Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM

Iago Barros dos Anjos Silva

Brasília
2024

Iago Barros dos Anjos Silva

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues.

Brasília

2024

Posição vertical

Iago Barros dos Anjos Silva

Análise Combinatória: uma abordagem com base em questões do ENEM / Iago Barros dos Anjos Silva. – Brasília, 2024-

85 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM, 2024.

1. Abordagem metodológica. 2. Análise Combinatória. 3. ENEM. I. Rodrigues, Luciana Maria Dias de Ávila. II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Título

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM BASE EM QUESTÕES DO ENEM

por

IAGO BARROS DOS ANJOS SILVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 02 de maio de 2024

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues - MAT/UnB (Orientadora)

Documento assinado digitalmente
gov.br
SIMONE VASCONCELOS DA SILVA
Data: 07/05/2024 16:05:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Simone Vasconcelos da Silva - MAT/UnB (Membro Interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br
SANDRA IMACULADA MOREIRA NETO
Data: 07/05/2024 15:35:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto - UEMA (Membro Externo)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida.

Agradeço a todas as pessoas que desejam o meu bem. Em especial, agradeço a minha família e aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis durante o curso.

Agradeço a todos os meus professores e colegas do PROFMAT que de alguma forma contribuiram para a minha formação acadêmica.

Agradeço a minha orientadora, professora Doutora Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues, por toda a colaboração e empenho para a construção deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho apresenta uma proposta de abordagem metodológica a respeito do conteúdo Análise Combinatória e visa analisar como uma atividade elaborada acerca desse assunto, fundamentada em questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pode contribuir para o aprendizado dos discentes do terceiro ano do Ensino Médio em uma escola pública. Em particular, esta pesquisa aborda as competências e habilidades associadas à Combinatória, conforme definidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), discute aspectos relevantes acerca do ENEM e analisa como o livro didático, utilizado pelos estudantes participantes da pesquisa, trata o conteúdo Análise Combinatória. Além disso, este estudo explora conceitos e exemplos relacionados aos seguintes temas: princípio multiplicativo, princípio aditivo, permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo simples e combinação simples. Ademais, é feita uma análise das respostas dos alunos participantes da pesquisa em relação a uma atividade elaborada sobre Análise Combinatória, baseada em questões do ENEM, e das justificativas associadas às alternativas de cada questão dessa atividade. Com base nos resultados obtidos, é conduzido um trabalho de intervenção pedagógica para os discentes que participaram deste trabalho. Nesse contexto, a pesquisa apresenta indicativos de que esse tipo de abordagem pode contribuir para o processo de preparação dos alunos para responder à prova do ENEM, bem como para a formação geral dos estudantes.

Palavras-chave: Abordagem Metodológica. Análise Combinatória. ENEM.

Abstract

The present work presents a proposal for a methodological approach regarding the content of Combinatorial Analysis and aims to analyze how an activity elaborated on the subject, based on questions from the National High School Exam (ENEM), can contribute to the learning of students in the third year of high school in public schools. In particular, this research addresses the skills and skills associated with Combinatorics, as defined by the National Common Core Curricular (BNCC), discusses relevant aspects about ENEM and analyzes how the book didactic, used by students participating in the research, deals with the content Analysis Combinatorics. Furthermore, this study explores concepts and examples related to following themes: multiplicative principle, additive principle, simple permutation, permutation with repeated elements, simple arrangement and simple combination. Furthermore, it is an analysis of the responses of students participating in the research was carried out in relation to a activity developed on Combinatorial Analysis, based on ENEM questions, and the justifications associated with the alternatives for each question in this activity. Based on the results obtained, pedagogical intervention work is conducted for the students who participated in this work. In this context, the research presents indications that this type of approach can contribute to the process of preparing students to take the ENEM test, as well as to the general training of students.

Keywords: Methodological Approach. Combinatorial Analysis. ENEM.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A Matemática desempenha um papel fundamental na formação educacional dos indivíduos, sendo uma disciplina que permeia diversos aspectos da vida cotidiana e do desenvolvimento acadêmico. Uma pergunta frequente realizada pelos discentes aos professores de Matemática em sala de aula é: "Em qual momento será utilizado esse conceito matemático no cotidiano?". Nesse contexto, é importante que o ensino da Matemática valorize as situações do mundo real, de forma que, por meio da contextualização, seja possível associar a teoria com a prática. Desse modo, é fundamental que os docentes abordem questões que buscam provocar o interesse e a reflexão dos educandos.

De acordo com Tufano (2002, p. 41), contextualizar é a primeira incumbência do professor ao ensinar um conteúdo, sendo possível, através da contextualização, criar um ambiente adequado para a aprendizagem dos alunos, transformando um processo que poderia ser difícil em um ato prazeroso.

No contexto educacional brasileiro, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma avaliação de grande relevância, pois não apenas serve como critério de seleção para ingresso no ensino superior, mas também é um indicador do nível de preparação dos estudantes em diversas áreas do conhecimento, incluindo a Matemática. Dentre os tópicos abordados na prova de Matemática do ENEM, a Análise Combinatória destaca-se como um tema que exige dos alunos não somente o domínio de conceitos específicos, mas também a capacidade de resolver problemas de forma estratégica e criativa. Em geral, as questões sobre esse assunto abordam os conceitos matemáticos de forma contextualizada.

No entanto, a experiência de muitos alunos em relação ao conteúdo Análise Combinatória tem sido desafiadora, evidenciando a necessidade de estratégias de ensino mais eficazes e acessíveis. É imprescindível que os discentes consigam desenvolver as competências e habilidades associadas à área de conhecimento "Matemática e suas Tecnologias" do ENEM. Para que isso aconteça, faz-se necessário que professores e estudantes possuam ferramentas que possibilitem uma aprendizagem significativa.

Neste contexto, esta dissertação apresenta uma abordagem para o ensino aprendizagem de Análise Combinatória elaborada especialmente no contexto do ENEM e busca avaliar a sua influência sobre o desempenho dos estudantes e o processo de preparação para a realização dessa prova. Foi realizada uma pesquisa das provas anteriores do ENEM por meio do site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), e foi feita uma seleção das questões da área de conhecimento "Matemática e suas Tecnologias" entre os anos de 2009 a 2022, sendo selecionadas somente as questões que abordavam o assunto Análise Combinatória.

Depois dessa primeira seleção, foram escolhidas 10 questões que formaram a atividade aplicada em quatro turmas de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública. Após a aplicação dessa atividade, foi feita uma análise das resoluções dos alunos. E logo em seguida, com base nos resultados encontrados, foi realizado um trabalho de intervenção pedagógica para os estudantes sobre o conteúdo Análise Combinatória.

Os aspectos técnicos utilizados neste trabalho foram os seguintes: pesquisa bibliográfica e estudo de caso de natureza exploratória-descritiva. A respeito do método de abordagem, esta pesquisa pode ser classificada como quantitativa e qualitativa.

A presente dissertação constitui-se de quatro capítulos. Na sequência, será apresentado como está organizado os capítulos deste trabalho.

No capítulo 1 são abordados os seguintes temas: Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e livro didático. Em particular, são apresentadas as competências e habilidades sobre Análise Combinatória que os estudantes devem desenvolver durante a educação básica de acordo com a BNCC. Além disso, é abordado como funciona a prova do ENEM e a relação existente entre esse Exame e os conceitos de Combinatória. Para concluir esse capítulo, é feita uma análise a respeito da abordagem do livro didático de Matemática, utilizado pelo professor regente e pelos alunos participantes desta pesquisa, com relação ao conteúdo Análise Combinatória.

No capítulo 2 são apresentados conceitos básicos e exemplos a respeito dos seguintes tópicos sobre Análise Combinatória que são abordados na prova de Matemática do ENEM: princípio multiplicativo, princípio aditivo, permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo simples e combinação simples. Os temas explorados nesse capítulo são fundamentais para o entendimento acerca do que será abordado nos capítulos subsequentes.

No capítulo 3 são abordados os procedimentos metodológicos que foram utilizados para a realização desta pesquisa. Esse capítulo é composto por 3 seções: Caracterização da pesquisa; Etapas da pesquisa e Descrição do processo de aplicação das atividades.

No capítulo 4 é apresentada uma descrição a respeito do perfil dos alunos participantes deste trabalho e feita uma análise acerca das resoluções desses discentes com relação a uma atividade elaborada sobre Análise Combinatória baseada nas questões do ENEM. Em especial, são apresentadas as justificativas com relação às opções de cada questão dessa atividade e são mostrados dados estatistícos referentes às respostas dos alunos. Ademais, é feita uma descrição acerca da intervenção pedagógica realizada com os estudantes com base nos resultados encontrados. Para finalizar, são apresentadas as respostas do professor regente e dos estudantes relacionadas às perguntas sobre os procedimentos metodológicos adotados durante a pesquisa.

Capítulo 1

BNCC, ENEM E LIVRO DIDÁTICO

Neste capítulo são apresentadas as habilidades relacionadas ao conteúdo Análise Combinatória que os estudantes devem desenvolver durante a educação básica de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Além disso, são abordados alguns aspectos importantes a respeito do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Ademais, é analisado como o livro didático de Matemática utilizado pelos alunos participantes da pesquisa aborda o assunto Análise Combinatória.

1.1 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é definida como:

> [...] um documento de caráter normativo que define um conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7, grifo original).

Dessa forma, a BNCC é um documento que visa, por meio das aprendizagens essenciais, proporcionar aos discentes o desenvolvimento de dez competências gerais durante a Educação Básica (BRASIL, 2018, p. 8). Nesse contexto, o conceito de competência é definido da seguinte forma:

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8).

A BNCC sugere que o aluno seja protagonista do seu processo de aprendizagem, de forma que o conhecimento não seja apenas fragmentado por disciplinas, mas que por meio do contexto, o ato de aprender faça sentido para o estudante (BRASIL, 2018, p. 15).

Nesse sentido, aprender Matemática está associado a compreender os significados dos conceitos matemáticos e relacioná-los aos contextos diversos do cotidiano (BRASIL, 2018, p. 528). Para isso, é fundamental que a Matemática seja analisada como uma área de conhecimento que se conecta com as outras e não como um componente curricular isolado.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN's): "É precisamente no aprender a aprender que deve se centrar o esforço da ação pedagógica, para que, mais que acumular conteúdos, o estudante desenvolva a capacidade de aprender, de pesquisar e de buscar e (re)construir conhecimentos"(BRASIL, 2013, p. 181).

Seguindo as orientações da BNCC, serão analisadas as habilidades referentes ao conteúdo Análise Combinatória que devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo de toda a educação básica, especificamente, durante o Ensino Fundamental (anos iniciais e anos finais) e durante o Ensino Médio.

Segundo a BNCC de Matemática, durante o quinto ano do Ensino Fundamental - anos iniciais, um dos objetos de conhecimento relacionados à unidade temática números é o seguinte: Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?". Uma das habilidades referente à essa unidade temática e esse objeto de conhecimento é:

> Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas (BRASIL, 2018, p. 295).

Na BNCC de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, durante o oitavo ano, o estudante deve desenvolver, dentre outras, a seguinte habilidade relacionada à unidade temática números e ao objeto de conhecimento princípio multiplicativo da contagem: Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (BRASIL, 2018, p. 312-313).

Ainda em conformidade com a BNCC, cabe destacar que "[...] no Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Relacionadas a cada uma delas, são indicadas, posteriormente, habilidades a ser alcançadas nessa etapa."(BRASIL, 2018, p. 530).

De acordo com a BNCC, tem-se que a competência específica 3 da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio é:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535-536).

Uma das habilidades relacionadas a esta competência é a seguinte: "Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore"(BRASIL, 2018, p. 537).

Assim, apesar do conteúdo Análise Combinatória disponibilizar de fórmulas para a resolução de alguns problemas específicos, existem diferentes estratégias de solução para uma mesma pergunta. Ademais, para que um problema de Combinatória seja resolvido de forma correta, é fundamental o uso da criatividade e o entendimento integral do contexto descrito na questão (MORGADO et al., 2004, p. 2).

Morgado et al. (2004, p. 2) ressalta ainda que o entendimento dos conceitos relacionados à Análise Combinatória não pode estar associado somente a aplicação de fórmulas difíceis, porém faz-se necessário que o estudante seja habituado a interpretar cada problema acerca desse tema de forma cuidadosa.

Portanto, conforme as orientações da BNCC e por meio da compreensão da importância do desenvolvimento das habilidades relacionadas à Análise Combinatória, é possível perceber como é fundamental que o estudante, ao concluir o Ensino Médio, consiga resolver e elaborar problemas em diferentes contextos a respeito desse assunto.

1.2 Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)

A respeito do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Rabelo (2013, p. 50) destaca que:

> Implantado em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) centra-se na avaliação individual de desempenho por competências ao final da educação básica. Tem como eixos estruturadores a interdisciplinaridade e a contextualização dos conhecimentos expressos na forma de situações-problema.

Nesse contexto, Rabelo (2013, p. 50-51) salienta que a partir de 2009, o ENEM tornou-se um meio do estudante ter acesso ao ensino superior, sendo um Exame composto por quatro áreas de conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (incluindo redação); Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias.

A matriz de referência do ENEM é constituída pelos seguintes eixos cognitivos (comuns a todas as áreas de conhecimento): dominar linguagens; compreender fenômenos; enfrentar situações-problema; construir argumentação; elaborar propostas (BRASIL, 2009a).

Assim, visando o aprendizado dos estudantes, é fundamental que ao longo de toda a educação básica as áreas de conhecimento estejam relacionadas, de maneira que a associação entre os diferentes componentes curriculares contribua para o processo de ensino e aprendizagem. Nessa direção, Fazenda (2008, p. 21) afirma que "Na interdisciplinaridade escolar, as noções, finalidades, habilidades e técnicas visam favorecer sobretudo o processo de aprendizagem, respeitando os saberes dos alunos e sua integração".

Desde 2009, o ENEM é formado por uma proposta de redação e por quatro provas, sendo que cada prova é composta por 45 questões objetivas de múltipla escolha referentes a uma área de conhecimento, totalizando assim 180 questões (RABELO 2013, p. 59). Cabe destacar que as provas do ENEM são aplicadas em dois dias.

Com relação às etapas da questão de múltipla escolha, Rabelo (2013, p. 189-190) observa que:

> O item de múltipla escolha divide-se em três partes: texto-base, enunciado (comando) e opções alternativas. Em um texto, o significado de uma parte não costuma ser autônomo, mas depende das outras com que se relaciona. O seu significado global não é simplesmente uma soma do que representa cada parte, mas de uma combinação geradora de sentido. Cada uma deve manter relação com as demais, inter-relacionando-se e formando um todo organizado. Desse modo, o texto deve apresentar coerência entre eles, não evidenciando contradições. Assim como qualquer texto, apesar de dividido em três etapas, o item de múltipla escolha deve ser estruturado de modo que se configure uma unidade de proposição e que contemple as orientações da matriz de referência. Para tanto, devem ser observadas a coerência e a coesão entre suas partes, apresentando uma articulação entre elas, explicitando uma única situação-problema e uma abordagem homogênea do conteúdo selecionado.

Cada questão objetiva do ENEM é formada por cinco alternativas, que são as possibilidades de respostas para a questão. A única alternativa correta é chamada de gabarito. As quatro opções incorretas são chamadas de distratores e devem ser plausíveis, ou seja, para aqueles estudantes que não desenvolveram a habilidade necessária para a resolução da questão, as alternativas erradas devem parecer corretas (HALADYNA, 2004 apud BRASIL, 2010, p. 11).

Nesse sentido, ainda de acordo com Brasil (2010, p.11): "[...] o distrator plausível deve retratar hipóteses de raciocínio utilizadas na busca da solução da situação-problema apresentada.".

