



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional



# Análise de Semigrupos Numéricos por coordenadas de Kunz

por

**Vinícius de Oliveira Rodrigues**

**Orientador: Matheus Bernardini de Souza**

Brasília  
2023

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional

## **Análise de Semigrupos Numéricos por coordenadas de Kunz**

por

**Vinicius de Oliveira Rodrigues**

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 12 de dezembro de 2023.

**Comissão Examinadora:**

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FGA/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior - FGA/UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Wanderson Tenório - UFMT (Membro Externo)

*A Deus e a minha esposa.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus que tem mostrado a cada dia que sua presença é real em minha vida, agradecer pelo seu infinito amor e por me proporcionar bênçãos e entendimentos além das minhas expectativas.

A minha amada esposa Bela, a qual tem sido uma coluna inabalável em minha jornada, que me motiva todos os dias, que é a minha melhor amiga, que é a minha melhor companhia, que esteve ao meu lado nos meus dias mais difíceis, que abrilhanta meus dias, que tem me proporcionado dias muito felizes, que é o meu grande amor.

Ao professor Dr. Matheus Bernardini pelo privilégio de tê-lo como professor e orientador, pelos seus ricos ensinamentos, pelo seu comprometimento, por sua paciência, por transmitir sua paixão pela Matemática inspirando e extraíndo o melhor dos seus alunos.

Aos meus amigos de mestrado Flávio de Aguiar e Leonardo Simões, fiéis companheiros de estudos, os quais foram grandes suportes nos momentos difíceis e grandes incentivadores.

Aos demais membros da banca examinadora, formada pelos professores Prof. Dr. Wanderson Tenório e pelo Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior, por terem aceitado avaliar meu trabalho.

Ao corpo docente do PROFMAT, que com excelência ministraram ricas e profundas aulas e por todo suporte que dispensaram ao corpo discente.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os semigrupos numéricos por suas respectivas coordenadas de Kunz e estabelecer um algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz. Dado um semigrupo numérico  $S$ , encontra-se seu conjunto de Apéry e deste são obtidas as coordenadas de Kunz associadas a  $S$ . Obtidas as coordenadas de Kunz de  $S$ , segue-se para a análise destas coordenadas obtendo-se os respectivos invariantes, a saber: gênero, multiplicidade, número de Frobenius, condutor e profundidade. Os gapsets também são objeto de estudo deste trabalho. Resultados dos trabalhos de Eliahou e Fromentin [6] sobre a caracterização de gapsets de multiplicidade  $m = 3$  e  $m = 4$  por suas respectivas filtrações são revisitados neste trabalho e explorados por este trabalho na ótica das coordenadas de Kunz. Seguindo com a análise das coordenadas de Kunz de  $S$ , é proposto neste trabalho uma classificação de cada uma das coordenadas da  $(m - 1)$ -upla  $\in \mathbb{N}^{m-1}$  de acordo com sua característica, pois a característica da coordenada tem por objetivo a construção da árvore dos semigrupos numéricos indicando a classificação do semigrupo numérico, a existência ou não de filhos e a quantidade destes. Por fim, propomos atividades para o Ensino Médio explorando objetos de conhecimento deste trabalho bem como o pensamento computacional proposto na BNCC.

**Palavras-chave:** Semigrupos Numéricos, Conjunto de Apéry, Coordenadas de Kunz, Gapsets, Árvore dos semigrupos numéricos.

# Abstract

The main goal of this work is to study the numerical semigroups using their respective Kunz coordinates and establish an algorithm for constructing the tree of numerical semigroups via Kunz coordinates. Given a numerical semigroup  $S$ , its Apéry set is found and from this the coordinates of Kunz associated with  $S$  are obtained. Once the coordinates of Kunz of  $S$  are obtained, we proceed to the analysis of these coordinates, obtaining the respective invariants, namely: genus, multiplicity, Frobenius number, conductor and depth. Gapsets are also the object of study in this work. Results of the work by Eliahou and Fromentin [6] on the characterization of gapsets of multiplicity  $m = 3$  and  $m = 4$  through their respective filtrations are revisited in this work and explored by this work from the perspective of the Kunz coordinates. Continuing with the analysis of the Kunz coordinates  $S$ , this work proposes a classification of each of the coordinates of the  $(m - 1)$ -tuple  $\in \mathbb{N}^{m-1}$  according to its characteristic, since the coordinate characteristic aims to construct the tree of numerical semigroups indicating the classification of the numerical semigroup, the existence or not of children and their quantity. Finally, we propose activities for high school exploring knowledge objects from this work as well as the computational thinking proposed at BNCC.

**Keywords:** Numerical Semigroups, Apéry Set, Kunz Coordinates, Gapsets, Tree of numerical semigroups.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Semigrupos Numéricos . . . . .	4
1.2 Coordenadas de Kunz . . . . .	9
1.3 Gapsets e filtrações de gapsets . . . . .	17
<b>2 Caracterização de Gapsets por sua respectiva filtração e pelas coordenadas de Kunz</b>	<b>22</b>
2.1 As filtrações de multiplicidade $m = 3$ . . . . .	22
2.2 As filtrações de multiplicidade $m = 3$ por coordenadas de Kunz . . . . .	26
2.3 O comportamento da quantidade de gapsets de gênero $g$ e multiplicidade $m = 3$ . . . . .	28
2.4 As filtrações de multiplicidade $m = 4$ . . . . .	31
2.5 As filtrações de multiplicidade $m = 4$ por coordenadas de Kunz . . . . .	35
<b>3 Árvore dos semigrupos por coordenadas de Kunz</b>	<b>39</b>
3.1 O algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos . . . . .	39
3.2 O algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz . . . . .	42
3.3 Caracterização das coordenadas associadas aos semigrupos numéricos filhos a partir das coordenadas associadas ao semigrupo gerador. . . . .	54
<b>4 Sugestão de atividade para o Ensino Médio</b>	<b>57</b>
4.1 A fundamentação da BNCC . . . . .	57
4.2 Propostas de Atividades para o Ensino Médio . . . . .	59
<b>5 Considerações finais</b>	<b>71</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>

# Introdução

O semigrupos numéricos são subconjuntos  $S \subset \mathbb{N}_0$  que contém o elemento 0 e são fechados para a adição possuindo complementar finito. O conjunto complementar do semigrupo numérico  $S$  é o conjunto das lacunas  $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ .

Os matemáticos estudam os semigrupos numéricos desde o final do século XIX. Em 1884, Sylvester [13] apresenta a resolução do famoso problema das moedas de Frobenius para duas moedas. Tal problema consiste em encontrar o maior número inteiro que não pertence ao semigrupo numérico observado, ou numa versão mais simplificada do problema, decidir qual é a maior quantia inteira que não pode ser obtida usando valores específicos, distintos e coprimos. O problema das moedas de Frobenius está em aberto para três ou mais moedas. Tal problema é abordado neste trabalho como uma imersão à teoria dos semigrupos numéricos para o Ensino Médio.

Seguindo na linha do tempo dos semigrupos numéricos, em 2002, Rosales *et al.* [11], estudam semigrupos numéricos de multiplicidade fixada e verificam que as coordenadas de Kunz de tais semigrupos satisfazem um sistema de desigualdades o que permitiu verificar se uma  $(m - 1)$ -upla de coordenadas inteiras positivas representa ou não as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico. Já em 2005, Rosales [12] trabalha com semigrupos numéricos com multiplicidades 3 e 4 e obtém resultados importantes ao fixar outros invariantes. Em 2008, Bras-Amorós [4] estuda o comportamento da quantidade de semigrupos numéricos com gênero  $g$  fixado e conjectura, entre outras coisas, que a razão entre o número de semigrupos numéricos com gênero  $g+1$  e o número de semigrupos com gênero  $g$  se aproxima da razão áurea quando  $g \rightarrow \infty$ . Ainda em 2008, Bras-Amorós [5], conjectura limites para a quantidade de semigrupos numéricos com o gênero dado e fundamenta o procedimento que descreve a construção da árvore dos semigrupos numéricos pelos seus geradores minimais. Em 2017, Kaplan [10] faz um histórico a respeito de alguns problemas ainda em aberto relacionados às conjecturas de Bras-Amorós. Em 2018, García-Sánchez *et al.* [8] estudam semigrupos numéricos de multiplicidades 3, 4 e 5 de um ponto de vista computacional. Em 2020, são publicados os trabalhos de Eliahou e Fromentin [6] e [7] com trabalhos sobre os gapsets de um semigrupo numérico e com gapsets de multiplicidade pequena. Também em 2020, Bernardini [2] estuda a contagem de semigrupos numéricos pelo gênero e lacunas pares via coordenadas de Kunz e semigrupos numéricos de multiplicidade fixada.



---

Assim, esse trabalho tem como objetos de estudo os semigrupos numéricos e os gapsets a partir das suas respectivas coordenadas de Kunz e trazer a visão dos semigrupos numéricos e conseqüentemente do seu respectivo gapset à luz das coordenadas de Kunz, as quais proporcionam uma análise das características dos semigrupos numéricos e respectivos gapsets, a visualização dos invariantes e o comportamento dos semigrupos e gapsets quando dispostos nas respectivas árvores.

A partir desta breve descrição do trabalho, veremos como esse trabalho foi dividido:

- **Capítulo 1: Preliminares.** Neste capítulo, apresentaremos as definições de um semigrupo numérico, seus invariantes, o conjunto de geradores minimais e o conjunto de Apéry. A partir da definição do conjunto de Apéry definiremos as coordenadas de Kunz, definição central deste trabalho. Em seguida, definiremos o que são *gapsets* e filtrações de gapsets, relacionando um gapset ao seu respectivo semigrupo numérico.
- **Capítulo 2: Caracterização de Gapsets por sua respectiva filtração e pelas coordenadas de Kunz.** Neste capítulo faremos menção a um importante teorema baseado nos trabalhos de Eliahou e Fromentin, o qual descreve qual é o formato dos gapsets de multiplicidade  $m = 3$ . Em seguida faremos a releitura deste teorema na ótica das coordenadas de Kunz. Em continuidade mostramos a existência uma função injetiva  $f : \mathcal{F}(g, 3) \rightarrow \mathcal{F}(g + 1, 3)$  o que implica que a quantidade de semigrupos numéricos de gênero  $g + 1$  e multiplicidade  $m = 3$  é maior que a quantidade de semigrupos numéricos de gênero  $g$  e multiplicidade  $m = 3$ . Por fim, enunciaremos o teorema que descreve o formato dos gapsets de multiplicidade  $m = 4$  a partir das filtrações de gapsets demonstrando um caso dentre os mencionados e em seguida redemonstramos todos os casos deste teorema a partir das coordenadas de Kunz.
- **Capítulo 3: Árvore dos semigrupos por coordenadas de Kunz.** Neste capítulo apresentaremos o procedimento para a construção da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz, classificando cada uma das coordenadas para que com esta classificação se possa identificar a existência ou não de filhos e suas quantidades. Neste capítulo nos basearemos no trabalho de Brás-Amorós [4].
- **Capítulo 4: Sugestão de atividade para o Ensino Médio.** Neste capítulo, proporemos atividades para o Ensino Médio aplicando a teoria desenvolvida neste trabalho à luz da Nova Base Curricular Comum (BNCC). O foco das atividades é na unidade de conhecimento Números, em que neste trabalho ampliaremos e aprofundaremos conhecimentos sobre o conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ) e dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ). As atividades seguem sequência didática em que retomaremos com o estudante atividades que requeiram que este reconheça a qual

conjunto numérico pertence um número, o cálculo de mdc, sistemas de desigualdades com números inteiros até os níveis mais elevados que se quer reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma (conforme a BNCC na habilidade EM13MAT315) e utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou Matemática (conforme a BNCC na habilidade EM13MAT406).

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo de preliminares, vamos definir os semigrupos numéricos com suas principais invariantes e propriedades e em seguida definir o que são gapsets, mostrando que os invariantes do semigrupo numérico são naturalmente estendidos aos gapsets e por fim definir o que são as coordenadas de Kunz, o alicerce deste trabalho. A base desse capítulo são os trabalhos de Bernardini [1], Eliahou e Fromentin [6], García-Sánchez [9], Rosales *et al* [11].

### 1.1 Semigrupos Numéricos

Existem algumas formas de se definir os semigrupos numéricos e, por isso, escolhemos para este trabalho a definição de semigrupos numéricos por suas propriedades.

**Definição 1.1** *Considerando que  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , um semigrupo numérico  $S$  é um subconjunto de  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  que satisfaz as três seguintes propriedades:*

P1.  $0 \in S$ ;

P2.  $S$  é um conjunto fechado para a adição, ou seja, se  $x \in S$  e  $y \in S$ , então  $x+y \in S$ ;

P3. O conjunto  $G(S) := \mathbb{N}_0 \setminus S$  é finito.

Essa definição é equivalente a dizer que um semigrupo numérico  $S$  é um submonoide de  $(\mathbb{N}_0, +)$  em que  $\mathbb{N}_0 \setminus S$  é finito. Denotaremos por  $S^*$  o conjunto dos elementos não nulos de  $S$ , isto é  $S^* = S \setminus \{0\}$ .

Antes de apresentar o primeiro exemplo, vamos introduzir as seguintes notações:

- i. se  $a \in \mathbb{Z}$ , então denotaremos por  $\{a, \rightarrow\}$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{Z} : x \geq a\}$ .
- ii. se  $a$  e  $b$  são inteiros, então denotaremos por  $[a, b]$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$ .

- iii. se  $a \in \mathbb{N}$ , então denotamos por  $a\mathbb{N}$  o conjunto dos múltiplos positivos de  $a$ .
- iv. se  $a \in \mathbb{N}$  e  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{N}$ , então denotamos por  $a + A$  o conjunto  $\{a + n : n \in A\}$ .

**Exemplo 1.2** O conjunto  $S_1$  definido como:

$$S_1 = \{0, 3, 6, \rightarrow\}$$

é um exemplo de semigrupo numérico, pois:

- i.  $0 \in S_1$ ;
- ii.  $S_1$  é fechado para a adição, pois  $0 + 0, 0 + 3, 3 + 3 \in S_1$ . e para dois números  $a$  e  $b \in S_1$ , tais que  $b \geq 6$ , tem-se que  $a + b \in S_1$ , pois  $a + b \geq b \geq 6$ .
- iii.  $\mathbb{N}_0 \setminus S_1 = \{1, 2, 4, 5\}$  é finito.

Portanto,  $S_1$  é um semigrupo numérico.

**Exemplo 1.3** Considere o conjunto  $S_2$  definido como:

$$S_2 = \{0\} \cup \{g + 1, \rightarrow\}$$

com  $g \in \mathbb{N}$ . Note que  $S_2$  satisfaz as condições para ser semigrupo numérico, pois:

- i.  $0 \in S_2$ ;
- ii.  $S_2$  é fechado para a adição, pois para dois números  $a$  e  $b \in S_2$ , tais que  $b \geq g + 1$ , tem-se que  $a + b \in S_1$ , pois  $a + b \geq b \geq g + 1$ .
- iii.  $\mathbb{N}_0 \setminus S_2 = \{1, 2, \dots, g\}$  é finito.

Logo,  $S_2$  é um semigrupo numérico.

**Observação 1.4** Os semigrupos numéricos com as características apresentadas no Exemplo 1.3, que contêm o 0 e todos os naturais maiores que  $g$ , são chamados de semigrupos ordinários, em que tais semigrupos desempenham um importante papel neste trabalho. Tais semigrupos têm um destaque especial, pois ocupam uma posição destacada na estrutura da árvore dos semigrupos numéricos, tanto quando construída na ótica dos geradores minimais quanto na ótica das coordenadas de Kunz, objeto de estudo dos Capítulos 2 e 3 deste trabalho.

**Exemplo 1.5** *Seja o conjunto  $S_3$  definido por:*

$$S_3 = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2g - 2\} \cup \{2g, \rightarrow\}$$

com  $g \in \mathbb{N}$ . Note também que,  $S_3$  satisfaz as condições para ser semigrupo numérico, pois:

- i.  $0 \in S_3$ ;
- ii.  $S_3$  é fechado para a adição, pois para dois números  $a$  e  $b$  tais que  $b \geq 2g$ , tem-se que  $a + b \in S_3$ , pois  $a + b \geq b \geq 2g$ ; se  $a$  e  $b < 2g$ , temos que  $a$  e  $b$  são pares e, portanto,  $a + b$  é par e, então, pertence a  $S_3$ .
- iii.  $\mathbb{N}_0 \setminus S_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2g - 1\}$  é finito.

Logo,  $S_3$  é um semigrupo numérico.

**Observação 1.6** *Os semigrupos numéricos com as características apresentados no Exemplo 1.5, isto é, de não conter todos os naturais ímpares menores que um natural  $2g$ , são chamados de semigrupos hiperelípticos. Tais semigrupos têm um destaque especial, pois ocupam uma posição destacada na estrutura da árvore dos semigrupos numéricos, tanto quando construída na ótica dos geradores minimais quanto na ótica das coordenadas de Kunz, objeto de estudo do Capítulo 3 deste trabalho.*

A seguir serão definidas mais algumas invariantes dos semigrupos numéricos, as quais serão amplamente utilizadas ao longo deste trabalho, para semigrupos numéricos e para os gapsets.

**Definição 1.7** *Considere  $S$  um semigrupo numérico. A multiplicidade de  $S$  é seu menor elemento diferente de zero. O condutor, por sua vez, é o menor elemento pertencente a  $S$  tal que todos os números naturais maiores que ou iguais a ele pertencente a  $S$ . O número de Frobenius é o maior inteiro não pertencente à  $S$ . Para todo semigrupo numérico  $S$  tem-se que o conjunto  $G(S) := \mathbb{N}_0 \setminus S$  é finito, em que chamamos tal conjunto de conjunto das lacunas de  $S$ . Os elementos de  $G(S)$  são chamados de lacunas e os elementos de  $S$  de não-lacunas do semigrupo numérico. O número de elementos de  $G(S)$  é o gênero de  $S$ .*

**Definição 1.8** *Seja  $S$  um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  e condutor  $c$ . A profundidade, denotada por  $q$ , é definida por:*

$$q = \left\lfloor \frac{c}{m} \right\rfloor.$$

O exemplo a seguir permitirá ilustrar os invariantes de um semigrupo numérico definidas anteriormente.

**Exemplo 1.9** *Seja o semigrupo numérico  $S_1 = \{0, 3, 6, \rightarrow\}$ . Para  $S_1$ , temos:*

1. *A multiplicidade é  $m = 3$ ;*
2. *O condutor é  $c = 6$ ;*
3. *O número de Frobenius é  $F = 5$ ;*
4. *O gênero de  $g = 4$  e  $G(S_1) = \{1, 2, 4, 5\}$ ;*
5. *A profundidade é  $q = \lceil \frac{5}{3} \rceil = 2$ .*

A seguir, introduziremos uma importante notação, a qual tem sua relevância nos trabalhos de Bras-Amorós [4], em particular a importante conjectura que versa sobre os limites para a quantidade de semigrupos numéricos de gênero  $g$ . Retomaremos tal notação no Capítulo 2, quando compararemos as quantidades de semigrupos numéricos de gêneros  $g$  e  $g + 1$  quando estes têm multiplicidade  $m = 3$ .

**Definição 1.10** *Denotaremos por  $n_g$  a quantidade de semigrupos numéricos de gênero  $g$ .*

Bem definido o conceito de semigrupo numérico e algumas invariantes, vamos a seguir definir o conjunto de geradores de um semigrupo numérico, apresentar todo o arcabouço necessário para mostrar que um semigrupo é gerado por um conjunto finito de geradores, cujo objetivo é a construção da árvore dos semigrupos numéricos através dos seus geradores minimais.

**Definição 1.11** *Dizemos que um semigrupo numérico  $S$  é gerado pelo conjunto  $A$  se, dado  $s \in S$ , existem  $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{N}_0$  tais que  $s = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ , com  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ . Nesse caso, denotamos por  $S = \langle A \rangle$ .*

A partir da Definição 1.11, temos o conceito do conjunto de geradores  $A$  do semigrupo numérico  $S$ . O lema a seguir apresentará uma condição necessária e suficiente para que  $A$  gere um semigrupo numérico.

**Lema 1.12** *Seja  $A$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$ . Então  $\langle A \rangle$  é um semigrupo numérico se, e somente se  $\text{mdc}(A) = 1$ .*

**Demonstração:** Seja  $d = \text{mdc}(A)$ . Claramente, se  $k \in \langle A \rangle$ , então  $d \mid k$ . Como  $\langle A \rangle$  é um semigrupo numérico,  $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$  é finito e, portanto existe inteiro positivo  $k$  tal que  $d \mid k$  e  $d \mid k + 1$ , o que implica que  $d \mid (k + 1) - (k)$ , isto é,  $d \mid 1$  e isto só é possível se  $d = 1$ . Para mostrar a recíproca, basta provar que  $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$  é finito. Como  $\text{mdc}(A) = 1$ , existem inteiros  $z_1, z_2, \dots, z_n$  e  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  tais que  $z_1a_1 + \dots + z_na_n = 1$ . Sejam

$i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l \in \{1, 2, \dots, n\}$  tais que  $z_{i_p} \geq 0, \forall p \in z_{i_q} < 0, \forall q$ . Passando para o lado direito da igualdade os termos que possuem coeficiente negativo, obtemos:

$$z_{i_1}a_{i_1} + \dots + z_{i_k}a_{i_k} = 1 - z_{j_1}a_{j_1} - \dots - z_{j_l}a_{j_l}.$$

.

Seja  $k = -z_{j_1}a_{j_1} - \dots - z_{j_l}a_{j_l}$ . Note que  $k \in \langle A \rangle$  e  $k+1 = z_{i_1}a_{i_1} + \dots + z_{i_k}a_{i_k} \in \langle A \rangle$ .

Portanto, existe  $k \in \langle A \rangle$  tal que  $k+1 \in \langle A \rangle$ . Agora, vamos mostrar que se  $n \geq (k-1)k + (k-1)$ , então  $n \in \langle A \rangle$ . Sejam  $q$  e  $r$  inteiros tais que  $n = qk + r$ , com  $0 \leq r < k$  (em que a existência de  $q$  e  $r$  é assegurada pelo algoritmo de Euclides). Para  $n \geq (k-1)k + (k-1)$ , concluímos que  $q \geq k-1 \geq r$ . Daí  $n = kq + r - rk + rk = k(q-r) + rk = (k+1)r$ . Como  $(q-r) \in \mathbb{N}_0$  e  $r \in \mathbb{N}_0$  tem-se  $n \in \langle A \rangle$ . ■

A seguir, introduziremos o conjunto de Apéry, o qual auxilia a encontrar com facilidade e de maneira explícita o conjunto de geradores, além pavimentar o caminho para a definição das coordenadas de Kunz, as quais protagonizarão os resultados centrais dos Capítulos 2 e 3 deste trabalho.

**Definição 1.13** *Seja  $S$  um semigrupo numérico e  $n \in S^*$ . O conjunto de Apéry de  $S$  com relação a  $n$  é o conjunto  $\text{Ap}(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$ . Se  $m$  é a multiplicidade de  $S$ , então  $\text{Ap}(S) := \text{Ap}(S, m)$ .*

Note que para  $S = \mathbb{N}_0$  e  $n = 1$  temos que  $\text{Ap}(\mathbb{N}_0, 1) = \{0\}$ .

A partir da definição anterior, a proposição a seguir fornece um prático e simples procedimento que nos permite explicitar  $\text{Ap}(S, n)$ .

