = \lambda \cdot \mathbf{X} \quad (3.14)$$

Desta forma, pode-se afirmar que existe pelo menos um ponto no corpo que atingiu a tensão de escoamento, dando, assim, início ao processo incremental elastoplástico. A partir desde momento pequenos passos de carga são aplicados gerando o histórico de carregamento. Assim, o vetor solução elastoplástico para passos de cargas de mesma intensidade pode ser escrito conforme a Equação (3.15),

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_e + \sum_{i=1}^{NPC} \dot{\mathbf{X}} \quad (3.15)$$

onde  $NPC$  é o número de passos de carga. Para cada incremento de carga, o critério de escoamento adotado compara as tensões nos pontos do corpo com a tensão de escoamento de forma a afirmar a plastificação. Calculam-se, então, os incrementos de deformações e tensões plásticas para os pontos que atingiram ou superaram a tensão de escoamento.

Foi visto na seção anterior, que o comportamento plástico do material é regido através das condições aplicadas pelos critérios de escoamento, o que, de certa forma, indica que a função de escoamento  $\Phi$  é sujeita a restrição apresentada na Equação (3.16),

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, k) = \sigma_{eq} - \sigma_y \leq 0 \quad (3.16)$$

onde  $\Phi$  é definido como uma função do tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ .

A plasticidade é um fenômeno dependente do tempo, tornando-se necessário o cálculo das diferenciais, ou dos incrementos de deformação plástica, considerando o histórico de carregamento, obtendo-se assim as deformações acumuladas. Uma relação para determinação da lei de fluxo plástico, devido Simo e Hughes (1998), na Equação (3.17),

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} N \quad (3.17)$$

onde  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  é a taxa das componentes de deformação plástica,  $\dot{\gamma}$  é o multiplicador plástico e  $N = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  é o Vetor de fluxo plástico. Reescrevendo a Equação (3.2) considerando os termos incrementais, tem-se a Equação (3.18).

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \bar{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \bar{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (3.18)$$

Substituindo a Equação (3.17) do incremento de deformação plástica na Equação (3.18), e isolando  $\dot{\gamma}$  a esquerda da igualdade, tem-se:

$$\dot{\gamma} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \bar{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \bar{E} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)} \quad (3.19)$$

Substituindo a Equação (3.19) do multiplicador plástico na Equação (3.17), obtém-se a Equação (3.20) para cálculo do incremento de deformação plástica, ou seja, a lei de fluxo plástico.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} N = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \bar{E}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \bar{E} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.20)$$

Finalmente, conhecido o tensor incremental das deformações plásticas, o incremento de tensões plásticas pode ser calculado pela Equação (3.21), através da Lei de Hooke.

$$\{\dot{\sigma}_{ij}^p\} = \bar{\mathbf{E}}\{\dot{\varepsilon}_{ij}^p\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11}^p + \nu\dot{\varepsilon}_{22}^p \\ \dot{\varepsilon}_{22}^p + \nu\dot{\varepsilon}_{11}^p \\ \frac{1-\nu}{2}\dot{\varepsilon}_{12}^p \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A formulação do MRD para a Elastoplasticidade é apresentada no Capítulo 5. Esta formulação exige necessariamente a avaliação do tensor de tensões, dado na Equação (3.21), nos pontos internos e nós de contorno em que o problema foi discretizado. As tensões desviadoras ( $\mathbf{S}_{ij}$ ) e a matriz elastoplástica no EPT ( $\bar{\mathbf{E}}$ ) são apresentadas na Equação (3.22),

$$\mathbf{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{22} \\ \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{\mathbf{E}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $E$  é o módulo de Elasticidade do material e  $\nu$ , o coeficiente de Poisson. Para o EPD, basta substituir  $E$  e  $\nu$  por  $E'$  e  $\nu'$ , dados na Equação (3.23)

$$E' = \frac{1}{1-\nu^2} \quad e \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (3.23)$$

### 3.4 - Zona Plástica

O conhecimento do tamanho da zona plástica (ZP) e a variação em torno da ponta da trinca se torna um estudo importante na análise da Mecânica da Fratura. As estimativas convencionais do tamanho e forma da ZP foram feitas inicialmente com base nos campos de tensões da ponta da trinca assumindo o fator de intensidade de tensão em Modo I. Os casos de estimativa da ZP mais específicos podem ser encontrados no livro de Anderson (2005) para modos únicos de fratura. No trabalho de Nazarali e Wang (2011) a estimativa da zona plástica é determinada conforme apresentado na Equação (3.24),

$$r_p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_y} \right)^2 \left[ \frac{1}{c^*} \left\{ -b \cdot t_y - \sqrt{b^2 \cdot t_y^2 - a \cdot c^*} \right\} \right]^2 \quad (3.24)$$

onde o termo  $r_p$  é a distância da ponta da trinca, determinado para um ângulo  $\theta$  em um campo de tensão em modo misto aplicado onde ocorre o início do escoamento. Os termos a direita da igualdade são dados a seguir.

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (3.25)$$

O termo  $K$ , da Equação (3.25), representa o efeito combinado do FIT dos modos I e II na ponta da trinca. A Equação (3.26) apresenta o ângulo  $\phi$ , que representa o ângulo de fase que separa os modos I e II,

$$\phi = \tan^{-1} \frac{K_{II}}{K_I} \quad (3.26)$$

$$t_y = \frac{T}{\sigma_y} \quad (3.27)$$

onde valores de  $t_y$ , apresentado na Equação (3.27), variam em valores de  $-1 \leq t_y \leq 1$ , sendo  $\sigma_y$  a tensão de escoamento e  $T$  a tensão normalizada. No trabalho de Nazarali e Wang (2011) é apresentado uma variação da tensão normalizada  $T$ , indicando a sua influência para o tamanho da ZP. Nesta tese a tensão normalizada é considerada  $T = 0$ , ou seja, a região da ZP não sofre interferência devido as tensões normalizadas  $T$ .

As demais constantes adicionais apresentadas na Equação (3.24) são os seguintes:

$$c^* = c \cdot t_y^2 - 2$$

$$a = \cos^2 \phi \cdot \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \theta + V(\cos \theta + 1) \right] + \cos \phi \cdot \sin \phi$$

$$\cdot [2 \sin \theta \cdot (3 \cos \theta - V)] + \sin^2 \phi$$

$$\cdot \left[ 6 - \frac{9}{2} \sin^2 \theta - V(\cos \theta - 1) \right]$$

$$b = \cos \phi \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left[ -3 \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \theta \right) + V \right] \right\} + \sin \phi$$

$$\cdot \left\{ \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[ -3 \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \theta \right) - V \right] \right\}$$

$$c = \frac{1}{2} (3 + V)$$
(3.28)

onde  $V = (1 - 2\nu)^2$ ,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Sabe-se que  $K_I$  e  $K_{II}$  são relacionados com  $\phi$  como apresentado na Equação (3.29).

$$K_I = K \cdot \cos \phi$$

$$K_{II} = K \cdot \sin \phi$$
(3.29)

## 4 - FORMULAÇÕES DUAIS DO MEC

Em décadas passadas, trabalhos envolvendo o MEC abordavam a aplicação apenas da equação de deslocamento do contorno para resolução das incógnitas primitivas de deslocamento e tração no contorno de problemas diversos. O presente trabalho traz uma abordagem direta, evitando a subdivisão dos problemas em sub-regiões, usando em conjunto as equações integrais de contorno de deslocamento e tração. A solução de problemas gerais da mecânica da fratura não pode ser alcançada em uma análise de região única com a aplicação direta do MEC padrão, porque a coincidência das faces da trinca causa um problema de colocação. Para um par de pontos-fonte coincidentes no contorno da trinca, as equações algébricas relativas a um dos pontos são idênticas às equações algébricas relativas ao ponto oposto, uma vez que a mesma EIC de deslocamento é aplicada em ambos os pontos-fonte coincidentes, com o mesmo caminho de integração, em torno de todo o contorno do problema.

O Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) supera a dificuldade de modelagem de trincas considerando duas equações independentes, as EIC de deslocamento e as EIC de tração, com o mesmo caminho de integração para cada par de pontos-fonte de origens coincidentes. Embora o caminho de integração ainda seja o mesmo, as equações integrais de contorno agora são distintas e, portanto, dão origem a equações algébricas independentes. Este é o procedimento de modelagem de trincas mais geral que permite uma análise de elemento de contorno de região única de estruturas com trincas.

No estudo do Método dos Elementos de Contorno em Mecânica da Fratura, Watson (1986) foi o primeiro a estudar as equações integrais de contorno (EIC) dual, onde ele utilizou uma formulação baseada na equação de deslocamento e sua derivada normal. A partir deste estudo diversos pesquisadores realizaram inumeros trabalhos tratando a singularidade causada pela colocação dos pontos na ponta da trinca. Então, Portela, *et al.* (1992) apresentou um estudo de modelagem da trinca utilizando o MECD que solucionou as singularidades geradas na região das trincas. Esta técnica está descrita a seguir junto com as equações integrais. O MECD transforma as EIC de deslocamento e a EIC de tração, adequadamente, em um sistema de equações algébricas lineares, por meio da colocação nodal e integração ao longo dos elementos de contorno. As forças e os deslocamentos desconhecidos do contorno podem então ser obtidos resolvendo-se este sistema de

equações que inclui as condições de contorno. As EIC serão apresentadas nas próximas seções, as mesmas estão implementadas BemCracker2D (GOMES e MIRANDA, 2018; GOMES, OLIVEIRA e DELGADO NETO, 2019).

#### 4.1 - MEC para Elasticidade

O MEC consiste em transformar equações diferenciais parciais, que solucionam problemas com incógnitas no domínio e no contorno, em equações integrais que levam as soluções apenas no contorno através de suas soluções numéricas. Os valores das soluções no domínio são calculados de forma direta a partir dos resultados obtidos no contorno.

##### 4.1.1 - EIC Elástica

Supondo conhecidas as condições de contorno dos tipos deslocamento e de tração em porções diferentes do contorno de um corpo com superfície total  $\Gamma$ , sendo dado pela soma das porções  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, pode-se escrever a Equação (4.1) dos resíduos ponderados,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (4.1)$$

onde  $u_k^*$  e  $p_k^*$  são deslocamentos e tração correspondente ao campo de ponderação. Integrando por partes o primeiro termo da Equação (4.1), obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (4.2)$$

Substituindo o tensor “ $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$ ” na Equação (4.2), integrando por partes o primeiro termo novamente e considerando o princípio de reciprocidade devido a simetria do tensor isotrópico de quarta ordem das constantes elásticas  $C_{ijkl}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{jk,j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ &= -\int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considerando as forças de corpo conhecidas, a segunda integral do lado esquerdo da Equação (4.3) não apresentam variáveis de cálculo desconhecidas. Todavia, a primeira integral possui variáveis de deslocamentos no domínio  $\Omega$ , enquanto as integrais de contorno à direita da igualdade possuem variáveis de deslocamentos e tração na borda do problema.

As funções de aproximação ou de ponderação são bastante usuais na eliminação das integrais de domínio como as dos primeiros termos da Equação (4.3) e satisfazem as equações de equilíbrio no domínio. Assim, as funções de aproximação e sua minimização tem sido aplicadas no estudo do MEC para tratar de forma mais adequadas e precisa problemas não-lineares. Este procedimento se trata de um dos objetivos neste trabalho, ou seja, o MRD é utilizado para eliminar a integral de domínio devido as deformações plásticas.

A expressão da Identidade de Somigliana para deslocamentos, dada na Equação (4.4), pode ser obtida a partir da solução fundamental que satisfaça a equação de Navier.

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (4.4)$$

A Equação (4.4) é uma representação contínua dos deslocamentos para qualquer ponto  $\xi \in \Omega$ . Consequentemente, a expressão de cálculo do estado de tensão nestes pontos é obtida através da derivada da Equação (4.4), e também fazendo a substituição do primeiro termo à direita na Lei de Hooke, resultando, assim, na Equação (4.5) das tensões nos pontos internos.

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (4.5)$$

#### 4.1.2 - Sistema de Equações

Assumindo que as forças de corpo são conhecidas, a discretização do contorno será necessária para a obtenção das incógnitas de deslocamentos e forças de contorno. Os tipos de elementos de contorno mais comuns usados são elementos constantes, lineares e quadráticos, ver Figura 4.1.

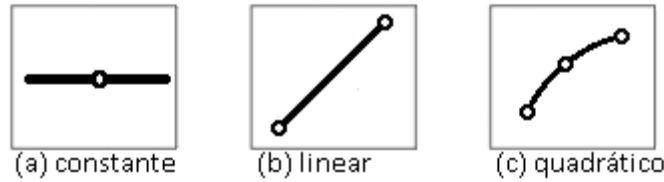


Figura 4.1 – (a) Elemento constante; (b) Elemento linear; (c) Elemento quadrático

A partir da Equação (4.4), desconsiderando as forças de corpo, desenvolve-se um procedimento numérico geral para solução de problemas de valor de contorno, assim, a Equação (4.6) pode ser aplicada para cada ponto do contorno discretizado do problema. Para executar as integrais os deslocamentos e forças são aproximados sobre cada elemento através de funções de interpolação.

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \quad (4.6)$$

No caso bidimensional, considerando um número de nós de contorno para os quais os valores nodais de deslocamentos e força são associados e aplicando as funções de interpolação sobre os elementos é possível obter submatrizes  $h_{ij}^k$  e  $g_{ij}^k$  através das integrais da Equação (4.6) que compõe as seguintes equações matriciais.

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij} p_j \quad (4.7)$$

Incorporando o termo  $c^i$  na matriz H da Equação (4.7) e aplicando as devidas condições de contorno, obtém-se o seguinte sistema.

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} \quad (4.8)$$

A Equação (4.8) pode ser desenvolvida matricialmente, para cada nó considerado da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \dots & \hat{h}_{1r} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \dots & \hat{h}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{h}_{r1} & \hat{h}_{r2} & \dots & \hat{h}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \dots & \mathbf{g}_{1r} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \dots & \mathbf{g}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{r1} & \mathbf{g}_{r2} & \dots & \mathbf{g}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Aplicando-se as condições de contorno ( $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i$  em  $\Gamma_1$ ) e ( $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i$  em  $\Gamma_2$ ) ao sistema de equações e rearranjando esse sistema de tal maneira que todas as incógnitas do problema são transferidas para o lado esquerdo num vetor  $\mathbf{Y}$  e o sistema pode ser reescrito como,

$$\mathbf{AY} = \mathbf{F} \quad (4.10)$$

#### 4.1.3 - Cálculo das Tensões no Contorno

Nos estudos do MEC tradicional, para uma aplicação prática, a solução numérica produz dados dos deslocamentos e tensões no contorno. Uma alternativa para obtenção dessas tensões é usar a Equação Integral (4.5), prevista para cálculo das tensões em pontos internos, aplicada no contorno, porém isso gera o surgimento de singularidades de alta ordem exigindo tratamento especial como visto no estudo do MECD na próxima seção.

Uma alternativa usual para determinar o tensor tensão no contorno é calcular as componentes do tensor a partir dos valores já obtidos dos deslocamentos e forças de superfícies. Duas componentes do tensor tensão ( $\sigma'_{12} = \sigma'_{21} = p'_1$  e  $\sigma'_{22} = p'_2$ ) podem ser obtidas a partir das forças de superfície, considerando um sistema de coordenadas cartesianas locais no ponto do contorno. A terceira componente é oriunda de uma expressão discreta para os deslocamentos sobre o contorno, tratando os deslocamentos localmente e diferenciando esses deslocamentos de forma a se obter as componentes do tensor de deformação, tem-se:

$$\sigma'_{11} = \frac{1}{1-\nu} (\nu \sigma'_{22} + 2G \varepsilon'_{11}) \quad \text{onde} \quad \varepsilon'_{11} = \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} \quad (4.11)$$

onde para o EPT,  $\nu$  assume o valor de  $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ . Obtidas as tensões  $\sigma'$  em coordenadas locais é necessário transformar em coordenadas globais através de matrizes de rotação.

## 4.2 - MECD

### 4.2.1 - Equação Integral de Deslocamento

Assumindo que, há a ausência de força de corpo e que exista continuidade dos deslocamentos no ponto de contorno “ $\xi$ ”, Portela et al. (1992) descreve a representação da integral de contorno das componentes de deslocamento “ $u_j(\xi)$ ” como:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) - VPC \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) \quad (4.12)$$

onde “ $i$ ” e “ $j$ ” correspondem as componentes cartesianas,  $p_{ij}^*(\xi, x)$  e  $u_{ij}^*(\xi, x)$  representam, respectivamente, as soluções fundamentais de Kelvin para tração e deslocamento no ponto do contorno “ $x$ ” e podem ser encontrada em Telles (1983), o símbolo “ $VPC$ ” representa a integral de Valor Principal de Cauchy, e o coeficiente “ $c_{ij}(\xi)$ ” é definido pelo tipo de contorno considerado no ponto “ $\xi$ ”.

### 4.2.2 - Equação Integral de Força de Contorno

Na ausência de forças de corpo e assumindo a continuidade de deformações e de forças em “ $\xi$ ”, no contorno suave, pode-se escrever, então, a Equação Integral para Tensões nos pontos de contorno, estendida para o caso inelástico:

$$c_{ij}(\xi)\sigma_{ij}(\xi) = VPC \int_{\Gamma} U_{ijk}^*(\xi, x)p_k(x)d\Gamma(x) - VPH \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(\xi, x)u_k(x)d\Gamma(x) \quad (4.13)$$

Sabe-se que: “ $p_i = \sigma_{ij}n_j$ ”. Então, a expressão final para as componentes da EIC para tração “ $p_i(\xi)$ ” são dados por,

$$c_{ij}(\xi)p_j(\xi) = n_i(\xi)VPC \int_{\Gamma} U_{ijk}^*(\xi, x)p_k(x)d\Gamma(x) - n_i(\xi)VPH \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(\xi, x)u_k(x)d\Gamma(x) \quad (4.14)$$

em que “ $P_{ijk}^*(\xi, x)$ ” e “ $U_{ijk}^*(\xi, x)$ ” representam as derivadas, respectivamente, de “ $p_{ij}^*(\xi, x)$ ” e “ $u_{ij}^*(\xi, x)$ ”, o símbolo “ $VPH$ ” representa o Valor Principal de Hadamard e “ $n_i$ ” denota a componente  $i$ -ésima da normal unitária que aponta para o exterior do domínio no ponto de contorno “ $\xi$ ”. Assim, as Equações (4.12) e (4.14) são a base do MECD, sendo que a Equação (4.14) é conhecida como a equação hipersingular do MEC. A EIC de deslocamento dada na Equação (4.12) representada pelas componentes  $u_j$  em um ponto  $\xi$  e a EIC de força de contorno dada na Equação (4.14) representada pelas componentes  $p_j$  em um ponto  $\xi$  estendidas considerando os termos inelásticos são apresentadas no Capítulo 5.

### 4.3 - O MRD

A principal função do MEC é a avaliação das equações integrais nos pontos de contorno, a fim de obter soluções minimizando a dimensionalidade do problema usando elementos apenas nos contornos dos modelos. Contudo, há a necessidade de avaliar o domínio para determinadas situações, o que torna um procedimento difícil, dada à questão da transformação das integrais de domínio, evitando, assim, outra discretização. Como descrito no Capítulo 1, uma das técnicas que muitos pesquisadores utilizaram para tratar os termos de domínio foi através da discretização deste em sub-regiões, denominadas células. Em cada célula admite-se uma aproximação para o deslocamento e força de corpo integrando individualmente cada uma delas por meio de funções de forma. O Método da Reciprocidade Dual (MRD) é um dos procedimentos utilizado para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno e tem sido alvo de estudo de muitos pesquisadores, pois este método pode ser aplicado a uma variedade de problemas. Com um procedimento geral de transformação, avaliam diversos problemas da engenharia de forma sistemática sem haver a necessidade de uma discretização do domínio. Sendo assim, uma ferramenta muito importante para análises elastoplástica junto com o MEC.

Um dos principais parâmetros a ser definido quando se estuda o MRD é qual função de aproximação usar. Nardini e Brebbia (1982) usaram a função “ $r$ ”, a mesma função utilizada na solução fundamental. Esta função é de base radial, sendo de ordem linear com comportamento local. A partir daí várias outras funções foram estudadas para o uso com o MRD. Nardini e Brebbia mencionaram em seu trabalho funções do tipo global, as quais foram estudadas por Cheng *et al.* (1993). Diferente da função local que considerava a interpolação na vizinhança de um ponto particular, a função global se dava sobre toda a

geometria. Karur e Ramachandran (1995) estudaram as funções radiais para problemas de Poisson, considerando “ $r$ ”, “ $r^3$ ”, “ $r^2 \log r$ ” (esta última é conhecida como TPS – *Thin Plate Spline*). As funções TPS foram acrescidas dos três primeiros termos da expansão global do triângulo de Pascal (1,  $x$  e  $y$ ) no estudo realizado por Golbert e Chen (1994) e são as funções conhecidas por ATPS (*Augmented Thin Plate Spline*). Essas funções de aproximação foram implementadas no MRD por Bridge e Wrobel (1996) para problemas de elasticidade com força de corpo. Outros trabalhos envolvendo uma forma híbrida no tratamento do MRD foram apresentados por Yan *et al.* (2010; 2016; 2017). Em trabalhos mais recentes (GOMES, 2006; GOMES, DELGADO NETO, *et al.*, 2019; PARTRIDGE e SENSALÉ, 1997; MEDEIROS e PARTRIDGE, 2001), problemas 2D vem sendo estudado com do tipo “*Polyharmonic splines*” ( $f = r^{2n} \log r$ ) e apresentam boa convergência. Em particular o trabalho de Gomes *et al.* (2019) faz um estudo com MRD em modelos 2D elastoplásticos em que as funções do tipo “*Polyharmonic splines*” têm sido consideradas como a melhor opção para o caso 2D, mostrando convergência linear com o crescimento da ordem  $n$ , (MEDEIROS e PARTRIDGE, 2001).

Em sua forma clássica, o MRD usa a função de aproximação para avaliar as tensões em todos os pontos em que o problema foi discretizado, contorno e interior, e, em seguida, obter a divergência do tensor de tensões em cada um dos pontos. No entanto, este procedimento mostrou-se inviável devido à dificuldade de se realizar o processo de derivação numérica que gera erros que aumentam com o processo iterativo (GOMES, 2006). Em Gomes, Delgado Neto, *et al.*, (2019), optou-se por utilizar uma nova função de aproximação que dependia apenas do primeiro invariante do tensor de tensões plástico, onde a ideia era aproximar a pseudo força de corpo (termo plástico) por uma função baseada no primeiro invariante do tensor de tensões em cada um dos pontos em que o contorno foi discretizado e nos pontos internos, gerando um vetor cujas componentes são os valores obtidos em todos os pontos indicados. Assim, o MRD, é utilizado como uma importante ferramenta no presente estudo, onde a função “ $r^2 \log r$ ” acrescida de dez termos do triângulo de Pascal apresentada na Equação (4.15) devido a Gomes, Delgado Neto, *et al.* (2019) foi empregada de forma adequada.

Gomes (2006) apresenta que a função é capaz de obter soluções a problemas com forças de corpo envolvendo funções conhecidas de ordem maior que um. Neste trabalho a função de aproximação apresentada na Equação (4.15) é empregada em uma chuva de pontos internos circundando a ponta da trinca, onde se espera a plastificação.

$$f = r^2 \log r + 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3 \quad (4.15)$$

A partir da Equação (4.16) de elementos de contorno para elasticidade considerando as forças de corpo, ou seja, incluindo a parcela da integral de domínio, considera-se um ponto “ $i$ ” no contorno,

$$c_{lk}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (4.16)$$

onde “ $c_{lk}$ ” é uma matriz 2x2 obtido pela consideração de movimento de corpo rígido, considerando modelos bidimensionais. Na Equação (4.17) apresenta uma integral de domínio, aplicada ao MRD, em função da densidade de força de corpo “ $b_k$ ” no domínio “ $\Omega$ ”, onde é empregada a função de aproximação “ $f^j$ ”,

$$b_k = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha_k^j \quad \text{ou} \quad b_k = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \delta_{km} \alpha_m^j \quad (4.17)$$

onde “ $\alpha_k^j$ ” são coeficientes inicialmente desconhecidos, “ $N$ ” é o número de nós usados na discretização do contorno e “ $L$ ” é o número de pontos internos empregados no domínio.

A segunda forma da Equação (4.17) apresenta soluções particulares que satisfazem a equação de Navier, Equação (4.18), as quais expressam as condições de equilíbrio para problemas elastostáticos na presença de forças de corpo.

$$\mu \hat{u}_{mk,ll}^j + \frac{\mu}{1-2\nu} \hat{u}_{lk,lm}^j = \delta_{mk} f^j \quad (4.18)$$

Assim, combinando as Equações (4.17) e (4.18) e substituído na Equação (4.16) e aplicando o princípio da reciprocidade, tem-se:

$$c_{ik}^i u_k^i = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left( c_{ik}^i \hat{u}_{mk}^{ij} + \int_{\Gamma} p_{ik}^* \hat{u}_{mk} d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ik}^* \hat{p}_{mk} d\Gamma \right) \alpha_m^j \quad (4.19)$$

A Equação (4.19) é reescrita para um corpo com contorno “ $\Gamma$ ”, discretizado em elemento de contorno e as funções “ $u_k$ ”, “ $p_k$ ”, “ $\hat{u}_{mk}$ ” e “ $\hat{p}_{mk}$ ” são aproximadas sobre os elementos usando funções de interpolação, representada pela Equação (4.20).

$$c^i u^i + \sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} p_k = \sum_{j=1}^{N+L} \left[ c^i \hat{u}^{ij} + \sum_{k=1}^N \bar{H}_{ik} \hat{u}_k^j - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{p}_k^j \right] \alpha^j \quad (4.20)$$

Aplicando a Equação (4.20) a todos os nós do contorno, tem-se a Equação (4.21).

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{p}})\boldsymbol{\alpha} \quad (4.21)$$

Os valores de “ $u$ ” e “ $p$ ” no contorno podem ser obtidos resolvendo a função “ $\alpha$ ”, dada através da Equação (4.22),

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.22)$$

onde a matriz “ $\mathbf{F}$ ” é constituída usando as funções de aproximação implementada pela função “ $f = r^2 \log r$ ” e os dez termos acrescidos referente ao triângulo de Pascal e “ $\mathbf{b}$ ” representa o pseudo vetor de forças de corpo. Portanto, aplicando na Equação (4.21) as condições de contorno “ $u$ ” e “ $p$ ” e reorganizando as incógnitas de “ $u$ ” e “ $p$ ” do lado esquerdo da igualdade e do lado direito os termos conhecidos de todos os valores de contorno “ $u$ ” e “ $p$ ”, pode-se determinar as tensões e deformações em qualquer ponto interno ou nó de contorno, conforme Equação (4.23),

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{mrdV} \quad (4.23)$$

onde a matriz “ $\mathbf{A}$ ” tem as equações que multiplicam as incógnitas “ $u$ ” e “ $p$ ”, que são elementos do vetor “ $\mathbf{X}$ ”, o vetor “ $\mathbf{Y}$ ” são os termos conhecidos da matriz multiplicados

com as condições de contorno “ $\bar{u}$ ” e “ $\bar{p}$ ” e “ $mr dV$ ” é o vetor de pseudo-forças de corpo obtido pelo MRD. Os pseudo-vetores utilizados para cálculo do “ $mr dV$ ” são considerados como as soluções particulares e são apresentados com mais detalhes no trabalho de Gomes (2006) e serão utilizadas neste trabalho. No atual trabalho o sistema matricial “ $AX = Y + mr dV$ ” foi atualizado em relação a malha funcional nos elementos descontínuos da trinca e seus incrementos.

## 5 - FORMULAÇÕES ELASTOPLÁSTICA COM MECD/MRD

Para os materiais que apresentam a característica de encruamento haverá um comportamento distinto dos materiais elásticos perfeitamente plásticos. Assim, um material que apresenta encruamento no regime inelástico, apresenta acréscimo de tensão a medida que o corpo se deforma além da tensão de escoamento (Figura 5.1). A curva tensão-deformação do comportamento de um material elástico não-linear no momento de descarregamento retorna pela mesma trajetória de carregamento, seguindo as mesmas condições iniciais. Entretanto, para o comportamento elastoplástico, o retorno se dá em trajetória linear, com inclinação igual ao módulo de elasticidade, medido na origem do diagrama tensão-deformação do material,

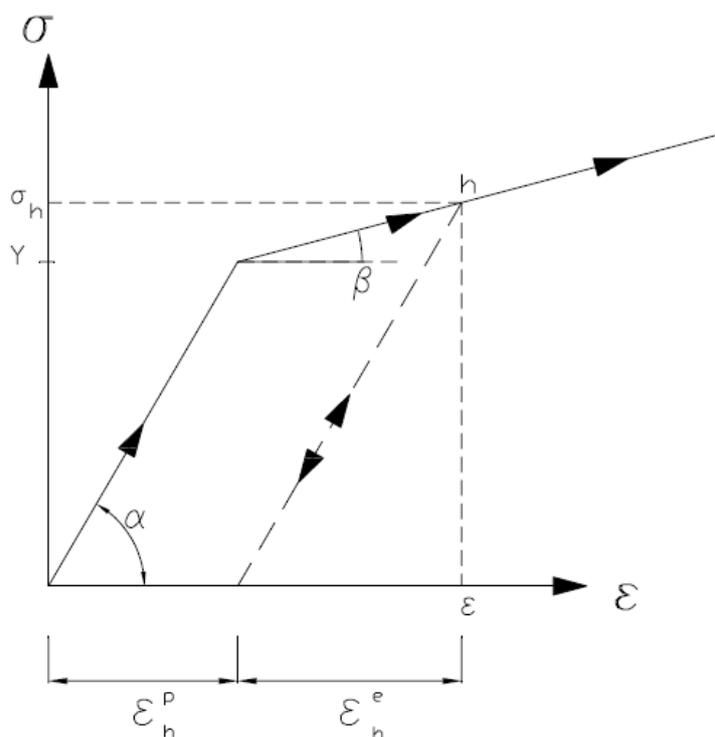


Figura 5.1 – Diagrama Tensão-Deformação Simplificado do Material

As deformações plásticas e elásticas são apresentadas pelos parâmetros  $\epsilon_h^p$  e  $\epsilon_h^e$ , respectivamente,  $Y$  é a tensão de escoamento do material,  $\sigma_h$  é a tensão plástica no ponto do descarregamento,  $\alpha$  corresponde ao módulo de elasticidade  $E$  e  $\beta$  é o módulo plástico.