Dessa maneira, é fundamental salientar que:

> A utilização de erros comuns observados em situação de ensino-aprendizagem costuma aumentar a plausibilidade dos distratores. Por outro lado, aqueles que retratam erros grosseiros ou alternativas absurdas, dentro ou não do contexto do item, tendem a induzir a identificação da alternativa correta (BRASIL, 2010, p. 11).

Entre os anos de 1998 a 2008, o ENEM utilizou a Teoria Clássica dos Testes (TCT) como método para avaliar o desempenho de cada estudante no Exame. Segundo Rabelo (2013), por meio desse método a análise e interpretação dos resultados estão sempre relacionados a prova como um todo e o resultado é expresso pelo escore bruto, ou seja, se dois estudantes acertarem a mesma quantidade de questões em uma prova de alguma área de conhecimento, eles terão o mesmo desempenho independente de quais foram as questões acertadas.

A partir de 2009, a Teoria da Resposta ao Item (TRI) tornou-se o modelo utilizado para determinar a nota do estudante em cada uma das quatro provas objetivas do ENEM.

> A TRI é um conjunto de modelos matemáticos que busca representar a relação entre a probabilidade de o participante responder corretamente a uma questão, seu conhecimento na área em que está sendo avaliado e as características (parâmetros) dos itens (BRASIL, 2021, p. 8).

Acerca da distinção entre a TCT e a TRI, Rabelo (2013) enfatiza que:

> Na TCT, a aptidão de um indivíduo que respondeu ao teste é simplesmente expressa pelo número de itens que ele acertou. Compara-se seu padrão de respostas com o gabarito e calcula-se o escore bruto fazendo-se a soma dos acertos. No caso da TRI, deseja-se descobrir qual o valor do traço latente (da habilidade) do indivíduo que melhor explica o acerto ou o erro em cada item individualmente (RABELO, 2013, p. 129).

A TRI leva em consideração os três parâmetros seguintes que indicam informações relacionadas a determinada questão: o parâmetro de discriminação que é a capacidade que a questão possui para diferenciar se o candidato domina ou não a habilidade avaliada; o parâmetro de dificuldade relacionada ao nível de dificuldade da habilidade avaliada na questão; o parâmetro de acerto casual, que é a probabilidade de um candidato responder corretamente a uma questão sem dominar a habilidade necessária para a resolução dessa questão (BRASIL, 2021, p. 8).

Na TRI, os elementos utilizados como referência são as questões e não o exame como o todo. Nesse modelo, o desempenho do candidato é calculado com base na coerência das respostas corretas, isto é, dois estudantes podem acertar a mesma quantidade de questões e terem notas diferentes. Logo, o resultado é dado por meio de um modelo estatístico que analisa o desempenho do candidato com relação a cada questão que ele responde (RABELO, 2013).

Sendo assim, é essencial que os estudantes conheçam os fatores que influenciam no cálculo da nota no ENEM com base na TRI. A respeito desse assunto, é importante ressaltar que:

> Espera-se que participantes que acertaram as questões difíceis devam também acertar as questões fáceis, pois, entende-se que a aquisição do conhecimento ocorre de forma cumulativa, de modo que habilidades mais complexas requerem o domínio de habilidades mais simples, lembrando que o posicionamento das questões na escala de proficiência é determinado pelas respostas dos estudantes (BRASIL, 2021, p. 15).

A matriz de referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM é formada por 7 competências de área e 30 habilidades no total, sendo que com relação à abordagem do conteúdo Análise Combinatória na prova do ENEM, o estudante deve desenvolver, respectivamente, a seguinte competência e habilidade sobre esse assunto: Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais; Habilidade 2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem (RABELO, 2013).

Após um levantamento realizado, por meio do site do INEP, com relação as provas anteriores do ENEM aplicadas entre os anos de 2009 a 2022, é possível perceber a recorrência de questões a respeito do conteúdo Análise Combinatória na prova da área de Matemática e suas Tecnologias. Desde 2009, nota-se que as questões acerca do assunto Análise Combinatória no ENEM exigem dos candidatos a interpretação de problemas em diferentes contextos relacionados aos seguintes tópicos: princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem, princípio aditivo, permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo simples e combinação simples. Esses temas serão abordados no capítulo 2 deste trabalho. É importante destacar ainda que em uma mesma questão do ENEM, existe a possibilidade do estudante durante a resolução da situação-problema aplicar o conhecimento de mais de um método de contagem.

Portanto, é fundamental que, durante a educação básica, os estudantes compreendam de forma efetiva o conteúdo Análise Combinatória e consigam relacioná-lo às situações do cotidiano. D'ambrosio (1996, p. 119) afirma que aprender não está relacionado somente em dominar técnicas e memorizar teorias. Entretanto, segundo esse autor, a aprendizagem por excelência está associada a "[...] capacidade de explicar, de aprender e compreender, de enfrentar, criticamente, situações novas"(D'AMBROSIO, 1996, p. 119).

O aluno ao estudar o assunto Análise Combinatória, não deve apenas decorar fórmulas, porém ele deve analisar a situação-problema e desenvolver uma estratégia para a resolução. De acordo com Polya (1995), os passos para a resolução de um problema são: entender o problema, isto é, compreender o contexto e a pergunta; criar um plano de ação para resolver a questão; executar o que foi planejado por meio de cálculos e/ou justificativas coerentes; verificar os resultados encontrados.

Assim, é relevante que os estudantes ao concluírem a educação básica estejam preparados para resolver as questões do ENEM sobre o conteúdo Análise Combinatória e para isso, faz-se necessário que os discentes, durante o Ensino Médio, resolvam questões que favoreçam a formação do cidadão crítico que utiliza o conhecimento para solucionar situações-problema do cotidiano.

1.3 Livro Didático

O livro didático é uma das principais ferramentas utilizadas por professores e estudantes durante as aulas e em atividades realizadas fora da escola. Brandão (2013, p. 43) observa que mesmo existindo outros recursos didáticos, o livro continua sendo um instrumento essencial no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, salienta-se a importância do livro didático no contexto escolar. Com o objetivo de contribuir para o aprendizado dos discentes, o ideal é que esse recurso didático seja organizado de forma que tanto os alunos quanto os professores consigam entender o que está sendo proposto (COSTA; ALEVATO, 2010, p. 72-73).

Acerca do que esperar de um livro didático, Santos e Silva (2018, p. 263) destacam que:

> [...] busca-se um livro que tenha apelo visual, que, embora "enxuto", tenha um número significativo de exercícios, que seja lógico e linearmente organizado, que apresente jogos e desafios; todavia, sem descuidar-se dos erros conceituais, da veiculação de preconceitos, da articulação entre a proposta metodológica presente no corpo do livro e aquela defendida no manual do professor, além de propor atividades que envolvam a contextualização e a interdisciplinaridade, etc.

É essencial que o livro didático de Matemática relacione os conceitos matemáticos à realidade. Antes de propor questões mais complexas, é imprescindível que esse material proponha uma explicação adequada do conteúdo que permita ao estudante responder às atividades propostas.

Durante as aulas de Matemática, as turmas que participaram desta pesquisa utilizaram o livro didático Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade, cujos autores são José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Junior e Paulo Roberto Câmara de Sousa. Esse livro, que foi publicado em 2020, faz parte de uma coleção de livros da editora FTD e está de acordo com as normas da BNCC. Os estudantes receberam esse livro por meio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Na Figura 1.1, é possível ver a capa do livro Prisma, utilizado pelos participantes da pesquisa.

Figura 1.1: Capa do livro Prisma.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020).

Segundo Oliveira (2023, p. 96): “O papel do PNLD será enfatizado como uma política pública que fornece recursos didáticos para estudantes e professores de escolas públicas, contribuindo para o processo educacional.”.

Na abertura do capítulo sobre Análise Combinatória, os autores do livro Prisma destacam a importância das senhas e a necessidade de protegê-las no ambiente virtual através da criptografia. Ademais, nesse primeiro momento, são apresentadas as competências e as habilidades da BNCC utilizadas nesse capítulo. Logo depois, na introdução, o livro apresenta uma situação-problema sobre o princípio multiplicativo, que pode ser resolvida de forma intuitiva, valorizando assim os conhecimentos prévios dos alunos.

Ao abordar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo, o livro Prisma apresenta situações que podem ser resolvidas usando a árvore de possibilidades e considerando as restrições do problema. Com relação ao conceito de fatorial, o livro apresenta a definição e alguns exemplos. Além disso, o livro didático apresenta uma questão resolvida sobre cada um desses assuntos, o que pode facilitar o aprendizado dos discentes.

O livro Prisma apresenta situações reais ao abordar arranjo, permutação e combinação, sendo resolvidas 5 questões sobre esses conceitos. Em uma das questões resolvidas, como pode ser vista na Figura 1.2, os autores explicam como diferenciar se o problema refere-se a um arranjo ou a uma combinação, uma dúvida muito comum entre os estudantes.

Figura 1.2: Distinção entre arranjo e combinação apresentada no livro Prisma.

7. Quantas comissões de três participantes podem ser formadas com cinco pessoas?

Resolução

Para classificar um agrupamento como arranjo ou combinação, procedemos da seguinte maneira:

1º) Formamos o agrupamento sugerido pelo problema;

2º) Mudamos a ordem de seus elementos;

3º) Se com essa mudança de ordem obtivermos agrupamentos que são considerados iguais, esses agrupamentos serão combinações.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 96).

Ao longo do capítulo sobre Análise Combinatória, os autores do livro Prisma apresentam apenas uma questão baseada no ENEM, que pode ser vista na Figura 1.3.

Figura 1.3: Questão do ENEM proposta no livro Prisma.

3. (Enem/MEC) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.
A opção que mais se adequa às condições da empresa é

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 104).

Essa questão proposta pode ser resolvida por meio do princípio multiplicativo e analisando as restrições da situação-problema.

Considerando apenas as atividades resolvidas e propostas, no capítulo sobre Análise Combinatória do livro Prisma, são resolvidas 8 questões e propostas 51, totalizando assim 59 questões. Dessa forma, nota-se que a grande maioria das questões apresentadas sobre esse conteúdo nesse livro, não são retiradas das provas anteriores do ENEM.

Das 59 questões sobre Combinatória abordadas no livro Prisma, somente 1 é questão do ENEM, o que corresponde a 1,7% com relação ao número total de questões abordadas nesse livro sobre esse assunto. Isso pode refletir negativamente na preparação dos estudantes para o ENEM, especificamente no desempenho das questões relacionadas à Análise Combinatória.

É fundamental que o livro didático de Matemática, enquanto um dos principais recursos didáticos utilizado por docentes e alunos, aborde uma quantidade significativa de situações-problema com base no ENEM, de forma que, ao final do Ensino Médio, os estudantes se sintam preparados para resolver as questões sobre Análise Combinatória apresentadas na prova de Matemática do ENEM.

Capítulo 2

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Este capítulo apresenta conceitos básicos e exemplos a respeito dos seguintes temas relacionados ao conteúdo Análise Combinatória que são abordados na prova de Matemática do ENEM: princípio multiplicativo, princípio aditivo, permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo simples e combinação simples. Os conceitos e exemplos que serão apresentados neste capítulo tem como objetivo facilitar o entendimento dos capítulos subsequentes deste trabalho.

Nessa perspectiva, é importante ressaltar que o conteúdo Análise Combinatória pode ser associado a contextos diversos como no estudo da Economia, da Tecnologia, do Transporte, do Esporte, dentre outras áreas.

As definições e exemplos abordados neste capítulo se baseiam nos seguintes livros: *Análise Combinatória e Probabilidade*, de Augusto César de Oliveira Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez (2004); *Fundamentos de Matemática Elementar: combinatória, probabilidade*, de Samuel Hazzan (2013); *Análise Combinatória e Probabilidade*, de Nazaré Bezerra (2018); *Matemática Discreta*, de Augusto César de Oliveira Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho (2015); *Introdução à Análise Combinatória*, de José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello e Idani T. C. Murari (2007); *Curso de Análise Combinatória e Probabilidade* de José Roberto Julianelli, Bruno Alves Dassie, Mário Luiz Alves de Lima e Ilydio Pereira de Sá (2009).

2.1 Princípio Multiplicativo

O princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem diz que se há x maneiras de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y maneiras de tomar a decisão D_2, então o número de maneiras de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é igual ao produto $x \cdot y$.

Exemplo 1. Um estádio possui 4 portões. De quantas maneiras diferentes um torcedor pode entrar e sair desse estádio utilizando, para sair, um portão diferente do que entrou?

Solução: O torcedor tem 4 opções distintas de portões para entrar no estádio. Tomada a primeira decisão, ele tem 3 opções diferentes de portões para sair do estádio, uma vez que uma opção já foi escolhida. Logo, um torcedor pode entrar e sair desse estádio de $4 \cdot 3 = 12$ maneiras diferentes, utilizando, para sair, um portão diferente do que entrou.

Exemplo 2. De quantas maneiras podem ser dados 2 prêmios a uma classe com 20 pessoas, se é permitido que ambos os prêmios sejam dados a uma mesma pessoa?
Solução: O primeiro prêmio pode ser dado de 20 maneiras e o segundo prêmio pode ser dado também de 20 maneiras. Portanto, os dois prêmios podem ser dados de $20 \cdot 20 = 400$ maneiras.

Na sequência, com o objetivo de analisar a quantidade total de possibilidades caso seja necessário tomar mais de duas decisões sucessivamente, será apresentada uma extensão do Princípio Multiplicativo.

Extensão do Princípio Multiplicativo.

Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, no qual n representa a quantidade de eventos, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 m_2 \ldots m_n$ maneiras diferentes.

Exemplo 3. Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuídos?
Solução: Como são três candidatos, então cada examinador pode votar de 3 modos diferentes. Como são cinco examinadores, então, pelo princípio multiplicativo, os votos podem ser distribuídos de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ modos diferentes.

Exemplo 4. Quantos são os números de três dígitos distintos?
Solução: O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígito. Logo, existem $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números de três dígitos diferentes.

Exemplo 5. As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26 letras) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?
Solução: Cada letra pode ser escolhida de 26 modos distintos e cada algarismo pode ser escolhido de 10 modos diferentes. Logo, podem ser formadas $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ 175 760 000 placas diferentes.

Exemplo 6. Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas

formas ele poderá vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?
Solução: Há 10 formas de escolher um terno, há 12 maneiras de escolher uma camisa e há 5 modos de escolher um par de sapatos. Logo, existem $10 \cdot 12 \cdot 5 = 600$ formas do homem vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos.

Exemplo 7. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 5 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão?
Solução: Há 4 modos de escolher a resposta da questão 1, há 4 formas de escolher a resposta da questão 2 e assim sucessivamente. Logo, como são 5 questões, então, nesse caso, existem $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1\ 024$ posssibilidades de gabaritos.

2.2 Princípio Aditivo

O Princípio Aditivo diz que se há x maneiras de tomar uma decisão D_1 e há y maneiras de tomar uma decisão D_2, de modo que as x formas de tomar a decisão D_1 sejam diferentes das y formas de tomar a decisão D_2, então o número de maneiras de tomar as decisões D_1 ou D_2 é igual a $x + y$.

Exemplo 8. Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Carlos tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quantos são os programas que Carlos pode fazer?
Solução. Se ele tem dinheiro para assistir a 1 evento, então ou ele assiste ao Filme 1 ou ao Filme 2 ou ao Filme 3 ou à Peça 1 ou à Peça 2. Portanto, ao todo são 5 programas diferentes.

Exemplo 9. Numa confeitaria, há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?
Solução. Ou Maria escolhe um sabor de picolé dentre os 5 ou Maria escolhe um tipo de salgado dentre os 3. Portanto, Maria pode fazer $5 + 3 = 8$ pedidos diferentes.