**Proposição 1.14** *Seja  $S$  um semigrupo numérico e  $n \in S$  com  $n \geq 2$ . Então  $\text{Ap}(S, n) = \{0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ , em que  $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$ , para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .*

**Demonstração:** Com efeito, seja  $s \in \text{Ap}(S, n)$ , assim:

- a. Se  $s \equiv 0 \pmod{n}$ , existe  $k \in \mathbb{N}_0$  tal que  $s = nk \in S$ . Como  $0 \in S$  e  $0 - n = -n \notin S$  e  $n(k-1) \in S, \forall k \in \mathbb{N}$ , daí,  $S = 0$ .
- b. Se  $s \equiv i \pmod{n}$ , para algum  $i \neq 0$ . Por absurdo, suponha que existe  $\tilde{s} \in \text{Ap}(S, n)$  tal que  $\tilde{s} \equiv i \pmod{n}$  e  $s \neq \tilde{s}$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $\tilde{s} > s$ . De  $s \equiv \tilde{s} \equiv i \pmod{n}$  segue que existem  $\tilde{q}, q \in \mathbb{Z}$  tais que:

$$s = nq + i \text{ e } \tilde{s} = n\tilde{q} + i.$$

Note que,  $\tilde{s} - s = n\tilde{q} + i - nq - i = n(\tilde{q} - q)$  e isso implica que  $\tilde{s} - n = s + n(\tilde{q} - q - 1) \in S$ , o que é absurdo, pois  $\tilde{s} \in \text{Ap}(S, n)$ . Portanto,  $s$  é único elemento congruente a  $i \pmod{n}$  em  $\text{Ap}(S, n)$  e é o menor elementos dessa classe de congruência que está em  $S$ .

Logo,  $\text{Ap}(S, n) \subseteq \{0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ , em que  $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$ . Agora, vamos mostrar que  $\{0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\} \subseteq \text{Ap}(S, n)$ , isto é, que  $0 \in \text{Ap}(S, n)$  e  $w_i \in \text{Ap}(S, n)$ . Note que  $0 - n = -n \notin S$ . Note também que  $w_i \equiv i \pmod{n}$  e  $w_i - n < w_i$  em que  $w_i - n \notin S$ , em decorrência da definição do conjunto de Apéry. Por fim, se  $k \equiv i \pmod{n}$ , com  $k \in S$  e  $k > w_i$ , então  $k - n \in S$ , isto é,  $k \notin \text{Ap}(S, n)$ . ■

Note que o conjunto de Apéry forma um sistema completo de resíduos módulo  $n$ . A proposição a seguir mostra que é possível construir um conjunto de geradores, o qual é finito, a partir do conjunto de Apéry.

**Proposição 1.15** *Sejam  $S$  um semigrupo numérico e  $n \in S^*$  tal que  $\text{Ap}(S, n) = \{0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ , em que  $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$ . Então  $S = \langle n, w_1, \dots, w_{n-1} \rangle$ .*

**Demonstração:** Seja  $s \in S$ . Se  $n \mid s$ , então existe  $a \in \mathbb{N}_0$  tal que  $s = an = an + 0w_1 + \dots + 0w_{n-1}$ . Logo  $s \in \langle n, w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \rangle$ . Se  $n \nmid s$ , então existe  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  tal que  $s = nk + i$ . Pela minimalidade de  $w_i$  existe  $k^* \in \mathbb{N}_0$  tal que  $s = w_i + k^*n = k^*n + 1 \cdot w_i + \sum_{j \neq i} 0 \dots w_j \in \langle n, w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \rangle$ . Por outro lado,  $n, w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in S$ , logo qualquer combinação desses elementos está em  $S$ . ■

## 1.2 Coordenadas de Kunz

A partir da definição do conjunto de Apéry de um semigrupo numérico, partimos para a definição das coordenadas de Kunz. As coordenadas de Kunz nortearão os resultados deste capítulo, em que verificaremos quando uma  $(m-1)$ -upla de inteiros pode ser associada a um semigrupo numérico.

**Definição 1.16** *Sejam  $S$  um semigrupo numérico e  $n \geq 2$  e  $n \in S$  tais que  $\text{Ap}(S, n) = \{0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ , em que  $w_i \equiv i \pmod{n}$ . As coordenadas de Kunz de  $S$  em  $n$  são dadas por  $\text{Kunz}(S, n) = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ , em que  $k_i = \frac{(w_i - i)}{n}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .*

*Se  $m$  é a multiplicidade de  $S$ , então  $\text{Kunz}(S) := \text{Kunz}(S, m)$ .*



**Observação 1.17** Representaremos  $\text{Kunz}(\mathbb{N}_0, 1)$  por  $()$ .

A partir da definição anterior, os exemplos a seguir permitirão encontrar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

**Exemplo 1.18** Considere o semigrupo numérico  $S_1 = \{0, 3, 6, \rightarrow\}$ . Temos que  $\text{Ap}(S_1) = \{0, 7, 8\}$  e suas coordenadas de Kunz são:

$$k_1 = \frac{7-1}{3} = 2$$

$$k_2 = \frac{8-2}{3} = 2$$

Logo, as coordenadas de Kunz deste semigrupo numérico são dadas por  $\text{Kunz}(S_1) = (2, 2)$ .

**Exemplo 1.19** Considere o semigrupo numérico  $S_2 = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$ . Temos que  $\text{Ap}(S_2) = \{0, 5, 7, 10\}$ , suas coordenadas de Kunz são:

$$k_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$k_2 = \frac{10-2}{4} = 2$$

$$k_3 = \frac{7-3}{4} = 1$$

Logo, as coordenadas de Kunz deste semigrupo numérico são dadas por  $\text{Kunz}(S_2) = (1, 2, 1)$ .

**Exemplo 1.20** Para o semigrupo numérico  $S_2 = \{0, 5, 7, \rightarrow\}$ , vamos determinar suas coordenadas de Kunz para  $n = 5$ . Note que:

- $11 \equiv 1 \pmod{5}$ ;
- $7 \equiv 2 \pmod{5}$ ;
- $8 \equiv 3 \pmod{5}$ ;
- $9 \equiv 4 \pmod{5}$ ;

Assim, neste caso, as coordenadas de  $\text{Kunz}(S_2, 5)$ , são:

$$k_1 = \frac{11-1}{5} = 2$$

$$k_2 = \frac{7-2}{5} = 1$$

$$k_3 = \frac{8-3}{5} = 1$$

$$k_4 = \frac{9-4}{5} = 1$$

Logo, as coordenadas de Kunz deste semigrupo numérico são dadas por  $\text{Kunz}(S_2, 5) = (2, 1, 1, 1)$ .

Bem definidas as coordenadas de Kunz, uma importante pergunta a se fazer é: sob quais condições uma  $(m-1)$ -upla de inteiros pode ser associada a um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  via coordenadas de Kunz? Os resultados a seguir responderão a esta pergunta para os casos de multiplicidade  $m = 3$ ,  $m = 4$  e, em seguida, o caso geral.

Caso 1: Seja  $S$  um semigrupo de multiplicidade  $m = 3$ .

**Proposição 1.21** *Seja  $K = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ . Para que  $K$  represente as coordenadas de Kunz de  $S$ , um semigrupo numérico de multiplicidade  $m = 3$ , as seguintes condições devem ser obedecidas:*

$$\begin{cases} 2k_2 + 1 \geq k_1 \\ 2k_1 \geq k_2 \end{cases}$$

**Demonstração:** Com efeito, para  $S$  de multiplicidade  $m = 3$ , temos que  $Ap(S) = \{0, 3k_1 + 1, 3k_2 + 2\}$ , com  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ , sendo  $(k_1, k_2)$  suas coordenadas de Kunz. Assim, pela definição de conjunto de Apéry, temos que  $3k_1 + 1$  é o menor elemento congruente a 1 módulo 3 pertencente a  $S$ . Também  $3k_2 + 2 + 3k_2 + 2 \equiv 1 \pmod{3}$  e  $3k_2 + 2 \in S$ . Daí:

$$\begin{aligned} 3k_2 + 2 + 3k_2 + 2 &\geq 3k_1 + 1 \\ 6k_2 + 4 &\geq 3k_1 + 1 \\ 2k_2 + 1 &\geq k_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Analogamente, temos que  $3k_2 + 2$  é o menor elemento congruente a 2 módulo 3 também,  $3k_1 + 1 + k_1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$  e  $3k_1 + 1 \in S$ . Daí:

$$\begin{aligned} 3k_1 + 1 + 3k_1 + 1 &\geq 3k_2 + 2 \\ 6k_1 + 2 &\geq 3k_2 + 2 \\ 2k_1 &\geq k_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Portanto, por (1.1) e (1.2), segue que para que  $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$  corresponda às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico de multiplicidade  $m = 3$ ,  $(k_1, k_2)$  deve satisfazer:

$$\begin{cases} 2k_2 + 1 \geq k_1 \\ 2k_1 \geq k_2 \end{cases}$$

■

Faremos agora a análise para semigrupos numéricos de multiplicidade 4.

**Proposição 1.22** *Seja  $K = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ . Para que  $K$  represente as coordenadas de Kunz de  $S$ , um semigrupo numérico de multiplicidade  $m = 4$ , as seguintes condições devem ser obedecidas:*

$$\begin{cases} 2k_1 \geq k_2 \\ k_2 + k_3 + 1 \geq k_1 \\ 2k_3 + 1 \geq k_2 \\ k_1 + k_2 + 1 \geq k_3 \end{cases}$$

**Demonstração:** Com efeito, para  $S$  de multiplicidade  $m = 4$ , temos que  $\text{Ap}(S) = \{0, 4k_1 + 1, 4k_2 + 2, 4k_3 + 3\}$ , com  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ , sendo  $(k_1, k_2, k_3)$  suas coordenadas de Kunz. Assim, pela definição de conjunto de Apéry, temos que  $4k_2 + 2$  é o menor elemento congruente a 2 módulo 4 pertencente a  $S$ . Também  $4k_1 + 1 + 4k_1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$  e  $4k_1 + 1 \in S$ . Daí:

$$\begin{aligned} 4k_1 + 1 + 4k_1 + 1 &\geq 4k_2 + 2 \\ 8k_1 &\geq 4k_2 \\ 2k_1 &\geq k_2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Analogamente, temos que  $4k_1 + 1$  é o menor elemento congruente a 1 módulo 4 de  $S$  e também  $4k_2 + 2 + 4k_3 + 3 \equiv 1 \pmod{4}$ . Daí:

$$\begin{aligned} 4k_2 + 2 + 4k_3 + 3 &\geq 4k_1 + 1 \\ 4k_2 + 4k_3 + 5 &\geq 4k_1 + 1 \\ k_2 + k_3 + 1 &\geq k_1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Novamente, temos que  $4k_2 + 2$  é o menor elemento congruente a 2 módulo 4 e também  $4k_3 + 3 + 4k_3 + 3 \equiv 2 \pmod{4}$ . Daí:

$$\begin{aligned} 4k_3 + 3 + 4k_3 + 3 &\geq 4k_2 + 2 \\ 8k_3 + 6 &\geq 4k_2 + 2 \end{aligned}$$

$$2k_3 + 1 \geq k_2 \quad (1.5)$$

E por fim, temos que  $4k_3 + 3$  é o menor elemento congruente a 3 módulo 4 de  $S$  e também  $4k_1 + 1 + 4k_2 + 2 \equiv 3 \pmod{4}$ . Daí:

$$\begin{aligned} 4k_1 + 1 + 4k_2 + 2 &\geq 4k_3 + 3 \\ 4k_1 + 4k_2 &\geq 4k_3 \\ k_1 + k_2 &\geq k_3 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Portanto, por (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6), para que um ponto de coordenadas inteiras  $(k_1, k_2, k_3)$  corresponda às coordenadas de Kunz, as quais estão associadas a um semi-grupo numérico de multiplicidade  $m = 4$ , elas devem satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} 2k_1 \geq k_2 \\ k_2 + k_3 + 1 \geq k_1 \\ 2k_3 + 1 \geq k_2 \\ k_1 + k_2 + 1 \geq k_3 \end{cases}$$

■

O teorema a seguir trará a generalização das Proposições 1.21 e 1.22 para um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$ .

**Teorema 1.23** *Seja  $K = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ . Para que  $K$  represente as coordenadas de Kunz de  $S$ , um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$ , as seguintes condições devem ser obedecidas:*

$$\begin{cases} k_i + k_j \geq k_{i+j}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ k_i + k_j + 1 \geq k_{i+j-m}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m \end{cases}$$

**Demonstração:**

**Caso 1:** Sejam  $i, j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  com  $i+j < m$ . Como  $mk_i + i$  e  $mk_j + j \in S$  e  $(mk_i + i) + (mk_j + j) \equiv i+j \pmod{m}$ , pela minimalidade de  $mk_{i+j} + (i+j)$  e  $mk_j + j$  constrói-se a seguinte inequação:

$$\begin{aligned} (mk_i + i) + (mk_j + j) &\geq mk_{i+j} + i + j \\ mk_i + mk_j + i + j &\geq mk_{i+j} + i + j \\ m(k_i + k_j) &\geq mk_{i+j} \\ k_i + k_j &\geq k_{i+j} \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Caso 2:** Para  $i, j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  como  $m < i + j < 2m$ , como  $mk_i + i$  e  $mk_j + j \in S$  e  $(mk_i + i) + (mk_j + j) \equiv i + j \equiv i + j - m \pmod{m}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} (mk_i + i) + (mk_j + j) &\geq mk_{i+j-m} + i + j - m \\ mk_i + mk_j + i + j + m &\geq mk_{i+j-m} + i + j \\ m(k_i + k_j + 1) &\geq mk_{i+j-m} \\ k_i + k_j + 1 &\geq k_{i+j-m} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Portanto, por (1.7) e (1.8), para que  $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$  corresponda às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  elas devem satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} k_i \in \mathbb{N}, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m-1\} \\ k_i + k_j \geq k_{i+j}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ k_i + k_j + 1 \geq k_{i+j-m}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m \end{cases}$$

■

**Corolário 1.24** *Seja  $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ , com  $m \in \mathbb{N}$  e  $k_i \in \{1, 2\}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . Então existe  $S$ , semigrupo numérico tal que  $\text{Kunz}(S) = (k_1, \dots, k_{m-1})$ .*

**Demonstração:** Para  $k_i \in \{1, 2\}$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  todas às condições do Teorema 1.23 são satisfeitas, uma vez que  $k_i + k_j \geq 2 \geq k_{i+j}$  e  $k_i + k_j + 1 \geq 3 \geq 2 \geq k_{i+j-m}$ .

■

Veremos que analisar um semigrupo numérico por suas coordenadas de Kunz possibilita uma imediata visualização das invariantes o que não é tão imediato quando a análise é feita à luz dos geradores minimais ou à luz do seu respectivo conjunto de lacunas (vide a próxima seção). Dito isso, seja  $S$  um semigrupo numérico com coordenadas de Kunz dadas por  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ . Assim, pelas coordenadas de Kunz, obtém-se de maneira imediata o gênero, a multiplicidade, a condutor, o número de Frobenius e a profundidade.

Uma análise imediata ao se observar as coordenadas de Kunz é a fácil obtenção do gênero do semigrupo numérico. O lema a seguir versa sobre como obter o gênero de um semigrupo numérico conhecendo as coordenadas de Kunz.

**Proposição 1.25** *Seja  $S$  um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  e com coordenadas de Kunz  $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ . Então o gênero de  $S$  é dado por:*

$$g(S) = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$$

**Demonstração:** Note que cada coordenada  $k_i$  de  $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$  está associada a um elemento  $w_i$  do conjunto de Apéry de  $S$ , em que  $w_i = mk_i + i \in S$ . Como  $s_i = mk_i + i$  é o menor elemento congruente a  $i$  módulo  $m$  que está em  $S$ , então existem  $k_i$  elementos, a saber,  $I_i = \{m + i, 2m + i, \dots, m(k_i - 1) + i\}$ , os quais não pertencem a  $S$ . Portanto, o gênero de  $S$  é dado por  $g(S) = \sum_{i=1}^{m-1} k_i = k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1}$ . ■

A seguir, vamos introduzir as definições a seguir, as quais nos serão úteis para analisar as características e invariantes das coordenadas de Kunz.

**Definição 1.26** *Seja  $S$  um semigrupo numérico tal que  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ . Definimos  $\alpha := \max\{i \in \{1, \dots, m-1\} : k_i \geq k_j, \forall j \in \{1, \dots, m-1\}\}$  e  $k_\alpha$  como a coordenada de Kunz na posição  $\alpha$ .*

Dessa forma,  $k_\alpha$  é a maior coordenada mais à direita e  $\alpha$ , com  $1 \leq \alpha \leq m-1$ , a posição de  $k_\alpha$ .

**Exemplo 1.27** *Vamos calcular  $\alpha$  e  $k_\alpha$  para todos os semigrupos numéricos de gênero de 1 a 4, a partir de suas coordenadas de Kunz.*

- Para (1), segue que  $\alpha = 1$  e  $k_\alpha = 1$ ;
- Para (1, 1), segue que  $\alpha = 2$  e  $k_\alpha = 1$ ;
- Para (2), segue que  $\alpha = 1$  e  $k_\alpha = 2$ ;
- Para (1, 1, 1), segue que  $\alpha = 3$  e  $k_\alpha = 1$ ;
- Para (2, 1), segue que  $\alpha = 1$  e  $k_\alpha = 2$ ;
- Para (1, 2), segue que  $\alpha = 2$  e  $k_\alpha = 2$ ;
- Para (1, 1, 1, 1), segue que  $\alpha = 4$  e  $k_\alpha = 1$ ;
- Para (2, 1, 1), segue que  $\alpha = 1$  e  $k_\alpha = 2$ ;
- Para (1, 2, 1), segue que  $\alpha = 2$  e  $k_\alpha = 2$ ;

- Para  $(1, 1, 2)$ , segue que  $\alpha = 3$  e  $k_\alpha = 2$ ;
- Para  $(3, 1)$ , segue que  $\alpha = 1$  e  $k_\alpha = 3$ ;
- Para  $(2, 2)$ , segue que  $\alpha = 2$  e  $k_\alpha = 2$ .

A partir das definições de  $\alpha$  e  $k_\alpha$  provaremos o próximo resultado, o qual nos permite obter uma fórmula fechada para se obter o número de Frobenius de um semigrupo numérico conhecidas as coordenadas de Kunz.

**Proposição 1.28** *Seja  $S$  um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  tal que  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ . Então o número de Frobenius de  $S$  é dado por  $F(S) = m(k_\alpha - 1) + \alpha$ .*

**Demonstração:** Com efeito, pela definição de  $\alpha$  e  $k_\alpha$  segue que  $mk_\alpha + \alpha = \max(\text{Ap}(S))$  e pela definição do conjunto de Apéry segue  $m(k_\alpha - 1) + \alpha \notin \text{Ap}(S)$  e mais do que isso,  $m(k_\alpha - 1) + \alpha = \max G(S) = F(S)$ . ■

**Exemplo 1.29** *Utilizaremos a Proposição 1.28 para obter o número de Frobenius para todos os semigrupos numéricos de gênero 4:*

Kunz( $S$ )	$g(S)$	$\alpha$	$k_\alpha$	$m(S)$	$F(S)$
$(1, 1, 1, 1)$	4	4	1	5	$5(1 - 1) + 4 = 4$
$(2, 1, 1)$	4	1	2	4	$4(2 - 1) + 1 = 5$
$(1, 2, 1)$	4	2	2	4	$4(2 - 1) + 2 = 6$
$(1, 1, 2)$	4	3	2	4	$4(2 - 1) + 3 = 7$
$(3, 1)$	4	1	3	3	$3(3 - 1) + 1 = 7$
$(2, 2)$	4	2	2	4	$3(2 - 1) + 2 = 5$
$(4)$	4	1	4	2	$2(4 - 1) + 1 = 7$

Tabela 1.1: Número de Frobenius dos semigrupos numéricos de gênero  $g = 4$

**Corolário 1.30** *Seja  $S$  um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  tal que  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ . Então o condutor  $c$  é dado por  $c(S) = m(k_\alpha - 1) + \alpha + 1$ .*

**Demonstração:** A demonstração segue imediatamente da definição do condutor de um semigrupo. ■

Finalizando a análise dos invariantes de um semigrupo numérico por suas coordenadas de Kunz, a proposição a seguir mostra como identificar a profundidade de um semigrupo numérico por suas respectivas coordenadas de Kunz.

**Proposição 1.31** *Seja  $S$  um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  tal que  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ , então a profundidade  $q$  de  $S$  é igual a  $k_\alpha$ .*

**Demonstração:** Da definição de profundidade temos que  $q(S) = \left\lceil \frac{c(S)}{m(S)} \right\rceil$ . Pelo Corolário 1.2 temos que  $c(S) = m(k_\alpha - 1) + \alpha + 1$ , assim  $q(S) = \left\lceil \frac{m(k_\alpha - 1) + (\alpha + 1)}{m} \right\rceil = (k_\alpha - 1) + \left\lceil \frac{\alpha + 1}{m} \right\rceil = (k_\alpha - 1) + 1 = k_\alpha$ . Na penúltima passagem usamos o fato que  $2 \leq \alpha + 1 \leq m$ . ■

### 1.3 Gapsets e filtrações de gapsets

Nesta seção vamos apresentar a definição e propriedades do conjunto de lacunas (gapset), o qual permite uma outra maneira de analisar um semigrupo numérico, pois seus invariantes são naturalmente os mesmos invariantes do semigrupo numérico correspondente e definiremos as filtrações de gapset, para a caracterização de um gapset por sua respectiva filtração.

**Definição 1.32** *Um gapset é um conjunto finito  $G \subset \mathbb{N}$  que satisfaz a seguinte propriedade: se  $z \in G$ , se  $z = x + y$  com  $x, y \in \mathbb{N}$ , então  $x \in G$  ou  $y \in G$ .*

**Lema 1.33** *Seja  $S$  um semigrupo numérico, então  $G = \mathbb{N} \setminus S$  é um gapset. Reciprocamente, seja  $G$  um gapset, então  $S = \mathbb{N}_0 \setminus G$  é um semigrupo numérico.*

**Demonstração:** De fato, se  $S$  é um semigrupo numérico e  $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ , então  $G \subset \mathbb{N}$  é finito. Assim, se  $z \notin S$  é um número natural (ou seja,  $z \in G$ ) e  $z = x + y$  com  $x$  e  $y$  inteiros não negativos, temos que ter que  $x \notin S$  ou  $y \notin S$ , já que  $S$  é fechado em relação à adição. Ou seja,  $x \in G$  ou  $y \in G$  e, portanto,  $G$  é um gapset. Reciprocamente, se  $G$  é um gapset, seja  $S = \mathbb{N}_0 \setminus G$ . Assim, temos que  $0 \notin G$ , então  $0 \in S$ . Para  $z \in S$ , pode-se escrever  $z = x + y$ , com  $x, y \in \mathbb{N}_0$ . Como  $z \notin G$ , então em decorrência da Definição 1.32, segue que  $x \notin G$  e  $y \notin G$ , o que implica que  $x \in S$  e  $y \in S$ , o que mostra o fechamento em  $S$ , logo  $S$  é um semigrupo numérico. ■

**Definição 1.34** *Seja  $G$  um gapset. A multiplicidade de  $G$  é o menor inteiro maior que zero tal que  $m \notin G$ . O condutor é o menor natural tal que após ele todo número não pertence a  $G$ . O número de Frobenius de  $G$  é dado pelo valor do maior elemento de  $G$ . O gênero de  $G$  é sua cardinalidade. Por fim, a profundidade  $q$  de  $G$  é dada por  $q = \left\lceil \frac{c}{m} \right\rceil$ .*



Note que, as invariantes (multiplicidade, número de Frobenius, condutor, gênero e profundidade) de um semigrupo numérico são naturalmente estendidas aos gapsets, o que permite o estudo de um semigrupo numérico a partir do seu respectivo gapset.

**Lema 1.35** *Seja  $G$  um gapset de multiplicidade  $m$ . Então:*

$$[1, m - 1] \subset G;$$

$$G \cap m\mathbb{N} = \emptyset.$$

**Demonstração:** De fato, como  $G$  tem multiplicidade  $m$ , segue que  $\{1, \dots, m - 1\} \subset G$  e pela definição de multiplicidade temos que  $m \notin G$ .

