Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TAREFAS MATEMÁTICAS DE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

Elisângela Fernandes Cerqueira

Brasília, DF: Novembro/2023

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TAREFAS MATEMÁTICAS DE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

Elisângela Fernandes Cerqueira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Raquel Carneiro Dörr

Brasília – DF: Novembro/ 2023

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

TAREFAS MATEMÁTICAS DE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

por

Elisângela Fernandes Cerqueira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 13 de novembro de 2023.

Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
RAQUEL CARNEIRO DORR
Data: 29/11/2023 09:22:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. D.ra Raquel Carneiro Dörr, UnB (Orientadora)

Documento assinado digitalmente
gov.br
REGINA DA SILVA PINA NEVES
Data: 29/11/2023 09:09:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. D.ra Regina da Silva Pina Neves, UnB (Membro Interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br
ANA MARIA PORTO NASCIMENTO
Data: 30/11/2023 07:41:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. D.ra Ana Maria Porto Nascimento, UFOB (Membro Externo)

AGRADECIMENTO

Primeiramente, a Deus, por me iluminar, permitir a vida e o aprendizado nesta jornada.

Aos meus pais Fausto Batista e Helenita Fernandes, meu esposo Jurandir Fernandes, filhos Brenda Fernandes e Braian Fernandes, pelo apoio, incentivo e compreensão nos momentos de ausência.

À professora Raquel Carneiro Dörr pelo profissionalismo, por me guiar durante a realização desta pesquisa com comentários e sugestões, por promover momentos de formação continuada, pelo carinho e por ter aceitado o convite para ser minha orientadora com tanto esmero e dedicação.

Aos professores Regina da Silva Pina Neves e Rogério César dos Santos pelo comprometimento com o fazer pedagógico de qualidade, pela atenção às necessidades educacionais dos estudantes e por me incentivar a ser uma professora melhor.

Aos companheiros de jornada, Danilo Pereira, Elton José e Ricardo José por me incentivar e colaborar com o meu aprendizado.

Às equipes diretivas do CEM 03 – Ceilândia e CED 01 – Estrutural pelo apoio e por acreditar na educação.

Escolas que são asas não amam pássaros engaiolados. O que elas amam são pássaros em voo. Existem para dar aos pássaros coragem para voar. Ensinar o voo, isso elas não podem fazer, porque o voo já nasce dentro dos pássaros.
O voo não pode ser ensinado.
Só pode ser encorajado.

Rubem Alves

RESUMO

Estratégias de ensino que possibilitem argumentação, comunicação e construção do raciocínio matemático promovem ao estudante meios de exercer a própria cidadania. Nesse sentido, percebe-se, no ensino exploratório, uma possibilidade de desenvolver essas habilidades, por meio de tarefas matemáticas para as turmas da Educação de Jovens e Adultos - EJA - de modo que esse estudante seja capaz de construir o próprio conhecimento. Essa dissertação de mestrado tem como objetivo geral analisar o desenvolvimento de tarefas matemáticas, de estudantes da EJA da rede pública de ensino do Distrito Federal, para verificar aspectos que indiquem aprendizagem referentes ao raciocínio combinatório. A fundamentação teórica baseou-se em autores como Canavarro (2011), Stein (2008) e Ponte (2014). A pesquisa apresenta o desenvolvimento de três tarefas matemáticas, sendo que a primeira delas refere-se a uma avaliação diagnóstica, com a finalidade de verificar habilidades consideradas necessárias, sob o olhar da professora-pesquisadora, para desenvolver o entendimento sobre Análise Combinatória. As outras duas referem-se a tarefas desenvolvidas em grupo, na perspectiva do ensino exploratório, para 71 estudantes de duas escolas da 3ª etapa do 3º segmento da EJA. Os resultados mostraram que o trabalho em grupo favoreceu a argumentação e a discussãomatemáticas. Assim, foi possível concluir que o desenvolvimento de tarefas matemáticas de Análise Combinatória desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório é uma possibilidadepara a promoção da aprendizagem desses estudantes.

Palavras-chave: Educação de Jovens e Adultos. Análise Combinatória. Ensino Exploratório. Tarefas Matemáticas.

ABSTRACT

Teaching strategies that enable argumentation, communication and the construction of mathematical reasoning provide students with ways to exercise their own citizenship. In this sense, exploratory teaching, provides a possibility to develop these skills, through mathematical tasks for the Youth and Adult Education – YAE – classes, so that students can build their own knowledge. This master's thesis has the general objective of analyzing the development of mathematical tasks, by EJA students, from public schools of the Federal District, to verify aspects that indicate learning referent to the combinatorial reasoning. The research presents the development of three mathematical tasks, the first one refers to a diagnostic assessment, with the purpose of verifying skills considered necessary, under the eyes of the teacher-researcher, to develop understanding about Combinatorial Analysis. The other two refers to tasks developed in groups, from the perspective of exploratory teaching, for 71 students from two schools in the 3rd stage of the 3rd segment of YAE. The theoretical foundation was based on authors such as Canavarro (2011) and Stein (2008) on exploratory teaching and Ponte (2014). The results showed that group work favored mathematical argumentation and discussion. Thus, it was possible to conclude that the development of mathematical tasks of Combinatorial Analysis developed from the perspective of Exploratory Teaching is a possibility to promote the learning of these students.

Keywords: Youth and Adult Education. Combinatorial Analysis. Exploratory Teaching. Mathematical Tasks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Quadrado mágico de Lo Shu 344
Figura 2- Problema 79 do Papiro Rhind 355
Figura 3 - Setes pontes de Königsberg 366
Figura 4 - Faixa etária dos estudantes do vespertino e noturno 466
Figura 5 - Questão 1 da avaliação diagnóstica 50
Figura 6 - Questão 2 da avaliação diagnóstica 50
Figura 7 - Questão 3 da avaliação diagnóstica 511
Figura 8 - Questões da etapa inicial da tarefa 2 566
Figura 9 - Questões da etapa execução da tarefa 2 577
Figura 10 - Questões da etapa finalização da tarefa 2 577
Figura 11 -Identificação dos grupos 622
Figura 12 - Conjuntos de balas 633
Figura 13 - Questões da etapa inicial da tarefa 3 644
Figura 14 - Questões da etapa execução da tarefa 3 655
Figura 15 - Questões da etapa finalização da tarefa 3 655
Figura 16 - Questão 1 para análise da avaliação diagnóstica 71
Figura 17 - Mapeamento da Questão 1 para o vespertino e o noturno 71
Figura 18 - Resposta da questão 1, do estudante E1 722
Figura 19 - Resposta da questão 1, do estudante E2 722
Figura 20 - Resposta da questão 1, do estudante E3 733
Figura 21 - Questão 3 para análise da avaliação diagnóstica 744
Figura 22 - Mapeamento da Questão 2 para o vespertino e o noturno 744
Figura 23 - Respostas da questão 2, de dois estudantes 755
Figura 24 - Resposta da questão 2, do estudante E4 755
Figura 25 - Resposta da questão 2, do estudante E5 766
Figura 26 - Questão 3 para análise da avaliação diagnóstica 777
Figura 27 - Mapeamento da Questão 3 777
Figura 28 - Resposta da questão 3, de dois estudantes 788
Figura 29 - Respostas da questão 3, de três estudantes 788
Figura 30 - Respostas de dois estudantes da tarefa 2 – fase inicial 8080
Figura 31 - Simulação da tarefa 2 realizada por estudantes 866
Figura 32 -Resolução do grupo VBII - tarefa 2 899
Figura 33 - Resolução do grupo NAIII - tarefa 2 90
Figura 34 - Resolução do grupo NBI - tarefa 2 90
Figura 35 - Resolução do grupo NBV - tarefa 2 91
Figura 36 - Resolução do grupo NBIV - tarefa 2 91
Figura 37 - Resolução do grupo VBIII - tarefa 2 922
Figura 38 - Resposta do grupo NAII - tarefa 2 955
Figura 39 - Simulação da tarefa 3 realizada por estudantes 977
Figura 40 - Resolução do grupo NBI -- tarefa 3 101
Figura 41- Resolução do grupo NBIII - tarefa 3 101
Figura 42 - Estratégias de 5 grupos - tarefa 3 1033

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Cenário da dissertação de acordo com as 8 etapas da pesquisa qualitativa por D'Ambrosio 455
Tabela 2 - Motivos que estudantes da pesquisa frequentam a EJA 477
Tabela 3 - Habilidades requisitadas na avaliação diagnóstica 499
Tabela 4 - Etapas que contém os itens de desenvolvimento das tarefas 522
Tabela 5 - Resolução da tabela da tarefa 2 588
Tabela 6 - Todas as simulações com as balas 599
Tabela 7 - Diferentes maneiras de consumir as balas 599
Tabela 8 - Diferentes maneiras de consumir carnes e ovos 611
Tabela 9 - Alimentos do grupo Leguminosas 622
Tabela 10 - Significados das etapas do mapeamento 699
Tabela 11- Critérios para a análise da simulação 81
Tabela 12 - Critérios para a análise da estratégia matemática da tarefa 2 8282
Tabela 13 - Ações da etapa de execução da tarefa 2 – Vespertino 83
Tabela 14 - Ações da etapa de execução da tarefa 2 – Noturno 84
Tabela 15 - Porcentagem por etapa das simulações da tarefa 2- Alimentação Saudável 888
Tabela 16 - Critérios para a análise da estratégia matemática da tarefa 3 99
Tabela 17 - Comparação das taxas percentuais 104

LISTA DE GRÁGICOS

Gráfico 1- Distribuição dos alunos da EJA por idade 27
Gráfico 2 - Profissão dos estudantes - Vespertino 47
Gráfico 3 - Profissão dos estudantes - Noturno... 48
Gráfico 4 - Avaliação diagnóstica por etapa 799
Gráfico 5 - Porcentagem por etapa das estratégias da tarefa 2- Alimentação Saudável......... 888
Gráfico 6 - Porcentagem por etapa das estratégias da tarefa 3 “Viagem de carro”.......... 100100
Gráfico 7 - Percentuais comparativos entre as três tarefas - vespertino............................... 1066
Gráfico 8 - Percentuais comparativos entre as três tarefas - noturno 1077
Gráfico 9 - Sistematização das três tarefas – vespertino 1077
Gráfico 10 - Sistematização das três tarefas – noturno 1088

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
2 REFERENCIAL TEÓRICO 19
2.1 Tarefas matemáticas como suporte da aprendizagem por meio de atividades 19
2.1.1 O processo Ensino-Aprendizagem na abordagem Exploratória 20
2.1.1.1 Práticas docentes que viabilizam o desenvolvimento da Matemática investigativa 22
2.1.1.2 O papel da comunicação em aulas no contexto do ensino exploratório 25
2.2 Especificidades da modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA) 25
2.2.1 O objetivo do ensino de Matemática na EJA 28
2.3 Avaliação 30
3 ANÁLISE COMBINATÓRIA 33
3.1 Um pouco de história 34
3.2 Métodos de contagem 37
3.2.1 Princípio Fundamental da Contagem 37
3.2.2 Fatorial 37
3.2.3 Agrupamento Simples 38
3.2.4 Permutação 38
3.2.5 Arranjo 38
3.2.6 Combinação 39
3.2.7 Revisão de literatura 40
4 METODOLOGIA 43
4.1 Pesquisa Qualitativa 44
4.2 Sujeitos e cenário da pesquisa 46
5 AS TAREFAS MATEMÁTICAS: SUA CONSTRUÇÃO E DESENVOLVIMENTO 49
5.1 Tarefa 1 -Avaliação Diagnóstica 49
5.2 Tarefas Matemáticas estruturadas com o intuito de gerar discussões matemáticas produtivas 51
5.2.1 Tarefa Matemática 2 – Alimentação saudável 54
5.2.1.1 Resolução detalhada da Tarefa Matemática 58
5.2.1.2 Antecipações e mediações 60
5.2.1.3 Atividade Extra da tarefa 1 61
5.2.1.4 Organização prévia 62
5.2.2 Tarefa Matemática 3 – Viagem de carro 63
5.2.2.1 Resolução detalhada da Tarefa Matemática 65
5.2.2.2 Antecipações e mediações 66

6 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DAS TAREFAS 69
6.1 Avaliação diagnóstica 70
6.1.1 Análise individual da questão 1 70
6.1.2 Análise individual da questão 2 74
6.1.3 Análise individual da questão 3 76
6.1.4 Análise conjunta das três questões da avaliação diagnóstica 79
6.2 Tarefa matemática 2 80
6.2.1 Fase - Inicial 80
6.2.2 Fase - Execução 81
6.2.2.1 Simulação e Estratégia Matemática 86
6.2.3 Fase – Finalização 92
6.2.4 Reflexões sobre a tarefa 2 “Alimentação Saudável” 95
6.3 Tarefa matemática 3 96
6.3.1 Fase – Inicial 96
6.3.2 Fase – Execução 96
6.3.3 Fase – Finalização 102
6.3.4 Reflexões sobre a tarefa 3 “Viagem de carro” 103
6.4 Relação entre os dados estatísticos das três tarefas matemáticas. 104
CONSIDERAÇÕES FINAIS 111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 117
APÊNDICE A - Sistematização da revisão de literatura 124
APÊNDICE B – Tarefa 1 -Avaliação Diagnóstica 134
APÊNDICE C –Tarefa 2 “Alimentação Saudável” 135
APÊNDICE D – Tarefa 3 “Viagem de Carro” 138
APÊNDICE E – Simulações da tarefa 2 -Vespertino 140
APÊNDICE F – Simulações da tarefa 2 - Noturno 141

1 INTRODUÇÃO

Iniciei minha vida escolar com cinco anos de idade, no denominado pré-escolar e no ano seguinte, fui estudar em uma escola muito maior, com várias turmas, na época, chamadas turmas de primeiro grau. Isso era um pouco assustador, contudo minha professora Silvia era tão amistosa e gentil, que eu me acostumei rapidamente com a nova escola. Estudei nela por oito anos, tentava ser aplicada em todas as matérias, mas minha predileção sempre era por Matemática, acredito ter herdado isso do meu pai, ele também gostava muito de Matemática, apesar de não ter se formado, ele era muito inteligente e tinha uma facilidade natural com os números.

Meu verdadeiro encantamento com a Matemática aconteceu na 5ª série (atualmente 6º ano), quando comecei a ter um professor para cada matéria. Naquele momento, conheci o meu professor de Matemática, ele era muito exigente e rigoroso, mas também com uma postura respeitosa e estimuladora, de modo a sempre incentivar a participação mais ativa nas resoluções dos exercícios. Eu considerava as aulas dele ótimas, apesar de serem somente aulas expositivas e com longas listas de exercícios, mas o mais significativo naquele momento era a atitude que ele tinha, como professor, sempre interessado no aprendizado dos estudantes e em manter uma relação próxima com eles, o que certamente favorecia o aprendizado.

Nos anos seguintes, do ensino fundamental, tive outros bons professores de Matemática, inclusive, um deles, depois de alguns anos, foi meu colega de trabalho, mas foi o professor da 5ª série que despertou em mim um interesse maior por essa área. Eu considerava que, apesar do rigor matemático, a maneira simples e encorajadora que ele transmitia os conteúdos associados com a postura acessível de modo a incentivar os estudantes me aproximava cada vez mais dessa matéria que eu já considerava desafiadora. Eu sempre me esforçava para ser boa aluna. Nas séries seguintes, os estudantes organizavam grupos de estudo para fazer as atividades de casa de modo que um pudesse auxiliar o outro, eu sempre estava na liderança do grupo quando o estudo se referia à Matemática e quanto eu mais ensinava para os colegas de classe, na verdade, eu mais aprendia e meu interesse por ela consolidava cada vez mais.

No segundo grau, hoje equivalente ao Ensino Médio, mudei novamente de escola e essa era ainda maior que a anterior. Ela apresentava novas características quanto ao processo de ensino-aprendizagem, pois o foco era a aprovação no vestibular da Universidade de Brasília e a exigência era grande. Em Matemática, eu tinha, por ano, pelo menos três professores, que se dividiam entre as frentes de: álgebra, trigonometria e geometria e mesmo assim, apesar de ser muito diferente da escola anterior, logo me acostumei com a rotina.

Em 1992, entrei para o curso de Matemática na Universidade de Brasília. A minha primeira aula foi de Cálculo I, entrei toda animada para a aula. O professor se apresentou, adotou o livro do Geraldo Ávila e começou a falar sobre os números Reais e a fazer várias demonstrações. Saí muito chateada, pensei que talvez não tivesse escolhido o curso certo, naquele momento a Matemática não era tão natural para mim, quanto antes. O curso de Cálculo foi acontecendo durante o semestre e eu estudava muito para acompanhar as aulas, mas o professor foi fundamental nesse processo, ele disponibilizava alguns momentos no horário do almoço para tirar dúvidas, nos quais constantemente eu estava presente.

Depois de algum tempo no curso de Matemática, fiz minha inscrição para trabalhar como monitora, fui selecionada para trabalhar no SAMAC (Serviço de Atendimento de Matemática à Comunidade), um projeto de extensão que fazia atendimento matemático à comunidade, escolas, professores da rede pública e privada do Distrito Federal. A postura profissional da professora coordenadora do projeto, comprometida com o fazer pedagógico, pautada em uma relação saudável entre o professor e os estudantes e, ainda responsável com o processo ensino-aprendizagem, reafirmava cada vez mais o meu desejo de ser professora de Matemática. O SAMAC, além de possibilitar a interação Matemática com estudantes da Educação Básica e comunidade em geral, também oferecia momentos de formação profissional e de reflexão sobre Educação Matemática, o que certamente impactou na minha prática pedagógica. “Uma das funções dos monitores do SAMAC era refletir sobre a prática pedagógica adotada nas atividades e promover mudanças de concepções que alguns alunos tinham sobre si mesmos como aprendizes da matemática.” (SILVA, 2017, p.1).

Durante a graduação, as aulas intituladas de concepção pedagógica, realizadas em outro departamento, contribuíram pouco para minha formação como professora, mas felizmente dentro do próprio departamento existiam professores comprometidos com Educação Matemática e com a trajetória profissional dos graduandos que, futuramente, seriam professores do Distrito Federal. Lembro-me, com admiração, da postura profissional da professora de geometria, das experiências vivenciadas, do convívio e conversas com profissionais que compartilhavam comigo a necessidade de um fazer pedagógico capaz de contribuir de forma eficaz com o aprendizado.

No mesmo ano que entrei para o ensino superior, 1992, comecei a trabalhar como professora de Matemática na SEEDF (Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal), como professora de contrato temporário. Os estudantes eram de três turmas da EJA (Educação de Jovens e Adultos), eles trabalhavam durante o dia e frequentavam a escola no noturno. Percebia que precisava desenvolver um trabalho diferenciado com eles e, nessas turmas, tentava colocar em prática um pouco do que vivenciei em minha trajetória estudantil e que contribuíram para o meu aprendizado.

Em 1994, fiz o concurso da Secretaria de Educação do Distrito Federal para professora efetiva da rede de ensino, fui aprovada e tomei posse. Eu trabalhava no período noturno, em uma escola que oferecia EJA 2º e 3º segmentos. Apesar de ter sido um período desafiador, pois tinha que conciliar demandas pessoais, estudo e trabalho também foi um período de muito aprendizado. Tive que aprender cotidianamente como ser professora, cada turma, cada semestre, cada conteúdo era um novo desafio que eu tinha que vencer.

Desde aquela época, aprendi que é o caminhar pedagógico que te ensina a ser professor. A identidade profissional do docente é aprimorada à medida que conseguimos aprimorar a capacidade de reflexão sobre a prática pedagógica, como retrata Fiorentini e Losano (2018), ao explicar que a identidade profissional de um professor é desenvolvida dialogicamente numa interface entre seu terreno íntimo e as práticas e os discursos aos quais está exposto cotidianamente.

Estive como coordenadora e supervisora pedagógica de 1997 a 2001 e depois de 2009 a 2010, essas funções exigiam tanto articulação para que o Projeto Político Pedagógico da escola fosse efetivado, quanto conhecimento da legislação e de especificidades do trabalho pedagógico, assim, para atender as demandas dessa função na minha profissão, frequentemente participava de cursos oferecidos pela Escola de Aperfeiçoamento dos Professores da Educação (EAPE). Em 2004 e 2005 participei dos cursos de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio, promovido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) dentro da Universidade de Brasília. Esses cursos sempre reacendiam o meu desejo de continuar estudando. Em 2006, fiz minha primeira especialização em Matemática, mas apesar de ter aprendido sobre conteúdos matemáticos durante o processo, não considerei que essa especialização impactou de modo significativo o meu trabalho.

Em 2013, mesmo trabalhando quarenta horas na SEEDF, comecei a cursar Engenharia Civil. Aprendi muito durante essa graduação, tanto sobre Engenharia quanto sobre o ensino de Matemática, pois montávamos grupos para estudar e, dentro deles, percebia a fragilidade dos colegas de curso, sobre conteúdos relacionados à Matemática básica. Esses momentos, como professora, faziam com que eu pensasse sobre a ensino-aprendizagem de Matemática dos alunos do Ensino Médio. O que poderia ser feito para minimizar as dificuldades matemáticas dos alunos que terminam o Ensino Médio? Que estratégias adotar? Quais metodologias seriam as mais adequadas?

Essas perguntas me levavam à reflexão, sabia que precisava estudar mais para entender melhor sobre o ensino e aprendizagem. Assim, com o objetivo de obter uma melhor qualificação, em 2014, resolvi fazer duas especializações: uma, em Docência do Ensino Superior e a outra, em Gestão e |Orientação Educacional, as quais também não contribuíram significativamente para minha prática pedagógica, mas me faziam refletir sobre ela. Como professora, percebia que deveria estudar e aprender como agir para viabilizar a redução das fragilidades matemáticas dos estudantes da EJA.

Diante de toda essa situação, de alunos da EJA das escolas que eu trabalhava, sabia que precisava fazer o mestrado para aperfeiçoar a minha prática pedagógica. Ingressei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) oferecido no polo da Universidade de Brasília. As matérias relacionadas especificamente à Matemática pura consolidavam a minha formação acadêmica. Fiz uma disciplina voltada para a Educação Matemática -Tópicos de Matemática que estava em sintonia com o que eu procurava em relação a minha prática de sala de aula, de modo a respeitar o tempo para a aprendizagem e a diversidade cultural do estudante da EJA, que "...tem como finalidade a valorização dos jovens, adultos e idosos que acrescentam suas experiências de vida no processo de aprendizagem, para potencializar suas capacidades e fortalecer seus conhecimentos e competências..." (SANTOS, 2023, p.14).

Vivenciei momentos enriquecedores ao estudar autores e pesquisas sobre Educação Matemática, que tem como objetivo a aprendizagem efetiva por meio de metodologias e concepções que buscam transformação da prática pedagógica e consequentemente da aprendizagem matemática. E assim, vi na pesquisa uma maneira de compreender melhor a realidade matemática dos estudantes e promover a construção de aprendizagem. "O trabalho de pesquisa preconiza antes de mais nada uma compreensão de uma dada realidade para sua transformação. Assim, a pesquisa deve ter um sentido de ação transformadora." (MUNIZ, 2008, p.210).

Na maior parte da minha vida profissional como docente, trabalhei com estudantes da EJA, os quais constantemente relatavam ter dificuldades em aprender Matemática e por isso não gostavam de estudá-la, por outro lado percebia que quando o trabalho em sala de aula era realizado em grupos de estudantes, o desenvolvimento das atividades tornava-se mais prazeroso de modo a favorecer as relações sociais, a comunicação, a argumentação, a defesa de ideias e as conjecturas, ou seja a construção do pensamento matemático.

Assim, diante dessa problemática surgida a partir da minha trajetória acadêmica e profissional, percebi, no ensino exploratório, a possibilidade de propor tarefas matemáticas para as turmas da EJA de modo que esse estudante seja capaz de construir o próprio conhecimento. Ou seja, promover um ensino que trabalhe com a concepção do estudante como protagonista da própria aprendizagem e que promova um ambiente estimulante à aprendizagem nas aulas de Matemática. Assim, em consonância com Guerreiro *et al* (2015), possibilitar a construção do conhecimento matemático e do raciocínio combinatório, por meio de um processo individual que se efetive na interação com outros sujeitos da aprendizagem.

O estudante da EJA apresenta uma história de vida e experiências pessoais que necessitam ser valorizadas no ambiente escolar. Essa valorização pode acontecer por meio do processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória mediante a resolução de problemas, por poder ser utilizada para resolver problemas cotidianos; o desenvolvimento do raciocínio lógico, por poder promover a tomada de decisão e organização de informações e, ainda, por estar relacionada com o tópico de probabilidade, presente no cotidiano dos estudantes, de maneira que o raciocínio combinatório seja privilegiado em relação ao uso excessivo de fórmulas, conforme o que apresenta Morgado *et al* (2020).

Nesse contexto, o objetivo geral da pesquisa consiste em analisar o desenvolvimento de tarefas matemáticas de estudantes da EJA da rede pública do Distrito Federal, para verificar aspectos que indiquem aprendizagem referentes ao raciocínio combinatório.

Os objetivos específicos da pesquisa são os seguintes: 1. Analisar simulações e produções escritas das estratégias desenvolvidas pelos estudantes nas tarefas matemáticas; 2. Identificar e caracterizar erros apresentados nos instrumentos desenvolvidos; 3. Possibilitar aos estudantes a utilização de estratégias diversas de resolução relacionadas aos conceitos pertencentes a Análise Combinatória; 4. Analisar a relação entre os dados estatísticos dos instrumentos desenvolvidos em sala de aula.

Desta forma, o texto foi organizado tal que o segundo capítulo, denominado Referencial Teórico foi divido em três seções. A primeira delas aborda a tarefa matemática como instrumento organizador das atividades e como ela se relaciona com o processo ensino-aprendizagem, na perspectiva do ensino exploratório, de modo a ter as cinco práticas de Stein (2008) e a comunicação, conforme Guerreiro *et al* (2015), como elementos que estruturam e auxiliam a construção desse processo. A segunda seção refere-se às especificidades da modalidade EJA - de modo a apresentar diferenças entre a concepção dessa modalidade e a sua juvenilização nos dias atuais - e ainda às reflexões relacionadas ao objetivo de se ensinar Matemática na EJA. E, por fim, a terceira seção propõe uma reflexão sobre a avaliação, uma vez que os registros escritos dos estudantes serão analisados/avaliados para atender aos objetivos dessa pesquisa.

O terceiro capítulo, além de apresentar definições, dificuldades, história e métodos de contagem sobre Análise Combinatória, também apresenta a revisão da literatura com o propósito de contextualizar o leitor sobre esse assunto e de perceber quais são os enfoques atuais dados ao estudo desse conteúdo. Para isso foi realizada uma seleção de trabalhos acadêmicos, entre os anos de 2018 e 2022, sobre esse tema, organizados em uma tabela que apresenta o referencial teórico, os objetivos, o método e os resultados de cada um deles com a finalidade de proporcionar a compreensão de cada publicação.

O quarto capítulo descreve a metodologia e explica a pesquisa, que se situa numa abordagem qualitativa, com foco na busca de significados, de interpretação e de compreensão das informações obtidas, de acordo com D'Ambrosio (2009) e Borba (2004). Para a análise do desenvolvimento das três tarefas matemáticas, sendo uma delas a avaliação diagnóstica, e as outras duas tarefas: 2 - Alimentação Saudável e 3 - Viagem de Carro, foram utilizados registros de prática, áudios e fotografias.

O quinto capítulo apresenta detalhadamente as três tarefas. Na avaliação diagnóstica, foram apresentadas as três questões com as respectivas habilidades requisitadas para a resolução. Nas tarefas 2 e 3, além das três etapas (inicial, execução e finalização) que compunham cada uma delas, foram apresentadas também as resoluções detalhadas, as antecipações e as possíveis mediações.

O sexto capítulo analisa as três atividades de modo a pontuar tipos de erros, recortes de áudios das falas dos estudantes e fotografia de resoluções. A princípio, a análise foi realizada para cada tarefa individualmente, com comparação entre os turnos; em seguida, as três foram analisadas em conjunto com apresentação de gráficos.

Ao final dessa pesquisa espera-se apresentar que o desenvolvimento de tarefas matemáticas de Análise Combinatória desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório é capaz de promover a aprendizagem aos sujeitos da EJA.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

No Brasil, a proficiência em Matemática apresenta dados desafiadores para os sujeitos pertencentes ao processo de ensino-aprendizagem. De acordo com o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) "[...] 68,1% dos estudantes brasileiros [...] não possuem nível básico de Matemática, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania." (Brasil,2018, p.1). Para viabilizar a mudança desse cenário, torna-se necessário repensar os impactos da prática docente na aprendizagem do estudante e, em particular do estudante da EJA.

De acordo com Fonseca (2012) o estudante da EJA constrói o próprio conhecimento matemático não apenas no retorno à escola, mas sim durante toda a trajetória e experiência de vida, desse modo, torna-se necessário que a prática docente as perceba e valorize.