O conceito do princípio aditivo pode ser estendido para qualquer quantidade finita de decisões a serem tomadas.

Extensão do Princípio Aditivo

Se as quantidades de possibilidades das decisões $D_1, D_2, \ldots, D_n$ a serem tomadas forem, respectivamente, iguais a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de modo que, quando comparadas, as decisões a serem tomadas não tenham nenhuma possibilidade em comum, então o número total de formas de ocorrer pelo menos uma das decisões é igual a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Exemplo 10. Ana possui 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu a Tiago para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras Tiago pode escolher esses dois livros?

Solução. Pelo princípio multiplicativo, tem-se as seguintes opções de escolhas:

(a) matemática e física: $5 \cdot 7 = 35$ maneiras;

(b) matemática e química: $5 \cdot 10 = 50$ maneiras;

(c) física e química: $7 \cdot 10 = 70$ maneiras.

Como as escolhas de Tiago só podem ocorrer dentre uma das possibilidades (a), (b) ou (c), então, pelo princípio aditivo, tem-se que o número de maneiras de fazer essas escolhas é igual a $35 + 50 + 70 = 155$.

2.3 Permutação Simples

Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!.$$

Define-se $P_0 = 0! = 1$.

Exemplo 11. Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas?

Solução. O primeiro carro tem 6 alternativas; o segundo tem 5; o terceiro tem 4; o quarto tem 3; o quinto tem 2 e finalmente o sexto tem 1. Logo, pelo pelo princípio multiplicativo, há $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ maneiras desses 6 carros serem estacionados.

Exemplo 12. De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar pares, constituídos por uma moça e por um rapaz, para uma dança?

Solução. A primeira moça tem 12 possibilidades para escolher seu par. A segunda moça tem 11 possibilidades; a terceira moça tem 10 possibilidades, e assim sucessivamente, de modo que a décima segunda moça terá 1 possibilidade de escolha. Portanto, pelo princípio multiplicativo, pode-se concluir que há $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \ldots 1 = 12!$ maneiras desses pares serem formados.

Exemplo 13. De quantas maneiras 5 pessoas podem viajar em um automóvel com 5 lugares, se apenas uma delas sabe dirigir?

Solução. Como somente uma pessoa sabe dirigir, então o lugar do motorista será dessa pessoa. Logo, as 4 pessoas que não sabem dirigir poderão permutar-se entre si. Portanto, o número de maneiras é igual a: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Exemplo 14. De quantos modos é possível arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Física e 2 livros diferentes de Química, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?
Solução. É possível escolher a ordem das matérias de 3! modos. Feito isso, há 5! modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe foram destinados, 3! modos para os de Física e 2! para os de Química. Logo, pelo princípio multiplicativo, segue que o número total de possibilidades é igual a: $3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 6 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 2 = 8\ 640$.

Exemplo 15. De quantas maneiras pode ser formada uma fila indiana com 5 homens e 5 mulheres, de modo que homens e mulheres fiquem em posições alternadas?
Solução. Por permutação simples e pelo princípio multiplicativo, tem-se que o número total de possibilidades é igual a: $2! \cdot 5! \cdot 5! = 2 \cdot 120 \cdot 120 = 28\ 800$.

2.4 Permutação com Elementos Repetidos

Se na permutação de n elementos existirem elementos que apareçam α vezes, β vezes, $\ldots$, γ vezes, então o número total de permutações é igual a:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}.$$

Exemplo 16. Se um time de futebol jogou 13 partidas em um campeonato, tendo perdido 5 jogos, empatado 2 e vencido 6 jogos, de quantos modos pode isto ter ocorrido?
Solução. Na permutação dos 13 elementos, existem 3 elementos que aparecem, respectivamente, 5 vezes, 2 vezes e 6 vezes. Portanto, tem-se que o números total de permutações é igual a:

$$P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!2!6!}.$$

Exemplo 17. Quantos são os anagramas da palavra BANANA?
Solução. Na permutação das 6 letras, as letras A e N aparecem, respectivamente, 3 vezes e 2 vezes. Portanto, tem-se que o número total de permutações é igual a:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 60.$$

Exemplo 18. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 amarelas. Elas são extraídas uma a uma sem reposição. Quantas sequências de cores podem ser observadas?

Solução. Na permutação dos 5 elementos, existem 2 elementos que aparecem, respectivamente, 3 vezes e 2 vezes. Portanto, tem-se que o número total de permutações será:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 10.$$

Exemplo 19. Uma moeda é lançada 20 vezes. Quantas sequências de caras e coroas existem, com 10 caras e 10 coroas?
Solução. Na permutação dos 20 elementos, existem 2 elementos que aparecem, respectivamente, 10 vezes e 10 vezes. Portanto, nesse caso, tem-se que o números total de sequências de caras e coroas é igual a:

$$P_{20}^{10,10} = \frac{20!}{10!10!}.$$

Exemplo 20. Quantos números de 7 algarismos existem nos quais comparecem uma só vez os algarismos 3, 4 e 5 e quatro vezes o algarismo 9?
Solução. Na permutação dos sete algarismos, o algarismo 9 aparece 4 vezes. Logo, tem-se que o número total de possibilidades será:

$$P_7^4 = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210.$$

2.5 Arranjo Simples

Arranjo simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. Notação: A_n^p.

Na sequência é apresentada uma expressão matemática que caracterize A_n^p, usando o princípio multiplicativo. Tem-se n elementos dos quais faz-se necessário tomar p. Este é um problema equivalente a serem dados n objetos e ser necessário preencher p lugares, sendo p menor do que n.

O primeiro lugar (L_1) pode ser preenchido de n maneiras diferentes. Tendo preenchido L_1, restam $(n-1)$ objetos e, portanto, o segundo lugar (L_2) pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento de L_2, há $(n-2)$ maneiras de se preencher L_3 e, assim sucessivamente, ocorrerá o preenchimento das posições de forma que L_p terá $(n-(p-1))$ maneiras diferentes de ser preenchido.

Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, pode-se dizer que as p posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))$ maneiras diferentes. Portanto, $A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))$. Multiplicando e dividindo essa igualdade por $(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1$, segue que:

$$A_n^p = \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))][(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1]}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}.$$

Daí, tem-se que:

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}.$$

Logo,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Assim, é possível notar que o arranjo simples é um caso particular do princípio multiplicativo.

Exemplo 21. Quantos anagramas de 2 letras diferentes podem ser formados com um alfabeto de 26 letras?
Solução. De vinte e seis letras serão escolhidas duas. As posições que as letras escolhidas ocupam nos anagramas importam. Logo, tem-se um caso de arranjo simples e a quantidade de anagramas é igual a:

$$A_{26}^2 = \frac{26!}{(26-2)!} = \frac{26!}{24!} = \frac{26\cdot 25\cdot 24!}{24!} = 26\cdot 25 = 650.$$

Exemplo 22. Considerando os digitos 1, 2, 3, 4, 5, quantos números de 3 algarismos diferentes podem ser formados?
Solução. De 5 algarismos serão escolhidos 3. A posição que cada algarismo escolhido ocupa importa. Logo, tem-se um caso de arranjo simples e a quantidade de números formados é igual a:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$$

Exemplo 23. Em um campeonato de futebol com 20 clubes, quantas possibilidades diferentes existem para o primeiro, o segundo e o terceiro colocado?
Solução. Importa quais são os três clubes e as posições que ocupam nas três primeiras colocações. Logo, o número de possibilidades é igual a:

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17!}{17!} = 20\cdot 19\cdot 18.$$

Portanto, em um campeonato de futebol com 20 clubes, existem 6 840 maneiras diferentes de conjuntos do primeiro, do segundo e do terceiro colocado, nessa ordem.

2.6 Combinação Simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Notação: $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ (lê-se: combinação de n p a p). Se $p > n$, p e n inteiros, define-se $C_n^p = 0$.

Sabe-se que o número de arranjo simples de n elementos tomados p a p é igual ao número de maneiras de preencher p lugares com n elementos disponíveis e é dado por $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ como sendo o número de agrupamentos que diferem entre si pela natureza e pela ordem de colocação dos elementos no agrupamento, isto é, importa quem participa e o lugar que ocupa.

Entretanto, quando trata-se de combinações simples de n elementos tomados p a p, tem-se agrupamentos de p elementos, tomados dentre os n elementos disponíveis, que diferem entre si apenas pela natureza dos elementos, isto é, importa somente quem participa do grupo. Dessa forma, a mudança de ordem dos p elementos não altera o agrupamento.

De uma maneira geral,

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = A_n^p \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!}.$$

Logo,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 24. Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podem ser formadas se são disponibilizadas 10 frutas diferentes?

Solução. Nota-se que a ordem das 4 frutas escolhidas não importa. Logo, o número de modos para formar uma salada escolhendo 4 das 10 frutas é igual a:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = 210.$$

Exemplo 25. Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de 10 funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução. Nota-se que a ordem dos três membros escolhidos para formar cada comissão não importa. Logo, o número de comissões que podem ser formadas escolhendo três dos

10 funcionários é igual a:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 7!} = 120.$$

Exemplo 26. Tem-se 7 cadeiras numeradas de 1 a 7 e deseja-se escolher 4 lugares entre os 7 existentes. De quantas formas isto pode ser feito?
Solução. Cada escolha de 4 lugares corresponde a uma combinação dos 7 elementos, tomados 4 a 4, pois a ordem dos números escolhidos não interessa (escolher os lugares 1,2,4 e 7 é o mesmo que escolher os lugares 7,2,4 e 1). Logo, o resultado procurado é igual a:

$$C_{7}^{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2} = 35.$$

Exemplo 27. Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?
Solução. Nota-se que a ordem em que o aluno escolher as 10 questões não interessa. Logo, cada maneira de escolher 10 questões é uma combinação das 15 questões tomadas de 10 a 10, ou seja,

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Dessa forma, existem 3 003 formas desse aluno resolver 10 entre as 15 questões da prova.

Exemplo 28. No jogo da Mega-Sena, sorteam-se 6 números do conjunto de 60 números naturais de 1 a 60, desprezando-se a ordem do sorteio. Quantos são os resultados possíveis no sorteio da Mega-Sena?
Solução. Nota-se que a ordem do sorteio dos seis números não importa. Cada sorteio de 6 números corresponde a uma combinação de 60 elementos, tomados 6 a 6. Logo, tem-se que:

$$C_{60}^{6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 54!}.$$

Dessa forma, realizando os cálculos, segue que o número de resultados possíveis é igual a 50 063 860.

2.7 Problemas Complementares de Combinatória

Algumas questões a respeito do conteúdo Análise Combinatória são consideradas mais difíceis do que outras. Além disso, em alguns problemas, é necessário que o estudante aplique mais de um conceito acerca desse assunto. Desse modo, na sequência são resolvidos alguns problemas complementares de Combinatória sobre os temas estudados neste capítulo.

Exemplo 29. Entre 10 homens e 10 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas se em cada uma deve haver 3 homens e 2 mulheres?
Solução. Entre dez homens devem ser escolhidos três e entre dez mulheres devem ser escolhidas duas.
A ordem na qual os três dentre os dez homens devem ser escolhidos não importa. Assim, por combinação simples, segue que o número de possibilidades para esse caso é igual a:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 7!} = 120.$$

A ordem na qual as duas dentre as dez mulheres devem ser escolhidas também não importa. Logo, por combinação simples, segue que o número de possibilidades para esse caso é igual a:

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} = 45.$$

Em cada comissão deve haver 3 homens e 2 mulheres. Como existem 120 grupos com 3 homens e cada um desses grupos pode se juntar com cada um dos 45 grupos com 2 mulheres, então, pelo princípio multiplicativo, tem-se que podem ser formadas um total de $120 \cdot 45 = 5\ 400$ comissões.

Exemplo 30. Em um grupo de 15 pessoas existem 5 médicos, 7 engenheiros e 3 advogados. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, cada qual constituída de 2 médicos, 2 engenheiros e 1 advogado?
Solução. Entre cinco médicos devem ser escolhidos dois, entre sete engenheiros devem ser escolhidos dois e entre três advogados deve ser escolhido um. Como a ordem dos elementos não importa em cada situação, então a quantidade de possibilidades de escolhas dos médicos, dos engenheiros e do advogado pode acontecer por meio da fórmula de combinação simples.
A quantidade de formas que podem ser escolhidos 2 entre 5 médicos é igual a:

$$C_{5}^{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 10.$$

A quantidade de formas que podem ser escolhidos 2 entre 7 engenheiros é igual a:

$$C_{7}^{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 5!} = 21.$$

A quantidade de formas que pode ser escolhido 1 entre 3 advogados é igual a:

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3.$$

Logo, pelo princípio multiplicativo, tem-se que podem ser formadas $10 \cdot 21 \cdot 3 = 630$ comissões de 5 pessoas, cada qual constituída de 2 médicos, 2 engenheiros e 1 advogado.

Exemplo 31. De um grupo de 10 pessoas deseja-se formar uma comissão com 5 membros. De quantas formas isto pode ser feito se duas pessoas (A e B) ou fazem parte da comissão, ou não?
Solução. Inicialmente, será considerado o caso em que as duas pessoas (A e B) fazem parte da comissão.
Nesse primeiro caso, como a comissão será formada por 5 membros e as duas pessoas (A e B) fazem parte dessa comissão, então restarão 3 vagas que serão escolhidas dentre 8 pessoas. A ordem na qual as três dentre as oito pessoas devem ser escolhidas não importa. Dessa forma, por combinação simples, tem-se que a quantidade de possibilidades para esse primeiro caso é igual a:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 5!} = 56.$$

Agora, será considerado o caso em que as duas pessoas (A e B) não fazem parte da comissão.
Nesse segundo caso, como A e B não farão parte da comissão, então serão escolhidos 5 membros dentre 8 pessoas para compor a comissão. A ordem na qual as 5 dentre as oito pessoas devem ser escolhidas não importa. Assim, por combinação simples, segue que a quantidade de possibilidades para esse segundo caso é igual a:

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2} = 56.$$

Portanto, como as pessoas A e B ou fazem parte da comissão ou não, então, pelo princípio aditivo, segue que a quantidade de possibibilidades disso acontecer é igual a $56 + 56 = 112$.

Exemplo 32. Com um grupo de 6 rapazes e 4 moças, de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão de 4 pessoas, de modo que em cada uma haja pelo menos 2 rapazes?
Solução. Como cada comissão de 4 pessoas deve ter pelo menos 2 rapazes, então podem ser formadas as seguintes configurações de comissões: dois rapazes e duas moças; ou três rapazes e uma moça; ou quatro rapazes e nenhuma moça. É possível notar que a ordem como os rapazes e as moças serão escolhidos não importa. Desse modo, na sequência serão

analisadas as quantidades de possibilidades de cada configuração.
Dois rapazes e duas moças: Nessa configuração serão escolhidos dois rapazes dentre 6 e duas moças dentre 4. Assim, por combinação simples e pelo princípio multiplicativo segue que a quantidade de possibilidades para esse caso é igual a:

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 15 \cdot 6 = 90.$$

Três rapazes e uma moça: Nessa configuração serão escolhidos três rapazes dentre seis e uma moça dentre quatro. Assim, por combinação simples e pelo princípio multiplicativo tem-se que a quantidade de possibilidades para esse caso é igual a:

$$C_6^3 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Quatro rapazes e nenhuma moça: serão escolhidos quatro rapazes dentre seis. Assim, por combinação simples segue o número de formas possíveis para essa configuração é igual a:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = 15.$$

Logo, como as comissões devem ter ou dois rapazes e duas moças ou três rapazes e uma moça ou quatro rapazes e nenhuma moça, segue pelo princípio aditivo que a quantidade total de possibilidades de comissões é igual a $90 + 80 + 15 = 185$.