Agora, vamos provar que  $G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$ . Por absurdo, suponha que exista  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $km \in G$ . Note que  $km = (k - 1 + 1)m = (k - 1)m + m$ , então pela definição de gapset, segue que  $(k - 1)m \in G$ . Como  $(k - 1)m \in G$ , temos que  $(k - 1)m = (k - 2 + 1)m = (k - 2)m + m$ , então pela definição de gapset, segue que  $(k - 2)m \in G$ . Assim, procedendo uma quantidade finita de etapas análogas às anteriores chegar-se-á em  $(k - k + 1)m = (k - k)m + m = 0m + m$ , o que implica que  $0 \in G$ , absurdo. Logo  $km \notin G \forall k \in \mathbb{N}$ . ■

**Notação 1.36** *Seja  $G$  um gapset de multiplicidade  $m$ . Vamos denotar  $G_0 = [1, m - 1]$  e genericamente:*

$$G_i = G \cap [im + 1, (i + 1)m - 1],$$

com  $i \in \mathbb{N}_0$ .

**Proposição 1.37** *Seja  $G$  um gapset de multiplicidade  $m$  e profundidade  $q$ . Seja  $G_i$  como definido acima. Então:*

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1};$$

$$G_{i+1} \subset m + G_i.$$

para todo  $i \geq 0$  e  $G_{q-1} \neq \emptyset$ .

**Demonstração:** Com efeito, pelo Lema 1.35, provou-se que  $G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$ , o que implica que  $G$  é uma união disjunta dos  $G_i$ 's para todo  $i \geq 0$ . Seja  $c$  o condutor de  $G$ . Assim temos que  $G \subset [1, c - 1]$ . Sendo  $q$  a profundidade de  $G$ , segue que  $(q - 1)m < c \leq qm$ . Note que  $G_q = G \cap [qm + 1, (q + 1)m - 1]$  e como  $c \leq qm$ , concluímos que  $G_i = \emptyset$  para todo  $i \geq q$ . Além disso, para  $F$ , o número de Frobenius

de  $G$ , tem-se que  $F = c - 1$  e como  $F \in G$  e  $F \geq (q - 1)m + 1$ , concluímos que  $F \in G_{q-1}$  e, portanto,  $G_{q-1} \neq \emptyset$ .

Para mostrar que  $G_{i+1} \subset m + G_i$  para todo  $i \geq 0$  tome  $x \in G_{i+1}$ . Como  $x \in G_{i+1} = G \cap [(i + 1)m + 1, (i + 2)m - 1]$ , temos que:

$$x - m \in [im + 1, (i + 1)m - 1].$$

Note que, como  $x = m + (x - m)$ ,  $x \in G$  e  $m \notin G$ , tem-se que  $x - m \in G$  e, portanto,  $x - m \in G_i$ . ■

**Definição 1.38** *Seja  $G$  um gapset de multiplicidade  $m$  e profundidade  $q$ . A partição canônica de  $G$  é dada por  $G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$  com  $G_i = G \cap [im + 1, (i + 1)m - 1]$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$ .*

**Observação 1.39** *Representar  $G$  por sua partição canônica permite uma obtenção imediata da multiplicidade, do gênero e da profundidade, uma vez que:*

$$\begin{aligned} m &= \max(G_0) + 1, \\ g &= \sum_i |G_i|, \\ q &= \#\{i : G_i \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

**Definição 1.40** *Sejam  $G$  um gapset de profundidade  $q$  e  $G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$  a partição canônica de  $G$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, q - 1\}$  definimos:*

$$F_i = -im + G_i \tag{1.9}$$

Note que, a partir da definição de  $F_i$  (1.9), temos que

$$F_0 = [1, m - 1] \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_{q-1}.$$

**Definição 1.41** *Seja  $G$  um gapset de multiplicidade  $m$  e a partição canônica  $G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$ . A filtração de gapset de  $G$  é a sequência finita  $(F_0, F_1, \dots, F_{q-1})$  em que  $F_i = -im + G_i$ .*

Para ilustrar bem a definição da filtração de gapset e da partição canônica, vamos apresentar o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.42** *Considere o semigrupo numérico  $S = \langle 3, 7, 8 \rangle$ . Então o gapset correspondente é  $G = \{1, 2, 4, 5\}$ , com  $G_0 = \{1, 2\}$  e  $G_1 = \{4, 5\}$  cuja partição canônica é  $G = \{1, 2\} \cup \{4, 5\}$ .*

Assim, temos:

$$F_0 = G_0 = \{1, 2\}$$

$$F_1 = G_1 - 3 = \{1, 2\}.$$

Assim,  $F = (\{1, 2\}, \{1, 2\})$ . Para simplificar a notação, escrevemos  $F = (12)^2$ .

**Observação 1.43** *Note que os valores que aparecem em cada parte da filtração correspondem aos restos da divisão dos elementos de  $G$  pela multiplicidade  $m = 3$ , isto é:*

$$1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$5 \equiv 2 \pmod{3}.$$

**Observação 1.44** *Se  $m \in \mathbb{N}$ ,  $A \subset \mathbb{N}$  é um conjunto finito que admite uma partição  $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_t$  para algum  $t \in \mathbb{N}_0$  com  $A_i = A \cap [im + 1, (i + 1)m - 1]$  e  $A_{i+1} \subset m + A_i$ , então chamaremos a sequência finita  $(F_0, F_1, \dots, F_t)$ , em que  $F_i = -im + A_i$ , de filtração de  $A$ . Em particular, se  $G$  é gapset, então a filtração de  $G$  coincide com a filtração de gapset de  $G$ .*

O exemplo a seguir permitirá ilustrar bem os conceitos apresentados neste capítulo.

**Exemplo 1.45** *Seja o semigrupo numérico  $S = \langle 4, 6, 7, 9 \rangle$ . Então o gapset correspondente é  $G = \{1, 2, 3, 5\}$ , assim:*

1. *A multiplicidade é  $m = 4$ ;*
2. *O condutor é  $c = 6$ ;*
3. *O número de Frobenius é  $F = 5$ ;*
4. *O gênero é  $g = 4$ ;*
5. *A profundidade é  $q = \left\lceil \frac{6}{4} \right\rceil = 2$ .*
6. *Como  $S$  é gerado por  $A = \{4, 6, 7, 9\}$  tais elementos correspondem aos geradores minimais de  $S$ , então sua dimensão é  $e = 4$ ;*
7. *O conjunto de Apéry é  $\text{Ap}(S, 4) = \{0, 6, 7, 9\}$ ;*

8. As coordenadas de Kunz de  $S$  são dadas por  $\text{Kunz}(S) = (2, 1, 1)$ , pois:

$$k_1 = \frac{9-1}{4} = 2$$

$$k_2 = \frac{6-2}{4} = 1$$

$$k_3 = \frac{7-3}{4} = 1.$$

9. A partição canônica é  $G = \{1, 2, 3\} \cup \{5\}$

10. A filtração de  $G$  é dada por  $F = (123)(1)$ , pois:

$$1 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$2 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$3 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$5 \equiv 1 \pmod{4}.$$

## Capítulo 2

# Caracterização de Gapsets por sua respectiva filtração e pelas coordenadas de Kunz

Neste capítulo apresentamos inicialmente como é caracterizado um gapset de multiplicidade  $m = 3$  ou  $m = 4$ , pela sua respectiva filtração, fazendo isto baseado no trabalho Eliahou e Fromentin [7]. Analisar o gapset por sua respectiva filtração permite de maneira imediata visualizar suas invariantes e características. Em seguida, far-se-á uma releitura do resultado obtido dos gapsets de multiplicidades  $m = 3$  e  $m = 4$  na ótica das coordenadas de Kunz.

### 2.1 As filtrações de multiplicidade $m = 3$

As filtrações de gapset de multiplicidade  $m = 3$  são do tipo  $(F_0, F_1, \dots, F_k)$ , em que  $\{1, 2\} = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots \supseteq F_k$ . Para gapsets de multiplicidade  $m = 3$ , suas filtrações de gapsets são dos seguintes formatos:

$$(i) (12)^r(1)^s = \underbrace{(12)(12) \dots (12)}_r \underbrace{(1)(1) \dots (1)}_s.$$

$$(ii) (12)^r(2)^s = \underbrace{(12)(12) \dots (12)}_r \underbrace{(2)(2) \dots (2)}_s.$$

em que  $r \geq 1$  e  $s \geq 0$ , para ambos casos.

Todavia, uma filtração do tipo (i) ou (ii) não é necessariamente uma filtração de gapset. Diante do exposto estamos interessados em encontrar condições sob  $r$  e  $s$  para que de fato tais formatos de filtração correspondam à filtrações de gapsets.

**Proposição 2.1** *Sejam  $F_A = (12)^r(1)^s$  e  $F_B = (12)^r(2)^s$ , filtrações dos gapsets  $G_A$  e  $G_B$ , respectivamente. Então:*

1.  $q(G_A) = q(G_B) = r + s$ ;
2.  $g(G_A) = g(G_B) = 2r + s$ .

**Demonstração:** Item (1). Para  $G_A$  descrito em termos da sua partição canônica, temos que a quantidade de partes na filtração coincide com a sua profundidade  $q$ , pela definição de partição canônica. Por outro lado, ao se escrever  $F_A = (12)^r(1)^s$  temos um total de  $r + s$  partes, portanto  $r + s = q$ .

Item (2). Com efeito, para  $F_A = (12)^r(1)^s$  a filtração do gapset  $G_A$ , pode-se reescrever  $G_A$  em termos de sua partição canônica, em que  $G_A = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$ , em que  $g(G_A) = \sum_i |G_i|$ . Note que,  $|G_i| = 2$ , para  $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  e  $|G_i| = 1$ , para  $i \in \{r, r+1, \dots, r+s-1\}$ , assim:

$$g(G_A) = \sum_i |G_i| = \sum_{i=0}^{r-1} |G_i| + \sum_{i=r}^{r+s-1} |G_i| = \sum_{i=0}^{r-1} 2 + \sum_{i=r}^{r+s-1} 1 = 2r + s.$$

De modo análogo, se prova (1) e (2) para  $G_B$ .

■

O teorema a seguir mostrará quando  $(12)^r(1)^s$  e  $(12)^r(2)^s$  representam de fato filtrações de gapset de multiplicidade  $m = 3$ .

**Teorema 2.2** *As filtrações de gapsets de multiplicidade  $m = 3$  são dos seguintes formatos:*

1.  $(12)^r(1)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow 0 \leq s \leq r + 1$  e  $r \geq 1$ ;
2.  $(12)^r(2)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow 0 \leq s \leq r$  e  $r \geq 1$ .

**Demonstração:** Começando pelo caso  $F = (12)^r(2)^s$ , temos que:

$$F_0 = \dots = F_{r-1} = \{1, 2\};$$

$$F_r = \dots = F_{r+s-1} = \{2\}.$$

Como visto no Capítulo 1, cada gapset pode ser unicamente determinado por sua respectiva filtração. Tem-se que  $G_i = 3i + F_i$ , para todo  $i$  e escreva:

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{r+s-1}.$$

Agora, vamos verificar sob quais condições  $G$  é gapset:

Note que, por construção,  $G$  é finito e  $F$  é filtração de gapset se, e somente se,  $G$  é gapset. Note também que  $G$  dado tem as seguintes propriedades:

$$3\mathbb{N} \cap G = \emptyset$$

$$3i + 1 \in G \Leftrightarrow i \leq r - 1;$$

$$3j + 2 \in G \Leftrightarrow j \leq r + s - 1;$$

em que tais propriedades decorrem de  $G_i = 3i + F_i$  e da construção de  $G$ .

Vamos verificar sob quais condições, tem-se que  $G$  é gapset:

A. Seja  $3i + 1 \in G$ , isto é,  $i \in [0, r - 1]$  e escreva  $3i + 1 = a + b$  com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daí há duas opções:

- i  $a \equiv 1 \pmod{3}$  e  $b \equiv 0 \pmod{3}$ , o que implica que  $a + b \equiv 1 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3x + 1, 3(i - x))$ , com  $0 \leq x \leq i - 1$ . Note que para este caso,  $b \notin G$  e  $a \in G$ , uma vez que  $i \leq r - 1$ ;
- ii  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$  o que implica que  $a + b \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3y + 2, 3(i - y - 1) + 2)$ , com  $0 \leq y \leq i - 1$ . Note que para este caso,  $a \in G$  uma vez que  $i \leq r - 1 \leq r + s - 1$ .

B. Seja  $3j + 2 \in G$ , isto é,  $j \in [0, r + s - 1]$  e escreva  $3j + 2 = a + b$  com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daí há duas opções:

- i  $a \equiv 2 \pmod{3}$  e  $b \equiv 0 \pmod{3}$ , o que implica que  $a + b \equiv 2 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3x + 2, 3(j - x))$ , com  $0 \leq x \leq j - 1$ . Note que para este caso,  $b \notin G$  e  $a \in G$ , uma vez que  $j \leq r + s - 1$ ;
- ii  $a \equiv b \equiv 1 \pmod{3}$  o que implica que  $a + b \equiv 2 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3y + 1, 3(j - y) + 1)$ , com  $0 \leq y \leq j$ . Note que  $3i + 1 \in G$  se, e somente se,  $i \leq r - 1$ , como visto anteriormente. Assim, para que  $a, b \notin G$  devemos ter  $y \geq r$  e  $j - y \geq r$  e isto ocorre quando se toma  $j \geq 2r$ . Por hipótese,  $j \leq r + s - 1$  donde conclui-se a desigualdade  $s \geq r + 1$ . Assim concluímos que  $a \notin G$  e  $b \notin G$  se, e somente se,  $s \geq r + 1$ . Portanto se  $s \leq r$ , então  $a \in G$  ou  $b \in G$ .

Portanto,  $F = (12)^r(2)^s$  é filtração de gapset se, e somente se,  $0 \leq s \leq r$ .

Agora, vamos provar o caso  $F = (12)^r(1)^s$  com argumentos semelhantes ao caso anterior. Para este caso, temos que:

$$F_0 = \dots = F_{r-1} = \{1, 2\},$$

$$F_r = \dots = F_{r+s-1} = \{1\}.$$

Como cada gapset pode ser unicamente determinado por sua respectiva filtração, para  $m = 3$ , tem-se que  $G_i = 3i + F_i$ , para todo  $i$  e escreva:

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{r+s-1}.$$

Note que, por construção,  $G$  é finito e  $F$  é filtração de gapset se, e somente se,  $G$  é gapset. Note também que  $G$  dado tem as seguintes propriedades:

$$3\mathbb{N} \cap G = \emptyset$$

$$3i + 1 \in G \Leftrightarrow i \leq r + s - 1;$$

$$3j + 2 \in G \Leftrightarrow j \leq r - 1;$$

em que tais propriedades decorrem de  $G_i = 3i + F_i$  e da construção de  $G$ .

Vamos verificar sob quais condições, tem-se que  $G$  é gapset.

A. Seja  $3j + 2 \in G$ , isto é,  $j \in [0, r - 1]$  e escreva  $3j + 2 = a + b$  com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daí há duas opções:

- i  $a \equiv 2 \pmod{3}$  e  $b \equiv 0 \pmod{3}$ , o que implica que  $a + b \equiv 2 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3x + 2, 3(j - x))$ , com  $0 \leq x \leq j - 1$ . Note que para este caso,  $b \notin G$  e  $a \in G$ , uma vez que  $j \leq r - 1$ ;
- ii  $a \equiv b \equiv 1 \pmod{3}$  o que implica que  $a + b \equiv 2 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3y + 1, 3(j - y) + 1)$ , com  $0 \leq y \leq j$ . Note que para este caso,  $a, b \in G$  uma vez que  $y \leq j \leq r - 1 \leq r + s - 1$ .

B. Seja  $3i + 1 \in G$ , isto é,  $i \in [0, r + s - 1]$  e escreva  $3i + 1 = a + b$  com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daí há duas opções:

- i  $a \equiv 1 \pmod{3}$  e  $b \equiv 0 \pmod{3}$ , o que implica que  $a + b \equiv 1 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3x + 1, 3(i - x))$ , com  $0 \leq x \leq i - 1$ . Note que para este caso,  $b \notin G$  e  $a \in G$  se  $x \leq i$ , uma vez que  $i \leq r + s - 1$ ;
- ii  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$  o que implica que  $a + b \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (3y + 2, 3(i - y - 1) + 2)$ , com  $0 \leq y \leq i - 1$ . Note que,  $3j + 2 \in G$  se, e somente se,  $j \leq r - 1$ , como visto anteriormente. Assim, para que  $a, b \notin G$  devemos ter  $y \geq r$  e  $i - y - 1 \geq r$  e isto ocorre quando se toma  $i \geq 2r + 1$ . Por hipótese,  $i \leq r + s - 1$  donde conclui-se a desigualdade  $s \geq r + 2$ . Assim, concluímos que  $a \notin G$  e  $b \notin G$  se, e somente se,  $s \geq r + 2$ . Portanto, se para  $s \leq r + 1$ ,  $a \in G$  ou  $b \in G$ .



Portanto,  $F = (12)^r(1)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow G$  é gapset  $\Leftrightarrow 0 \leq s \leq r + 1$ .

**Exemplo 2.3** *Seja  $G = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16\}$ . Note que:*

$$1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv 10 \equiv 13 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2 \equiv 5 \equiv 8 \equiv 2 \pmod{3}$$

*Assim, a filtração associada é  $F = (12)^3(1)^3$ , com  $r = s = 3$ . Pelo Teorema 2.2,  $F$  é filtração de gapset o que implica que  $G$  é gapset.*

**Exemplo 2.4** *Seja  $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 11, 14\}$ . Note que:*

$$1 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2 \equiv 5 \equiv 8 \equiv 11 \equiv 14 \equiv 2 \pmod{3}$$

*Assim, a filtração associada é  $F = (12)^2(2)^3$ , com  $r = 2$  e  $s = 3$ . Pelo Teorema 2.2,  $F$  não é filtração de gapset o que implica que  $A$  não é gapset.*

## 2.2 As filtrações de multiplicidade $m = 3$ por coordenadas de Kunz

Nesta seção faremos releitura do Teorema 2.2, obtido no trabalho de Eliahou e Fromentin [6] para gapsets de multiplicidade  $m = 3$ , demonstrando-os de maneira alternativa a partir das coordenadas de Kunz de um gapset.

**Proposição 2.5** *Sejam  $F_1 = (12)^r(1)^s$  e  $F_2 = (12)^r(2)^s$  as filtrações dos gapsets  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Então  $\text{Kunz}(G_1) = (r + s, r)$  e  $\text{Kunz}(G_2) = (r, r + s)$ .*

**Demonstração:** Com efeito, para  $F_1 = (12)^r(1)^s$ , temos que existem  $r + s$  elementos em  $G$ , tais que são congruentes a 1 (mod 3). Analogamente, existem  $r$  elementos em  $G_1$ , que são congruentes a 2 (mod 3). Para  $(k_1, k_2)$  as coordenadas de Kunz de  $G_1$ , segue da definição que  $k_1$  corresponde à quantidade de elementos de  $G_1$  congruentes a 1 módulo 3, assim  $k_1 = r + s$ ;  $k_2$  corresponde à quantidade de elementos de  $G_1$  congruentes a 2 módulo 3, assim temos que  $k_2 = r$ . Portanto,  $(k_1, k_2) = (r + s, r)$ . O caso  $F_2 = (12)^r(2)^s$  se demonstra de maneira análoga.

■

Agora, vamos redemonstrar o Teorema 2.2 aplicando as coordenadas de Kunz de  $G$ .

**Demonstração:** Como existem duas possibilidades para as filtrações de gapset de multiplicidade  $m = 3$ , a demonstração será dividida em dois casos:

**Caso 1:**  $F = (12)^r(1)^s$

Seja  $G$  o gapset cuja filtração é  $F$ . Pela Proposição 2.5,  $\text{Kunz}(G) = (r + s, r)$ . Aplicando a Proposição 1.21, temos:

$$2(r + s) \geq r, \text{ isto é, } r + 2s \geq 0;$$

$$2r + 1 \geq r + s, \text{ isto é, } r + 1 \geq s.$$

A primeira desigualdade é verdadeira para todo  $r, s \geq 0$ , portanto  $F = (12)^r(1)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow s \leq r + 1$ .

**Caso 2:**  $F = (12)^r(2)^s$

Seja  $G$  o gapset cuja filtração é  $F$ . Pela Proposição 2.5,  $\text{Kunz}(G) = (r, r + s)$ . Aplicando a Proposição 1.21, temos:

$$2(r + s) + 1 \geq r, \text{ isto é, } r + 2s + 1 \geq 0;$$

$$2r \geq r + s, \text{ isto é, } r \geq s.$$

A primeira desigualdade é verdadeira para todo  $r, s \geq 0$ , portanto  $F = (12)^r(2)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow s \leq r$ .

Logo, dos casos 1 e 2 conclui-se que  $F$  é filtração de gapset se, e somente se,  $\text{Kunz}(F)$  é coordenada de Kunz de gapset se, e somente se, satisfaz as desigualdades:

1.  $(12)^r(1)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow 0 \leq s \leq r + 1$  e  $r \geq 1$ ;
2.  $(12)^r(2)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow 0 \leq s \leq r$  e  $r \geq 1$ .

■

A seguir, vamos exemplificar como aplicar o Teorema 2.2 à luz das coordenadas de Kunz para verificar se  $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$  correspondem às coordenadas de um gapset.

**Exemplo 2.6** *Vamos verificar se  $F = (12)^3(1)^3$  corresponde a um gapset. Note que, para  $(6, 3) = (k_1, k_2)$ , temos que  $k_1 > k_2$ , assim se  $(6, 3)$  representa um gapset, então ele é da forma  $F = (12)^r(1)^s$ , assim:*

$$(6, 3) = (k_1, k_2) = (r + s, r) \Rightarrow r = s = 3$$

Temos que  $s = 3 \leq r + 1 = 4$ , portanto de acordo com o Teorema 2.2, existe um gapset  $G$  tal que  $\text{Kunz}(G) = (6, 3)$ .

**Exemplo 2.7** Vamos verificar se a filtração  $F = (12)^3(1)^3$  é uma filtração de gapset. Note que, para  $(2, 5) = (k_1, k_2)$ , temos que  $k_2 > k_1$ , assim se  $(2, 5)$  representa um gapset, então ele é da forma  $F = (12)^r(2)^s$ , assim:

$$(2, 5) = (k_1, k_2) = (r, r + s) \Rightarrow r = 2 \text{ e } s = 3$$

Temos que  $s = 3 > r = 2$ , portanto de acordo com o Teorema 2.2, as coordenadas  $(2, 5)$  não representam um gapset.

## 2.3 O comportamento da quantidade de gapsets de gênero $g$ e multiplicidade $m = 3$

O Teorema a seguir vai responder a seguinte pergunta: o que acontece ao gapset de multiplicidade  $m = 3$  e gênero  $g$  ao se acrescentar o 1 ou o 2 na filtração de posição  $r + 1$  a partir da sua partição canônica? Isto é, tal conjunto, agora com  $g + 1$  elementos continua sendo um gapset? Ou sob quais condições esse novo conjunto é gapset?

Antes de enunciarmos o teorema, vamos introduzir a seguinte definição:

**Definição 2.8** Definimos  $\mathcal{F}(g, m)$  o conjunto das filtrações de gapset de gênero  $g$  e multiplicidade  $m$  e  $n_{g,m} = |\mathcal{F}(g, m)|$ .

**Teorema 2.9** Para todo  $g \geq 1$ , existe uma função injetiva  $f : \mathcal{F}(g, 3) \rightarrow \mathcal{F}(g + 1, 3)$ .

**Demonstração:** Note que  $\mathcal{F}(g, 3) = \emptyset$  para  $g \leq 1$ . Assim, tomemos  $g \geq 2$ . Vamos construir a função  $f_1$  que acrescenta o 1 na posição  $r + 1$  da filtração  $F$ , isto é:

$$\begin{aligned} f_1((12)^r) &= (12)^r(1) \\ f_1((12)^r(1)^s) &= (12)^r(1)^{s+1} \\ f_1((12)^r(2)^s) &= (12)^{r+1}(2)^{s-1} \end{aligned}$$

Nosso objetivo é verificar quais imagens de  $F \in \mathcal{F}(g, 3)$  por  $f_1$  pertencem a  $\mathcal{F}(g + 1, 3)$ , os quais são gapsets de gênero  $g + 1$  e multiplicidade 3. Assim, vamos aplicar o Teorema 2.2 em cada caso.