## 5.1 - Equações Constitutivas

A seguir as equações diferenciais básicas para problemas inelásticos são apresentadas, (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Para manter uma notação unificada em problemas dependentes do tempo, essas equações são apresentadas na forma incremental. Presume-se, então, que no contexto da teoria das pequenas deformações, a taxa de deformação total para problemas inelásticos seja representada através da Equação (5.1),

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^a \quad (5.1)$$

em que “ $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ ” e “ $\dot{\epsilon}_{ij}^a$ ” são a parcela elástica e a parcela inelástica do tensor incremental de deformação total, respectivamente. A condição de equilíbrio pode ser representada de forma incremental da seguinte forma,

$$\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{b}_j = 0 \quad (5.2)$$

A Equação (5.2) é válida para o interior do corpo e a mesma condição quando aplicada para a superfície de contorno conduz para a equação incremental seguinte,

$$\dot{p}_i - \dot{\sigma}_{ij}n_j = 0 \quad (5.3)$$

em que “ $n_j$ ” representa os cossenos diretores da normal ao contorno com sentido para fora do corpo. Se as deformações inelásticas forem consideradas como deformações iniciais, a lei de Hooke pode ser aplicada na parte elástica do tensor da taxa de deformação total, dado na Equação (5.1), resultando na seguinte expressão para as componentes incrementais de tensão em termos da tensão iniciais:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a \quad (5.4)$$

sendo  $\dot{\sigma}_{ij}^a$  representa as componentes de tensões iniciais. Substituindo a Equação (5.4) nas Equações (5.2) e (5.3) juntamente com a Equação (5.1), tem-se:

$$\dot{u}_{j,il} + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{u}_{l,lj} = -\frac{\dot{b}_j}{G} \quad (5.5)$$

$$\dot{p}_i = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{u}_{l,l} n_i + G(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) n_j \quad (5.6)$$

A Equação (5.5) representa uma forma estendida da equação de Navier e a Equação (5.6) representa as condições de contorno de força de contorno. Essas equações são apresentadas em termos das pseudo-forças de corpo e de contorno, sendo as pseudo-forças dadas pelas Equações (5.7).

$$\begin{aligned} \dot{b}_j &= \dot{b}_j - \dot{\sigma}_{ij,i}^a \\ \dot{p}_i &= \dot{p}_i + \dot{\sigma}_{ij}^a n_j \end{aligned} \quad (5.7)$$

As expressões dadas da Equação (5.1) até a Equação (5.7) foram apresentadas para problemas tridimensionais. Assim sendo, essas equações podem ser aplicadas para casos bidimensionais apenas usando (i, j, k, l=1,2) e substituindo “ $\nu$ ” por “ $\bar{\nu} = \nu/(1 + \nu)$ ” com “ $\dot{e} = \dot{\epsilon}_{11}^a + \dot{\epsilon}_{22}^a$ ”.

## 5.2 - Formulação do MEC Inelástica

Sabe-se que a formulação integral pode ser obtida através do uso das técnicas dos resíduos ponderados. Essa técnica traz um entendimento físico para a solução numérica das equações diferenciais, obtendo um procedimento unificado capaz de relacionar o MEC com outros métodos numéricos. Nesta seção serão discutidos os passos básicos para este procedimento, (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984; TELLES, 1983). Assim uma solução aproximada é encontrada a partir da Equação de equilíbrio (5.2), apresentada na seção anterior, e detalhada na Equação (5.8).

$$\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{b}_j = 0 \quad (5.8)$$

Aplicando as condições de contorno de um corpo genérico, onde “ $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ ”, tem-se:

$$\dot{u}_i = \dot{\tilde{u}}_i \quad \text{em } \Gamma_1 \quad e \quad \dot{p}_i = \dot{\tilde{p}}_i \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (5.9)$$

Para encontrar uma solução aproximada, presume-se a introdução de um erro, o qual pode ser minimizado escrevendo a seguinte afirmação dos resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{jk,j} + \dot{b}_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (\dot{p}_k - \dot{\tilde{p}}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{\tilde{u}}_k - \dot{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (5.10)$$

onde “ $u_k^*$ ” e “ $p_k^*$ ” correspondem aos deslocamentos e força de superfície no campo de ponderação. Se as mesmas constantes de um material (E, G e  $\nu$ ) são válidas para a aproximação dos campos de ponderação, o primeiro termo da Equação (5.10) pode ser integrado por partes, tendo assim:

$$- \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \dot{\tilde{p}}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{\tilde{u}}_k - \dot{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (5.11)$$

Assim pode-se substituir a Equação (5.4) dentro da Equação (5.11), tem-se:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk}^e \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk}^a \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_k u_k^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_2} \dot{\tilde{p}}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{\tilde{u}}_k - \dot{u}_k) p_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.12)$$

E novamente integrando por partes o primeiro termo, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* \dot{u}_k d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk}^a \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_k u_k^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_2} \dot{\tilde{p}}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \dot{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \dot{\tilde{u}}_k p_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.13)$$

Reescrevendo a expressão acima de forma geral, pode ser visto que:

$$\int_{\Omega} b_k^* \dot{u}_k d\Omega = \int_{\Gamma} u_k^* \dot{p}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k^* \dot{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_k^* \dot{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{jk}^* \dot{\sigma}_{jk}^a d\Omega \quad (5.14)$$

onde foi feita a substituição “ $\sigma_{jk,j}^* = -b_k^*$ ”. A Equação (5.14) pode ser ainda modificada assumindo que os componentes de força do corpo “ $b_k^*$ ” correspondem à carga unitária pontual positiva aplicada no ponto “ $\xi \in \Gamma$ ”. Esta pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{p}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{b}_j(x) d\Omega(x) + \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(\xi, x) \dot{\sigma}_{jk}^a(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno total e  $\Omega$  é o domínio do corpo;  $u_{ij}^*$ ,  $p_{ij}^*$  e  $\varepsilon_{jki}^*$  são as soluções fundamentais de Kelvin e representam os campos de ponderação de deslocamento, força e deformação em um corpo elástico e homogêneo. Os parâmetros  $\dot{p}_j$ ,  $\dot{u}_j$  e  $\dot{b}_j$  são, respectivamente, componentes de força de superfície, deslocamento e força de corpo. As tensões plásticas são representadas por  $\dot{\sigma}_{jk}^a$ , o índice sobrescrito “a” indica todas as componentes inelásticas do tensor de tensão total,  $\xi$  representa o ponto de colocação e  $x$ , o ponto campo. A Equação (5.15) pode ser reescrita para problemas inelásticos em termos da deformação inicial dada na Equação (5.16):

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) \dot{u}_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{p}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{b}_j(x) d\Omega(x) + \int_{\Omega} \sigma_{jki}^*(\xi, x) \dot{\varepsilon}_{jk}^a(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Muitas são as alternativas de formulação para tratar a integral inelástica. Uma alternativa apresentada é a consideração da pseudo-força de corpo e pseudo-força de contorno, (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Sendo assim a última integral apresentada na Equação (5.16) pode ser escrita em termos das derivadas de  $u_{ij}^*$ , que depois de integrado por partes os termos e, substituindo na Equação (5.16), dá como resultado a Equação (5.17),

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) \dot{u}_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{\hat{p}}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{\hat{b}}_j(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde  $\hat{p}_j$  e  $\hat{b}_j$  são dados na Equação (5.7). Portanto, chegamos a uma EIC de deslocamento inelástica em que  $\hat{p}_j$  são as pseudo-forças de superfície e  $\hat{b}_j$  são as pseudo-forças de corpo, as quais dependem das deformações inelásticas, mas os deslocamentos são reais. A EIC de tração pode ser obtida através da diferenciação da EIC de deslocamento, dada na Equação (5.17). A derivada da integral de domínio deve ser realizada com a regra de Leibnitz, sendo considerada no sentido de Cauchy.

Brebbia *et al.* (1984) diferenciaram a equação integral de contorno do deslocamento obtendo assim a seguinte equação das tensões nos pontos internos:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} U_{ijk}^*(\xi, x) \dot{p}_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(\xi, x) \dot{u}_k(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Omega} U_{ijk}^*(\xi, x) \dot{b}_k(x) d\Omega(x) - C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^a \end{aligned} \quad (5.18)$$

Os parâmetros  $U_{ijk}^*$  e  $P_{ijk}^*$  são combinações lineares das derivadas das soluções fundamentais  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$ , respectivamente. Finalmente, substituindo a Equação (5.18) através da aplicação da lei de Hooke dada na Equação (5.3), a EIC de tração pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{p}_j(\xi) = & n_i(\xi) \int_{\Gamma} U_{ijk}^*(\xi, x) \dot{p}_k(x) d\Gamma(x) - n_i(\xi) \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(\xi, x) \dot{u}_k(x) d\Gamma(x) \\ & + n_i(\xi) \left[ \int_{\Omega} U_{ijk}^*(\xi, x) \dot{b}_k(x) d\Omega(x) + \frac{1}{2} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^a \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde  $n_i$  representa a  $i$ -ésima componente unitária da normal externa ao contorno, no ponto  $\xi$ ;  $C_{ijkl}$  representa o tensor isotrópico de quarta ordem das constantes elásticas. A formulação elastoplástica depende de informações das tensões em todos os pontos do domínio discretizado; uma alternativa a essa abordagem é aplicar a Equação (5.18) em pontos do domínio discretizado por células próximas ao contorno do corpo (BREBBIA *et al.*, 1984). Esta técnica exige a produção de uma malha de conectividade entre os pontos, afim de eliminar esse processo de criação da malha. Esse trabalho faz análise dos pontos internos pelo MRD sem a necessidade da construção de uma malha.

### 5.3 - Formulação do MEC Elastoplástica

#### 5.3.1 - EIC Elastoplástica

Considerando apenas os efeitos plásticos, a Equação (5.1) pode ser reescrita conforme a Equação (5.20),

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (5.20)$$

onde os termos a direita da igualdade correspondem às partes elásticas e plásticas da deformação, respectivamente, apresentadas nas Equações (5.21),

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^e &= E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\gamma} \dot{\varepsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é o multiplicador plástico dada no Capítulo 3. Aplicando a Lei de Hooke na Equação (5.20), é possível obter a Equação (5.22) da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (5.22)$$

Brebbia *et al.* (1984) apresenta a seguinte relação entre o estado elástico correspondente às forças de corpo  $b_j^*$  e de superfície  $p_j^*$ . Ver Equação (5.23):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} p_j^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_j^* \dot{u}_i d\Omega \quad (5.23)$$

Substituindo a Equação (5.22) em (5.23), tem-se:

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} p_j^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_j^* \dot{u}_i d\Omega \quad (5.24)$$

Aplicando-se a simetria do tensor elástico a integral à esquerda da igualdade da Equação (5.24), tem-se:

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} E_{klij} \varepsilon_{kl}^* \dot{\varepsilon}_{ij} d\Omega \quad (5.25)$$

Isolando o termo  $E_{klij}\dot{\varepsilon}_{ij}$  da Equação (5.22) e substituindo na Equação (5.25), obtém-se:

$$\int_{\Omega} E_{klij}\dot{\varepsilon}_{ij}\varepsilon_{kl}^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (5.26)$$

Substituindo a Equação (5.26) em (5.24) e em seguida substituir o resultado na integral à esquerda da igualdade da Equação (5.23) e considerando a simetria do tensor de tensões aplicada ao tensor plástico  $\dot{\sigma}_{ij}^p$ , obtém-se a expressão dada por Brebbia *et al.*, (1984), como,

$$\int_{\Gamma} \dot{p}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_j^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_j^* \dot{u}_i d\Omega \quad (5.27)$$

Aplicando a força concentrada unitária  $b_k^*$  em um ponto  $\xi$  no contorno  $\Gamma$  de uma região  $\Omega$  na direção de cada vetor unitário  $e_k$  apresentam singularidade nas integrais de contorno que apresentam raio  $r(\xi, x)$  tendendo a zero. A solução deste problema foi apresentada por Brebbia *et al.*, (1984), na qual foi considerado condições de cálculo para um corpo rígido, surgindo um coeficiente  $c_{ki}$  em uma equação similar de cálculo das componentes  $i$  de deslocamentos incrementais, ver Equação (5.28).

$$c_{ki}\dot{u}_i(\xi) = \int_{\Gamma} \dot{p}_i u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{b}_i u_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki,j}^* d\Omega - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (5.28)$$

Considerando que os efeitos inelásticos são puramente plásticos, a Equação (5.7) pode ser reescrita conforme a Equação (5.29).

$$\begin{aligned} \dot{b}_i^p &= -\dot{\sigma}_{ij,i}^p \\ \dot{p}_i^p &= \dot{\sigma}_{ij}^p n_j \end{aligned} \quad (5.29)$$

Pelo teorema da divergência, a integral que contém o termo plástico da Equação (5.28) pode ser definida como:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki,j}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij,j}^p u_{ki}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki}^* n_j d\Gamma \quad (5.30)$$

Substituindo os parâmetros da Equação (5.29) na Equação (5.30), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p u_{ki,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b}_i^p u_{ki}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{p}_i^p u_{ki}^* d\Gamma \quad (5.31)$$

Por fim, aplicando o resultado da Equação (5.31) na expressão das variáveis de deslocamento no contorno, vista na Equação (5.28), a qual incluem as pseudo forças, ver Equação (5.32).

$$c_{ki} \dot{u}_i = \int_{\Gamma} (\dot{p}_i + \dot{p}_i^p) u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} (\dot{b}_i + \dot{b}_i^p) u_{ki}^* d\Omega - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (5.32)$$

### 5.3.2 - Tensor de Tensões nos Pontos Internos

Através das Equações (5.20), (5.21), (5.22) e (5.32) é possível obter informações sobre os deslocamentos internos da forma clássica do MEC, considerando  $c_{ki} = \delta_{ki}$ . Brebbia *et al.*, (1984), apresenta a seguinte Equação (5.33) para determinação do tensor de tensão para os pontos internos ao domínio.

$$\dot{\sigma}_{lk} = \int_{\Gamma} U_{ijk}^* (\dot{p}_k + \dot{p}_k^p) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ijk}^* (\dot{b}_k + \dot{b}_k^p) d\Omega - \int_{\Gamma} P_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma - \sigma_{lk}^p \quad (5.33)$$

onde os tensores  $U_{ijk}^*$  e  $P_{ijk}^*$  para as duas dimensões são, respectivamente, a derivada da solução fundamental de deslocamento e de força de superfície, e apresentadas na Equação (5.34).

$$U_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,k}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}]$$

$$P_{ijk}^* = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} &2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \\ &+ 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + \\ &+ n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

## 5.4 - Tratamento da Integral de Domínio via MRD

O MRD foi apresentado na Seção 4.3 e sua formulação definida para problemas onde a integral de domínio é vinculada a uma função de força de corpo. Nesta seção, o MRD será apresentado considerando a ausência de forças de corpo, considerando o uso de funções de aproximação de pseudo-forças de corpo, dada por:

$$\dot{b}_i^p = -\dot{\sigma}_{ij,j}^p \quad (5.35)$$

Para modelar a Equação (5.35), emprega-se a função de aproximação, dada na Equação (4.15), usada na formulação clássica do MRD. Sendo assim, é necessário avaliar as tensões nos nós do contorno e pontos internos do problema discretizado.

### 5.4.1 - Avaliação do Tensor de Tensões em Pontos Internos

Para cálculo do tensor de tensões em pontos internos, Partridge *et al.*, (1992) expressa a partir da imagem do tensor de deformação incremental, através da Equação (5.36).

$$\begin{aligned} E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} = & \int_{\Gamma} U_{ijk}^*(\dot{p}_k + \dot{p}_k^p)d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ijk}^*\dot{u}_k d\Gamma \\ & + \sum_{m=1}^M \left( \hat{U}_{ijh}^m + \int_{\Gamma} P_{ijk}^*\hat{u}_{hk}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ijk}^*\hat{p}_{hk}^m d\Gamma \right) \dot{\alpha}_h^m \end{aligned} \quad (5.36)$$

Assim, substituindo a Equação (5.22) em (5.36) pode-se calcular as tensões nos pontos internos pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{kl} = & \int_{\Gamma} U_{ijk}^*(\dot{p}_k + \dot{p}_k^p)d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ijk}^*\dot{u}_k d\Gamma - \dot{\sigma}_{ij}^p \\ & + \sum_{m=1}^M \left( \hat{U}_{ijh}^m + \int_{\Gamma} P_{ijk}^*\hat{u}_{hk}^m d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ijk}^*\hat{p}_{hk}^m d\Gamma \right) \dot{\alpha}_h^m \end{aligned} \quad (5.37)$$

### 5.4.2 - Avaliação do Tensor de Tensões no Contorno

O MEC clássico calcula com precisão as informações contidas nos nós do contorno discretizado. Além das incógnitas de deslocamentos  $\dot{u}_i$  e de forças  $\dot{p}_i$  incrementais do

problema, é possível determinar as derivadas dos deslocamentos incrementais em função da coordenada tangencial  $\xi$ , através da Equação (5.38).

$$\dot{u}_i = \sum \phi^n \dot{u}_i^n \quad e \quad \frac{\partial \dot{u}}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial \phi^n}{\partial \xi} \dot{u}^n \quad (5.38)$$

Sendo assim o tensor de tensão incremental do contorno pode ser determinado através da aplicação da Lei de Hooke, da formulação de Cauchy e da derivação de uma função composta sobre Equação (5.22). Desta forma o seguinte conjunto de Equações (5.39) pode ser obtido,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^p$$

$$\dot{p}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi}$$

onde  $\mu$  é o módulo cisalhante,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $n_i$  são as componentes do vetor normal à superfície de contorno.

## 6 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo serão apresentados o algoritmo não-linear MEC/MRD junto com o BemCracker2D, considerando uma nova abordagem para solucionar os problemas da MFEP a partir de uma interação entre o MECD e o MRD, que leva em conta a análise plástica na região em torno da ponta da trinca. Além disso, é apresentada a interface gráfica de pré- e pós processamento que interage com os programas de análise, BEMLAB2D (DELGADO NETO, 2017), e o Bemcracker2D (GOMES e MIRANDA, 2018), programa para análise de problemas de trincas pelo MECD no campo da MFLE. O algoritmo não-linear resolve problemas 2D clássicos através da análise incremental plástica por MRD. Por último, é apresentada a interação realizada entre os programas.

### 6.1 - O Programa BEMLAB2D

Para auxílio de modelagem e observação dos resultados obtidos foi utilizado uma interface gráfica de usuário de pré e pós-processamento, a qual se relaciona com o solver conforme apresentado na Figura 6.1.

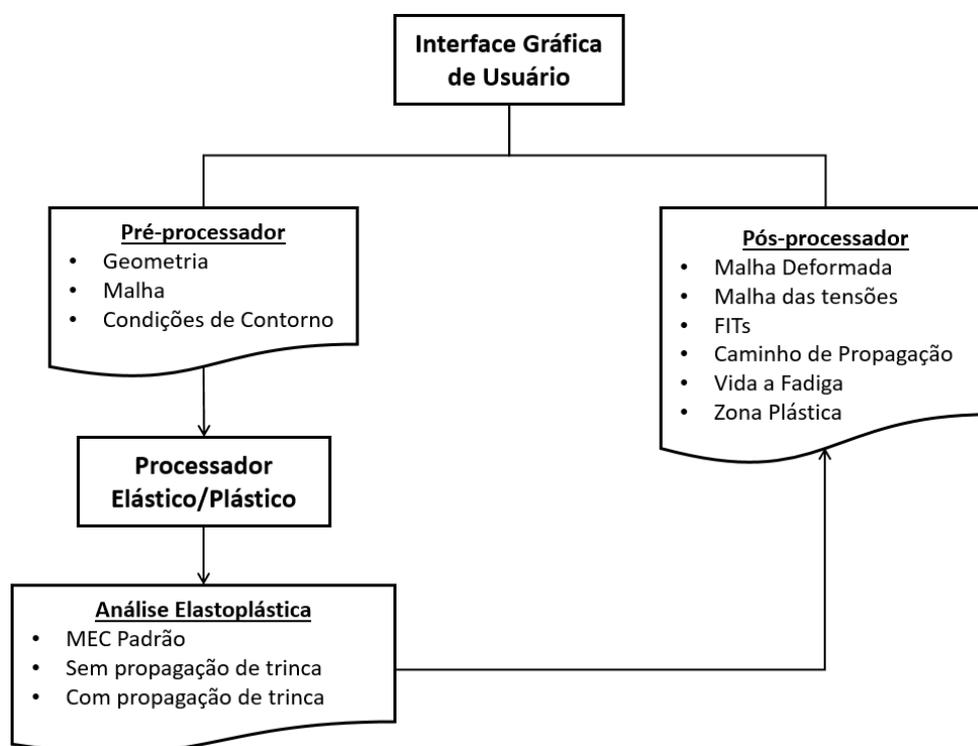


Figura 6.1 – Fluxograma geral do BEMLAB2D (DELGADO NETO, 2017)

O BEMLAB2D possui um módulo que o conecta os programas de processamento que serão descritos nas próximas seções. Uma hierarquia de funcionalidade do BEMLAB2D é apresentada na Figura 6.2

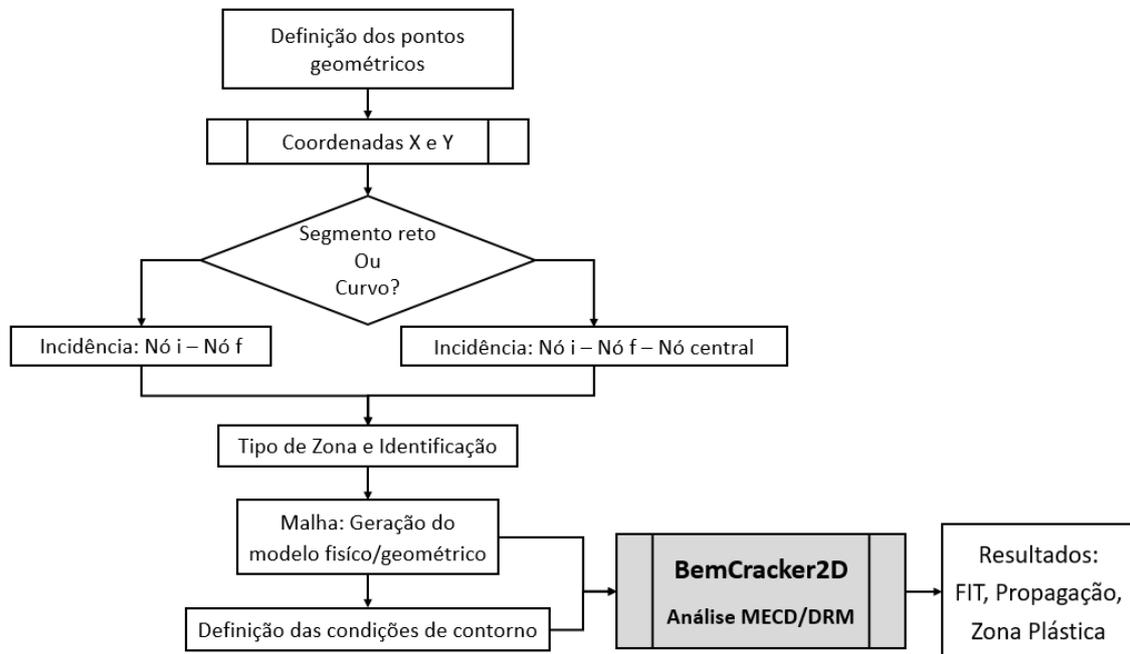


Figura 6.2 – Hierarquia de funcionalidade do BEMLAB2D (DELGADO NETO, 2017)

De forma resumida a modelagem acontece da seguinte forma no pré-processamento:

- Definição dos pontos geométricos: Gera pontos que auxiliam na construção do contorno do modelo;
- Definição dos segmentos do contorno: O usuário constrói todos os contornos, as trincas e os furos, através de segmentos retos e curvos;
- Definição da zona: Nessa etapa é definido as zonas dos materiais (zona mestre, inclusões e furos);
- Definição da malha: Constrói a malha de elementos contínuos e descontínuos no contorno, trincas e furos;
- Definição das condições de contorno: aplica as forças de superfícies (forças e tensões) e as restrições de deslocamento (apoio de 1º gênero e 2º gênero);

A seguir, deve ser ativado o Módulo de Análise do BEMLAB2D, o procedimento de definição da análise a ser realizada, onde os parâmetros de fratura e plasticidade são

acrescidos para assim haver a solicitação e comunicação com o programa BemCracker2D. O pós-processamento do BEMLAB2D recebe os dados gerados pelo BemCracker2D, onde pode-se visualizar os diversos resultados (gráficos, tabelas, ilustrações e gifs) obtidos das análises via MEC/MECD/MECRD, a saber: Deformações, tensões, fatores de intensidade de tensão, vida a fadiga, propagação de trincas e zona plástica. Mais detalhes do BEMLAB2D são apresentados e descritos no Apêndice B e o processo de utilização do programa pode ser encontrado detalhadamente em Delgado Neto (2017).

## **6.2 - O Programa BemCracker2D**

Como descrito na seção anterior o BemCracker2D é solicitado pelo BEMLAB2D no Módulo de Análise. Os módulos de processamentos podem ser escolhidos dentre as três opções a seguir:

- MEC padrão (módulo I);
- MECD Sem Propagação (módulo II);
- MECD Com Propagação (módulo III).

O módulo I do BemCracker2D trata modelos sem trinca através do Método dos Elementos de Contorno padrão. O Módulo II utiliza a formulação do MECD com a técnica proposta por Portela *et al.* (1992) para calcular tensões e deformações do contorno, assim como os fatores de intensidade de tensão em pontas de trincas sem considerar a propagação da mesma. O Módulo III trata modelos bidimensionais com presença de trincas de forma incremental, aplicando a propagação incremental da trinca no cálculo dos parâmetros (FITs). Um fluxograma de funcionalidade dos Módulos I, II e III se encontra apresentado na Figura 6.3, neste é possível visualizar a logística da implementação e os arquivos de entrada e saída do programa.

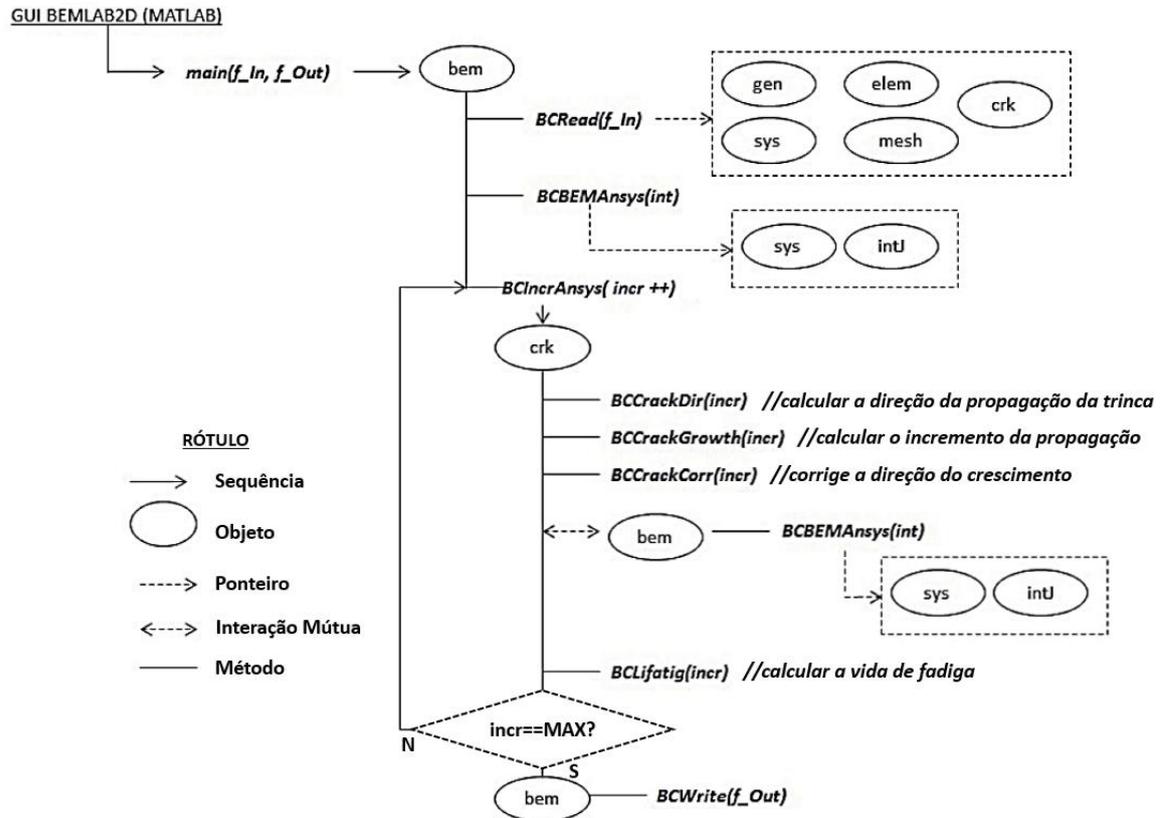


Figura 6.3 – Diagrama Sequencial do programa BemCracker2D (GOMES *et al.*, 2018)

Na classe *BCRead(f\_In)* são criados os primeiros objetos do programa BemCracker2D, onde o objeto “gen” armazena e trata parâmetros do material e os vetores e as matrizes constitutivas geradas pelo MECD; o objeto “elem” armazena informações sobre os elementos tratados na sua configuração local realizando uma conexão direta na formação das informações do objeto “gen”; “sys” é um objeto usado para alocação de espaço de memória para vetores e matrizes usados em outros objetos e classes; “mesh” é um dos primeiros objetos a ser ativado por armazenar as coordenadas geométricas e funcionais do modelo, assim como sua conectividade entre os elementos; e “crk” trata-se do objeto que armazena informação sobre os critérios de propagação da trinca, assim como dados da capacidade de carga e resistência residual calculadas por fadiga.