> [...] deve-se reconhecer este jovem estudante da EJA como um sujeito cuja história não é a mesma de outros jovens da mesma idade. Eles trazem uma bagagem de conhecimentos que precisa ser compreendida e valorizada. É preciso saber como vivem, considerar suas experiências, que caminhos percorreram e onde desejam chegar a fim de que a Matemática tenha significado para eles.
> (Oliarski e Fillos, 2016, p.5)

Nesse sentido, para promover a aprendizagem dos estudantes, além de se considerar fatores sociais, econômicos e culturais deve-se também fomentar ações metodológicas de ensino dinâmicas que possibilitem a aprendizagem. Em sala de aula, essa prática pode ser percebida por meio do desenvolvimento de tarefas matemáticas.

2.1 Tarefas matemáticas como suporte da aprendizagem por meio de atividades

A construção do pensamento matemático está relacionada, segundo Ponte (2014), com o termo "atividade" no sentido de que o estudante deve exercer um papel ativo no processo de aprendizagem. A atividade refere-se essencialmente ao estudante e aquilo que ele faz em um dado contexto, enquanto a tarefa é o suporte organizador dessas ações.

Ponte (2014) explica que a tarefa é o elemento organizador do processo ensino-aprendizagem, por meio dela é possível compreender o pensamento do estudante e assim analisar os pontos fortes e fragilidades.

> Uma *tarefa* pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Podedar lugar a *atividades*

> diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. É pela sua atividadee pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situaoão didática criada pelo professor.
>
> (Ponte, 2014,p.16 e 17)

Tarefas matemáticas são instrumentos pedagógicos capazes de possibilitar a aprendizagem. Para que ela aconteça de modo eficiente, faz-se necessário compromisso com o fazer pedagógico que possibilite a construção do conhecimento, por meio de situações didáticas promovidas pelo docente "[...]os professores frequentemente se deparam com [...] respostas dos alunos a tarefas cognitivamente exigentes e devem encontrar maneiras de usá-las para guiar a turma em direção a uma compreensão mais profunda da Matemática significativa." (Stein *et al*,2008, p.314)

2.1.1 O processo Ensino-Aprendizagem na abordagem Exploratória

A abordagem exploratória consiste em promover ambientes de discussão matemática, por meio de tarefas, de modo que essa abordagem, de acordo com Dörr (2021), possibilite aos professores a expectativa da aprendizagem para os estudantes.

> [...]professores esperam[...]que [...]abordagens exploratórias tragam significado ao conhecimento adquirido, ajudando os alunos a buscar aprendizados com êxito, e, ao mesmo tempo, adquirir novos conhecimentos e a base Matemática que é necessário para seus estudos posteriores, criando e aumentando seu interesse em Matemática ou tópicos relacionados, bem como saber como usar a Matemática em situações cotidianas.
>
> (Dörr, 2021, p.2)

Ponte (2005) considera como fundamental nas tarefas matemáticas o grau de desafio matemático, que consiste na percepção da dificuldade da questão de modo a variar entre o "elevado" e "reduzido" e o grau da estrutura de modo a variar entre os polos aberto e fechado. Ao considerar a intercessão desses graus, é possível tipificar a tarefa matemática em:

> Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido;
> Um problema é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado;
> Uma investigação é uma tarefa aberta com desafio elevado;
> Uma exploração é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos.
>
> (Ponte,2014, p.21)

Neste contexto, o processo ensino-aprendizagem na abordagem exploratória baseia-se em tarefas matemáticas abertas, acessíveis à maioria dos estudantes de modo que eles utilizem métodos próprios para a resolução. Ainda de acordo com Ponte (2014), a tarefa do tipo exploratória proporciona o desenvolvimento do potencial criativo, da autoconfiança e da autonomia, pois permite que o estudante utilize a experiência de vida e argumentos próprios para desenvolvê-la. Ressalta-se que o ensino exploratório deve acontecer com a utilização de critérios e métodos que viabilizem a aprendizagem matemática. Assim, *"O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva."* (Canavarro, 2011, p.11).

Canavarro (2011) estabelece a relevância do papel do professor tanto na escolha de tarefas que promovam êxito, quanto no delineamento da exploração matemática como ações docentes capazes de viabilizar o desenvolvimento da capacidade matemática dos estudantes. Ainda, neste sentido, Stein *et al* (2008) explica que o professor deve ainda ser capaz de alinhar as diferentes ideias dos estudantes com o que se estabelece diante das normas matemáticas para que seja possível promover a construção do pensamento matemático e a aprendizagem. Ou seja, o papel do professor é essencial no sentido de ser responsável por estruturar ações metodológicas capazes de promover o alcance do objetivo estabelecido na tarefa desenvolvida em aulas exploratórias. Para favorecer essa prática, processos formativos podem ser oportunizados ao professor, como forma de solidificar a aprendizagem desse profissional.

> [...] a aprendizagem do professor envolve desenvolver e integrar sua base de conhecimento sobre conteúdo, ensino e aprendizagem, tornar-se capaz de aplicar aquele conhecimento em tempo real e tomar decisões instrucionais, participar dos discursos sobre o ensino, tornando-se culto em (e engajado em) uma cadeia de práticas de professores. A aprendizagem do professor é situada na prática – inclui a instrução em sala de aula, mas também o planejamento, a reestruturação de aulas, a avaliação, a colaboração com colegas e a comunicação com pais.
> (Davis e Krajcik, 2005, p. 3, tradução própria)

Portanto, "[...]para promover a aprendizagem profissional do professor, é necessário buscar oportunidades formativas que conciliem teoria e prática; e propiciar ao professor um papel ativo, em que a reflexão mediada, a partir da prática, tenha um papel de destaque." (Silva, Ribeiro, Aguiar, 2022 p. 424). Em consonância, Dörr; Neves e Ribeiro (2023) apontam as potencialidades que a socialização de aulas desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório oferece aos professores de Matemática, de modo a promover e ampliar o conhecimento deles.

> As ideias inerentes ao ensino exploratório têm sido socializadas entre professores de Matemática, a fim de ampliar seus conhecimentos sobre as características dessa abordagem didática, bem como promover sua adoção em situações reais de sala de aula, junto a estudantes da educação básica ou ensino superior. Essa socialização pode ser fortalecida à medida que o professor encontra espaço de fala e de escuta entre colegas de profissão que conhecem a realidade da escola e dos estudantes. De modo especial, o diálogo e a interação entre tais profissionais enriquecem - se desde que esses tenham acesso à literatura atualizada e especializada que colabore para o entendimento das potencialidades e das limitações das abordagens [...]
>
> (Dörr; Neves e Ribeiro,2023, p.3)

Além disso, no desenvolvimento da tarefa exploratória, é fundamental que o estudante construa as próprias representações, pois elas são suportes para a aprendizagem. De acordo com, Bishop e Goffree (1986) existem quatro tipos de representação: símbolos matemáticos, linguagem verbal, figuras e objetos. Ponte (2014) engloba figuras, imagens e ícones em um mesmo grupo denominado de representações pictóricas. Independente da tipificação estabelecida pelos autores, cada uma das representações apresenta especificidades matemáticas que precisam ser compreendidas de modo a facilitar a transposição entre elas, assim, "...os alunos precisam aprender a traduzir uma representação para outra, o que lhes dá flexibilidade para fazer e compreender ideias e conceitos de forma eficaz." (Mainali, 2021, p.3, tradução própria).

2.1.1.1 Práticas docentes que viabilizam o desenvolvimento da Matemática investigativa

Ponte (2014) explica o cenário investigativo como aquele que convida os estudantes a formularem questões e elaborarem explicação. Dessa forma, promover o desenvolvimento da Matemática investigativa exige do professor a adoção de um trabalho comprometido com o fazer pedagógico que valorize a construção do conhecimento matemático realizada pelo próprio estudante. Nesse contexto, Ponte (2012) apresenta as diferenças entre exploração e investigação.

> [...] exploração e investigação, têm vindo a ser cada vez mais usados, sem que exista uma linha de marcação nítida entre eles – falamos de investigações quando se trata de tarefas num contexto matemático mais sofisticado com um considerável grau de desafio matemático e de explorações quando se trata de situações que permitem um fácil envolvimento da generalidade dos alunos.
>
> (Ponte *et al* 2012, p.3)

Para isso, de acordo com Stein *et al* (2008), o professor pode aprender a usar as respostas que os estudantes apresentam nas tarefas, de modo mais eficaz, com a finalidade de promover discussões coletivas, por meio de cinco práticas principais: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e fazer conexões entre as respostas dos discentes. Stein *et al* (2008) ainda afirma que esse modelo estruturado nas cinco práticas é uma forma que o professor, denominado por ele, engenheiro de ambientes, tem de conceituar investigações do discurso de sala de aula.

Antecipar as respostas consiste em pensar e em como agir sobre possíveis dúvidas, estratégias - corretas e incorretas - e contextos inerentes à tarefa que os estudantes poderão apresentar. De acordo com Stein *et al* (2008), antecipar as prováveis respostas consiste em desenvolver expectativas ponderadas sobre como os discentes podem interpretar matematicamente uma situação-problema. Essa prática solicita que o professor tenha conhecimento matemático adequado capaz de perceber as possíveis solicitações dos estudantes, para isso é relevante que a tarefa seja desenvolvida de várias maneiras de modo a explorar todo o potencial dela.

Monitorar refere-se a observar e ouvir as discussões matemáticas dos estudantes durante a fase de exploração e assim avaliar as ideias matemáticas que eles apresentam. Stein *et al* (2008) afirma que as discussões matemáticas são fundamentais na visão atual do ensino eficaz da matemática. Essas discussões podem acontecer em grupos formados entre os estudantes da turma, Feitosa e Igliori (2021) explica que o trabalho realizado em grupo é capaz de aprimorar tanto o próprio aprendizado quanto o aprendizado mútuo.

> Ao monitorizar, para além de verificar se os alunos estão a trabalhar na tarefa, o professor dedica-se a: observar e ouvir os alunos ou grupos; avaliar a validade matemática das suas ideias e resoluções; interpretar e dar sentido ao seu pensamento matemático, mesmo que lhe pareça estranho e/ou não o tenha antecipado; ajudar os alunos em dificuldade a concretizar resoluções que tenham potencial matemático relevante para o propósito matemático da aula.
>
> (Canavarro, 2011, p.13)

O professor deve avaliar a validade matemática das ideias dos estudantes e dar sentido ao pensamento matemático deles, mesmo quando algo está errado (Nelson, 2001; Shifter, 2001). O ato de monitorar permite que o professor possa compreender de forma mais assertiva quais as fragilidades matemáticas expostas pelos estudantes e como agir sobre elas de modo a promover solidificação do conhecimento matemático.

Selecionar é a prática pedagógica que acontece a partir da monitorização dos grupos, nesta etapa o professor pode identificar e selecionar as discussões matemáticas, resoluções, ideias que deverão ser partilhadas com toda a turma a fim de alcançar o objetivo da atividade.

Segundo Stein *et al (*2008), a seleção pode ser feita tanto a partir das folhas de respostas, registros e manipulativos, quanto a partir da escuta pelo professor, das conversas que os estudantes estabelecem durante o desenvolvimento da tarefa, de modo a avaliar o raciocínio matemático. “É importante, no entanto, que os professores não usem simplesmente a técnica de selecionar para evitar lidar com aqueles alunos ou ideias matemáticas que eles têm mais dificuldade em ensinar.” (Stein *et al*, 2008, p.329).

Sequenciar propositalmente as respostas dos estudantes refere-se a escolher a ordem de apresentação dos estudantes, de modo a promover a discussão matemática que possibilite a aprendizagem relativa ao objetivo da tarefa. Existem diferentes maneiras de conduzir a sequência das apresentações, pela quantidade de vezes que aparece nas resoluções, pelo nível de formalidade, pelo grau de facilidade na compreensão, por equívocos apresentados pelos estudantes ou ainda pela possibilidade de fazer generalizações.

> Ao sequenciar, o professor pode optar por critérios diversos. Será sempre vantajoso começar com uma resolução que ajude a tornar a discussão mais acessível a todos os alunos por permitir esclarecer aspectos essenciais e basilares em que se suportem as ideias mais sofisticadas, independentemente dessa resolução ser correta ou incorreta. A exploração matemática de um erro é muitas vezes muito esclarecedora e enriquecedora, quer para os alunos que erraram, quer para os que resolveram bem. Um outro critério adequado para a sequenciação das apresentações é o caminhar do mais informal para o mais formal no que diz respeito às representações matemáticas utilizadas. Um outro critério, por vezes associado ao referido anteriormente, é o caminhar progressivamente para as resoluções que permitem generalizar conceitos matemáticos ou sistematizar procedimentos.
>
> (Canavarro,2011, p.115)

Estabelecer conexões matemáticas entre as diferentes respostas dos estudantes e entre essas e as ideias principais referentes ao objetivo da tarefa consiste em possibilitar a análise, a comparação e o confronto matemático das diferentes estratégias apresentadas.

Stein *et al* (2008) esclarece que, em vez das discussões matemáticas consistirem em apresentações de resolução de um determinado problema, o objetivo é fazer com que as apresentações dos estudantes se baseiem umas nas outras para promover o desenvolvimento do raciocínio e de ideias matemáticas poderosas.

Nesse contexto, segundo Stein *et al* (2008), os professores podem orquestrar discussões matemáticas produtivas e os estudantes podem experimentar o aprendizado por meio da interação, comunicação e, ainda, estabelecer conexões e generalizações de modo a promover o aprendizado.

2.1.1.2 O papel da comunicação em aulas no contexto do ensino exploratório

Alro e Skovsmose (2010) destacam o diálogo como uma interação entre pessoas que buscam compreensão mútua de modo que percebem "um diálogo como uma conversação que visa à aprendizagem. Isso aponta para uma interpretação na qual o diálogo não é concebido como uma conversação qualquer, mas sim como uma conversação com certas qualidades" (Alro; Skovsmose, 2010, p. 119). Nesse contexto, o diálogo é parte da aprendizagem, de modo que "durante a cooperação investigativa em um cenário para investigação são produzidos diálogos em que o professor precisa se mostrar aberto a ouvir e compreender o que o aluno está dizendo." (Salgado, 2021, p.43). E, assim, possibilitar a construção do conhecimento matemático.

Salgado (2021) ainda afirma que na presença de atos dialógicos, ou seja, atos de comunicação que proporcionam aos envolvidos participarem de uma investigação, correrem riscos e promoverem a igualdade, é possível identificar aprendizagens com maior qualidade, pois os diálogos estão respaldados por argumentos que validam indagações e permitem que o conhecimento seja construído. Assim, segundo Guerreiro *et al* (2015), percebe-se a construção do conhecimento como um processo pessoal que se efetiva na interação, participação ativa dos estudantes, de modo que o professor compreenda como o estudante aprende e quais as maneiras mais adequadas de proporcionar o aprendizado.

Nesse cenário, o ensino exploratório é um meio de criar ambientes de aprendizagem que se apoiem em tarefas desafiadoras por meio de ações comunicativas. De acordo com Guerreiro *et al* (2015), pensar sobre a aula de Matemática implica pensar o papel da comunicação na sala de aula, já que ela é o elemento que estrutura o processo ensino-aprendizagem. Dessa forma, Guerreiro *et al* (2015) esclarece que o papel da comunicação no ensino exploratório é sustentado por meio de discussões, negociações e interações tanto entre estudantes, quanto entre estudante e professor.

2.2 Especificidades da modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA)

De acordo com a Constituição Federal (Brasil, 1988), no artigo 205, a educação é um direito de todos, contudo, não são todas as pessoas que exercem esse direito, de acordo com a idade prevista na Lei de Diretrizes e Bases para a matrícula no ensino regular. Diante disso, "a Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade da educação básica destinada ao atendimento a pessoas jovens, adultas e idosas [...] que, [...] não iniciaram ou mesmo interromperam sua trajetória escolar em algum ou em diferentes momentos de sua vida." (SEEDF, 2021, p.9). Essa modalidade de ensino constitui-se como uma possibilidade de acesso ao conhecimento formal de modo a considerar a trajetória de vida e o cotidiano dos sujeitos que buscam o aprendizado por meio da escola.

A EJA exige do professor uma fazer pedagógico reflexivo pautado nos contextos social, humano e cultural dos sujeitos de modo a promover a aprendizagem contínua, uma vez que o "ser humano jamais para de educar-se" (Freire, 2001, p.13). Cabe ao docente, além de promover estratégias metodológicas que atendam as aspirações dos estudantes, valorizar também as experiências pessoais e situações cotidianas dos educandos e a partir delas estabelecer conexões com o que se pretende construir pedagogicamente. Segundo Freire (2013), a memorização mecânica não promove a aprendizagem, pois dessa forma o estudante comporta-se mais de forma passiva, de modo a reproduzir o que foi transmitido do que ativa, como um sujeito crítico, capaz de participar da construção do próprio conhecimento.

> Outra preocupação com as aprendizagens na EJA são as estratégias metodológicas que devem atentar ao campo/espaço de atuação/presença da modalidade, sob pena de tratar de forma igual sujeitos em condições diferentes de aprendizagens. Por isso é necessário observar que a modalidade requer ainda a atenção às adequações curriculares necessárias com vistas a atender as especificidades da EJA, suas realidades, seus sujeitos, seus espaços e seus desafios.
>
> (SEED,2021. p.10)

Desse modo, a EJA deve ser percebida no modelo andragógico que, segundo Carvalho *et al* (2010), é a ciência de orientar adultos a aprender.

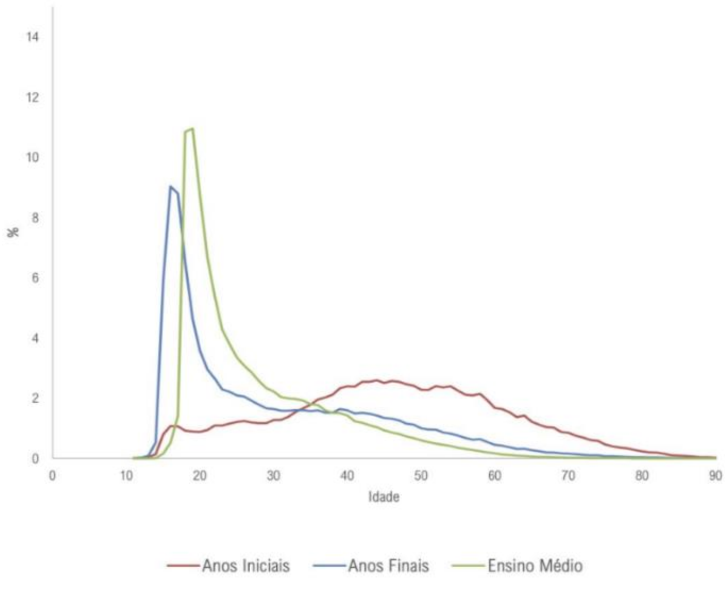
> A andragogia significa ensino de adultos. No modelo andragógico a educação é de responsabilidade compartilhada entre professor e aluno. O professor deve aprender que os adultos preferem que ele lhes ajude a compreender a importância prática do assunto a ser estudado, preferem experimentar a sensação de que cada conhecimento fará diferença em suas vidas, mudará efetivamente suas vidas.
>
> (CARVALHO *et al*., 2010, p.78).

Os estudantes da EJA aprendem de modo mais eficiente à medida que, a partir de conhecimentos e experiências prévias, desenvolvem as situações-problemas de modo ativo experimentando o conhecimento como algo que influenciará a própria vida ou até mesmo ser um agente de transformação social. D'Ambrósio (2019) afirma que o passado cultural do estudante deve ser valorizado, pois assim ele adquire confiança no próprio conhecimento e nas habilidades de adquirir novos saberes. "A utilização do cotidiano [...] para ensinar Matemática revela práticas apreendidas fora do ambiente escolar [...]. Um importante componente da etnomatemática é possibilitar uma visão crítica da realidade, utilizando instrumentos de natureza matemática." (D'Ambrósio, 2019, p.23).

Inicialmente, a modalidade EJA foi concebida para atender jovens, adultos e idosos trabalhadores, que não puderam usufruir da educação na idade adequada ao ensino regular. Contudo, estudos sinalizam uma mudança nesse cenário, com a presença significativa de estudantes jovens. Esse processo é chamado de *juvenilização da EJA*, que "... representa um fenômeno [...], o qual vem preocupando ao descaracterizar o formato originalmente proposto para a EJA" (Filho, 2021, p.719). Nesse panorama, fazem-se necessárias, cada vez mais, estratégias de ensino-aprendizagem que promovam o desenvolvimento e a construção do saber matemático para todas as diferentes faixas etárias, presentes em sala de aula, de modo que elas possam dialogar matematicamente entre si.

De acordo com Rabelo (2023), o censo escolar de 2022 apresenta uma predominância na EJA da juvenilização dos estudantes, tanto nas séries equivalentes aos Anos Finais quanto no Ensino Médio, conforme o gráfico 1.

Gráfico 1- Distribuição dos alunos da EJA por idade



Fonte: Rabelo 2023

Os gráficos apresentam os maiores picos percentuais para estudantes pertencentes a EJA em torno de 20 anos de idade, o que confirma a presença do processo de juvenilização da EJA. Rabelo (2023) apresenta dados os quais mostram o quantitativo de estudantes que abandonam o ensino regular e migram para a EJA.

> A Educação de Jovens e Adultos (EJA) recebe alunos provenientes do Ensino Regular. De 2019 a 2020, aproximadamente 230 mil alunos dos anos finais do ensino fundamental e 160 mil do ensino médio migraram para a EJA.
>
> (Rabelo, 2023, slide 59)

De acordo com Filho; Cassol; Amorim (2021) os fundamentos da juvenilização da EJA estão relacionados com a ausência de políticas públicas e da falta de perspectiva para a Educação Básica. Filho *et al* (2021) afirma que essa juvenilização é consequência do insucesso escolar.

> O alerta da presença de alunos muito jovens na EJA [...] vem do insucesso escolar que retrata o problema vivido na escola regular e, também, as características que os identificam no processo de adolescência. Somam-se, ainda, os desafios sociais desses alunos, em particular a questão do acesso ao emprego e à renda, que, muitas vezes, seduz o aluno para o mundo do trabalho, promovendo a exclusão da vida escolar. Nesse sentido é necessário que gestores, educadores e professores permaneçam atentos.
>
> (Filho *et al*, 2021.p.723)

Nesse contexto, percebe-se que a EJA requer do corpo docente, da equipe gestora da unidade de ensino e dos gestores de políticas públicas, um fazer político-acadêmico comprometido com os desafios e as especificidades que essa modalidade de ensino exige, de modo a valorizar o percurso social, histórico e cultural de cada estudante por meio de práticas pedagógicas que promovam o exercício da plena cidadania.

2.2.1 O objetivo do ensino de Matemática na EJA

A EJA é ofertada no regime semestral, de modo a compreender os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio por meio de uma nomenclatura específica. O Primeiro Segmento equivale aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental do 2º ao 5º ano; o Segundo Segmento, aos Anos Finais do Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano e o Terceiro Segmento equivale ao Ensino Médio. Nessa oferta, um dos componentes curriculares pertencentes à EJA, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais, Brasil (2010) e Brasil (2018), é a Matemática.

Esse componente curricular tem como objetivo, para o Terceiro Segmento, "Promover nos estudantes da EJA a compreensão de conhecimentos matemáticos que oportunizem a capacidade de desenvolver o raciocínio e resolução de problemas baseados na cultura, no mundo do trabalho e em suas tecnologias." (SEEDF, 2021, p.129). Para viabilizar a concretização desse objetivo, faz-se necessária a reflexão sobre as práticas pedagógicas de modo a perceber a Matemática como uma ferramenta capaz de favorecer a resolução de situações-problema desafiadoras, a valorizar e, principalmente, incentivar o diálogo matemático tanto entre professor e estudante quanto entre os próprios estudantes. “A experiência tem mostrado que o conhecimento matemático ganha significado quando os estudantes se deparam com situações desafiadoras e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.” (SEEDF, 2021, p.129). Dessa forma, é possibilitado aos estudantes condições didático-pedagógicas de desenvolver o raciocínio matemático, a criatividade e o pensamento crítico.

> A Matemática deve ser vista em toda sua amplitude, porém os métodos de ensino devem ser diversificados, principalmente na EJA, com o objetivo de respeitar as individualidades do ser humano, o tempo de raciocínio e de aprendizagem de cada um. Cabe ressaltar que o conhecimento matemático precisa alcançar as distintas classes socioeconômicas, para que os estudantes sejam capazes de atuar como cidadãos críticos e conscientes em uma sociedade complexa. Esse desafio vem sendo solucionado com o aumento de pesquisas educacionais que investigam sobre como adaptar o ensino da Matemática aos estudantes das mais diversas realidades sociais, culturais e econômicas, na expectativa de ajudar os professores nessa busca por métodos que respeitem o cotidiano e a realidade dos estudantes.
>
> (SEEDF, 2021, p.129)

Esse contexto está em harmonia com o que defende Skovsmose (2000) em relação a Educação Matemática Crítica, ou seja, o desenvolvimento da educação matemática é percebido como suporte da democracia e da cidadania. Nesse sentido, Ramos (2011) destaca que as salas de aulas de Matemática também devem mostrar aspectos de democracia nos interlocutores da ação educativa, na dialogicidade, na problematização, nos saberes dos educandos, no conteúdo a ser desenvolvido e na postura do professor. Nesse sentido, a Educação Matemática Crítica pode ser percebida como um modo de olhar e trabalhar o ensino e a aprendizagem na EJA, de acordo com o que propõe Skovsmose (2007), uma vez que, por meio da prática de sala de aula é possível promover a democracia e o pleno exercício da cidadania.

Skovsmose (2007) destaca ainda que a função social da Matemática está relacionada com o que ele denomina de “horrores” e “maravilhas”.

> A função social da educação matemática não pode ser caracterizada simplesmente em termos positivos ou negativos. Afirmar que o papel da educação matemática é crítico, significa que ela deveria ser associada aos ‘horrores’ e ‘maravilhas’ na arena educacional.
>
> (Skovsmose, 2007, p. 214)

Diante disso, Ramos (2011) apresenta a Educação Matemática Crítica na modalidade da EJA como o meio dos educandos pensarem criticamente por meio da Matemática, já que ela existe no cotidiano e nas experiências de vida deles. Além disso, discorre também sobre os profissionais da educação os quais "precisam refletir sobre suas práticas pedagógicas. Refletir sobre os objetivos, as responsabilidades, as perspectivas, enfim, sobre o sentido de ensinar e aprender na EJA." (Ramos, 2011, p. 266). Assim, nesse contexto, a Matemática, e mais especificamente o raciocínio combinatório, por fazer parte do cotidiano dos estudantes, contribui na formação de sujeitos argumentativos, autônomos e críticos.

2.3 Avaliação

De acordo com Rabelo (2023), avaliar é um processo complexo que abrange concepções, crenças, valores, princípios, teorias, conceitos, metas, desejos e trajetórias. Rabelo (2013) esclarece ainda que, no ambiente escolar, os professores apresentam dificuldades em relação à concepção e à operacionalização de instrumentos de avaliação escolar que poderiam ser adequados para promover a aprendizagem dos estudantes.

O aprendizado obtido nessa perspectiva, deve ir além do aprendizado do conteúdo. Faz-se necessário aprender a trabalhar em equipe, a comunicar-se efetivamente, saber ouvir e argumentar, ou seja, respeitar e interagir com o outro de modo a trabalhar as dimensões das relações.

A avaliação na sala de aula pode assumir funções distintas. Segundo Rabelo (2023), essas funções são: diagnóstica, formativa ou somativa. A diagnóstica acontece no início de um ciclo com o objetivo de identificar a etapa de aprendizagem do estudante e assim direcionar o planejamento do professor. A formativa tem a característica de servir processualmente como feedback para os sujeitos do processo ensino-aprendizagem e assim possibilitar que esses percebam e possam agir em relação ao nível de aprendizagem dos estudantes. A somativa acontece ao final de um ciclo e evidencia o quanto os estudantes demonstram ter aprendido. Swan (1993) apresenta três tipos de avaliação e características que as diferenciam.

> Tipos de avaliação
>
> Diagnóstica – [...] quando as dificuldades no aprendizado e os equívocos são identificados. Ela precede e direciona o ensino e é principalmente pensada para o benefício do estudante.
> Formativa – Reconhece os resultados do estudante com a finalidade de proporcionar um acompanhamento adequado[...]

> Somativa – [...] mede e registra o desempenho geral de forma sistemática. Isso geralmente, ocorre no final do curso[...].
>
> (Swan,1993, p.195, tradução própria)

Avaliação formativa reconheça os resultados de um aluno, de modo a conceber e a proporcionar um acompanhamento adequado. Aqui incluem-se diagnósticos de avaliação, em que são identificadas dificuldades de aprendizagem e equívocos. Essa avaliação precede e orienta o ensino e destina-se, principalmente, a beneficiar os alunos.

Não é o instrumento que determina a função da avaliação, mas sim a intenção do avaliador e o que se pretende com cada uma dessas funções. Cada uma delas deve ser usada no momento pedagógico oportuno no sentido de contribuir para o aprendizado do estudante. Rabelo (2023) defende, ainda, que a avaliação está diretamente relacionada com a intencionalidade. Perceber a avaliação escolar como prática investigativa consiste em buscar compreender e averiguar os indícios de aprendizagem dos sujeitos atuantes nesse processo. Essa perspectiva exige que o professor perceba tanto a existência de múltiplos saberes quanto o contexto nos quais estão inseridos. Além disso, a investigação processual permite reflexão e análise sobre pontos fortes, fragilidades e possibilidades de agir durante o processo de ensino-aprendizagem e não somente em momentos pontuais, ao final de ciclos.