- i. Se  $F = (12)^r \in \mathcal{F}(g, 3)$  e então  $f_1(F) = (12)^r(1)^1 \in \mathcal{F}(g+1, 3)$ , pois  $1 \leq r+1$ , uma vez que  $r \geq 1$ ;
- ii. Se  $F = (12)^r(1)^s \in \mathcal{F}(g, 3)$ , temos  $0 \leq s \leq r+1$  e então  $f_1(F) = (12)^r(1)^{s+1} \in \mathcal{F}(g+1, 3)$  se, e somente se  $s \leq r$ ;
- iii. Se  $F = (12)^r(2)^s \in \mathcal{F}(g, 3)$ , temos  $0 \leq s \leq r$  e então  $f_1(F) = (12)^{r+1}(1)^{s-1} \in \mathcal{F}(g+1, 3)$ , para quaisquer  $r, s$ , pois se tem  $0 \leq s-1 \leq r+1$ .

Note que, em (i), (ii) e (iii), temos que  $g = 2r + s$ , com  $r \geq 1$  e  $s \geq 0$ . Note também que o único caso em que  $F \in \mathcal{F}(g, 3)$  e  $f_1(F) \notin \mathcal{F}(g+1, 3)$  ocorre quando  $F = (12)^r(1)^s$  quando se toma  $s = r+1$ . Assim, para  $s = r+1$ , temos  $F = (12)^r(1)^s = (12)^r(1)^{r+1}$ , cujo gênero é  $g = 3r + 1$ . Portanto, exceto para as filtrações  $F = (12)^r(1)^s \in \mathcal{F}(g, 3)$  tais que  $g \equiv 1 \pmod{3}$  garante-se que  $f_1(F) \in \mathcal{F}(g+1, 3)$ . Portanto,  $f_1 : \mathcal{F}(g, 3) \rightarrow \mathcal{F}(g+1, 3)$  está bem definida, desde que se tome  $g \not\equiv 1 \pmod{3}$  para  $F = (12)^r(1)^s$ .

Agora, vamos provar que  $f_1$  é injetiva.

- i. Se  $f_1((12)^r) = f_1((12)^k)$ , então  $(12)^r(1) = (12)^k(1)$  e isto implica que  $r = k$ ;
- ii. Se  $f_1((12)^r(1)^s) = f_1((12)^k(1)^t)$ , então  $(12)^r(1)^{s+1} = (12)^k(1)^{t+1}$  e pela definição de  $f_1$  o elemento 1 foi acrescentado na posição  $r+1$  da filtração  $F$ , assim temos que  $(12)^r = (12)^k$  o que implica que  $r = k$ . De  $r = k$  segue que  $s+1 = t+1$  e isto implica que  $s = t$ ;
- iii. Se  $f_1((12)^r(2)^s) = f_1((12)^k(2)^t)$ , então  $(12)^{r+1}(2)^{s-1} = (12)^{k+1}(2)^{t-1}$  e pela definição de  $f_1$  o elemento 1 foi acrescentado na posição  $r+1$  da filtração  $F$ , assim temos que  $(12)^{r+1} = (12)^{k+1}$  o que implica que  $r+1 = k+1$ , portanto  $r = k$ . De  $r = k$  segue que  $s-1 = t-1$  e isto implica que  $s = t$ .

Portanto, por (i), (ii) e (iii)  $f_1$  é injetiva.

Analogamente, vamos construir a função  $f_2(F)$  que acrescenta o 2 na filtração de posição  $r+1$  de  $F$ , isto é:

$$\begin{aligned} f_2((12))^r &= (12)^r(2) \\ f_2((12)^r(1)^s) &= (12)^{r+1}(1)^{s-1} \\ f_2((12)^r(2)^s) &= (12)^r(2)^{s+1} \end{aligned}$$

Novamente, nosso objetivo é verificar quais imagens de  $F \in \mathcal{F}(g, 3)$  por  $f_2$  pertencem a  $\mathcal{F}(g+1, 3)$ , os quais são gapsets de gênero  $g+1$  e multiplicidade. Aplicando o Teorema 2.2 em cada caso:

- i. Se  $F = (12)^r \in \mathcal{F}(g, 3)$ , então  $f_2(F) = (12)^r(2)^1 \in \mathcal{F}(g + 1, 3)$ , uma vez que  $r \geq 1$ ;
- ii. Se  $F = (12)^r(1)^s \in \mathcal{F}(g, 3)$ , temos  $0 \leq s \leq r + 1$  e então  $f_2(F) = (12)^{r+1}(1)^{s-1} \in \mathcal{F}(g + 1, 3)$ , para todos  $r$  e  $s$ , pois se tem  $0 \leq s - 1 \leq r + 1$ ;
- iii. Se  $F = (12)^r(2)^s \in \mathcal{F}(g, 3)$ , temos  $0 \leq s \leq r$  e então  $f_2(F) = (12)^r(2)^{s+1} \in \mathcal{F}(g + 1, 3)$  se, e somente se  $s \leq r - 1$ .

Note que, por (i), (ii) e (iii), temos que  $g = 2r + s$ , com  $r \geq 1$  e  $s \geq 0$ . Note também que o único caso em que  $F \in \mathcal{F}(g, 3)$  e  $f_2(F) \notin \mathcal{F}(g + 1, 3)$  ocorre quando  $F = (12)^r(2)^s$  quando se toma  $s = r$ . Assim, para  $s = r$ , temos  $F = (12)^r(2)^s = (12)^r(2)^r$ , cujo gênero é  $g = 3r$ . Portanto, exceto para  $F = (12)^r(2)^s \in \mathcal{F}(g, 3)$  tais que  $g \equiv 0 \pmod{3}$  garante-se que  $f_2(F) \in \mathcal{F}(g + 1, 3)$ . Portanto,  $f_2 : \mathcal{F}(g, 3) \rightarrow \mathcal{F}(g + 1, 3)$  é bem definida, desde que se tome  $g \not\equiv 0 \pmod{3}$  para  $F = (12)^r(2)^s$ .

Agora, vamos provar que  $f_2$  é injetiva.

- i. Se  $f_2((12)^r) = f_2((12)^k)$ , então  $(12)^r(2) = (12)^k(2)$  e isto implica que  $r = k$ ;
- ii. Se  $f_2((12)^r(1)^s) = f_2((12)^k(1)^t)$ , então  $(12)^{r+1}(2)^{s-1} = (12)^{k+1}(2)^{t-1}$  e pela definição de  $f_2$  o elemento 2 foi acrescentado na posição  $r + 1$  da filtração  $F$ , assim temos que  $(12)^{r+1} = (12)^{k+1}$  o que implica que  $r = k$ . De  $r = k$  segue que  $s - 1 = t - 1$  e isto implica que  $s = t$ ;
- iii. Se  $f_2((12)^r(2)^s) = f_2((12)^k(2)^t)$ , então  $(12)^r(2)^{s+1} = (12)^k(2)^{t+1}$  e pela definição de  $f_2$  o elemento 2 foi acrescentado na posição  $r + 1$  da filtração  $F$ , assim temos que  $(12)^r = (12)^k$  o que implica que  $r = k$ . De  $r = k$  segue que  $s + 1 = t + 1$  e isto implica que  $s = t$ .

Portanto, por (i), (ii) e (iii)  $f_2$  é injetiva.

Portanto, temos que  $f : \mathcal{F}(g, 3) \rightarrow \mathcal{F}(g + 1, 3)$  está bem definida e é injetiva, desde que se tome  $f = f_1$ , com  $g \not\equiv 1 \pmod{3}$  para  $F = (12)^r(1)^s$  e  $f = f_2$ , com  $g \not\equiv 0 \pmod{3}$  para  $F = (12)^r(2)^s$ .

■

**Corolário 2.10** *Se  $g \in \mathbb{N}_0$ , então  $n_{g+1,3} \geq n_{g,3}$ .*

**Demonstração:** Se  $g \in \mathbb{N}_0$ , então  $n_{g+1,3} = |\mathcal{F}(g + 1, 3)| \geq n_{g,3} = |\mathcal{F}(g, 3)|$ .

■

## 2.4 As filtrações de multiplicidade $m = 4$

Nesta seção faremos de maneira breve a versão do Teorema 2.2 à luz dos trabalhos de Eliahou e Fromentin [7] para gapsets de multiplicidade  $m = 4$ .

As filtrações de gapset de multiplicidade  $m = 4$  são do tipo  $(F_0, F_1, \dots, F_k)$ , em que  $\{1, 2, 3\} = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots \supseteq F_k$ . Para gapsets de multiplicidade  $m = 4$ , suas filtrações de gapsets são dos seguintes formatos:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad (123)^r(23)^s(3)^t &= \underbrace{(123)(123)\dots(123)}_r \underbrace{(23)(23)\dots(23)}_s \underbrace{(3)(3)\dots(3)}_t; \\
 \text{(ii)} \quad (123)^r(23)^s(2)^t &= \underbrace{(123)(123)\dots(123)}_r \underbrace{(23)(23)\dots(23)}_s \underbrace{(2)(2)\dots(2)}_t; \\
 \text{(iii)} \quad (123)^r(13)^s(3)^t &= \underbrace{(123)(123)\dots(123)}_r \underbrace{(13)(13)\dots(13)}_s \underbrace{(3)(3)\dots(3)}_t; \\
 \text{(iv)} \quad (123)^r(13)^s(1)^t &= \underbrace{(123)(123)\dots(123)}_r \underbrace{(13)(13)\dots(13)}_s \underbrace{(1)(1)\dots(1)}_t; \\
 \text{(v)} \quad (123)^r(12)^s(2)^t &= \underbrace{(123)(123)\dots(123)}_r \underbrace{(12)(12)\dots(12)}_s \underbrace{(2)(2)\dots(2)}_t; \\
 \text{(vi)} \quad (123)^r(12)^s(1)^t &= \underbrace{(123)(123)\dots(123)}_r \underbrace{(12)(12)\dots(12)}_s \underbrace{(1)(1)\dots(1)}_t;
 \end{aligned}$$

em que  $r, s$  e  $t$  são inteiros tais que,  $r \geq 1, s \geq 0$  e  $t \geq 0$  para todos os casos.

Note que, uma filtração de um dos tipos (i) a (vi) não é necessariamente uma filtração de gapset. Diante do exposto estamos interessados em encontrar condições sob  $r, s$  e  $t$ , para que de fato tais formatos de filtração correspondam à filtrações de gapsets.

**Proposição 2.11** *Sejam  $F_u = (123)^r(23)^s(3)^t, F_v = (123)^r(23)^s(2)^t, F_w = (123)^r(13)^s(3)^t, F_x = (123)^r(13)^s(1)^t, F_y = (123)^r(12)^s(2)^t$  e  $F_z = (123)^r(12)^s(1)^t$  filtrações de gapsets  $G_u, G_v, G_w, G_x, G_y$  e  $G_z$ , respectivamente. Então:*

1.  $q(G_u) = q(G_v) = \dots = q(G_z) = r + s + t$ ;
2.  $g(G_u) = g(G_v) = \dots = g(G_z) = 3r + 2s + t$ .

**Demonstração:** Item (1). Para  $G_u$  descrito em termos da sua partição canônica, temos que a quantidade de partes na filtração coincide com a sua profundidade  $q$ , pela definição de partição canônica. Por outro lado, ao se escrever  $F_u = (123)^r(23)^s(3)^t$  temos um total de  $r + s + t$  partes, portanto  $r + s + t = q$ .

Item (2). Com efeito, para  $F_u = (123)^r(23)^s(3)^t$  a filtração do gapset  $G_u$ , pode-se reescrever  $G_u$  em termos de sua partição canônica, em que  $G_u = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$ , em que  $g(G_u) = \sum_i |G_i|$ . Note que,  $|G_i| = 3$ , para  $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ ,  $|G_i| = 2$ , para  $i \in \{r, r+1, \dots, r+s-1\}$  e  $|G_i| = 1$ , para  $i \in \{r+s, r+s+1, \dots, r+s+t-1\}$  assim:

$$g(G_u) = \sum_i |G_i| = \sum_{i=0}^{r-1} |G_i| + \sum_{i=r}^{r+s-1} |G_i| + \sum_{i=r+s}^{r+s+t-1} |G_i| = \sum_{i=0}^{r-1} 3 + \sum_{i=r}^{r+s-1} 2 + \sum_{i=r+s}^{r+s+t-1} 1 = 3r + 2s + t.$$

De modo análogo, se prova os demais casos. ■

**Proposição 2.12**  $F_u = (123)^r(23)^s(3)^t$ ,  $F_v = (123)^r(23)^s(2)^t$ ,  $F_w = (123)^r(13)^s(3)^t$ ,  $F_x = (123)^r(13)^s(1)^t$ ,  $F_y = (123)^r(12)^s(2)^t$  e  $F_z = (123)^r(12)^s(1)^t$ , filtrações de gapsets  $G_u, G_v, G_t, G_x, G_y$  e  $G_z$ , respectivamente. Então:

1.  $\text{Kunz}(G_u) = (r, r+s, r+s+t)$ ;
2.  $\text{Kunz}(G_v) = (r, r+s+t, r+s)$ ;
3.  $\text{Kunz}(G_w) = (r+s, r, r+s+t)$ ;
4.  $\text{Kunz}(G_x) = (r+s+t, r, r+s)$ ;
5.  $\text{Kunz}(G_y) = (r+s, r+s+t, r)$ ;
6.  $\text{Kunz}(G_z) = (r+s+t, r+s, r)$ ;

em que  $r, s$  e  $t$  são inteiros tais que,  $r \geq 1$ ,  $s \geq 0$  e  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** Com efeito, para  $F_u = (123)^r(23)^s(3)^t$ , temos que existem  $r$  elementos em  $G_u$  congruentes a 1 módulo 4; existem  $r+s$  elementos em  $G_u$  congruentes a 2 módulo 4; existem  $r+s+t$  elementos em  $G_u$  congruentes a 3 módulo 4. Para  $(k_1, k_2, k_3)$  as coordenadas de Kunz de  $G_u$ , segue da definição que  $k_1$  corresponde à quantidade de elementos de  $G_u$  congruentes a 1 módulo 4, assim  $k_1 = r$ ;  $k_2$  corresponde à quantidade de elementos de  $G_u$  congruentes a 2 módulo 4, assim temos que  $k_2 = r+s$ ;  $k_3$  corresponde à quantidade de elementos de  $G_u$  congruentes a 3 módulo 4, assim temos que  $k_3 = r+s+t$ . Portanto,  $(k_1, k_2, k_3) = (r, r+s, r+s+t)$ . Os demais casos se demonstram de maneira análoga. ■

Os teorema a seguir nos mostrará quais são os formatos de uma filtração de gapset de multiplicidade  $m = 4$ .

**Teorema 2.13** *As filtrações de gapset de multiplicidade  $m = 4$  são dos seguintes formatos:*

1.  $F = (123)^r(23)^s(3)^t$ , para  $s \leq r$  e  $t \leq r$ ;
2.  $F = (123)^r(23)^s(2)^t$ , para  $s + t \leq r$ ;
3.  $F = (123)^r(13)^s(3)^t$ , para  $t \leq r$ ;
4.  $F = (123)^r(13)^s(1)^t$ , para  $t \leq r + 1$ ;
5.  $F = (123)^r(12)^s(2)^t$ , para  $s + t + 1 \leq r$  e  $t \leq r + s$ ;
6.  $F = (123)^r(12)^s(1)^t$ , para  $s \leq r + 1$  e  $t \leq r + 1$ ;

em que  $r, s$  e  $t$  são números inteiros tais que  $r \geq 1$ ,  $s \geq 0$  e  $t \geq 0$ .

**Demonstração:** Provaremos o caso  $F = (123)^r(12)^s(1)^t$ . Os demais casos são provados de modo análogo.

Para  $F = (123)^r(13)^s(1)^t$ , temos:

$$F_0 = \dots = F_{r-1} = \{1, 2, 3\}$$

$$F_r = \dots = F_{r+s-1} = \{1, 3\}$$

$$F_{r+s} = \dots = F_{r+s+t-1} = \{1\}$$

Como cada gapset pode ser unicamente determinado por sua respectiva filtração, para  $m = 4$ , tem-se  $G_\alpha = 4\alpha + F_\alpha$ , para todo  $\alpha$  natural, e seja:

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{r+s+t-1}$$

.

Note que, por construção,  $G$  é finito e  $F$  é filtração de gapset se, e somente se,  $G$  é gapset. Note também que  $G$  dado tem as seguintes propriedades:

$$4\mathbb{N} \cap G = \emptyset$$

$$4i + 1 \in G \Leftrightarrow i \leq r + s + t - 1;$$

$$4j + 2 \in G \Leftrightarrow j \leq r - 1;$$

$$4k + 3 \in G \Leftrightarrow k \leq r + s - 1.$$



em que tais propriedades decorrem de  $G_\alpha = 4\alpha + F_\alpha$  e da construção de  $G$ .

Vamos verificar sob quais condições, tem-se que  $G$  é gapset:

A. Seja  $4k + 3 \in G$ , isto é,  $k \in [0, r + s - 1]$  e escreva  $4k + 3 = a + b$ , com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daí há duas opções:

- i.  $a \equiv 3 \pmod{4}$  e  $b \equiv 0 \pmod{4}$ , o que implica que  $a + b \equiv 3 \pmod{4}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (4x + 3, 4(k - x))$ , com  $0 \leq x \leq k$ . Note que neste caso  $b \notin G$  e  $a \in G$ , uma vez que  $k \leq r + s - 1$ .
- ii.  $a \equiv 1 \pmod{4}$  e  $b \equiv 2 \pmod{4}$ , o que implica que  $a + b \equiv 3 \pmod{4}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (4y + 1, 4(k - y) + 2)$ , com  $0 \leq y \leq k$ . Note que neste caso  $a \in G$ , uma vez que  $y \leq k \leq r + s - 1 \leq r + s + t - 1$ .

B. Seja  $4j + 2 \in G$ , isto é,  $j \in [0, r - 1]$  e escreva  $4j + 2 = a + b$ , com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daí há três opções:

- i.  $a \equiv 2 \pmod{4}$  e  $b \equiv 0 \pmod{4}$ , o que implica que  $a + b \equiv 2 \pmod{4}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (4x + 2, 4(j - x))$ , com  $0 \leq x \leq j$ . Note que neste caso  $b \notin G$  e  $a \in G$ , uma vez que  $x \leq j \leq r - 1$ .
- ii.  $a \equiv b \equiv 1 \pmod{4}$ , o que implica que  $a + b \equiv 2 \pmod{4}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (4y + 1, 4(j - y) + 1)$ , com  $0 \leq y \leq j$ . Note que para este caso  $a \in G$ , uma vez que  $0 \leq y \leq r - 1 \leq r + s + t - 1$ .
- iii.  $a \equiv b \equiv 3 \pmod{4}$  o que implica que  $a + b \equiv 3 \pmod{4}$ , o que implica que  $a + b \equiv 2 \pmod{4}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (4z + 3, 4(j - z - 1) + 3)$ , com  $0 \leq z \leq j - 1$ . Note que  $a \in G$ , uma vez que  $0 \leq z \leq r - 2 \leq r + s - 1$ .

C. Seja  $4i + 1 \in G$ , isto é,  $j \in [0, r + s + t - 1]$  e escreva  $4i + 1 = a + b$ , com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daí há duas opções:

- i.  $a \equiv 1 \pmod{4}$  e  $b \equiv 0 \pmod{4}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (4x + 1, 4(i - x))$ , com  $0 \leq x \leq i$ . Note que  $b \notin G$  e  $a \in G$ , uma vez que  $0 \leq x \leq i \leq r + s + t - 1$ .
- ii.  $a \equiv 3 \pmod{4}$  e  $b \equiv 2 \pmod{4}$  e isto nos permite escrever  $(a, b) = (4y + 3, 4(i - y - 1) + 2)$ , com  $0 \leq y \leq i$ . Note que  $4k + 3 \in G$  se, e somente se,  $k \leq r + s - 1$  e  $4j + 2 \in G$  se, e somente se  $j \leq r - 1$ . Assim, para que  $a, b \notin G$  devemos ter  $y \geq r + s$  e  $i - y - 1 \geq r$  e isso ocorre quando  $i \geq 2r + s + 1$ . Por hipótese,  $i \leq r + s + t - 1$  donde conclui-se a desigualdade  $t \geq r + 2$ . Assim concluímos que  $a \notin G$  e  $b \notin G$  se e somente se  $t \geq r + 2$ . Portanto, se  $t \leq r + 1$ ,  $a \in G$  ou  $b \in G$ .

Portanto,  $F = (123)^r(13)^s(1)^t$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow t \leq r + 1$ .

■

**Observação 2.14** De acordo com o Teorema 2.13, casos 3 ou 4, tem-se que  $F = (123)^r(13)^s$  é sempre filtração de gapset.

**Exemplo 2.15** Vamos verificar se  $F = (123)^3(1)^2$  representa uma filtração de gapset.

Para  $F = (123)^3(1)^2$ , temos  $r = 3$ ,  $s = 0$  e  $t = 2$  e aplicando o Teorema 2.13 item 4, segue que  $t = 2 \leq r + 1 = 4$ , portanto  $F = (123)^3(1)^2$  é filtração de gapset.

**Exemplo 2.16** Vamos verificar se  $F = (123)^1(1)^3$  representa uma filtração de gapset.

Para  $F = (123)^1(1)^3$ , temos  $r = 1$ ,  $s = 0$  e  $t = 3$  e aplicando o Teorema 2.13 item 4, segue que  $t = 3 \geq r + 1 = 2$ , portanto  $F = (123)^1(1)^3$  não é filtração de gapset.

Na seção a seguir, faremos a releitura do Teorema 2.13 na ótica das coordenadas de Kunz.

## 2.5 As filtrações de multiplicidade $m = 4$ por coordenadas de Kunz

Na seção anterior enunciamos o Teorema 2.13 a partir das ideias do trabalho de Eli-ahou e Fromentin estendendo a multiplicidade para o caso da multiplicidade  $m = 4$ , demonstrando apenas um caso. Agora vamos redemonstrar este mesmo teorema, por completo, na ótica das coordenadas de Kunz o que implicará em uma obtenção do resultado de maneira mais simples e prática.

Agora, a partir das coordenadas de Kunz, vamos redemonstrar o Teorema 2.13.

**Demonstração:** No decorrer desta demonstração, denotaremos por  $G$  o gapset associado à filtração de gapset  $F$  e por  $\text{Kunz}(G) = (k_1, k_2, k_3)$ . Impondo que  $r \geq 1$ ,  $s \geq 0$  e  $t \geq 0$ , temos:

**Caso 1:**  $F = (123)^r(23)^s(3)^t$

Analisando as coordenadas de Kunz, temos que cada uma das coordenadas  $k_i$  indica quantos elementos de  $G$  são congruentes a  $i$  módulo 4. Note que, para o caso  $F = (123)^r(23)^s(3)^t$  temos:  $(k_1, k_2, k_3) = (r, r + s, r + s + t)$ . Da Proposição 1.22, segue que:

$$\begin{cases} 2k_1 \geq k_2 \\ k_2 + k_3 + 1 \geq k_1 \\ 2k_3 + 1 \geq k_2 \\ k_1 + k_2 \geq k_3 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} 2r \geq r + s \Rightarrow r \geq s. \\ r + s + r + s + t + 1 \geq r \Rightarrow r + 2s + t + 1 \geq 0 \\ 2(r + s + t) + 1 \geq r + s \Rightarrow r + s + 2t + 1 \geq 0. \\ r + r + s \geq r + s + t \Rightarrow r \geq t. \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas inteiras não negativas  $(r, r + s, r + s + t)$  representam um gapset se, e somente se  $t \leq r$  e  $s \leq r$ .