Nas classes *BCBemAnsys(int)* e *BCIncrAnsys(incr++)* são chamados os objetos “sys” e “intJ”, onde “sys” alocará memórias para os vetores e matrizes geradas por “intJ”, que por sua vez armazena os fatores de intensidade de tensão calculados na região em torno da ponta de cada trinca a cada incremento. O BemCracker2D é um dos processadores a serem

utilizados neste trabalho. Será inserido em seu código fonte novos métodos e classes a fim de possibilitar também a análise de fratura elasto-plástica.

### 6.3 - Algoritmo Não-Linear via MRD

O programa desenvolvido por Gomes *et al.*, (2019), possui toda base estrutural do MEC elasto-plástico bidimensional, e será usada aqui neste trabalho. As mudanças significativas dizem respeito à forma de aplicação abordada. Gomes estuda de forma geral modelos bidimensionais sem trinca, analisando as regiões de plastificação no domínio através do MRD, neste trabalho os modelos de aplicação possuem trinca e a região de plastificação estimada é a região em torno da ponta da trinca. Neste caso o cálculo das tensões nesta região será de grande importância para cálculo dos FIT no regime inelásticos do material.

No BemCracker2D (GOMES, DELGADO NETO, *et al.*, 2019) foi implementado um novo objeto, “plast”. Este objeto trata duas classes implementadas no programa de análise elasto-plástica de Gomes *et al.*, (2019), e levada para dentro do BemCracker2D. Estas classes são descritas a seguir e suas interações com o BemCracker2D são descritas na próxima seção.

- Classe *BEM\_PLASTIC* – esta classe é responsável pela análise plástica. Seus métodos e atributos calculam os incrementos plásticos de deformação e tensão, as pseudo-forças de superfícies, assim como determina a escolha do critério de escoamento adotado pelo usuário dentro do processo incremental por completo. Esta classe interage com as outras duas classes do modelo elasto-plástico. Um diagrama da funcionalidade desse algoritmo elasto-plástico pode ser visto na Figura 6.4.
- Classe *BEM\_DRM* – esta classe trata os termos não-homogêneos da análise inelástica, ou seja, transforma as integrais de domínio presente nas EIC de Deslocamento, Equação (5.17), e Tração, Equação (5.19), em integrais de contorno. Os métodos e atributos associados a classe permitem a montagem da matriz das funções de aproximação *ATPS* acrescida de dez termos do triângulo de Pascal, dos vetores das soluções particulares dos deslocamentos e forças, do cálculo da divergência do tensor de tensões plásticas e da pseudo força de corpo,

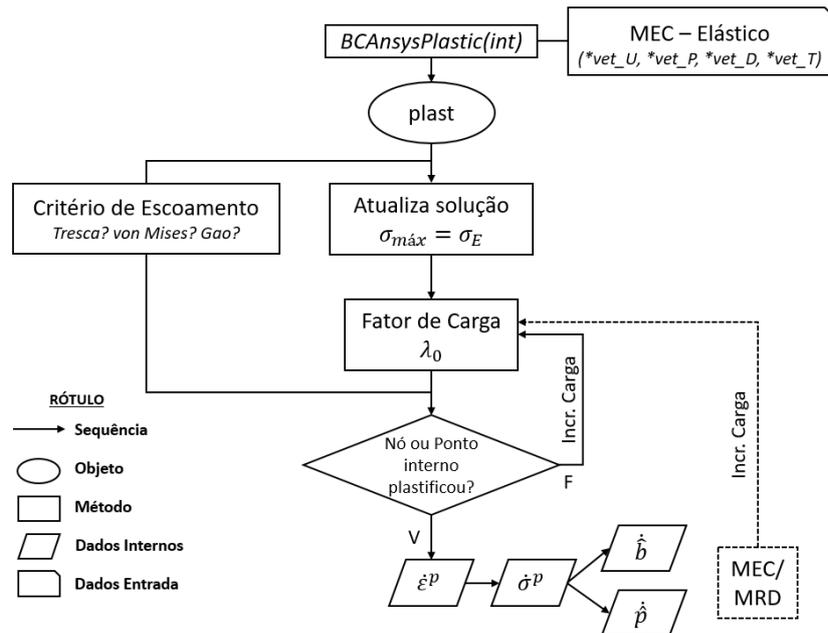


Figura 6.4 – Diagrama sequencial do algoritmo plástico (GOMES *et al.*, 2019)

onde “plast” é o objeto que trata os métodos que envolvem as análises plásticas e armazena os dados plásticos; “*vet\_U*”, “*vet\_P*”, “*vet\_D*” e “*vet\_T*” são, respectivamente, os vetores do deslocamento, força, deformação e tensão determinados inicialmente através da análise elástica via MEC assumindo a carga totalmente aplicada.

Foi implementado no software BemCracker2D a formulação elastoplástica e são apresentados os principais passos do algoritmo (Figura 6.4) com as principais equações envolvidas a seguir.

- **Passo 1:** Inicialmente é aplicada uma carga de referência  $P_0$  e realizada a análise elástica através das equações de MEC padrão para obtenção das incógnitas  $u$  e  $p$  no contorno. Em seguida, calculam-se os deslocamentos e tensões em pontos interno, bem como tensões no contorno.
- **Passo 2:** Com as tensões obtidas no Passo 1, calcula-se a tensão equivalente ( $\sigma_e$ ) com base no critério de escoamento escolhido, procurando o valor máximo ( $\sigma_e^{máx}$ ).
- **Passo 3:** Calcula-se o fator de carga  $\lambda_0$ , dado por:

$$\lambda_0 = \sigma_y / \sigma_e^{máx} \quad (6.1)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material. Atualizam-se as variáveis obtidas pela aplicação da carga  $P_0$  no Passo 1, conforme:

$$\mathbf{p} = \lambda_0 \cdot \mathbf{p}_0 ; \quad \mathbf{u} = \lambda_0 \cdot \mathbf{u}_0 ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6.2)$$

Aqui é verificado se houve escoamento em algum nó do contorno ou ponto interno. Caso não se verifique o escoamento no nó ou ponto, se aplica um incremento de carga a  $P_0$  no Passo 1. Se o escoamento ocorreu, segue para o Passo 4.

- **Passo 4:** Para os pontos internos ao redor da ponta da trinca em que o material atingiu o escoamento, a deformação plástica é estimada como apresentada por Simo e Hughes (1998).
- **Passo 5:** Sendo conhecido o tensor de deformação plástica, o tensor de tensões plásticas é então computado.
- **Passo 6:** Determinada as tensões plásticas, as pseudo-forças de corpo ( $\hat{\mathbf{t}}$ ), as pseudo-forças de superfície ( $\hat{\mathbf{p}}$ ) e os pseudo-deslocamentos ( $\hat{\mathbf{u}}$ ) são obtidas através do MRD e armazenadas no vetor  $mrdV$ , dado na Equação (6.3)

$$mrdV = \mathbf{G}\hat{\mathbf{t}} + (\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{p}})\alpha \quad (6.3)$$

O vetor  $mrdV$  é calculado para determinar as incógnitas  $u$  e  $p$  nos pontos internos e nós de contorno. As pseudo-forças de corpo são nulas em pontos e nós dentro do regime elástico. Entretanto, pontos e nós que atingiram o escoamento tem as tensões elásticas corrigidas de forma iterativa. Conhecendo a função ( $\alpha = F^{-1}t$ ), pode-se obter  $u$  e  $p$  no contorno, onde  $F$  é a matriz constituída das funções de aproximação dada na Equação (4.15).

- **Passo 7:** Calcula-se um novo incremento de carga  $P_0$  adicionando-o ao anterior uma porcentagem da carga inicial e continua-se a partir do Passo 3.

Esta etapa é realizada até o número de incrementos de carga definido para cada incremento de trinca. Assim, o número total de incrementos de carga será o produto entre o número de incrementos de carga para cada trinca pelo número total de incrementos de trinca.

- **Passo 8:** As iterações são repetidas no Passo 7 até a aplicação do último incremento de carga para a ponta de trinca correspondente, passando-se, então, para um novo incremento de trinca e retorna a partir do Passo 1.

Em problemas de trincas, as maiores tensões ocorrem nos pontos internos em torno da ponta da trinca. Ao final de cada incremento de trinca, tanto os FITs quanto a Resistência Residual são calculados no comportamento do material elástico e plástico. Ao final, aplicados todos os incrementos de trinca e o último incremento de carga, o programa é finalizado.

#### 6.4 - Estratégia de Modelagem da Trinca

Portela et al. (1992) afirma que uma modelagem especial na região da trinca deve ser considerada, quando a derivação das EIC duais apresentam condições necessárias para a existência dos valores principais de Cauchy e Hadamard, que são equivalentes a integrais finitas de primeira e segunda ordem, respectivamente. Foi visto que para a integral de primeira ordem em partes finitas, representada por  $VPC \int_{\Gamma}$  na Equação (4.12), apresentam resultados satisfatório quando considerada uma discretização contínua ou descontínua dos elementos de contorno no ponto de colocação, porém a integral de segunda ordem de parte finita, representada por  $VPH \int_{\Gamma}$  na Equação (4.14), requer necessariamente uma suavidade produzida apenas por elementos quadráticos descontínuos. Sendo assim a discretização mais eficiente a ser considerada é adotar elementos quadráticos descontínuos para a modelagem da trinca, conforme mostrado na Figura 6.5.

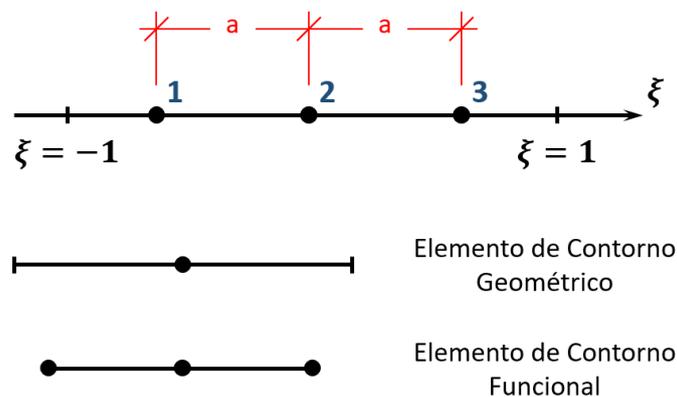


Figura 6.5 – Elementos de contorno contínuo/descontínuo

Sendo assim, no programa BemCracker2D, duas malhas são construídas para todo o contorno e nas faces das trincas e são definidas como:

- A malha geométrica: definida pelos nós geométricos que se situam sempre no contorno dos elementos;

- A malha funcional: definida pelos nós funcionais que devem estar nos elementos das faces da trinca, assim como também nos elementos na proximidade da abertura da trinca.

Nos elementos descontínuos, o primeiro e o último nó do elemento funcional tem posição equidistante do nó original da malha geométrica, onde as funções de forma/interpolação para esse grupo de elementos são dadas a seguir:

$$\phi_1 = \xi \left( -\frac{1}{2a} + \xi \frac{1}{2a^2} \right), \quad \phi_2 = 1 - \xi^2 \frac{1}{a^2}, \quad \phi_3 = \xi \left( \frac{1}{2a} + \xi \frac{1}{2a^2} \right)$$

onde  $a$  é “ $a$ ” distância entre os nós do elemento nas funções de forma, “ $\xi$ ” variável inteira podendo assumir o valor (-1,0,1), (PORTELA, ALIABADI e ROOKE, 1992). Assim, a estratégia geral de modelagem desenvolvida no presente trabalho pode ser resumida da seguinte forma:

- O contorno é discretizado por elementos quadráticos contínuos, exceto os elementos da trinca e os elementos próximos à boca da trinca de borda que são quadráticos e descontínuos ou semi-descontínuos, como observados na Figura 6.6;
- A EIC de Deslocamento, Equação (4.12), é aplicada para a colocação em uma das faces da trinca;
- A EIC de Tração, Equação (4.14), é aplicada para colocação na face oposta da trinca.

Na aplicação direta do MEC em problemas da Mecânica da Fratura, o sistema apresenta singularidade ao se aplicar a EIC em pontos de mesma coordenada sobre a trinca, mesmo estes pontos estando em faces opostas da trinca. Assim, para ambas as faces o caminho de integração se torna o mesmo gerando linhas na matriz do sistema iguais. Para se obter um sistema não singular com uma única região deve-se escrever a EIC dos deslocamentos em uma face da trinca e a EIC de tração para a outra face, evitando-se o aparecimento de duas linhas iguais no sistema de equações. Essa estratégia simples permite que o MECD modele com eficiência problemas gerais de trincas centrais e trincas de borda; pontas de trincas, arestas de trinca e trincas curvas, não requerem tratamento especial, pois o ponto de colocação (malha funcional) é diferente dos pontos nodais (malha geométrica) da trinca.

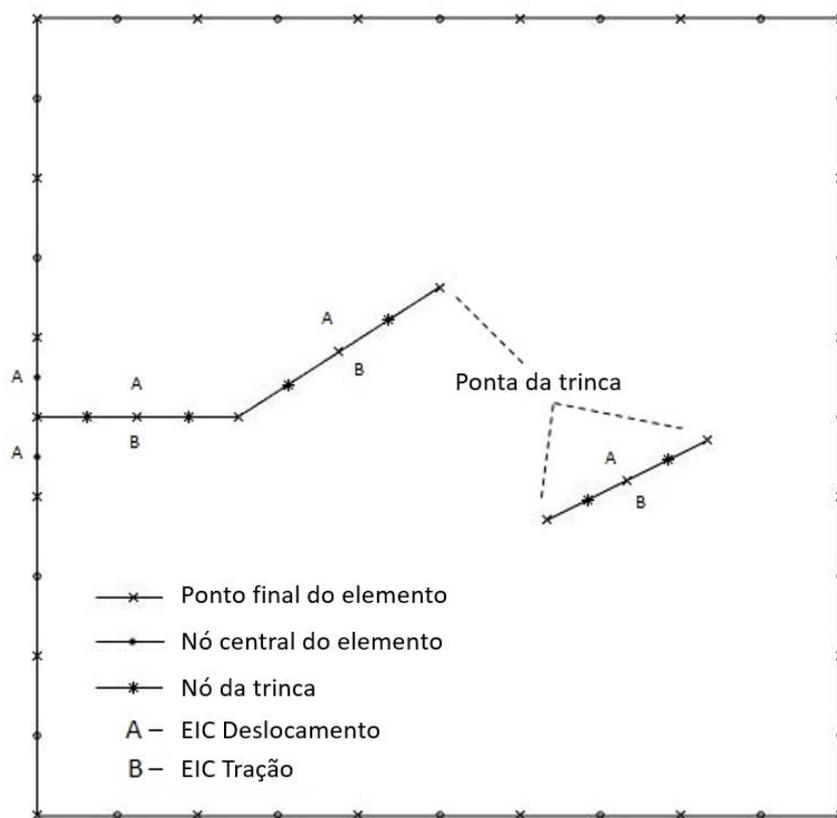


Figura 6.6 – Modelagem dos elementos de trinca (GOMES, DELGADO NETO e WROBEL, 2016)

A estratégia usada na modelagem de problemas elásticos pelo BemCracker2D é devido a Portela *et al.*, (1992) e será adotada no presente trabalho apenas no que tange ao tratamento do uso das equações integrais em cada face da trinca e na previsão do caminho de propagação. Entretanto, para acompanhar o processo elastoplástico, a seguinte estratégia foi adotada e implementada neste trabalho, conforme ilustrada na Figura 6.7 e descrita a seguir:

- Modelagem no domínio: O domínio é formado por uma chuva de pontos internos circundando a ponta da trinca e espaçada de forma regular, considerando o raio do primeiro círculo igual ao tamanho do elemento da ponta da trinca. Esta chuva de pontos é inserida de forma automática na região onde são esperadas as deformações plásticas, conforme (GOMES, DELGADO NETO, *et al.*, 2019);

- Esses pontos são usados para obtenção das tensões e verificação de possíveis candidatos à plastificação. Inicialmente, são obtidos os FIT na ponta da trinca, sem qualquer incremento;
- Caminho de propagação da trinca: a cada avanço, ou incremento, esses pontos são testados quanto ao critério de plastificação e, portanto, selecionados para o algoritmo MECRD;
- Por fim, para o próximo incremento, uma nova chuva de pontos é inserida na nova ponta da trinca avançada, repetindo-se o processo.

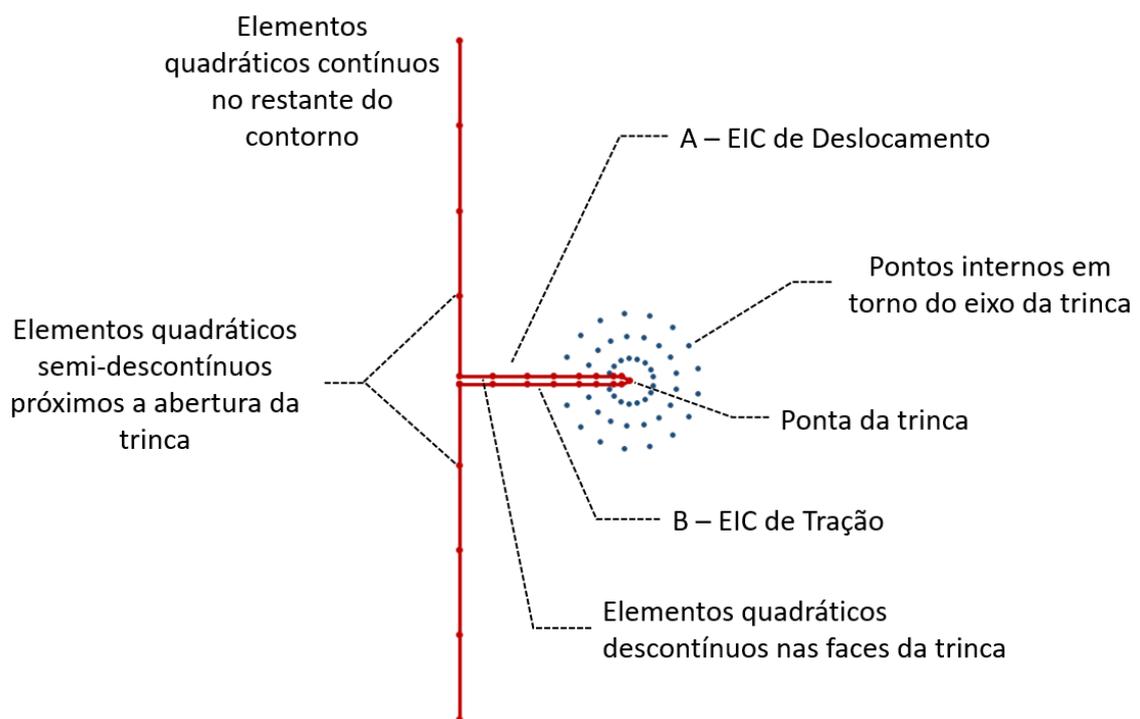


Figura 6.7 – Modelagem da região da trinca com destaque dos pontos internos

A equação de deslocamento, Equação (5.17), é aplicada para a colocação em uma face da trinca e no restante do contorno, enquanto a equação de tração, Equação (5.19), é aplicada a outra face da trinca.

### 6.5 - Interação Entre os Programas

Neste trabalho é proposta a construção de um sistema completo de análise de engenharia por MECRD/MRD, composto por três módulos principais: o pré-processador, o processador e o pós-processador. O pré e o pós-processador são formados pela interface gráfica

BEMLAB2D de fácil utilização, permitindo que o usuário modele por completo peças bidimensionais. O pré-processador é responsável pela criação dos modelos dos problemas, gerando dados de entrada no processador. O pós-processador é responsável pela leitura e impressão dos dados emitidos pelo processador. Por sua vez, o processador é formado pela união e interação perfeita entre o BemCracker2D e o algoritmo não-linear via MRD. O processador está preparado para análise de modelos com ou sem trinca dentro do regime elástico ou inelástico. A Arquitetura básica da interação entre os programas é apresentada na Figura 6.8.

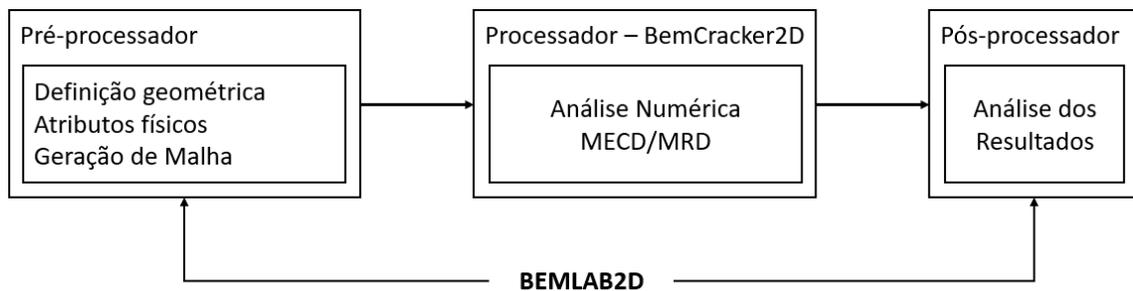


Figura 6.8 – Arquitetura básica de interação – BEMLAB2D/BemCracker2D

Considerando a partir de agora somente o estudo em problemas com trinca, tem-se a seguir a descrição da funcionalidade principal e interação entre os programas BemCracker2D, de análise da Mecânica da Fratura, e o algoritmo não-linear, de análise elastoplástica via MRD. Dentre as primeiras mudanças realizadas no BemCracker2D, que contribuíram para esse trabalho, se destaca o algoritmo automático que gera a chuva de pontos internos em torno da ponta da trinca (Figura 6.7) este só é ativado se o usuário deixar claro dentro do BEMLAB2D que a análise definida é para uma material no regime inelástico. Sendo assim, esse algoritmo produz novos atributos ao objeto “mesh”, onde dois vetores de coordenadas ( $m\_XINT$  e  $m\_YINT$ ) dos pontos internos são criados e alocados para cada trinca individualizada. Para cada nível de propagação, ou seja, a cada incremento de propagação de trinca uma nova chuva de pontos é gerada na nova ponta da trinca desconsiderando as informações geradas para a ponta de trinca antiga. Os detalhes desse algoritmo são apresentados no Apêndice A.

A partir da solução elástica para deslocamento, Equação (5.17), e tensões de contorno e pontos internos, Equação (5.18), obtida pelo BemCracker2D, o processo incremental, solicitado a partir do objeto “plast”, começa verificando a condição de plastificação dos

nós de contorno e pontos internos em torno da ponta da trinca. Considerando adotado um critério de escoamento, se este for atingido em algum nó ou ponto, para estes são calculadas as tensão e deformações plástica referente. Em sequência, o procedimento de cálculo das soluções numéricas das integrais de domínios é determinado pelo MRD, calculando os pseudo-vetores de deslocamento e força de superfície. Estes são utilizados para calcular o vetor “*vet\_drm*”. O algoritmo MECD Elastoplástico também foi implementado em linguagem C++ e possibilita um relacionamento direto com o BemCraker2D, devido a sua forma orientada a objeto. O fluxograma da Figura 6.9 ilustra os passos do algoritmo elastoplástico, *BCAnsysPlastic(int)*, dentro do BemCraker2D.

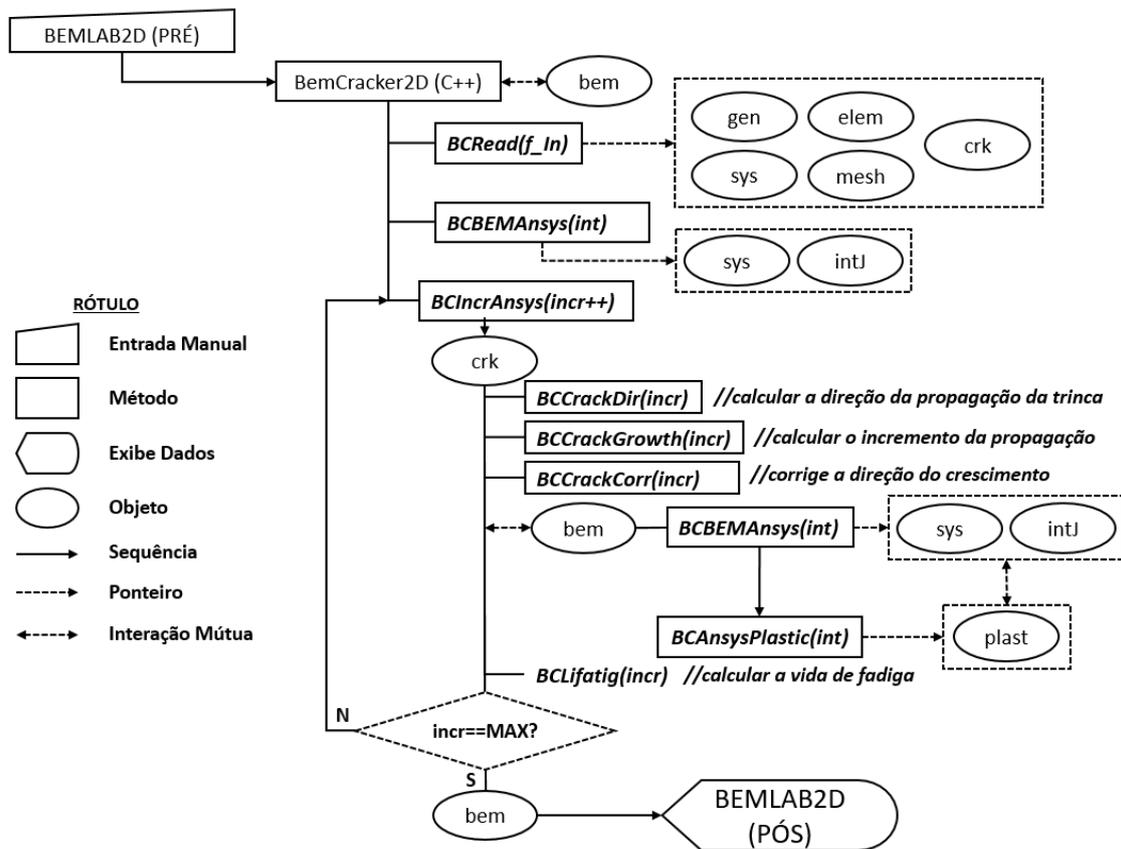


Figura 6.9 – Arquitetura Completa MECD/MRD

As iterações do algoritmo plástico são repetidas no passo 7, descrita na seção anterior, até a aplicação do último incremento de carga para a ponta de trinca correspondente, passando-se, então, para um novo incremento de trinca e retorna a partir do passo 1. Em problemas de trincas, as maiores tensões ocorrem nos pontos internos em torno da ponta da trinca. Ao final de cada incremento de trinca, tanto os FITs quanto a Resistência Residual são calculados no comportamento do material elástico e plástico. Ao final, aplicado todos os

incrementos de trinca e o último incremento de carga, a zona plástica na ponta da trinca é estimada e o programa é finalizado.

## 7 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A fim de validar a metodologia adotada neste trabalho, quatro modelos de propagação de trincas são apresentados, inicialmente, para a determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT), deformação, evolução da zona plástica e caminho da propagação. Depois são apresentados três exemplos para a determinação do FIT e a evolução da zona de plastificação na ponta da trinca sem considerar a propagação da trinca, considerando resultados apresentados em trabalhos da literatura. Nesses sete primeiros exemplos analisam chapas retangulares, considerando as condições de simetria de forma a estudar problemas que tenham apenas uma ponta de trinca. Por último é estudado mais dois modelos com trinca considerando diversos critérios de escoamento. Em todos os modelos foi considerado o comportamento elástico-perfeitamente plástico e os resultados são comparados com resultados encontrados na literatura.

O primeiro exemplo é uma chapa retangular com duas trincas horizontais de borda na metade da altura das arestas laterais, submetida a tensões uniformes de tração vertical auto equilibrantes, a chapa possui simetria em relação ao eixo vertical passando pelo seu centro geométrico. A chapa é feita de aço e a análise elástica-perfeitamente plástica será estudada através do critério de von Mises. Os resultados elástico e plástico são comparados considerando a propagação da trinca.

O segundo exemplo estuda uma chapa com as mesmas dimensões e características do exemplo anterior, diferencia-se apenas das condições de contorno de deslocamento prescrito. Uma tensão de tração uniforme vertical é aplicada sobre o modelo de uma chapa retangular. A chapa tem uma trinca horizontal de borda na metade da altura de uma das arestas.

Uma chapa semelhante aos dois exemplos anteriores é estudada no terceiro exemplo, aqui a diferença é uma trinca central embutida no material. Considerando a simetria do problema, analisa-se apenas a metade da chapa, onde o eixo de simetria passará pelo meio da trinca.

O quarto exemplo estuda uma chapa retangular submetida a tensões verticais de tração autoequilibradas, aplicadas nas faces horizontais da chapa. A chapa possui uma trinca de bordo com inclinação de  $45^\circ$ , começando a 40% da altura, partindo do vértice inferior, de

uma das faces verticais. As características do material são as mesmas dos exemplos anteriores. Para os quatro últimos exemplos foram considerados cinco incrementos de carga para cada incremento de propagação de trinca, considerando o passo de carga 1% da carga inicial.