Capítulo 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo são apresentados os aspectos metodológicos utilizados para a realização do presente trabalho. Este capítulo está dividido em 3 seções: Caracterização da pesquisa; Etapas da pesquisa e Descrição do processo de aplicação das atividades.

3.1 Caracterização da pesquisa

Os aspectos técnicos utilizados neste trabalho são os seguintes: pesquisa bibliográfica e estudo de caso de natureza exploratório-descritivo. Ao longo desta pesquisa, é realizada a fundamentação téorica dos temas abordados e uma análise dos resultados obtidos após a aplicação de uma atividade elaborada sobre Análise Combinatória, baseada em 10 questões do ENEM, para estudantes do terceiro ano do Ensino Médio em uma escola pública.

De acordo com Gil (2002, p. 44): "A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.".

Nesse contexto, Amaral (2007) destaca que:

> A pesquisa bibliográfica é uma etapa fundamental em todo trabalho científico que influenciará todas as etapas de uma pesquisa, na medida em que der o embasamento teórico em que se baseará o trabalho. Consistem no levantamento, seleção, fichamento e arquivamento de informações relacionadas à pesquisa (AMARAL, 2007, p. 1).

O estudo de caso, segundo Yin (2015, p. 17), pode ser definido como: "[...] uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo (o "caso") em profundidade e em seu contexto de mundo real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto puderem não ser claramente evidentes.".

A respeito do estudo de caso, Martins (2008, p. 11) afirma que por meio dessa estratégia metodológica: "Busca-se aprender a totalidade de uma situação e, criativamente, descrever, compreender e interpretar a complexidade de um caso concreto, mediante um mergulho profundo e exaustivo em um objeto delimitado.".

Segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 51-52) a pesquisa exploratória ocorre:

> [...] quando a pesquisa se encontra na fase preliminar, tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento, isto é, facilitar a delimitação do tema da pesquisa; orientar a fixação dos objetivos e a formulação das hipóteses ou descobrir um novo tipo de enfoque para o assunto. Assume, em geral, as formas de pesquisas bibliográficas e estudos de caso.

Acerca da pesquisa descritiva, Prodanov e Freitas (2013, p. 52) salientam que esse tipo de método: "Visa a descrever as características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. Envolve o uso de técnicas padronizadas de coleta de dados: questionário e observação sistemática."

Com relação aos métodos de abordagem, esta pesquisa pode ser classificada como quantitativa e qualitativa. É quantitativa, pois neste trabalho são apresentados dados estatísticos importantes para a análise dos resultados encontrados e é qualitativa, uma vez que durante a pesquisa são analisados aspectos relacionados as resoluções dos estudantes acerca das questões do ENEM sobre o conteúdo Análise Combinatória, não sendo considerado apenas o aspecto quantitativo, mas também o perfil dos alunos e como os erros cometidos por eles durante a realização da atividade proposta podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

3.2 Etapas da pesquisa

Nesta pesquisa foram seguidas as seguintes etapas:

1. Revisão bibliográfica: sobre as habilidades relacionadas ao assunto Análise Combinatória que os estudantes devem desenvolver durante a educação básica de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC); sobre aspectos importantes a respeito do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM); sobre a importância do livro didático.
2. Levantamento, por meio do site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), das questões do ENEM sobre Análise Combinatória contidas nas provas anteriores da área Matemática e suas tecnologias entre os anos de 2009 a 2022.
3. Elaboração de uma atividade (APÊNDICE A) contendo 10 questões sobre Análise Combinatória baseadas no ENEM.
4. Revisão bibliográfica sobre o conteúdo Análise Combinatória, de acordo com os temas

recorrentes na prova de Matemática do ENEM.
5. Definição da escola e das turmas para a aplicação da atividade elaborada.
6. Análise do livro didático utilizado pelos alunos e pelo professor regente das turmas participantes da pesquisa.
7. Elaboração do questionário inicial (APÊNDICE B).
8. Aplicação da atividade elaborada e do questionário inicial.
9. Análise das resoluções dos estudantes participantes da pesquisa com relação à atividade aplicada.
10. Elaboração do questionário final (APÊNDICE C) e das perguntas (APÊNDICE D) referentes a entrevista realizada com o professor regente.
11. Intervenção pedagógica com base nos resultados encontrados, aplicação do questionário final e entrevista com o professor regente.
12. Análise das respostas relacionadas aos questionários aplicados com os estudantes e da entrevista realizada com o professor regente.

3.3 Descrição do processo de aplicação e correção das atividades

A atividade elaborada (APÊNDICE A) foi aplicada em quatro turmas do terceiro ano do Ensino Médio do Centro de Ensino Médio 03 (CEM 03) do Gama-DF. Um total de 112 estudantes participaram da pesquisa e a aplicação dessa atividade foi realizada após o professor regente de Matemática dessas turmas ter abordado o conteúdo Análise Combinatória nas aulas anteriores.

Logo depois da resolução da atividade proposta, os estudantes responderam a um questionário inicial (APÊNDICE B) com perguntas a respeito do perfil deles. O tempo total disponibilizado para a resolução da atividade e do questionário foi de até 100 minutos, ou seja, duas aulas de 50 minutos cada.

De posse das respostas dos alunos, foi realizado um levantamento com os dados das resoluções dos 112 estudantes participantes da pesquisa.

Em um segundo momento com os discentes, foi realizado um trabalho de intervenção pedagógica, sendo apresentadas as estatísticas de erros e acertos e análise do gabarito e distratores de cada questão, relacionando às resoluções elaboradas pelos alunos com os conceitos de Combinatória. Para esse momento, foram utilizadas duas aulas de 50 minutos cada.

Em um terceiro momento, com uma duração de 50 minutos, os alunos responderam a um questionário (APÊNDICE C) com perguntas sobre a metodologia utilizada. Além disso, foi feita uma entrevista com o professor regente das turmas que participaram da pesquisa. As perguntas dessa entrevista estão disponíveis no APÊNDICE D.

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, é feita uma análise sobre o perfil dos alunos participantes desta pesquisa e são apresentados aspectos relevantes a respeito de uma atividade, elaborada e aplicada para esses estudantes, sobre Análise Combinatória com base em questões do ENEM. Além disso, é feita uma descrição acerca do trabalho de intervenção pedagógica realizado e da avaliação dos estudantes e do professor regente acerca da abordagem metodológica utilizada neste trabalho.

4.1 Perfil dos alunos participantes da pesquisa

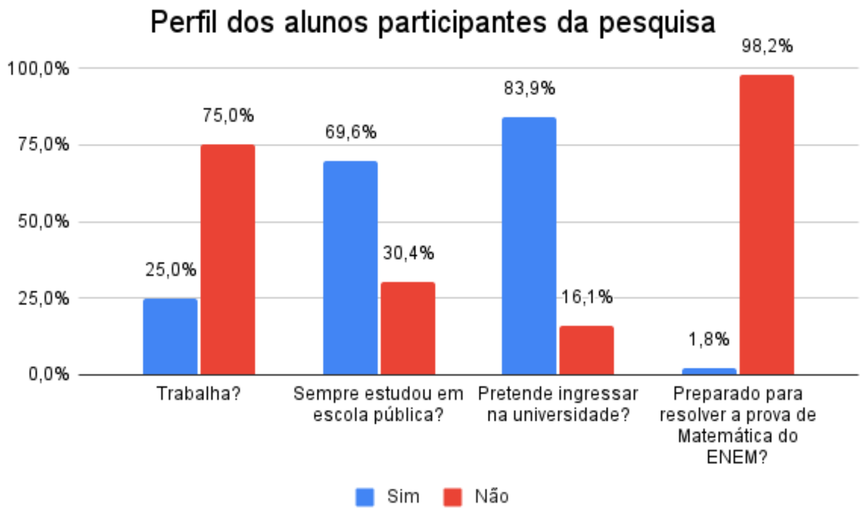
Participaram do presente trabalho 112 alunos do terceiro ano do Ensino Médio do Centro de Ensino Médio 03 (CEM 03) do Gama-DF, que é uma escola pública do Distrito Federal. Visando conhecer o perfil desses discentes, foi aplicado para eles, por meio de material impresso, um questionário inicial (APÊNDICE B).

Na sequência, serão apresentadas algumas das perguntas feitas para os alunos participantes desta pesquisa:

- Você trabalha?
- Você sempre estudou em escola pública?
- Você pretende ingressar na universidade?
- Você se sente preparado para resolver a prova de Matemática do ENEM?

Com base nos resultados obtidos, nota-se que grande parte (75%) dos alunos participantes desta pesquisa não trabalha e que a maioria deles sempre estudou em escola pública. Além disso, observa-se que a maior parte (83,9%) dos discentes que participaram deste estudo pretende ingressar na universidade, porém quase 100% deles não se sentem preparados para resolverem a prova de Matemática do ENEM. Esses dados podem ser visualizados na Figura 4.1.

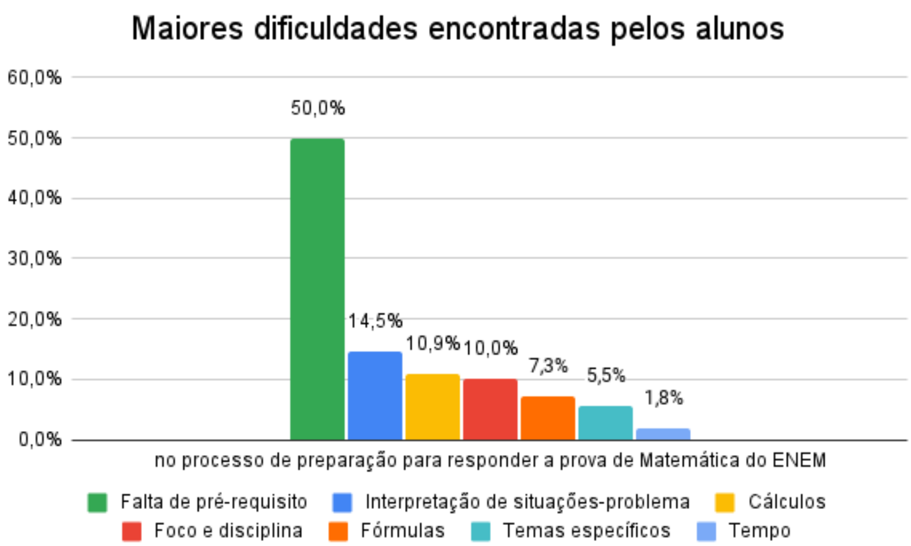
Figura 4.1: Gráfico sobre o perfil dos alunos participantes da pesquisa.



Fonte: Própio autor (2024).

Dos 112 alunos participantes desta pesquisa, apenas 2 estudantes se sentem preparados para responderem às questões da prova de Matemática do ENEM. Grande parte dos 110 discentes que não se sentem preparados destacam que a falta de pré-requisito a respeito dos conceitos matemáticos, a interpretação correta das situações-problema, a dificuldade na realização de cálculos de forma correta e a falta de disciplina ao estudar para a prova são alguns dos maiores obstáculos relacionadas a esse processo de preparação. Além dessas dificuldades, com base nas respostas do questionário inicial (APÊNDICE B), na Figura 4.2 são apresentados outros fatores apontados por esses alunos.

Figura 4.2: Gráfico sobre as maiores dificuldades encontradas pelos alunos.

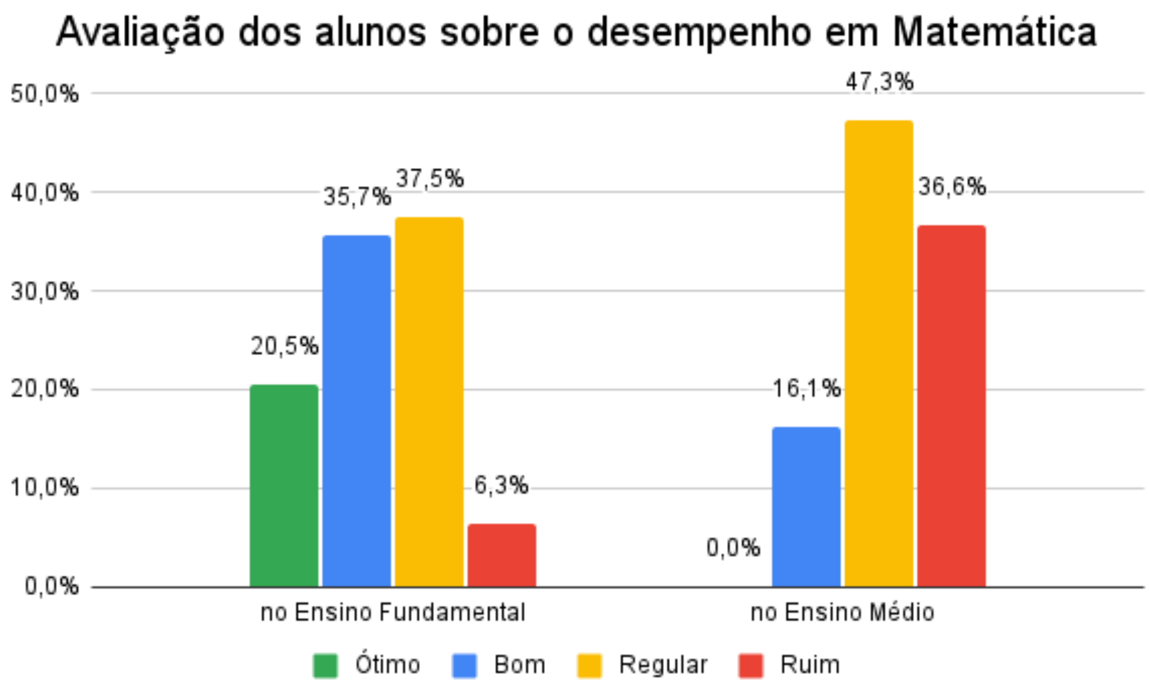


Fonte: Própio autor (2024).

No questionário inicial (APÊNDICE B), os 112 alunos participantes desta pesquisa também foram questionados a respeito do desempenho deles na disciplina Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A maioria (73,2%) desses estudantes avalia o desempenho no Ensino Fundamental como bom ou regular e nenhum dos 112 discentes entende que o aprendizado acerca da Matemática no Ensino Médio foi ótimo, a maioria (83,9%) compreende que o desempenho na disciplina Matemática nessa etapa da educação básica foi regular ou ruim, conforme apresentado na Figura 4.3.

De forma geral, na opinião da maioria dos alunos que participaram deste estudo, o desempenho deles com relação à Matemática foi pior no Ensino Médio quando comparado ao desempenho no Ensino Fundamental.

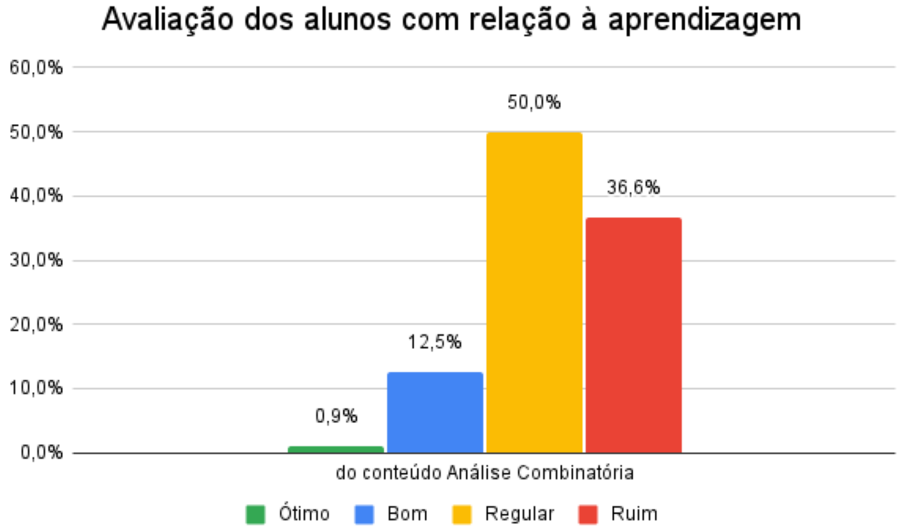
Figura 4.3: Gráfico sobre a avaliação dos alunos sobre o desempenho em Matemática.