**Caso 2:**  $F = (123)^r(23)^s(2)^t$

Aplicando as coordenadas de Kunz, temos que para este caso  $(k_1, k_2, k_3) = (r, r + s + t, r + s)$  e aplicando a Proposição 1.22, segue:

$$\begin{cases} 2k_1 \geq k_2 \Rightarrow 2r \geq r + s + t \Rightarrow r \geq s + t. \\ k_2 + k_3 + 1 \geq k_1 \Rightarrow r + s + t + r + s + 1 \geq r \Rightarrow r + 2s + t + 1 \geq 0 \\ 2k_3 + 1 \geq k_2 \Rightarrow 2(r + s) + 1 \geq r + s + t \Rightarrow r + s + 1 \geq t. \\ k_1 + k_2 \geq k_3 \Rightarrow r + r + s + t \geq r + s \Rightarrow r + t \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas inteiras não negativas  $(r, r + s + t, r + s)$  representam um gapset se, e somente se  $s + t \leq r$ .

**Caso 3:**  $F = (123)^r(13)^s(3)^t$

Aplicando as coordenadas de Kunz, temos que para este caso  $(k_1, k_2, k_3) = (r + s, r, r + s + t)$  e aplicando a Proposição 1.22, segue:

$$\begin{cases} 2(r+s) \geq r \Rightarrow r+2s \geq 0. \\ r+r+s+t+1 \geq r+s \Rightarrow r+t+1 \geq 0 \\ 2(r+s+t)+1 \geq r \Rightarrow r+2s+2t+1 \geq 0. \\ r+s+r \geq r+s+t \Rightarrow r \geq t. \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas inteiras não negativas  $(r+s, r, r+s+t)$  representam um gapset se, e somente se  $t \leq r$ .

**Caso 4:**  $F = (123)^r(13)^s(1)^t$

Aplicando as coordenadas de Kunz, temos que para este caso  $(k_1, k_2, k_3) = (r+s+t, r, r+s)$  e aplicando a Proposição 1.22, segue:

$$\begin{cases} 2k_1 \geq k_2 \Rightarrow 2(r+s+t) \geq r+2s+2t \Rightarrow r+2s+2t \geq 0. \\ k_2+k_3+1 \geq k_1 \Rightarrow r+r+s+1 \geq r+s+t \Rightarrow r+1 \geq t. \\ 2k_3+1 \geq k_2 \Rightarrow 2(r+s)+1 \geq r \Rightarrow r+2s+1 \geq 0. \\ k_1+k_2 \geq k_3 \Rightarrow r+s+t+r \geq r+s \Rightarrow t+r \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas inteiras não negativas  $(r+s+t, r, r+s)$  representam um gapset se, e somente se  $t \leq r+1$ .

**Caso 5:**  $F = (123)^r(12)^s(2)^t$

Aplicando as coordenadas de Kunz  $(k_1, k_2, k_3)$ , temos que para este caso  $(k_1, k_2, k_3) = (r+s, r+s+t, r)$  e aplicando a Proposição 1.22, segue:

$$\begin{cases} 2(r+s) \geq r+s+t \Rightarrow r+s \geq t. \\ r+s+t+r+1 \geq r+s \Rightarrow t+r+1 \geq 0. \\ 2r+1 \geq r+s+t \Rightarrow r+1 \geq s+t. \\ r+s+r+s+t+r \geq r \Rightarrow r+2s+t \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas inteiras não negativas  $(r+s+t, r, r+s)$  representam um gapset se, e somente se  $t \leq r+s$  e  $s+t \leq r+1$ .

**Caso 6:**  $F = (123)^r(12)^s(1)^t$

Aplicando as coordenadas de Kunz, temos que para este caso  $(k_1, k_2, k_3) = (a + b + c, a + b, a)$  e aplicando a Proposição 1.22, segue:

$$\begin{cases} 2(r + s + t) \geq r + s + t \Rightarrow r + 1 \geq t. \\ r + s + r + 1 \geq r + s + t \Rightarrow r + 1 \geq 0. \\ r + s \Rightarrow r + 1 \geq 0. \\ r + s + t + r + s \geq r \Rightarrow r + 2s + t \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas inteiras não negativas  $(r + s + t, r + s, r + s + t)$  representam um gapset se, e somente se  $t \leq r + 1$  e  $s \leq r + 1$ .

■

**Exemplo 2.17** Vamos verificar se  $F = (123)^3(1)^2$  é uma filtração de gapset.

De acordo com o Teorema 2.13, aplicando o caso 4, temos que  $F = (123)^r(13)^s(1)^t$  é um gapset para  $t \leq r + 1$ . Note que, para este caso, com  $F = (123)^3(1)^2$ , temos  $r = 3$ ,  $s = 0$  e  $t = 2$  e isso implica  $t = 2 \leq 3 + 1 = r + 1$ , portanto  $F$  é uma filtração de gapset. Note que esta análise poderia ter sido feita na ótica do caso 6 do Teorema 2.13.

**Exemplo 2.18** Vamos verificar se  $F = (123)^1(1)^4$  é uma filtração de gapset.

De acordo com o Teorema 2.13, aplicando o caso 4, temos que  $F = (123)^r(13)^s(1)^t$  é um gapset para  $t \leq r + 1$ . Note que, para este caso, com  $F = (123)^1(1)^4$ , temos  $r = 1$ ,  $s = 0$  e  $t = 4$  e isso implica  $t = 4 \geq 1 + 1 = r + 1$ , portanto não é uma filtração de gapset.

# Capítulo 3

## Árvore dos semigrupos por coordenadas de Kunz

Neste capítulo, faremos a apresentação do algoritmo da construção da árvore dos semigrupos numéricos baseados nos trabalhos de Brás-Amorós [5]. Posteriormente, apresentaremos o algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz, classificando as coordenadas em geradoras, permanentes e supérfluas, cuja classificação permitirá identificar a existência ou não de filhos e a quantidade destes. Encerraremos este capítulo com a caracterização das coordenadas associadas aos semigrupos numéricos filhos a partir das coordenadas associadas ao semigrupo gerador.

### 3.1 O algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos

Nesta seção nos baseamos nos trabalhos de Brás-Amorós, para apresentarmos a fundamentação teórica do procedimento para a construção da árvore dos semigrupos numéricos e também para a construção da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz.

O lema a seguir mostra qual é a quantidade de geradores minimais maiores que o número de Frobenius dos filhos obtidos do semigrupo numérico ordinário  $S = \{0, g + 1, \rightarrow\}$ .

**Lema 3.1** *O semigrupo numérico ordinário  $S = \{0, g + 1, \rightarrow\}$  tem como conjunto minimal de geradores minimais  $\{g + 1, g + 2, \dots, 2g + 1\}$  e:*

1.  $S \setminus \{g + 1\}$  tem  $g + 2$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius;
2.  $S \setminus \{g + 2\}$  tem  $g$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius;

3.  $S \setminus \{g+r\}$ , com  $r > 2$ , tem  $g-r+1$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius.

**Demonstração:** (1) Tem-se que o conjunto minimal de geradores de  $S \setminus \{g+1\}$  é  $\{g+2, \dots, 2g+1, 2g+2, 2g+3\}$  já que todo gerador minimal, exceto  $g+1$ , permanece gerador minimal. Além disso,  $2g+2$  e  $2g+3$  não podem ser obtidos a partir dos demais geradores minimais, pois  $S$  é um semigrupo numérico ordinário.

(2) Tem-se que o conjunto minimal de geradores de  $S \setminus \{g+2\}$  é  $\{g+1, g+3, \dots, 2g+1, 2g+3\}$  já que todo gerador minimal, exceto  $g+2$ , permanece gerador minimal. Note que  $2g+3$  não pode ser obtido como uma combinação linear dos demais geradores minimais e  $g+2$  tornou-se o novo número de Frobenius, logo são  $g$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius.

(3) Tem-se que o conjunto de geradores de  $S \setminus \{g+r\}$  é  $\{g+1, \dots, g+r-1, g+r+1, \dots, 2g+1\}$  já que todo gerador minimal, exceto  $g+r$ , permanece gerador minimal. Note que  $2g+r+1 = (g+2) + (g+r-1)$  o que implica que tal elemento não pertence ao conjunto minimal de geradores e  $g+r$  tornou-se o novo número de Frobenius, assim o conjunto  $\{g+r+1, \dots, 2g+1\}$  tem  $g-r+1$  elementos e contém todos os geradores minimais maiores que o número de Frobenius. ■

O lema a seguir versa sobre a quantidade de geradores minimais maiores que o número de Frobenius para semigrupos numéricos não-ordinários.

**Lema 3.2** *Seja  $S$  um semigrupo numérico não-ordinário, em que  $\{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k\}$  são os geradores minimais de  $S$  que são maiores que o número de Frobenius de  $S$ . Então, o número de geradores minimais do semigrupo numérico  $S \setminus \{\lambda_j\}$  que são maiores que o número de Frobenius é:*

- pelo menos  $k-j$ ;
- no máximo  $k-j+1$ .

**Demonstração:** O semigrupo numérico  $S \setminus \{\lambda_j\}$  tem número de Frobenius  $\lambda_j$  e  $\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_k$  são geradores minimais, totalizando no mínimo  $k-j$  geradores minimais.

Os elementos em  $S \setminus \{\lambda_j\}$ , que não são geradores minimais de  $S$  e se tornam geradores minimais de  $S \setminus \{\lambda_j\}$ , devem ser da forma  $\lambda_j + s$  para algum  $s \in S$ . Seja  $m$  a multiplicidade de  $S$ . Se  $s > m$ , então  $\lambda_j + s - m > \lambda_j$ . Portanto,  $\lambda_j + s = m + k$  para algum  $k \in S \setminus \{\lambda_j\}$ , o que implica que  $\lambda_j + s$  é obtido pela soma de dois elementos de  $S \setminus \{\lambda_j\}$ . Isso mostra que  $\lambda_j + m$  não é gerador minimal de  $S \setminus \{\lambda_j\}$ . Logo a única possibilidade para que um elemento que não é gerador minimal de  $S$  e passa a ser gerador minimal de  $S \setminus \{\lambda_j\}$  é da forma  $\lambda_j + m$ .

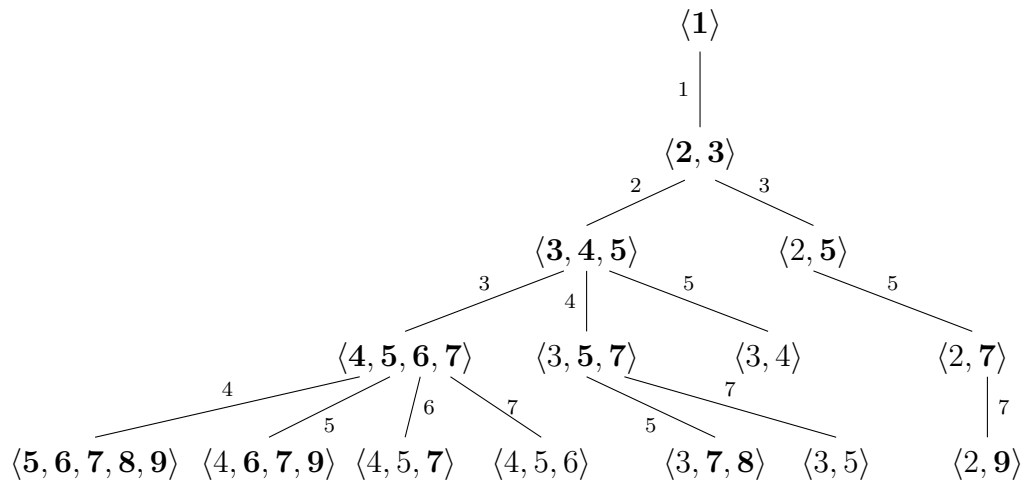


**Observação 3.3** Note que ao retirar  $\lambda_j$  de  $S$  para obter  $S \setminus \{\lambda_j\}$ , a classe de congruência módulo  $m$  de  $\lambda_j$  foi retirada dentre os geradores de  $S$  e por conseguinte de  $S \setminus \{\lambda_j\}$ , sendo esta recuperada pela soma de dois elementos do conjunto  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_k\}$  ou pela soma de  $\lambda_j + \lambda_1$ , em que  $\lambda_1$  corresponde à multiplicidade de  $S$ .

**Observação 3.4** Note que as quantidades de geradores minimais maiores que o número de Frobenius descritos no Lema 3.2 não são aplicáveis para semigrupos numéricos ordinários. Para  $S$  um semigrupo numérico ordinários, temos que este é gerado por  $\{g+1, g+2, \dots, 2g+1\}$ , em que podemos reescrever tal conjunto como  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{g+1}\}$  tal que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{g+1}$ . Analisando o caso em que retiramos de  $S$  o gerador  $\lambda_1$ , nas condições do Lema 3.2, temos  $k = g + 1$  e  $j = 1$ , assim:

- i.  $k - j = (g + 1) - 1 = g \neq g + 2$ ;
- ii.  $k - j + 1 = (g + 1) - 1 + 1 = g + 1 \neq g + 2$ .

A partir dos Lemas 3.1 e 3.2 temos o procedimento para a construção da árvore dos semigrupos numéricos. A seguir, apresentamos a árvore até o gênero  $g = 4$  em que nas ramificações entre um semigrupo e outro temos a indicação do respectivo número de Frobenius, em que os números em negrito correspondem a geradores minimais maiores que o número de Frobenius.



Analisando a árvore acima, vamos exemplificar casos do Lema 3.1.

**Exemplo 3.5** O semigrupo numérico não-ordinário  $\langle 3, 5, 7 \rangle$  tem como filhos os semigrupos  $\langle 3, 7, 8 \rangle$  e  $\langle 3, 5 \rangle$ , também não-ordinários. Note que o semigrupo  $\langle 3, 5, 7 \rangle$  possui dois geradores minimais maiores que o número de Frobenius ( $F = 4$ ), os quais formam o conjunto  $\{5, 7\}$  e, dessa forma  $k = 2$ . Assim:



- i. Ao retirar o 5, o qual ocupa a posição  $j = 1$ , de acordo com Lema 3.1, o filho obtido  $\langle 3, 5, 7 \rangle \setminus \{5\}$  terá no mínimo  $k - j = 1$  e no máximo  $k - j + 1 = 2$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius. Claramente, o 7 continuará como gerador minimal por ser maior que o número de Frobenius. Assim deve-se verificar se de fato o 8 também é gerador minimal. Note que  $8 \equiv 2 \pmod{3}$  e o 8 não é obtido por nenhuma combinação de elementos do semigrupo numérico. Portanto é um gerador minimal maior que o número de Frobenius e de fato o semigrupo filho  $\langle 3, 7, 8 \rangle$  possui 2 geradores minimais maiores que o número de Frobenius.*
- ii. Ao retirar o 7, o qual ocupa a posição  $j = 2$ , de acordo com Lema 3.1, o filho obtido  $\langle 3, 5, 7 \rangle \setminus \{7\}$  terá no mínimo  $k - j = 0$  e no máximo  $k - j + 1 = 1$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius. Note que ao retirar o 7 o candidato a gerador é o 10 ( $3 + 7$ ), como  $10 = 5 + 5$ , então 10 não é um gerador minimal. Portanto o filho  $\langle 3, 5 \rangle$  não possui geradores minimais maiores que o número de Frobenius e não gera filhos.*

## 3.2 O algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz

Nesta seção apresentaremos a árvore dos semigrupos numéricos na ótica das coordenadas de Kunz e descreveremos o procedimento para sua construção.

A construção da árvore dos semigrupos numéricos é baseada nos geradores minimais e no número de Frobenius. Na árvore temos que cada semigrupo numérico é representado por seus geradores minimais (maiores ou não que o número de Frobenius). Para o próximo nível na árvore retira-se, por vez, um gerador minimal maior que o número de Frobenius e no lugar deste coloca-se o gerador retirado acrescido da multiplicidade, quando este não é combinação de outros geradores minimais, caso contrário tal gerador é apenas retirado. Portanto, para a construção da árvore, tem-se que verificar se o gerador minimal é ou não maior que o número de Frobenius e se para o próximo nível o candidato a substituto do gerador minimal maior que o número de Frobenius é ou não combinação linear de geradores minimais. Para a construção da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz seguiremos o raciocínio anterior, adaptado às coordenadas de Kunz. Assim, antes de apresentarmos o procedimento para a construção da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz, vamos para cada uma das  $(m - 1)$ -uplas em  $\mathbb{N}^{m-1}$ , classificar cada uma das suas coordenadas de acordo com sua característica, pois é a característica da coordenada que norteará a construção da árvore indicando, por exemplo, a classificação do semigrupo numérico, a existência ou

não de filhos e a quantidade destes. A classificação proposta, assim como a construção da árvore dos semigrupos numéricos, fundamenta-se nos Lemas 3.1 e 3.2. Ao analisar cada coordenada vamos classificá-la em uma dentre três possibilidades, a saber: na coordenada que está associada a um gerador minimal maior que o número de Frobenius, a qual chamaremos de *coordenada geradora*; na coordenada que está associada a um gerador minimal menor que o número de Frobenius, a qual chamaremos de *coordenada permanente*; ou a coordenada que está associada a um elemento do conjunto de Apéry que não é gerador minimal, sendo esta combinação linear de geradores minimais, a qual chamaremos de *coordenada supérflua*. Portanto, nosso objetivo é buscar condições para decidir dentre cada uma das coordenadas da  $(m - 1)$ -upla quais estão associadas a geradores minimais maiores e menores que o número de Frobenius e quais destas estão associadas a geradores que são combinações lineares de geradores minimais.

**Teorema 3.6** *Seja  $S$  um semigrupo numérico tal que  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ . Então:*

- A.  $k_v$  é uma coordenada permanente de  $S$  se um dos seguintes itens ocorre:
  - a.  $v < \alpha$  e  $k_v < k_\alpha$ ;
  - b.  $v > \alpha$  e  $k_v + 1 < k_\alpha$ .
- B.  $k_l$  é uma coordenada supérflua de  $S$  e se existem  $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$ , satisfazendo um dos seguintes itens:
  - a.  $k_i + k_j = k_l$ , com  $i + j < m$ ;
  - b.  $k_i + k_j + 1 = k_l$ , com  $i + j > m$ .
- C.  $k_b$  é uma coordenada geradora de  $S$  se não é nem permanente e nem supérflua.

**Demonstração:**

- A. Das coordenadas permanentes.

Vamos buscar por uma condição para verificar se uma coordenada está associada a um gerador minimal menor que o número de Frobenius. Temos, pela Proposição 1.28, que  $F(S) = m(k_\alpha - 1) + \alpha$ , em que  $k_\alpha$  é a maior coordenada mais à direita. Daí, se  $w_i \in \text{Ap}(S)$  e  $w_i < m(k_\alpha - 1) + \alpha$ , então  $w_i$  é menor que  $F(S)$ . Substituindo  $w_i = mk_i + i$ , obtemos  $w_i = mk_i + i < mk_\alpha + \alpha - m$ , isto é,  $m(k_i - k_\alpha + 1) + i - \alpha < 0$ . Isso ocorre em dois casos (lembrando que  $1 \leq i, \alpha \leq m - 1$ , logo  $2 - m \leq i - \alpha \leq m - 2$  e também  $i \neq \alpha$ , pois  $w_\alpha = mk_\alpha + \alpha$ ):

1.  $i < \alpha$  e  $k_i - k_\alpha + 1 \leq 0$ , isto é,  $i < \alpha$  e  $k_i < k_\alpha$ ;
2.  $i > \alpha$  e  $k_i - k_\alpha + 1 < 0$ , isto é,  $i > \alpha$  e  $k_i + 1 < k_\alpha$ ;

B. Das coordenadas supérfluas.

Vamos buscar por uma condição para verificar se uma coordenada não está associada a um gerador minimal, isto é, se tal coordenada está associada a um gerador que é combinação linear de geradores minimais. Sabemos que a multiplicidade de um semigrupo numérico é sempre um gerador minimal. Uma pergunta que surge é: dado  $l \in \{1, \dots, m-1\}$ , quando  $w_l$  não é gerador não minimal? Devem existir índices  $i$  e  $j$  tais que  $w_i + w_j = w_l$ , isto é,  $mk_i + i + mk_j + j = mk_l + l$ . Daí,  $m(k_i + k_j - k_l) = l - (i + j)$ . Logo,  $i + j \equiv l \pmod{m}$ . Como  $1 \leq i, j, l \leq m-1$ , então  $-2m+3 \leq l - (i + j) \leq m-3$ . Assim,  $l - (i + j) \in \{-m, 0\}$ . Se  $l - (i + j) = -m$ , então  $k_i + k_j - k_l = -1$ , isto é,  $k_i + k_j + 1 = k_l$ . Se  $l - (i + j) = 0$ , então  $k_i + k_j - k_l = 0$ , isto é,  $k_i + k_j = k_l$ . Portanto,  $w_l$  não é gerador minimal se:

1. existem  $i, j$  com  $i + j = l < m$  tais que  $k_i + k_j = k_l$ ;
2. existem  $i, j$  com  $i + j = l + m > m$  tais que  $k_i + k_j + 1 = k_l$ ;

C. Das coordenadas geradoras.

Bem estabelecidos os critérios para verificar se uma determinada coordenada na  $(m-1)$ -upla é uma coordenada permanente ou uma coordenada supérflua, temos que se uma coordenada não é permanente e nem supérflua, então coordenada é geradora. ■

A coordenada  $k_i$  que satisfaz o caso  $i < \alpha$  e  $k_i < k_\alpha$  ou o caso  $i > \alpha$  e  $k_i + 1 < k_\alpha$  será chamada de coordenada permanente. Atribuímos este nome a coordenada, pois, na construção da árvore, não é feita a retirada de geradores minimais menores que o número de Frobenius, assim tal coordenada permanece nos níveis seguintes. Todavia, os geradores associados às respectivas coordenadas são geradores minimais.

A coordenada  $k_l$  que satisfaz o caso  $k_i + k_j = k_l$  ou o caso  $k_i + k_j + 1 = k_l$ , será chamada de coordenada supérflua. Atribuímos este nome à coordenada, pois, na construção da árvore pelos geradores minimais, o gerador que é combinação linear de outros geradores é omitido na construção da árvore, sendo então este gerador um “elemento supérfluo”. Por exemplo, na construção da árvore dos semigrupos numéricos pelos geradores minimais, temos que o semigrupo numérico  $\langle 3, 5, 7 \rangle$  tem como filho  $\langle 3, 5 \rangle$ , o qual é obtido ao se retirar o elemento 7 e a ele é adicionada a multiplicidade  $m = 3$ , assim o elemento candidato a substituir o 7 é o 10, o qual é omitido, pois  $10 = 5 + 5$ , uma combinação linear, portanto um elemento supérfluo.

Um fato importante a ser observado é que identificada uma coordenada supérflua conclui-se que para a classe de congruência que a coordenada está associada não há a geração de filho no nível seguinte, por exemplo, no caso do semigrupo numérico  $\langle 3, 5 \rangle$ , temos que suas coordenadas de Kunz que são  $(3, 1)$  em que  $k_1 = 3$  está associada ao elemento  $10 = 3 \cdot 3 + 1$ , a coordenada supérflua que não aparece em  $\langle 3, 5 \rangle$ , visto anteriormente.

Caso um  $w_i = mk_i + i$  seja um gerador minimal de  $S$  (um semigrupo numérico não ordinário) e maior que o número de Frobenius, então, como visto na construção da árvore, será possível remover tal elemento para obter um semigrupo numérico filho,  $S \setminus \{w_i\}$ .

Note que  $\text{Ap}(S \setminus \{w_i\}) = \text{Ap}(S) \cup \{w_i + m\} \setminus \{w_i\}$ , pois,  $\min\{s \in S \setminus \{w_i\} : s \equiv i \pmod{m}\} = w_i + m = m(k_i + 1) + i$ . Neste caso, se  $\text{Kunz}(S) = (k_1, \dots, k_i, \dots, k_{m-1})$ , então  $\text{Kunz}(S \setminus \{w_i\}) = (k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_{m-1})$ .