Os três exemplos finais correspondem à análise da plastificação na ponta de trinca embutida na chapa sobre condições de contorno semelhante ao terceiro exemplo. Estes exemplos foram estudados em trabalhos encontrados na literatura e comparados com os dados obtidos nesta Tese. Estendendo-se aqui os resultados para uma análise elastoplástica considerando diversos critérios de escoamento para um material elástico-perfeitamente plástico.

Os dois últimos exemplos estudados são uma chapa em cruz e uma chapa tracionada com três furos onde será aplicado diversos critérios de escoamento.

Nessa seção são apresentados os modelos estudados nesta tese, bem como as características mecânicas do material, características geométricas do modelo, configurações da malha de contorno e condições de contorno (carga/deslocamento).

## 7.1 - Exemplo I – Chapa Retangular Com Duas Trincas Retas de Borda

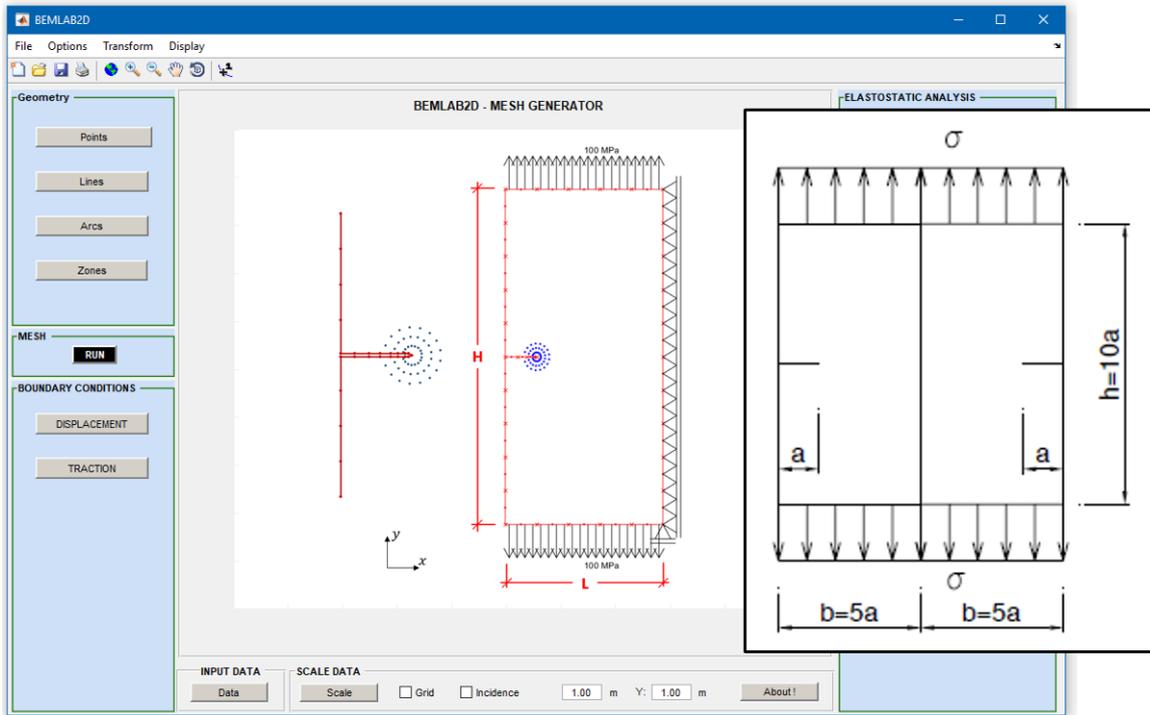


Figura 7.1 – Chapa retangular com duas trincas de borda reta

A chapa no EPT estudada por Delgado Neto, *et al.*, (2023) no Exemplo I possui largura igual 1,0 metros ( $b$ ), altura igual a 2,0 metros ( $h$ ) e trinca com dimensão de 0,2 metros ( $a$ ). A tensão aplicada nas faces horizontais tem intensidade igual a  $\sigma_0 = 100MPa$ , tracionando a chapa. Neste problema a chapa foi discretizada com uma malha contendo 40 elementos de contorno quadráticos, sendo 10 desses descontínuos aplicados na trinca, 2 semi-descontínuos nos elementos adjacentes a boca da trinca e 28 elementos contínuos quadráticos no restante do contorno. Foram considerados 48 pontos internos em três camadas circulares espaçadas igualmente e distribuídas ao redor da ponta da trinca, conforme Figura 7.1. Considera-se  $\sigma_y = 550MPa$ ,  $E = 210GPa$  e  $\nu = 0,3$ , a tensão de escoamento, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

## 7.2 - Exemplo II – Chapa Retangular Com Uma Trinca Reta de Borda

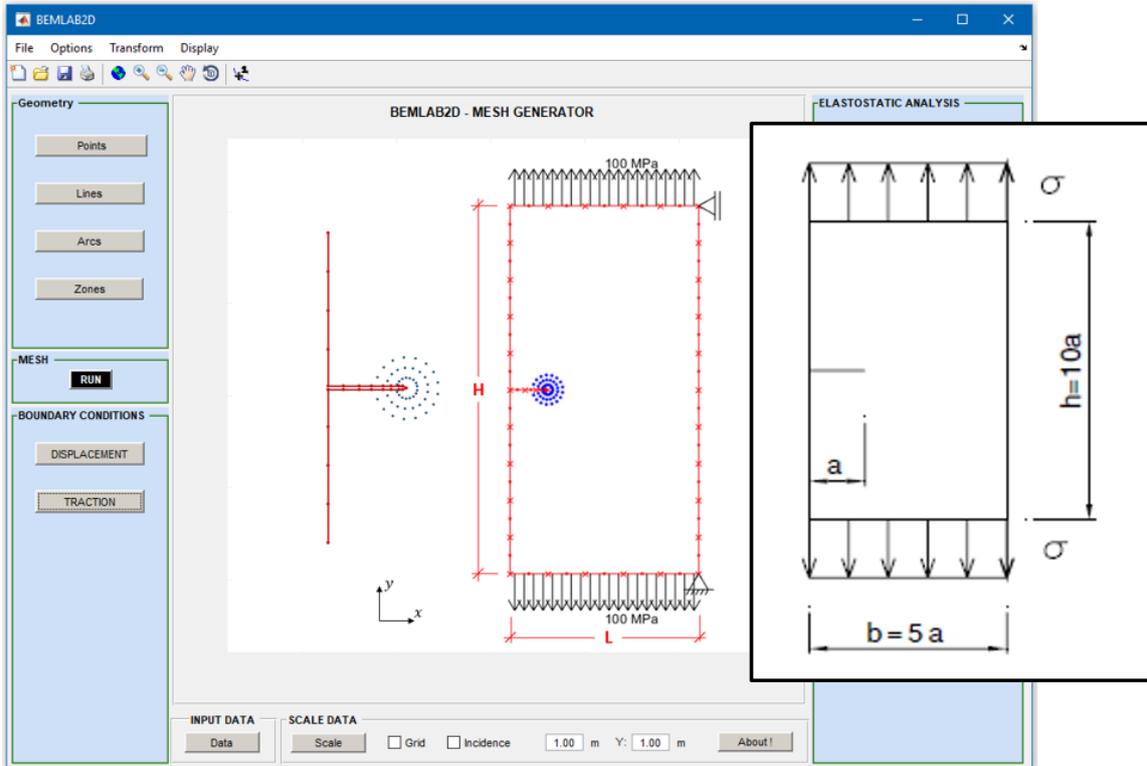


Figura 7.2 – Chapa retangular com uma trinca de borda reta

A chapa no Exemplo II possui as mesmas dimensões, discretização e condições de contorno de tração do exemplo anterior, mas com condições de contorno de deslocamento prescrito são diferentes, como é possível ver na Figura 7.2. Considera-se a tensão de escoamento do aço igual a  $\sigma_y = 650\text{MPa}$ , o módulo de elasticidade como  $E = 210\text{GPa}$  e o coeficiente de Poisson sendo  $\nu = 0,3$ .

### 7.3 - Exemplo III – Chapa Retangular Com Trinca Reta Embutida

O Exemplo III possui os mesmos dados dos dois exemplos anteriores, modificando-se apenas as condições de contorno de deslocamento prescrito e a tensão de escoamento,  $\sigma_y = 500MPa$ , como é apresentado na Figura 7.3.

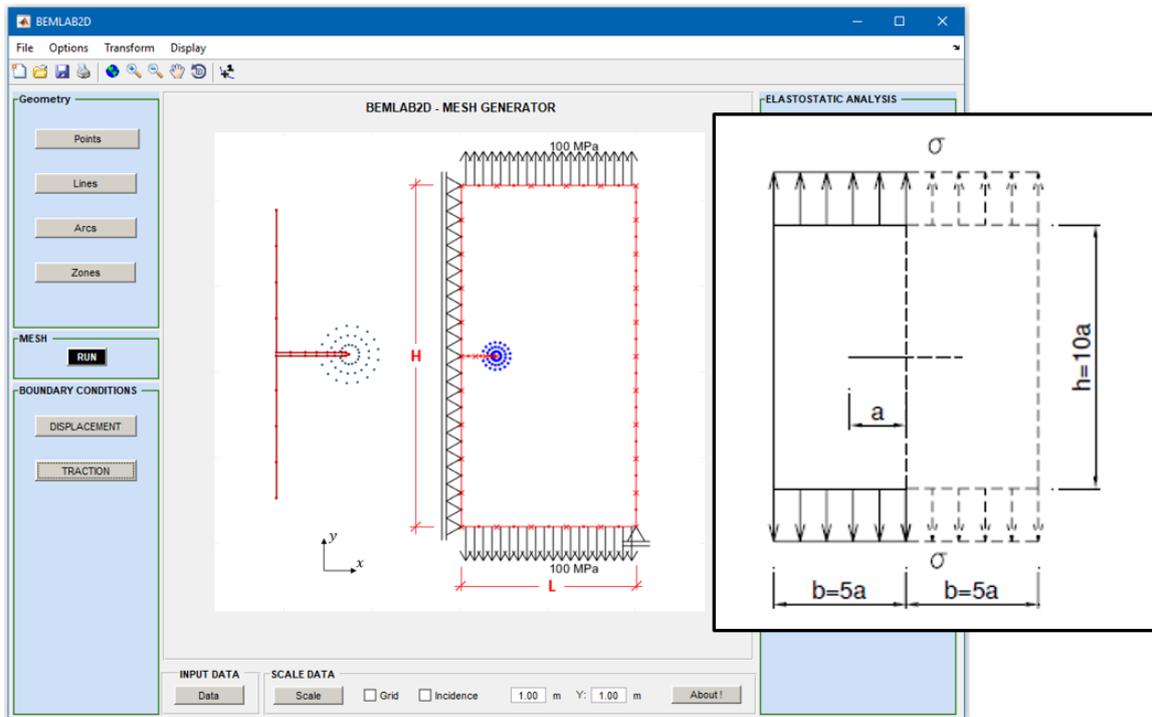


Figura 7.3 – Chapa retangular com trinca embutida

#### 7.4 - Exemplo IV – Chapa Retangular Com Trinca Inclinada de Borda

Neste exemplo, é estudada uma chapa no EPD de forma retangular com trinca inclinada de  $45^\circ$ , que começa a 40% a partir do vértice inferior esquerdo, na aresta vertical esquerda. Este problema foi estudado por Delgado Neto, *et al.*, (2023) usando um método MEC elastoplástico no qual a região da trinca é modelada usando células e a tensão de escoamento considerada foi  $\sigma_y = 950MPa$ .

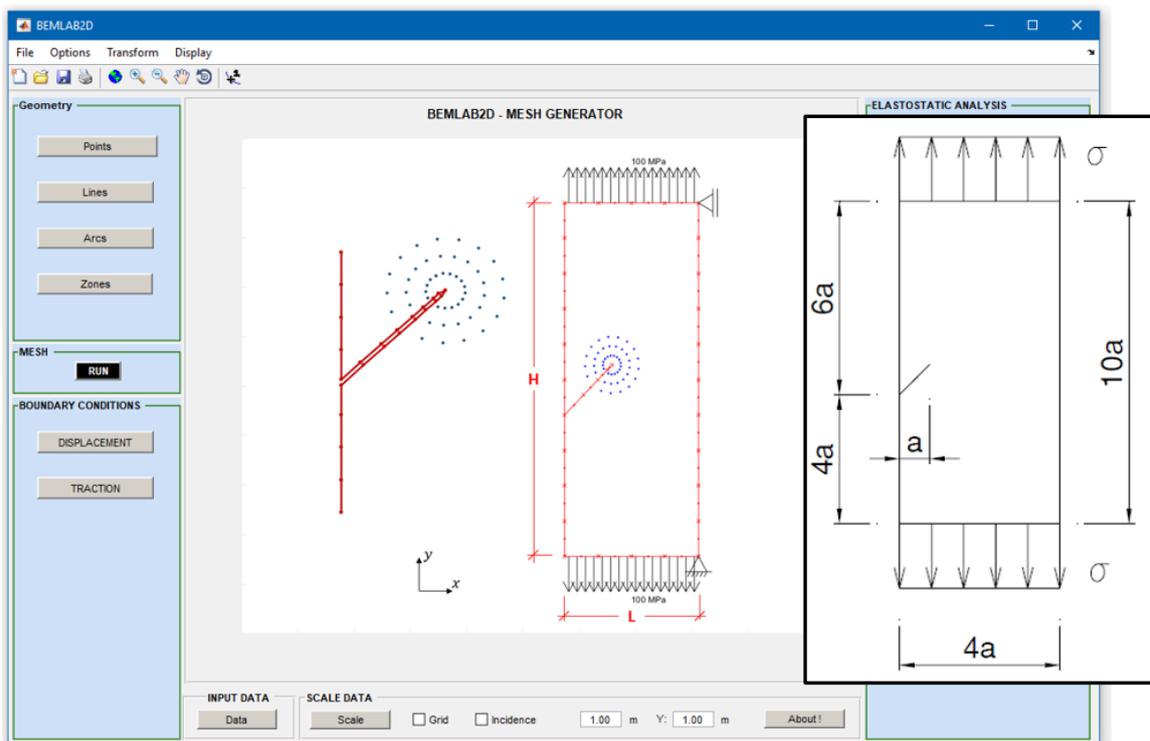


Figura 7.4 – Chapa com trinca inclinada de borda

Aqui a chapa foi discretizada com uma malha contendo 38 elementos de contorno quadráticos, sendo 10 desses descontínuos aplicados na trinca, 2 elementos semi-descontínuos quadráticos na proximidade da boca da trinca e 26 elementos contínuos quadráticos no restante do contorno, mais 48 pontos internos em camadas circulares ao redor da ponta da trinca, conforme ilustrado na Figura 7.4.

## 7.5 - Exemplo V – Chapa retangular com trinca no centro

No quinto exemplo é estudada uma chapa apresentada no trabalho de Teixeira (2006), conforme ilustrado na Figura 7.5.

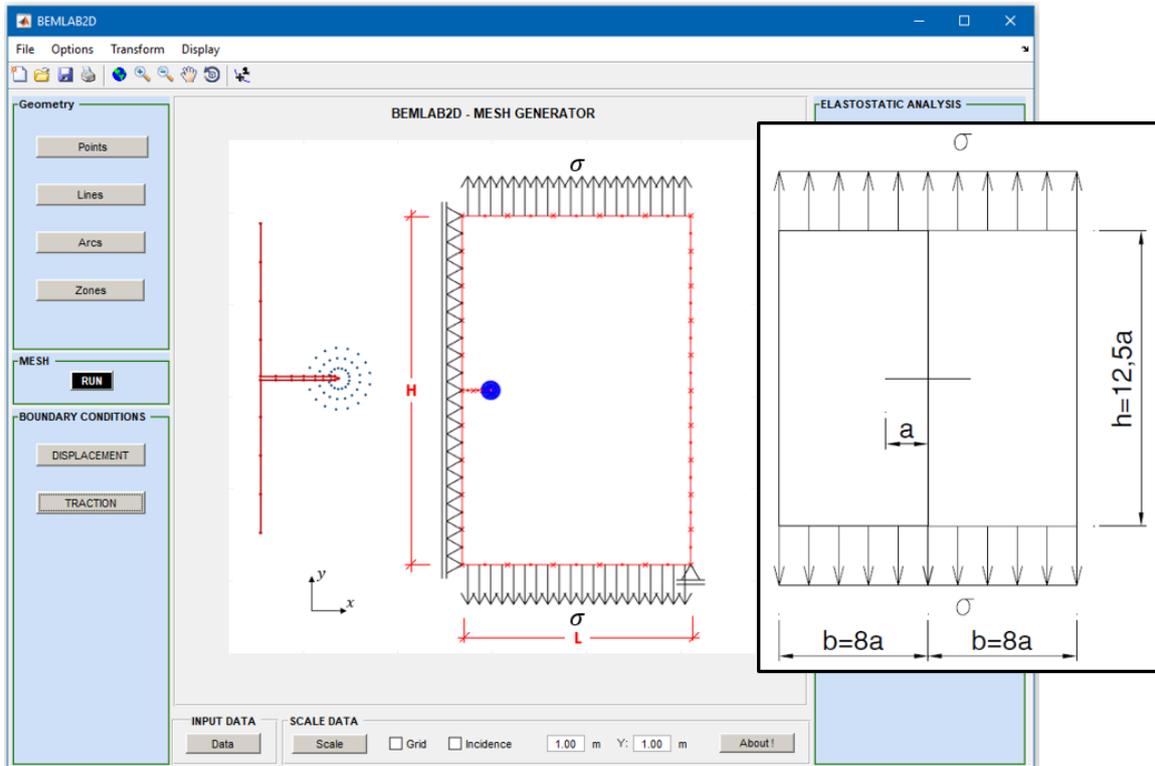


Figura 7.5 – Chapa retangular com trinca no centro – placa infinita de Irwin

Este exemplo é semelhante ao visto na Seção 7.3, considera-se também a simetria do problema, uma chapa retangular com trinca embutida com eixo de simetria passando pela metade da trinca, as condições de contorno são semelhantes, onde as mudanças ocorrem nas dimensões da chapa estudada, onde  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 80 \text{ m}$  e  $h = 125 \text{ m}$ . Foi considerada uma Tensão de Escoamento,  $\sigma_y = 1000 \text{ MPa}$ , e Módulo de Elasticidade,  $E = 100 \text{ GPa}$ . O estudo é realizado de forma incremental de carga considerando somente da plastificação na região da ponta da trinca, não havendo nenhuma propagação da trinca.

## 7.6 - Exemplo VI – Chapa retangular com trinca no centro

O Exemplo VI consiste no estudo de uma chapa estudada no trabalho de Cisilino e Aliabadi (1999), como ilustrado na Figura 7.6.

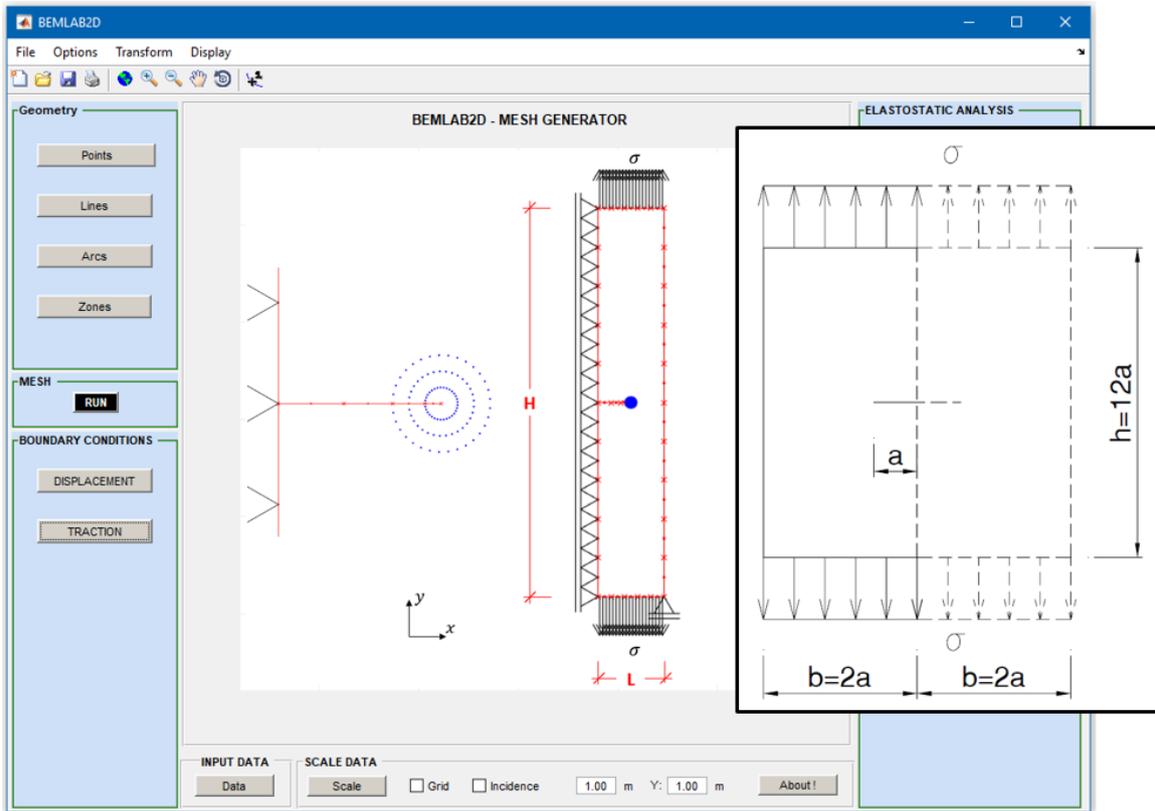


Figura 7.6 – Chapa retangular com trinca no centro

Este exemplo se trata de uma chapa retangular com trinca embutida com eixo de simetria passando pela metade da trinca, as condições de contorno são semelhantes ao exemplo anterior, onde as dimensões da chapa são  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 20 \text{ m}$  e  $h = 120 \text{ m}$ . Também foi considerado uma Tensão de Escoamento,  $\sigma_y = 1000 \text{ MPa}$ , e Módulo de Elasticidade,  $E = 100 \text{ GPa}$ . O estudo é realizado de forma incremental de carga considerando somente da plastificação na região da ponta da trinca, não havendo nenhuma propagação da trinca.

## 7.7 - Exemplo VII – Chapa retangular com trinca no centro

O Exemplo VII consiste na análise de uma chapa estudada por Delgado Neto, *et al.*, (2023), como apresentado na Figura 7.7.

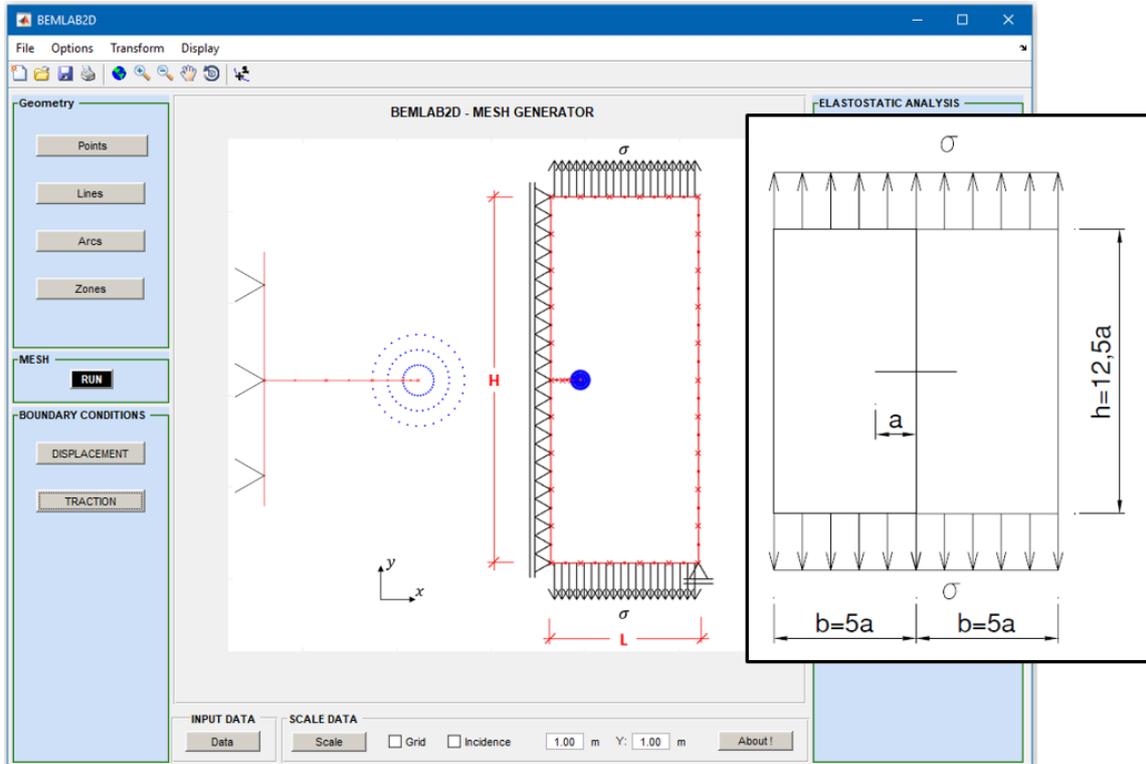


Figura 7.7 – Chapa retangular com trinca no centro

A chapa tem dimensões iguais a  $a = 40 \text{ m}$ ,  $b = 200 \text{ m}$  e  $h = 500 \text{ m}$ . Apenas metade do exemplo é estudado devido a simetria do problema com condições de contorno semelhantes aos exemplos anteriores. A Tensão de Escoamento usada é  $\sigma_y = 1000 \text{ MPa}$  e Módulo de Elasticidade  $E = 100 \text{ GPa}$ .

## 7.8 - Exemplo VIII – Chapa em Cruz com trinca

No Exemplo VIII será estudada uma chapa em cruz como apresentado na Figura 7.8. A análise é realizada utilizando os três tipos de critérios de escoamento do material implementado no BemCracker2D, a saber von Mises, Tresca e Gao, citado na Seção 3.2.

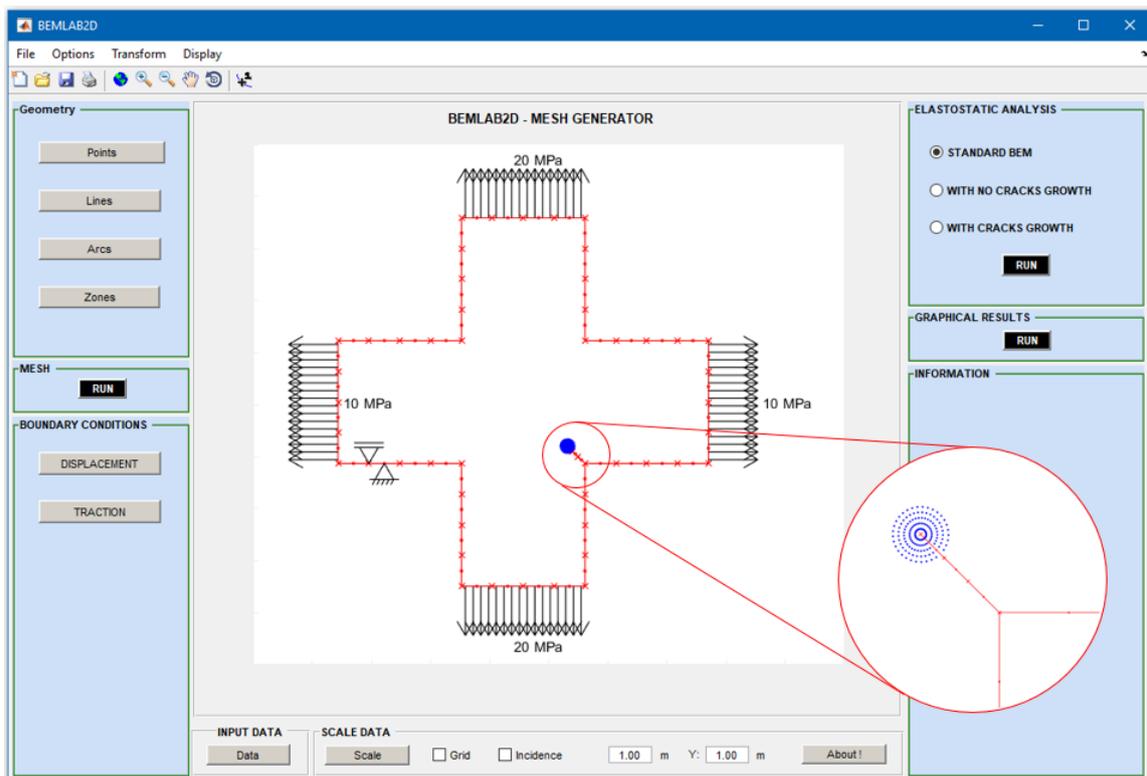


Figura 7.8 – Chapa cruciforme com trinca de borda

A chapa em cruz estudada no EPT possui largura das arestas laterais de 0,2 metros e trinca com dimensão de 0,04 metros. A tensão aplicada nas faces horizontais tem intensidade igual a  $\sigma_{h,0} = 10MPa$  e nas faces verticais tem intensidade igual a  $\sigma_{v,0} = 20MPa$ , tracionando a chapa nas duas direções. Neste problema a chapa foi discretizada com uma malha contendo 56 elementos de contorno quadráticos, sendo 8 desses descontínuos aplicados na trinca e 48 elementos quadráticos no restante do contorno. Foram considerados 160 pontos internos em cinco camadas circulares espaçadas igualmente e distribuídas ao redor da ponta da trinca. Para o exemplo VIII será considerado uma liga de alumínio 5083-H116 trabalhada a frio para o material da chapa, considera-se  $\sigma_y = 198,6 MPa$ ,  $E = 68,4 GPa$  e  $\nu = 0,3$ , a tensão de escoamento, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

## 8 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, os resultados numéricos dos modelos de chapa e viga mostrados anteriormente, serão apresentados com intuito de validar a metodologia aqui implementada e o algoritmo do Método dos Elementos de Contorno de Reciprocidade Dual (MECRD) elastoplástico no tratamento dos termos não-homogêneos. E ainda, o uso do BemCracker2D e sua *GUI* BEMLAB2D no processamento de variáveis como FIT, Número de Ciclos de Carga (NCC) e Resistência Residual (Res-R), e na visualização gráfica de deformada, do caminho de propagação e da evolução da zona plástica na ponta da trinca. Para todas as análises, essas variáveis foram comparadas conforme seus regimes elástico e plástico.