Fonte: Própio autor (2024).

Quando questionados sobre o aprendizado com relação ao conteúdo Análise Combinatória, dos 112 alunos participantes desta pesquisa, apenas 1 estudante classifica o aprendizado a respeito desse assunto como ótimo. No entanto, a maioria (86,6%) dos discentes, entendem que a aprendizagem acerca da Análise Combinatória foi regular ou ruim, como pode ser visto na Figura 4.4. Isso pode indicar que a maioria dos alunos não conseguiram compreender os conceitos de Combinatória.

Figura 4.4: Gráfico sobre a aprendizagem dos alunos.



Fonte: Própio autor (2024) .

4.2 Análise da atividade e das resoluções dos alunos

Serão apresentados, a seguir, aspectos importantes sobre a atividade, que pode ser vista no APÊNDICE A, elaborada e aplicada para os alunos participantes desta pesquisa, acerca do conteúdo Análise Combinatória. Essa atividade é composta por 10 questões objetivas retiradas das provas anteriores do ENEM realizadas entre os anos de 2009 a 2022.

A análise de cada uma das questões da atividade proposta na pesquisa está apresentada nesta seção da seguinte forma: apresentação da questão; tema(s) abordado(s) na questão; solução; justificativa de cada uma das alternativas; dados relacionados às respostas dos alunos participantes da pesquisa sobre cada questão. Os nomes dos estudantes citados neste trabalho são fictícios.

Cada questão tem 5 alternativas que serão analisadas separadamente, pois as justificativas: "Visam não somente indicar qual a resposta correta e as demais incorretas, como também oferecer elementos que permitam compreender o acerto ou o equívoco implícito na resolução da situação-problema abordada no item."(BRASIL, 2010, p. 11).

Cabe ressaltar ainda que: "As justificativas deverão informar exatamente os motivos pelos quais cada uma das alternativas representa ou não a opção correta de resposta, de modo que não serão aceitas justificativas tautológicas."(BRASIL, 2010, p. 12).

Questão 1 (ENEM 2012)

O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

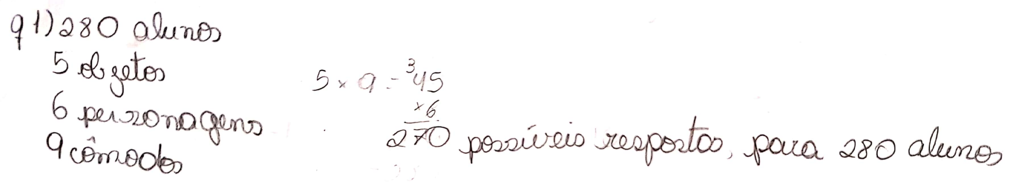
Tema abordado na questão 1: Princípio multiplicativo.

Solução da questão 1: Pelo princípio multiplicativo, existem $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$ respostas possíveis. Assim, o diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há $280 - 270 = 10$ alunos a mais do que possíveis respostas distintas. Logo, o gabarito da questão 1 é a letra A.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 1

Letra A (alternativa correta): Nessa opção, o estudante mostra o domínio do conteúdo, resolvendo a questão corretamente. É possível perceber que ao marcar essa alternativa, o estudante compreende, de maneira certa, o comando da questão e consegue distinguir de forma correta quando usar o princípio multiplicativo ou o princípio aditivo em uma situação-problema. Um exemplo de resolução correta foi feita pelo estudante A e é apresentada na Figura 4.5.

Figura 4.5: Resposta do estudante A acerca da questão 1.



Fonte: Estudante A.

Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, o estudante pode confundir o conceito do princípio multiplicativo com o do princípio aditivo na situação-problema e além disso, pode não compreender corretamente o comando da questão. Como é o caso da resolução feita pelo estudante B e apresentada na Figura 4.6.

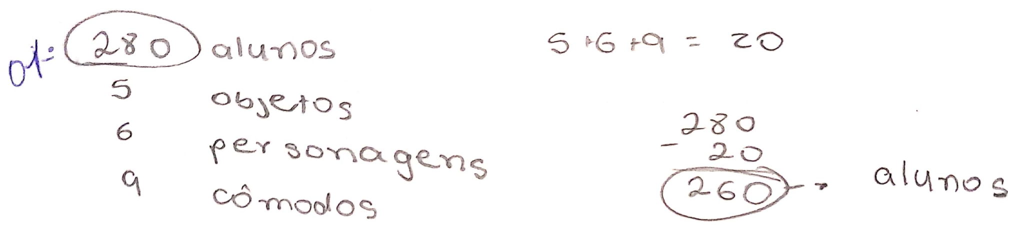
Figura 4.6: Resposta do estudante B acerca da questão 1.

Fonte: Estudante B.

Letra C (alternativa incorreta): Essa opção considera o conjunto com um objeto, um cômodo e um personagem que representa a resposta correta como um caso a parte, sobrando 4 objetos, 5 personagens e 8 cômodos. Assim, de forma errada, segundo esse raciocínio, o total de possibilidades é $4 \cdot 5 \cdot 8 + 1 = 161$ e existem 280 - 161 = 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, embora compreenda o comando da questão corretamente, o estudante pode utilizar, de forma errada, o princípio aditivo ao invés do princípio multiplicativo. Como é o caso da resolução elaborada pelo estudante C e apresentada na Figura 4.7.

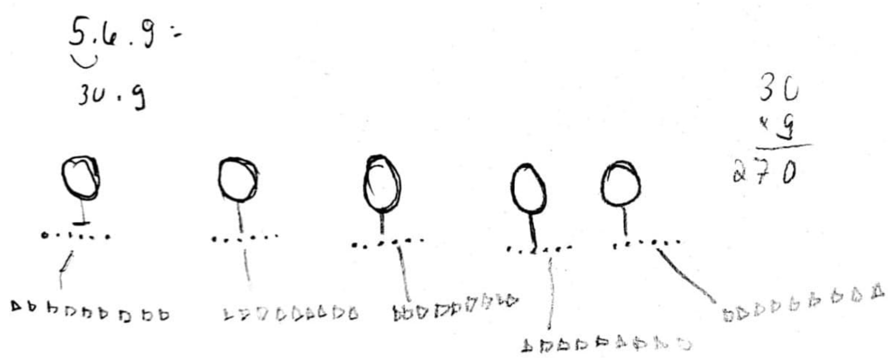
Figura 4.7: Resposta do estudante C acerca da questão 1.



Fonte: Estudante C.

Letra E (alternativa incorreta): Nessa opção, apesar de usar corretamente o princípio multiplicativo, o estudante pode compreender de forma errada o comando da questão. Como é o caso da resolução, que pode ser vista na Figura 4.8, elaborada pelo estudante D.

Figura 4.8: Resposta do estudante D acerca da questão 1.



Fonte: Estudante D.

Na Tabela 4.1 é apresentado um resumo percentual das respostas dos estudantes participantes da pesquisa acerca da questão 1.

Tabela 4.1: Respostas dos estudantes a respeito da questão 1.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	**40**	**35,7%**
Letra B	20	17,9%
Letra C	20	17,9%
Letra D	9	8%
Letra E	11	9,8%
Em branco	12	10,7%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Dessa forma, analisando os resultados relacionados à questão 1, observa-se que 64,3% dos estudantes participantes da pesquisa não conseguiram usar corretamente o princípio multiplicativo e associá-lo à situação-problema apresentada.

Questão 2 (ENEM 2009)

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
D) duas combinações.
E) dois arranjos.

Temas abordados na questão 2: Combinação simples e arranjo simples.

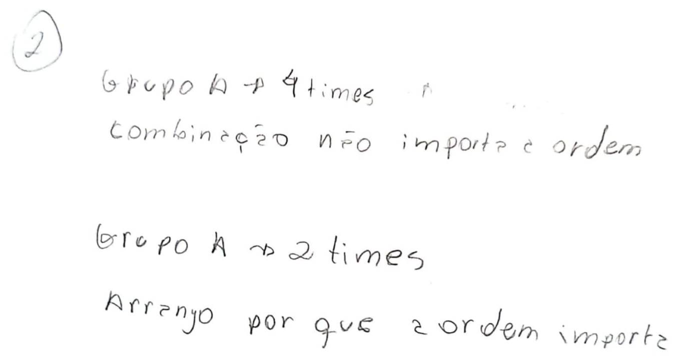
Solução da questão 2: Inicialmente, entre doze clubes são sorteados quatro times para compor o grupo A. Nesse caso, a ordem na qual essas 4 equipes são sorteadas não importa. Dessa forma, tem-se um caso de combinação simples.

Em seguida, entre as 4 equipes do grupo A são sorteados dois clubes para realizar o jogo de abertura do torneio. Nesse caso, a ordem dos dois times sorteados importa, uma vez que o primeiro time a ser sorteado poderá jogar em seu próprio campo. Assim, tem-se um caso de arranjo simples. Logo, o gabarito da questão 2 é a letra A.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 2

Letra A (alternativa correta): Nessa opção, o estudante pode utilizar o critério relacionado a ordem para diferenciar combinação e arranjo. Um exemplo de resolução correta foi feita pelo estudante E e é apresentada na Figura 4.9.

Figura 4.9: Resposta do estudante E acerca da questão 2.



Fonte: Estudante E.

Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, de forma errada, o estudante pode confundir os conceitos de arranjo simples e combinação simples nos dois casos da situação apresentada.

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, além da possibilidade de confundir, incorretamente, os conceitos de arranjo e combinação no primeiro caso, o estudante pode não compeender, no segundo caso, que o número de clubes que compõem o grupo A é diferente da quantidade de times que serão sorteados para realizarem o jogo de abertura do torneio.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, embora compreenda de forma correta o primeiro caso, o estudante pode não notar no segundo caso que a ordem dos times sorteados importa.

Letra E (alternativa incorreta): Nessa opção, apesar de compreender o segundo caso corretamente, o estudante pode confundir, de forma incorreta, os conceitos de combinação e arranjo no primeiro caso.

Observa-se que a questão 2 não exige que os estudantes realizem cálculos, mas que eles consigam identificar a distinção correta entre um caso de combinação, arranjo ou permutação. Na Tabela 4.2 é apresentado um resumo percentual das respostas dos estudantes participantes da pesquisa acerca da questão 2.

Tabela 4.2: Respostas dos estudantes a respeito da questão 2.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	**39**	**34,8%**
Letra B	32	28,6%
Letra C	9	8%
Letra D	18	16,1%
Letra E	11	9,8%
Em branco	3	2,7%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, é possível notar que mais de 65% dos alunos que participaram da pesquisa, erraram ou não responderam à questão 2, isto é, a maioria dos estudantes não conseguiu aplicar corretamente os conceitos de arranjo e combinação.

Questão 3 (ENEM 2020 - PROVA DIGITAL)

Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.

O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu"apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

A) 59

B) 60

C) 118

D) 119

E) 120

Tema abordado na questão 3: Permutação simples.

Solução da questão 3: Inicialmente, faz-se necessário calcular a quantidade de anagramas que é possível formar com as sete letras que formam a palavra EDUARDO, de tal forma que as três letras "edu"apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Assim, tem-se um caso de permutação simples com 5 elementos. Retirando o caso EDUARDO, nota-se que a quantidade de maneiras que Eduardo pode criar um e-mail desejado é igual a:

$$5! - 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 = 120 - 1 = 119.$$

Logo, o gabarito da questão 3 é a letra D.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 3

Letra A (alternativa incorreta): Nessa opção, apesar de ser considerado que o anagrama EDUARDO já existe, não há uma interpretação correta da situação-problema, sendo utilizado o conceito de permutação com elementos repetidos, uma vez que a letra D se repete duas vezes na palavra EDUARDO:

$$\frac{5!}{2!} - 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 = 60 - 1 = 59.$$

Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, é considerado, de forma errada, que o problema se refere a um caso de permutação com elementos repetidos devido à repetição da letra D na palavra EDUARDO:

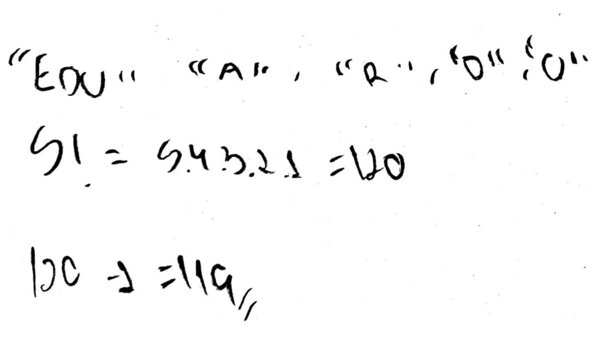
$$\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, apesar de ser realizada uma permutação simples com 5 elementos, são retirados, de forma incorreta, dois e-mails. Assim, tem-se que:

$$5! - 2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 = 120 - 2 = 118.$$

Letra D (alternativa correta): Nessa opção, o estudante pode dividir o problema em duas partes: primeiro correspondente ao cálculo da permutação simples com 5 elementos e depois sendo retirado o e-mail que já foi criado. Um exemplo de resolução correta foi elaborada pelo estudante F e é apresentada na Figura 4.10.

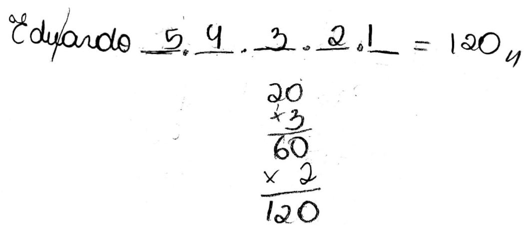
Figura 4.10: Resposta do estudante F acerca da questão 3.



Fonte: Estudante F.

Letra E (alternativa incorreta): Nessa opção, é considerado apenas a definição de permutação simples, sem considerar que um dos e-mails já foi criado. Como é o caso da resolução feita pelo estudante A e apresentada na Figura 4.11.

Figura 4.11: Resposta do estudante A acerca da questão 3.



Fonte: Estudante A.

Na Tabela 4.3 é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 3.

Tabela 4.3: Respostas dos estudantes a respeito da questão 3.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	11	9,8%
Letra B	19	17%
Letra C	17	15,2%
Letra D	**28**	**25%**
Letra E	27	24,1%
Em branco	10	8,9%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Analisando os resultados da pesquisa, é possível destacar que apenas um a cada quatro alunos responderam à questão 3 corretamente. Além disso, com base na tabela 4.3, nota-se que cerca de 24% dos estudantes marcaram a letra E, ou seja, esses discentes apesar de executarem de maneira correta o cálculo de fatorial, interpretaram de forma errada a situação-problema apresentada.

Portanto, nota-se que a questão 3 requer do estudante o conhecimento sobre permutação simples e a interpretação correta da situação-problema apresentada.

Questão 4 (ENEM 2020)

Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE”gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”.

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

A) 9!

B) 4!5!

C) 2 x 4!5!