Uma das maneiras de os estudantes externalizar o conhecimento matemático é por meio da produção escrita, a qual, conforme Ferreira (2023), deveria ser estimulada pelo professor por se tratar de uma ação que pode promover o desenvolvimento da criatividade e do espírito interpretativo e crítico. Dalto e Buriasco (2009) afirma que quando o professor avalia uma resposta de um estudante apenas como certa ou errada, despreza o aprendizado que está em processo de construção e perde a oportunidade de trabalhar com os erros, de modo que os estudantes aprendam com eles. Beites; Branco; Costa (2020) entende que o erro não deve ser considerado um fracasso, mas sim uma possibilidade de trabalho para promover a aprendizagem. Nesse sentido, eles podem ser vistos como "pérolas" lançadas ao professor para que sejam percebidos os pensamentos, descobertas e obstáculos enfrentados pelos estudantes em suas aprendizagens matemáticas (DÖRR, 2021).

Assim, o professor pode redirecionar o fazer pedagógico e viabilizar ou aprimorar o aprendizado, com foco no processo e na maneira de pensar do estudante, ou seja, no modo que ele estrutura a estratégia de resolução. Nesse cenário, tanto o professor quanto os alunos aprendem, pois à medida que ele avalia também é avaliado. Portanto, a avaliação não se apresenta como um meio de punição ou exclusão, mas sim como um recurso capaz de possibilitar a aprendizagem e o desenvolvimento humano, o qual, conforme Rabelo (2013) é influenciado pelas relações sociais construídas dentro e fora do ambiente escolar.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

A habilidade de desenvolver o raciocínio combinatório não é exclusividade do ambiente escolar, pois cotidianamente os indivíduos necessitam resolver situações que envolvam combinatória. Quando necessitam contar, classificar ou demonstrar a existência de subconjuntos a partir de um conjunto finito resolvem problemas de Análise Combinatória. No ambiente escolar, desde o ensino fundamental, esse assunto permeia as aulas de Matemática. Conceitualmente, Morgado *et al* (2020) definem que:

> Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.
> Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:
> 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
> 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas. (Morgado *et al*, 2020, p.1)

Análise Combinatória tem sido considerada difícil no processo de ensino-aprendizagem, tanto por estudantes no que se refere ao aprendizado quanto por professores, no que se refere ao ensino (Sabo,2007). Apesar de ela oferecer, por meio de situações-problemas, possibilidades de motivação e desenvolvimento do raciocínio matemático, já que é possível desenvolvê-la em problemas cotidianos, os participantes da ação educativa a consideram complicada. Sabo (2007) destaca que os docentes associam essa dificuldade com a fragilidade da formação nos conceitos de raciocínio combinatório.

> Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos construídos de forma sólida e com significado, e por esse motivo evitam abordar o tema ou, apenas, apresentam aos alunos, um processo de aplicação de fórmulas prontas, sem justificativas ou explicações. Deste modo, o aluno utiliza-se da memorização para aplicar "a fórmula certa" na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de análise combinatória torna-se um ato tecnicista e operacional.
> (Sabo, 2007, p. 8)

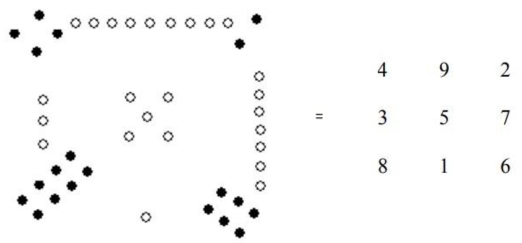
Nesse sentido, Morgado et al (2020) afirmam que propor o raciocínio combinatório como processo mecânico e padronizado oferece ao educando a impressão de que esse assunto se resume apenas ao uso de fórmulas, de modo a não valorizar a criatividade. "[...]a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, [...] exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução." (Morgado *et al*, 2020, p.2).

Dessa forma, faz-se necessário promover ações metodológicas que viabilizem o desenvolvimento da tomada de decisão, da criatividade, da argumentação e em consequência do raciocínio combinatório.

3.1 Um pouco de história

De acordo com Wieleitner (1932), o problema de formar quadrados mágicos é o problema mais antigo relacionado à Análise Combinatória. Berge (1971) esclarece que o primeiro quadrado mágico que se tem registro é o de *Lo Shu*, figura 1, que conforme Needham (1959), data do século I d.C., no entanto pode ter sido escrito por volta de 2000 a.C.

Figura 1- Quadrado mágico de *Lo Shu*



Fonte: Vazquez e Noguti (2004)

Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado Saturn. (Vazquez; Noguti, 2004, p.2). Um quadrado mágico é uma tabela quadrada de números, em que a soma de cada linha, de cada coluna e das duas diagonais são iguais.

Eves (2004) relata que, em 1907, o historiador Moritz Cantor percebeu um popular problema da Idade Média que aparece no *Liber abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci. “Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?” (Eves, 2004, p.76). Esse problema apresenta semelhança com o problema 79 do papiro Rhind (1650 a. C.), figura 2, pois solicita para a resolução a soma de potências de base 7, o que contempla os princípios aditivo e multiplicativo, assuntos pertencentes a Análise Combinatória.

Figura 2- Problema 79 do Papiro Rhind

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2 401
Hecates de grãos	16 807
	19 607

Fonte: Eves, 2004, p.75

Morgado *et al* (2020) relata que um dos primeiros problemas relacionados à Análise Combinatória foi o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$, 300 a.C., de modo que o caso *n* = 2 já aparecia nos Elementos de Euclides. Tanto o matemático Bhaskara Akaria (1114 -1185), quanto Levi bem Gerson (1288 -1344) sabiam calcular o número de permutações, de arranjos e de combinações. Em 1550, Michael Stifel, que introduziu o nome coeficiente binomial, mostrou como calcular $(1+x)^n$ a partir de $(1+x)^{n-1}$, mas antes dessa época, em torno de 1300, o triângulo conhecido, atualmente, como triângulo de Pascal, era conhecido por Chu Shih-Chieh, um matemático que viveu durante a dinastia Yuan. O matemático Al-karaji, no final do século X, sabia a lei de formação, equação 1, dos elementos do triângulo de Pascal.

Equação 1 - Lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

Fonte: Morgado *et al* (2020)

Niccolò Fontana Tartaglia (1499 -1559) estabeleceu uma relação entre os elementos do triângulo de Pascal com as potências de (x+y) e Pascal (1623 -1662) mostrou como utilizar esses elementos para encontrar os coeficientes da expansão binomial. Também contribuíram Jaime Bernoulli (1654 -1705), com a demonstração da equação 2, e Isaac Newton (1646 -1727), que apresentou como fazer o cálculo direto de $(1+x)^n$, por meio da equação 3.

Equação 2 - Desenvolvimento binomial por Bernoulli

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-1}\, y^i$$

Fonte: Morgado *et al* (2020)

Equação 3 - Cálculo dos coeficientes do desenvolvimento binomial por Isaac Newton

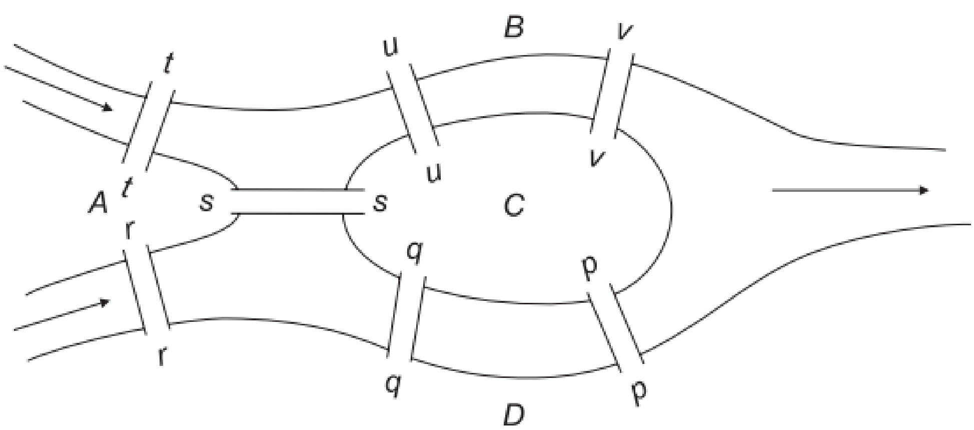
$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$$

Fonte: Morgado *et al* (2020)

Conforme explica Morgado *et al* (2020), o raciocínio combinatório desenvolveu-se com a necessidade de resolver problemas de contagem, os quais seriam utilizados na Teoria das Probabilidades. Essa Teoria mostrou-se aplicável a situações-problema sociais, tais como taxas de natalidade, de mortalidade, de desemprego, de pessoas com uma determinada doença, de expectativa de vida. A análise Combinatória contribuía de modo a proporcionar de maneira correta e coerente a contagem necessária para os cálculos probabilísticos. “O matemático que mais contribuiu para a teoria das probabilidades foi Laplace, [...]em seu monumental Tratado, [...] são discutidos inúmeros problemas de probabilidade [...] em particular, a integral relacionada com a Distribuição Normal.” (Morgado *et al*, 2020, p.7).

Fonseca (2012) afirma que outra contribuição relevante ao estudo do raciocínio combinatório foi dada por Leonardo Euler (1707 - 1783) ao resolver o problema das setes pontes de Königsberg e, assim, colaborar com o desenvolvimento da Teoria dos Grafos. O problema apresentava o seguinte enunciado: “Seria possível fazer um passeio pela cidade de Königsberg de maneira a cruzar todas as pontes da cidade, uma, e uma só, vez, e voltar ao ponto de partida? A cidade, localizada perto da foz do rio Pregel, era famosa por suas sete pontes, cinco delas dando acesso a uma ilha.” (Eves, 2004, p.500) conforme a figura3.

Figura 3 - Setes pontes de Königsberg



Fonte: Eves (2004)

3.2 Métodos de contagem

"A Análise Combinatória é a parte da Matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem." (Iezzi *et al*, 2017, p.226). Assim, o raciocínio combinatório voltado para o Ensino Médio, e de modo análogo á EJA, possibilita estabelecer e quantificar diferentes associações e possibilidades existentes dos elementos de um conjunto, por meio de uma situação-problema de contagem.

De acordo com Brasil (2018), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece a habilidade EM13MAT310 "Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio de princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore" sob a óptica da competência que retrata a resolução e a formulação de problemas matemáticos .Nesse sentido, a SEEDF , por meio do Currículo em Movimento, orienta que sejam ofertados aos estudantes meios de "Compreender e utilizar os conceitos de Análise Combinatória na resolução de problemas." (SEEDF, 2021, p.130) e relaciona esse objetivo ao desenvolvimento de "Princípio Fundamental da Contagem, fatorial, permutação, arranjo e combinação" (SEEDF, 2021, p.130).

3.2.1 Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem, também chamado de princípio multiplicativo em livros da Educação Básica, está relacionado com a quantidade de maneiras distintas de se tomar decisões sucessivas. "O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma D_1 e, tomada a decisão D_1. Há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy." (Morgado *et al*, 2020, p.108).

3.2.2 Fatorial

Em algumas situações-problema de Análise Combinatória, faz-se necessário o cálculo do produto entre números naturais consecutivos. Para representar esse cálculo é utilizado o fatorial . Para Iezzi et al. (2017), fatorial de um número natural, indicado por n! é o produto de n por seus antecessores naturais até o número 1, ou seja $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ com $n \geq 2$, se $n = 0$, então $0! = 1$, se $n = 1$, então $1! = 1$. De maneira geral n!=n.(n-1)!

3.2.3 Agrupamento Simples

Iezzi et al. (2017) afirma que o estudo dos agrupamentos simples consiste em analisar e quantificar grupos de k elementos distintos escolhidos entre os n elementos de um conjunto, com $k < n$.

3.2.4 Permutação

Algumas situações-problema, em Análise Combinatória, solicitam que seja determinado a quantidade de maneiras existentes para se ordenar os elementos de um conjunto finito. Essas podem ser resolvidas por meio da permutação. **"**Dados n elementos distintos, chama-se permutação simples ou simplesmente permutação, representado por P_n , todo agrupamento ordenado (sequência) formado por esses n elementos." (Iezzi et al. ,2017, p. 236)

> Sejam n elementos distintos e P_no número de permutações possíveis desses n elementos. Vamos contar o número de sequências formadas por n elementos:
> • Para escolher o primeiro elemento da sequência temos n possibilidades.
> • Para escolher o segundo elemento da sequência, uma vez definida a primeira posição, há $(n-1)$ possibilidades.
> • Definidos os dois primeiros elementos da sequência, podemos escolher o terceiro elemento de $(n-2)$ maneiras.
> .
> .
> .
> • Escolhidos os $(n-1)$ primeiros elementos da sequência, o elemento que irá ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única.
> Assim, pelo PFC: $P_n = n.(n-1).(n-2) \ldots 2.1$, isto é, $P_n = n!$
> (IEZZI et al. ,2017, p. 236)

3.2.5 Arranjo

É um tipo de agrupamento ordenado de elementos pertencentes a um conjunto finito, representado por $A_{n,k}$. "Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo desses n elementos, tomados k a k (com $k < n$), qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes." (Iezzi et al. ,2017, p. 239). É possível demostrar que a contagem de arranjos pode ser feita por meio do Princípio Fundamental da Contagem.

> •O 1º elemento da sequência pode ser escolhido de n formas possíveis.
> •O 2º elemento da sequência pode ser escolhido de $(n-1)$ maneiras distintas, pois já fizemos a escolha anterior e não há repetição de elementos.
> • Feitas as duas primeiras escolhas, há $(n-2)$ maneiras diferentes de escolher o 3º elemento da sequência, pois não pode haver repetição.
> .

.
.
• Para escolher o k-ésimo elemento, a partir das $(k-1)$ escolhas anteriores, sobram $n-(k-1)=(n-k+1)$ opções
Assim, pelo PFC, a quantidade de arranjos possíveis (indicada por $A_{n,k}$) é: $A_{n,k}=n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1)$.
Para obter uma expressão equivalente[...], basta multiplicar e dividir seu segundo membro por:$(n-k).(n-k-1)\ldots3.2.1=(n-k)!$.
De fato:

$$A_{n,k}=n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1).\frac{(n-k).(n-k-1)\ldots3.2.1}{(n-k).(n-k-1)\ldots3.2.1}$$

Observe que o numerador da expressão acima corresponde a $n!$
Assim: $A_{n,k}=\frac{n!}{(n-k)!}$

(IEZZI et al. ,2017, p. 239)

3.2.6 Combinação

É um tipo de agrupamento não ordenado de elementos pertencentes a um conjunto finito, representado por $C_{n,k}$. "Dados n elementos distintos, chama-se combinação desses n elementos tomados k a k (com $k < n$) qualquer subconjunto formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n." (Iezzi et al. ,2017, p. 244). É possível demonstrar que a contagem do número de combinações pode ser feita por meio do princípio Fundamental da contagem

• Usamos o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n elementos disponíveis:
$n.(n-1).(n-2)\ldots[n-(k-1)]=A_{n,k}$
• Usamos o PFC para contar o número de sequências distintas (ordens) que podem ser formadas com os k elementos escolhidos (permutações de k elementos):
$k.(k-1).(k-2)\ldots3.2.1=P_k=k!$
• Como qualquer permutação desses k elementos dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos n elementos tomados k a k é:
$C_{n,k}=\frac{A_{n,k}}{P_k}=\frac{A_{n,k}}{k!}$
Aplicando a fórmula do arranjo, obtemos:

$$C_{n,k}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

(IEZZI et al. ,2017, p. 244)

Uma prática que Morgado *et al* (2020) pontua sobre o ensino combinatório é a de não fazer fórmulas demais, ou seja, não se deve trocar o princípio fundamental da contagem, nas situações-problema, por fórmulas de permutação, arranjo ou combinação, pois isso compromete o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

3.2.7 Revisão de literatura

Com o objetivo de perceber as tendências pedagógicas sobre a prática de ensino e de aprendizagem sobre Análise Combinatória foi realizada uma revisão de literatura por meio de levantamento e análise de trabalhos acadêmicos, referentes ao período de 2018 a 2022. A busca foi realizada na biblioteca virtual *Scientific Electronic Library Online* (SciELO), em revistas online de Educação Matemática e em sites de Universidades Federais. Para a pesquisa, foram utilizadas as palavras-chaves: Análise Combinatória, perspectivas de ensino, trabalho em grupo. Ao final foram selecionadas 12 publicações – sendo onze delas brasileiras e uma estrangeira - que se referiam a Análise Combinatória percebida dentro da Educação Matemática, de modo a tratar de recursos didáticos, resolução de problemas e ensino-aprendizagem do raciocínio combinatório.

As informações de cada publicação estão organizadas no Apêndice A, de modo a destacar: referência, país, referencial teórico, objetivos, métodos e resultados da publicação, com o objetivo de proporcionar a compreensão das partes que compõem cada publicação. As publicações internacionais representam 8% dessa análise e as publicações brasileiras representam 92% dela.

Observou-se que essas publicações apresentaram a importância do estudo da Análise Combinatória de modo a abordar questões relacionadas às dificuldades no aprendizado, às novas estratégias de ensino e ao uso da tecnologia como elemento capaz de viabilizar a prática. E ainda que houve diversidade em relação às abordagens teóricas e metodológicas, de modo a destacar: a resolução de problemas por meio das quatro etapas da Metodologia de George Polya (1945) - Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto; a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983); a pesquisa da prática docente de Shulman(1996) e a etnomatemática de D'Ambrosio(1993).

Silva, Andrade e Santos (2018) propõe o desenvolvimento da Análise Combinatória para professores por meio de uma lista de transmissão do WhatsApp. Essa estratégia possibilita aos docentes a reflexão sobre a própria prática de ensino de modo a se constituir como um exercício imprescindível na busca do preparo profissional, para atuar em sala de aula, com foco na aprendizagem dos estudantes.

Os jogos foram utilizados como metodologias propostas pelo professor a fim de promover os conhecimentos combinatórios. Schmitt (2021) pontua as contribuições que os jogos podem trazer para a melhoria do ensino da Matemática, tais como desenvolver as habilidades referentes a tomada de decisão, do cálculo mental, organização do pensamento, uso de estratégias, melhora da concentração e da atenção. Alcântara, Dantas e Pará (2020) ainda afirmam que o jogo pode ser utilizado como um recurso didático capaz de auxiliar o desenvolvimento de estudantes questionadores e críticos. E, ainda, Teixeira (2021) relata a importância do jogo como uma ferramenta que possibilita ao professor perceber o rendimento, o conhecimento e as dificuldades dos estudantes.

A relação entre Análise Combinatória e Probabilidade foi analisada em Lima e Borba (2022) ao considerar a articulação entre elas nos livros didáticos e ainda apresentaram um zelo com a representação simbólica (desenho) sendo entendida diferente de meras ilustrações feitas pelos estudantes. Essa mesma relação foi percebida por Fernandes (2021) em relação a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de modo a apresentar a estratégia de resolução de problemas de Polya como uma ferramenta para a solução de problemas da OBMEP sobre Análise Combinatória e Probabilidade.

Ainda com a resolução de problemas como abordagem comum, Bastos, Lopes e Victer (2020) percebem um maior nível de aprendizagem ao associar a História da Matemática com a resolução de problemas de modo que a História da Matemática é entendida como um instrumento capaz de promover a aprendizagem e a resolução de problemas, como uma ferramenta capaz de envolver os estudantes e promover o aprendizado. Oinhas e Zanon (2021) defende a conexão entre o ensino da Análise Combinatória, a resolução de problemas e as tecnologias digitais, por favorecer o desenvolvimento do estudante e do pensamento matemático, crítico e tecnológico.

Silveira, Andrade (2020) e Silveira, Andrade (2022) explicam que ao exporem as próprias ideias e reflexões sobre um problema, os estudantes desempenham o papel de sujeito principal da aprendizagem e, desse modo, criam um cenário com sujeitos mais autônomos e entendedores do seu próprio fazer.

Campos e Igliori (2021) entendem que a dedicação de pesquisadores da educação matemática em relação à aprendizagem combinatória deve-se ao interesse em compreender o desenvolvimento do raciocínio combinatório. De modo a pontuar a formação de professores à utilização de recursos para o ensino da Análise Combinatória; estratégias de resolução de problemas combinatórios como elementos presentes na pesquisa sobre o raciocínio combinatório.

Ďuriš *et al* (2021) relatam que o processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória desenvolvido em grupo, com tempo para a apropriação dos conceitos, reflexão e discussão Matemática sob mediação do professor regente, promove a aprendizagem individual por meio do que eles chamam de aprendizagem colaborativa.

Nesse contexto, percebe-se que essas publicações, dos últimos cinco anos, apresentam trabalhos desenvolvidos tanto com estudantes quanto com professores, com a finalidade de trabalhar, tentar entender e reduzir as dificuldades apresentadas tanto na aprendizagem quanto no ensino do raciocínio combinatório. Outro ponto relevante consiste no fato de poder ser observado a predominância de metodologias de ensino com foco na discussão Matemática, argumentação e aprendizagem. E, ainda, todos esses trabalhos acadêmicos foram direcionados a estudantes do Ensino Médio, sendo que nenhum deles apresentou considerações e estudos referentes ao público da Educação de Jovens e Adultos.

4 METODOLOGIA

Este capítulo descreve a metodologia de pesquisa caracterizada como de caráter qualitativo de acordo com o que apresenta Borba (2004) e D'Ambrosio (2009), com análise feita a partir do uso de registros escritos dos estudantes participantes.

Por meio dos registros escritos feitos em papel, os estudantes puderam externalizar conhecimentos sobre Análise Combinatória, os quais foram explorados didaticamente de acordo com os objetivos dessa pesquisa: analisar simulações e produções escritas das estratégias desenvolvidas pelos estudantes nas tarefas matemáticas; identificar e caracterizar erros apresentados nos instrumentos desenvolvidos; possibilitar a utilização de estratégias diversas relativas aos conceitos pertencentes à Análise Combinatória e analisar a relação entre os dados estatísticos dos instrumentos desenvolvidos em sala de aula.

Foram construídas e desenvolvidas três atividades com os estudantes: uma avaliação diagnóstica, realizada individualmente e sem consulta (que poderá ser encontrada no apêndice A) e, ainda, duas tarefas matemáticas desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório (tarefa matemática 2 – Alimentação Saudável; tarefa matemática 3 – Viagem de carro, que poderão ser encontradas nos apêndices B e C), realizadas em grupos constituídos de quatro a sete pessoas. Para resolvê-las foi disponibilizado o tempo equivalente a uma aula dupla, ou seja, 90 minutos para o turno vespertino e 80 minutos para o noturno, para cada tarefa. Todas três tarefas foram construídas pela professora-pesquisadora.

Solicitou-se aos grupos a realização de simulações, nas tarefas 2 e 3, com o objetivo de facilitar a compreensão de forma dialógica de modo a promover a comunicação e interação entre os sujeitos. E, também, a entrega de registros escritos, os quais foram pensados e construídos dentro de cada grupo e, por fim, socializados com toda a turma por meio da mediação da professora-pesquisadora.

Os registros de prática foram coletados mediante : entrega dos registros escritos em papel pelos alunos e da resolução da atividade; áudio gravado pelo celular do professora-pesquisadora sobre os acontecimentos que se desencadearam no desenvolvimento das tarefas matemáticas; anotações pontuais em relação às dúvidas dos estudantes feitas ao final da aula e fotografias. As simulações e os registros escritos, ilustrados, respectivamente por meio de figuras de fotografias e do material entregue pelos estudantes e os áudios gravados em sala de aula apresentados por meio de recortes da transcrição serão retratados no capítulo 6.

Por meio das produções escritas, buscava-se compreender e averiguar os indícios de aprendizagem dos sujeitos atuantes nesse processo. A partir dessa busca, nas aulas seguintes, a professora-pesquisadora fazia intervenções baseadas na análise dos pontos fortes e fragilidades, de modo que elas ocorriam por meio de: aulas expositivas; exemplos; exercícios no quadro, resolvidos por estudantes voluntários e exercícios, resolvidos em duplas. Segundo Ponte (2005) é importante diversificar os tipos de tarefas pois cada uma delas cumpre um papel que colabora com a aprendizagem.

4.1 Pesquisa Qualitativa

Nessa pesquisa, de acordo com D'Ambrosio (2009), o foco consistiu na percepção da aprendizagem dos estudantes, de modo a analisar a construção do conhecimento por meio da vivência, da interação, do diálogo e da discussão matemática. A interpretação dos registros, realizada pela professora-pesquisadora, ocorreu segundo Garnica (2004), que afirma não haver neutralidade do pesquisador no processo interpretativo, pois ele "vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar". (Garnica, 2004, p. 86)

O desenvolvimento da pesquisa aconteceu com estudantes matriculados na EJA da rede pública do Distrito Federal, sendo um dos focos pautado na aprendizagem desses sujeitos sobre Análise Combinatória. Nesse sentido e com base no ensino exploratório, foram formulados os seguintes questionamentos, de acordo com o referencial teórico: Como foi percebido o aprendizado diante das simulações e registros escritos? Quais os tipos de erros apresentados nos três instrumentos desenvolvidos em sala de aula? Quais os tipos de estratégias utilizados? Qual a percepção dos dados estatísticos sobre as tarefas matemáticas?

As respostas foram obtidas por meio da análise tanto da interação entre os estudantes nas simulações, quanto nas produções escritas. De acordo com o que propõe Bardin (2011), a análise ocorreu com base na dicotomia interna, ou seja, os tipos diferentes de resolução foram classificados em: soluções que estavam em processo de desenvolvimento, mas que não estavam completamente resolvidas, denominada na pesquisa de resoluções *Em Processo*, e soluções resolvidas, denominadas na pesquisa de resoluções *Corretas*. Assim, de acordo com as etapas elencadas por D'Ambrosio (2009), as etapas de uma pesquisa qualitativa organizam-se em:

> 1. Formulação das questões a serem investigadas com base no referencial teórico do pesquisador;
> 2. Seleção de locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco da investigação;
> 3. Identificação da relação entre esses elementos;
> 4. Definição de estratégias de coleção e análise de dados.

> 5. Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3;
> 6. Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2;
> 7. Redefinição de estratégias definidas no item 4;
> 8. Coleta e análise de dados.
>
> (D'Ambrosio, 2009, p.103)

As 8 etapas apresentadas por D'Ambrosio (2009) aconteceram nessa dissertação de acordo com a tabela 1.

Tabela 1- Cenário da dissertação, de acordo com as 8 etapas da pesquisa qualitativa, por D'Ambrosio

ETAPAS	CENÁRIO DA PESQUISA
1	Como o aprendizado sobre Análise Combinatória é percebido na perspectiva do ensino exploratório?
2	Investigação das produções escritas de estudantes da 3ª etapa do 3º segmento da EJA das escolas públicas CEM 03 - Ceilândia e CEF 01 - Estrutural
3	Análise Combinatória é um dos conteúdos que deve ser desenvolvido na EJA na 3ª etapa do 3º segmento em Matemática.
4	Os dados obtidos por meio de registros escritos e analisados de acordo Morgado (2020) em relação ao raciocínio combinatório e Canavarro (2011) em relação ao ensino exploratório.
5	Coleção de dados sobre os estudantes foram obtidos por meio da observação da professora-pesquisadora - pois trabalha nas turmas onde aconteceu a pesquisa – e, ainda, coletados por meio das informações pessoais fornecidas por eles, na avaliação diagnóstica. Os dados sobre as produções escritas foram obtidos no desenvolvimento das tarefas matemática, os quais foram fotografados e arquivados.
6	A análise individual, de cada tarefa, ocorreu comparativamente entre os turnos e a análise conjunta ocorreu de modo a comparar a relação entre as três tarefas dentro de um mesmo turno. No refinamento das questões acrescentou-se a análise do erro e a percepção dos dados estatísticos.
7	Além da análise dos dados ser feita de acordo com Morgado (2020) e Canavarro (2011), acrescentou-se Dalto e Buriasco (2009) em relação a avaliação.
8	Dados coletados no desenvolvimento das tarefas matemáticas e analisados nessa pesquisa.

Fonte: Informações da pesquisa (2023)

De acordo com Borba (2004), dados quantitativos podem ser utilizados dentro de uma pesquisa qualitativa, assim, tanto para o vespertino quanto para o noturno, foi apresentado o mapeamento estatístico das três tarefas matemáticas. Cada questão foi classificada, no capítulo 6, em três categorias de apresentação do raciocínio matemático - *Em Branco, Em Processo e*

Correto - e a partir dessa classificação, foram apresentadas as respectivas taxas percentuais de cada uma delas em relação ao total de soluções apresentadas.