### 8.1 - Exemplo I – Chapa Retangular Com Duas Trincas Retas de Borda

Neste exemplo foram aplicados quatro incrementos de propagação de trinca com avanço de 0,08. Também é estudo metade do modelo, considerando a simetria do problema para o EPT. Na Figura 8.1, os FITs são plotados de forma adimensional em relação ao incremento de propagação da trinca e seus valores estão apresentados na Tabela 8.1. Nesta, observa-se que a linearidade apresentada no gráfico determina o Modo de Fratura I. E ainda, os FITs aumentam no comportamento plástico em relação ao elástico, onde foi considerada a tensão de escoamento  $\sigma_Y = 550MPa$ .

<i>Incremento</i>	<i>BemCracker2D</i>		<i>Teixeira</i>
	$K_I - Eq$ ( <i>Elástico</i> )	$K_I - Eq$ ( <i>Plástico</i> )	$K_I - Eq$ ( <i>Plástico</i> )
0	1,000	1,000	1,000
1	1,222	1,233	1,229
2	1,433	1,462	1,454
3	1,634	1,683	1,671
4	1,829	1,895	1,879

Tabela 8.1 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo I

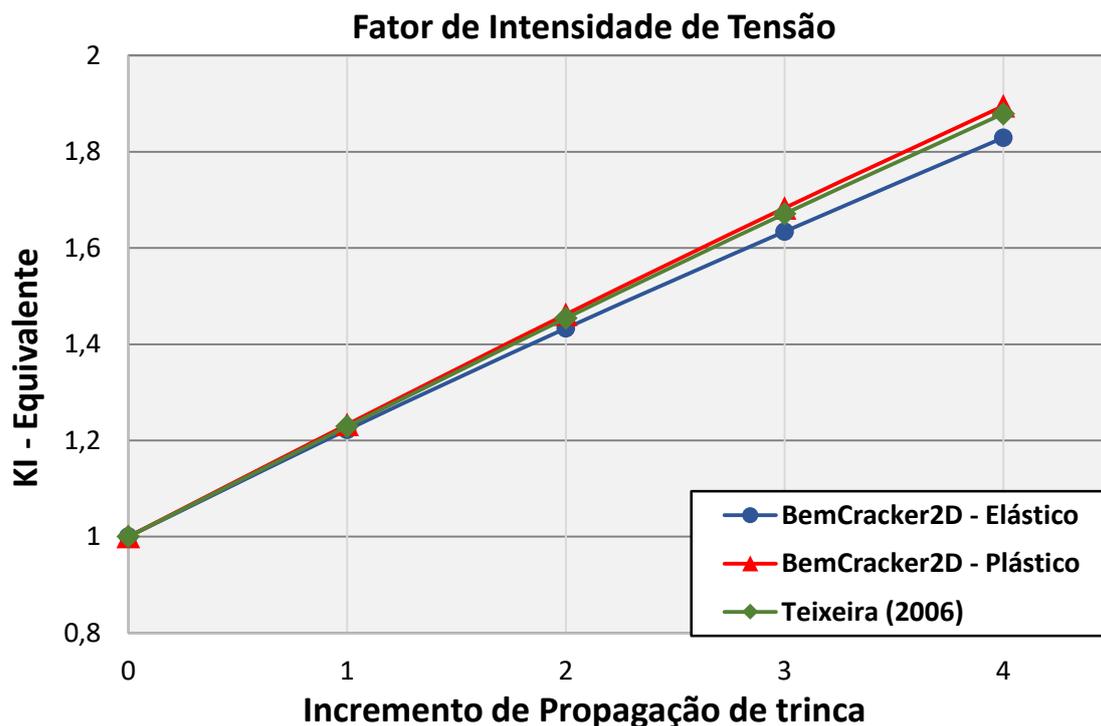


Figura 8.1 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo I

A Tabela 8.2 apresenta os resultados da resistência residual e do número de ciclos contra o número de incrementos, tanto elásticos quanto plásticos. Verifica-se, portanto, que a perda de resistência da peça em função da propagação da trinca para o comportamento elástico é menor quando comparado com o comportamento plástico.

$\sigma_{min}/\sigma_{max} = 0,666$		$\sigma^0 = 100$		<i>Avanço: 0,08</i>	
Incremento	Elástico		Plástico		
	Res-R	NCC	Res-R	NCC	
0	1,000	0	1,000	0	
1	0,821	152485	0,816	151510	
2	0,700	235730	0,690	232316	
3	0,614	286653	0,601	280377	
4	0,549	320490	0,534	311636	

Tabela 8.2 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo I

Na Figura 8.2(a) é apresentado a situação deformada da chapa, considerando aplicados todos os incrementos de propagação de trinca e, na Figura 8.2(b), é apresentada a chapa com todos os incrementos de propagação de trinca, bem como a região correspondente a zona plástica na ponta da trinca. A zona mais interna refere-se ao primeiro incremento de propagação e, a zona mais externa, ao último incremento de propagação da trinca.

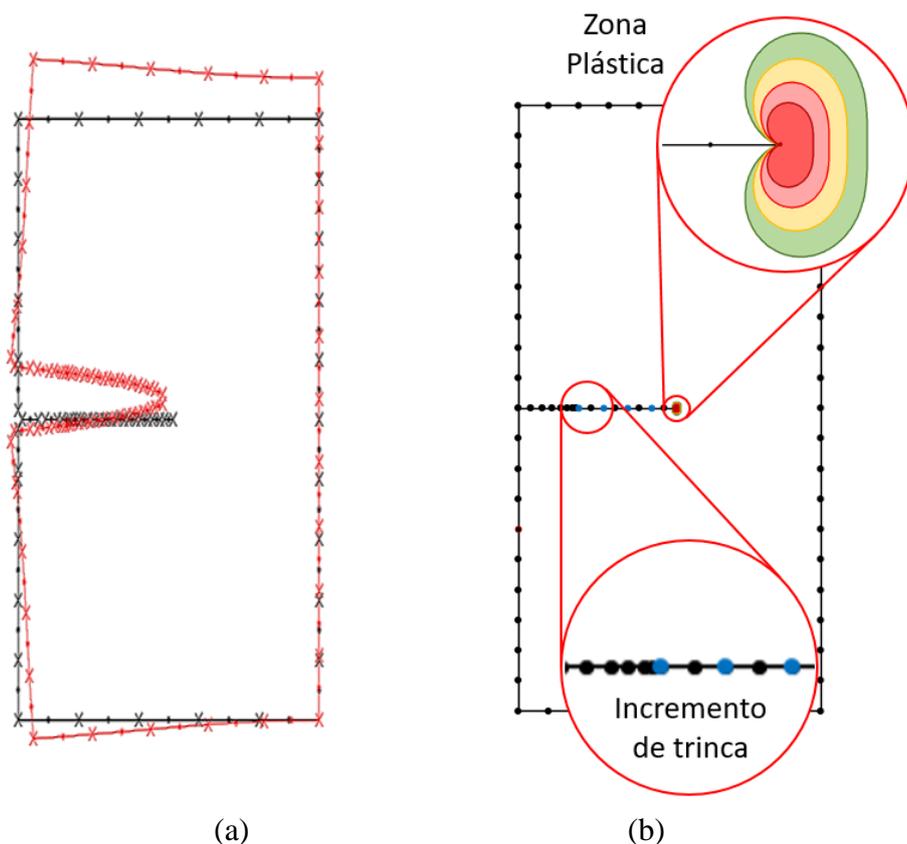


Figura 8.2 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo I

A chapa analisada no EPT, considerando apenas o modo I de fratura, apresentou uma estimativa adequada para a zona plástica. Sendo esta região determinada através do FIT e da tensão de escoamento, por se tratar de um problema clássico o efeito da tensão normalizada foi desprezado, (NAZARALI e WANG, 2011).

## 8.2 - Exemplo II – Chapa Retangular Com Uma Trinca Retra de Borda

No segundo exemplo, considerando o EPT, foram aplicados três incrementos de propagação de trinca com avanço de 0,08. Na Figura 8.3, os FITs apresentados são maiores do que os obtidos no exemplo anterior. Nesta, observa-se que os FITs aumentam no comportamento plástico em relação ao elástico, semelhante ao exemplo anterior como pode ser visto também na Tabela 8.3.

Incremento	BemCracker2D		Teixeira
	$K_I - E_q$ (Elástico)	$K_I - E_q$ (Plástico)	$K_I - E_q$ (Plástico)
0	1,000	1,000	1,000
1	1,373	1,390	1,386
2	1,863	1,917	1,909
3	2,544	2,612	2,600

Tabela 8.3 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo II

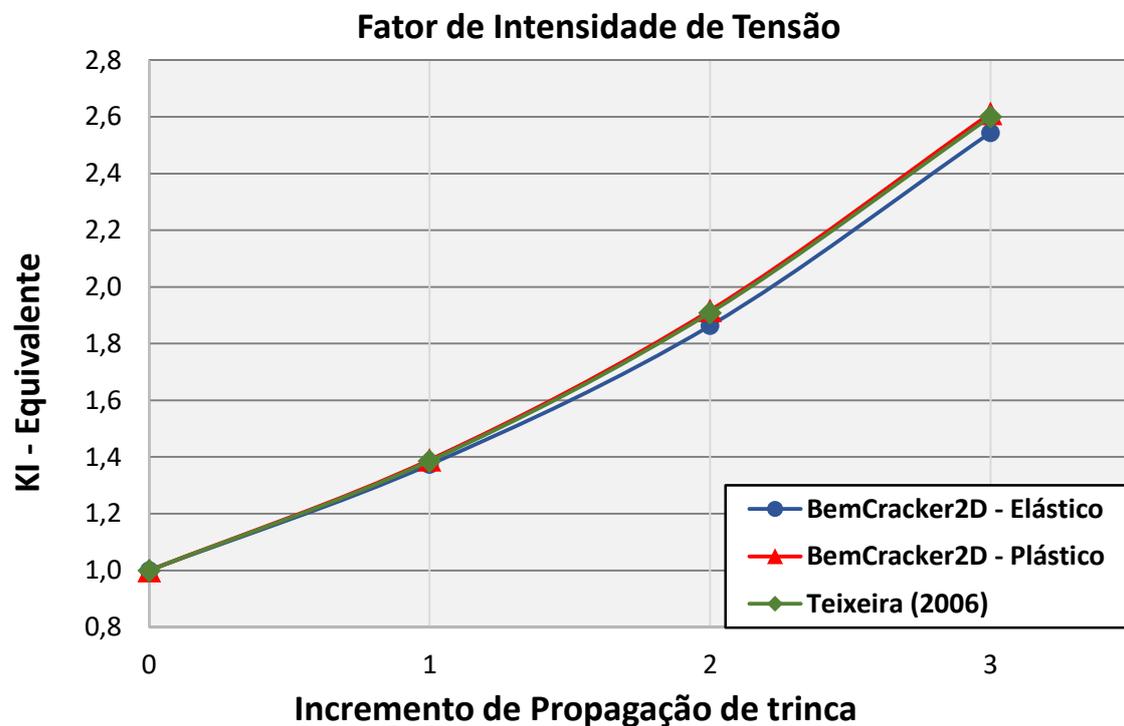


Figura 8.3 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo II

A Tabela 8.4 apresenta os resultados da resistência residual e do número de ciclos contra o número de incrementos, tanto elásticos quanto plásticos. Verifica-se comportamento semelhante ao exemplo anterior.

$\sigma_{min}/\sigma_{max} = 0,666$		$\sigma^o = 100$		<i>Avanço: 0,08</i>	
Incremento	Elástico		Plástico		
	Res-R	NCC	Res-R	NCC	
0	1,000	0	1,000	0,000	
1	0,730	82307	0,723	82479	
2	0,538	111683	0,525	112190	
3	0,394	122319	0,386	123183	

Tabela 8.4 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo II

Na Figura 8.4(a) é apresentado a deformação da chapa aplicando todos os incrementos de propagação de trinca; na Figura 8.4 (b), a chapa é apresentada com todos os incrementos de trinca, bem como a região de plastificação na ponta da trinca. Foi adotado a tensão de escoamento  $\sigma_Y = 650MPa$ , impedindo a plastificação de pontos fora da região da chuva de pontos.

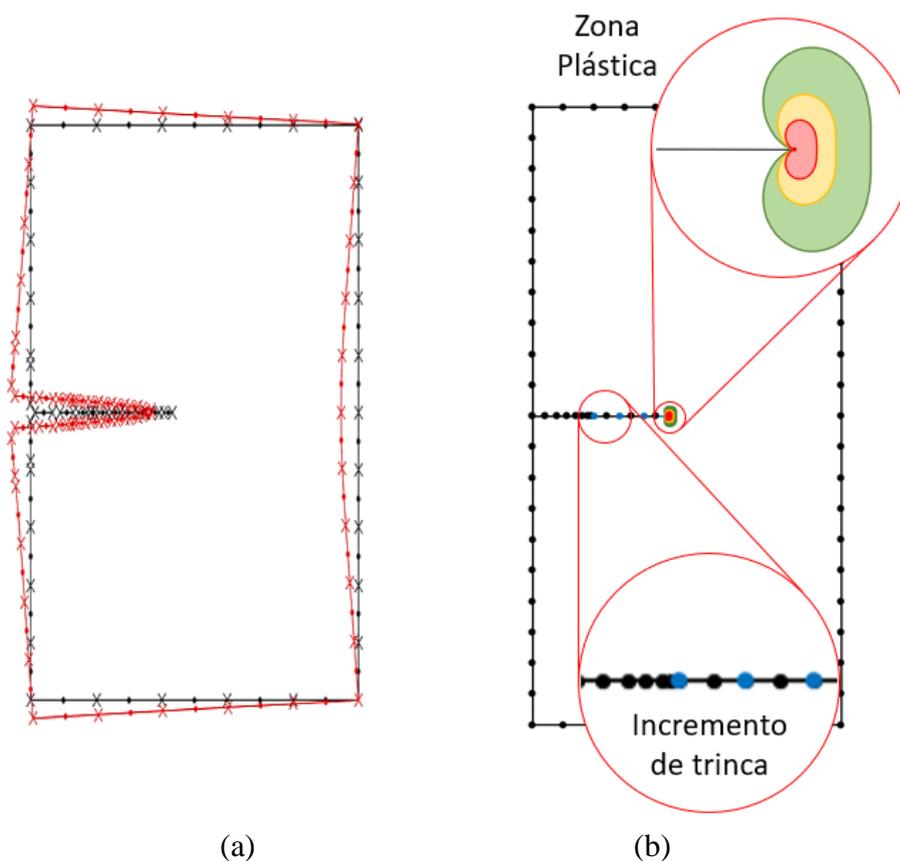


Figura 8.4 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo II

### 8.3 - Exemplo III – Chapa Retangular Com Trinca Reta Embutida

Neste exemplo foram aplicadas as mesmas condições de incremento de trinca e incremento de carga plástica do exemplo anterior. Na Figura 8.5 e na Tabela 8.5, os FITs são apresentados para cada incremento de propagação da trinca. Nesta, observa-se que os FITs aumentam no comportamento plástico em relação ao elástico.

Incremento	BemCracker2D		Teixeira
	$K_I - Eq$ (Elástico)	$K_I - Eq$ (Plástico)	$K_I - Eq$ (Plástico)
0	1,000	1,000	1,000
1	1,240	1,254	1,250
2	1,491	1,537	1,529
3	1,766	1,836	1,824

Tabela 8.5 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo III

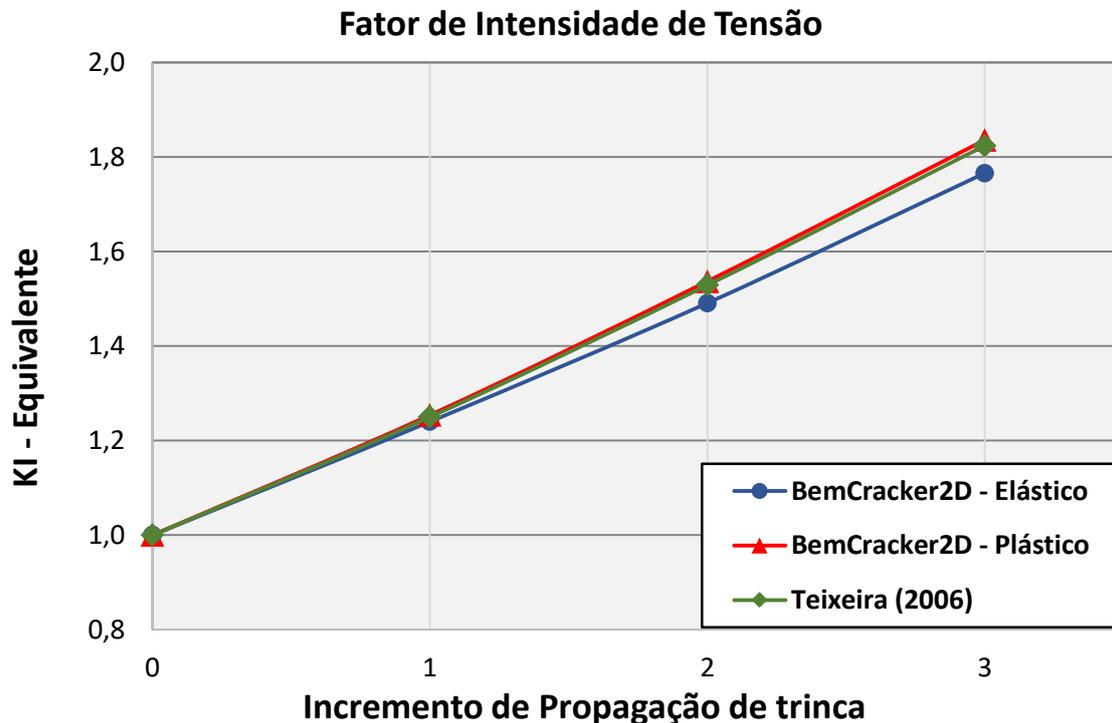


Figura 8.5 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo III

A resistência residual e do número de ciclos para cada incremento de trinca, elásticos e plásticos é apresentado na Tabela 8.6. Verifica-se que a perda de resistência da peça é

maior para no comportamento plástico do que quando comparado ao comportamento elástico para cada incremento de trinca.

$\sigma_{min}/\sigma_{max} = 0,666$		$\sigma^o = 100$		<i>Avanço: 0,08</i>	
Incremento	Elástico		Plástico		
	Res-R	NCC	Res-R	NCC	
0	1,000	0	1,000	0	
1	0,810	216161	0,803	214265	
2	0,673	327123	0,657	320268	
3	0,568	388525	0,550	376344	

Tabela 8.6 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo III

A situação deformada da chapa e apresentada na Figura 8.6(a) e na Figura 8.6 (b) é apresentada a chapa com todos os incrementos de propagação de trinca, bem como a região correspondente a zona plástica na ponta da trinca.

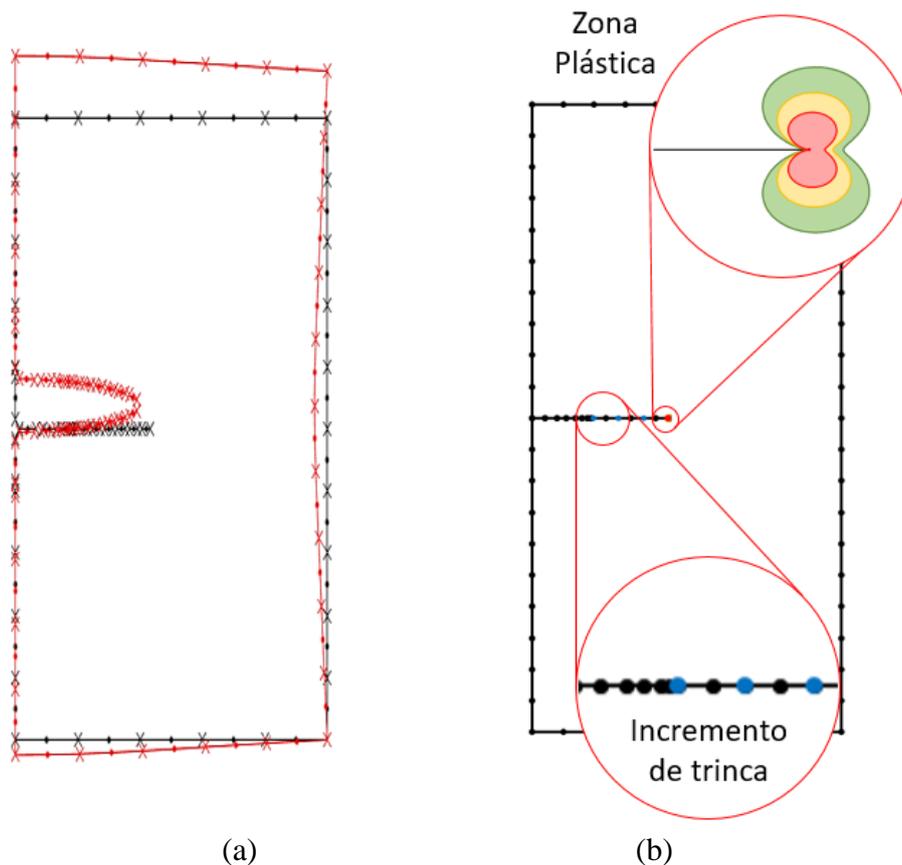


Figura 8.6 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo III

A chapa analisada no EPT, considerando apenas o modo I de fratura, foi adotado uma modelagem reduzida devido a simetria do problema, assim as restrições de deslocamentos estavam na face esquerda, onde, pode-se observar, deslocamentos horizontais nulos. A zona plástica é estimada de forma adequada como apresentado também por (TEIXEIRA, 2006).

#### 8.4 - Exemplo IV – Chapa Retangular Com Trinca Inclinada de Borda

Devido à assimetria do problema, o modo de fratura misto (modos I+II) foi analisado neste exemplo. Foram aplicados três incrementos de propagação de trinca com avanço de 0,1 e as condições do incremento de carga são idênticas ao do exemplo anterior.

A Figura 8.7 ilustra os FITs versus incrementos de propagação. Também é observado nesse exemplo, que os FITs para a chapa no comportamento plástico aumentam quando comparados ao elástico, o que também é visto na Tabela 8.7.

<i>Incremento</i>	<i>BemCracker2D</i>		<i>Teixeira</i>
	$K_I - Eq$ ( <i>Elástico</i> )	$K_I - Eq$ ( <i>Plástico</i> )	$K_I - Eq$ ( <i>Plástico</i> )
0	1,000	1,000	1,000
1	1,530	1,554	1,550
2	2,332	2,414	2,398
3	3,788	4,002	3,966

Tabela 8.7 – Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo IV

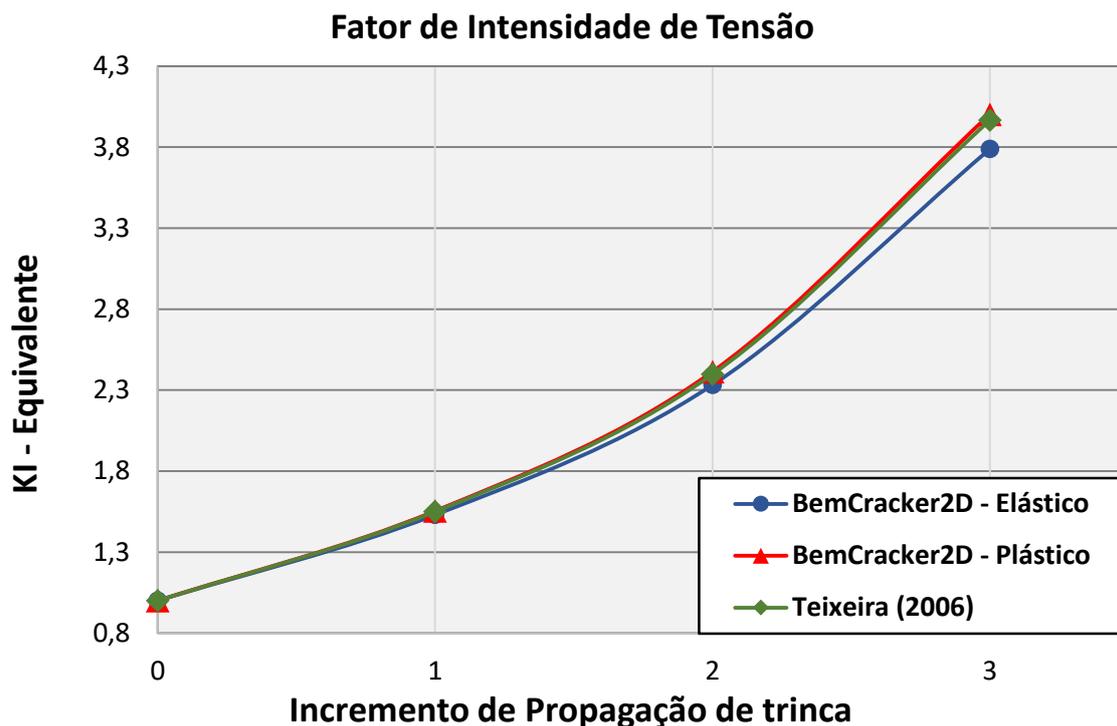


Figura 8.7 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo IV

A Tabela 8.8 apresenta os resultados da resistência residual e do número de ciclos contra o número de incrementos, tanto elásticos quanto plásticos. Verifica-se, portanto, que a perda de resistência da peça em função da propagação da trinca para o comportamento plástico é maior comparado ao comportamento elástico.

$\sigma_{min}/\sigma_{max} = 0,666$		$\sigma^o = 100$		<i>Avanço: 0,1</i>	
Incremento	Elástico		Plástico		
	Res-R	NCC	Res-R	NCC	
0	1,000	0,000	1,000	0,000	
1	0,659	16458,000	0,649	16333,393	
2	0,431	20115,000	0,419	19801,432	
3	0,265	20986,000	0,253	20588,914	

Tabela 8.8 – Resistência Residual e Número de ciclos de Carga – Exemplo IV

Na Figura 8.8(a) é apresentado a situação deformada da chapa e na Figura 8.8(b) é apresentada a propagação de trinca junto com a zona plástica na ponta da trinca. A zona plástica mais interna refere-se ao primeiro incremento de propagação e é visível a influência do modo II de fratura devido a inclinação referente as demais zonas. As demais zonas mais externas tendem a se estabilizar em modo I de fratura neste caso.

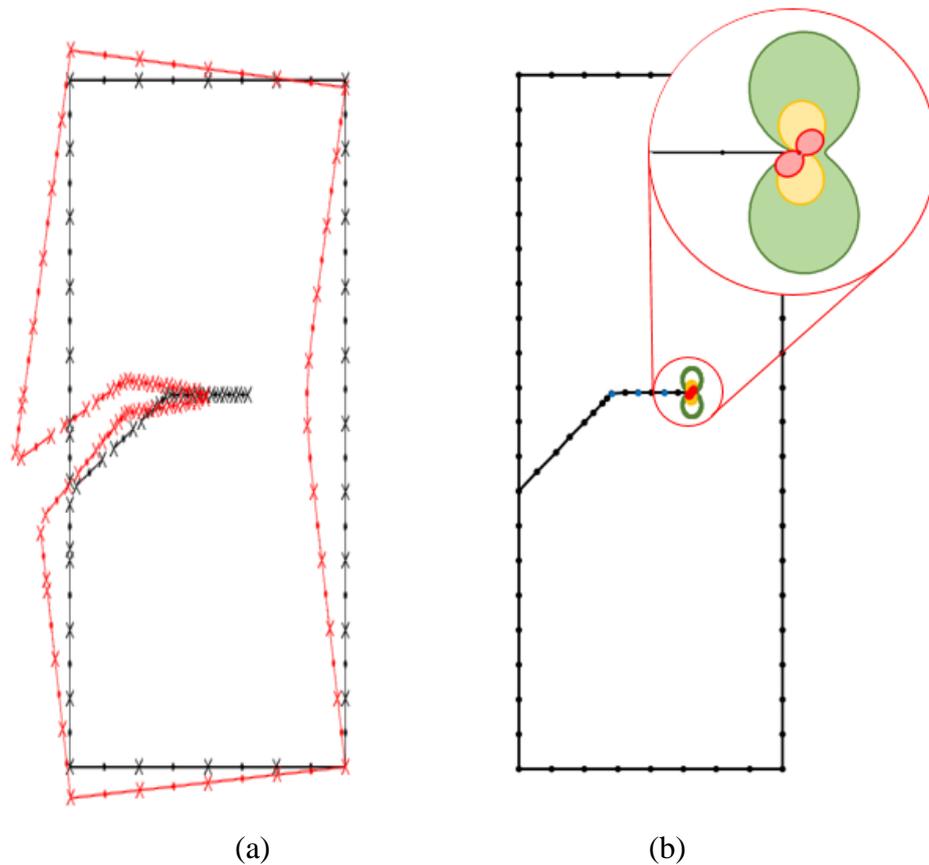


Figura 8.8 – Chapa com trinca reta: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo IV

A chapa analisada no EPD, considerando o modo misto de fratura, apresentou uma estimativa adequada para a zona plástica. Observando que a direção de propagação é definida logo no primeiro incremento, provocando uma tendência de comportamento dentro do modo I de fratura.

### 8.5 - Exemplo V – Chapa retangular com trinca no centro

Neste exemplo é estudada uma chapa com trinca única no centro (TEIXEIRA, 2006). Os resultados do FITs obtidos no Exemplo V são apresentados no gráfico da Figura 8.9 e detalhados na Tabela 8.9 estão normalizados pelo valor  $\sigma_y\sqrt{\pi a}$  e mostram boa concordância com os valores encontrados na literatura. O estudo é somente da plastificação na ponta da trinca, não havendo nenhuma propagação da trinca.