Tais coordenadas recebem de maneira motivada o nome de coordenadas geradoras, pois estas e somente estas geram filhos.

**Exemplo 3.7** *Vejamos alguns casos de coordenadas permanentes.*

- a. *As coordenadas  $(1, 2)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_1$  de multiplicidade  $m = 3$  em que  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = k_\alpha = 2$ , em que temos  $1 = i < \alpha = 2$ ,  $k_i = 1 < k_\alpha = 2$  o que implica que  $k_1 = 1$  é uma coordenada permanente. De fato temos que  $k_1 = 1$  está associado ao gerador minimal  $s_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$  de  $S_1$ , o qual é menor que o número de Frobenius  $F(S_1) = 5$ ; essa é outra forma de garantir que  $k_1$  é a uma coordenada permanente.*
- b. *As coordenadas  $(1, 1, 2)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_2$  de multiplicidade  $m = 4$  em que  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = k_\alpha = 2$ , em que temos  $i = 1 < \alpha = 3$ ,  $k_i = 1 < k_\alpha = 2$  o que implica que  $k_1 = 1$  é uma coordenada permanente. De modo análogo temos que  $k_2 = 1$  também é coordenada permanente. De fato temos que  $k_1 = 1$  está associado ao gerador minimal  $s_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$  de  $S_2$ , o qual é menor que o número de Frobenius  $F(S_2) = 7$ ; essa é outra forma de garantir que  $k_1$  é a uma coordenada permanente. De modo análogo temos que  $k_2 = 1$  está associada a  $s_2 = 6$  de  $S_2$ , o qual é menor que o número de Frobenius.*
- c. *As coordenadas  $(3, 1)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_3$  de multiplicidade  $m = 3$  em que  $k_1 = k_\alpha = 3$  e  $k_2 = 1$ , em que temos  $i = 2 > \alpha = 1$ ,  $k_i + 1 = 2 < k_\alpha = 3$  o que implica que  $k_2 = 1$  é uma coordenada permanente. De fato temos que  $k_2 = 1$  está associado ao gerador minimal  $s_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$  de  $S_3$ , o qual é menor que o número de Frobenius  $F(S_3) = 7$ ; essa é outra forma de garantir que  $k_2$  é a uma coordenada permanente.*

- d. As coordenadas  $(3, 1, 1)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_4$  de multiplicidade  $m = 4$  em que  $k_1 = k_\alpha = 3$ ,  $k_2 = k_3 = 1$ , em que temos  $i = 2 > \alpha = 1$ ,  $k_i + 1 = 2 < k_\alpha = 3$  o que implica que  $k_2 = 1$  é uma coordenada permanente. De modo análogo temos que  $k_3 = 1$  também é coordenada permanente. De fato temos que  $k_2 = 1$  está associado ao gerador minimal  $s_2 = 4 \cdot 1 + 2 = 5$  de  $S_4$ , o qual é menor que o número de Frobenius  $F(S_4) = 9$ ; essa é outra forma de garantir que  $k_2$  é a uma coordenada permanente. De modo análogo temos que  $k_3 = 1$  está associada a  $s_3 = 7$  de  $S_4$ , o qual é menor que o número de Frobenius.

**Exemplo 3.8** Vejamos alguns casos de coordenadas supérfluas.

- a. As coordenadas  $(1, 2, 1, 1)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_1$  de multiplicidade  $m = 5$  e  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 2$  em que  $i + j = 1 + 1 = 2 = l < 5 = m$  e  $k_1 + k_1 = k_2 = 2$ , portanto  $k_2 = 2$  é uma coordenada supérflua. De fato,  $k_1 = 1$  está associado ao gerador minimal  $s_1 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$  e  $k_2 = 2$  está associado ao gerador  $s_2 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$ , ambos de  $S_1$ . Assim, temos  $s_1 + s_1 = 6 + 6 = 12 = s_2$  uma combinação linear de  $s_1$ .
- b. As coordenadas  $(1, 1, 1, 2)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_2$  de multiplicidade  $m = 5$ , em que  $k_1 = 1$ ,  $k_3 = 1$  e  $k_4 = 2$  em que  $i + j = 1 + 3 = 4 = l < 5 = m$  e  $k_1 + k_3 = k_4 = 2$ , portanto  $k_4 = 2$  é uma coordenada supérflua. De fato,  $k_1 = 1$  está associado ao gerador minimal  $s_1 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$ ,  $k_3 = 1$  está associado ao gerador  $s_3 = 5 \cdot 1 + 3 = 8$  e  $k_4 = 2$  está associado ao gerador  $s_4 = 5 \cdot 2 + 4 = 14$ , todos de  $S_2$ . Assim temos  $s_1 + s_3 = 6 + 8 = 14 = s_4$ , uma combinação linear de  $s_1$  e  $s_3$ .
- c. As coordenadas  $(3, 1)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_3$  de multiplicidade  $m = 3$ , em que  $k_1 = 3$  e  $k_2 = 1$  em que  $i + j = 2 + 2 = 4 = l + m > 3 = m$  e  $k_2 + k_2 + 1 = k_1 = 3$ , portanto  $k_1 = 3$  é uma coordenada supérflua. De fato,  $k_1 = 1$  está associado ao gerador minimal  $s_1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$ ,  $k_2 = 2$  está associado ao gerador  $s_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ , todos de  $S_3$ . Assim temos  $s_2 + s_2 = 5 + 5 = 10 = s_1$ , uma combinação linear de  $s_2$ .
- d. As coordenadas  $(3, 1, 1)$  estão associadas a um semigrupo numérico  $S_4$  de multiplicidade  $m = 4$ , em que  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = k_3 = 1$  em que  $i + j = 2 + 3 = 5 = l + m > 4 = m$  e  $k_2 + k_3 + 1 = k_1 = 3$ , portanto  $k_1 = 3$  é uma coordenada supérflua. De fato,  $k_1 = 3$  está associado ao gerador minimal  $s_1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ ,  $k_2 = 1$  está associado ao gerador  $s_2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$  e  $k_3 = 1$  está associado ao gerador  $s_3 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$ , todos de  $S_4$ . Assim temos  $s_2 + s_3 = 6 + 7 = 13 = s_1$ , uma combinação linear de  $s_2$  e  $s_3$ .

A seguir vamos exemplificar como identificar coordenadas geradoras a partir das coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico e em seguida apresentar como obter os seus respectivos filhos.

**Exemplo 3.9** *Vejamos algumas coordenadas geradoras:*

*Para as coordenadas  $(2, 1, 1)$ , associadas ao semigrupo numérico  $S_1$  de multiplicidade  $m = 4$ , temos  $k_1 = k_\alpha = 2$  e  $k_2 = k_3 = 1$ , em que  $k_1 = 2$  está associado ao elemento de  $s_1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ ;  $k_2 = 1$  está associado ao elemento de  $s_2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$ ;  $k_3 = 1$  está associado ao elemento de  $s_3 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$ . Pela Proposição 1.28, temos que  $F(S_1) = 4 \cdot (2 - 1) + 1 = 5$ , logo  $k_1, k_2$  e  $k_3$  não são coordenadas permanentes. Note que  $k_2 = k_3 = 1$  não podem ser coordenadas supérfluas, pois para tal deve-se ter  $k_i \geq 2$  para se ter uma combinação linear entre geradores minimais. Como  $k_2$  e  $k_3$  não são coordenadas permanentes e nem supérfluas, logo são coordenadas geradoras. Por fim, temos que verificar se  $k_1$  é coordenada supérflua. Neste caso, para  $k_l = 2$  e  $l = 1$ , temos como única possibilidade verificar o caso em  $i + j > m$ , com  $i = 2$  e  $j = 3$ , donde  $i + j = 2 + 3 = 5 > 4 = m$ . Para tal caso temos  $k_i + k_j + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 2 = k_l$ , logo  $k_l = 2$  não é coordenada supérflua e, portanto,  $k_1$  é coordenada geradora. Como as três coordenadas de  $(2, 1, 1)$  são geradoras, temos que para o próximo nível serão gerados três filhos, em que cada filho é obtido ao se acrescentar 1 na coordenada geradora, isto é,  $(2, 1, 1)$  gerará os filhos:  $(2 + 1, 1, 1) = (3, 1, 1)$ ,  $(2, 1 + 1, 1) = (2, 2, 1)$  e  $(2, 1, 1 + 1) = (2, 1, 2)$ .*

Agora, a partir de uma  $(m - 1)$ -upla vamos classificar cada uma das coordenadas de Kunz à luz do Teorema 3.6.

**Exemplo 3.10** *Vamos classificar as coordenadas de Kunz de alguns semigrupos numéricos:*

- $(1, 2)$ : temos que  $k_1 + k_1 = 2 = k_2$ , logo  $k_2$  é uma coordenada supérflua. Note também que  $k_1 < k_2 = k_\alpha$ , portanto  $k_1$  é uma coordenada permanente;
- $(1, 2, 1)$ : temos que  $k_1 + k_1 = 2 = k_2$ , logo  $k_2$  é uma coordenada supérflua. Note também que  $k_1 < k_2 = k_\alpha$ , portanto  $k_1$  é uma coordenada permanente. Note também que  $k_3 + 1 = 2 = k_\alpha$  portanto,  $k_3$  não é coordenada permanente e claramente não é coordenada supérflua, logo é coordenada geradora;
- $(1, 1, 2)$ : temos que  $k_1 + k_2 = 2 = k_3$ , logo  $k_3$  é uma coordenada supérflua. Note também que  $k_1 < k_3 = k_\alpha$  e  $k_2 < k_3 = k_\alpha$ , portanto  $k_1$  e  $k_2$  são coordenadas permanentes.
- $(3, 1)$ : temos que  $k_2 + k_2 + 1 = 3 = k_1$ , logo  $k_1$  é uma coordenada supérflua. Note também que  $k_2 + 1 < k_1 = k_\alpha$ , portanto  $k_2$  é uma coordenada permanente.

**Observação 3.11** *Note que como uma consequência imediata da Proposição 1.28, tem-se que  $k_\alpha$  não pode corresponder a uma coordenada permanente, pois o número de Frobenius do semigrupo numérico  $S$  é dado por  $F(S) = m(k_\alpha - 1) + \alpha$  e, portanto,  $w_\alpha = mk_\alpha + \alpha > F(S)$ .*

A seguir apresentamos um semigrupo numérico em que todas as coordenadas de Kunz são geradoras.

**Lema 3.12** *Seja  $S$  um semigrupo numérico de multiplicidade  $m$  cujas coordenadas de Kunz são  $(x, x, \dots, x)$ . Então todas as coordenadas são geradoras e  $S$  tem pelo menos  $m - 1$  filhos, a saber:  $(x + 1, x, \dots, x), (x, x + 1, \dots, x), \dots, (x, x, \dots, x + 1)$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 1.6 temos que  $F(S) = m(x - 1) + (m - 1) = mx - 1$ . Para  $k_1 = x$  temos que tal coordenada está associada ao menor elemento do conjunto de geradores de  $S$ , o qual está associado a  $s_{min} = mx + 1 > mx - 1$ , portanto para todo  $k_i$  com  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$  temos que  $k_i$  não é coordenada permanente. Agora vamos verificar se alguma coordenada  $k_l$  é supérflua. Note que, para  $\forall i, j, l \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ , temos que analisar dois casos:

- i. Para  $i + j < m$ , temos que  $k_i + k_j = x + x > x = k_l$ ;
- ii. Para  $i + j > m$ , temos que  $k_i + k_j + 1 = x + x + 1 > x = k_l$ ;

Logo, por (i) e (ii), segue que  $k_l$  não é coordenada supérflua. Como, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ , tem-se que  $k_i$  não é coordenada supérflua e nem coordenada permanente, tem-se que todas as coordenadas de  $(x, x, \dots, x)$  são geradoras e o semigrupo numérico associado tem pelo menos  $m - 1$  filhos. ■

**Observação 3.13** *As coordenadas de Kunz dos filhos de um semigrupo numérico ordinário de multiplicidade  $m$  são da forma:  $(\underbrace{1, \dots, 1}_m), (\underbrace{2, 1, \dots, 1}_{m-1}), \dots, (\underbrace{1, 1, \dots, 2}_{m-1})$ .*

A seguir apresentaremos o procedimento para a construção da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz. Tal método está baseado nos Lemas 3.1 e 3.2.

Para  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$  temos  $\text{Ap}(S) = \{0, mk_1 + 1, mk_2 + 2, \dots, mk_{m-1} + (m - 1)\}$  e pela Proposição 1.1,  $S = \langle m, w_1, w_2, \dots, w_{m-1} \rangle$ . Agora usaremos a Teorema 3.6 para ilustrar a construção da árvore dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz.

A árvore será construída por níveis em que elementos pertencentes ao mesmo nível possuem mesmo gênero. No primeiro nível tem-se o gênero  $g = 0$ , ao qual pertence  $(\ )$ , o qual corresponde a  $\mathbb{N}_0$ .

O número na aresta indicará a coordenada de Kunz que aumenta uma unidade do pai para o filho. Caso pai e filho estejam relacionados a semigrupos numéricos ordinários, o número na aresta será indicado por zero.

$$()$$

Prossegue-se para o próximo nível, isto é, para os semigrupos numéricos de gênero  $g = 1$ , o qual é composto apenas por  $\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ , representado por (1), um semigrupo numérico ordinário.

$$\begin{array}{c} () \\ | \\ 0 \\ | \\ (1) \end{array}$$

Prosseguindo para o próximo nível, isto é, para os semigrupos numéricos de gênero  $g = 2$ . Note que (1) corresponde a um semigrupo numérico ordinário, assim vamos aplicar o a Observação 3.11. Temos que um semigrupo numérico ordinário de gênero  $g$  gerará  $g + 1$  filhos dos quais um deles será um semigrupo ordinário de gênero  $g + 1$  e os demais filhos serão obtidos ao se acrescentar uma unidade a uma das coordenadas do semigrupo gerador (pai), efetuando tal acréscimo a cada uma das suas unidades. A construção está descrita na figura abaixo.

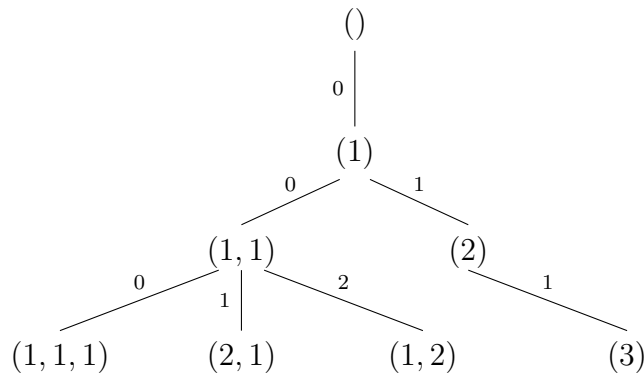
$$\begin{array}{ccc} & () & \\ & | & \\ & 0 & \\ & | & \\ & (1) & \\ / & & \backslash \\ 0 & & 1 \\ (1, 1) & & (2) \end{array}$$

Obtidos os filhos, deve-se verificar quais destes geram filhos. Portanto devemos analisar cada uma das coordenadas obtidas. Pelo Lema 3.2, temos:

- i. O semigrupo associado a  $(1, 1)$ , obtido de (1) possui  $1 + 2$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius, logo todas as coordenadas de  $(1, 1)$  correspondem à coordenadas geradoras.
- ii. O semigrupo associado a  $(2)$ , obtido de (1) possui 1 gerador minimal maior que o número de Frobenius e como (1) tem gênero  $g = 1$ , segue que 2 é uma coordenada geradora e portanto gera filhos. Em particular, os descendentes de  $(2)$  estão associados aos semigrupos hiperelípticos.



Prosseguindo para o próximo nível, teremos os semigrupos de gênero  $g = 3$ . Note que, neste caso os pais são  $(1, 1)$ , semigrupo ordinário, e  $(2)$ , um semigrupo não-ordinário. Para  $(1, 1)$  vamos aplicar o Lema 3.2, em que o primeiro filho é um semigrupo ordinário de gênero  $g = 3$ , o qual é obtido ao se acrescentar mais uma coordenada 1 e aos demais semigrupos acrescenta-se um a uma das coordenadas do semigrupo original em que tal acréscimo ocorre a cada uma de suas coordenadas. Para  $(2)$  basta acrescentar um à coordenada 2, obtendo a coordenada  $(3)$ . A construção está descrita na figura abaixo.



Obtidos os filhos deve-se verificar quais destes geram filhos, portanto devemos analisar cada uma das coordenadas dos semigrupos numéricos obtidos. Note que pelo Lema 3.2, temos:

- i. O semigrupo associado a  $(1, 1, 1)$  possui  $1 + 3$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius, logo todas as coordenadas de  $(1, 1, 1)$  correspondem a coordenadas geradoras.
- ii. O semigrupo associado a  $(2, 1)$  possui 2 geradores minimais maiores que o número de Frobenius, logo todas as coordenadas de  $(2, 1)$  corresponde à coordenadas geradoras, em que todas as coordenadas de  $(2, 1)$  geram filhos;
- iii. O semigrupo associado a  $(1, 2)$  possui  $2 - 3 + 1 = 0$  geradores minimais maiores que o número de Frobenius, logo todas as coordenadas de  $(1, 2)$  não geram filhos, em que 1 é uma coordenada permanente e 2 é uma coordenada supérflua;
- iv. O semigrupo associado a  $(3)$ , possui 1 gerador minimal maior que o número de Frobenius, segue que 3 é uma coordenada geradora e portanto gera filhos.

Prosseguindo de modo semelhante, constroem-se os próximos níveis. Veja a Figura 3.1

Figura 3.1: Árvore dos semigrupos numéricos por coordenadas de Kunz

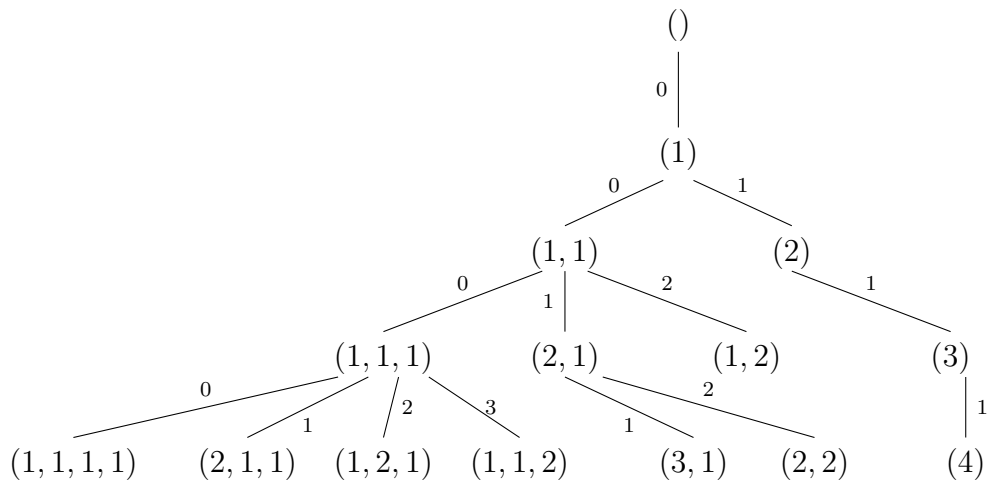
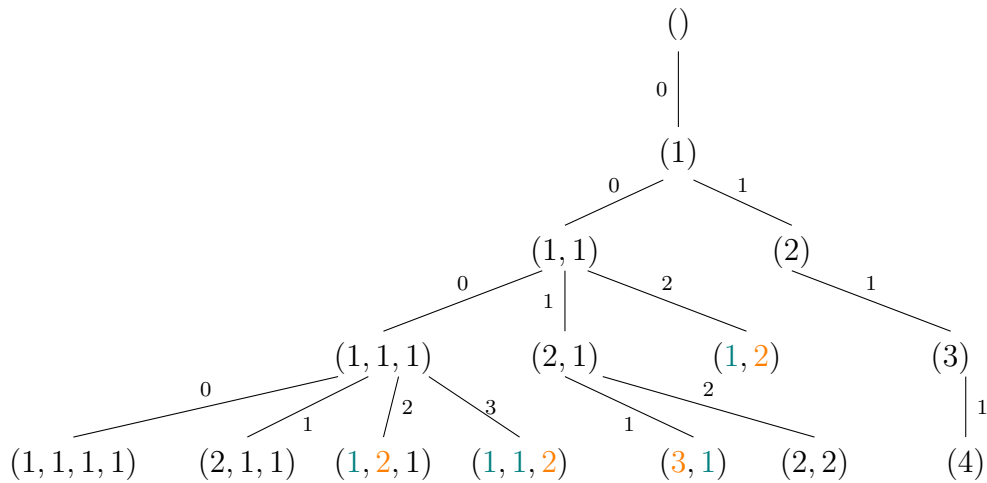


Figura 3.2: Árvore dos semigrupos numéricos por coordenadas de Kunz com cores



Para uma compreensão mais imediata do que acontecerá no próximo nível da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz, vamos atribuir cores às coordenadas. Deste modo, as coordenadas permanentes serão destacadas em verde; as coordenadas supérfluas serão destacadas em laranja; as coordenadas geradoras serão destacadas em preto.

Na Figura 3.2, temos uma nova visão da árvore dos semigrupos numéricos via coordenadas de Kunz com o acréscimo das cores nas coordenadas.

Note que tal representação nos permite de maneira imediata entender o que acontecerá nos próximos níveis da árvore em relação a existência ou não de filhos e quantos eles são.

**Exemplo 3.14** Para o gênero  $g = 3$ , temos:

- i.  $(1, 1, 1)$  gerará 4 filhos, por representar um semigrupo ordinário.
- ii.  $(2, 1)$  gerará 2 filhos, pois todas as suas coordenadas são geradoras;
- iii.  $(1, 2)$  não gerará filhos, pois  $k_1 = 1$  é uma coordenada permanente e  $k_2 = 2$  é uma coordenada supérflua;
- iv.  $(3)$  gerará 1 filho, pois sua única coordenada é coordenada geradora.

**Exemplo 3.15** Para o gênero  $g = 4$ , temos:

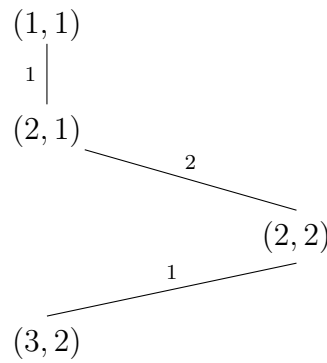
- i.  $(1, 1, 1, 1)$  gerará 5 filhos, por representar um semigrupo ordinário.
- ii.  $(2, 1, 1)$  gerará 3 filhos, pois todas as suas coordenadas são geradoras;
- iii.  $(1, 2, 1)$  gerará 1 filho, pois  $k_1 = 1$  é uma coordenada permanente,  $k_2 = 2$  é uma coordenada supérflua e  $k_3 = 1$  é uma coordenada geradora;
- iv.  $(1, 1, 2)$  não gerará filho, pois  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 1$  são coordenadas permanentes;  $k_3 = 2$  é uma coordenada supérflua;
- v.  $(3, 1)$  não gerará filho, pois  $k_1 = 3$  é uma coordenada supérflua e  $k_2 = 1$  é uma coordenada permanente;
- vi.  $(2, 2)$  gerará 2 filhos, pois todas as suas coordenadas são geradoras;
- vii.  $(4)$  gerará 1 filho, pois sua única coordenada é geradora.

Nas Observações 3.16 e 3.17 vamos estabelecer uma conexão entre os Teoremas 2.2 e 2.13 com subárvores com semigrupos numéricos de multiplicidades 3 e 4 que contém uma quantidade infinita de semigrupos numéricos.