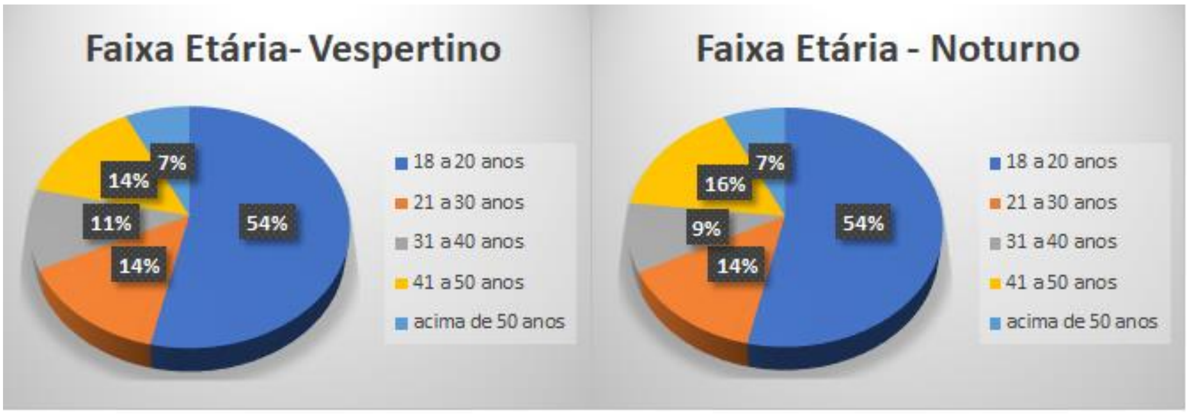
Nesse contexto, a análise das produções escritas foi realizada sob os olhares da professora pesquisadora e da orientadora. De acordo com Borba (2004), o que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva.

4.2 Sujeitos e cenário da pesquisa

O estudo foi desenvolvido no primeiro semestre de 2023, com 71 estudantes da EJA, da 3ª etapa do 3º segmento, de duas escolas da rede pública do Distrito Federal. Sendo 35 deles, vinte e três mulheres e doze homens, matriculados no Centro de Ensino Médio 03 – Ceilândia no turno vespertino e 36 deles, dezenove mulheres e dezessete homens, matriculados no Centro Educacional 01 – Estrutural no noturno.

O primeiro instrumento utilizado para coleta de dados dos estudantes foi uma avaliação diagnóstica, nela eles registraram idade e profissão. A partir desses registros, foi possível constatar que mais da metade deles estão na faixa etária entre 18 e 20 anos de idade, tanto no vespertino quanto no noturno, conforme a figura 4 que representa os gráficos das faixas etárias dos estudantes.

Figura 4 - Faixa etária dos estudantes do vespertino e noturno



Fonte: Dados da avaliação diagnóstica (2023)

De acordo com a figura 4, observou-se que as porcentagens do vespertino e do noturno em relação a cada faixa etária apresentou valores muito próximos e em alguns casos exatamente iguais, sendo que em ambos os turnos houve predominância de estudantes com idade menor ou igual a 20 anos. Diante desse contexto foi realizada uma entrevista com esses sujeitos sobre o motivo de estarem frequentando a EJA, sendo os seguintes motivos por eles apresentados, de acordo com a tabela 2.

Tabela 2 - Motivos que estudantes da pesquisa frequentam a EJA

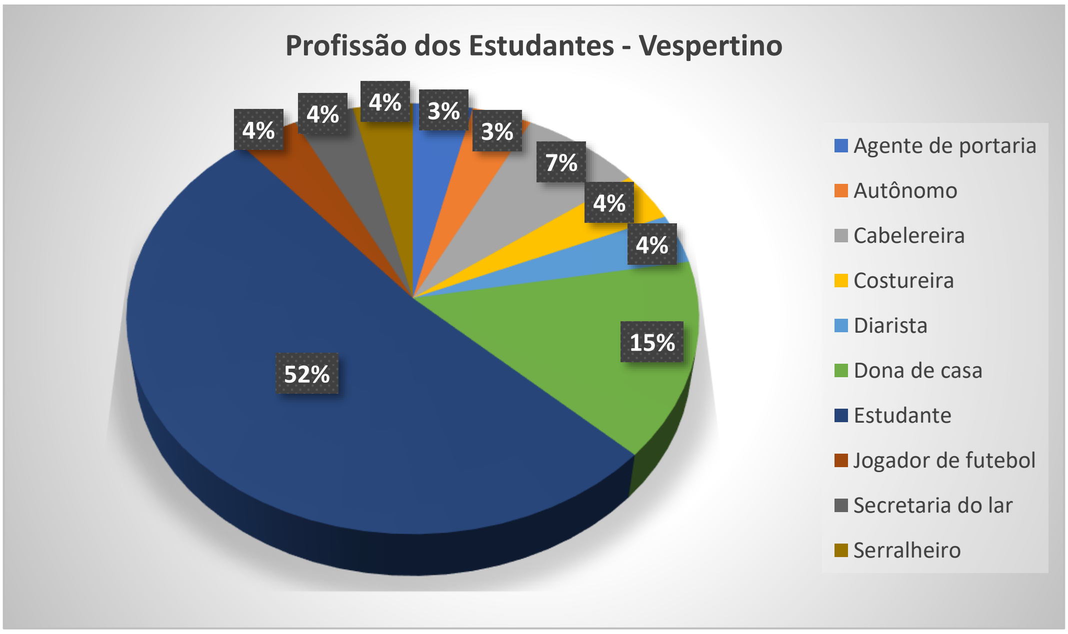
MOTIVOS	VESPERTINO	NOTURNO
Reprovações consecutivas no Ensino Regular	19	15
Casamento na adolescência e dedicação exclusiva á família	3	4
Desistiu dos estudos para trabalhar	11	12
Doença	0	1
Convocação para o serviço militar	0	1
Desmotivação devido a pandemia	0	2
Aluno com necessidades educacionais especiais	1	0
Morava em outro estado brasileiro e a escola era distante da residência	1	1

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Assim, diante da tabela 2, percebe-se que 54% no vespertino e 42% no noturno declararam frequentar a EJA por reprovações consecutivas no Ensino Regular.

Por fim, obteve-se que, a partir da avaliação diagnóstica, 52% dos educandos do turno vespertino registraram como profissão, estudante, conforme gráfico 2.

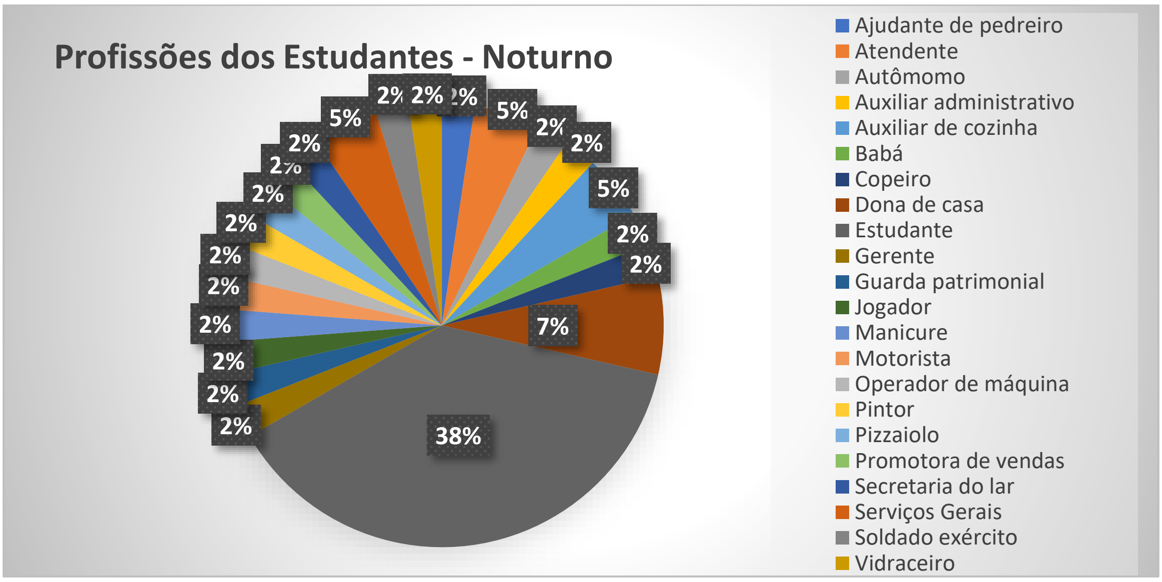
Gráfico 2 - Profissão dos estudantes - Vespertino



Fonte: Dados da avaliação diagnóstica (2023)

E 38% do noturno também responderam ao quesito profissão serem estudantes, conforme gráfico 3.

Gráfico 3 - Profissão dos estudantes - Noturno



Fonte: Dados da avaliação diagnóstica (2023)

Nesse sentido, diante da análise dos sujeitos dessa pesquisa, percebe-se a característica da juvenilização da EJA, que representa um fenômeno resultante dos processos de insucesso escolar do ensino regular, o qual vem descaracterizando o formato originalmente proposto para a EJA, de acordo com Filho (2021).

5 AS TAREFAS MATEMÁTICAS: SUA CONSTRUÇÃO E DESENVOLVIMENTO

De acordo com Ponte (2014), as tarefas são o elemento organizador da atividade e são instrumentos de mediação essenciais no processo ensino-aprendizagem da matemática. Dessa forma, a primeira tarefa matemática foi uma avaliação diagnóstica desenvolvida pela professora-pesquisadora para compreender as diferentes etapas de aprendizagem dos estudantes e, assim, direcionar o trabalho a ser desenvolvido. As outras duas tarefas matemáticas foram desenvolvidas com base no ensino exploratório e estruturadas de acordo as cinco práticas necessárias para orquestrar as discussões matemáticas de forma produtiva, como propõe Canavarro (2011) e Stein *et al* (2008).

5.1 Tarefa 1 -Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica foi elaborada pela professora-pesquisadora com revisão da orientadora. Ela foi aplicada na primeira semana de maio de 2023 e pretendia verificar habilidades consideradas necessárias, sob o olhar da professora-pesquisadora, para desenvolver o raciocínio combinatório. Essas habilidades estruturavam-se tanto em interpretação dos itens quanto em compreensão e utilização correta dos algoritmos das operações matemáticas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Nesse contexto, a avaliação diagnóstica foi composta por três questões discursivas, ou seja, de resposta a ser construída, que requisitavam para o desenvolvimento o cálculo do resultado de operações matemáticas e as seguintes habilidades, conforme a tabela 3.

Tabela 3 - Habilidades requisitadas na avaliação diagnóstica

QUESTÕES	SIGLA DA HABILIDADE	EXPLICAÇÃO SOBRE A HABILIDADE
Questão 1	H1	Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
Questão 2	H2	Identificar o princípio da contagem
Questão 3	H3	Reconhecer, no contexto social, situação-problema passível de ser resolvida por meio do cálculo de operações matemáticas.

Fonte: Autor (2023)

As questões contextualizadas sobre situações-problemas tinham a intenção de aproximarem-se da realidade desses educandos, pois de acordo com Currículo em Movimento da EJA (2021):

> O professor deve apresentar a Matemática aos estudantes como uma ferramenta para a resolução de situações-problema, estimulando o raciocínio lógico e a argumentação. É fundamental, assim, utilizar as experiências de vida dos estudantes no intuito de estimular novas ideias que contribuam para que aprendam a calcular [...] raciocinar, argumentar[...]
> (Currículo em Movimento, 2021, p. 128)

Essa avaliação foi estruturada de forma que o estudante:

- na questão 1, figura 5, a partir de um enunciado pronto, deveria desenvolver a questão por meio de operações matemáticas e assim concluir o raciocínio matemático.

Figura 5 - Questão 1 da avaliação diagnóstica

1. Os pais de uma criança resolveram fazer a festa de aniversário do filho. Para isso, fizeram uma pesquisa sobre o preço e a quantidade de cada tipo de refrigerante, que está representada na seguinte tabela:

Refrigerante	Quantidade (litro)	Preço(R$)
A	0,5	3,38
B	1,0	4,62
C	1,5	5,46
D	2,0	8,40
E	3,0	12,96

Independentemente do tipo e com o objetivo de comprar refrigerante com menor preço por litro, descreva uma estratégia matemática que explique qual o tipo de refrigerante que os pais deverão comprar.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2023)

- na questão 2, figura 6, apesar de ter o enunciado pronto, as ações não se restringiriam somente a cálculos, o estudante deveria também construir uma representação para esse enunciado.

Figura 6 - Questão 2 da avaliação diagnóstica

2. Para se deslocar entre duas cidades satélites do Distrito Federal, uma pessoa pode usar o ônibus, o carro particular ou a bicicleta. Faça uma representação gráfica (desenho) que mostre de quantas maneiras ela pode escolher os meios de transporte se não pretende usar na volta o mesmo transporte utilizado na ida.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2023)

- na questão 3, figura 7, deveria construir o enunciado da questão, resolvê-la por meio das operações matemáticas e concluir corretamente.

Figura 7 - Questão 3 da avaliação diagnóstica

3. Pense em uma situação cotidiana que você utilizou operações matemáticas para resolvê-la. Com base nessa situação, construa um exercício matemático, que envolva no mínimo a operação de multiplicação e apresente a solução.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2023)

Cada estudante recebeu a avaliação impressa, a qual foi respondida individualmente, sem uso de calculadora e sem consulta a qualquer recurso pedagógico, durante o tempo de no máximo 90 minutos para estudantes do vespertino e 80 minutos para os do noturno.

5.2 Tarefas Matemáticas estruturadas com o intuito de gerar discussões matemáticas produtivas

Duas tarefas sobre Análise Combinatória foram desenvolvidas em grupo com o intuito de gerar discussões matemáticas produtivas, na perspectiva do ensino exploratório. Elas foram denominadas:

- Tarefa 2- Alimentação saudável
- Tarefa 3- Viagem de carro

Essas duas tarefas envolveram simulações, representações e folhas de registro no intuito de identificar quais estratégias de resolução os estudantes adotavam, de que maneira esses materiais contribuíam para as discussões matemáticas, nos grupos de estudo e, em consequência, qual foi a contribuição para a aprendizagem matemática. E ainda, em consonância com o Currículo em Movimento da EJA (SEEDF, 2021), o o objetivo específico delas consistia em compreender e utilizar os conceitos de Análise Combinatória na resolução de problemas.

O roteiro dessas tarefas matemáticas foi distribuído para cada um dos estudantes de cada sala de aula, de forma impressa, para que todos do grupo se comprometessem com o desenvolvimento do pensamento matemático e registro da tarefa conforme o recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, trecho 1, a seguir:

Trecho 1

Estudante 1: Tipo cada um faz o teu ou então nós pode (sic) fazer um só, junto?

Estudante 2: Mas é só uma pessoa que vai entregar a folha para a senhora, né (sic)?
Professora :Vou escolher uma folha aleatoriamente de cada grupo.
Estudante 1: Você que vai escolher? Risos. Então todo mundo aqui vai ter que pensar. Risos.

As Tarefas Matemáticas 2 -Apêndice C- e 3 -Apêndice D- foram estruturadas de forma análoga, ou seja, cada uma delas apresentavam três fases: fase inicial, composta por formação dos grupos de trabalho, leitura do texto e interação/comunicação; fase de execução, composta por interpretação da situação-problema, simulação e desenvolvimento da estratégia matemática e por fim, fase de finalização composta por discussão e conclusão. Cada um dos itens das tarefas foi proposto de modo a pertencer a uma dessas fases, conforme a tabela 4, e a facilitar o direcionamento da execução da atividade e a promover a construção do aprendizado.

Tabela 4 - Etapas que contém os itens de desenvolvimento das tarefas

FASE	AÇÕES	ITENS DA TAREFA MATEMÁTICA PIRÂMIDE ALIMENTAR	ITENS DA TAREFA MATEMÁTICA ASSENTOS DO CARRO
Inicial	Formação dos grupos	1	1
	Leitura do texto	2	2
	Ambientação e comunicação por meio da discussão do texto	3	3 e 4
Execução	Interpretação da situação-problema	4,5 e 6	5 e 6
	Simulação	7 e 8	7
	Desenvolvimento da estratégia matemática	9	8
Finalização	Discussão e conclusão	10 e 11	9 e 10

Fonte: Autor (2023)

De acordo com o que propõe Feitosa e Igliori (2021), no item 1, foi solicitado a formação de grupos para que os estudantes maximizassem o próprio aprendizado e o aprendizado mútuo.

Logo em seguida, foi solicitada a leitura individual e depois perguntado à turma se alguém poderia fazer a leitura do texto em voz alta. Em todos esses casos, houve algum estudante que fez a leitura. Após esses momentos, procurava-se proporcionar a ambientação e estabelecer a comunicação, por meio de diálogos, sobre o tema que seria tratado em cada tarefa matemática.

A fase de execução aconteceu dentro dos grupos, de modo que os estudantes discutiam entre eles como interpretar e responder as perguntas que iriam direcionar a simulação e o desenvolvimento das tarefas matemáticas. Os estudantes demonstraram interesse e estabeleceram, de acordo com Guerreiro (2015), a comunicação como processo de discussão e negociação, pois argumentavam sobre os posicionamentos matemáticos, refletiam e participavam do processo de interação social como construção partilhada do conhecimento, como pode ser verificado conforme o recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, por meio do trecho 2.

Trecho 2

Estudante 3 :Foi legal o debate.

Estudante 3: Era um querendo de um jeito, a gente pensando de outro, e a gente tem(sic) *que entrar em consenso.*

Estudante 4: A gente pensava uma coisa, e depois ... não.... mas não é isso não, bora (sic) desfazer tudo, é assim, aí ia lá, bora fazer de novo, aí ficamos quebrando cabeça.

Estudante 3: Foi bom, prendeu a atenção de todo mundo, né...

Essas duas tarefas foram desenvolvidas de acordo com cinco práticas de Stein *et al* (2008): Antecipar, Monitorar, Selecionar, Sequenciar e Estabelecer conexões.

Antecipar consistiu em pensar como agir sobre possíveis dúvidas. Para isso, após a elaboração das tarefas e antes do desenvolvimento delas em sala de aula, foram pensadas possíveis dúvidas e dificuldades que os estudantes poderiam apresentar na resolução e de que maneira a professora- pesquisadora poderia mediar esse contexto. Essa prática foi pensada para que o professor pudesse pressupor interpretações, diversidade de estratégias e diferentes graus de sofisticação das respostas dos estudantes.

Monitorar consistiu em observar e ouvir as discussões matemáticas dos estudantes durante a fase de exploração para conduzir de maneira mais assertiva as discussões matemáticas. Apesar do monitoramento acontecer durante todas as tarefas, ele foi mais frequente nos itens da fase de execução. (Tabela 4).

Selecionar consistiu em identificar e selecionar as discussões matemáticas, resoluções, ideias que deveriam ser partilhadas com toda a turma. Nessa prática, a professora-pesquisadora selecionou todas as resoluções dos grupos, mesmos as que estavam em processo de construção e que não apresentavam soluções adequadas para a resolução das tarefas. A seleção aconteceu dessa maneira, tanto para valorizar todas as contribuições individuais presentes no trabalho a ser apresentado pelo grupo, e assim, entender e respeitar as individualidades, o raciocínio e a aprendizagem dos sujeitos da EJA, conforme propõe o Currículo em Movimento da SEEDF, quanto por compartilhar do modo de pensar de Figueira e Freitas (2020), de forma que o erro deve ser compreendido como uma oportunidade de refazer raciocínios matemáticos.

Sequenciar consistiu em escolher a ordem de apresentação dos registros dos estudantes, de modo a promover a discussão matemática que possibilitasse a aprendizagem. Com base em Stein *et al* 2008, foi pensada propositalmente a ordem de compartilhamento das estratégias, com o objetivo de facilitar a interação e a defesa dos argumentos apresentados nas soluções - o critério adotado para o sequenciamento das tarefas foi o nível de formalidade de modo que todas as folhas de respostas dos grupos participaram da seleção, partindo das menos formais até as que apresentaram maior grau de formalidade, complexidade e generalizações.

Estabelecer conexões consistiu em possibilitar a análise, a comparação e o confronto matemático das diferentes estratégias apresentadas. Devido às discussões matemáticas ocorridas nos grupos na etapa de execução terem sido produtivas, a etapa da finalização ocorreu de modo natural. Foram projetadas na sala de aula todas as respostas dos grupos em relação às estratégias matemáticas encontradas pelos estudantes e discutidas com toda a turma. No turno vespertino, as projeções foram feitas por meio do Datashow e no noturno com a utilização do notebook da professora-pesquisadora e do televisor que existe em cada sala de aula.

Depois de projetar as resoluções, a professora-pesquisadora solicitava que o raciocínio utilizado pelo grupo fosse explicado para a turma. Nesse contexto, a professora assumia o papel de mediadora, ou seja, direcionava perguntas sobre as similaridades e contrastes entre as estratégias adotadas e os estudantes argumentavam, discutiam e explicavam uns para os outros sobre as representações, as estratégias matemáticas e as generalizações.

5.2.1 Tarefa Matemática 2 – Alimentação saudável

A tarefa alimentação saudável foi pensada para sujeitos da EJA- 3ª etapa, 3º segmento de modo a trabalhar com resolução de problemas de contagem envolvendo agrupamentos. A inspiração de fazer essa atividade surgiu durante o horário do lanche, em uma breve conversa, com um grupo de estudantes do noturno, que ao comerem começaram a falar sobre tipos de comidas e quantidades que favoreciam a obesidade. A tarefa foi idealizada e elaborada pela professora-pesquisadora e revisada pela orientadora dessa pesquisa no intuito de possibilitar uma atividade desafiadora para os estudantes. Ela foi elaborada na tipologia aberta, para possibilitar que os estudantes pudessem expressar a construção e a sistematização do raciocínio matemático.

Em consonância com a Base Nacional Comum Curricular a habilidade trabalhada para o desenvolvimento da tarefa foi a EM13MAT310: "Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas." (BNCC, 2017, p.537) e ainda, de acordo com o Currículo em Movimento da EJA da SEEDF o objetivo da tarefa consistiu em "Compreender e utilizar os conceitos de Análise Combinatória na resolução de problemas." (SEEDF, 2021, p.131).

Essa tarefa foi dividida nas três fases:

- Inicial, que foi composta pelos itens 1, 2 e 3, figura 8, os quais se referiam à formação dos grupos, leitura do texto e ainda a ambientar os estudantes e estabelecer a comunicação. Essa fase foi fundamental para os estudantes se familiarizarem com o tema e se sentirem à vontade para exporem as ideias de maneira natural. Tanto no vespertino quanto no noturno, essa etapa aconteceu no tempo previsto, mas para isso a professora-pesquisadora controlava o tempo e avisava aos estudantes os minutos restantes para a sua conclusão.

Figura 8 - Questões da etapa inicial da tarefa 2

1.Forme grupos de 5 pessoas (3 minutos). Escrevam as respostas a todos os itens

2. Leia o texto (2 minutos)

De acordo com o Guia Alimentar para a população brasileira(2014), a alimentação adequada e saudável é um direito humano básico que envolve a garantia ao acesso permanente e regular, de forma socialmente justa, a uma prática alimentar adequada aos aspectos biológicos e sociais do indivíduo e que deve estar em acordo com as necessidades alimentares especiais.

3. Diálogos e Reflexões (8 minutos)

a) Você sabe que, de acordo com a Constituição da República Federativa do Brasil/88, a alimentação é um direito social do ser humano? Esse direito é exercido por você e por todos os moradores da sua cidade? Por quê?

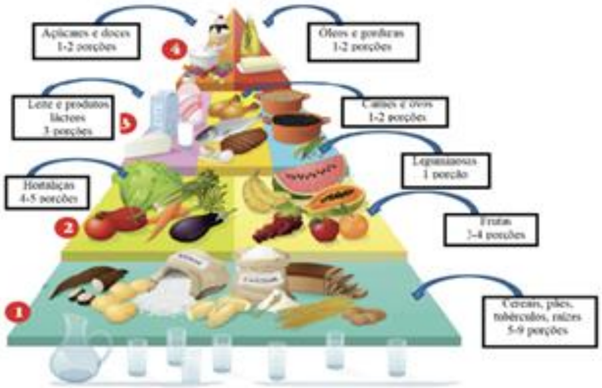
b) Você acredita que o tipo de alimentação e as preferências alimentares podem ser determinadas pela região onde a pessoa nasceu e onde ela vive? Por quê?

c)Você acredita que ter uma alimentação saudável é importante para o ser humano? Por quê?

d) Na sua opinião existe alguma relação entre alimentação não saudável e obesidade?

e) De acordo com o que você come e suas preferências alimentares, você sabe combinar os alimentos para que sua alimentação seja considerada saudável de acordo com a pirâmide alimentar?

Pirâmide alimentar adaptada



Fonte: PHILIP, S.T. et al,1996

Fonte: Tarefa 2- Alimentação Saudável (2023)

- Execução, que foi composta pelos itens 4, 5, 6, 7, 8 e 9, figura 9, os quais se referiam à interpretação da situação-problema, simulação e, por último, desenvolvimento e registro da estratégia matemática. Nos dois turnos, os estudantes estavam bastante participativos, contudo, os estudantes do vespertino interagiram mais entre eles. Os grupos apresentaram dificuldades para tomar decisão quanto à resolução da tabela e sempre mostravam como estavam desenvolvendo a tarefa ou solicitavam a presença da professora para que ela validasse o método adotado por eles. Contudo, a professora procurava devolver a pergunta questionando: O que o grupo acha? Esse raciocínio é consenso do grupo? O que vocês entenderam?

Figura 9 - Questões da etapa execução da tarefa 2

4.Com base na pirâmide alimentar, apresentada na questão 3, é possível fazer várias combinações de alimentos para uma alimentação ser considerada saudável. A partir da figura 1, preencha a tabela abaixo de acordo com a quantidade de figuras desenhadas na pirâmide, para representar o grupo alimentar e a quantidade mínima de porções. (8 minutos)

Quantidade de figuras que representam alimentos diferentes na pirâmide	Grupo Alimentar	Quantidade mínima de porções
	Açucares e doces	
	Leite e produtos lácteos	
	Hortaliças	
	Óleos e gorduras	
	Carnes e ovos	
	Leguminosas	
	Frutas	
	Cereais,pães, tubérculos e raízes	

5. Analise, discuta com seu grupo a seguinte situação **e escreva as ideias no papel.** (2 minutos)

Uma pessoa comprou 4 saquinhos de balas de frutas com sabores diferentes, sendo que cada bala possue em média 36 kcal por unidade . Ela pretende ingerir somente as porções mínimas da pirâmide alimentar e, ao fazer uma pesquisa na internet, descobriu que uma porção do grupo alimentar que as balas pertencem corresponde a 110 kcal .

6. De acordo com a situação apresentada no item 5 e com base na pirâmide alimentar, explique os seguintes questionamentos: (10 minutos)
a) A qual grupo alimentar as balas pertencem? Justifique.
b) Qual a quantidade de porções mínimas do grupo alimentar encontrado no item a? Justifique.
c) Quantas kcal, corresponde a quantidade de porções encontrada no item b ? Justifique.
d) Qual a quantidade máxima de balas que ela poderá consumir por dia, sem ultrapassar a quantidade de porções mínimas? Justifique.

7. Distribuição de 4 saquinhos de balas com sabores diferentes, para cada grupo. (2 minutos)

8. Simule com as balas recebidas as maneiras possíveis da pessoa consumir as balas, em relação aos sabores. Organize essa simulação na mesa e tire uma fotografia com o celular. (10 minutos)

9. Respeitadas as restrições do problema, elabore uma estratégia matemática que denota o número de diferentes maneiras possíveis de a pessoa consumir a quantidade máxima de balas com sabores diferentes sem ultrapassar a porção mínima diária do grupo alimentar que as balas pertencem ? Registre (escreva) essa estratégia. (15 minutos)

Fonte: Tarefa 2- Alimentação Saudável (2023)

- Finalização, que foi composta pelos itens 10 e 11, figura 10, os quais se referiam à discussão e à conclusão da tarefa.

Figura 10 - Questões da etapa finalização da tarefa 2

10. Discussão com os estudantes sobre a estratégia. (10 minutos)

11. Conclusão (10 minutos)

Fonte: Tarefa 2 - Alimentação Saudável (2023)

As respostas dos estudantes eram fotografadas e projetadas para toda a turma. Os estudantes demonstravam alegria pelo fato de as respostas deles serem projetadas, conforme o recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, por meio do trecho 3.

Trecho 3
Estudante 5: Eita, a resposta da gente (sic) tá lá.
Estudante 6:Risos
Estudante 5: Mas acho que a gente fez certo.

5.2.1.1 Resolução detalhada da Tarefa Matemática

Esta é uma questão de Análise Combinatória

- Para preencher a tabela 5, deve-se notar que a primeira coluna refere-se à quantidade de figuras diferentes, por exemplo, pão e farinha de trigo são contados como duas figuras diferentes, mesmo o pão sendo feito de farinha de trigo. Logo, a tabela será preenchida da seguinte maneira:

Tabela 5 - Resolução da tabela da tarefa 2

QUANTIDADE DE FIGURAS DIFERENTES NA PIRÂMIDE	**GRUPO ALIMENTAR**	**QUANTIDADE MÍNIMA DE PORÇÕES**
3	Açúcares e doces	**1**
4	Leite e produtos lácteos	**3**
6	Hortaliças	**4**
2	Óleos e gorduras	**1**
4	Carnes e ovos	**1**
3	Leguminosas	**1**
6	Frutas	**3**
10	Cereais,pães, tubérculos e raízes	**5**

Fonte: Autor (2023)

- A pirâmide alimentar possue 4 níveis nos quais estão divididos os grupos alimentares. O nível 1 correspondente ao grupo alimentar cereais, pães, tubérculos e raízes. O nível

2 corresponde aos grupos alimentares hortaliças e frutas. O nível 3 corresponde aos grupos alimentares leite e produtos lácteos, carnes e ovos. O nível 4 corresponde aos grupos alimentares açúcares e doces e, também, óleos e gorduras. Assim, as balas pertencem ao grupo açúcares e doces.