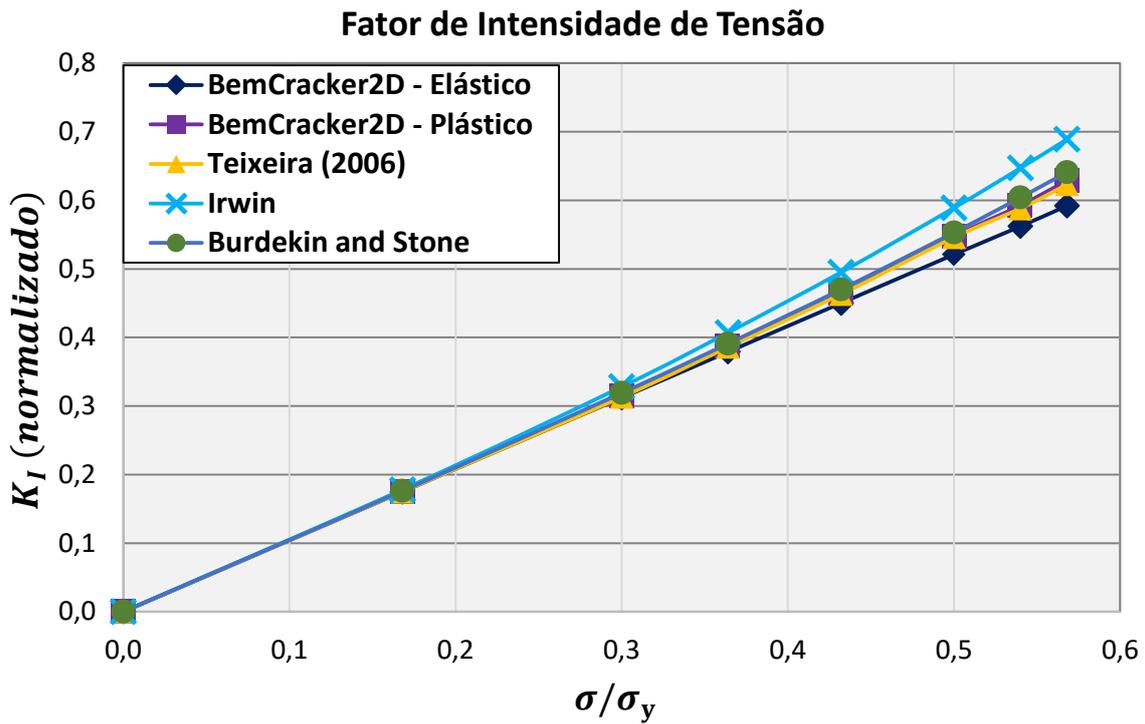


Figura 8.9 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo V

A zona plástica é semelhante à região apresentada no Exemplo III. Os resultados obtidos através do BemCracker2D são comparados com os modelos analíticos baseados na plastificação da região da ponta de uma trinca em placa infinita, (TEIXEIRA, 2006).

$\sigma/\sigma_y$	$K_I^{norm}$ (Elástico)	$K_I^{norm}$ (Plástico)			
	BemCracker2D	BemCracker2D	Teixeira 2006	Irwin	Burdekin & Stone
0,168	0,175	0,175	0,175	0,178	0,176
0,300	0,312	0,314	0,313	0,328	0,319
0,364	0,379	0,387	0,386	0,407	0,391
0,432	0,450	0,464	0,463	0,495	0,470
0,500	0,521	0,548	0,546	0,589	0,553
0,540	0,562	0,593	0,588	0,647	0,604
0,568	0,592	0,629	0,623	0,689	0,641

Tabela 8.9 – Fatores de Intensidade de Tensão Normalizado ( $\sigma/\sigma_y$ ) – Exemplo V

### 8.6 - Exemplo VI – Chapa retangular com trinca no centro

Os valores elásticos e plásticos, obtidos no Exemplo VI, foram estudados no trabalho de Cisilino e Aliabadi (1999) e consiste em uma chapa retangular com trinca de centro simétrica em relação a um dos eixos.

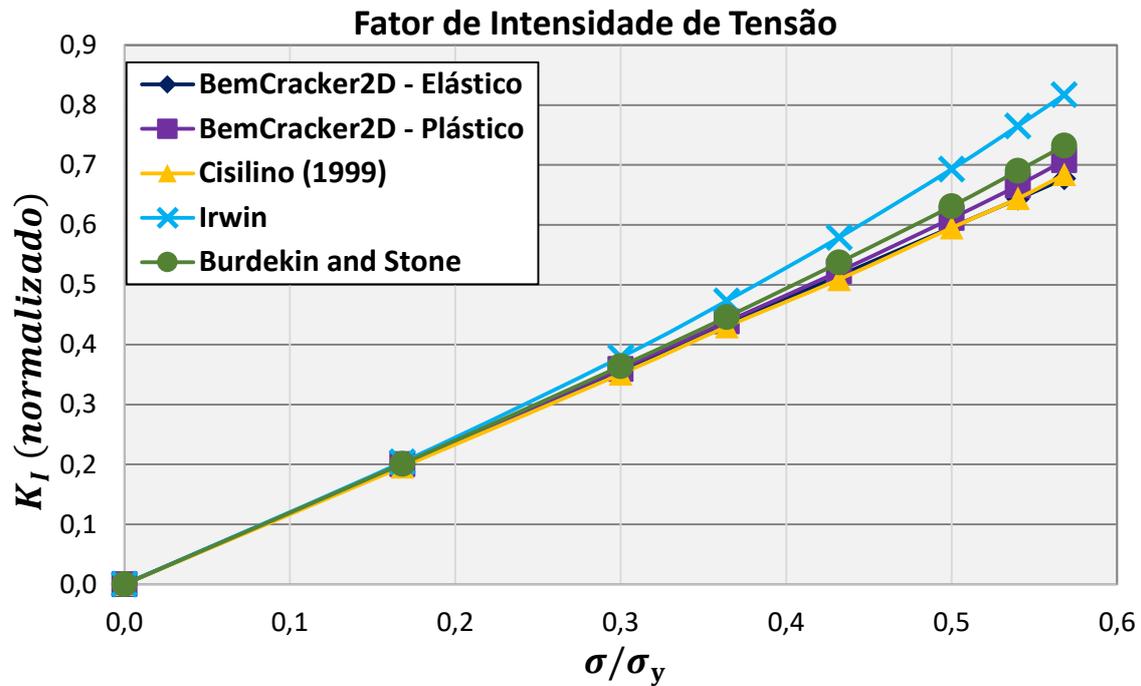


Figura 8.10 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo VI

Cisilino e Aliabadi (1999) utilizaram diferentes malhas no seu estudo, assim, se observa valores do FITs plástico inferior ao obtido nesta tese, como pode ser observado na Tabela 8.10. Contudo, os resultados elásticos e plásticos mantem a mesma relação, o que concordam com os resultados obtidos na literatura citada anteriormente, esses resultados estão normalizados pelo valor  $\sigma_y\sqrt{\pi a}$  e estão apresentados na Figura 8.10.

$\sigma/\sigma_y$	$K_I^{norm}$ (Elástico)	$K_I^{norm}$ (Plástico)			
	BemCracker2D	BemCracker2D	Cisilino 1999	Irwin	Burdekin & Stone
0,168	0,200	0,200	0,196	0,204	0,201
0,300	0,357	0,359	0,351	0,379	0,364
0,364	0,434	0,443	0,430	0,473	0,446
0,432	0,515	0,531	0,509	0,579	0,537
0,500	0,596	0,627	0,595	0,693	0,631
0,540	0,643	0,678	0,644	0,765	0,690
0,568	0,677	0,719	0,684	0,817	0,732

Tabela 8.10 – Fatores de Intensidade de Tensão Normalizado ( $\sigma/\sigma_y$ ) – Exemplo VI

### 8.7 - Exemplo VII – Chapa retangular com trinca no centro

No Exemplo VII são determinados os FITs elásticos e plásticos, os quais são apresentados na Figura 8.11 e detalhada na Tabela 8.11 e mostram boa concordância com os resultados encontrados no trabalho de Leitão *et al.*, (1993).

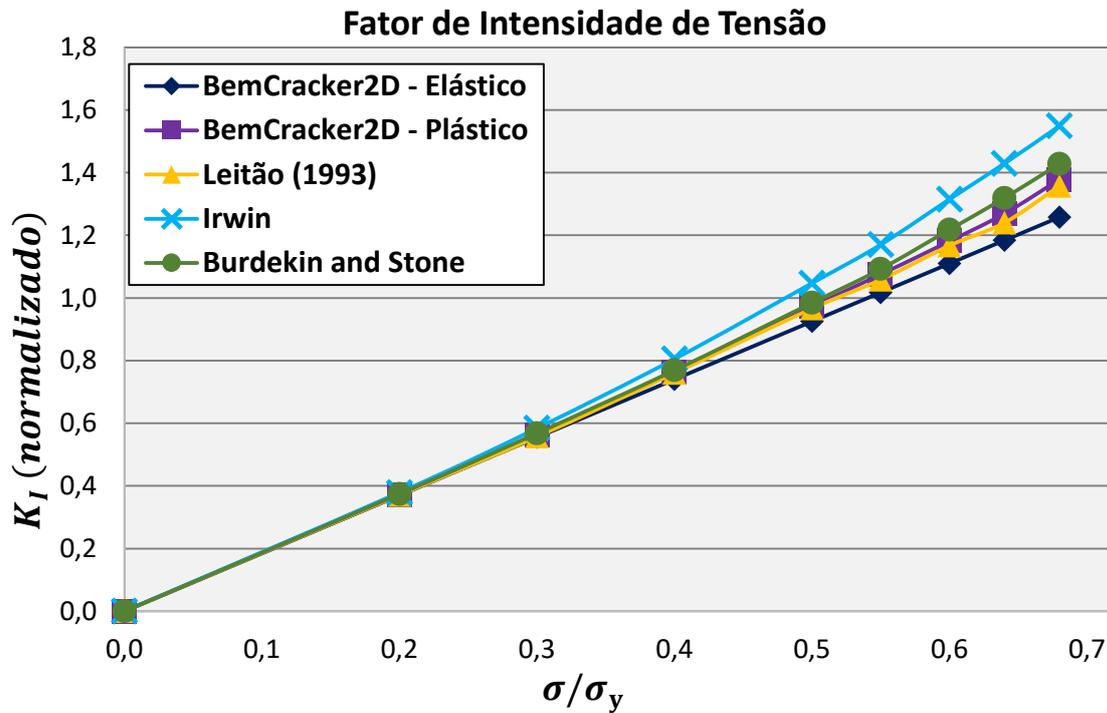


Figura 8.11 – Gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão – Exemplo VII

Neste exemplo e nos dois exemplos anteriores foram estudados somente a plastificação na ponta da trinca, não havendo nenhuma propagação da trinca, porém neste exemplo os valores do FITs estão normalizados pelo valor  $\sigma_y\sqrt{a}$ . A zona plástica é semelhante à região apresentada no exemplo III.

$\sigma/\sigma_y$	$K_I^{norm}$ (Elástico)	$K_I^{norm}$ (Plástico)			
	BemCracker2D	BemCracker2D	Leitão 1993	Irwin	Burdekin & Stone
0,200	0,370	0,370	0,371	0,379	0,374
0,300	0,555	0,561	0,557	0,584	0,568
0,400	0,740	0,763	0,760	0,805	0,769
0,500	0,925	0,972	0,966	1,047	0,984
0,550	1,017	1,075	1,058	1,170	1,092
0,600	1,110	1,181	1,167	1,315	1,218
0,640	1,184	1,269	1,240	1,429	1,319
0,680	1,258	1,378	1,357	1,549	1,428

Tabela 8.11 – Fatores de Intensidade de Tensão Normalizado ( $\sigma/\sigma_y$ ) – Exemplo VII

## 8.8 - Exemplo VIII – Chapa em Cruz com trinca

No Exemplo VIII são apresentadas a deformação, a propagação de trinca e a zona plástica na região em torno da ponta da trinca estudada através de diversos critérios de escoamento. Na Figura 8.12(a) é apresentado a situação deformada da chapa cruciforme e na Figura 8.12(b) é apresentada a propagação de trinca junto com a zona plástica na ponta da trinca. As zonas plásticas estimadas em todos os exemplos até aqui são determinadas através das equações apresentadas na Seção 3.4.

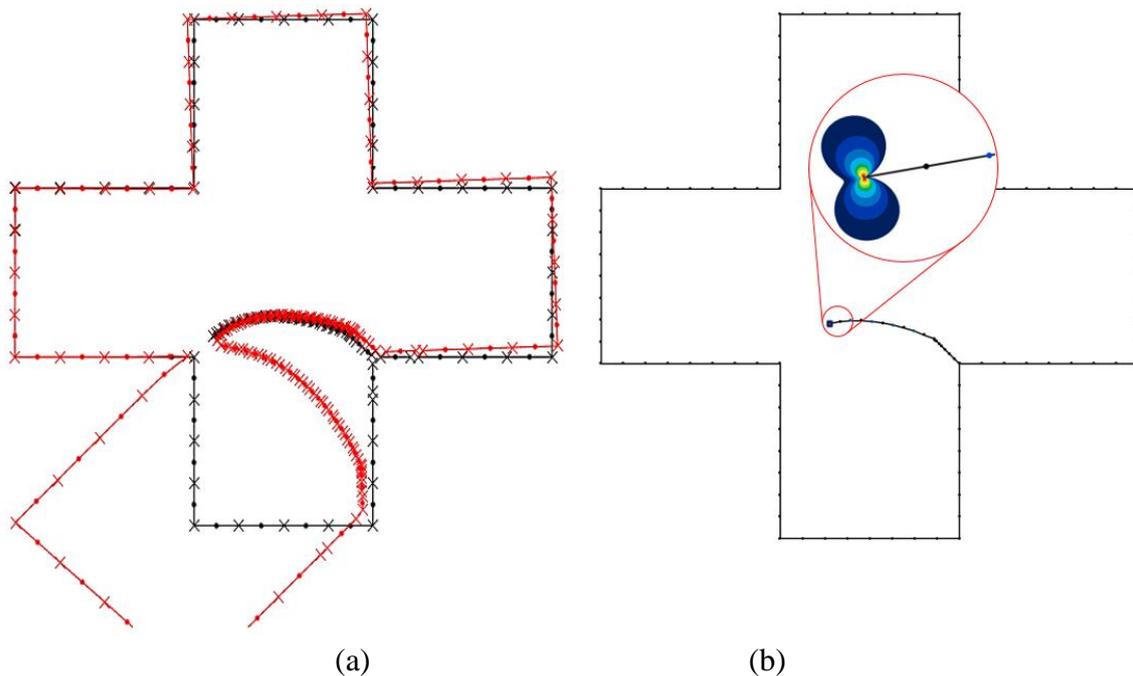


Figura 8.12 – Chapa cruciforme com trinca: (a) Situação Deformada; (b) Propagação e Zona Plástica da ponta da trinca – Exemplo VIII

Inicialmente, nas Figura 8.13, Figura 8.14 e Figura 8.15 são apresentadas as ZP obtida considerando os critérios de von Mises, Tresca e Gao, respectivamente. Nesse primeiro instante é analisado o modelo da chapa cruciforme sem propagação da trinca, considerando 5 passos incrementais de carga plásticos.

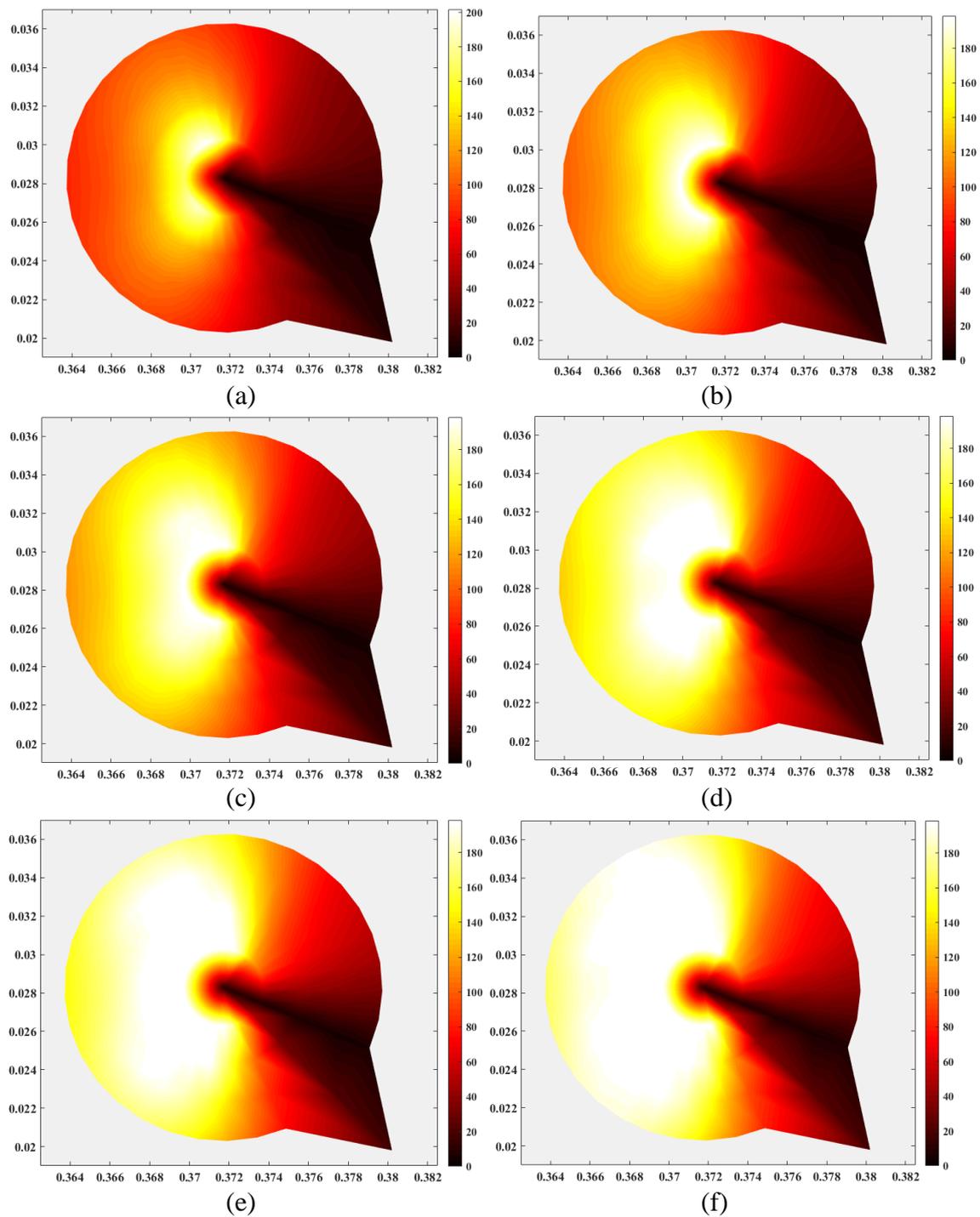


Figura 8.13 – ZP de von Mises: (a) passo elástico; (b) 1º passo plástico; (c) 2º passo plástico; (d) 3º passo plástico; (e) 4º passo plástico; (f) 5º passo plástico;

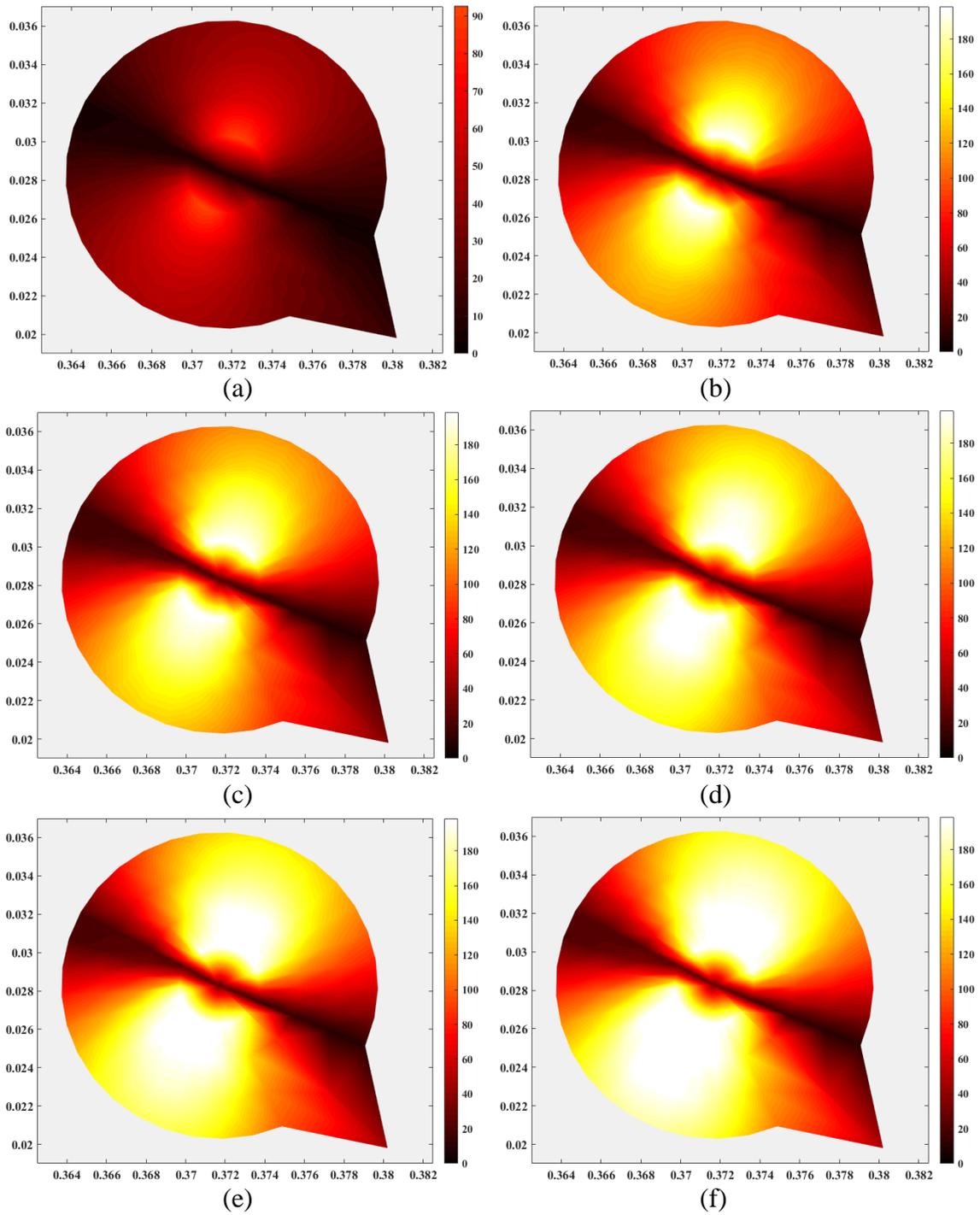


Figura 8.14 – ZP de Tresca: (a) passo elástico; (b) 1º passo plástico;  
(c) 2º passo plástico; (d) 3º passo plástico; (e) 4º passo plástico; (f) 5º passo plástico;

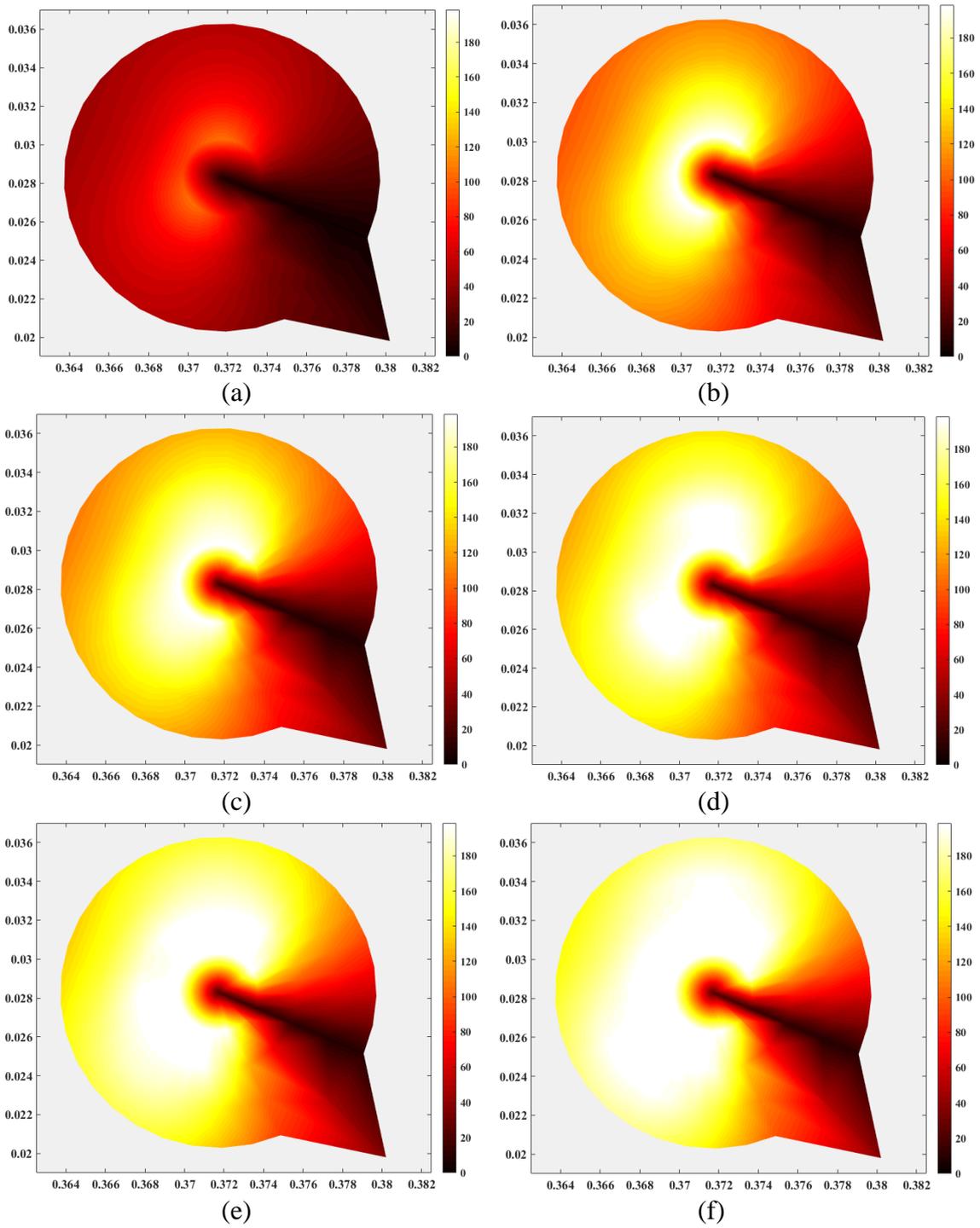


Figura 8.15 – ZP de Gao: (a) passo elástico; (b) 1º passo plástico;  
 (c) 2º passo plástico; (d) 3º passo plástico; (e) 4º passo plástico; (f) 5º passo plástico;

Duas observações são pertinentes ao se analisar as imagens anteriores:

- Primeiro, tem-se nas Figura 8.13(a), Figura 8.14(a) e Figura 8.15(a) a análise elástica considerando a aplicação total do carregamento. Para o exato nível de tensão inicial aplicado verifica-se que o critério de von Mises apresenta pontos que atingem a tensão de escoamento do material, enquanto os outros dois critérios, Tresca e Gao, necessitam de um nível de carregamento maior para atingir seus primeiros pontos de plastificação, onde as tensões equivalentes obtidas nos pontos internos através do critério de Tresca são as menores dos três critérios, o que implica a necessidade de um nível de carregamento muito maior aplicado na chapa cruciforme para se obter os primeiros pontos plastificados em torno da ponta da trinca;
- Segundo, nas Figura 8.13(b-f), Figura 8.14(b-f) e Figura 8.15(b-f) são apresentadas as ZP dada através das tensões equivalentes obtidas pelos critérios de escoamentos de von Mises, Tresca e Gao, respectivamente. A evolução da ZP é representada para passos de carga incremental sem considerar a propagação da trinca, onde a taxa incremental de carga considerada é de 0,1. Analisando as ZP apresentadas anteriormente pelos critérios, estas possuem formas semelhantes ao da Figura 8.12(b). Contudo a ZP estimada através das expressões da Seção 3.4 e apresentada na Figura 8.12(b) apresentam maior concordância, tanto em tamanho quanto em formato com a ZP obtida pelo Critério de Gao apresentada na Figura 8.15.

Na Figura 8.16 é apresentada a evolução da quantidade de pontos que atingem a tensão de escoamento dentro da ZP considerando os três critérios de escoamento. Verifica-se que o critério de Tresca apresenta a menor quantidade de pontos plastificados a cada passo de carga plástico, sendo o critério de von Mises o que mais apresentam pontos plastificados e como esperado Gao é intermediário. No que foi visto na Figura 3.5 ao se determinar a superfície de escoamento entre os critérios de escoamento para o ensaio uniaxial, quando se aplica ao critério de Gao os parâmetros do alumínio 5083-H116 ( $a = 0$  e  $b = -60,75$ ), para o critério de escoamento de Gao a superfície está intermediária entre as de Mises e Tresca, o que condiz e consolida os dados obtidos neste exemplo.