**Observação 3.16** Pela construção da árvore e pelo Teorema 2.2 encontramos uma ramificação formada por semigrupos numéricos de multiplicidade  $m = 3$ . O conjunto  $A_3 = \{(x, x), (x+1, x) : x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), \dots, (n, n), (n+1, n), \dots\}$  contém tais semigrupos numéricos representados por suas respectivas coordenadas de Kunz.

De fato, se  $x \in \mathbb{N}$  os elementos de conjunto  $A_3$  são coordenadas associadas a semigrupos numéricos, pois:

- i. As coordenadas  $(x, x)$  estão associadas à filtração  $(12)^x(1)^0$  que pelo Teorema 2.2 correspondem a um semigrupo numérico, pois temos  $s = 0 \leq x + 1 = r + 1$ ;
- ii. As coordenadas  $(x + 1, x)$  estão associadas à filtração  $(12)^x(1)$  que pelo Teorema 2.2 correspondem a um semigrupo numérico, pois temos  $s = 1 \leq x + 1 = r + 1$ .

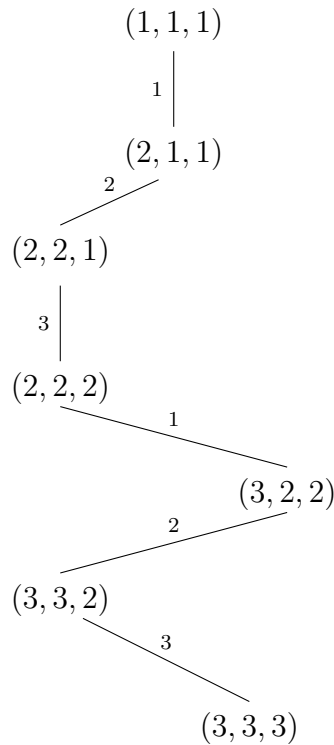


Portanto, a ramificação apresentada acima continua indefinidamente gerando uma quantidade infinita de semigrupos numéricos de multiplicidade  $m = 3$  em que todas as coordenadas são geradoras.

**Observação 3.17** *Pela construção da árvore e pelo Teorema 2.2 encontramos uma ramificação formada por semigrupos numéricos de multiplicidade  $m = 4$ . O conjunto  $A_4 = \{(x, x, x), (x + 1, x, x), (x + 1, x + 1, x) : x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), \dots, (n, n, n), (n + 1, n, n), (n + 1, n + 1, n), \dots\}$  contém tais semigrupos numéricos representados por suas respectivas coordenadas de Kunz.*

De fato, os elementos de conjunto  $A_4$  são coordenadas associadas aos semigrupos numéricos, pois pelo Teorema 2.13, caso 6, temos:

- i. As coordenadas  $(x, x, x)$  estão associadas a  $(123)^x(12)^0(1)^0$  que pelo Teorema 2.13, caso 6, correspondem a um semigrupo numérico, pois temos  $r = x$ ,  $s = 0$  e  $t = 0$ , donde  $s = 0 \leq r + 1 = x + 1$  e  $t = 0 \leq r + 1 = x + 1$ ;
- ii. As coordenadas  $(x + 1, x, x)$  estão associadas a  $(123)^x(12)^0(1)^1$  que pelo Teorema 2.13, caso 6, correspondem a um gapset, pois temos  $r = x$ ,  $s = 0$ , e  $t = 1$ , donde  $s = 0 \leq r + 1 = x + 1$  e  $t = 1 \leq r + 1 = x + 1$ ;
- iii. As coordenadas  $(x + 1, x + 1, x)$  estão associadas a  $(123)^x(12)^1(1)^0$  que pelo Teorema 2.13, caso 6, correspondem a um gapset, pois temos  $r = x$ ,  $s = 1$ , e  $t = 0$ , donde  $s = 1 \leq r + 1 = x + 1$  e  $t = 0 \leq r + 1 = x + 1$ .



Portanto, a ramificação apresentada abaixo continua indefinidamente gerando uma quantidade infinita de semigrupos numéricos de multiplicidade  $m = 4$  em que todas as suas coordenadas de Kunz são geradoras.

### 3.3 Caracterização das coordenadas associadas aos semigrupos numéricos filhos a partir das coordenadas associadas ao semigrupo gerador.

Nesta seção vamos analisar o comportamento das coordenadas permanentes, supérfluas e geradoras para, a partir destas, determinarmos as coordenadas associadas aos semigrupos numéricos filhos. Em seguida apresentaremos lemas que versam sobre o comportamento das coordenadas permanentes, geradoras e supérfluas nos níveis seguintes das árvores dos semigrupos numéricos.

#### Das coordenadas permanentes.

Para o resultado a seguir, vamos analisar o comportamento das coordenadas que correspondem à geradores minimais menores que o número de Frobenius ao longo das ramificações da árvore dos semigrupos numéricos, isto é, das coordenadas permanentes.

**Teorema 3.18** *Sejam  $(k_1, \dots, k_v, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$  as coordenadas de Kunz do semigrupo numérico  $S$ , em que  $k_v$  é uma coordenada permanente. Então  $k_v$  será uma coordenada permanente em todos os filhos de  $S$ .*

**Demonstração:** Note que as coordenadas de Kunz  $(k_1, k_2, \dots, k_l, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$  do semigrupo numérico  $S$  correspondem a um semigrupo não-ordinário. Assim pelo Lema 3.1 o novo semigrupo gerado permanece com os mesmos geradores minimais menores que o número de Frobenius do pai, portanto as coordenadas que os representam ficam preservadas, isto é, as coordenadas permanentes não se alteram nos próximos níveis continuando sempre permanentes. ■

**Exemplo 3.19** *Considere as coordenadas de Kunz  $(1, 2, 1)$ , em que  $\alpha = 2$  e  $k_\alpha = 2$ . O filho gerado será  $(1, 2, 2)$ , em que  $\alpha = 3$  e  $k_\alpha = 2$ . Note que a coordenada  $k_1 = 1$  do pai é permanente e continua sendo uma coordenada permanente no filho. Note também que para o filho  $k_3 = 2$  continua sendo uma coordenada geradora e portanto vai gerar um único filho.*

**Exemplo 3.20** *Considere as coordenadas de Kunz  $(2, 3)$ , em que  $\alpha = 2$  e  $k_\alpha = 3$ . Um dos filhos gerados será  $(2, 4)$ , em que  $\alpha = 2$  e  $k_\alpha = 4$ . Note que a coordenada  $k_1 = 2$  do pai é permanente e continua permanente no filho, a qual assim permanecerá nas próximas gerações, o que é uma aplicação do Teorema 3.6.*

### Das coordenadas supérfluas.

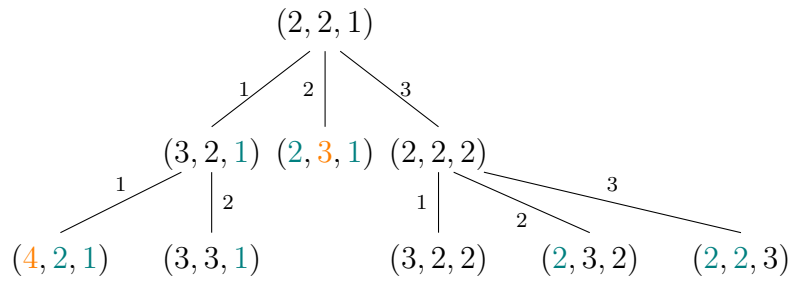
Nos primeiros níveis da árvore, nota-se que as coordenadas supérfluas permanecem supérfluas conforme o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.21** *Considere as coordenadas de Kunz  $(1, 1, 1)$ , um semigrupo ordinário, o qual gerará  $(1, 2, 1)$  cujo único filho será  $(1, 2, 2)$ . Note que  $k_2 = 2$  permanece em  $(1, 2, 1)$ , o pai e em  $(1, 2, 2)$ , o filho.*

Uma pergunta que pode ser explorada em um trabalho futuro é se este fato ocorre sempre.

### Das coordenadas geradoras.

Uma coordenada geradora está associada a um gerador minimal maior que o número de Frobenius. Assim vamos exemplificar o que pode acontecer a uma coordenada geradora, ao longo das ramificações da árvore dos semigrupos numéricos. Para tanto, vamos ilustrar uma ramificação da árvore, abaixo:



Para o caso em que a coordenada geradora é trocada:

- i. Uma coordenada geradora que é modificada no filho pode continuar sendo geradora na etapa seguinte. Por exemplo, um dos filhos de  $(2, 2, 1)$  é  $(3, 2, 1)$ , que é obtido pela modificação na primeira coordenada. Nesse caso, a primeira coordenada de ambas é geradora.
- ii. Uma coordenada geradora que é modificada no filho pode ser coordenada supérflua na etapa seguinte. Por exemplo, um dos filhos de  $(3, 2, 1)$  é  $(4, 2, 1)$ , que é obtido pela modificação na primeira coordenada. Note que nesse caso a coordenada geradora do pai tornou-se uma coordenada supérflua no filho.

A seguir vamos exemplificar casos que podem acontecer com uma coordenada geradora que não foi modificada no nível seguinte.

- i. Uma coordenada geradora não modificada permanece geradora na etapa seguinte. Por exemplo, para as coordenadas  $(2, 2, 1)$ , um dos filhos de  $(2, 2, 1)$  é  $(2, 2, 2)$ . Note que para o filho  $(2, 2, 2)$  cuja modificação aconteceu na terceira coordenada, as demais coordenadas que não foram alteradas e eram geradoras pai continuaram coordenadas geradoras no filho;
- ii. Uma coordenada geradora não modificada se torna uma coordenada permanente na etapa seguinte. Por exemplo, para as coordenadas  $(2, 2, 2)$ , um dos filhos de  $(2, 2, 2)$  é  $(2, 3, 2)$ , em que a segunda coordenada é a modificada. Note que a primeira coordenada no pai era geradora e a mesma coordenada, que não foi modificada, no filho tornou-se uma coordenada permanente.

# Capítulo 4

## Sugestão de atividade para o Ensino Médio

Neste capítulo, vamos propor algumas atividades para o Ensino Médio sobre semigrupos numéricos na ótica das coordenadas de Kunz, com um viés de pensamento computacional e em consonância com a Nova Base Curricular Comum (BNCC) [3].

### 4.1 A fundamentação da BNCC

À luz da nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Matemática desempenha um papel de destaque, o que é evidenciado ao analisar que ela sozinha corresponde a uma área de conhecimento, a qual é organizada em cinco unidades do conhecimento, a saber: números; álgebra; geometria; medidas e grandezas; probabilidade e estatística. O foco deste trabalho é na unidade de conhecimento Números em que propomos a ministração dos semigrupos numéricos como matéria a ser trabalhada em um itinerário formativo. Com efeito, a nova base preconiza que o ensino da Matemática no Ensino Médio deve ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental. Assim, dentro da unidade de conhecimentos Números, os Semigrupos Numéricos têm como fundamentos teóricos os conhecimentos aprendidos no Ensino Fundamental sobre os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  no tocante às características e peculiaridades de tais conjuntos, pois trabalha, em sua essência, com os conceitos de números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética, a divisibilidade e o máximo divisor comum (mdc). É importante observar que, além do estudo dos semigrupos numéricos propiciar a retomada de conteúdos ministrados no Ensino Fundamental, ela promove também a possibilidade de se aprofundar tais assuntos, pois, em sua base teórica, além dos conteúdos citados anteriormente, estão os conhecimentos iniciais sobre aritmética modular o qual é construído a partir desses conhecimentos anteriores. A base versa:

“A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a ampliação e o apro-



fundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, propõe, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, de modo a possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade”. [3, p. 517]

Indo além da retomada e do aprofundamento dos conteúdos ministrados no Ensino Fundamental, a base também preconiza que o ensino da matemática deve ter aplicação em conexão com a realidade e, claramente, uma das maneiras disso ocorrer é no contexto tecnológico. Assim, os argumentos anteriores mostram que o estudo dos semigrupos numéricos abordam aspectos preconizados pela nova Base Curricular e tal estudo aliado a alguma linguagem de programação promove mais ainda a imersão do estudante no contexto tecnológico, ou seja, além de aprofundar o conhecimento matemático e mostrar a aplicação desse objeto de conhecimento em uma área moderna e tecnológica, a ideia é utilizar em paralelo uma linguagem de programação como objeto de conhecimento e ferramenta para promover uma “matemática dinâmica e moderna”, como previsto na BNCC, a qual propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal visão possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de fluxogramas e algoritmos. Essa visão integrada da Matemática com um viés do pensamento computacional corrobora para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, o que proporciona aos estudantes e professores a ruptura do paradigma de que a disciplina é apenas um conjunto de regras e técnicas. Em contrapartida, percebe-se que a matemática faz parte de nossa cultura, de nossa história e de nosso cotidiano.

Na organização da base, como desdobramentos das unidades de conhecimento, tem-se as competências específicas e como desdobramento destas, as habilidades. As competências e habilidades promovem esse letramento matemático. Neste sentido, pode-se destacar a ministração dos semigrupos numéricos na competência 3 em consonância com a competência 4 no que tange ao aspecto computacional, em que a BNCC versa:

Competência 3: “Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos: aritmética; álgebra; grandezas e medidas; geometria; probabilidade e estatística; para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente”, [3, p. 523]

Competência 4: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatística, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a

favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático”, [3, p. 530]

No tocante às habilidades, a própria base ensina que onde a habilidade é citada é onde sua ocorrência é mais evidente e, neste sentido, observa-se o enquadramento dos semigrupos numéricos na habilidade 15 da competência 3 e na habilidade 6 da competência 4, conforme versa a Base:

(EM13MAT315) “Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma”, [3, p. 529].

(EM13MAT406) “Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou Matemática”, [3, p. 531].

Diante do exposto, apresentaremos sugestões de atividades para serem aplicadas que fomentam a ampliação e o aprofundamento dos conhecimentos sobre o conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ) e dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ), tal que as atividades estão organizadas em uma sequência didática em nível crescente.

## 4.2 Propostas de Atividades para o Ensino Médio

### *Atividade1*

**Público Alvo:** estudantes do Ensino Médio em uma disciplina Eletiva.

**Em que momentos aplicar:** Na primeira aula da disciplina eletiva

**Tempo estimado:** Duas aulas de 50 minutos.

**Objetivos:** Na atividade 1 temos como objetivo a imersão histórica na teoria dos semigrupos numéricos apresentando uma situação motivadora de caráter histórico por meio de um texto no qual se quer trabalhar no estudante a capacidade de interpretação de texto, inferência de dados e o cálculo do máximo divisor comum (mdc).

Objetivo do exercício 1: Calcular o mdc entre dois números como condição de verificação das condições do problema das moedas de Frobenius.

Objetivo do exercício 2: Inferir do texto qual é a fórmula para calcular o número de Frobenius uma vez satisfeitas as condições do problema.

### Da atividade 1

Orientações: Como sugestão o professor pode aplicar a atividade em folha impressa para cada estudante, a qual conterá o texto motivador e as perguntas deixando a primeira aula reservada para esta atividade. Os estudantes podem ser dispostos em grupos com até 4 componentes para realização da atividade e discussão das questões. Para a segunda aula o professor começa a correção comentada resolvendo no quadro os exercícios propostos. Para o exercício 1, estamos utilizando o Lema 1.12 do Capítulo 1 deste trabalho e o texto motivador como fundamentação teórica.

Texto motivador:

Como situação motivadora dessa teoria temos o famoso problema das Moedas de Frobenius, o qual consiste na seguinte situação: se em uma economia de um determinado lugar só existem duas cédulas de valores distintos, então qual é a maior quantia que não pode ser obtida utilizando esses dois tipos de cédulas? Por exemplo, supondo que na economia de um determinado lugar existam apenas cédulas de 5 e 7 unidades monetárias, qual é a maior quantia que não se pode obter ao se utilizar apenas cédulas de 5 e 7? Neste caso, a resposta é 23, sendo esta a maior quantidade que não pode ser obtida utilizando-se apenas cédulas de 5 e 7. Agora, se para essa mesma economia existirem apenas cédulas de 14, 15 e 17, a maior quantia que não pode ser obtida é de 69 unidades monetárias. Para a primeira situação e para a segunda situação as quantias 23 e 69 são chamados de número de Frobenius de cada um dos problemas. Tal nome foi dado em homenagem ao matemático Ferdinand Georg Frobenius, 1849 - 1917. Uma moderna versão do problema das moedas de Frobenius é o problema dos Nuggets do McDonalds. O McDonalds vende Nuggets em caixas com 6, 9 e 20 unidades, assim qual é a maior quantidade de Nuggets que não pode ser comprada? Para este problema é 43 a maior quantidade de Nuggets que não podem ser vendidos. Pode-se generalizar o problema das moedas de Frobenius para o seguinte enunciado: para uma economia cuja quantidade de tipos de cédulas tem valores  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , com  $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n$  tal que  $\text{mdc}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 1$ . Qual é o maior valor que não se pode obter utilizando apenas os tipos de cédulas disponíveis?

No caso em que a economia possui apenas dois tipos de cédulas de valores  $p$  e  $q$  com  $2 \leq p < q$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , tem-se que o número de Frobenius é dado por  $F = (p - 1)(q - 1) - 1$ . Uma consequência imediata deste resultado é que todo valor natural maior que  $F + 1$  pode ser obtido com os dois tipos de cédulas. Para uma quantidade de cédulas maior que ou igual a 3, a fórmula única que expresse o número de Frobenius ainda é um problema em aberto, já sendo conhecidos limites superiores para tal número.

A partir da história sobre o problema das moedas de Frobenius e seu aspecto teórico, responda as perguntas a seguir:

Exercício 1. Supondo que uma economia de um determinado lugar possua apenas dois tipos de cédulas de valores  $p$  e  $q$ . Para cada uma dos itens a seguir, responda se os valores propostos para  $p$  e  $q$  atendem aos requisitos do problema das moedas de Frobenius justificando sua resposta.

- a.  $p = 4$  e  $q = 12$ .
- b.  $p = 6$  e  $q = 27$ .
- c.  $p = 11$  e  $q = 15$ .
- d.  $p = 22$  e  $q = 57$ .
- e.  $p = 61$  e  $q = 97$ .

Respostas esperadas:

- a. Para  $p = 4$  e  $q = 12$  é esperado que o estudante conclua após efetuar os cálculos que  $\text{mdc}(4, 12) = 4 \neq 1$ , contrariando a premissa de se ter  $\text{mdc}(p, q) = 1$ .
- b. Para  $p = 3$  e  $q = 9$  é esperado que o estudante conclua após efetuar os cálculos que  $\text{mdc}(6, 27) = 3 \neq 1$ .
- c. Para  $p = 11$  e  $q = 15$  é esperado que previamente o estudante observe que a condição  $p, q \geq 2$  e que após efetuar os cálculos conclua que  $\text{mdc}(11, 15) = 1$ .
- d. Para  $p = 22$  e  $q = 57$  é esperado que previamente o estudante observe que a condição  $p, q \geq 2$  e que após efetuar os cálculos conclua que  $\text{mdc}(22, 57) = 1$ .
- e. Para  $p = 61$  e  $q = 97$  é esperado que previamente o estudante observe que a condição  $p, q \geq 2$  e que após efetuar os cálculos conclua que  $\text{mdc}(61, 97) = 1$ .

Exercício 2. Para os itens do exercício anterior, nas quais foram atendidas às condições do problema das moedas de Frobenius, calcular o número de Frobenius para cada uma delas.

Respostas esperadas:

Nas letras  $c$ ,  $d$  e  $e$  foram atendidas às condições do problemas das moedas de Frobenius, assim são esperadas as seguintes respostas:

- c. Para  $p = 11$  e  $q = 15$ , temos que  $F = (11 - 1)(15 - 1) - 1 = 139$ .
- d. Para  $p = 22$  e  $q = 57$ , temos que  $F = (22 - 1)(57 - 1) - 1 = 1175$ .
- e. Para  $p = 61$  e  $q = 97$ , temos que  $F = (61 - 1)(97 - 1) - 1 = 5759$ .

### *Atividade 2*

**Em que momento aplicar:** Após o professor ter definido o que são coordenadas de Kunz, ter classificado cada uma das coordenadas e explicado o sistema de desigualdades.

**Tempo estimado:** Duas aulas de 50 minutos.

**Objetivos:** Na atividade 2 temos como objetivo a imersão do estudante na teoria dos semigrupos numéricos, em particular das coordenadas de Kunz por meio de uma sequência didática em nível crescente e concatenados que vão conduzir ao estudante, por meio de uma sequência de procedimentos, verificar se uma determinada coordenada pode representar ou não as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico até a etapa mais avançada que é determinar a quantidade de filhos que serão gerados pelas coordenadas de Kunz de forma que estas etapas e procedimento conduzam ao estudante para a ideia de um fluxograma, cuja elaboração ocorrerá na atividade 3.

Objetivo do exercício 1: Reconhecer a qual conjunto numérico pertencem os números pertencentes às coordenadas propostas verificando sua compatibilidade com as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

Objetivo do exercício 2: Compreender como aplicar o sistema de desigualdades para reconhecer quando um conjunto de coordenadas inteiras positivas representam as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

Objetivo do exercício 3: Classificar as coordenadas dentre permanentes, supérfluas e geradoras.

Objetivo do exercício 4: Interpretar a classificação das coordenadas para determinar a quantidade de filhos gerados.

### **Da atividade 2**

**Orientações:** Como sugestão o professor pode aplicar a atividade em folha impressa para cada estudante, a qual conterà o texto motivador e as perguntas deixando a primeira aula reservada para esta atividade. Os estudantes podem ser dispostos em grupos com até 4 componentes para realização da atividade e discussão das questões. Para a segunda aula o professor começa a correção comentada resolvendo no quadro os

exercícios propostos. Para os exercícios 1, 2 e 3, estamos utilizando as Proposições 1.21 e 1.22, o Teorema 1.23 e a Definição 1.26 deste trabalho como fundamentação teórica.

Exercício 1. Verifique dentre as coordenadas a seguir quais podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico justificando sua resposta.

- a.  $(1, \frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{4})$
- b.  $(-3, -2, -1, 0, 1, 2)$
- c.  $(1, 2, \pi, \varphi, \frac{1}{3})$
- d.  $(1, 2)$
- e.  $(2, 5)$
- f.  $(2, 1, 1)$
- g.  $(1, 2, 1)$
- h.  $(2, 1, 5)$

Respostas esperadas.

- a. Para  $(1, \frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{4})$  espera-se que o estudante responda que tal 6-uplas não pode representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos e  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$  são números não inteiros.
- b. Para  $(-3, -2, -1, 0, 1, 2)$  espera-se que o estudante responda que tais coordenadas não podem ser as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos e  $-3, -2, -1$  são números inteiros negativos além do zero pertencer as coordenadas citadas.
- c. Para  $(1, 2, \pi, \varphi, \frac{1}{3})$  espera-se que o estudante responda que tais coordenadas não podem ser as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos e  $\pi, \varphi$  são números irracionais e  $\frac{1}{3}$  é um número não inteiro.
- d. Para  $(1, 2)$  podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos.
- e. Para  $(2, 5)$  podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos.

- f. Para  $(2, 1, 1)$  podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos.
- g. Para  $(1, 2, 1)$  podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos.
- h. Para  $(2, 1, 5)$  podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois tais coordenadas são compostas apenas de números inteiros positivos.

Exercício 2. Dentre as alternativas que podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, quais dentre elas de fato correspondem as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico. Justifique sua resposta.

Respostas esperadas.

As respostas corretas para o exercício 1 são os itens  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  e  $h$  dentre as quais as letras  $d$ ,  $f$  e  $h$  correspondem as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, pois o sistema de desigualdades é atendido.