- De acordo com a pirâmide alimentar a porção de açúcares e doces varia de 1 a 2. Como na situação apresentada, a pessoa irá consumir a porção mínima, então a quantidade de porção deve ser igual a 1.
- Uma porção de doces e açúcares corresponde a 110 kcal, de acordo com o enunciado da questão.
- Uma unidade de bala corresponde a 36 Kcal, então 3 é a quantidade máxima de unidades de balas que uma pessoa pode consumir, sem ultrapassar 110kcal (porção mínima) , pois 3x36 =108 Kcal < 110 Kcal.
- Com as balas recebidas de 4 sabores diferentes (S1, S2, S3 e S4), todas as simulações possíveis estão apresentadas na tabela 6.

Tabela 6 - Todas as simulações com as balas

SIMULAÇÕES POSSÍVEIS			
S1,S1,S1	S2,S2,S2	S3,S3,S3	S4,S4,S4
S1,S1,S2	S2,S2,S1	S3,S3,S1	S4,S4,S1
S1,S1,S3	S2,S2,S3	S3,S3,S2	S4,S4,S2
S1,S1,S4	S2,S2,S4	S3,S3,S4	S4,S4,S3
S1,S2,S3	S2,S1,S4	S3,S1,S4	S4,S2,S3

Fonte: Autor (2023)

- Assim, as diferentes maneiras possíveis de a pessoa consumir a quantidade máxima de balas, com sabores diferentes sem ultrapassar a porção mínima diária do grupo alimentar que as balas pertencem, estão apresentas na tabela 7.

Tabela 7 - Diferentes maneiras de consumir as balas

MANEIRAS DIFERENTES DE CONSUMO			
S1,S2,S3	S2,S1,S4	S3,S1,S4	S4,S2,S3

Fonte: Autor (2023)

Ou seja, C_4^3 = 4 maneiras diferentes.

5.2.1.2 Antecipações e mediações

As antecipações foram pensadas com a intenção de preparar respostas às possíveis dúvidas, de estruturar a sequência da etapa finalização e de fomentar a discussão matemática no momento de partilha de cada grupo com todos os colegas de classe. As mediações poderão ser feitas pelo professor por meio de perguntas ou provocações, de acordo com o desenvolvimento da tarefa, a fim de promover uma aprendizagem.

Assim, as antecipações construídas foram:

- a) Como está dividida a pirâmide alimentar?
- b) Qual grupo alimentar pertence as balas?
- c) Onde descobrir a porção mínima?
- d) Qual a relação entre 110 kcal e 36 kcal?
- e) Qual operação fazer entre 110 kcal e 36 kcal?
- f) Como escolher a quantidade de balas encontrada no item d, de um total de 4 sabores?
- g) Como simular maneiras possíveis de consumir as balas?
- h) Por que grupos com balas de sabores repetidos não podem fazer parte da minha contagem?

Com o objetivo de minimizar as dúvidas e dificuldades dos estudantes, a partir das antecipações foram elencadas as seguintes mediações possíveis:

- Pedir que os próprios colegas de grupo expliquem a pirâmide alimentar.
- Perguntar qual o principal ingrediente utilizado para fazer balas.
- Discutir a compreensão da pirâmide alimentar entre os colegas de grupo.
- Perguntar aos estudantes a que se refere 110 kcal e 36 kcal?
- Como descobrir quantas balas existem em 110 kcal?
- Com as balas recebidas, mostrar a princípio uma maneira de escolher 3 sabores de balas de um total de 4. Depois, mostrar outras maneiras.
- Perguntar ao grupo como é possível organizar os agrupamentos formados no item g.
- Pedir a releitura da atividade pelo grupo de modo a perceber que o comando solicita balas com sabores diferentes.

5.2.1.3 Atividade Extra da tarefa 1

Caso os estudantes consigam resolver a tarefa antes do tempo previsto, o professor poderá apresentar uma atividade extra para complementar a tarefa desenvolvida em sala de aula. Contudo , em nenhum dos dois turnos - vespertino e noturno - que participaram dessa pesquisa foi possível propôr essa atividade aos estudantes , por falta de tempo ao final da aula.

Atividade extra

Agora, suponha que a pessoa irá fazer a dieta da proteína, por apenas 1 dia e ela consumirá 3 alimentos do grupo alimentar Leite e produtos lácteos, 2 do grupo alimentar Carnes e ovos e 1 alimento do grupo alimentar Leguminosas. Considerando que ela possui a mesma quantidade de alimentos apresentados na primeira coluna da tabela do item 4, de quantas maneiras ela poderá montar o cardápio para um dia de dieta?

Solução da atividade extra

Para resolver, deve-se tomar decisões sucessivas:

Escolher 3 alimentos diferentes de um total de 4, do grupo alimentar Leite e produtos lácteos. Esse raciocínio é análogo ao exercício das balas, por isso a quantidade de escolhas é igual a 4.

Escolher 2 alimentos diferentes de um total de 4, do grupo alimentar Carnes e ovos. Seguindo o raciocínio análogo ao exercício das balas e nomeando C1, C2, C3,C4 os quatro tipos de alimento do grupo alimentar Carnes e ovos, apresentados na tabela 8:

Tabela 8 - Diferentes maneiras de consumir carnes e ovos

CONSUMO DIFERENTES DE CARNE E OVOS					
C1,C2	C1,C3	C1,C4	C2,C3	C2,C4	C3,C4

Fonte: autor (2023)

Ou seja, C_4^2 = 6 maneiras diferentes

E por último, escolher 1 alimento de um total de 3, do grupo alimentar Leguminosas. Seguindo raciocínio análogo ao exercício das balas e nomeando L1, L2, L3 os três tipos de alimento do grupo alimentar Leguminosas, apresentados na tabela 9:

Tabela 9 - Alimentos do grupo Leguminosas

LEGUMINOSAS		
L1	L2	L3

Fonte: autor(2023)

Ou seja, C_3^1 = 3 maneiras diferentes

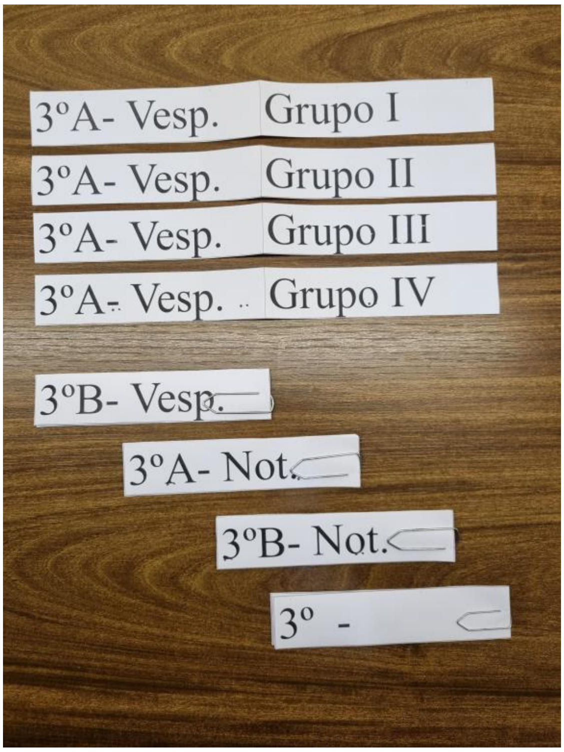
Assim, tomadas todas as decisões tem-se:

C_4^3 x C_4^2 x C_3^1 = 4 x 6 x 3 = 72 maneiras diferentes

5.2.1.4 Organização prévia

Antes da tarefa ser desenvolvida em sala de aula, foram feitas com base no quantitativo de estudantes que realizaram a avaliação diagnóstica, identificações de acordo com a turma e o grupo para facilitar a identificação de cada grupo quanto à simulação, figura 11.

Figura 11 - Identificação dos grupos



Fonte: Autor (2023)

Foram montados conjuntos de sessenta balas divididos em subconjuntos com quatro sabores diferentes, figura 12, sendo que cada grupo recebeu um conjunto para fazer a simulação.

As balas recebidas para a simulação representavam as balas da tarefa 2, sob as restrições da atividade.

Figura 12 - Conjuntos de balas

Fonte: Autor (2023)

5.2.2 Tarefa Matemática 3 – Viagem de carro

Essa tarefa foi baseada em uma atividade construída por um grupo de mestrandos do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade de Brasília, no âmbito de um curso ministrado pelas professoras Raquel Carneiro Dörr e Regina da Silva Pina Neves. Como resultado, a experiência foi apresentada na XVI Conferência Interamericana de Matemática em Lima - Peru, como relato de experiência, de acordo com, Dörr, Cerqueira, Freitas (2023).

A tarefa 3- Viagem de carro - foi pensada para sujeitos da EJA- 3ª etapa, 3º segmento, de modo a trabalhar com resolução de problemas de contagem. Como são todos maiores de 18 anos, a grande maioria está apta a dirigir, sendo que alguns deles possuem carteira de habilitação e carro. Assim, a tarefa procurava promover, nesses estudantes da EJA, a compreensão de conhecimentos matemáticos que pudessem oportunizar a capacidade de desenvolver o raciocínio combinatório e resolução de problemas baseados na cultura, no mundo do trabalho e em suas tecnologias conforme ressalta o Currículo em Movimento. SEEDF (2021).

A tarefa foi desenvolvida no mês de maio de modo a coincidir com a campanha nacional de educação de trânsito e preservação a vida, o chamado Maio Amarelo. Ela foi iniciada com um texto sobre o Maio Amarelo para ambientar os estudantes e motivá-los a compartilhar suas experiências em relação ao trânsito.

Além disso, a tarefa foi subdividida em dez itens, inseridos em três fases, os quais apresentavam tempo estimado para a resolução, com o objetivo de organizar o trabalho da professora e dos estudantes.

As três fases da tarefa são:

- Inicial, composta pelos itens 1, 2, 3 e 4, figura 13. Nessa fase, os estudantes compartilharam as experiências em relação ao trânsito. Essa fase possibilitou a ambientação da tarefa matemática. Os estudantes do noturno foram mais participativos do que os do vespertino.

Figura 13 - Questões da etapa inicial da tarefa 3

1. Formem grupos de 6 pessoas. (5 minutos)
2. Leiam o seguinte texto: (2 minutos)

Em 2023, o Movimento Maio Amarelo comemora 10 anos e nesse ano, novamente a CNT (Confederação Nacional de Transporte) em parceria com o Observatório Nacional de Segurança Viária está patrocinando a campanha. Já o Governo Federal, por intermédio dos Ministérios do Transportes e das Cidades apoiarão a campanha que traz como tema central: "No trânsito, escolha a vida", definido na Resolução 980/2022.

A cada ano, trazemos um tema para reflexão durante o mês de maio. Nesses 10 anos, muitos foram as mensagens, mas o que elas têm em comum é lembrar sempre que isso é um grande problema social, mas a solução está em cada um de nós. (DETRAN, 2023)

3. Alguém de vocês do grupo, já sofreu acidente de trânsito? (3 minutos)

4. Vocês consideram importante respeitar as leis e o código de trânsito? Por quê? (3 minutos)

Fonte: Tarefa 2 – Viagem de carro (2023)

- Execução, composta pelas questões 5, 6, 7 e 8, figura 14. Essa fase referia-se à interpretação da situação-problema, simulação e registro da estratégia. Os estudantes apresentaram dificuldade nesse processo, mas a simulação ajudou a direcionar o desenvolvimento da tarefa nos grupos que a realizaram.

Figura 14 - Questões da etapa execução da tarefa 3

5. Analise em grupo a seguinte situação-problema: (2 minutos)

Uma família irá viajar daqui a quatro semanas em um carro de sete lugares, sendo dois bancos dianteiros - um deles, o do motorista - e cinco bancos traseiros. Na família há um pai e uma mãe, ambos habilitados a dirigir, além de quatro filhos que, atualmente, tem asseguintes idades: 7, 13, 17 e 21 anos. Nesta família, assim que completam 18 anos, os filhos iniciam o curso de direção na autoescola, e após 3 meses estão aptos a dirigir. Sabe-se ainda que os dois filhos mais velhos farão aniversário na semana anterior à viagem e que o banco dianteiro destinado ao passageiro deve, necessariamente, estar ocupado.

6. Com os integrantes do seu grupo e utilizando as cadeiras da sala, simule maneiras possíveis de a família se acomodar no carro para a viagem. (10 minutos)

7. De acordo com a situação-problema e com base no código de trânsito, explique os seguintes questionamentos. (10 minutos)

a) Quais os integrantes da família estarão aptos a ocupar o lugar do motorista no dia da viagem?

b) Quais os integrantes da família estarão aptos a ocupar o banco dianteiro de passageiro?

c) O carro pode ter o banco da frente vazio?

8. Respeitadas as restrições do problema, elabore uma estratégia matemática que denota o número de maneiras possíveis de a família se acomodar no carro para a viagem. (25 minutos)

Fonte: Tarefa 3 – Viagem de carro (2023)

- Finalização, composta pelas questões 9 e 10, figura 15. Essa fase gerou muita discussão matemática, principalmente no turno noturno, pois nas salas de aulas, existiam muitos motoristas que ficaram envolvidos com a tarefa e comprometidos com o raciocínio combinatório e com a resolução.

Figura 15 - Questões da etapa finalização da tarefa 3

9. Discussão com os estudantes sobre as estratégias (10 minutos)

10. Conclusão (10 minutos)

Fonte: Tarefa 3 – Viagem de carro (2023)

5.2.2.1 Resolução detalhada da Tarefa Matemática

Esta é uma questão de Análise Combinatória. Utilizará, na resolução, os conceitos de Princípio Fundamental da Contagem, de Combinação e de Arranjo.

Nesta família, haverá 4 membros habilitados, de acordo com a idade para dirigir: o pai, a mãe e os filhos de 17 e 21 anos, os quais terão, no dia da viagem, 18 e 22 anos, respectivamente. Note que o filho que fará 18 anos não terá tempo suficiente para tirar sua habilitação, uma vez que a viagem é apenas uma semana depois de seu aniversário. Portanto, para o lugar do motorista, devemos escolher 1 entre 3, isto é, existem 3 maneiras diferentes de ocupar o banco do motorista ou alternativamente tem-se uma Combinação $C_{3,1}$– uma Combinação de 3 elementos, tomados 1 a 1.

Para o banco dianteiro de passageiro, há 4 opções: todos menos o filho de 7 anos (menor de 10) e o motorista. Portanto, é uma escolha de 1 elemento entre 4, ou seja, existem 4 maneiras diferentes de ocupar o banco do passageiro ou alternativamente $C_{4,1}$ – uma Combinação de 4 elementos, tomados 1 a 1.

Enfim, para os demais 5 bancos traseiros, temos que distribuir os 4 familiares restantes, sem restrições. Usando o Princípio Fundamental da Contagem, pode-se raciocinar da seguinte maneira: para o primeiro, dentre os 4 passageiros remanescentes, tem-se 5 possibilidades de escolha do assento; para o segundo remanescente, tem-se 4 possibilidades de escolha do assento; para o terceiro remanescente, tem-se 3 possibilidades de escolha do assento e, por fim, para o quarto e último remanescente, tem-se 2 possibilidades de escolha do assento, totalizando 5x4x3x2 possibilidades. Alternativamente, pode-se observar que cada distribuição que seja feita de forma diferente será uma configuração distinta das demais na organização do carro. Portanto, a ordem importa e, desta forma, deve-se considerar um Arranjo. Assim, o número de possibilidades é: 5x4x3x2 = $A_{5,4}$ – um Arranjo de 5 elementos, tomados 4 a 4, como visto anteriormente, usando o princípio multiplicativo.

Para encontrar o número total de maneiras possíveis de a família se acomodar para a viagem, deve-se tomar decisões sucessivas, ou seja, ocupar o banco do motorista e ocupar o banco do passageiro (dianteiro) e ocupar os bancos traseiros, assim deve-se multiplicar as quantidades de cada caso. Desse modo, o número total de opções é igual a $3.4.5.4.3.2 = 1440$ ou ainda $C_{3,1} \,.\, C_{4,1} \,.\, A_{5,4} = 1440$.

5.2.2.2 Antecipações e mediações

As antecipações foram pensadas antes do desenvolvimento da tarefa no sentido de preparar a professora-pesquisadora para o momento de sua realização. Assim, as antecipações foram:

a) Onde encontrar o Código de Trânsito?
b) A ordem em cada contagem importa?
c) No caso da contagem do banco de trás, devo fazer uma Combinação (quando a ordem

não importa) ou um Arranjo (quando a ordem importa)?

d) Ao fim dos cálculos nas três etapas, devo somar ou multiplicar os resultados obtidos?
e) Quais membros da família podem ocupar o espaço do motorista do carro? O filho que hoje tem 17 anos poderá ocupar no dia da viagem? (Pode acontecer que o aluno considere que sim, quando na verdade não é possível);
f) O filho mais novo pode ocupar o banco da frente do carro? (Pode acontecer que o estudante considere que sim, quando na verdade não é possível);
g) O carro pode ter o banco da frente vazio? (Pode acontecer que o estudante considere que sim, quando na verdade não é possível);
h) Devo considerar um lugar vazio na contagem? (Pode acontecer que o estudante considere que não, quando na verdade deve-se considerar que sim).

A partir das antecipações, foram pensadas quais as possíveis mediações que poderiam ser realizadas junto aos estudantes (perguntas, provocações ou colocações quando estiver monitorando cada grupo) para minimizar e/ou superar as dúvidas e/ou as dificuldades. Para cada uma das antecipações propostas, foi pensada uma possível mediação, as quais estão listadas a seguir:

a) No começo da tarefa, alunos podem ter dificuldades para encontrar o Código de Trânsito e descobrir em qual dispositivo se encontra a resposta para iniciar a resolução do problema, portanto, cabe ao professor orientar como eles podem encontrar em uma pesquisa na internet (de onde partimos da premissa que os estudantes têm acesso à internet para realização da tarefa) a informação necessária.
b) Havendo dúvidas em relação aos casos, perguntar sobre a ordem que as pessoas se sentarão no carro e dar exemplos de situações ao grupo para que eles possam refletir em qual exemplo a ordem importou e em qual não importou, para assim tomar uma decisão sobre a tarefa proposta.
c) Relembrar com o grupo a definição de Arranjo e Combinação Simples, dando exemplos.
d) Exemplificar situações que se enquadrem no princípio multiplicativo e no princípio aditivo.
e) Para as possíveis dúvidas ou questionamentos sobre as letras e, f, g, h do tópico acima é interessante que o professor peça para que seja feita a releitura da atividade pelo

grupo e após essa leitura façam a simulação da situação indagando e confrontando com o que foi pesquisado no Código de Trânsito e com as condições do enunciado da tarefa para assim chegarem a uma conclusão.

6 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DAS TAREFAS

Ao analisar uma tarefa matemática, o professor deve estar atento a complexidade dessa ação em um ambiente escolar, conforme Dalto e Buriasco (2009). Esse processo exige reflexão sobre a intenção, a escolha do foco, a definição do público-alvo, a escolha da metodologia e o estabelecimento de parâmetros, ou seja, avaliar exige tomada de posição e critérios.

Primeiramente, a análise dos registros dos estudantes, após a aplicação das tarefas descritas no capítulo anterior, será realizada para cada uma delas de modo a comparar o turno vespertino com o noturno, com o objetivo de comparar as similaridades e diferenças em termos do raciocínio matemático que os estudantes apresentaram naquele momento - *Em Branco, Em Processo e Correto*. Em seguida, serão comparadas as três tarefas dentro do mesmo turno.

Nesse sentido, a análise dos resultados dos registros escritos e das simulações foram abordados neste capítulo de acordo com o que propõem Dalto e Buriasco (2009), de modo a valorizar o processo de aprendizagem, e não apenas o resultado. A partir da análise dos registros, foi realizado o mapeamento estatístico, em termos de porcentagens, das três tarefas matemáticas - tanto na análise individual, quanto na conjunta - baseado nas etapas que o estudante se encontrava naquele momento, apresentadas na tabela 10.

Tabela 10 - Significados das etapas do mapeamento

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO	ETAPA	SIGNIFICADO
Em Branco	A	Instrumento em branco
Em Processo	B	Não apresentou estratégia matemática coerente, ou seja: respostas numéricas incorretas, sem cálculos ou explicação; cálculos que não têm relação com o que é solicitado na questão ou ainda utilização de dados aleatórios da situação-problema.
	C	Apresentação de algumas etapas do desenvolvimento estruturadas corretamente e/ou operações matemáticas incorretas e/ou não apresentou solução do problema.
Correto	D	Utiliza a representação e/ou algoritmo adequados e apresenta a solução do problema.
	E	Apresentação de todas as etapas da resolução, com construção correta de representações e/ou soluções sistemáticas e/ou generalizações que viabilizam a resolução da questão.

Fonte: Autor 2023

A tabela 10, foi construída considerando três categorias de apresentação do raciocínio matemático: *Em Branco, Em Processo e Correto*; cinco etapas: A, B, C, D, E com os respectivos significados. Essa classificação será utilizada integralmente para a análise da avaliação diagnóstica, contudo para as tarefas "Alimentação Saudável" e "Viagem de carro", serão utilizadas respectivamente as tabelas 12 e 16, baseadas na tabela 10, mas com adaptações, de modo a conciliar as possíveis resoluções com as necessidades cognitivas de cada uma dessas tarefas.

6.1 Avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica, realizada individualmente, foi composta por três questões que serão apresentadas e analisadas, tanto para o vespertino quanto para o noturno. As questões que compõem essa avaliação foram elaboradas pela professora-pesquisadora com o objetivo de diagnosticar as habilidades dos estudantes da EJA de interpretar e resolver uma situação-problema envolvendo algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão e raciocínio combinatório, de modo a se relacionarem com o cotidiano desses estudantes e assim promover o entendimento matemático.

A primeira análise será de forma individual de cada questão e posteriormente será de forma conjunta em relação ao total de repostas apresentadas a cada etapa da tabela 10. O mapeamento estatístico, o registro de respostas escritas e as inferências irão compor a análise dos resultados da avaliação diagnóstica.

6.1.1 Análise individual da questão 1

A questão 1, adaptada de uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (2020), apresenta uma decisão a ser tomada em relação a uma situação econômico-financeira, de melhor custo-benefício, conforme figura 16.

Figura 16 - Questão 1 para análise da avaliação diagnóstica

1. Os pais de uma criança resolveram fazer a festa de aniversário do filho. Para isso, fizeram uma pesquisa sobre o preço e a quantidade de cada tipo de refrigerante, que está representada na seguinte tabela:

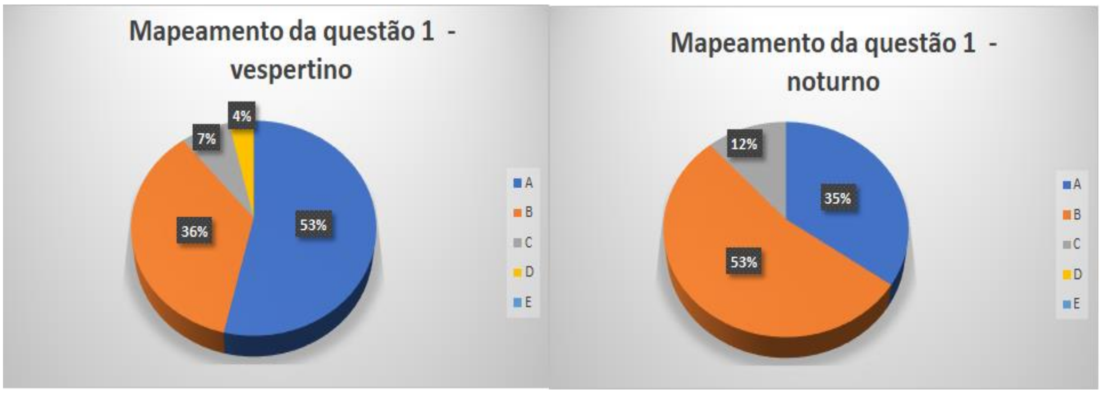
Refrigerante	Quantidade (litro)	Preço(R$)
A	0,5	3,38
B	1,0	4,62
C	1,5	5,46
D	2,0	8,40
E	3,0	12,96

Independentemente do tipo e com o objetivo de comprar refrigerante com menor preço por litro, descreva uma estratégia matemática que explique qual o tipo de refrigerante que os pais deverão comprar.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2023)

A partir da interpretação do enunciado o estudante poderia utilizar algoritmos das quatro operações básicas para resolver a questão, porém a figura 17 mostra que a maioria dos estudantes apresentou problemas na resolução dessa questão.

Figura 17 - Mapeamento da Questão 1 para o vespertino e o noturno

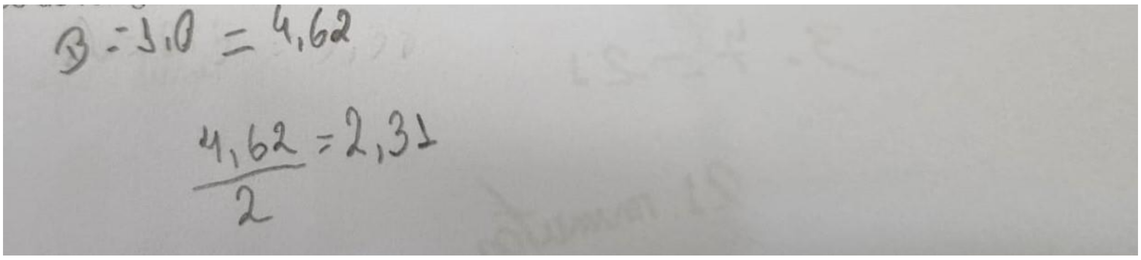


Fonte: Autor (2023)

De acordo com o mapeamento, 53% dos estudantes do turno vespertino e 35% do noturno deixaram a questão em branco e apenas 4% do vespertino e nenhum estudante do noturno apresentaram solução correta para ela. Os estudantes que estavam *Em Processo*, nesta questão, apresentaram três tipos de soluções, conforme figuras 18, 19 e 20:

Tipo 1- Casos parciais

Figura 18 - Resposta da questão 1, do estudante E1

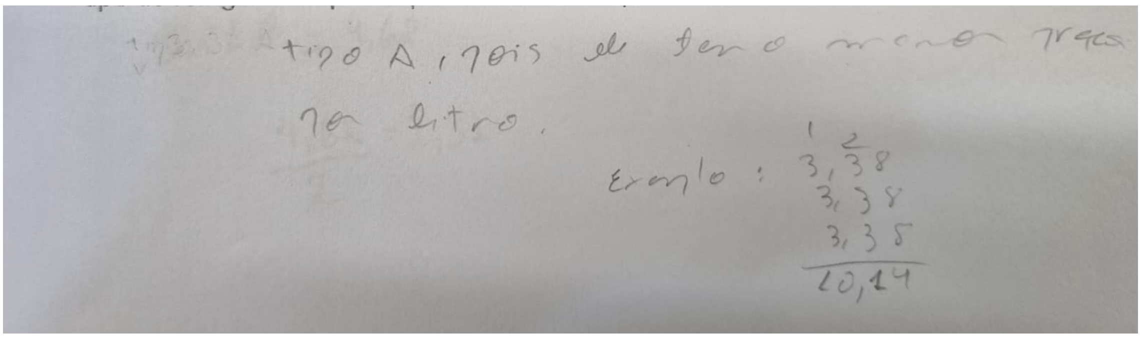


Fonte: Dados da pesquisa

Ao dividir 4,62 por 2, percebe-se que o estudante fez a análise para 0,5 litro de refrigerante. Desse modo, apesar de não ter deixado explícito, infere-se que, como foi encontrado um valor de 2,31 do refrigerante B menor do que o valor de 3,38 do refrigerante A, o estudante concluiu, de modo equivocado, ser o refrigerante B aquele que deveria ser comprado. Ou seja, mostrou entender como resolver o problema, mas não analisou todos os casos possíveis. Além disso, apesar de deduzir pelo registro que o estudante fez uma equivalência entre 1,0 litro de refrigerante com o custo de R$ 4,62 ao registrar por escrito “1,0 = 4,62”, cometeu um erro no registro uma vez que esses números são diferentes e não iguais. Assim, nesses tipos de solução cabe ao professor trabalhar com atividades que estimulem o estudante a verificar todos os casos possíveis para a solução de um problema, pois em exercícios de contagem é essencial que todos os casos possíveis, de acordo com as restrições do problema, sejam contados. E quanto ao registro da escrita, trabalhar com situações-problemas que desenvolvam essa habilidade.