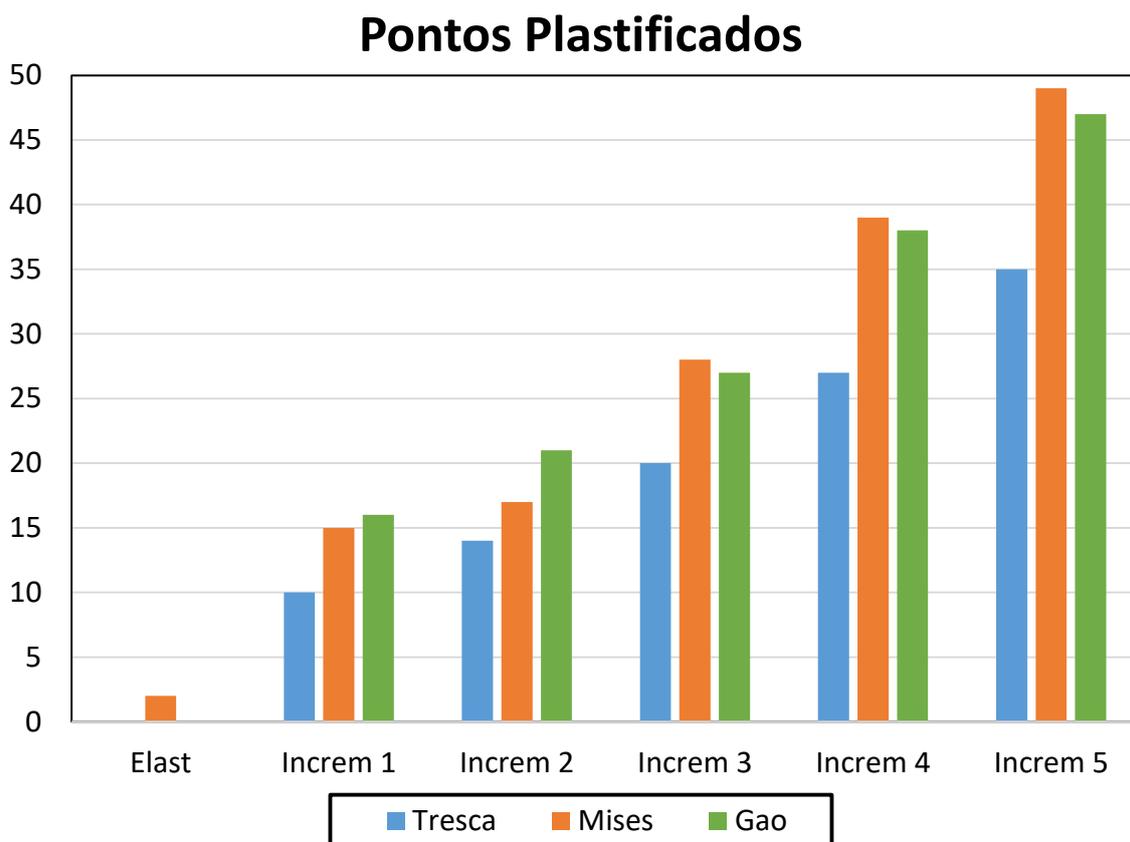
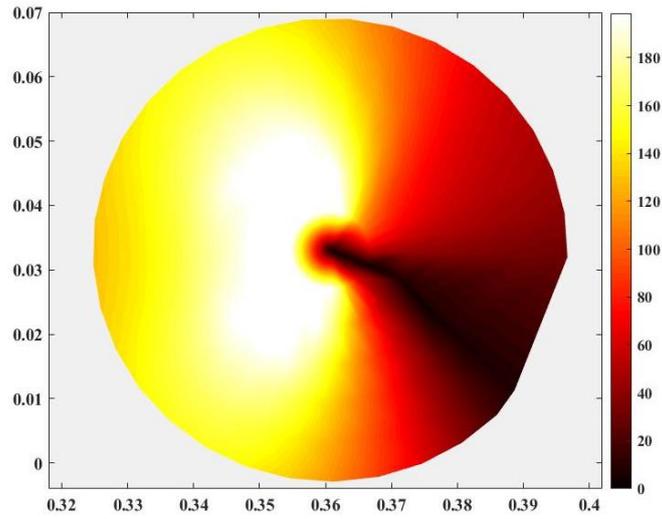


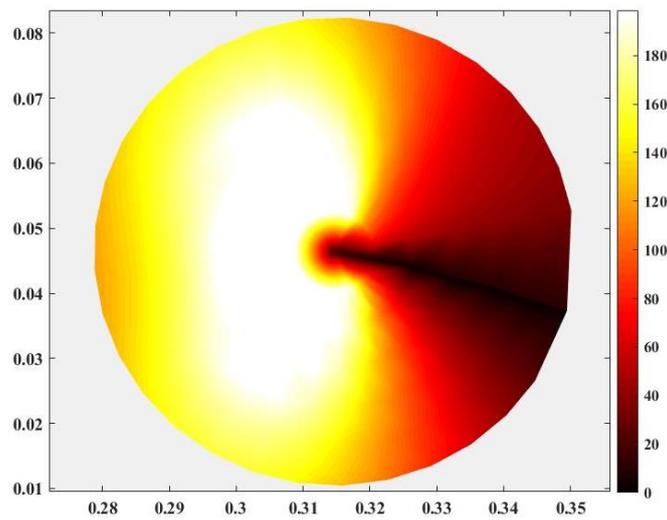
Figura 8.16 – Evolução do número de pontos plastificados na ZP

Neste segundo momento, para o mesmo exemplo, foi estudado o avanço da trinca simultaneamente com incrementos plásticos. Neste exemplo são considerados 10 incrementos de propagação de trinca, onde em cada incremento de trinca são aplicados 5 passos de cargas plásticas com razão de 0,1, considerando o estudo realizado para os 3 critérios de escoamento é obtido um total de 150 resultados (imagens) sobre a evolução da ZP.

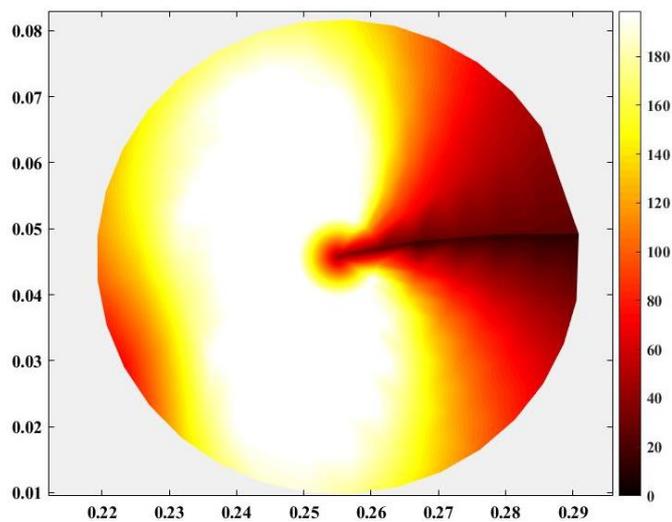
Os resultados a seguir são apresentados de forma resumida para não se tornar muito repetitivo e cansativo o desenvolvimento do raciocínio do exemplo. Aqui será apresentado evolução da ZP para o 1º, 5º e 10º incrementos de trinca, considerando também o resultado obtido para o último passo de carga plástico aplicado a cada incremento de propagação. Sendo assim, na Figura 8.17 é apresentado a evolução da ZP considerando o Critério de von Mises, na Figura 8.18 é apresentado a evolução da ZP para o Critério de Tresca e por fim na Figura 8.19 é apresentado a evolução da ZP obtida pelo Critério de Gao.



(a)

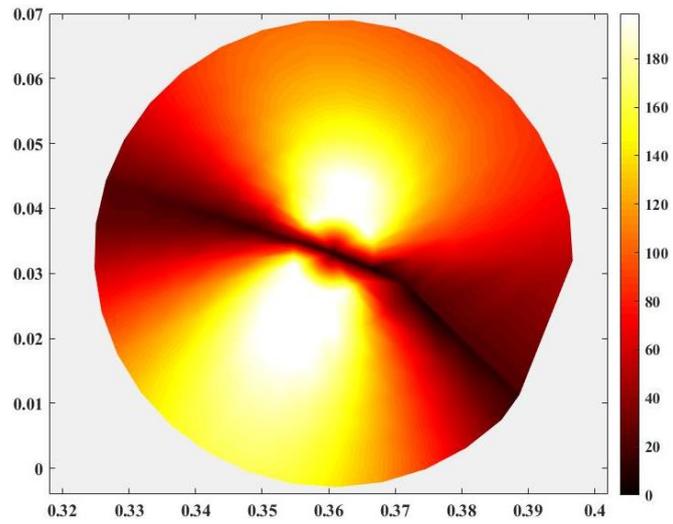


(b)

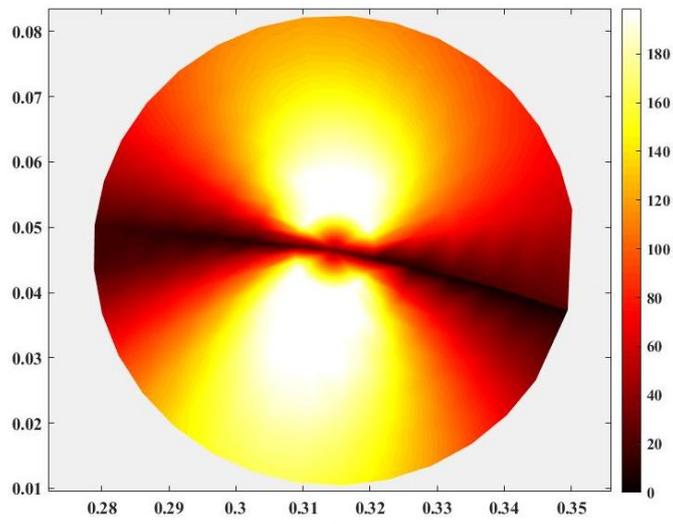


(c)

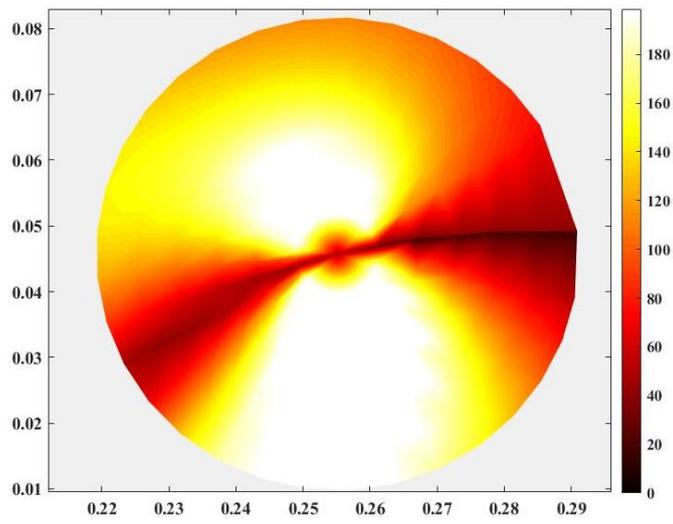
Figura 8.17 – ZP de von Mises: (a) 1° incremento; (b) 5° incremento; (c) 10° incremento;



(a)

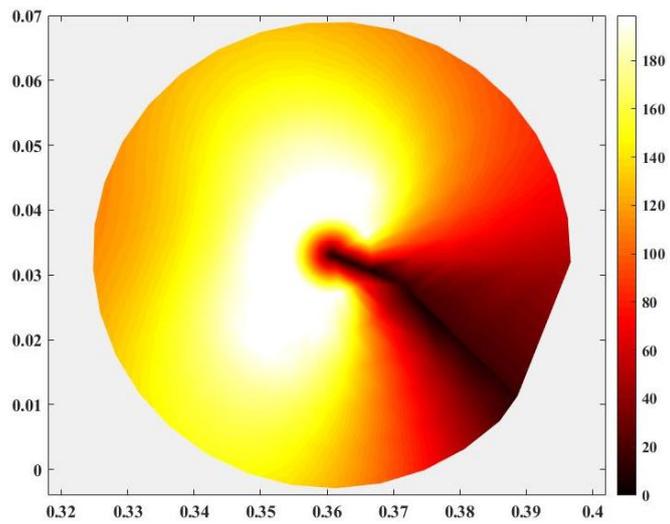


(b)

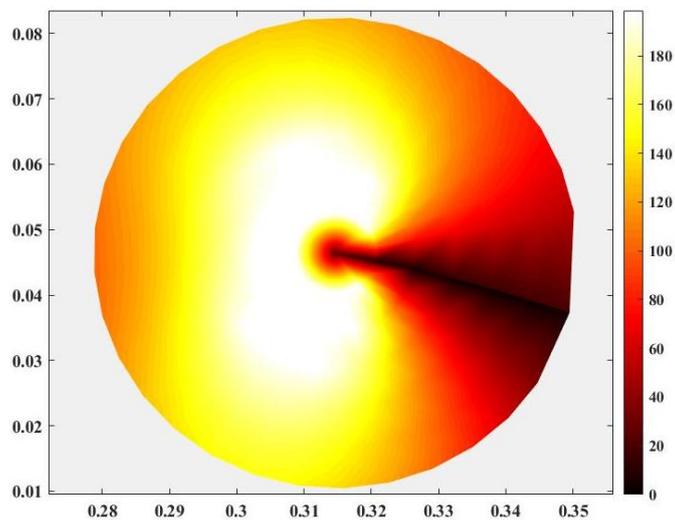


(c)

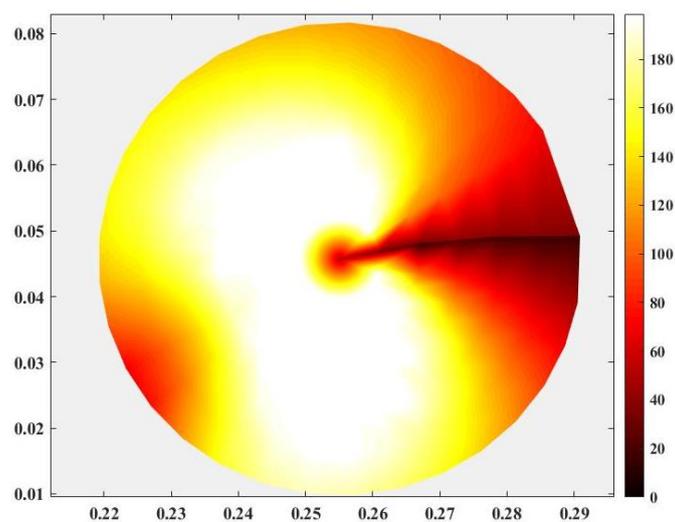
Figura 8.18 – ZP de Tresca: (a) 1° incremento; (b) 5° incremento; (c) 10° incremento;



(a)



(b)



(c)

Figura 8.19 – ZP de Gao: (a) 1° incremento; (b) 5° incremento; (c) 10° incremento;

Na evolução da ZP é possível observar que o critério de escoamento de Tresca produz a forma mais distinta das ZP dentro os três critérios de escoamento estudado neste trabalho. Os critérios de von Mises e Gao produzem ZP de formatos semelhantes, porém os tamanhos das ZP são diferentes. Essa diferença se deve diretamente a influência do primeiro invariante do tensor de tensão ( $I_1$ ) e do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras ( $J_3$ ) presente na formulação do Critério de Gao. Desta forma a ZP obtida através do Critério de Gao é menor que a ZP de Mises. Isso pode ser visto na Figura 8.20, onde é feito um comparativo entre os critérios, apresentando os pontos internos da chuva de pontos que atingiram a tensão equivalente de escoamento.

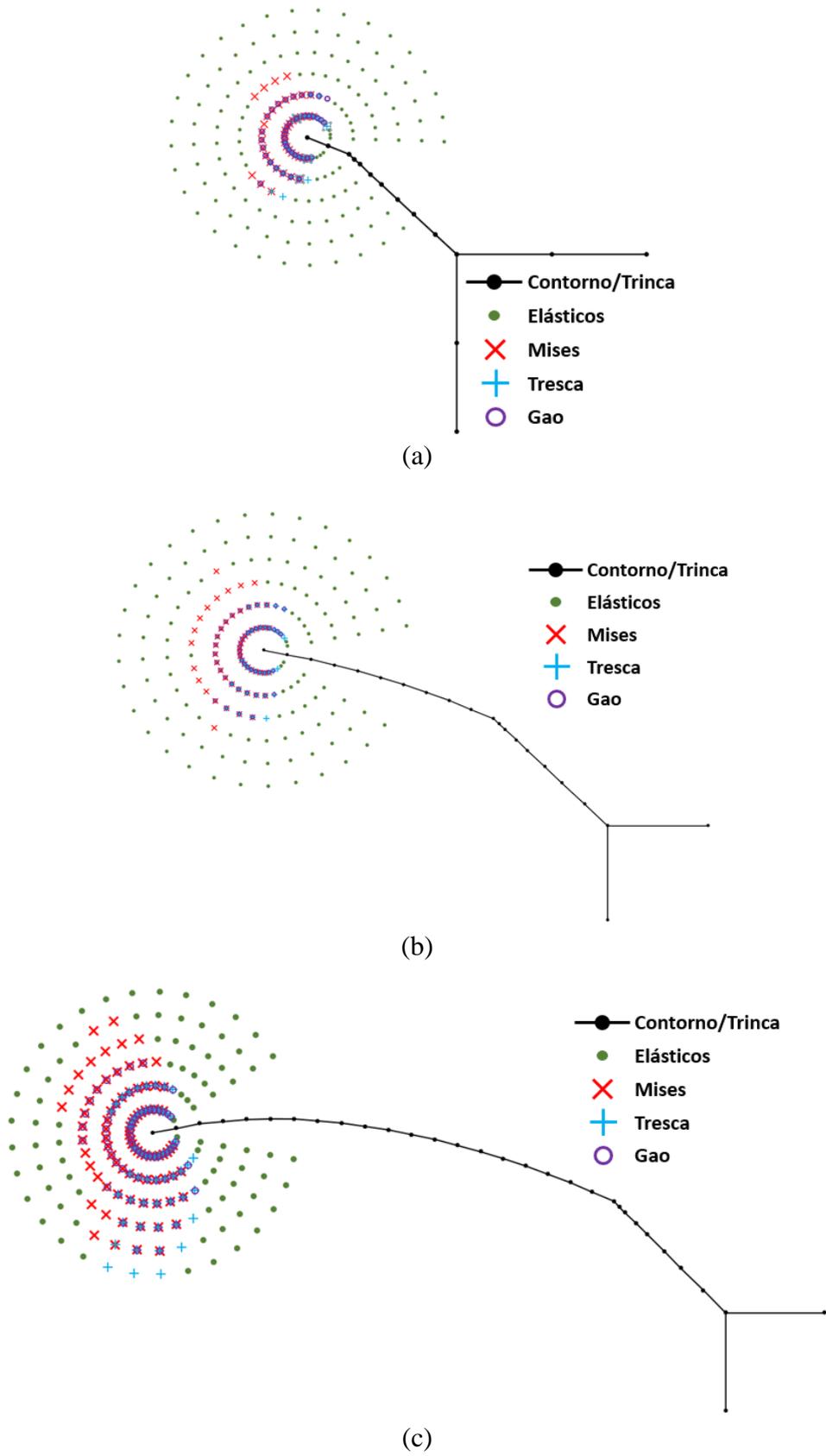


Figura 8.20 – Evolução da ZP: (a) 1º incremento; (b) 5º incremento; (c) 10º incremento;

## 9 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 9.1 - Conclusões

Este trabalho mostrou uma nova abordagem para simular o comportamento elastoplástico em problemas de propagação de trinca usando duas formulações duais do MEC, a saber: primeiro, o MECD, uma técnica elegante e robusta para problemas da mecânica da fratura utilizando apenas uma região e empregando elementos descontínuos nas faces da trinca. Aqui, todo o processo de modelagem, cálculo de tensões e deslocamentos, de FIT com uso de integral J, bem como predição do caminho de propagação da trinca por vários critérios, foi realizado por meio do programa BemCracker2D desenvolvido por Gomes e Miranda, (2018), e atualizado neste trabalho; e segundo, o MRD, que emprega soluções fundamentais obtidas de equações mais simples e trata os termos não-homogêneos na equação original, usando um procedimento que envolve uma série de funções de aproximação global/local e aplica princípios de reciprocidade, (GOMES, DELGADO NETO, *et al.*, 2019).

Dentre as contribuições deste trabalho, se destaca, o desenvolvimento de um algoritmo não-linear, denominado MECRD, para tratamento dos termos plásticos, fazendo-se uso de pontos internos e de funções particulares com comportamento local para acompanhar o avanço da trinca. O emprego de elementos descontínuos nas faces da trinca permite a possibilidade da propagação incremental da trinca, atualizando as matrizes do sistema, adicionando linhas e colunas referentes aos novos elementos, considerando a compatibilização entre as malhas funcional/geométrica.

Os resultados de FIT pelo programa foram consistentes e levaram em conta a região plastificada na ponta da trinca, pois a integral J considerava a parcela referente à integral de domínio. Sendo assim os termos não-homogêneos são tratados e avaliados através do algoritmo MECRD, evitando-se, portanto, as singularidades devido as colocações dos pontos internos, uma vez na formulação de MECD era possível realizava apenas integração numérica padrão. Quanto aos resultados de propagação, de número de ciclos e resistência residual, estes já estão bastantes consolidados pelo programa e mostraram-se consistentes com os da literatura.

Sobre os resultados elastoplásticos obtidos nos quatro primeiros exemplos aplicados, chapas com trinca reta centrada e de borda em modo I puro e chapa com trinca inclinada em modo misto (I+II), concordam bem com aqueles da literatura, ratificando, portanto, que o emprego do algoritmo MECRD elastoplástico, associado à formulação MECD, produzem resultados consistentes na análise plástica em problemas de trincas. Nos próximos três exemplos é considerado a influência da plastificação na região da ponta da trinca sem considerar a propagação da trinca para o cálculo do FIT considerando diversos incrementos de carga. Observou-se um pequeno afastamento das curvas do FIT que representa o comportamento plástico, obtido nesta tese e nas literaturas, em relação àquelas que representam apenas o comportamento elástico. Os resultados obtidos pelo BemCracker2D também são comparados com os resultados obtidos a partir de modelos analíticos baseados na plastificação da região da ponta de uma trinca em placa infinita de Irwin e Burdekin e Stone, apresentado nos trabalhos de Cisilino e Aliabadi, (1999), Leitão *et al.*, (1993) e Teixeira, (2006). Os valores encontrados nesta tese tendem para os valores obtidos pelo modelo de Burdekin e Stone.

No último exemplo é avaliado as tensões plásticas calculadas através do MRD e a evolução da ZP considerando diversos critérios de escoamento, a saber, von Mises, Tresca e Gao. Foi observado que os critérios representam bem o comportamento da região em torno da ponta da trinca, contudo os critérios de Mises e especialmente o de Gao representou melhor a ZP devido ao MRD comparado a ZP estimada, obtida na Figura 8.12(b), tanto em formato quanto tamanho estimado através dos FIT plásticos. O efeito do comportamento elastoplástico, avaliado em um campo de deformação plástica sobre pontos internos na região em torno da ponta da trinca (denominada chuva de pontos), foi simulado pelo MRD para o cálculo das tensões e deformações plásticas nesses pontos internos, que se mostrou um método preciso e eficiente para modelar problemas da MFEP, tendo em vista as pseudo-forças de corpo que aparecem neste tipo de problema.

## 9.2 - Sugestões

Por fim, embora o programa de análise tenha apresentado excelente interação com o algoritmo não-linear, principalmente, no tratamento da trinca via formulação MECD elastoplástica tratada com o MRD, este estudo se delimita a modelos bidimensionais, podendo ser expandido para 3D. Assim como o estudo de múltiplas trincas em cenário de coalescência também é sugerido para trabalhos futuros.

O tratamento desses modelos ainda precisa ser refinado dentro do programa de análise para o comportamento plástico de diversos tipos de materiais. Assim, surge como sugestão para trabalhos futuros a implementação para uma análise plástica considerando o endurecimento do material em um processo transitório, onde seriam acompanhadas as deformações plásticas incrementais. E por fim, uma sugestão para trabalhos futuros seria obter resultados experimentais ou computacionais (softwares comerciais) para corroborar com os resultados obtidos da ZP aqui nesta tese.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AL-BAYATI, S. A.; WROBEL, L. C. A novel dual reciprocity boundary element formulation for two-dimensional transient convection–diffusion–reaction problems with variable velocity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 94, 2018a. 60-68.

AL-BAYATI, S. A.; WROBEL, L. C. The dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion-reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions. **International Journal of Mechanical Sciences**, 145, 2018b. 367-377.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. **Computers and Structures**, 81, 2003. 1703-1713.

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics Fundamentals and Applications**. IV. ed. Boca Raton: [s.n.], 2005. 688 p.

BARANOGLU, B.; MENGI, Y. The use of dual reciprocity boundary element method in coupled thermoviscoelasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 192, 2006. 379-392.

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGETT, J. A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. **Int. j. numer. methods eng.**, 1981. 387-494.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques**. Berlin: Springer, 1984.

BRIDGES, C. A.; WROBEL, L. C. A dual reciprocity formulation for elasticity problems with body forces using Augmented thin plate splines. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 12, n. 3, 1996. 209-220.

CHENG, A.; GRILLI, S.; LAFE, O. Dual reciprocity BEM based on complete set global shape functions. **BEM XV**, p. 343-358, 1993.

CISILINO, A. P.; ALIABADI, M. H. Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems. **Engineering Fracture Mechanics**, 63, 1999. 713-733.

CRUSE, T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 12, p. 1259-1274, December 1969.

CRUSE, T. A. Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary - integral - Surface cracks: Physical problems and computational solutions. **ASME**, New York, p. 153-170, 1972.

CRUSE, T. A.; POLCH, E. Z. Application of an elastoplastic boundary-element method to some fracture-mechanics problems. **Eng. Fracture Mech**, n. 23, 1986. 1085-1096.

CRUSE, T. A.; VAN BUREN, W. Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with a edge crack. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 7, p. 1-15, 1971.

DELGADO NETO, A. M. **BEMLAB2D: Interface gráfica de modelagem, visualização e análise com elementos de contorno - Uma aplicação em problemas elastostáticos**. Universidade de Brasília. Brasília, p. 94. 2017. (005A/2017).

DELGADO NETO, A. M. et al. Methodology for simulating the elastoplastic behavior in crack propagation problems using dual formulations of the boundary element method. **Revista Caderno Pedagógico**, Curitiba, 20, n. 3, Novembro 2023. 1296-1322.

DELGADO NETO, A. M.; GOMES, G.; OLIVEIRA, T. A. A. An efficient GUI update for BEM-FEM mixed mesh generation. **International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics**, p. 256-267, 2019.

DELGADO NETO, A. M.; GUIMARÃES, D. C.; GOMES, G. **BEMLAB2D: GUI Modeling, visualization and analysis with boundary element - an application in elastostatic problems**. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE. Brasília: [s.n.], 2016.

DENG, Q. et al. A nonlinear complementarity approach for elastoplastic problems by BEM without internal cells. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 35, n. 3, 2011. 313-318.

DOWLING, N. E. **Mechanical Behavior of Materials**. Virginia: Pearson, 1999.

ERDOGAN, F.; SIH, G. C. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. **Journal of Basic Engineering**, v. 85, n. 4, p. 519, 1963.

FEDELINSKI, P. Boundary element method in dynamic analysis of structures with cracks. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 28, 2004. 1135-1147.

FEDELINSKI, P.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 12, 1993. 203-210.

GALVIS, A. F.; SOLLERO, P. 2D analysis of intergranular dynamic crack propagation in polycrystalline materials a multiscale cohesive zone model and dual reciprocity boundary elements. **Computers and Structures**, 164, 2016. 1-14.

GAO, X. et al. On stress-state dependent plasticity modeling: significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule. **Int. J. Plast**, 27 (2), 2011. 217–231.

GEORGIADIS, H. G.; GRENTZELOU. Energy theorems and the J-integral in dipolar gradient elasticity. **International Journal of Solids and Structures**, n. 43, p. 5690-5712, 2006.

GOLBERT, M. A.; CHEN, C. S. The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations. **Boundary Elements Communications**, v. 5, p. 57-61, 1994.

GOMES, G. **Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em problemas de Plasticidade 2D Orientada a Objeto**. Universidade de Brasília - UnB. Brasília, p. 165. 2006. (Nº: E.TD- 002A/06).

GOMES, G. et al. **Multiscale analysis of multiple cracks in aircraft fuselage**. XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE. [S.l.]: [s.n.]. 2018.

GOMES, G. et al. An object-oriented approach to dual reciprocity boundary element method applied to 2D elastoplastic problems. **Multidiscipline Modeling in Materials and Structures**, 15, n. 5, July 2019. 958-974.

GOMES, G.; DELGADO NETO, A. M.; WROBEL, L. C. **Modelling and 2D cracks view using dual boundary integral equation**. XXXCII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE. Brasília: [s.n.]. 2016.

GOMES, G.; DELGADO NETO, A. M.; WROBEL, L. C. **Modelling and 2D cracks view using traction boundary integral equation**. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE. Brasília: [s.n.]. 2016.

GOMES, G.; MIRANDA, A. C. O. Analysis of crack growth problems using the object-oriented program BemCracker2D. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 45, p. 67-85, 2018.

GOMES, G.; MIRANDA, C. O. A. Analysis of crack growth problems using the object-oriented program BemCracker2D. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 45, p. 67-85, 2018.

GOMES, G.; OLIVEIRA, T. A. A.; DELGADO NETO, A. M. **BemCracker2D: A software package for two-dimensional fatigue crackgrowth analysis**. XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE. Natal: [s.n.]. 2019.

GOMES, G.; OLIVEIRA, T. A. A.; DELGADO NETO, A. M. A new methodology to predict damage tolerance based on compliance via global-local analysis. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 15, n. 58, p. 211–230, 2021.