- (i). Para  $(1, 2)$ , tem-se  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 2$ , assim:

$$\begin{cases} 2k_2 + 1 \geq k_1 \\ 2k_1 \geq k_2 \end{cases}$$

Substituindo os valores de  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 2$ :

$$\begin{cases} 2 \cdot (2) + 1 \geq 1 \\ 2 \cdot (1) \geq 2 \end{cases}$$

Portanto,  $(1, 2)$  correspondem às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

- (ii). Para  $(2, 5)$ , tem-se  $k_1 = 2$  e  $k_2 = 5$ , assim:

$$\begin{cases} 2 \cdot (5) + 1 \geq 2 \\ 2 \cdot (2) \leq 5 \end{cases}$$

Portanto,  $(2, 5)$  não correspondem às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

- (iii). Para  $(2, 1, 1)$ , tem-se  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$  e  $k_3 = 1$ , assim:

$$\begin{cases} 2 \cdot (2) \geq 1 \\ (1) + (1) + 1 \geq 2 \\ 2(1) + 1 \geq 1 \\ (2) + (1) + 1 \geq 1 \end{cases}$$

Portanto,  $(2, 1, 1)$  correspondem às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

(iv). Para  $(1, 2, 1)$ , tem-se  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$  e  $k_3 = 1$ , assim:

$$\begin{cases} 2 \cdot (1) \geq 1 \\ (1) + (1) + 1 \geq 2 \\ 2(1) + 1 \geq 1 \\ (2) + (1) + 1 \geq 1 \end{cases}$$

Portanto,  $(1, 2, 1)$  correspondem às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

(v). Para  $(2, 1, 5)$ , tem-se  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$  e  $k_3 = 5$ , assim:

$$\begin{cases} 2 \cdot (2) \geq 1 \\ (1) + (5) + 1 \geq 2 \\ 2(5) + 1 \geq 1 \\ (2) + (1) + 1 \leq 5 \end{cases}$$

Portanto,  $(2, 1, 5)$  não correspondem às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

Exercício 3. Para as coordenadas do exercício 2 que correspondem às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, classifique cada uma das coordenadas em permanentes, supérfluas ou geradoras. Justifique sua resposta.

Respostas esperadas.

(i). Aplicando a Proposição 1.21, para  $(1, 2)$  temos  $k_1 + k_1 = 2 = k_2$ , logo  $k_2$  é uma coordenada supérflua. Note também que, pela Definição 1.8,  $k_1 < k_2 = k_\alpha$ , portanto,  $k_1$  é uma coordenada permanente.

(ii). Aplicando a Proposição 1.22, para  $(1, 2, 1)$ , temos  $k_1 + k_1 = 2 = k_2$ , logo,  $k_2$  é uma coordenada supérflua. Note que, pela Definição 1.26,  $k_1 < k_2 = k_\alpha$ , portanto,  $k_1$  é uma coordenada permanente. Note também que  $k_3 + 1 = 2 = k_\alpha$  portanto,  $k_3$  não



é coordenada permanente e claramente não é coordenada supérflua, logo é coordenada geradora.

(iii). Aplicando a Proposição 1.22, para  $(2, 1, 1)$ , temos  $k_1 + k_1 = 2 = k_2$ , logo,  $k_2$  é uma coordenada supérflua. Note que, pela Definição 1.26,  $k_1 < k_2 = k_\alpha$ , portanto,  $k_1$  é uma coordenada permanente. Note também que  $k_3 + 1 = 2 = k_\alpha$  portanto,  $k_3$  não é coordenada permanente e claramente não é coordenada supérflua, logo é coordenada geradora.

Para  $(2, 1, 1)$ , temos  $\alpha = 1$  e  $k_\alpha = 2$ , assim aplicando a Proposição 1.22 e pela Definição 1.26, temos  $k_\alpha = 2 < 1 + 1 + 1 = 3 = k_2 + k_3 + 1$ , logo  $k_\alpha = k_1 = 2$  não é coordenada supérflua e claramente não é coordenada permanente. Note que para  $k_2 = 1$  e  $k_3 = 1$ , temos que ambas coordenadas não são permanentes, pois  $k_2 + 1 = k_3 + 1 = 1 + 1 = k_\alpha = 2$ . Além disso, percebe-se claramente que  $k_2$  e  $k_3$  não são coordenadas supérfluas, logo são coordenadas geradoras.

Exercício 4. Após classificar as coordenadas do exercício 3, determine a quantidade de filhos gerados por elas.

Respostas esperadas.

(i) Para  $(1, 2)$  não há filhos, pois não possui coordenadas geradoras.

(ii) Para  $(1, 2, 1)$  há a geração de apenas um filho, pois apenas  $k_3$  é coordenada geradora.

(iii) Para  $(2, 1, 1)$  há a geração de três filhos, pois as três coordenadas são geradoras.

### Atividade 3

**Em que momento aplicar:** Após o professor ter aplicado a Atividade 2.

**Tempo estimado:** Duas aulas de 50 minutos.

**Objetivos:** Na atividade 3 temos como objetivo a imersão do estudante na teoria dos semigrupos numéricos, em particular das coordenadas de Kunz, com a construção de um fluxograma com os estabelecimento de um algoritmo para a resolução do problema proposto.

Orientações: Como sugestão, o professor pode aplicar a atividade em folha impressa para cada estudante deixando-os dispostos em grupos com até 4 componentes para realização da atividade e discussão do exercício. A folha impressa conterá o enunciado do exercício com o espaço para a construção do fluxograma. Caso haja recursos

computacionais na escola, o professor pode pedir para que os estudantes construam o fluxograma com auxílio de ferramentas digitais tais como Canva, Microsoft Power Point, Google Apresentações e outros aplicativos e sites destinados a tal finalidade. Para a segunda aula o professor propõe que cada grupo de estudantes apresente para a turma o fluxograma construído para a discussão do processo e análise de eficiência dos procedimentos. Para esta atividade, estamos utilizando as Proposições 1.21 e 1.22 e o Teorema 1.23 do capítulo 1; Lemas 3.1 e 3.2 e Teorema 3.6 do capítulo 3 deste trabalho como fundamentação teórica.

Exercício. Construir um fluxograma, a partir de coordenadas dadas, que descreva por meio de etapas e procedimentos as seguintes tarefas:

1. Verificar se as  $n$ -uplas de entradas podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.
2. A partir das  $n$ -uplas que podem representar as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, verificar quais de fato correspondem as coordenadas de um semigrupo numérico.
3. Classificar as coordenadas que correspondem as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico do item anterior.
4. Determinar a quantidade de filhos gerados pelas coordenadas do item anterior.

Sugestão de resposta.

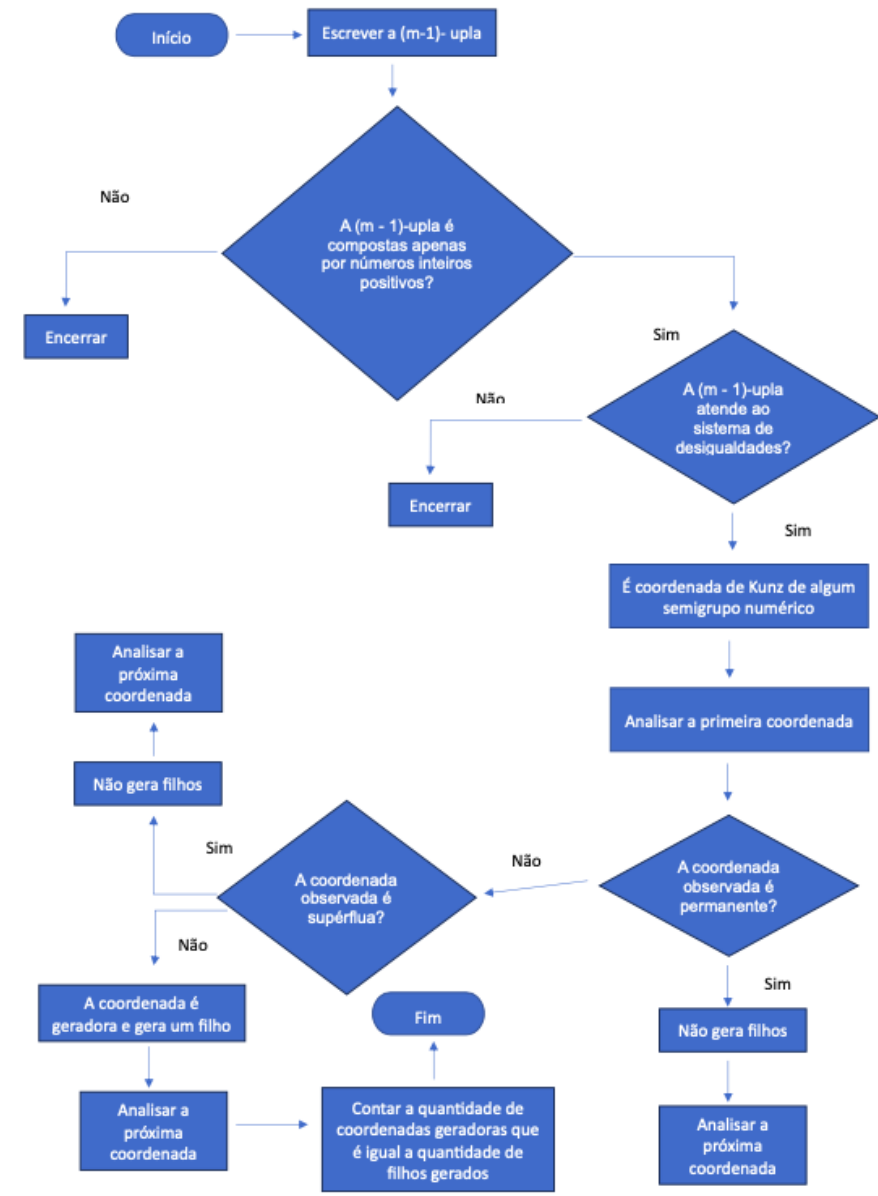


Figura 4.1: Fluxograma da Atividade 3

*Atividade 4*

**Em que momento aplicar:** Após o professor ter aplicado a Atividade 3.

**Tempo estimado:** Duas aulas de 50 minutos.

**Objetivos:** Na atividade 3 temos como objetivo a imersão do estudante na teoria dos semigrupos numéricos com auxílio do pensamento computacional.

Orientações: Como sugestão, o professor pode aplicar a atividade em folha impressa para cada estudante deixando-os dispostos em grupos com até 4 componentes para realização da atividade e discussão do exercício. A folha impressa conterá o enunciado do exercício com o espaço para a construção do fluxograma. Caso haja recursos computacionais na escola, o professor pode pedir para que os estudantes construam o código ou pseudocódigo com auxílio de ferramentas digitais tais como Python, Microsoft Word, Google Docs e outros aplicativos e sites destinados a tal finalidade. Para a segunda aula o professor propõe que cada grupo de estudantes apresente para a turma o código ou pseudocódigo construído para a discussão e análise de eficiência dos procedimentos.

Exercício. Construir um código ou pseudocódigo de decisão, a partir de coordenada de Kunz de um semigrupo numérico dadas, que encontre as coordenadas permanentes.

- a.  $(1, 2)$
- b.  $(2, 1)$
- c.  $(1, 2, 1)$
- d.  $(2, 1, 1)$

Sugestão de resposta.

Para  $(1, 2, 1)$ , escrevendo um pseudocódigo, temos:

Digitar a quantidade  $n$  de coordenadas:

Entrada:  $n = 3$ .

Digitar cada uma das coordenadas:

1. Entrada:  $k_1 = 1$ .

2. Entrada:  $k_2 = 2$ .

3. Entrada:  $k_3 = 1$ .

Definir  $\alpha := \max\{i \in \{1, \dots, m-1\} : k_i \geq k_j, \forall j \in \{1, \dots, m-1\}\}$  e  $k_\alpha$  como a coordenada de Kunz na posição  $\alpha$ .

Para cada  $i$  verificar:

- (1) Se  $i < \alpha$  e se  $k_i < k_\alpha$ , então responder coordenada permanente.
- (2) Se  $i > \alpha$  e  $k_i + 1 < k_\alpha$ , então responder coordenada permanente.
- (3) Caso contrário, responder não permanente.

# Capítulo 5

## Considerações finais

Neste trabalho foi pavimentado um caminho para a análise dos semigrupos numéricos e construção da árvore via coordenadas de Kunz. Definimos inicialmente o que é um semigrupo numérico, seus invariantes, o conjunto de geradores de um semigrupo numérico, o conjunto de Apéry e mostramos exemplos. A partir da definição do conjunto de Apéry seguimos para a definição das coordenadas de Kunz e mostramos como encontrar tais coordenadas conhecendo seu respectivo conjunto de Apéry. Bem definidas as coordenadas de Kunz enunciamos e provamos proposições que nos ajudam a verificar quando uma  $(m - 1)$ -upla  $\in \mathbb{N}^{m-1}$  corresponde às coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, começando com uma dupla, depois uma tripla e o caso geral para  $(m - 1)$ -upla, a saber:

$$\begin{cases} k_i + k_j \geq k_{i+j}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m - 1, i + j \leq m - 1 \\ k_i + k_j + 1 \geq k_{i+j-m}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m - 1, i + j > m \end{cases}$$

Posteriormente, mostramos como obter a multiplicidade, o gênero, a número de Frobenius, o condutor e a profundidade de um semigrupo numérico com base em suas respectivas coordenadas de Kunz e propomos uma classificação que será utilizada na descrição do algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos.

Definimos também o que são os gapsets e as filtrações de gapsets, com o objetivo de apresentar uma outra maneira de analisar um semigrupo numérico, pelo fato do gapset de um semigrupo numérico ser um conjunto finito, o que pode facilitar as análises e compreensões.

Bem definidos os gapsets, suas respectivas filtrações e a partição canônica, enunciamos e demonstramos um teorema sobre a caracterização de gapsets de multiplicidades  $m = 3$  por suas respectivas filtrações na ótica das filtrações de gapsets e o redemonstramos o teorema na ótica das coordenadas de Kunz. O teorema versa que:

As filtrações de gapsets de multiplicidade  $m = 3$  são dos seguintes formatos:

1.  $(12)^r(1)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow 0 \leq s \leq r + 1$  e  $r \geq 1$ ;

2.  $(12)^r(2)^s$  é filtração de gapset  $\Leftrightarrow 0 \leq s \leq r$  e  $r \geq 1$ .

A partir do resultado anterior pudemos definir uma função injetiva e enunciamos e demonstramos o seguinte teorema: Para todo  $g \geq 1$ , existe uma função injetiva  $f : \mathcal{F}(g, 3) \rightarrow \mathcal{F}(g+1, 3)$ , a qual avalia o comportamento da quantidade de gapsets de gênero  $g$  e multiplicidade  $m = 3$ , quando acrescentamos 1 ou 2 na filtração de posição  $r+1$  a partir da sua partição canônica e, em seguida, verificamos se o novo conjunto gerado é um gapset e sob quais condições o novo conjunto permanece um gapset.

Em seguida, ampliamos o teorema que caracteriza gapsets por suas respectivas filtrações para multiplicidade  $m = 4$  enunciando-o e o demonstrando um dos na ótica das filtrações de gapsets e em seguida o redemonstramos na ótica das coordenadas de Kunz. O teorema versa que:

As filtrações de gapset de multiplicidade  $m = 4$  são dos seguintes formatos:

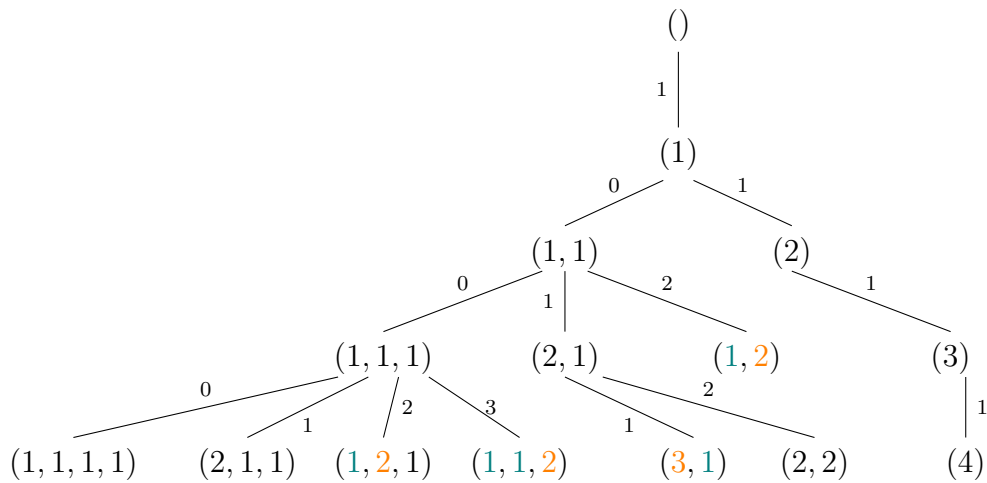
1.  $F = (123)^r(23)^s(3)^t$ , para  $s \leq r$  e  $t \leq r$ .
2.  $F = (123)^r(23)^s(2)^t$ , para  $s+t \leq r$ .
3.  $F = (123)^r(13)^s(3)^t$ , para  $t \leq r$ .
4.  $F = (123)^r(13)^s(1)^t$ , para  $t \leq r+1$ .
5.  $F = (123)^r(12)^s(2)^t$ , para  $s+t+1 \leq r$  e  $t \leq r+s$ .
6.  $F = (123)^r(12)^s(1)^t$ , para  $s \leq r+1$  e  $t \leq r+1$ .

Após os resultados anteriores seguimos para a construção da árvore dos semigrupos numéricos a partir dos resultados de Brás-Amorós [4] e, em seguida, rumamos para a descrição do algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz. Antes da apresentação do algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos, propomos para cada uma das  $(m-1)$ -uplas em  $\mathbb{N}^{m-1}$ , uma classificação de cada uma das suas coordenadas, cujo objetivo é nortear a construção da árvore indicando a classificação do semigrupo numérico associado, a existência ou não de filhos e a quantidade destes. Assim, classificamos as coordenadas dentre três possibilidades, a saber: coordenadas geradoras, coordenadas permanentes e coordenadas supérfluas. A coordenada permanente está associada a um gerador minimal menor que o número de Frobenius e a definimos como:

Seja  $S$  um semigrupo numérico tal que  $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ . Dizemos que uma coordenada permanente de  $S$  se um dos seguintes itens ocorre:

- a.  $v < \alpha$  e  $k_v < k_\alpha$ ;
- b.  $v > \alpha$  e  $k_v + 1 < k_\alpha$ .

Figura 5.1: Árvore dos semigrupos numéricos por coordenadas de Kunz com cores



A coordenada supérflua está associada a um elemento do conjunto de Apéry que não é gerador minimal, sendo este uma combinação linear de geradores minimais e o definimos como: uma coordenada de  $S$  é supérflua se existem  $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$ , satisfazendo um dos seguintes itens:

- $k_i + k_j = k_l$ , com  $i + j < m$ ;
- $k_i + k_j + 1 = k_l$ , com  $i + j > m$ .

A coordenada geradora está associada a um gerador minimal maior que o número de Frobenius e a definimos como aquela que não permanente e nem geradora.

Feita a classificação das coordenadas seguimos para a descrição do algoritmo para a construção da árvore dos semigrupos numéricos via pelas coordenadas de Kunz, e em seguida atribuímos cores às coordenadas, para se ter uma visualização mais imediata da classificação dos semigrupos numéricos gerados, quais coordenadas vão gerar filhos e quais não vão e quantos serão. Atribuímos a cor verde às coordenadas permanentes, a cor laranja para as coordenadas supérfluas e a cor preta para as coordenadas geradoras, obtendo a versão dada pela Figura 5.1 para a árvore dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz.

A partir da construção da árvore dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz, fizemos duas observações, primeira estabelecendo uma conexão com o Teorema 2.2 em que encontramos ramificações formadas por semigrupos numéricos de multiplicidade  $m = 3$  que possuem uma quantidade infinita de semigrupos numéricos, os quais são formados pelo conjunto



$$A_3 = \{(x, x), (x + 1, x) : x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), \dots, (n, n), (n + 1, n), \dots\}$$

A segunda observação estabelece conexão com o Teorema 2.13 em que encontramos ramificações formadas por semigrupos numéricos de multiplicidade  $m = 3$  que possuem uma quantidade infinita de semigrupos numéricos, os quais são formados pelo conjunto:

$$A_4 = \{(x, x, x), (x + 1, x, x), (x + 1, x + 1, x) : x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), \dots, (n, n, n), (n + 1, n, n), (n + 1, n + 1, n), \dots\}.$$

Encerramos a nossa análise dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz fazendo a caracterização das coordenadas associadas a semigrupos numéricos filhos a partir das coordenadas associadas ao semigrupo gerador a partir da observação das coordenadas permanentes e geradoras. Agora, qual o comportamento das coordenadas supérfluas na gerações futuras? Uma coordenadas supérflua pode ser tornar uma coordenada geradora e conseqüentemente uma coordenada permanente? Não trabalhamos tais questões neste trabalho e deixamos tais indagações como sugestões de tópicos para trabalhos futuros.

Finalizamos este trabalho com propostas de atividades para o Ensino Médio em que apresentaremos sugestões de atividades para serem aplicadas que fomentam a ampliação e o aprofundamento dos conhecimentos sobre o conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ) e dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ) e a teoria dos semigrupos numéricos pelas coordenadas de Kunz, abordadas nesse trabalho, tal que as atividades estão organizadas em uma sequência didática em nível crescente de dificuldade e abordam as seguintes competências da base: (EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma. (EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou Matemática. Nossa expectativa com tais atividades é promover o estudo mais aprofundado do conjuntos dos números naturais e do conjunto dos números inteiros, apresentando outras abordagens para tais conjuntos que estão além do que é ministrado regularmente na escola, estar em consonância com a BNCC para fomentarmos nos estudantes o pensamento computacional e a estruturação organizada de procedimentos para resolução de problemas, em que tal habilidade que será em qualquer área do conhecimento para a qual o estudante se interessar.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bernardini, M., Counting Numerical Semigroups by Genus and even Gaps and Some Generalizations. Patterns on Numerical Semigroups. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2017.
- [2] Bernardini, M.,.: Counting Numerical Semigroups by Genus and Even Gaps via Kunz-Coordinate Vectors. In: Barucci, V., Chapman, S., D’Anna, M., Fröberg, R. (eds) Numerical Semigroups . Springer INdAM Series, vol 40. Springer, Cham. (2020).
- [3] Brasil, Base Nacional Comum Curricular, Brasília: MEC, 2017, Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC-12nov-site.pdf>,(acessado em dezembro de 2023).
- [4] Bras-Amorós, M.: *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum **76**, 379 – 384 (2008).
- [5] Bras-Amorós, M.: *Bounds on the number of Numerical Semigroups of a Given Genus*, Journal of Pure and Applied Algebra **213** (6), 997 – 1001 (2009).
- [6] Eliahou, S., Fromentin, J.: *Gapsets and numerical semigroups*, J. of Comb. Theory, Series A **169**, 105 – 129 (2020).
- [7] Eliahou, S., Fromentin, J.: *Gapsets of Small Multiplicity*. In: Barucci, V., Chapman, S., D’Anna, M., Fröberg, R. (eds) Numerical Semigroups . Springer INdAM Series, vol 40. Springer, Cham. (2020).
- [8] García-Sánchez, P., Marín-Aragón, D., Robles-Pérez, A.: *The tree of numerical semigroups with low multiplicity*, arXiv:1803.06879, (2018).
- [9] García-Sánchez, P.A., Rosales, J.C.: Numerical semigroups, Developments in Mathematics vol. 20, Springer, New York (2009).
- [10] Kaplan, N.: *Counting numerical semigroups*, Am. Math. Mon. **124**, 862 – 875 (2017).

- 
- [11] Rosales, J. C., García-Sánchez, P. A., García-García, J. I., Branco, M. B., *System of Inequalities and Numerical Semigroups*, J. Lond Math. Soc. **65** (3), 611 – 623 (2002).
- [12] Rosales, J. C., *Numerical Semigroups with Multiplicity Three and Four*, Semigroup Forum **71**, 323 – 331 (2005).
- [13] Sylvester, J. J., *Mathematical Questions with their Solutions*, Educational Times **41**, 21 (1884).