Tipo 2 – Dados aleatórios

Figura 19 - Resposta da questão 1, do estudante E2

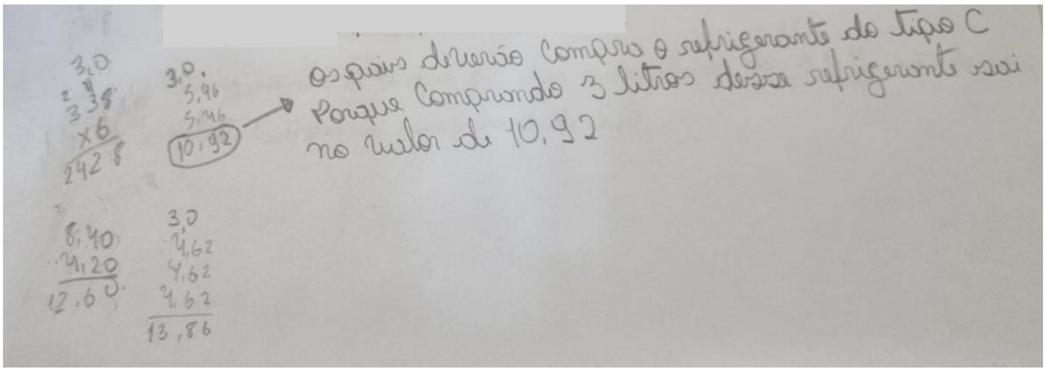


Fonte: Dados da pesquisa

A solução considerou um dado isolado da questão, no caso, o menor preço, sem considerar a quantidade de litros referente a esse valor. Na coluna do preço, o menor deles é de R$3,38 e esse valor está associado ao refrigerante A. Além do mais, apesar de fazer a soma corretamente (mesmo não escrevendo o sinal do algoritmo), encontra o valor de R$ 10,14, para 1.5 litros, mas não registra a relação desse valor encontrado com o valor da tabela. Nesse caso, não houve interpretação da situação-problema proposta, mas foram usados dados da situação-problema mesmo que de maneira aleatória. Assim, nesses tipos de resoluções, cabe ao professor trabalhar com atividades que estimulem o estudante a desenvolver a interpretação e a compreensão e, ainda, usar metodologias que promovam essa interpretação por meio do diálogo matemático para que o estudante possa perceber, na própria argumentação matemática, a lógica do conhecimento construído.

Tipo 3- Operações incorretas

Figura 20 - Resposta da questão 1, do estudante E3



Fonte: Dados da pesquisa

Em três dos quatros algoritmos apresentados, o número 3,0 foi colocado na parte superior do registro do algoritmo para indicar que a análise feita pelo estudante foi para 3,0 litros. Essa solução apresenta estratégias interessantes, por exemplo: o estudante percebeu que em 3 litros existem 6 porções de 0,5 litro, por isso, multiplicou 3,38 por 6, contudo, como 3,38 multiplicado por 6 é igual a 20,28, existe erro no registro apresentado por ele no cálculo dessa multiplicação.

Percebeu, ainda, que o valor referente a 3,0 litros do refrigerante D é igual a 2,0 litros adicionado a 1,0 litro, sendo que para 2,0 litros existe o valor no enunciado da questão e para encontrar o valor referente a 1,0, que é metade de 2,0 litros, utilizou 4,20, que se refere à metade de 8,40. Apesar de conter erro no cálculo da multiplicação e de não escrever o sinal nas adições, o estudante interpretou corretamente a questão.

Nesses tipos de solução, cabe ao professor trabalhar com atividades que estimulem o desenvolvimento e resolução de situações-problemas sobre as operações básicas.

6.1.2 Análise individual da questão 2

A questão 2, figura 21, da avaliação diagnóstica, adaptada do livro Análise Combinatória e Probabilidade de Morgado et al (2020), apresenta uma decisão a ser tomada em relação à locomoção entre duas cidades.

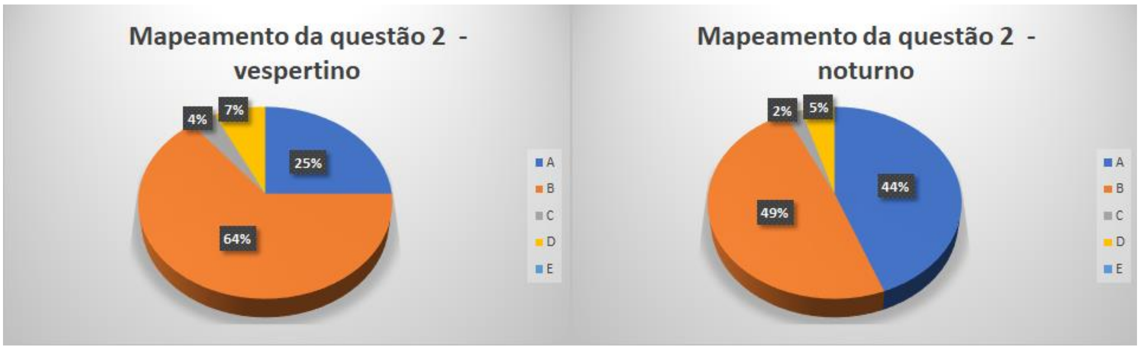
Figura 21 - Questão 3 para análise da avaliação diagnóstica

2. Para se deslocar entre duas cidades satélites do Distrito Federal, uma pessoa pode usar o ônibus, o carro particular ou a bicicleta. Faça uma representação gráfica (desenho) que mostre de quantas maneiras ela pode escolher os meios de transporte se não pretende usar na volta o mesmo transporte utilizado na ida.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2023)

O enunciado da questão 2, com a representação, diferencia-se de exercícios que têm no enunciado apenas o comando: calcule. Essa questão exigia dos estudantes, além da interpretação, que eles fizessem a representação da quantidade de maneiras solicitadas. O mapeamento estatístico dessa questão está representado na figura 22.

Figura 22 - Mapeamento da Questão 2 para o vespertino e o noturno

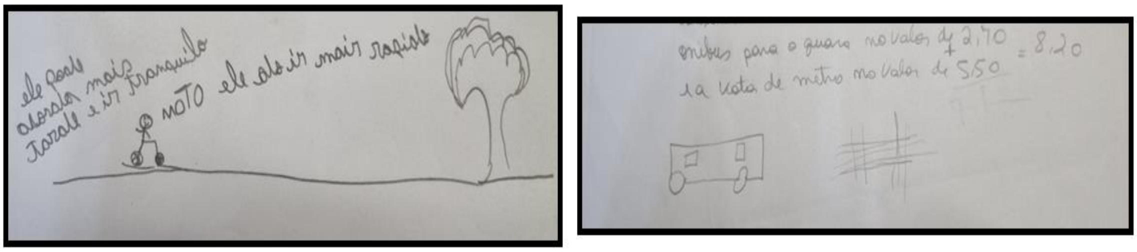


Fonte: Autor (2023)

No mapeamento estatístico, figura 22, evidenciou-se que nos dois turnos houve a predominância de registros escritos que não apresentaram uma estratégia matemática adequada para essa representação, sendo 64% para o vespertino e 49% para o noturno. Os estudantes que estavam *Em Processo*, nesta questão, apresentaram os três tipos de soluções representados pelas figuras 23, 24 e 25:

Tipo1 – Extrapolação

Figura 23 - Respostas da questão 2, de dois estudantes

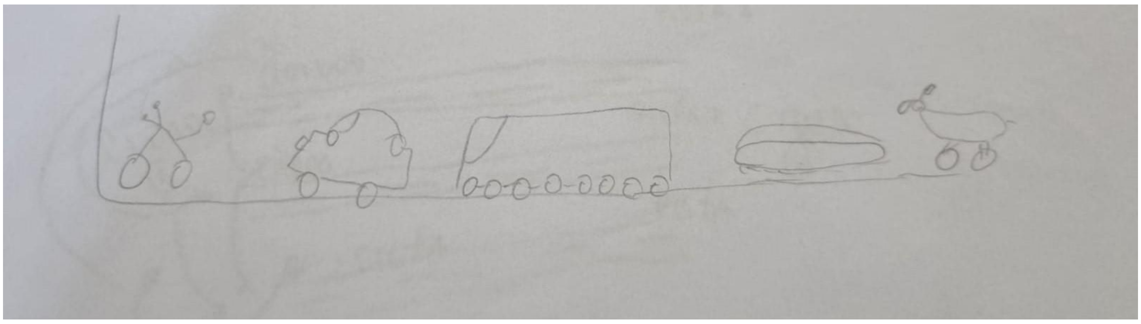


Fonte: Dados da pesquisa

As respostas apresentam elementos que não foram disponibilizados no enunciado da questão, de acordo com a figura, novos meios de transporte (moto e metrô) e valor da passagem. Desse modo, percebe-se que não houve interpretação de acordo com o comando e, na tentativa de não deixar a questão em branco, utilizou-se um conhecimento não relacionado com a resolução. Nesse caso, cabe ao professor oportunizar momentos de leitura e interpretação matemática, seja trabalhando novamente esse problema, ou outros que promovam a interpretação.

Tipo 2 – Representação pictórica em desacordo com a solicitação da questão

Figura 24 - Resposta da questão 2, do estudante E4

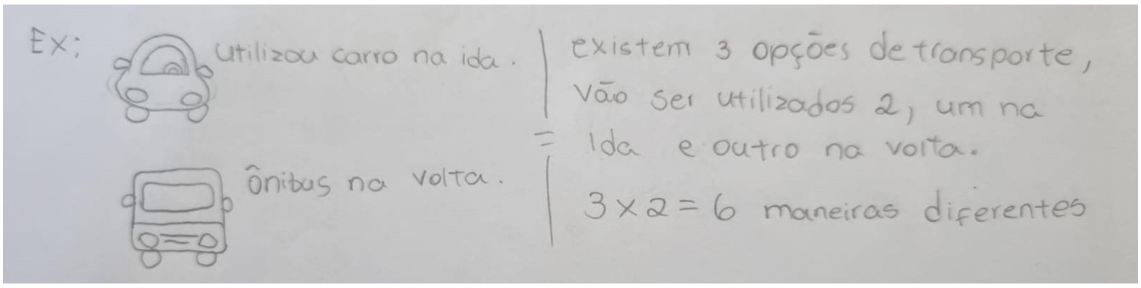


Fonte: Dados da pesquisa

A resolução equivocada baseou-se na palavra “desenho” que aparece no comando da questão. Assim, foram desenhados cinco meios de transporte, sendo que três deles (carro, ônibus e bicicleta) aparecem no comando e dois não aparecem (metrô e moto). Os desenhos da figura não quantificam as maneiras solicitadas. Assim como na situação da extrapolação, o professor deve oportunizar momentos, por meio de atividades e práticas pedagógicas, que possibilitem o desenvolvimento da interpretação matemática.

Tipo 3 – Dados aleatórios da situação-problema

Figura 25 - Resposta da questão 2, do estudante E5



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Apesar de chegar à resposta da questão, o raciocínio combinatório para resolvê-la não está certo, pois são multiplicadas a quantidade de transportes existentes,3, com a quantidade de transportes utilizados, 2, um para o percurso de ida e outro para o percurso de volta, ou seja, como essas quantidades aparecem no enunciado da questão, o estudante as multiplicou para encontrar a solução. Nesse contexto, o professor deve analisar o raciocínio combinatório do estudante e não apenas o resultado.

A resolução solicitava o número de modos de tomar, sucessivamente, as decisões de ir e voltar, ou seja, o produto entre os fatores 3 e 2 referiam-se, sucessivamente à quantidade de modos possíveis de escolher os meios de transporte para a ida e a quantidade de modos possíveis de escolher os meios de transporte para a volta de modo que o fator 2 não era referente à quantidade de meios de transporte utilizados. Para facilitar o entendimento de raciocínio combinatório, o professor pode apresentar a mesma situação-problema, alterando a quantidade de meios de transporte para 4, ao invés de 3, e trabalhar, ainda, a árvore de possibilidades.

6.1.3 Análise individual da questão 3

A questão 3, figura 26, construída pela professora-pesquisadora e revisada pela orientadora, consistiu em possibilitar aos sujeitos da EJA a elaboração de uma questão de acordo com o cotidiano deles.

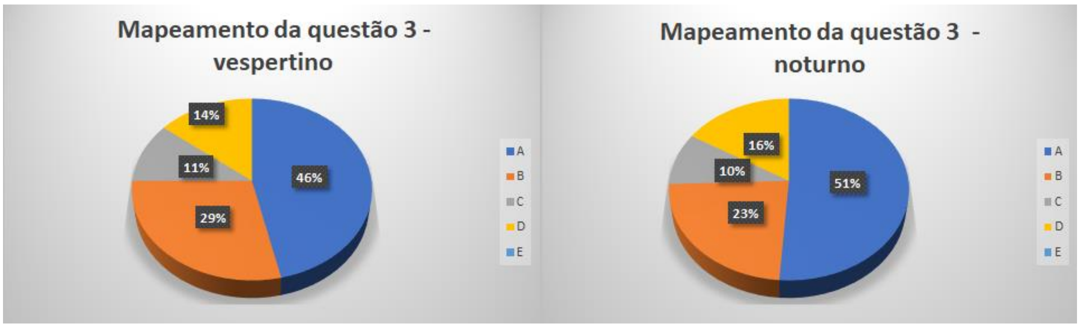
Figura 26 - Questão 3 para análise da avaliação diagnóstica

> 3. Pense em uma situação cotidiana que você utilizou operações matemáticas para resolvê-la. Com base nessa situação, construa um exercício matemático, que envolva no mínimo a operação de multiplicação e apresente a solução.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2023)

A questão consistia em fazer com que o próprio estudante fosse capaz de perceber o contexto cotidiano que vive e expressá-lo em linguagem matemática. O mapeamento estatístico dessa questão está apresentado na figura 27.

Figura 27 - Mapeamento da Questão 3

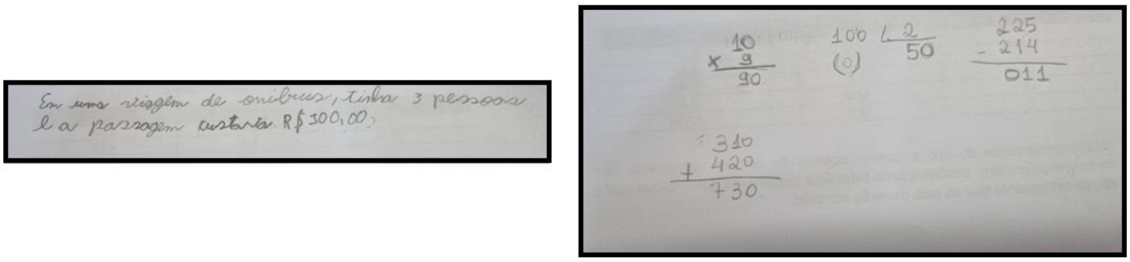


Fonte: Autor (2023)

Tanto no vespertino, com taxa de 46%, quanto no noturno, com taxa de 51% a predominância foi para questões em branco, em contrapartida, para os estudantes que a desenvolveram, foi a questão da avaliação diagnóstica que mais apresentou soluções as quais contemplavam todas as etapas de discussão, com enunciado, desenvolvimento e solução corretas, com taxas de 14% para o vespertino e 16% para o noturno. Os estudantes que estavam *Em Processo*, nesta questão, apresentaram dois tipos de soluções, representados nas figuras 28 e 29.

Tipo 1- Etapas parciais

Figura 28 - Resposta da questão 3, de dois estudantes

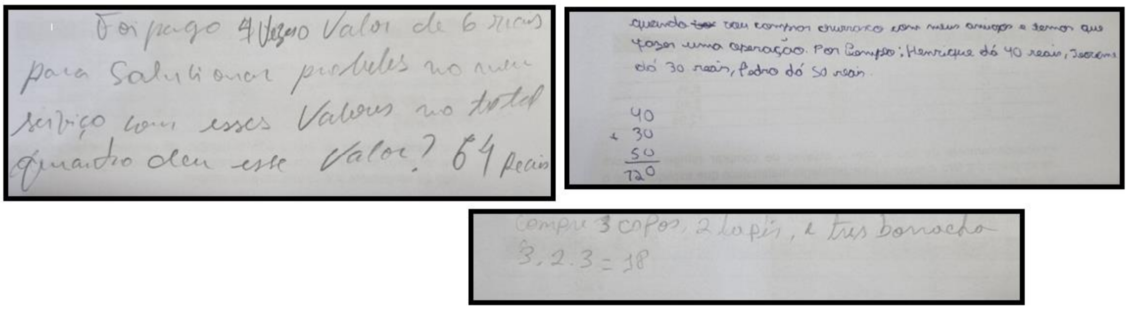


Fonte: Dados da pesquisa

As resoluções não contemplam todas as etapas solicitadas no comando da questão, pois são apresentados somente enunciados ou somente operações matemáticas. Tais procedimentos evidenciam que o estudante não apresenta compreensão do que a questão solicita ou, ainda, não consegue apresentar em linguagem matemática situações cotidianas vivenciadas por ele.

Tipo 2- Fragilidade na sintaxe matemática

Figura 29 - Respostas da questão 3, de três estudantes



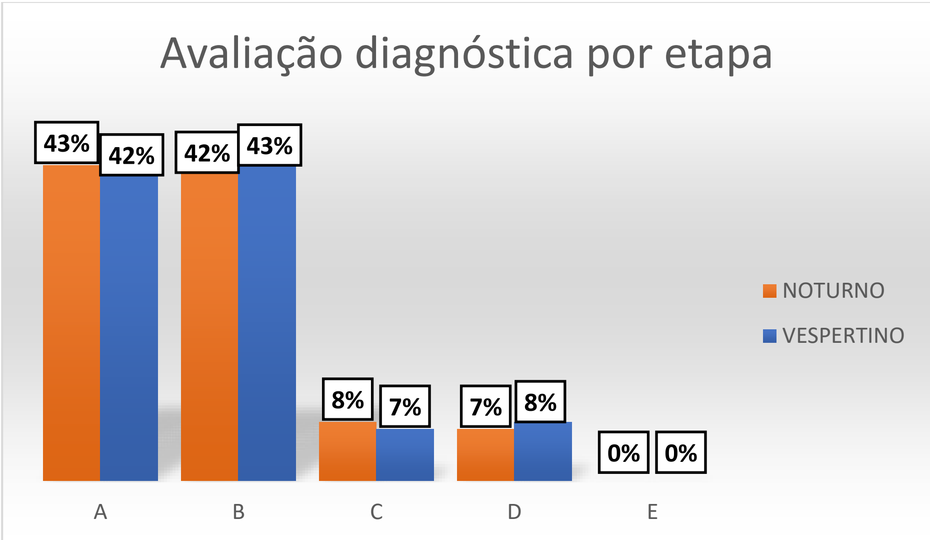
Fonte: Dados da pesquisa

Os enunciados propostos pelos estudantes não deixam claro qual o questionamento que deve ser respondido, o que caracteriza fragilidades na interpretação da questão e na formalização da pergunta matemática proposta por eles, ou seja, fragilidade na sintaxe matemática. Essa torna-se mais evidente ao apresentar operação em desacordo com a operação solicitada na questão (no mínimo a multiplicação) e resoluções que utilizam de modo aleatório números presentes no enunciado do estudante para compor o número da solução apresentada. Dessa forma, é essencial que o professor trabalhe novamente as resoluções produzidas pelos estudantes de modo a transformar as fragilidades registradas em acertos, por meio de tarefas matemáticas que promovam a interpretação e a argumentação.

6.1.4 Análise conjunta das três questões da avaliação diagnóstica

O mapeamento estatístico conjunto foi realizado considerando a quantidade de resoluções de cada etapa -A, B, C, D, E- apresentadas na tabela 11, em relação à quantidade total de resoluções. De modo que o gráfico 4 apresenta os dados tanto para o noturno, quanto para o vespertino.

Gráfico 4 - Avaliação diagnóstica por etapa



Fonte: Dados trabalhados da pesquisa

Predominaram na avaliação diagnóstica, tanto no vespertino quanto no noturno, questões devolvidas em branco (etapa A) e que apresentavam estratégia de resolução em desacordo com o solicitado (etapa B). Questões com algumas etapas do desenvolvimento estruturadas corretamente (etapa C) e com a utilização correta do algoritmo evidenciando a solução do problema (etapa D) apresentaram os menores índices estatísticos. E, ainda, em ambos os turnos, nenhuma resolução apresentou todas as etapas de modo a expressar generalizações.

Os dados apresentam valores muito próximos para os dois turnos, o que permite inferir que as fragilidades matemáticas desses estudantes - interpretação da situação-problema, escritas inconsistentes das respostas, erros nas operações, utilização aleatória dos dados - devem ser semelhantes. Assim, fez-se necessário refletir sobre esse contexto e pensar como promover a interpretação, a argumentação e o compromisso do sujeito da EJA com o próprio aprendizado? Nesse contexto, foi consolidada a percepção, pela professora-pesquisadora, de que a mudança de uma abordagem tradicional para uma abordagem metodológica pautada no ensino exploratório traria mais condições de oportunizar a construção do pensamento matemático e da aprendizagem matemática. Assim, foram desenvolvidas, em sala de aula, duas tarefas matemáticas na perspectiva do ensino exploratório.

6.2 Tarefa matemática 2

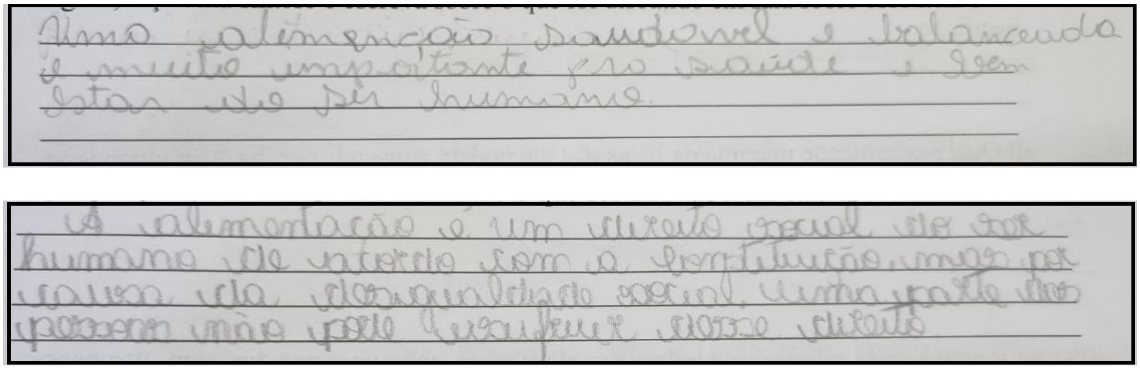
A tarefa matemática 2 - Alimentação Saudável, realizada em grupo, foi composta por 11 itens, subdivididos em três fases: Inicial (ambientação e discussões iniciais sobre o tema), Execução (desenvolvimento por meio da simulação, discussões matemáticas e registro) e Finalização (Socialização das resoluções e momento de explicação das resoluções dos estudantes por eles mesmos). Essas fases serão analisadas tanto para o vespertino quanto para o noturno. O objetivo da tarefa consistia em compreender e utilizar os conceitos de Análise Combinatória na resolução de problemas.

Mapeamento estatístico, fotografias, transcrição de trechos dos áudios gravados em sala de aula e análise das simulações e dos registros escritos da estratégia matemática irão compor a análise dessa tarefa.

6.2.1 Fase - Inicial

Essa fase consistiu na formação de grupos, leitura de um texto sobre alimentação saudável e nos diálogos e reflexões sobre esse tema, de forma a incluir a pirâmide alimentar nesse contexto. Logo após, registram as percepções sobre esse assunto, conforme as respostas apresentadas na figuras 30.

Figura 30 - Respostas de dois estudantes da tarefa 2 – fase inicial



Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo com o tempo de apenas 8 minutos para o diálogo e reflexões, essa etapa foi importante para criar um ambiente favorável às discussões matemáticas e à argumentação, pois os estudantes expunham as próprias reflexões, escutavam os colegas de turma, argumentavam sobre elas e as registravam por escrito. Os registros dos estudantes dos dois turnos abordavam duas vertentes: alimentação saudável e alimentação como um direito social.

6.2.2 Fase - Execução

Com o objetivo de facilitar a compreensão da tarefa matemática pelos estudantes, um dos itens solicitava que cada grupo apresentasse uma simulação que foi analisada de acordo com os critérios da tabela 11.

Tabela 11- Critérios para a análise da simulação

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO	ETAPA	PROCEDIMENTO
Em Branco	1	Não fez a simulação
Em processo	2	Apresenta grupos composto por 1 bala ou 2. Repete grupos. Não apresenta todos os agrupamentos.
	3	Apresentação não sistemática. Todos os grupos formados são compostos por 3 balas. Não apresenta os 4 agrupamentos compostos por 3 balas de mesmo sabor e/ou os 4 agrupamentos composto por 3 balas de sabores diferentes. Repete grupos.
Correto	4	Apresentação não sistemática. Apresenta todos os agrupamentos.
	5	Apresentação sistemática. Apresenta todos os casos possíveis. Nenhum grupo aparece repetido.

Fonte: Autor (2023)

E em analogia a tabela 10, utilizada para analisar as estratégias matemáticas da avaliação diagnóstica foi elaborada a tabela 12, com significados similares aos utilizados na tabela 10, para analisar as estratégias matemáticas da tarefa 2- Alimentação Saudável.

Tabela 12 - Critérios para a análise da estratégia matemática da tarefa 2

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO	ETAPA	SIGNIFICADO
Em Branco	A	Instrumento em branco
Em Processo	B	Não apresentou estratégia matemática coerente, ou seja: respostas numéricas incorretas, sem cálculos ou explicação; cálculos que não têm relação com o que é solicitado na questão, utilização de dados aleatórios da situação-problema ou ainda, utiliza a representação dos grupos em desacordo com o que é solicitado na questão.
	C	Apresentação de algumas etapas do desenvolvimento estruturadas corretamente e/ou operações matemáticas incorretas e/ou não apresentou solução do problema.
Correto	D	Utiliza a representação e/ou algoritmo adequados e apresenta a solução do problema a partir da simulação.
	E	Apresentação de todas as etapas da resolução, com construção correta de representações e/ou soluções sistemáticas e/ou generalizações que viabilizam a resolução da questão.

Fonte: Autor 2023

A partir dos critérios das tabelas 11 e 12 e em analogia a Canavarro (2011), foram elaboradas as tabelas 13 e 14, respectivamente para as turmas do vespertino e do noturno, que apresentavam o olhar da professora-pesquisadora em relação ao desenvolvimento dessa etapa de acordo com as ações solicitadas nos itens de execução da tarefa.

Tabela 13 - Ações da etapa de execução da tarefa 2 – Vespertino

VESPERTINO							
Ações da fase de execução	Grupos						
	I-A	II-A	III -A	IV-A	I-B	II-B	III -B
Evidenciar a compreensão da pirâmide alimentar por meio do preenchimento da tabela.	Sim	Sim	Parcialmente. Na quantidade das leguminosas considerou a porção mínima	Não considerou a quantidade de porções mínimas, mas sim o intervalo.	Não. Considerou o intervalo	Sim	Sim
Classificar as balas no grupo alimentar correto.	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Identificar a quantidade de Kcal para uma porção do grupo alimentar "açúcares e doces".	Sim	Sim	Sim	Não. Escreveu a quantidade de calorias referente a 2 balas, 72kcal.	Item c, escreveu 110 kcal a 220 kcal	Item c, escreveu 108 kcal, confundindo com as calorias de três balas	Sim
Estabelecer a relação entre kcal de uma bala e de uma porção mínima do grupo alimentar "açúcares e doces	Sim	Sim	Sim	Não. Escreveu o intervalo. "entre 2 e 3 porções"	Sim	Sim	Sim
Registrar e resolver corretamente o algoritmo matemático.	Não registrou	Sim. Fez divisão	Sim. Fez multiplicação	Não registrou	Não registrou	Não registrou	Não registrou
Realizar a simulação. (Análise da simulação de acordo com a tabela11)	3	5	4	5	4	5	3

Registrar a estratégia matemática (Análise da simulação de acordo com a tabela 12)	D	D	D	D	B	C	B

Fonte: Refinamento dos dados da pesquisa (2023)

A predominância da resposta "Sim", às cinco primeiras ações, da tabela 14, sugere que o trabalho em grupo dos estudantes favoreceu a interpretação e compreensão da tarefa.

Tabela 14 - Ações da etapa de execução da tarefa 2 – Noturno

NOTURNO									
Ações da fase de execução	Grupos								
	I-A	II-A	III -A	IV-A	I-B	II-B	III-B	IV-B	V-B
Evidenciar a compreensão da pirâmide alimentar por meio do preenchimento da tabela.	Parcialmente. Na quantidade das leguminosas considerou a porção mínima	Sim,	Sim,	Sim,	Sim	Sim,	Sim	Parcialmente. Na quantidade das leguminosas considerou a porção mínima	Sim
Classificar as balas no grupo alimentar correto.	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim, mas a explicação é confusa.	Sim	Sim	Sim	Sim
Identificar a quantidade de Kcal para uma porção do grupo alimentar "açúcares e doces".	Não. Escreveu as kcal de uma bala.	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim, mas não justificou corretamente.

Estabelecer a relação entre kcal de uma bala e de uma porção mínima do grupo alimentar "açúcares e doces	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Registrar e resolver corretamente o algoritmo matemático.	Sim. Utilizou adição	Sim. Utilizou multiplica ção	Não registrou	Não registrou a operação	Não registrou	Sim, utilizou multiplica ção	Sim, utilizou adição	Não registrou	Sim, utilizou multiplica ção
Realizar a simulação. (Análise da simulação de acordo com a tabela 11)	3	5	5	5	3	5	4	2	4
Registrar a estratégia (Análise da simulação de acordo com a tabela 12)	B	E	C	E	C	E	D	B	C

Fonte: Refinamento dos dados da pesquisa (2023)

A tabela 14, referente ao noturno, também apresentou predominância da reposta "Sim" para as ações da etapa de execução, o que corrobora com a inferência de que desenvolver a tarefa em grupo favorece a interpretação. A seguir, serão apresentados o mapeamento estatístico e análises das simulações e estratégias matemáticas.