D) $\dfrac{9!}{2}$

E) $\dfrac{4!5!}{2}$

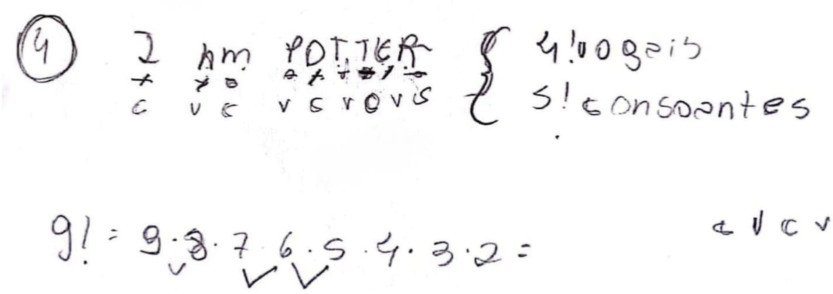
Temas abordados na questão 4: Permutação com elementos repetidos, permutação simples e princípio multiplicativo.

Solução da questão 4: Inicialmente, é importante considerar que a frase "I AM POTTER"é composta por 4 vogais e 5 consoantes. De acordo com as condições do problema, as vogais e consoantes devem aparecer sempre intercaladas. Para que isso aconteça, a configuração das posições será do tipo CVCVCVCVC em que C representa uma consoante e V representa uma vogal. Assim, pela permutação com 2 elementos repetidos das 5 consoantes entre si, pela permutação simples das 4 vogais entre si e pelo princípio multiplicativo tem-se que o número de anagramas é igual a: $\dfrac{5!}{2!} \cdot 4! = \dfrac{4! \cdot 5!}{2}$.
Logo, o gabarito da questão 4 é a letra E.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 4

Letra A (alternativa incorreta): Nessa opção, o estudante, de forma errada, pode não notar que a Letra T se repete duas vezes e também confudir os conceitos entre o princípio multiplicativo e o princípio aditivo. Como é o caso da resolução, que foi feita pelo estudante E, apresentada na Figura 4.12. Nota-se que esse aluno apenas realizou uma permutação simples com 9 elementos.

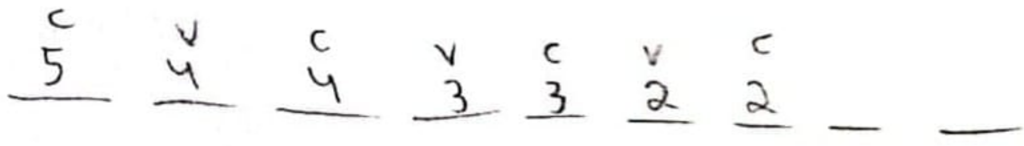
Figura 4.12: Resposta do estudante E acerca da questão 4.



Fonte: Estudante E.

Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, incorretamente, não é considerado que a consoante T se repete duas vezes. Na Figura 4.13 é possível ver a resolução feita pelo estudante G a respeito da questão 4, evidenciando assim a importância de considerar todas as restrições da situação-problema.

Figura 4.13: Resposta do estudante G acerca da questão 4.



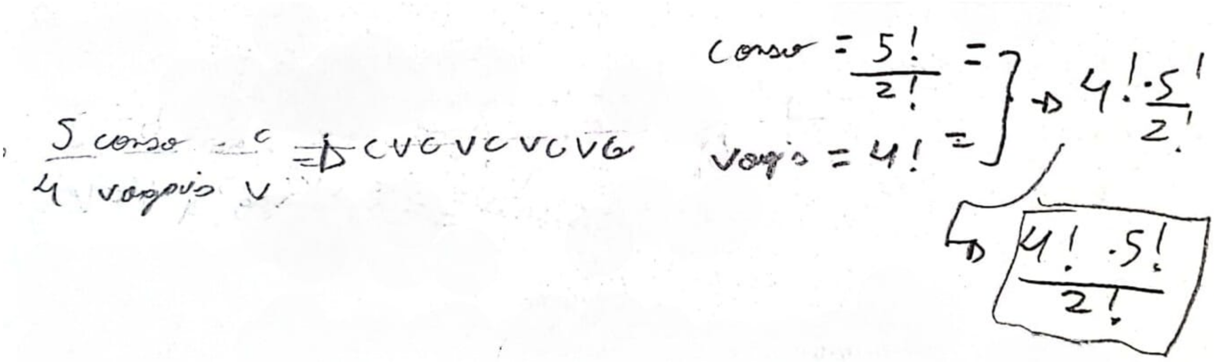
Fonte: Estudante G.

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, apesar de ser considerado que as vogais e consoantes aparecem sempre intercaladas, o conceito de permutação com elementos repetidos é apresentado de maneira errada.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, é considerado que a letra T se repete na frase, no entanto, de maneira errada, não é considerado que as vogais e consoantes devem aparecer sempre intercaladas.

Letra E (alternativa correta): Nessa opção, o estudante mostra o domínio do conteúdo, considerando todas as restrições da situação-problema e resolvendo a questão corretamente. Um exemplo de resolução correta foi feita pelo estudante H e é apresentada na Figura 4.14.

Figura 4.14: Resposta do estudante H acerca da questão 4.



Fonte: Estudante H.

Na Tabela 4.4 é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 4.

Tabela 4.4: Respostas dos estudantes a respeito da questão 4.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	12	10,7%
Letra B	21	18,7%
Letra C	13	11,6%
Letra D	19	17%
Letra E	**41**	**36,6%**
Em branco	6	5,4%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, analisando as respostas dos alunos, é possível notar que 36,6% dos estudantes participantes da pesquisa acertaram a questão 4, ou seja, a maioria dos alunos participantes da pesquuisa não responderam essa questão corretamente, pois não compreenderam que as consoantes e vogais devem estar intercaladas e além disso, não aplicaram corretamente os conceitos de permutação com elementos repetidos, permutação simples e princípio multiplicativo.

Questão 5 (ENEM 2016)

Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

A) $10^2 \cdot 26^2$

B) $10^2 \cdot 52^2$

C) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2!}$

D) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

E) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

Temas abordados na questão 5: Princípio multiplicativo e permutação com elementos repetidos.

Solução da questão 5: A senha deve ser composta por quatro caracteres (dois algarismos e duas letras). Assim, considerando a configuração de senha ALGARISMO - ALGARISMO - LETRA - LETRA, tem-se 10 opções para cada um dos dois primeiros caracteres e $26 \cdot 2 = 52$ opções para cada um dos dois últimos caracteres, pois as letras maiúsculas diferem das minúsculas. Porém, como as letras e os algarismos podem estar em qualquer posição, então é possível ter outras configurações além da citada anteriormente, nesse caso tem-se uma permutação com elementos repetidos. Daí, Pelo princípio multiplicativo, o total de senhas possíveis é igual a: $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Logo, o gabarito da questão 5 é a letra E.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 5

Letra A (alternativa incorreta): Nessa opção, não é considerado que as letras maiúsculas diferem das minúsculas. Além disso, nesse caso, não é observado que as letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Como é o caso da resolução feita pelo estudante I e apresentada na Figura 4.15.

Figura 4.15: Resposta do estudante I acerca da questão 5.

Fonte: Estudante I.

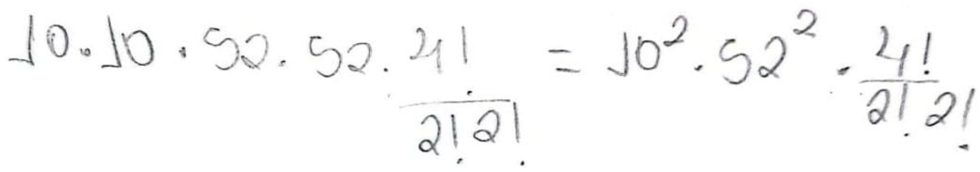
Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, incorretamente, é possível que o estudante não leve em consideração que as letras e os algarismos podem estar em qualquer posição.

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, ao analisar que a senha com 4 caracteres pode ter diferentes configurações, além da configuração ALGARISMO - ALGARISMO - LETRA - LETRA, por exemplo, o conceito de permutação com elementos repetidos é usado de forma errada.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, não é observado que as letras maiúsculas diferem das minúsculas com relação à contagem de caracteres.

Letra E (alternativa correta): Nessa opção, o estudante mostra domínio do conteúdo resolvendo a questão corretamente. Um exemplo de resolução correta foi feita pelo estudante J e é apresentada na Figura 4.16.

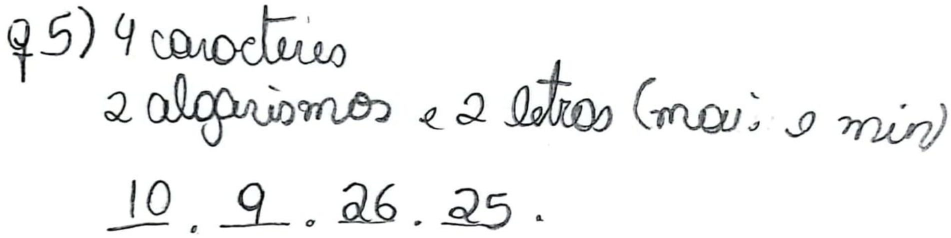
Figura 4.16: Resposta do estudante J acerca da questão 5.



Fonte: Estudante J.

Entre os alunos que deixaram essa questão em branco, a resolução do estudante A destacou-se, uma vez que considerou que os algarismos e a letras não poderiam se repetir e nem permutar-se entre si, como pode ser visto na Figura 4.17.

Figura 4.17: Resposta do estudante A acerca da questão 5.



Fonte: Estudante A.

Logo, é fundamental que os estudantes compreendam que cada problema tem sua particularidade. Na Tabela 4.5, é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 5.

Tabela 4.5: Respostas dos estudantes a respeito da questão 5.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	14	12,5%
Letra B	10	8,9%
Letra C	15	13,4%
Letra D	31	27,7%
Letra E	**32**	**28,6%**
Em branco	10	8,9%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, analisando as respostas dos alunos, é possível notar que 28,6% dos estudantes participantes da pesquisa acertaram a questão 5. Para que esse problema seja resolvido corretamente, é fundamental que o estudante preste atenção nas informação do texto-base. Além disso, nesse caso, dividir essa situação-problema em partes pode facilitar no processo de resolução da questão.

Questão 6 (ENEM 2017)

Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

A) 64
B) 56
C) 49
D) 36
E) 28

Tema abordado na questão 6: Combinação simples.

Solução da questão 6: Como a ordem dos dois jogadores escolhidos não importa, por combinação simples tem-se que: $C_8^2 = \dfrac{8!}{2!(8-2)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = 28$.

Logo, o gabarito da questão 6 é a letra E.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 6

Letra A (alternativa incorreta): Nessa opção, como são 8 jogadores, de forma incorreta, o estudante pode não considerar que cada jogador poderá jogar com 7 jogadores, e realizar a multiplicação de 8 por 8, obtendo 64 como resultado.

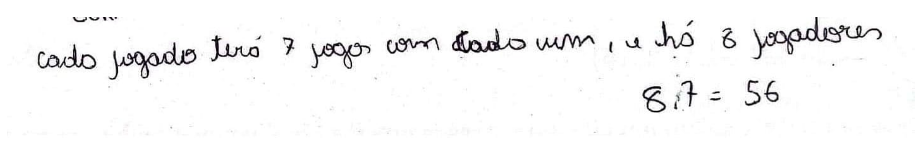
Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, é considerado, de forma errada, que a ordem dos dois jogadores escolhidos importa, ou seja, tem-se um caso de arranjo simples. Assim, o número de possibilidades de se escolher 2 jogadores dentre os 8 possíveis é igual a

$$A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Na Figura 4.18, é apresentada a resolução feita pelo estudante K, que multiplica

8 por 7, obtendo 56 como resultado.

Figura 4.18: Resposta do estudante K acerca da questão 6.



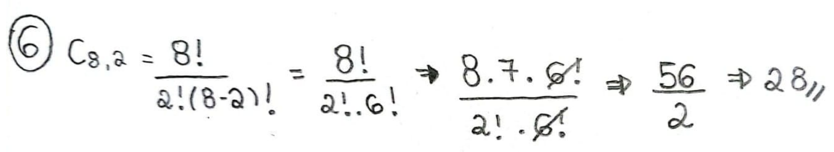
Fonte: Estudante K.

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, incorretamente, é realizada a multiplicação de 7 por 7, obtendo 49 com resultado.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, de forma errada, é considerada a soma de 15 com 21, obtendo a resposta igual a 36.

Letra E (alternativa correta): Nessa opção, o estudante raciocina corretamente e conclui que o número de possibilidades de se escolher 2 jogadores dentre os 8 possíveis é igual a 28, como pode ser observado na resolução elaborada pelo estudante L e apresentada na Figura 4.19.

Figura 4.19: Resposta do estudante L acerca da questão 6.



Fonte: Estudante L.

Na Tabela 4.6, é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 6.

Tabela 4.6: Respostas dos estudantes a respeito da questão 6.

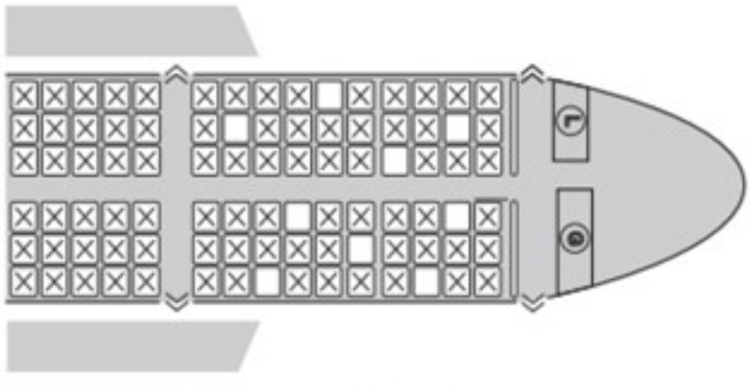
Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	7	6,2%
Letra B	10	8,9%
Letra C	6	5,4%
Letra D	7	6,2%
Letra E	**77**	**68,8%**
Em branco	5	4,5%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Nota-se que a maioria (68,8%) dos 112 estudantes participantes da pesquisa responderam à questão 6 corretamente e 31,2% dos alunos erraram ou não responderam essa questão.

Questão 7 (ENEM 2015)

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

A) $\dfrac{9!}{2!}$

B) $\dfrac{9!}{7! \times 2!}$

C) $7!$

D) $\dfrac{5!}{2!} \times 4!$

E) $\dfrac{5!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!}$

Temas abordados na questão 7: Combinação simples e permutação simples; ou arranjo simples.

Solução da questão 7: Inicialmente, será calculada a quantidade de formas de escolher 7 lugares entre os 9 disponíveis. Nesse primeiro momento, será feita apenas as escolhas dos lugares, sem importar a ordem. Tem-se, dessa forma, um caso de combinação simples que pode ser calculado da seguinte forma:

$$C_9^7 = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9!}{7! \cdot 2!}.$$

Para cada possibilidade de escolha dos 7 lugares, as pessoas da família podem se permutar entre si. Então, pelo princípio multiplicativo, tem-se que:

$$\frac{9!}{7!2!} \cdot 7! = \frac{9! \cdot 7!}{2! \cdot 7!} = \frac{9!}{2!}.$$

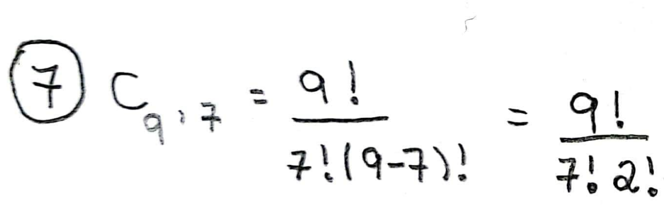
Logo, o gabarito da questão 7 é a letra A.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 7

Letra A (alternativa correta): Nessa opção, o estudante mostra o domínio dos conceitos de Combinatória, resolvendo a questão corretamente. O estudante pode aplicar os conceitos de combinação simples, permutação simples e princípio multiplicativo, nessa ordem, ou apenas usar a definição de arranjo simples na situação-problema.

Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, incorretamente, não é levado em consideração que as pessoas da família podem permutar entre si, sendo considerado, nesse caso, apenas quais as poltronas escolhidas. Como é o caso da resolução feita pelo estudante M e apresentada na Figura 4.20.

Figura 4.20: Resposta do estudante M acerca da questão 7.



Fonte: Estudante M.

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, de forma errada, não é considerado o processo de escolha dos 7 lugares entre os 9 disponíveis, apenas é realizada uma permutação simples com 7 elementos.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, de forma errada, é considerado que 4 pessoas entram inicialmente e escolhem 4 lugares de um lado do avião podendo permutar entre si. As 5 vagas restantes do outro lado do avião serão prenchidas apenas por 3 pessoas. Como nesse segundo momento, a escolha dos 3 lugares também importa, tem-se um caso de arranjo simples. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo segue que: $4! \cdot \dfrac{5!}{(5-3)!} = 4! \cdot \dfrac{5!}{2!}$.

Letra E (alternativa incorreta): Nessa opção, incorretamente, é considerado que entre as 5 vagas disponíveis de um lado do avião são escolhidas 4 e das 4 vagas disponíveis do outro lado do avião são escolhidas 3.

Na Tabela 4.7, é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 7.

Tabela 4.7: Respostas dos estudantes a respeito da questão 7.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	**19**	**17%**
Letra B	61	54,4%
Letra C	11	9,8%
Letra D	10	8,9%
Letra E	5	4,5%
Em branco	6	5,4%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, analisando as respostas dos alunos, é possível notar que apenas 17% dos estudantes participantes da pesquisa acertaram a questão 7.

Esse problema também poderia ser resolvido sem ser dividido por partes, nesse caso seria utilizado o conceito de arranjo simples, uma vez que está sendo considerado que a ordem influencia, logo:

$$A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}.$$

Portanto, nessa questão, é possível notar que muitos estudantes participantes da pesquisa possuem dificuldades em associar a relação existente entre combinação, permutação e arranjo.

Questão 8 (ENEM 2022)

Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;

- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;

- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã. De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

A) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)!}$

B) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

C) $9 \times \dfrac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

D) $9 \times \dfrac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

E) $9 \times \left(\dfrac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1\right)$

Temas abordados na questão 8: Combinação simples e princípio multiplicativo.

Solução da questão 8: Como a ordem dos dois quartos escolhidos não importa, tem-se uma combinação simples. Assim, para cada andar, a quantidade de possibilidades diferentes de escolher 2 apartamentos de forma que pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã é igual a

$$C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!}.$$

Considerando que o prédio tem 9 andares, então a quantidade de formas diferentes que essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas é igual a:

$$9 \times \frac{6!}{(6-2)!2!}.$$

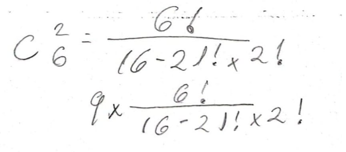
Logo, o gabarito da questão 8 é a letra B.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 8

Letra A (alternativa incorreta): Nessa opção, é usado, de forma errada, o conceito de arranjo simples, ou seja, considera-se que nesse caso a ordem das escolhas dos quartos importa.

Letra B (alternativa correta): Nessa opção, o estudante mostra o domínio do conceito de combinação simples e do princípio multiplicativo. Além disso, é necessário considerar os apartamentos que pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã, isto é, não necessariamente os dois quartos do apartamento precisam receber sol no turno matutino. Um exemplo de resolução correta da questão 8 foi feita pelo estudante N e apresentada na Figura 4.21. Nesse caso, não era necessário realizar os cálculos, mas sim compreender o problema e aplicar os conceitos sobre Análise Combinatória.

Figura 4.21: Resposta do estudante N acerca da questão 8.



Fonte: Estudante N.

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, é considerado, incorretamente, que apenas 4 apartamentos por andar possui pelo menos um quarto que recebe sol na parte da manhã.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, considera-se, de forma errada, que apenas 2 apartamentos por andar possui pelo menos um quarto que recebe sol na parte da manhã.

Letra E (alternativa incorreta): Nessa opção, é considerado, de forma errada, a definição de combinação simples, o princípio multiplicativo e a restrição do problema, obtendo o seguinte resultado incorreto:

$$C_8^2 \times 9 - 1 \times 9 = 9 \times \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 9 = 9 \times \left(\frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1 \right).$$

Cabe destacar que essa questão não exige do estudante a habilidade em resolver cálculos difíceis, porém o objetivo da questão é que o aluno interprete corretamente a situação-problema relacionando a pergunta aos conhecimentos sobre Análise Combinatória.

Na Tabela 4.8, é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 8.

Tabela 4.8: Respostas dos estudantes a respeito da questão 8.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	12	10,7%
Letra B	**45**	**40,2%**
Letra C	13	11,6%
Letra D	12	10,7%
Letra E	12	10,7%
Em branco	18	16,1%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

De acordo com os dados anteriores, é possível notar que quase 60% dos estudantes participantes da pesquisa não responderam corretamente a questão 8.

Questão 9 (ENEM 2021)

Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

A) $\dfrac{6!}{4!2!} \cdot \dfrac{15!}{10!5!}$

B) $\dfrac{6!}{4!2!} + \dfrac{15!}{10!5!}$

C) $\dfrac{6!}{2!} + \dfrac{15!}{5!}$

D) $\dfrac{6!}{2!} \cdot \dfrac{15!}{5!}$

E) $\dfrac{21!}{7!14!}$

Temas abordados na questão 9: Combinação simples e princípio multiplicativo.

Solução da questão 9: Como a ordem dos 2 tipos de tecidos escolhidos não importa, tem-se, assim, um caso de combinação simples que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!}.$$

Como a ordem dos 5 tipos de pedras ornamentais escolhidos não importa, tem-se, assim, um caso de combinação simples que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} = \frac{15!}{10! \cdot 5!}.$$

Pelo princípio multiplicativo, segue que a quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é igual a:

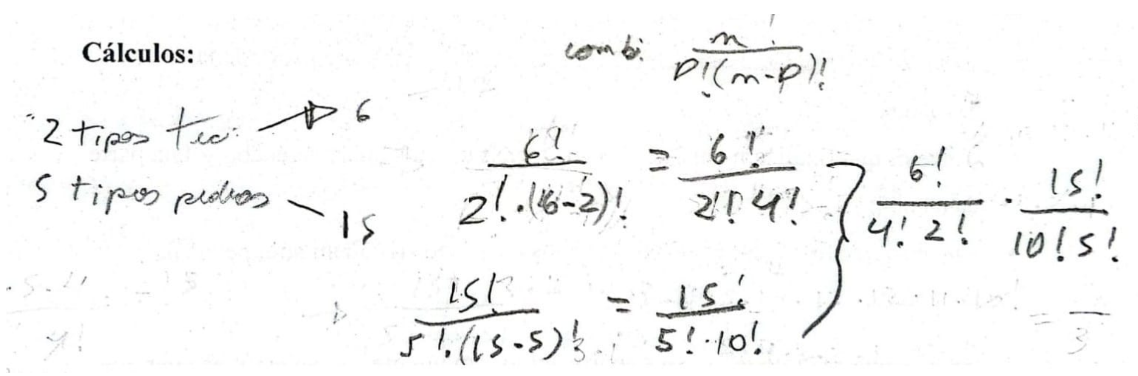
$$\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}.$$

Logo, o gabarito da questão 9 é a letra A.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 9

Letra A (alternativa correta): Nessa opção, além de compreender corretamente a situação-problema, o estudante mostra o domínio dos conceitos de combinação simples e do princípio multiplicativo. Um exemplo de resolução correta foi elaborada pelo estudante G e apresentada na Figura 4.22.

Figura 4.22: Resposta do estudante G acerca da questão 9.



Fonte: Estudante G.

Letra B (alternativa incorreta): Nessa opção, incorretamente, o estudante pode utilizar o princípio aditivo ao invés do princípio multiplicativo.

Letra C (alternativa incorreta): Nessa opção, de forma errada, é considerado o conceito de arranjo simples e o princípio aditivo.

Letra D (alternativa incorreta): Nessa opção, é considerado, de forma errada, o conceito de arranjo simples.

Letra E (alternativa incorreta): Nessa opção, apesar de ser usado o conceito de combinação simples, pode haver um entendimento errado da situação-problema por parte do estudante, podendo ser feito o seguinte cálculo: $C_{6+15}^{2+5} = C_{21}^{7}$.

Na Tabela 4.9, é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 9.

Tabela 4.9: Respostas dos estudantes a respeito da questão 9.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	**32**	**28,6%**
Letra B	14	12,5%
Letra C	20	17,9%
Letra D	24	21,4%
Letra E	7	6,2%
Em branco	15	13,4%
Total	112	100%

Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, é possível observar que a maioria dos alunos participantes desta pesquisa não aplicaram os conceitos de combinação simples e do princípio multiplicativo na questão 9, uma vez que mais de 70% desses estudantes erraram ou não responderam essa questão.

Questão 10 (ENEM 2022)

Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

A) 8.
B) 9.
C) 11.
D) 18.

E) 24.

Temas abordados na questão 10: Combinação simples, princípio aditivo e princípio multiplicativo.

Solução da questão 10: Por combinação simples e pelo princípio aditivo tem-se que o número de opcionais possíveis é igual a:

$$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 + C_3^0 = 3 + 3 + 1 + 1 = 8.$$

Pelo princípio multiplicativo tem-se que $7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot x > 1\ 000$. Assim, $112x > 1\ 000$. Como 1 000 dividido por 112 é aproximadamente 8,9, então para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é 9. Logo, o gabarito da qeustão 10 é a letra B.

Justificativas relacionadas às alternativas da questão 10

Letra A (alternativa incorreta): Nessa opção, de forma errada, o estudante pode usar o conceito do princípio multiplicativo ao invés do princípio aditivo ao calcular o número de opcionais possíveis, o que faria com que o número de cores possíveis fosse calculada de maneira incorreta. Uma outra possibilidade de raciocínio incorreto seria encontrar corretamente o resultado encontrado do número de opcionais, que é igual a 8, porém não calcular o número de cores possíveis.

Letra B (alternativa correta): Os conceitos de combinação simples, do princípio aditivo e do princípio multiplicativo são utilizados corretamente. Além disso, é realizada uma interpretação correta da situação-problema.

Letra C (alternativa incorreta): Nesta opção, de forma errada, o número de opcionais possíveis encontrado é igual a 7 e como consequência a quantidade mínima de cores possíveis é igual a 11.

Letra D (alternativa incorreta): Nesta opção, de forma errada, o número de opcionais possíveis encontrado é igual a 4 e como consequência a quantidade mínima de cores possíveis é igual a 18.

Letra E (alternativa incorreta): Nesta opção, de forma errada, o número de opcionais possíveis encontrado é igual a 3 e como consequência a quantidade mínima de cores possíveis é igual a 24.

Na Tabela 4.10, é apresentado um resumo percentual das respostas dos alunos participantes da pesquisa acerca da questão 10.

Tabela 4.10: Respostas dos estudantes a respeito da questão 10.

Alternativas	Dados absolutos	Porcentagem
Letra A	8	7,1%
Letra B	**30**	**26,8%**
Letra C	21	18,7%
Letra D	18	16,1%
Letra E	17	15,2%
Em branco	18	16,1%
Total	112	100%

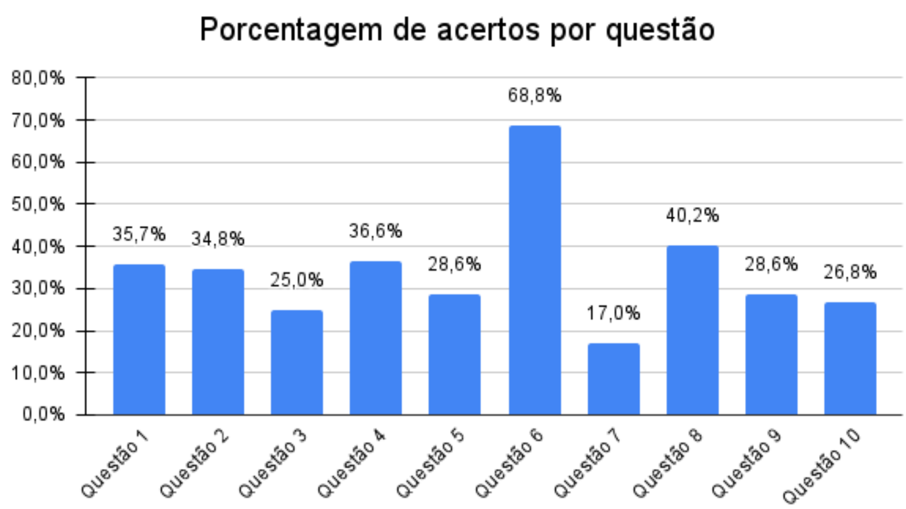
Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, nota-se que 16,1% dos alunos deixaram a questão 10 em branco, isto é, muitos estudantes não compreenderam a proposta dessa questão. Ademais, 73,2% dos alunos erraram ou não responderam a questão 10, o que pode demonstrar a dificuldade desses discentes com problemas que envolvam mais de um conceito de Combinatória.

Análise geral das resoluções das 10 questões

Com base nos resultados obtidos com relação às respostas dos 112 alunos participantes da pesquisa sobre as 10 questões do ENEM, foi elaborado um gráfico comparativo relacionado às porcentagens de acertos por questão, que pode ser visto na Figura 4.23. É possível notar que, baseado nos resultados encontrados, a questão 6 pode ser considerada a mais fácil e a questão 7 a mais difícil. Além disso, é perceptível que em 9 das 10 questões propostas, a porcentagem de acertos dos alunos foi menor do que 50%.

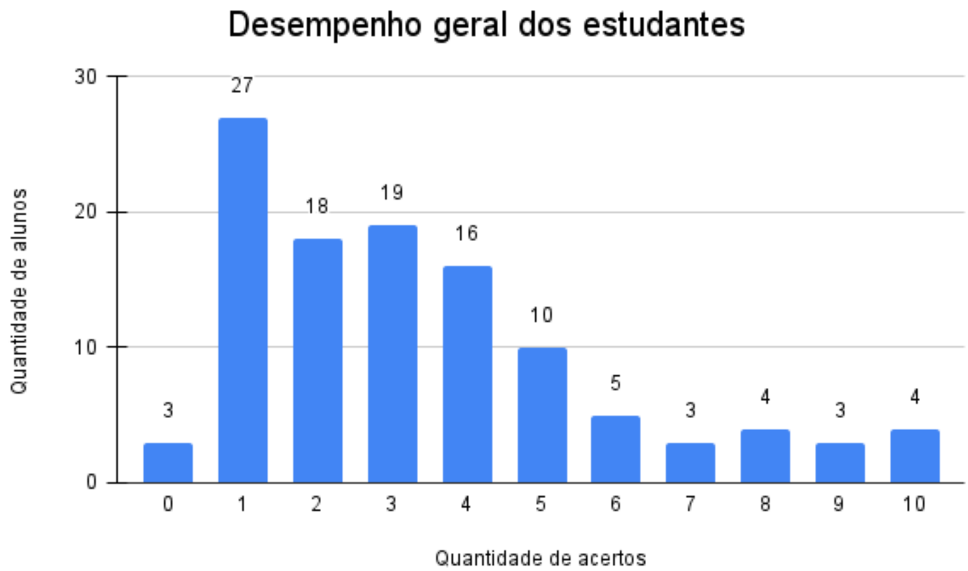
Figura 4.23: Gráfico sobre a porcentagem de acertos por questão.