- HAMZEHEI-JAVARAN, S.; KHAJI, N. Complex Fourier element shape functions for analysis of 2D static and transient dynamic problems using dual reciprocity boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 95, 2018. 222-237.
- HONG, H.; CHEN, J. Derivations of integral equations of elasticity. **J. Eng. Mech.**, 1988. 1028-1044.
- HUTCHINSON, J. W.; PARIS, P. C. Elastic-Plastic Fracture. **ASTM\_STP-668, American Society for Testing and Materials**, Philadelphia, p. p. 37, 1979.
- IRWIN, G. R. Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys. **Sagamore Research Conference Proceedings**, v. 2, p. 37-64, 1956.
- IRWIN, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. **Jornal of Applied Mechanics**, v. 24, p. 361-364, 1957.
- JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory, I. **Proc. Roy. Soc. Ser.**, v. A 275, p. 23-32, 1963.
- KARUR, S. R.; RAMACHANDRAN, P. A. Augmented thin plate spline approximation in DRM. **Boundary Elements Communications**, v. 6, p. 55-58, 1995.
- LEE, K. H.; FENNER, R. T. A Quadratic Formulation for two-dimensional Elastoplastic Analysys Using the Boundary Integral Equation Method. **J. Strain Analysis**, v. 21, p. 159-175, 1986.
- LEITÃO, V. M. A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Contour integrals for an elastoplastic boundary element method formulation. **International Journal of Fracture**, 64, 1993. 97-103.
- LEITÃO, V. M. A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Elastoplastic dual boundary element: application to crack-face contact. **Computers & Structures**, 54, 1995. 443-454.
- LEITÃO, V. M. A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Elastoplastic simulation of fatigue crack growth. **International Journal of Fatigue**, 17, 1995. 353-363.

LEITÃO, V. M. A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in engineering**, 38, 1995. 315-333.

LEITÃO, V. M. A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in engineering**, 38, 1995a. 315-333.

LEITÃO, V. M. A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Elastoplastic simulation of fatigue crack growth. **International Journal of Fatigue**, 17, 1995b. 353-363.

LEITÃO, V. M. A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Elastoplastic dual boundary element: application to crack-face contact. **Computers & Structures**, 54, 1995c. 443-454.

MEDEIROS, G. C.; PARTRIDGE, P. W. The Method of fundamental solution with dual reciprocity for potential problems of the type  $\nabla^2 u = b(x,y,z)$ . **BETECH XIV**, Southampton and Boston, 2001. 335-344.

MENDELSON, A. Boundary integral methods in elasticity and plasticity. **Report No. NASA TND-7418**, NASA, 1973.

MENDELSON, A.; ALBERS, L. U. Application of boundary integral equations to elastoplastic problems. **Boundary Integral Equations Methods: Computational Applications in Applied Mechanics**, New York, 1975.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 10, 1992. 161-171.

MORJARIA, M.; MUKHERJEE, S. Numerical analysis of planar, time dependent inelastic deformation of plates with cracks by the boundary element method. **Int J. Solids Struct**, 17, 1981. 127-143.

MOURA, D. C. **Caminho de Propagação de Trinca: Modelagem Automática e Comparação de Diferentes Critérios com o Programa BemCracker2D**. Universidade de Brasília - UnB. Brasília - DF, p. 129. 2019. (E.DM 19A/2019).

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. **BEM in Engineering, Computational Mechanics Publications**, Southampton, 1982.

NAZARALI, Q.; WANG, X. The effect of T-stress on crack-tip plastic zones under mixed-mode. **Fatigue & Fracture of Engineering Material & Structures**, p. 792-803, 2011.

NGUYEN, T. D. et al. A material force method for inelastic fracture mechanics. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 53, p. 91-121, 2005.

OLIVEIRA, T. A. A.; GOMES, G.; EVANGELISTA JUNIOR, F. Multiscale aircraft fuselage fatigue analysis by the dual boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 104, p. 107-119, 2019.

PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. **The Dual Reciprocity Boundary Element Method**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1992.

PARTRIDGE, P. W.; SENSALÉ, B. Hybrid approximation functions in the Dual Reciprocity Boundary Element Method. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 13, 1997. 83-94.

PINEDA LEÓN, E. et al. Combined plasticity and creep analysis in 2D by means of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 37, 2013. 1436-1444.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Dual boundary element method: effective implementation for crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 33, 1992. 1269-1287.

RICARDELLA, P. C. **An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity**. Carnegie Mellon University. Pittsburg. 1973. (Report No. SM-73-10).

RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v. 35, n. 2, p. 379, 1968.

RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 25, p. 83-95, 1967.

SANTANA, E.; PORTELA, A. Dual boundary element analysis of fatigue crack growth, interaction and linkup. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 64, 2016. 176-195.

SENSALE, B.; PARTRIDGE, P. W.; CREUS, G. J. The Dual Reciprocity Boundary Element Method in Viscoelasticity. **Transactions on Modelling and Simulation**, v. 12, p. 343-352, 1996. ISSN 1743-355X.

SENSALE, B.; PARTRIDGE, P. W.; CREUS, G. J. General boundary elements solution for ageing viscoelastic structures. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, v. 50, p. 1455-1468, 2001.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. New York: Springer, 1998.

SOUSA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity - Theory and Applications**. Torquay: Wiley, 2008. 816 p. ISBN ISBN 978-0-470-69452-7.

SUPRIYONO; ALIABADI, M. H. Analysis of shear deformable plates with combined geometric and material nonlinearities by boundary element method. **International Journal of Solids and Structures**, 44, 2007. 1038-1059.

SWEDLON, J. L.; CRUSE, T. A. Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elastoplastic flow. **Int. J. Solids Structures**, 1971.

SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory, II. **Proc. Roy. Soc. Ser.**, v. A275, p. 33-46, 1963.

TEIXEIRA, M. C. **Análise elastoplástica da propagação de trincas pelo método dos elementos de contorno.** Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. "Tese de Doutorado", p. p. 153. 2006.

TELLES, J. C. F. **The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problem.** Berlin: Springer-Verlag, 1983.

TELLES, J. C. F.; CASTOR, G. S.; GUIMARÃES, S. A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics. **Int. J. Numer. Methods Eng**, n. 38, p. 3259-3274, 1995.

TELLES, J. C. F.; GUIMARÃES, S. Green's function: a numerical generation for fracture mechanics problems via boundary elements. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng**, n. 188, p. 847-858, 2000.

TRESCA, H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides. **Mém. pres. par div. sav.**, v. 18, p. 733-799, 1868.

VERA-TUDELA, C. A. R.; TELLES, J. C. F. A numerical Green's function and dual reciprocity BEM method to solve elastodynamic crack problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, n. 29, p. 204-209, 2005.

VERA-TUDELA, C. A. R.; TELLES, J. C. F. The dual reciprocity method and the numerical Green's function for BEM fracture mechanic problems. **Acta Mechanic**, v. 11, n. 227, p. 3205-3212, 2016.

VON MISES, R. Mechanik der Festen Körper im Plastische-deformablen Zustand. **Nachr. d. Gesellsch d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse.**, 1913.

WATSON, J. O. Hermitian cubic and singular elements for plane strain. **Developments in Boundary Element Methods**, Amsterdam, 1986.

WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v. 49, p. 49-53, 1939.

WILLIAM, G. R. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. **Jornal of Applied Mechanics**, v. 24, p. 109-114, 1957.

XIE, G. et al. A direct traction boundary integral equation method for three-dimension crack problems in infinite and finite domains. **Computational Mechanics**, n. 53, p. 575-586, 2013.

YAN, F. et al. A new dual reciprocity hybrid boundary node method based on Shepard and Taylor interpolation method and Chebyshev polynomials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 73, December 2016. 61-68.

YAN, F.; FENG., X.; ZHOU, H. A dual reciprocity hybrid radial boundary node method based on radial point interpolation method. **Computational Mechanics**, 45, n. 6, 2010. 541-552.

YAN, F.; YU, M.; LV, J. Dual reciprocity boundary node method for convection-diffusion problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 80, 2017. 230-236.

YANG, J.; ZHOU, K. Analysis of the plastic zones of cracks in an elastic-perfectly plastic halfspace. **International Journal of Mechanical Sciences**, 121, 2017. 143-150.

YUN, B. I.; ANG, W. T. A dual-reciprocity boundary element method for axisymmetric thermoelastostatic analysis of nonhomogeneous materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 36, 2012. 1776-1786.

ZHANG, J. et al. A singular element based on dual interpolation BFM for V-shaped notches. **Applied Mathematical Modelling**, n. 71, p. 208-222, 2019.

## **Apêndice A - ARTIGOS PUBLICADOS**

### **A.1. A New Methodology to Predict Damage Tolerance Based on Compliance Via Global-Local Analysis**

GOMES, G; OLIVEIRA, T. A. A.; **DELGADO NETO**, A. M. ; BEZERRA, L. M. **A new methodology to predict damage tolerance based on compliance via global-local analysis.** FRATTURA E INTEGRITA STRUTTURALE **JCR**, v. 15, p. 211-230, 2021.

### **A.2. An Object-Oriented Approach to Dual Reciprocity Boundary Element Method Applied to 2D Elastoplastic Problems**

GOMES, G.; **DELGADO NETO**, A. M. ; BEZERRA, L. M. ; Costa Silva, R. S. Y. R. **An object-oriented approach to dual reciprocity boundary element method applied to 2D elastoplastic problems.** MULTIDISCIPLINE MODELING IN MATERIALS AND STRUCTURES (PRINT) **JCR**, v. 15, p. 958-974, 2019.

### **A.3. An Efficient GUI Update For BEM-FEM Mixed Mesh Generation**

**DELGADO NETO**, A. M. ; OLIVEIRA, T. A. A. ; GOMES, G. . **An efficient GUI update for BEM-FEM mixed mesh generation.** International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics **JCR**, v. 20, p. 256-267, 2019.

### **A.4. Methodology for Simulating the Elastoplastic Behavior in Crack Propagation Problems Using Dual Formulations of the Boundary Element Method**

**DELGADO NETO**, A. M. et al. **Methodology for simulating the elastoplastic behavior in crack propagation problems using dual formulations of the boundary element method.** Revista Caderno Pedagógico, Curitiba, 20, n. 3, Novembro 2023. 1296-1322.

## Apêndice B - IMPLEMENTAÇÃO NA FORMA DE CÓDIGO

### B.1. Interface Gráfica do BEMLAB2D

O BEMLAB2D é uma interface gráfica com função de pré e pós-processamento de dados desenvolvidos por Delgado Neto (2017). Seus ícones são todos implementados e apresentados na língua inglesa, ver Figura B.1.

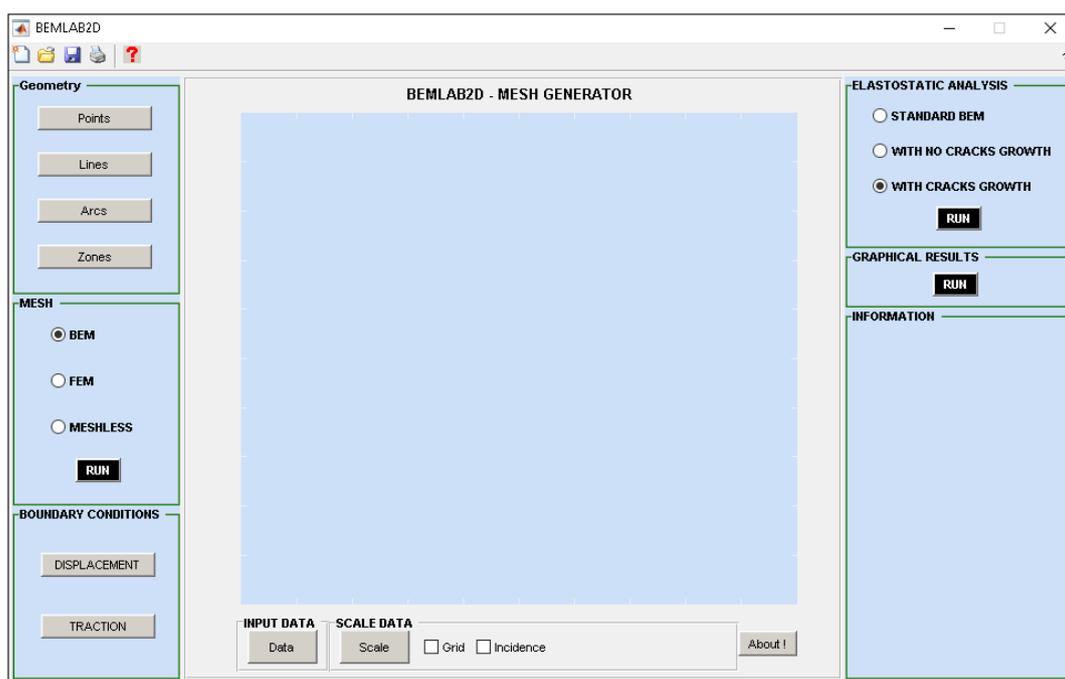


Figura B.1 – Ambiente gráfico do pré-processador (DELGADO NETO, 2017)

Inicialmente, essa interface foi desenvolvida com o objetivo de facilitar a criação e manutenção de modelagem geométrica, proporcionar maior flexibilização em construir malhas, aplicar diversas condições de contorno e inserir propriedades físicas; todas essas características do programa estão relacionadas apenas com o pré-processador.

O pré-processador possui três módulos bases:

- *Geometry* (Módulo I): Este é um módulo de desenho. Constrói os modelos 2D;
- *Mesh* (Módulo II): A partir da geometria obtida no Módulo I este módulo possibilita a gerar a malha de elementos de contorno;
- *Boundary Conditions* (Módulo III): Neste módulo as condições do contorno de deslocamento e tração são inseridas;

O pós-processamento do BEMLAB2D (Figura B.2) apresenta resultados diversos obtidos das análises via MEC, a saber: Deformações, tensões, fatores de intensidade de tensão, vida a fadiga, propagação de trincas e zona plástica.

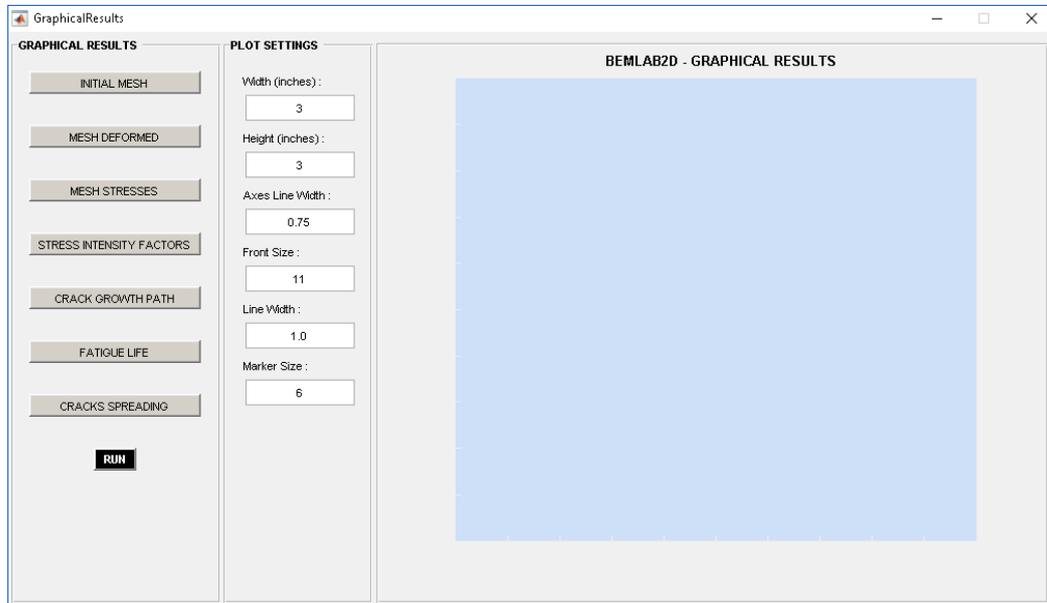


Figura B.2 – Ambiente gráfico do pós-processador (DELGADO NETO, 2017)

## B.2. Módulos de Funcionamento do BEMLAB2D

O módulo I é responsável por gerar os modelos geométricos no BEMLAB2D. Os ícones principais *Points*, *Lines*, *Arcs* e *Zones* (botões) tem como prioridade desenhar do modelo geométrico, podendo esses modelos ser com furos, trincas e/ou zonas conexas, ver Figura B.3.

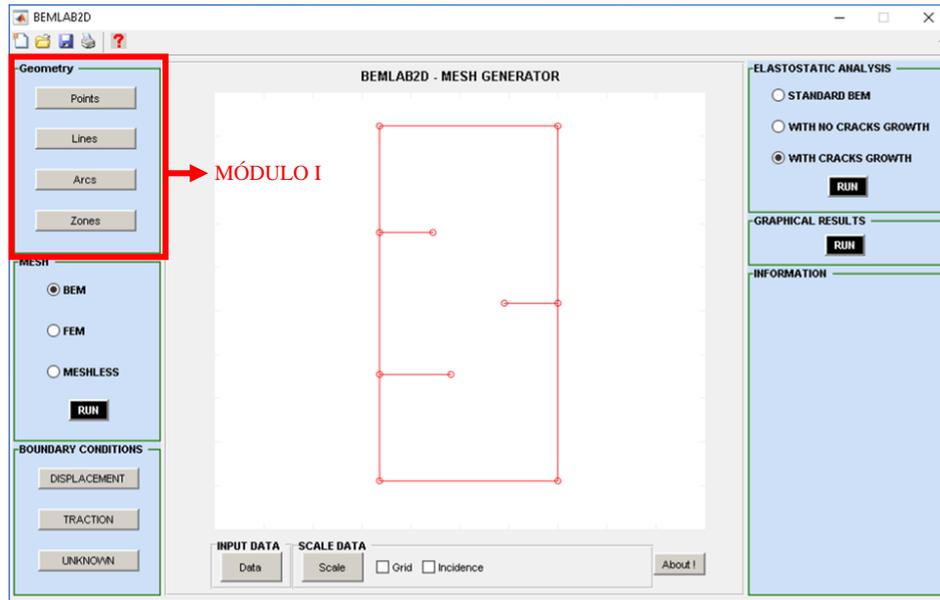


Figura B.3 – Modelo Geométrico (DELGADO NETO, 2017)

O módulo II é responsável por gerar a malha característica do modelo geométrico construído no Módulo I. Na interface, o Módulo II tem grande importância na construção da malha do Método dos Elementos de Contorno (MEC), a qual é utilizada para a construção do modelo físico-geométrico e para a análise via MEC. Uma apresentação do módulo II pode ser visualizada na Figura B.4 junto com um modelo com dos detalhes da modelagem da trinca em elementos descontínuos.

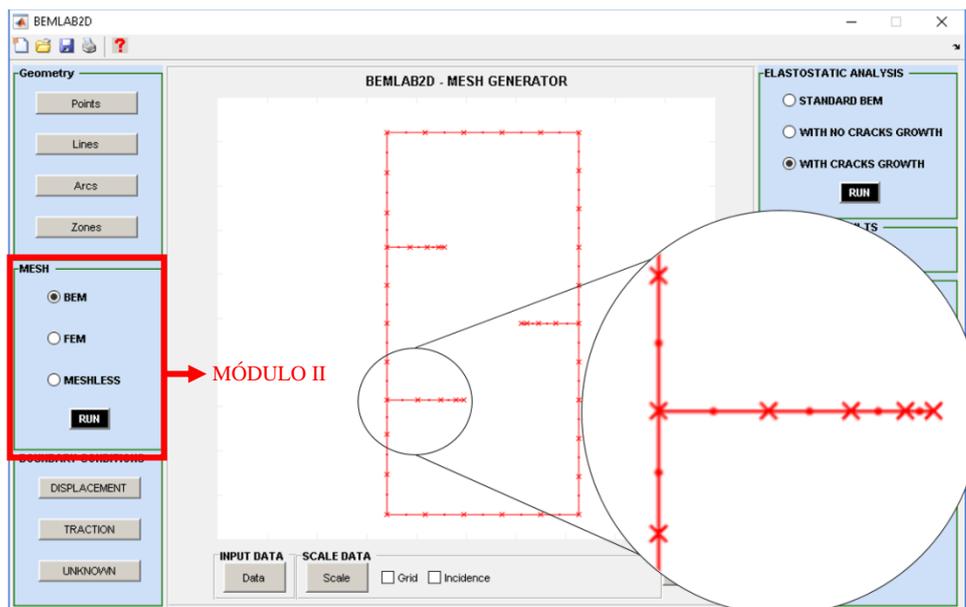


Figura B.4 – Malha de MEC com Detalhe da Trinca (DELGADO NETO, 2017)

O módulo III é responsável por inserir condições de contorno, como restrições, deslocamentos prescritos e condições de cargas (força ou tensões), gerando assim a malha em MEC com as condições de contorno aplicadas.

Os ícones principais DISPLACEMENT e TRACTION tem como prioridade desenhar apoios (1º e 2º gênero) e cargas (força ou tensão) a partir da malha de MEC, respectivamente. Uma apresentação do módulo III pode ser visualizada na Figura B.5. Nesta mesma figura um modelo de uma chapa retangular submetida a um carregamento uniforme distribuído tracionando ao longo da maior direção da peça e possui restrição de movimento global da estrutura por dois apoios, um de 1º gênero e outro de 2º gênero.

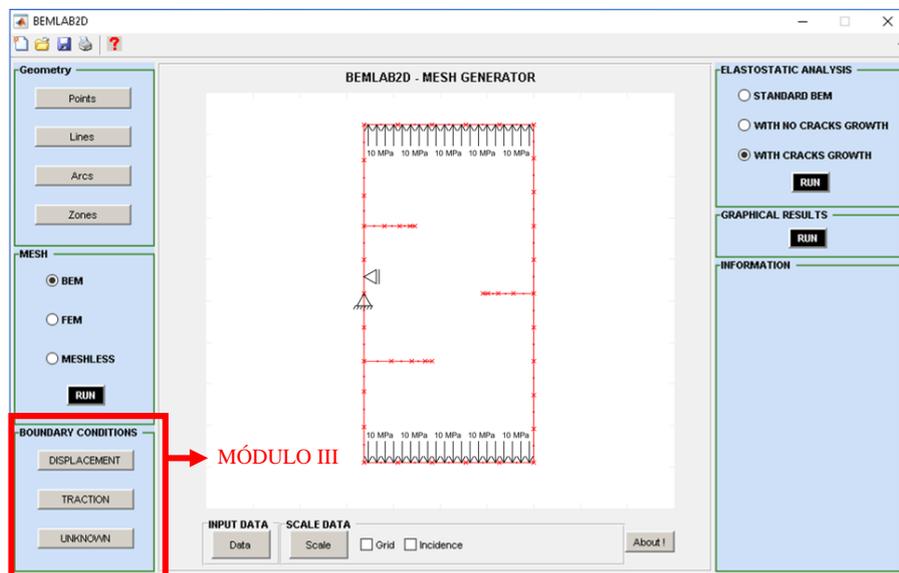


Figura B.5 – Modelo Físico-Geométrico e Malha de MEC (DELGADO NETO, 2017)

O módulo IV é responsável por informar qual tipo de análise será realizada pelo BemCracker2D (GOMES *et al.*, 2016). Ao selecionar o botão *Run* aciona uma interface gráfica auxiliar, nesta são dadas diversas informações que só podem ser modificadas em determinado tipo de análise. Uma apresentação do módulo IV pode ser visualizada na Figura B.6.

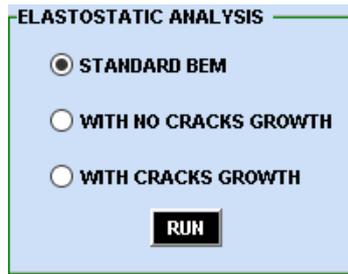


Figura B.6 – Módulo IV - Análise Elastostática (DELGADO NETO, 2017)

Por fim, o módulo de pós-processamento, o módulo V é responsável pela leitura e visualização dos arquivos de dados calculados pelo BemCracker2D. O único botão desse módulo aciona uma interface gráfica auxiliar composta por vários outros comandos que definem a visualização dos resultados gráficos na interface gráfica auxiliar. Uma apresentação da interface auxiliar com a malha deformada em comparação com a malha indeformada pode ser visualizada na Figura B.7.

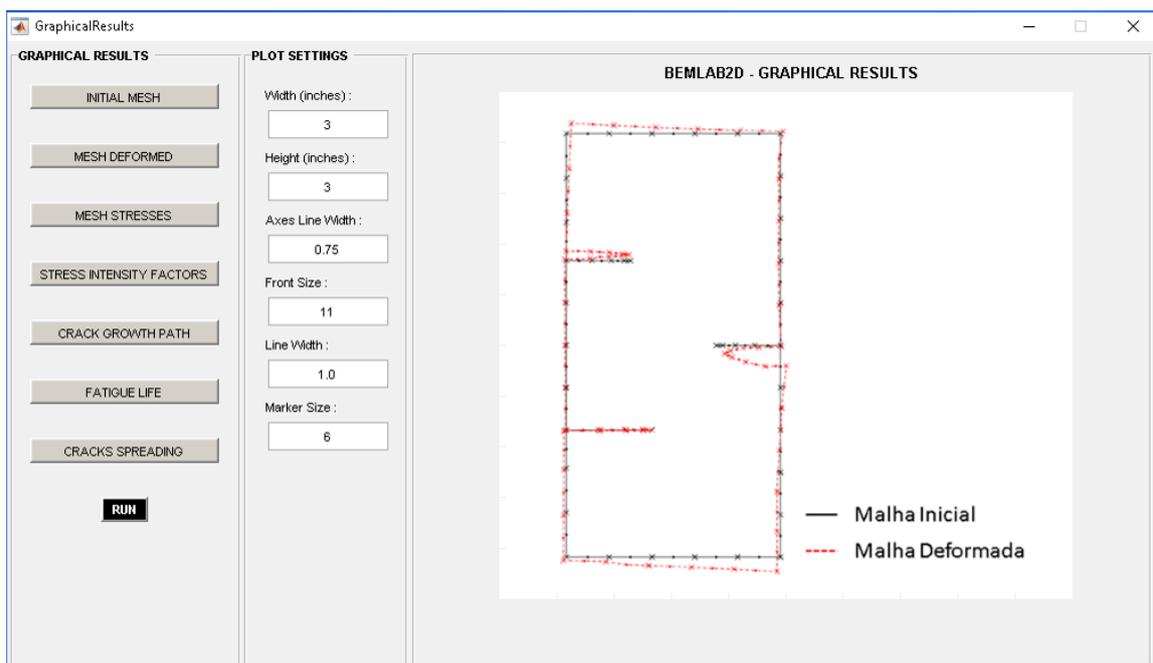


Figura B.7 – GUI auxiliar - Malha deformada (DELGADO NETO, 2017)

A interface auxiliar, que trata o pós-processamento do BEMLAB2D, também pode apresentar resultados como tensões, deformações, FITs, número de ciclos para a falha por fadiga, propagação da trinca e abertura da ponta de trinca. Todos os resultados obtidos no regime elástico linear e sendo determinados previamente no Módulo IV.

## Apêndice C - IMPLEMENTAÇÃO NA FORMA DE CÓDIGO

O BemCracker2D faz a análise do estudo da mecânica da fratura pelo MECD (PORTELA *et al.*, 1992) foi apresentado por Gomes, Delgado Neto e Wrobel (2016) e Gomes e Miranda (2018). Este programa é baseado na Programação Orientação Objeto (POO) em linguagem C++. Este programa serve de suporte para analisar problemas elastostáticos bidimensionais. O programa BemCracker2D é baseado no diagrama de classes ilustrado na Figura C.1 onde *BemCrk\_BEMSYS* é a principal classe do programa e elo de ligação com a interface BEMLAB2D.

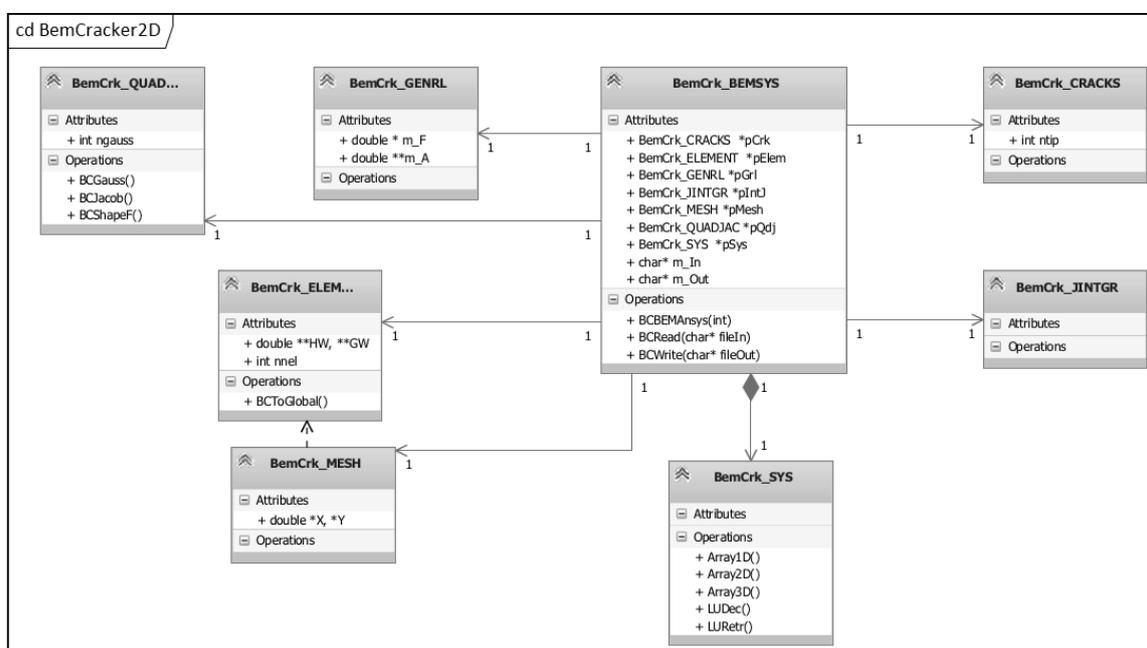


Figura C.1 – Diagrama de Classes do programa BemCracker2D (GOMES, DELGADO NETO e WROBEL, 2016)