6.2.2.1 Simulação e Estratégia Matemática

Com o objetivo de facilitar a compreensão da tarefa, foram entregues balas aos estudantes e solicitado que fizessem uma simulação com elas, conforme a figura 31.

Figura 31 - Simulação da tarefa 2 realizada por estudantes

Fonte: Dados da pesquisa

De início, os estudantes abriam os saquinhos de balas e tentavam formar grupos de maneira aleatória, mas à medida que eles manipulavam e formavam alguns agrupamentos percebiam que precisam de uma construção sistemática para que todos os grupos fossem apresentados, conforme o recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, por meio do trecho 4.

Trecho 4

Estudante 7- Pegamos um sabor só de três. De três balas.

Professora -Ah, você usou um sabor só para as três balas, e depois?

Estudante 8 -Depois foi misturando.

Professora - Mas essa mistura foi aleatória, vocês foram tentando, vocês não seguiram um padrão não?
Estudante 9 - Não.
Estudante 10 - A gente tentou até chegar aqui. (Silêncio) (Mostrando uma simulação com grupos repetidos)

Nesse momento, enquanto os estudantes pensavam, a professora-pesquisadora se afastou um pouco, mas ficou atenta de modo a ouvir a conversa do grupo.

Estudante 7 – A professora perguntou se nós seguimos um padrão para pegar os sabores.
Estudante 8- E se a gente usar a lógica?

Os estudantes voltam a manipular as balas e, depois de um tempo, a professora volta a conversar com eles.

Professora – Então, como vocês montaram a simulação?
Estudante 7 - Primeiro a gente fez isso aqui, usando as três né?
Estudante 8 - Aí depois a gente foi pegando cada um de um grupo e foi montando né? Que foram essas aqui, essas daqui com essas daqui. (duas balas iguais e uma diferente). *Cada uma de um grupo foi montando cada um por um.*
Professora - Vocês me falaram que primeiro pegaram três balas iguais. Depois vocês pegaram?
Estudante 7- De duas em duas.
Professora - Está bem... Duas iguais e foi fazendo o que com outro sabor?
Estudante 8 - Fomos complementando outro sabor.
Professora- E depois?
Estudante 7 - Aí quando terminou todas, de duas em duas a gente foi tirando aqui ó. Uma dessa, uma dessa, uma dessa; uma dessa, uma dessa e uma dessa. (referindo-se a dois grupos montados com todos os sabores diferentes)
Estudante 7 - Uma diferente da outra.
Estudante 7 - Pronto, foi só isso

No vespertino, foi apresentado um total de 7 simulações no vespertino e no noturno 9. Todas foram identificadas e fotografadas, conforme o apêndice C e apêndice D. Assim, puderam ser analisadas de modo a obter a etapa que ela se encontrava e as porcentagens por etapa para cada turno, conforme a tabela 15.

Tabela 15 - Porcentagem por etapa das simulações da tarefa 2- Alimentação Saudável

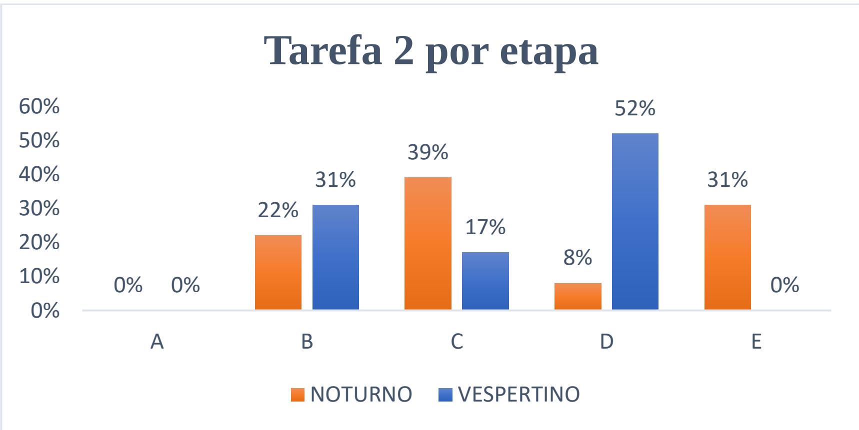
Turno	Etapas				
	1	2	3	4	5
Vespertino	0%	0%	31%	20%	49%
Noturno	0%	11%	22%	22%	45%

Fonte: Refinamento dos dados coletados das simulações

Todos os grupos apresentaram simulação, ou seja, nenhum deixou a simulação sem fazer, sendo que nos dois turnos prevalecem simulações estruturadas corretamente (somatório das taxas percentuais das etapas 4 e 5).

Os grupos apresentaram o registro de uma estratégia matemática para quantificar as diferentes maneiras possíveis da pessoa consumir as balas com sabores distintos, respeitadas as restrições da situação-problema. Esses registros foram analisados de modo a obter as taxas percentuais por etapa apresentas no gráfico 5.

Gráfico 5 - Porcentagem por etapa das estratégias da tarefa 2- Alimentação Saudável



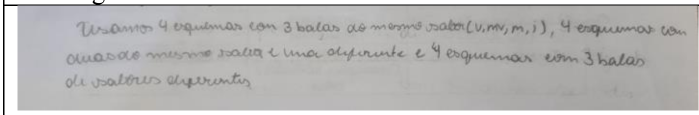
Fonte: Refinamento dos dados coletados das estratégias

Na tarefa 2 - Alimentação Saudável, predominam no vespertino estratégias estruturadas corretamente, contudo apenas no noturno, os grupos apresentam estratégias sistemáticas e generalizações. Os estudantes que estavam *Em Processo*, nessa tarefa, apresentaram três tipos de resoluções, representados pelas figuras 32, 33, 34, 35, 36 e 37, que apresentavam erros de escrituração, de representação e de uso aleatório dos dados presentes na situação-problema.

Serão apresentados, a seguir, exemplos desses tipos de resoluções juntamente com a fotografia das respectivas simulações.

Tipo1- Escrituração.

Figura 32 -Resolução do grupo VBII - tarefa 2

Estratégia	Simulação
 Usamos 4 esquemas com 3 balas do mesmo sabor (v, mv, m, i), 4 esquemas com duas do mesmo sabor e uma diferente e 4 esquemas com 3 balas de sabores diferentes	

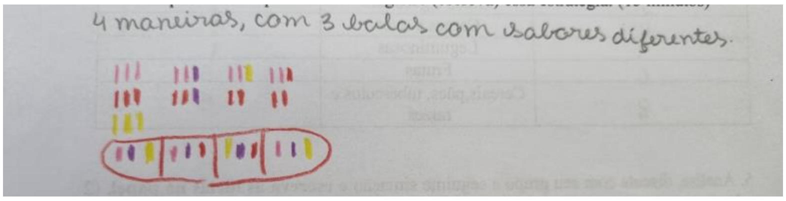
Fonte: Dados da pesquisa

Na coluna estratégia escreveu-se a palavra “*esquema*” para dois significados diferentes. Primeiro, referindo-se a um grupo de balas, depois para representar três grupos de balas de modo que cada um deles seria composto por dois sabores iguais e um diferente. Contudo, percebe-se que esse erro no momento de formalizar a escrita da estratégia, pois de acordo com a simulação apresentada, o grupo compreende como proceder nessa tarefa.

Na simulação, seguiu-se um padrão para montar os grupos. Na primeira coluna, foram colocados os grupos compostos por todas as balas de mesmo sabor. Acima da identificação da turma, os grupos compostos por balas com sabores diferentes. Na segunda, terceira e quarta colunas, grupos com duas balas iguais e a terceira diferente das duas primeiras. Apresentaram-se os 20 grupos.

Tipo 2 – Representação com grupos repetidos.

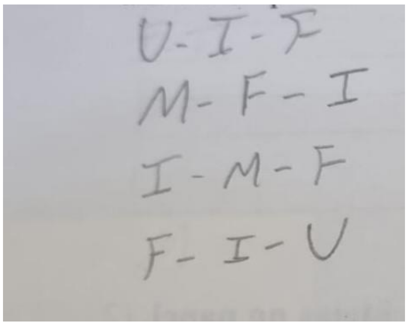
Figura 33 - Resolução do grupo NAIII - tarefa 2

Estratégia	Simulação
 	

Fonte: Dados da pesquisa

A simulação ilustrada pela figura 33 seguiu um padrão para dispor os grupos. Foram expostas todas as 20 possibilidades de formação dos grupos, sem grupos repetidos, quatro grupos compostos por sabores iguais e quatro grupos compostos por sabores diferentes. Porém, na estratégia, foram exibidos, por meio da representação pictórica, duas vezes o mesmo grupo (rosa, roxo e amarelo), mudando apenas a ordem.

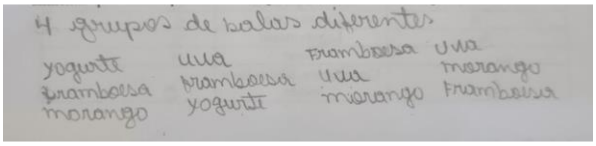
Figura 34 - Resolução do grupo NBI - tarefa 2

Estratégia	Simulação
 	

Fonte: Dados da pesquisa

A figura 34 mostra na simulação uma disposição aleatória dos grupos. Não apresenta todas as 20 possibilidades de formação desses grupos, repetindo alguns deles. Na escrita da estratégia, o terceiro e o quarto agrupamento são iguais ao segundo e ao primeiro, respectivamente, mudando apenas a ordem.

Figura 35 - Resolução do grupo NBV - tarefa 2

<table>
<tr><th>Estratégia</th><th>Simulação</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

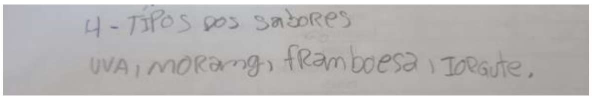
Fonte: Dados da pesquisa

A figura 35, na simulação, mostra todas as 20 possibilidades de formação desses grupos, porém, na escrita, o terceiro e o quarto agrupamento são iguais mudando apenas a ordem.

Assim, pode-se inferir que os estudantes com erros desse tipo não compreendem que a ordem das balas não altera o grupo formado.

Tipo 3- Dados aleatórios que aparecem no enunciado ou na simulação.

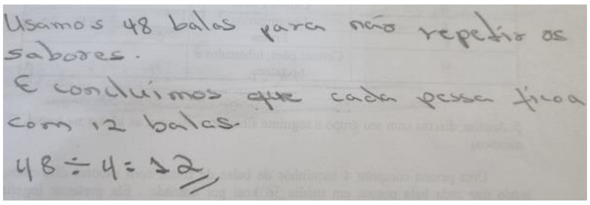
Figura 36 - Resolução do grupo NBIV - tarefa 2

<table>
<tr><th>Estratégia</th><th>Simulação</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa

A simulação, da figura 36, é composta por grupos com uma, duas, três e quatro balas. Foram evidenciados vinte e dois grupos, sendo que alguns deles foram repetidos. No registro escrito da estratégia, apenas escreveram-se os quatro sabores distintos das balas que o grupo recebeu, de modo a utilizar dados aleatórios para a resolução.

Figura 37 - Resolução do grupo VBIII - tarefa 2

Estratégia	Simulação
	

Fonte: Dados da pesquisa

Na simulação da figura 37, são contabilizados apenas 16 grupos, de modo que nenhum deles foram repetidos. Porém, nenhum grupo composto por sabores diferentes foi apresentado. Na escrita da estratégia, são utilizados dados da simulação: quarenta e oito balas que aparecem na simulação divididas em quatro linhas.

Após a entrega dos registros escritos passou-se para a etapa da finalização.

6.2.3 Fase – Finalização

Nessa fase, todas as resoluções dos estudantes foram projetadas, de modo que a ordem de apresentação iniciou pelas menos formais, até as mais formais, que apresentavam resolução sistemática ou com generalização. Foram projetadas as simulações e as respectivas estratégias.

Por meio da mediação, a professora-pesquisadora conduzia o trabalho a fim de fazer com que os erros fossem percebidos e ressignificados pelos estudantes. Como aparece no recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, por meio do trecho 5, a mediação foi essencial para que a tarefa fosse sistematizada.

Trecho 5
A professora faz a primeira projeção
Professora – Como vocês pensaram?
Estudante 7 – A gente não usou todas as balinhas né(sic)! (Silêncio)
Professora – Então expliquem como vocês pensaram? (Silêncio)

A professora faz outra projeção para estimular o primeiro grupo a expor as ideias.

Professora –Como vocês resolveram organizar as balinhas?
Estudante 8 – risos...A gente botou três iguais de todos os sabores
Estudante 9 – E a gente foi colocando uma só de banana e misturando elas.
Estudante 8 –E tem que ver só as de banana.
Professora – Quantos grupos vocês fizeram.?
Estudante 10 – Trêêêêis...
Estudante 9 – Quatro grupos.
Estudante 10 – É mesmo,... três era a quantidade de balas do grupo
Professora –Como vocês encontraram três?
Estudante 11 - Foi lá na divisão do ...
Estudante 9 – Foram três ... três balinhas só, por causa da caloria.

Nesse momento, o estudante 7, do primeiro grupo, faz uma pergunta para o grupo que estava explicando e os estudantes 9 e 10 explicam para o estudante 7.

Estudante 7–Então, aqui vocês colocaram as três iguais, depois manteve uma, de cada sabor e foi mudando as outras?
Estudante 9 – Foi mudando as outras... A gente a gente permaneceu uma. E foi colocando as outras com dois sabores iguais. Foi isso.
Estudante 9 – A quarta fileira aqui, todos os sabores diferentes. Como a questão estava pedindo a quantidade de maneiras diferentes...
Estudante 10 – Quatro.

A professora projeta outra resolução com o objetivo de deixar mais clara a explicação.

Professora – Como vocês apresentaram a solução? Qual foi a ideia de vocês?
Estudante 11 – Temos...
Estudante 12 – Três grupos do mesmo sabor.
Estudante 11 – Mesmo sabor, três sabores diferentes, duas no mesmo sabor e um sabor diferente.
Professora – Ah então, mas essa ideia veio logo que vocês começaram?
Estudante 11 – Não.
Estudante 12 – As três, as de três sabores sim... ruído.

Estudante 11 – Foi ... foi só a primeira ó. Deu muito trabalho (os outros tipos de agrupamento)
Estudante 12 –Nós arriscamos essa e deu certo... risos....

A professora projeta novamente a primeira resolução.

Professora – Como vocês pensaram?
Estudante 7 – A gente não usou todas as balinhas né! Porque a gente achava que não poderia ficar repetindo. Ruído....
Professora –Vocês seguiram alguma estratégia ou foi aleatório que vocês foram tentando montar os grupos?
Estudante 13 – Não é porque a gente viu que se fosse usar todas as balinhas ia ficar repetindo os mesmos grupos.
Professora – Vocês ainda acham isso?
Estudante 7 – Não, agora. Sei que posso usar todas as balinhas, mas pra(sic) isso tenho que colocar grupo(sic) com três balinha(sic) diferente(sic). A ordem não é importante.
Estudante 13 – Agora a gente entendeu.

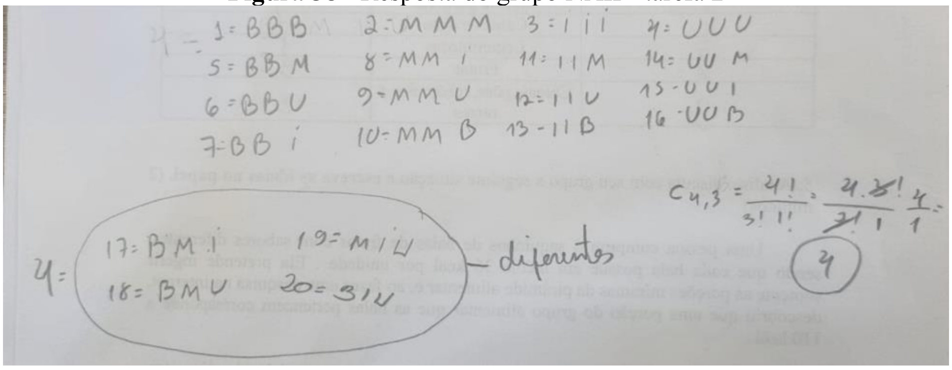
A professora faz uma pergunta com o objetivo de sistematizar a resolução.

Professora – Existe outra maneira de resolver o problema?
(Ruídos na turma)
Estudante 10 – Acho que a gente podia ter feito por combinação, né?
Professora – Como assim?
Estudante 10 – Como "o estudante 7" falou a ordem não é importante. Então era só combinar os quatro sabores de três em três.
Estudante 12 – Eita, era isso mesmo. (Risos).

Esse momento foi fundamental para esclarecer algumas dúvidas a partir da projeção das respostas dos grupos, pois mesmo quem estava com dúvidas ou não havia chegado na solução demonstrou entender a resolução.

Houve casos em que o grupo de estudantes, depois de muita discussão matemática, conseguiu perceber, dentro do próprio grupo, a sistematização da tarefa, conforme figura 38.

Figura 38 - Resposta do grupo NAII - tarefa 2



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse caso, o grupo registrou todos os agrupamentos possíveis, destacando, pela aproximação de uma elipse, a resposta da tarefa e, ainda, a ratificou por meio da combinação de quatro tomados, três a três.

6.2.4 Reflexões sobre a tarefa 2 “Alimentação Saudável”

A tarefa 2 “Alimentação Saudável” possibilitou que os estudantes da EJA desenvolvessem o raciocínio combinatório por meio das simulações, discussões matemáticas, registro escritos das estratégias, argumentações e reflexões como pode ser observado pelos trechos das transcrições de áudio e registros por escrito e fotográficos.

A presença de uma sistematização nas simulações viabilizava a apresentação de todos os vinte grupos possíveis de serem formados e dos quatro grupos com todos os sabores diferentes. Contudo, nem todos os grupos conseguiram apresentar essa sistematização de modo que os erros presentes nelas versavam sobre repetição ou ausência de grupos. As simulações no vespertino apresentaram uma taxa percentual de acerto de 69% e no noturno, de 67%.

As produções escritas apresentavam representações escritas e pictóricas e os erros presentes nessas produções foram dos tipos escrituração, representação com grupos repetidos e uso de dados aleatórios que apareceram no enunciado ou na simulação.

Foram utilizadas duas estratégias para a resolução da tarefa: contagem a partir da simulação e do uso do agrupamento por combinação. De modo que os estudantes puderam construir e solidificar a sistematização da tarefa, por meio das discussões matemáticas que aconteceram durante o desenvolvimento da situação-problema e na prática denominada por Stein *et al* (2008) “estabelecer conexões”.

6.3 Tarefa matemática 3

Com o objetivo de compreender e utilizar os conceitos de Análise Combinatória na resolução de problemas, a tarefa matemática 3 "Viagem de carro" foi desenvolvida em grupo, em sala de aula, no contexto do ensino exploratório. Composta por dez itens, os quais apresentavam tempo estimado para a resolução, com o objetivo de organizar o trabalho do professor e dos estudantes.

A tarefa foi sequenciada em três fases- Inicial, Execução e Finalização- de modo a promover a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, sendo que cada uma das fases foi monitorada e orientada pela professora-pesquisadora. Essas serão analisadas, tanto para o vespertino quanto para o noturno, por meio do mapeamento estatístico, das fotografias, das transcrições de trechos dos áudios gravados em sala de aula e da análise dos registros escritos da estratégia matemática.

A metodologia de desenvolvimento da tarefa consistiu em: formação de grupos, leitura de texto inicial e discussão sobre o texto, referente a etapa inicial; análise da situação problema, interpretação da situação problema, simulação e elaboração da estratégia matemática, referente à etapa de execução e, por fim, discussão matemática para estabelecer conexões e conclusão, referente a etapa de finalização.

6.3.1 Fase – Inicial

O roteiro dessa tarefa matemática foi distribuído e em seguida, foram disponibilizados dois minutos para que fosse realizada a leitura individual do texto introdutório sobre a campanha denominada Maio Amarelo. Logo após, houve uma discussão sobre o texto com perguntas sobre a legislação de trânsito vigente e sobre as impressões dos estudantes sobre a necessidade das leis para a segurança no trânsito. Esse momento foi fundamental para os estudantes se familiarizarem com o tema e se sentirem à vontade para exporem as ideias de maneira natural. Tanto no vespertino quanto no noturno, essa etapa aconteceu no tempo previsto, mas para isso a professora-pesquisadora controlava o tempo e avisava para os estudantes os minutos restantes.

6.3.2 Fase – Execução

Após a leitura e discussão do tema proposto pela tarefa, foi realizada a simulação da situação-problema com as cadeiras da sala de aula que representavam os bancos do carro, figura 39.

Figura 39 - Simulação da tarefa 3 realizada por estudantes

Fonte: Dados da pesquisa

O objetivo da simulação foi facilitar o entendimento da tarefa para os estudantes. Após a simulação, os estudantes começaram a discuti-la e a solicitar a presença da professora como pode ser observado no recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, por meio do trecho 6.

Trecho 6

Estudante 14: Professora, que qui (sic) é pra fazer aqui?

Professora: O que vocês entenderam quando leram a pergunta?

Estudante 15: Ah, que não pode sentar de qualquer maneira.

Professora: Por quê?

Estudante 15: Porque, por exemplo, o filho de sete anos não pode ser motorista.

Estudante 16:Então são quatro pessoas?

Professora: Qual a pergunta?

Estudante 14: Quais integrantes da família estarão...(silêncio)..aptos a ocupar o lugar do motorista no dia da viagem?

Estudante 16: São quatro.
Professora: Quem são?
Estudante 14: O pai e a mãe, um que já tem 21anos
Estudante 17: Só um filho.
Estudante 14: E um que vai fazer dezoito.
Professora: O filho de dezoito anos poderá dirigir na época da viagem?
Estudante 17: Não, porque o mês tem quatro semanas, mas precisa de três (meses) para tirar a carteira, não vai dar tempo.
Estudante 14: Ahh, então são três (pessoas).

Os estudantes apresentaram dificuldade nessa etapa de execução, principalmente, para interpretar a quantidade de maneira de ocupar os bancos detrás, mas as perguntas iniciais e a simulação, nos grupos que a realizaram, ajudaram a direcionar o desenvolvimento da tarefa. Como pode ser observado no recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, por meio do trecho 7.

Trecho 7
Estudante 18:Professora, depois que a gente fez a brincadeira das cadeiras agente entendeu que pode ser três motorista e quatro pessoas pru(sic) banco da frente, mas o resto a gente não sabe não. Risos.
Estudante 19 :Tem muito jeito diferente, por isso que é difícil.
Professora: Explica como são esses jeitos diferentes.
Estudante 19: Eu não sei explicar não. Risos.
Estudante 20: Explica aí, você tava(sic) explicando pra gente.
Estudante 19: Ah, eu pensei assim óh,(sic). Duas pessoas já sentou(sic) nos (sic)banco da frente. Então (sic)fica quatro pessoas pra sentar em cinco (sic)banco, mas se uma delas sentar no primeiro banco de traz, as outras (sic) pode sentar em qualquer um dos quatro e ainda (sic) pode trocar de lugar, por isso que é difícil, eu não sei contar tudo isso não...(silêncio).
Estudante 18: A gente já tinha discutido isso, mas ninguém conseguiu passar daí não.
Professora: Vocês falaram que têm quatro pessoas para sentar-se em cinco bancos, mas se uma delas sentar no primeiro banco de traz, as outras podem sentar em qualquer um dos outros quatro bancos traseiros?

Estudante 19: Isso. Se ela sentar no primeiro banco de traz, as outras pode(sic) sentar em qualquer um dos outros.
Professora: Mas ela tem que sentar no primeiro banco traseiro?
Estudante 18: Não. Ela também pode sentar no segundo, no terceiro, no quarto ou o quinto.
Estudante 19: Ela pode escolher 5 (sic) banco pra sentar...(silêncio)
Estudante 18: Ahh, então eu acho que a gente tem que pensar nas quantidades de banco que a pessoa pode sentar.
Estudante 19: Então é isso. A primeira pode escolher cinco ...eita e agora? Risos
Estudante 20: Depois que ela escolhe, ela vai e senta.
Estudante 19: Ahh, e agora a segunda só pode escolher quatro.
Estudante 20: Depois três, depois dois.
Estudante 18: Agora entendi. Risos.

E em analogia à tabela 10, utilizada para analisar as estratégias matemáticas da avaliação diagnóstica foi elaborada a tabela 16, com significados similares aos utilizados na tabela 11, para analisar as estratégias matemáticas da tarefa 3 "Viagem de carro".

Tabela 16 - Critérios para a análise da estratégia matemática da tarefa 3

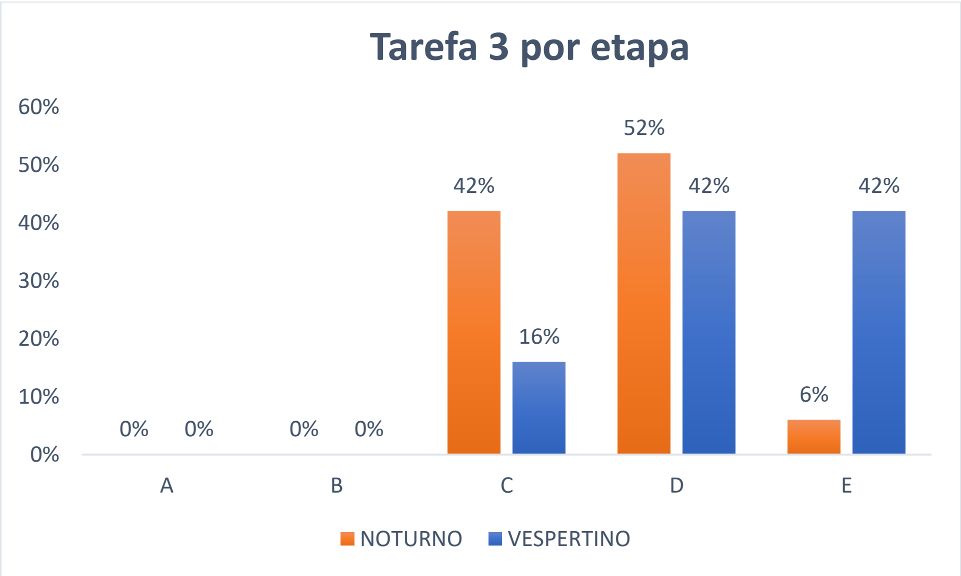
Raciocínio matemático	Etapa	Significado
Em Branco	A	Instrumento em branco
Em Processo	B	Não apresentou estratégia matemática coerente, ou seja: respostas numéricas incorretas, sem cálculos ou explicação; cálculos que não têm relação com o que é solicitado na questão, utilização de dados aleatórios da situação-problema, ou ainda, utiliza a representação em relação aos bancos do carro em desacordo com o que é solicitado na questão.
	C	Apresentação de algumas etapas do desenvolvimento estruturadas corretamente e/ou operações matemáticas incorretas e/ou não apresentou solução do problema.

Correto	D	Apresenta estratégia matemática coerente com: representação e/ou algoritmo adequados e/ou utilização do raciocínio combinatório.
	E	Apresentação de todas as etapas da resolução, com construção correta de representações e/ou soluções sistemáticas e/ou generalizações que viabilizam a resolução da questão.

Fonte: Autor 2023

Os grupos apresentaram o registro escrito de uma estratégia matemática para denotar o número de maneiras possíveis da família acomodar-se no carro para a viagem. Esses registros foram analisados de acordo com a tabela 17, de modo a obter as taxas percentuais por etapa apresentas no gráfico 6.

Gráfico 6 - Porcentagem por etapa das estratégias da tarefa 3 “Viagem de carro”



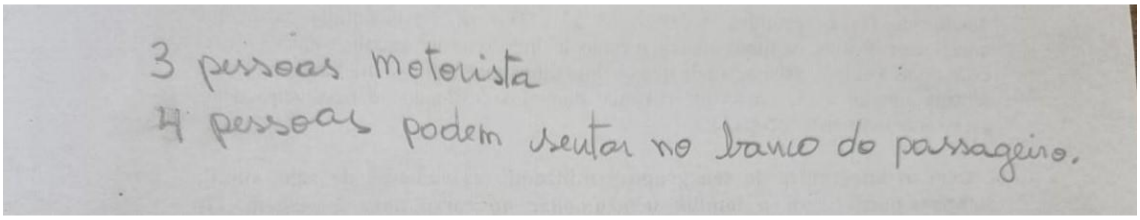
Fonte: Dados refinados da pesquisa

Tanto no vespertino quanto no noturno, nenhum grupo deixou a resolução em branco, nem apresentou resolução com estratégias matemáticas incoerentes com o que foi solicitado (etapa B). No noturno, mesmo os 42% dos estudantes que estavam naquele momento, em processo de sistematização referente aos conhecimentos solicitados pela situação-problema, responderam parte da questão de modo correto. No vespertino, mesmo em níveis diferentes de sistematização, predominaram resoluções corretas.

Os estudantes que estavam *Em Processo*, nessa tarefa, apresentaram resoluções que apresentavam erros de dois tipos: resolução parcial e uso aleatório dos dados presentes na situação-problema, os quais serão apresentadas nas figuras 40 e 41.