Fonte: Próprio autor (2024).

Na Figura 4.24 é apresentada a quantidade de questões que cada aluno participante da pesquisa acertou.

Figura 4.24: Gráfico sobre o desempenho geral dos 112 alunos.



Fonte: Próprio autor (2024).

Assim, é possível perceber que 83 alunos acertaram menos da metade das 10 questões propostas e 29 alunos acertaram 5 ou mais questões.

Na Figura 4.25, é mostrada a porcentagem dos alunos participantes da pesquisa que acertaram 5 ou mais questões e o percentual dos estudantes que acertaram menos de 5 questões.

Figura 4.25: Gráfico sobre o desempenho geral dos estudantes.

Fonte: Próprio autor (2024).

Observa-se que 74,1% dos alunos participantes da pesquisa acertaram menos da metade das questões propostas, ou seja, é perceptível a necessidade de que sejam desenvolvidas abordagens metodológicas que contribua para o processo de aprendizagem dos estudantes com relação ao conteúdo Análise Combinatória.

4.3 Intervenção Pedagógica

Após a análise dos resultados obtidos e identificadas as dificuldades dos estudantes participantes desta pesquisa, foi desenvolvido um trabalho de intervenção pedagógica para esses educandos, onde foi feita uma apresentação, por meio de slides projetados no data show e explicação realizada no quadro branco, a respeito do conteúdo Análise Combinatória.

Inicialmente, houve a apresentação da questão 1 com os dados referentes as resoluções dos alunos e a explicação sobre as justificativas relacionadas a cada alternativa. Em seguida, foram abordados os conceitos do princípio multiplicativo e do princípio aditivo, conhecimentos necessários para resolver corretamente a questão 1. Por último, foi realizada a correção da questão.

Na sequência, foram mostradas as resoluções das questões restantes, seguindo a mesma metodologia utilizada na correção da questão 1. Foi realizada uma revisão dos conceitos referentes ao conteúdo Análise Combinatória com base nos erros e acertos dos alunos, sendo possível perceber um sentimento de pertencimento por parte dos estudantes ao ser projetado na tela as diferentes resoluções elaborados por eles, valorizando o protagonismo dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem.

Neste momento de intervenção pedagógica, foram apresentados aos alunos as etapas de uma questão de múltipla escolha que são: texto-base, enunciado (comando) e opções alternativas. Além disso, foi abordado o significado do distrator de uma questão e apresentadas informações a respeito do modelo utilizado para determinar as notas dos estudantes no ENEM.

4.4 Avaliação dos alunos sobre a metodologia utilizada

Com o objetivo de receber o feedback dos estudantes participantes desta pesquisa, após o momento de intervenção pedagógica, foi aplicado um questionário final com perguntas a respeito da metodologia utilizada (APÊNDICE C), que será analisado a seguir.

Quando perguntados se a metodologia utilizada nesta pesquisa foi importante para eles enquanto preparação para o ENEM, a grande maioria (94,3%) dos alunos participantes afirmaram que sim. Na Figura 4.26, é apresentado um resumo que indica a importância da metodologia utilizada para esses estudantes do terceiro ano do ensino médio.

Figura 4.26: Gráfico sobre a avaliação dos alunos acerca da atividade aplicada.

Fonte: Próprio autor (2024).

Quando questionados sobre quais aspectos acharam mais interessantes no processo de aplicação e correção da atividade elaborada sobre Análise Combinatória com base no ENEM, os alunos participantes destacaram os seguintes aspectos: a possibilidade de identificar os erros cometidos nas resoluções das questões e melhorar o desempenho deles a partir disso; a correção da atividade associada com a explicação do conteúdo; a divulgação, por meio de fotos, das diferentes formas que cada aluno encontrou o resultado; a apresentação dos resultados com a quantidade de acertos por questão; a informação que todas as alternativas estão lá por algum motivo, não aleatoriamente, o que pode levar o aluno ao erro; a resolução passo a passo de cada item; o processo de avaliação do ENEM; a abordagem de questões do ENEM e não apenas perguntas do livro didático.

Quando perguntados com relação à aprendizagem, no momento da apresentação dos resultados encontrados e da resolução comentada das questões, os alunos destacaram que conseguiram: aprender a diferença entre permutação, arranjo e combinação; identificar informações a respeito do ENEM; ter uma melhor interpretação de texto; relembrar o que foi visto anteriormente; entender que nem sempre a alternativa mais óbvia é a correta; aprender como interpretar o enunciado de uma questão com mais facilidade; obter um conhecimento mais amplo do conteúdo; compreender a diferença entre o princípio multiplicativo e o princípio aditivo; perceber os erros e ver como as questões eram simples, usando os métodos apresentados na correção; entender melhor como analisar o comando de uma questão.

Quando questionados se essa abordagem metodológica poderia ser aplicada no ensino de outros conteúdos, a maioria dos estudantes responderam que sim, pelos seguintes motivos: é uma maneira de se preparar para a prova do ENEM; facilitaria a compreensão dos conteúdos; é uma forma mais fácil de aprender e corrigir os erros, ajudando o aluno a superar suas dificuldades; é importante trabalhar situações práticas; é fundamental entender o motivo do erro; é uma forma de revisar conceitos já estudados nas aulas anteriores, auxiliando na aprendizagem dos assuntos; é uma forma mais interativa de aprender os conteúdos.

4.5 Entrevista com o professor regente

Durante todo o processo deste trabalho realizado em sala de aula, o professor regente das turmas que participaram desta pesquisa esteve presente enquanto observador, porém em alguns momentos ele realizou algumas contribuições importantes. Considerando a importância do docente no processo de ensino e aprendizagem, a seguir, é feita uma transcrição exata das respostas do professor regente acerca da entrevista realizada.

Pergunta: Você acha que a atividade aplicada foi importante para o estudante se preparar para o ENEM?
Resposta do professor: Sim, porque foi uma atividade prática e com análise em diversos aspectos: interpretação, conteúdo e dificuldade.

Pergunta: Você acha pertinente desenvolver essa proposta de abordagem metodológica nos próximos anos? Se não, qual o motivo? Se sim, quais as dificuldades que você acha que pode encontrar?
Resposta do professor: Seria o ideal, o único problema é o fator tempo, os conteúdos concorrem com muitas atividades que são importantes, mas acontece que gasta muito tempo.

Pergunta: Como você viu a reação dos alunos?
Resposta do professor: Inicialmente, eles se motivaram pelo fator "ganhar ponto", mas depois que a análise foi feita muitos deles perceberam a importância e até agradeceram.

Pergunta: Como você se sentiu coparticipando da aula?
Resposta do professor: Foi gratificante, muito significativo, instrutivo e também informativo. Trouxe uma sensação de estarmos na universidade.

Pergunta: Na sua opinião, quais as contribuições dessa abordagem metodológica para o

processo de aprendizagem do estudante?
Resposta do professor: O significado foi o mais importante, o conteúdo não se encerrou e a participação dos estudantes foi interessante.

Pergunta: O que você achou do processo de aplicação e correção da atividade?
Resposta do professor: Foi excelente, os estudantes participaram da atividade e da correção e isso é muito bom, o resultado não ficou limitado apenas ao número.

Pergunta: Você acha que essa abordagem metodológica poderia ser aplicada no ensino de outros conteúdos? Por quê?
Resposta do professor: Pode sim, por conta da observação, da participação e do significado.

Considerações Finais

Os dados apresentados indicam que a maioria dos alunos participantes desta pesquisa não se sente preparada para responder à prova de Matemática do ENEM e compreende que a aprendizagem com relação ao conteúdo de Análise Combinatória pode ser classificada como regular ou ruim. Dessa forma, é relevante que sejam aplicadas estratégias de ensino que proporcionem ao estudante, ao concluir o Ensino Médio, a possibilidade de resolver corretamente as questões do ENEM relacionadas a esse assunto.

Assim como foi feito neste estudo, é importante que os professores de Matemática valorizem os raciocínios dos estudantes ao resolverem diferentes situações-problema, de forma que o processo de ensino e aprendizagem seja um processo de reflexão tanto dos estudantes quanto dos professores, uma vez que analisar se um aluno aprendeu ou não algum conceito pode significar uma mudança com relação ao que foi planejado inicialmente.

Nesse contexto, o erro pode ser usado como um instrumento de ensino, no qual docentes e estudantes consigam identificar os conceitos que não foram compreendidos e quais os caminhos necessários para que ocorra uma aprendizagem significativa, sendo fundamental que toda comunidade escolar reconheça o erro como parte do processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com a opinião da maioria dos estudantes que participaram deste trabalho, a abordagem metodológica utilizada nesta pesquisa foi importante para eles enquanto preparação para o ENEM e também poderia ser aplicada com relação ao estudo de outros conteúdos. Cabe destacar ainda que esta pesquisa foi importante também para o professor regente das turmas participantes deste trabalho.

Portanto, com base nos resultados obtidos nesta pesquisa, é possível concluir que abordar questões sobre Análise Combinatória, baseadas em provas anteriores do ENEM, relacionando as resoluções elaboradas pelos alunos com os conceitos desse conteúdo, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, essa abordagem metodológica pode auxiliar no processo de preparação dos estudantes para responderem à prova do ENEM.

Referências

AMARAL, J. J. F. **Como fazer uma pesquisa bibliográfica.** Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará, 2007.

BEZERRA, N. **Análise Combinatória e Probabilidade** 1. ed. Belém: EditAedi, 2018.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BRANDÃO, J. D. B. **O papel do livro didático no processo de ensino e aprendizagem**: uma introdução do conceito de função. 2013. 84f. Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio). Campina Grande: UEPB, 2013.

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em: 20 mar. 2023.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Entenda a sua nota no Enem: guia do participante**. Brasília, DF: INEP, 2021.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Guia de Elaboração e Revisão de Itens**. Brasília: Inep, v. 1, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de referência para o ENEM 2009**. Brasília, 2009a. 26p.

COSTA M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de Matemática: Análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de Geometria. **Revista Vidya**, Santa Maria, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez. 2010.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 4. ed. Campinas: Papirus, 1996.

FAZENDA, I. C. A. **O que é interdisciplinaridade?** São Paulo: Cortez, 2008.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**: combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

JULIANELLI, J. R. *et al.* **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MARTINS G. A. Estudo de caso: Uma reflexão sobre a aplicabilidade em pesquisas no Brasil. **Revista da Contabilidade e Organizações**, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 9-18, jan./abr. 2008.

MORGADO, A. C. de O. *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidade**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

OLIVEIRA, M. S. **Sequência didática para contextualização do ensino de função afim por partes**: adaptação das questões dos livros didáticos. 2023. 235f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2023.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto de método matématico. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do trabalho científico**: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Universiade Freevale, 2013.

RABELO, M. **Avaliação Educacional**: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

SANTOS, J. W. dos; SILVA, M. A. Relações de poder na idealização de livros didáticos de Matemática.**Práxis Educativa**, [S. l.], v. 14, n. 1, p. 250 − 272, 2018. DOI: 10.5212/PraxEduc.v.14n1.014. Disponível em: https://revistas.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/12274. Acesso em: 25

ago. 2023.

TUFANO, W. Contextualização. *In*: FAZENDA, I. **Dicionário em construção: interdisciplinaridade**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos.** 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

Apêndice A

Atividade sobre Análise Combinatória baseada no ENEM

Questão 1 (ENEM 2012)

O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Cálculos:

Questão 2 (ENEM 2009)

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
D) duas combinações.
E) dois arranjos.

Cálculos:

Questão 3 (ENEM 2020 - PROVA DIGITAL)

Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.

O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?
A) 59
B) 60
C) 118
D) 119
E) 120

Cálculos:

Questão 4 (ENEM 2020)

Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

A) 9!

B) 4!5!

C) 2 x 4!5!

D) $\frac{9!}{2}$

E) $\frac{4!5!}{2}$

Cálculos:

Questão 5 (ENEM 2016)

Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

A) $10^2 \cdot 26^2$

B) $10^2 \cdot 52^2$

C) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

D) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

E) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Cálculos:

Questão 6 (ENEM 2017)

Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

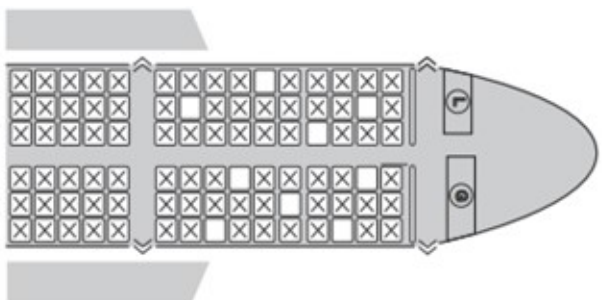
Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

A) 64
B) 56
C) 49
D) 36
E) 28

Cálculos:

Questão 7 (ENEM 2015)

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

A) $\dfrac{9!}{2!}$

B) $\dfrac{9!}{7! \times 2!}$

C) $7!$

D) $\dfrac{5!}{2!} \times 4!$

E) $\dfrac{5!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!}$

Cálculos:

Questão 8 (ENEM 2022)

Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã. De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

A) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)!}$

B) $9 \times \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

C) $9 \times \dfrac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

D) $9 \times \dfrac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

E) $9 \times \dfrac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1$

Cálculos:

Questão 9 (ENEM 2021)

Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

A) $\dfrac{6!}{4!2!} \cdot \dfrac{15!}{10!5!}$

B) $\dfrac{6!}{4!2!} + \dfrac{15!}{10!5!}$

C) $\dfrac{6!}{2!} + \dfrac{15!}{5!}$

D) $\dfrac{6!}{2!} \cdot \dfrac{15!}{5!}$

E) $\dfrac{21!}{7!14!}$

Cálculos:

Questão 10 (ENEM 2022)

Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

A) 8.

B) 9.

C) 11.

D) 18.

E) 24.

Cálculos:

Apêndice B

Questionário sobre o perfil dos alunos

Nome:

Turma:

Você trabalha? ( ) Sim ( ) Não

Você sempre estudou em escola pública? ( ) Sim ( ) Não

Você pretende ingressar na universidade? ( ) Sim ( )Não

Você se sente preparado para resolver a prova de Matemática do ENEM ? ( ) Sim ( )Não

Se não, qual seria a maior dificuldade?

Como você avalia o seu desempenho na disciplina Matemática no Ensino Fundamental?
( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim

Como você avalia o seu desempenho na disciplina Matemática no Ensino Médio?
( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim

Como você avalia o seu aprendizado com relação ao conteúdo Análise Combinatória?
( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim

Apêndice C

Questionário para os alunos: análise sobre a pesquisa

Nome:

Turma:

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi importante para você enquanto preparação para o ENEM?
( ) Sim ( ) Não

O que você achou mais interessante no processo de aplicação e correção da atividade?

O que você conseguiu aprender no momento da apresentação dos resultados e da resolução comentada das questões?

Você acha que essa abordagem metodológica poderia ser aplicada no ensino de outro conteúdos? Por quê?

Apêndice D

Entrevista com o professor regente

1. Você acha que a atividade aplicada foi importante para o estudante se preparar para o ENEM?

2. Você acha pertinente desenvolver essa proposta de abordagem metodológica nos próximos anos? Se não, qual o motivo? Se sim, quais as dificuldades que você acha que pode encontrar?

3. Como você viu a reação dos alunos?

4. Como você se sentiu coparticipando da aula?

5. Na sua opinião, quais as contribuições dessa abordagem metodológica para o processo de aprendizagem do estudante?

6. O que você achou do processo de aplicação e correção da atividade?

7. Você acha que essa abordagem metodológica poderia ser aplicada no ensino de outros conteúdos? Por quê?