Tipo 1 – Resolução parcial

Figura 40 - Resolução do grupo NBI -- tarefa 3

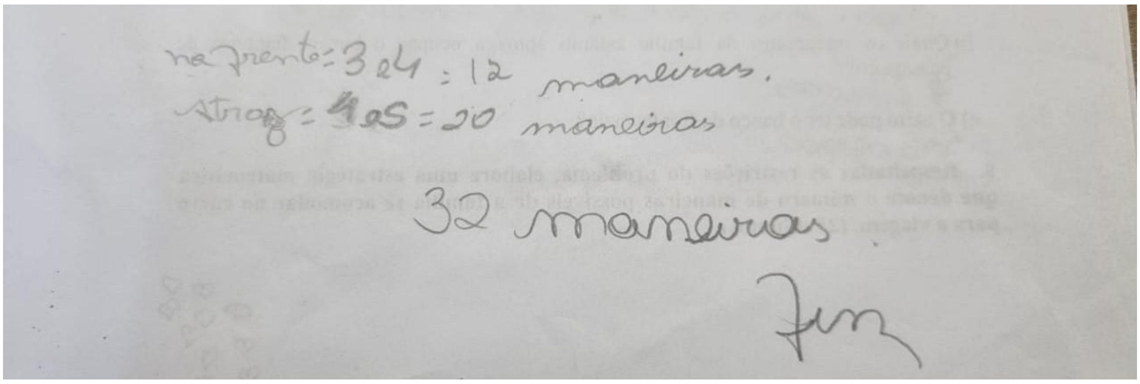


Fonte: dados da pesquisa (2023)

Nesse caso, o grupo explicou corretamente, como encontrou as quantidades de possibilidades para ocupar os bancos dianteiros. Contudo, a dificuldade consistiu na ocupação dos bancos traseiros.

Tipo 2- Uso de dados aleatórios

Figura 41- Resolução do grupo NBIII - tarefa 3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

As quantidades para os bancos da frente, 3 e 4, e a multiplicação entre eles foram encontradas corretamente. Contudo, para o banco detrás foram eleitos números aleatórios que estavam no enunciado da situação-problema, o número quatro refere-se à quantidade de pessoas restantes e o número cinco refere-se à quantidade de bancos traseiros, desse modo, multiplicaram-se esses dois números e, por fim, utilizou o princípio aditivo entre os resultados das duas multiplicações.

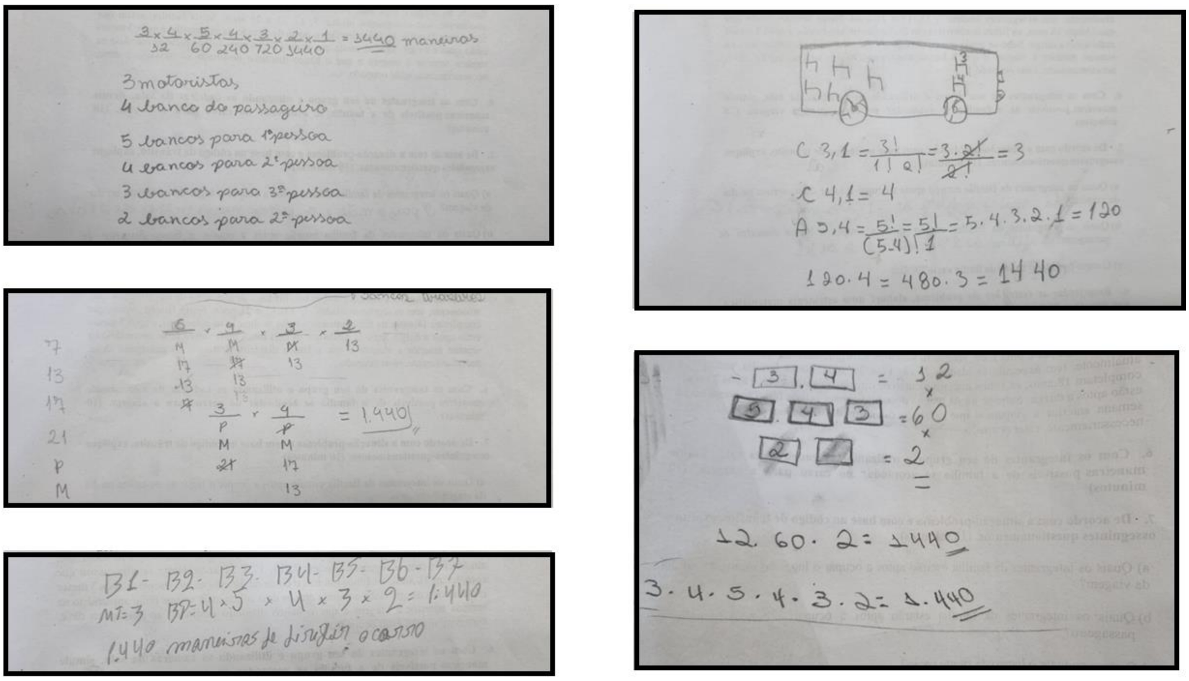
Após a entrega das produções escritas, passou-se para a etapa de finalização.

6.3.3 Fase – Finalização

Nessa etapa, todas as resoluções foram projetadas, por meio do Datashow, no vespertino e por meio do televisor de 32 polegadas existente na sala de aula. A projeção foi feita das resoluções menos formais para as com maior grau de sistematização e generalização. O fato de a professora projetar as tarefas, assumir o papel de mediadora e direcionar perguntas sobre as similaridades e contrastes entre as estratégias adotadas possibilitou aos estudantes da EJA espaço de argumentação, de discussão matemática e de explicação de uns para os outros sobre as representações, as estratégias matemáticas e as generalizações.

Como a tarefa possibilitava maneiras diferentes de resolução, houve grupos que resolveram pelo Princípio Multiplicativo com utilização de representações pictóricas na resolução da tarefa para direcionar na solução da situação problema. Outros utilizaram traços ou quadradinhos e letras (B1, B2, B3, B4, B5, B6 e B7) para designar os bancos do carro e abaixo dessas letras colocaram a quantidade de opções possíveis de se ocupar cada banco. E alguns apresentam generalizações por meio dos agrupamentos: arranjo e combinação, conforme figura 42.

Figura 42 - Estratégias de 5 grupos - tarefa 3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Todas essas diferentes maneiras de resolução foram apresentadas e discutidas pelos estudantes.

6.3.4 Reflexões sobre a tarefa 3 “Viagem de carro”

A tarefa 3 “Viagem de carro” promoveu a construção e utilização do raciocínio combinatório aos estudantes da EJA que participaram dessa pesquisa, por meio das simulações, discussões matemáticas, registro escritos das estratégias, argumentações e reflexões como pode ser observado pelos trechos das transcrições de áudio e registros por escrito e fotográficos.

Todos os grupos, tanto do vespertino quanto do noturno, registraram a quantidade de possibilidades de ocupar o banco do motorista e o banco do passageiro, contudo a dificuldade consistiu em encontrar a quantidade total de maneira de ocupar os bancos traseiros. A discussão matemática viabilizou o acerto na quantidade em relação aos bancos dianteiros pois a professora percebeu, no momento de monitorar, que mesmo quando algum integrante do grupo apresentava dificuldade em relação a essa quantidade, outro integrante prontificava-se a explicar o raciocínio para o colega. Isso evidenciou a familiaridade e a compreensão dos integrantes dos grupos com a utilização do Princípio Fundamental da Contagem para casos mais simples.

Todos os grupos que se empenharam para fazer a simulação conseguiram apresentar a estratégia matemática de maneira correta, mesmo que em diferentes níveis de sistematização. Os grupos que não evidenciaram todas as etapas necessárias para a resolução apresentaram erros dos tipos: uso de dados aleatórios que apareceram no enunciado e resolução parcial.

Para a resolução da tarefa foram utilizadas tanto diferentes representações quanto diferentes estratégias, por meio do uso do princípio multiplicativo e dos agrupamentos de combinação e arranjo. Na prática denominada por Stein *et al* (2008) "estabelecer conexões", os estudantes, por meio das próprias explicações e pela mediação da professor-pesquisadora, puderam construir e solidificar a sistematização da tarefa.

6.4 Relação entre os dados estatísticos das três tarefas matemáticas.

A partir dos gráficos 4, 5 e 6, apresentados respectivamente nas análises das tarefas matemática: Avaliação diagnóstica, Alimentação Saudável e Viagem de carro foi possível elaborar a tabela 17 que mostra as taxas percentuais de cada uma das cinco etapas - A, B, C, D, E- subdividas nas três categorias de apresentação do raciocínio matemático: *Em Branco, Em Processo e Correto*. Primeiramente, será apresentada uma tabela que sintetiza os dados percentuais das três tarefas matemáticas, em seguida, em cada turno, será apresentado o comportamento gráfico de cada tarefa em relação às etapas e finalmente, em relação às categorias.

Tabela 17 - Comparação das taxas percentuais

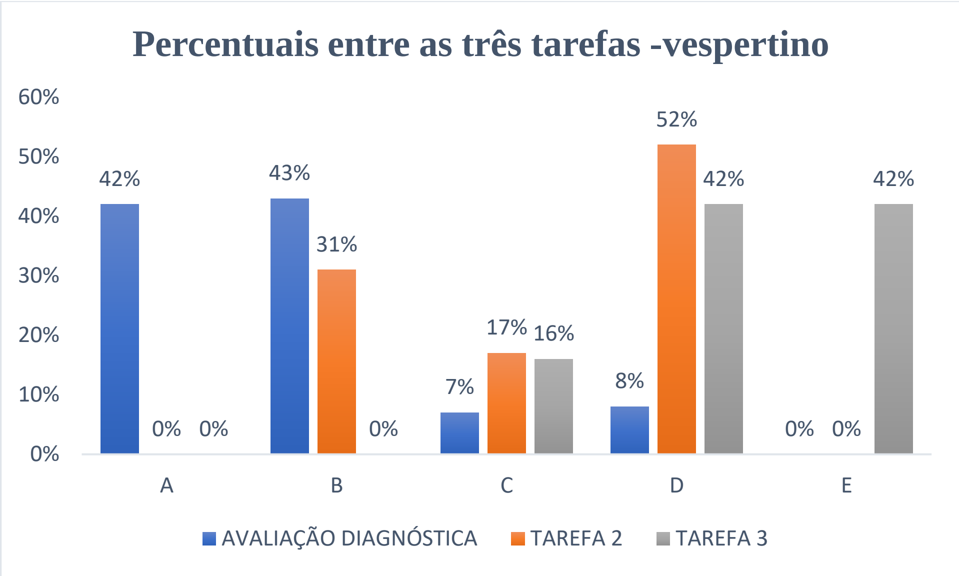
TURNOS	TAREFAS	*EM BRANCO*	*EM PROCESSO*		*CORRETO*	
		A	B	C	D	E
VESPERTINO	T1= Tarefa 1 "Avaliação diagnóstica"	42%	43%	7%	8%	0%
	∑ das etapas que pertencem a categoria em relação a T1	42%	50%		8%	
	T2= Tarefa 2 "Alimentação Saudável"	0%	31%	17%	52%	0%

	∑ das etapas que pertencem a categoria em relação a T2	0%	48%		52%	
	T3= Tarefa 3 “Viagem de carro”	0%	0%	16%	42%	42%
	∑ das etapas que pertencem a categoria em relação a T3	0%	16%		84%	
NOTURNO	Tarefa 1 “Avaliação diagnóstica”	43%	42%	8%	7%	0%
	∑ das etapas que pertencem a categoria em relação a T1	43%	50%		7%	
	Tarefa 2 “Alimentação Saudável”	0%	22%	39%	8%	31%
	∑ das etapas que pertencem a categoria em relação a T2	0%	61%		39%	
	Tarefa 3 “Viagem de carro”	0%	0%	42%	52%	6%
	∑ das etapas que pertencem a categoria em relação a T3	0%	42%		58%	

Fonte: Gráficos da análise

Tanto para o vespertino quanto para o noturno, é possível observar por meio da tabela 17, que 42% dos estudantes do vespertino e 43% dos estudantes do noturno deixaram a tarefa 1 em branco e que nenhuma das tarefas desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório, tarefas 2 e 3, foi deixada em branco. Os gráficos 7 e 8 referentes aos dados da tabela 18 serão apresentados com o objetivo de favorecer, visualmente, a compreensão desses dados. O gráfico 7 refere-se ao comportamento das três tarefas no vespertino.

Gráfico 7 - Percentuais comparativos entre as três tarefas - vespertino

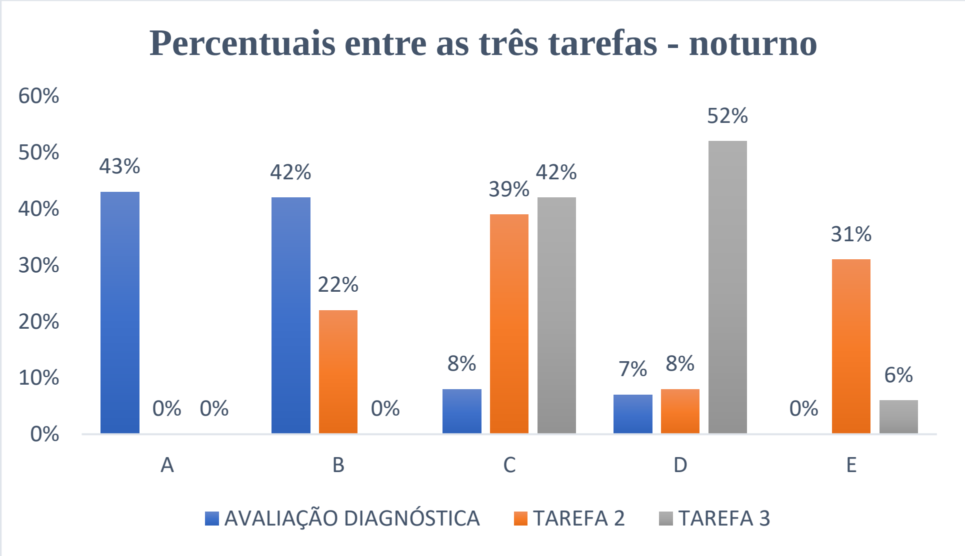


Fonte: dados da pesquisa (2023)

As etapas - A, B, C, D, E- utilizadas como critérios de mapeamento das resoluções variavam de acordo com a exigência do nível cognitivo, sendo a etapa A, a de nível menos complexo e a etapa E, a de nível mais complexo. Desse modo, de acordo com gráfico 7, no vespertino, a avaliação diagnóstica (barras azuis) apresentou as etapas A, B, C e D; a tarefa 2 (barras laranjas) apresentou as etapas B, C e D e a tarefa 3 (barras cinzas) apresentou as etapas C, D e E. Ou seja, houve uma movimentação, em relação as resoluções apresentadas, de níveis cognitivos menos complexos para níveis mais complexos, à medida que cada tarefa era desenvolvida. Nesse sentido é possível inferir que houve aprendizado em relação ao raciocínio combinatório pelo fato dos estudantes apresentarem níveis cognitivos mais complexos na tarefa seguinte comparados à tarefa anterior.

Para o noturno, o gráfico 8 refere-se ao comportamento das três tarefas.

Gráfico 8 - Percentuais comparativos entre as três tarefas - noturno

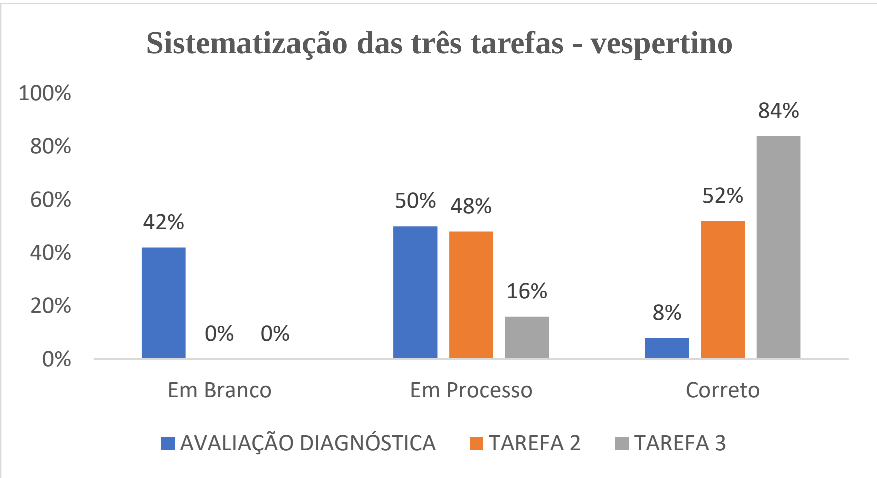


Fonte: dados da pesquisa (2023)

A avaliação diagnóstica (barras azuis) apresentou as etapas A, B, C e D; a tarefa 2 (barras laranjas) apresentou as etapas B, C, D e E, e a tarefa 3 (barras cinzas) apresentou as etapas C, D e E. Analogamente ao turno vespertino, o noturno também apresentou um deslocamento de resoluções com níveis cognitivos menos complexos para níveis mais complexos, à medida que as tarefas eram desenvolvidas. Consequentemente, é possível inferir que houve aprendizado promovido por meio de tarefas desenvolvidas no contexto do ensino exploratório.

O gráfico 9 apresenta comportamento de cada tarefa, no vespertino, em relação à categoria - *Em Branco, Em Processo e Correto*.

Gráfico 9 - Sistematização das três tarefas – vespertino

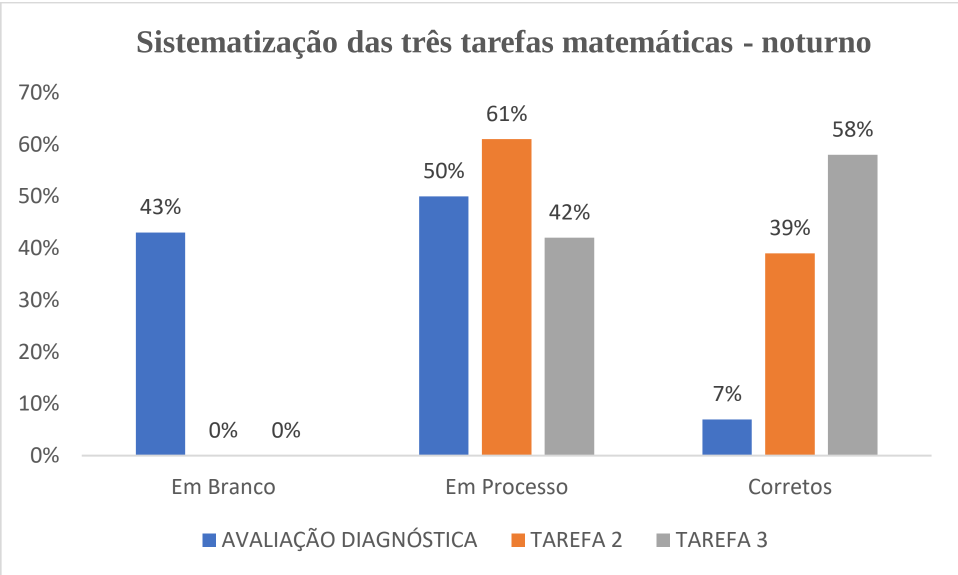


Fonte: dados da pesquisa (2023)

Em relação ao vespertino, nos registros escritos da avaliação diagnóstica, 42 % dos estudantes nem tentaram expor as próprias ideias, de modo a deixar esse instrumento em branco. Nas tarefas 2 e 3, essa porcentagem foi de 0%, ou seja, nenhum registro foi entregue em branco. Na categoria denominada *Em Processo*, as taxas percentuais sofreram redução de dois pontos percentuais (50% - 48%) da avaliação diagnóstica para a tarefa 2 e de 32 pontos percentuais (48% -16%) da tarefa 2 para a tarefa 3. E, consequentemente, na categoria do raciocínio matemática denominada *Correto*, as taxas percentuais aumentaram 44 pontos percentuais (52% - 8%) e 32 pontos percentuais da tarefa 2 para a tarefa 3.

O gráfico 10 apresenta comportamento de cada tarefa, no noturno, em relação à categoria.

Gráfico 10 - Sistematização das três tarefas – noturno



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Em relação ao noturno, nos registros escritos da avaliação diagnóstica 43 % dos estudantes nem tentaram expor as próprias ideias, de modo a deixar esse instrumento em branco. Nas tarefas 2 e 3, essa porcentagem foi de 0%, ou seja, nenhum registro foi entregue em branco. Na categoria denominada *Em Processo*, a taxa aumentou onze pontos percentuais (61% - 50%) da avaliação diagnóstica para a tarefa 2 e redução de dezenove pontos percentuais (61% - 42%) da tarefa 2 para a tarefa 3. E na categoria do raciocínio matemática denominada *Correto*, as taxas percentuais aumentaram 32 pontos percentuais (39% - 7%) da avaliação diagnóstica para a tarefa 2 e dezenove pontos percentuais (58% - 39%) da tarefa 2 para a tarefa 3. Apesar do gráfico apresentar o aumento da categoria *Em Processo*, da avaliação diagnóstica para a tarefa

2, é possível observar que nenhum instrumento da tarefa 2 foi entregue em branco, assim os 43% (referente a avaliação diagnóstica) foram redistribuídos (11% para a categoria *Em Processo* e 32% para a categoria denominada *Correto*) de modo a perceber que nessa redistribuição predominaram-se instrumentos corretos.

Logo, ao analisar os gráficos, em termos das porcentagens, das três tarefas matemáticas - tanto na análise individual, quanto na conjunta - observa-se que eles refletem indícios de aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa. Além disso, as tarefas desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório trouxeram significado aos estudantes ao perceberem que o uso de conceitos relativos à Análise Combinatória pode ser utilizado em situações cotidianas, de modo que puderam transitar da linguagem comum para a linguagem matemática. Como pode ser observado no recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, por meio do trecho 8.

Trecho 8

Estudante 21 –A gente quer agradecer por hoje.
Professora – Você gostou da atividade?
Estudante 21 –Eu gostei, é bom, é bom pra gente pensar mais, que é uma coisa que é como a gente não tem no nosso dia a dia a gente acha difícil. (referindo-se a desenvolver tarefas em aulas exploratórias)
Estudante 21 - Mas quando eu estou falando aqui com ela (referindo-se ao diálogo dentro do grupo) *e depois quando todo mundo fala o seu* (referindo-se ao momento a etapa denominada por Stein de Estabelecer Conexões) *e explica como fez, a gente entende a Matemática que tem do nosso dia a dia.*
Estudante 21 - Aí quando vim pra cá, que foi fazer o negócio, aí.
Professora – A simulação?
Estudante 21 – É, aí já acha dificuldade entendeu? Mas pelo outro lado isso é bom porque a gente procura pensar mais, e começar a resolver as coisas e ver que as coisas não são só de um jeito só, que pode ser de outra maneira. (referindo-se à diversidade de maneiras de resolução da tarefa)
Professora – E você achou legal trabalhar em grupo?
Estudante 21 – Eu gosto, eu acho legal, eu gosto, é bom, a gente aprende mais.
Professora – Você gosta de trabalhar em grupo também? (Havia outro estudante)
Estudante 22 –Fazer em grupo, a gente aprende, ééé...
Estudante 22 – Aprende coisa diferente do outro.

O trecho 8 ainda apresenta consonância com o que defende Canavarro (2011) em relação ao desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de ideias sistematizadas em discussão coletiva. Outro aspecto relevante refere-se ao aprendizado construído no trabalho em grupo de modo que a aprendizagem decorre do desenvolvimento das tarefas por meio de ações comunicativas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa originou-se nas inquietações e percepções da professora-pesquisadora sobre as dificuldades relatadas pelos estudantes da EJA em aprender Matemática e, em particular, Análise Combinatória. A partir daí, percebeu-se a necessidade de refletir sobre perspectivas de ensino-aprendizagem que pudessem fomentar o raciocínio combinatório do sujeito da EJA de modo a valorizar as experiências de vida deles, conforme solicita os Parâmetros Curriculares da EJA no Distrito Federal. Nesse contexto, o ensino exploratório foi utilizado com o foco de estruturar o desenvolvimento de tarefas matemáticas e promover a aprendizagem desses estudantes.

Foram desenvolvidas três tarefas matemáticas, sendo uma delas uma avaliação diagnóstica, na qual predominou, tanto no vespertino quanto no noturno, de acordo com a análise das produções escritas, questões devolvidas em branco e que apresentavam estratégia de resolução em desacordo com o solicitado. Contudo, os estudantes que resolveram as questões dessa tarefa aberta, apresentaram diferentes modos de resolução em relação à utilização de estratégias, de representações e de algoritmos. Diante disso, os estudantes puderam perceber que, na resolução de problemas, a relevância consiste no raciocínio matemático utilizado e não apenas no método de resolução.

Por meio da avaliação diagnóstica, foi possível verificar que estudantes que se encontravam em processo de aprendizagem em relação aos pré-requisitos e raciocínio combinatório apresentaram fragilidades na resolução, as quais foram classificadas pela professora-pesquisadora com os seguintes tipos: operações incorretas, uso de dados aleatórios que apareceram no enunciado, extrapolação, resolução parcial, representação pictórica em desacordo com a solicitação da questão e fragilidade na sintaxe matemática. Para trabalhar esses tipos de erros, optou-se por estimular o desenvolvimento da interpretação por meio do ensino exploratório de modo a promover o diálogo matemático para que o estudante pudesse perceber, na própria argumentação matemática, a lógica do conhecimento construído, conforme as ideias de Canavarro (2011).

As práticas de Stein *et al (*2008), com vistas à orquestração de discussões coletivas, foram fundamentais para a realização das tarefas matemáticas dessa pesquisa, desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório (CANAVARRO,2011). A antecipação mostrou-se relevante, pois permitiu que a professora-pesquisadora pudesse se preparar em relação às possíveis demandas de sala de aula.

No desenvolvimento das tarefas 2 e 3, as antecipações referentes às interpretações e resoluções estiveram presentes entre os estudantes. Contudo, uma dificuldade não pensada, mas que apareceu, foi a de resolver corretamente o algoritmo, ou seja, depois de interpretar a tarefa matemática e decidir qual operação matemática utilizar, vários estudantes apresentavam dificuldades na resolução do algoritmo matemático, principalmente, quando se referia à divisão. Para isso, a professora-pesquisadora procurava identificar no grupo alguém que soubesse resolver para explicar aos colegas ou se não houvesse nenhum estudante naquele grupo, ela conduzia a resolução do algoritmo por meio de perguntas.

Antes do desenvolvimento de cada tarefa e dentro do planejamento delas, foram construídas a resolução detalhada, as antecipações de dúvidas, as possíveis mediações e, ainda, a atividade extra e a organização prévia para a tarefa 2- Alimentação Saudável. Todas essas elaborações serviram tanto como uma preparação para a professora-pesquisadora como uma organização para o desenvolvimento da tarefa. Nesse sentido, destaca-se o planejamento como mecanismo de tomada de decisão e de facilitação de oportunidades de aprendizagens, conforme Serrazina (2017).

O ato de monitorar possibilitou que fosse percebido o desenvolvimento dessas tarefas nos grupos (STEIN *et al,* 2008). Em seguida, foram selecionadas para as discussões finais todas as resoluções dos grupos, mesmos as que estavam em processo de construção e que não apresentavam respostas adequadas para a resolução das tarefas. Todos os grupos foram selecionados, pois primeiramente, os estudantes demonstravam entusiasmo ao verem as próprias resoluções projetadas e, assim, mostravam-se mais participativos. Ademais, foi uma oportunidade para que pudessem aprender uns com os outros de modo a perceberem o erro e reestruturarem as resoluções que necessitavam de ajustes para ficarem corretas.

O critério adotado para o sequenciamento das tarefas foi o nível de formalidade de modo que todas as folhas de respostas dos grupos participaram da seleção, partindo das menos formais até as que apresentaram maior grau de formalidade, complexidade e generalizações. E, por fim, a prática de estabelecer as conexões foi um exercício de mediação desafiador para a professora-pesquisadora, pois foi preciso saber os momentos adequados de intervir de modo a promover a aprendizagem. Nessa etapa, os estudantes explicavam uns para os outros a resolução e, por meio da discussão matemática, concluíam a resolução das tarefas.

As tarefas 2 e 3 foram estruturadas em três fases – Inicial, Execução e Finalização. Nelas, os estudantes construíram a própria maneira de resolvê-las, as quais foram cognitivamente desafiadoras, como preconiza Stein *et al* (2008) e Ponte (2012), uma vez que se caracterizam por apresentar diferentes representações, requerer a compreensão dos conceitos matemáticos, não apresentar um método único de resolução e solicitar que o estudante desenvolva a argumentação, a tomada de decisão e a comunicação. Apesar dos estudantes considerarem essas tarefas difíceis inicialmente, conseguiram explicar o raciocínio combinatório utilizado na resolução, argumentar sobre ele e construir o aprendizado por meio da discussão matemática que aconteceu dentro do grupo e no momento da discussão coletiva.

A fase Inicial referia-se a um momento anterior ao desenvolvimento e à formalização da estratégia matemática. Essa fase foi essencial para que o estudante da EJA pudesse expressar a própria opinião sobre o tema das tarefas - alimentação saudável e trânsito. Ela foi estruturada por meio da leitura e interpretação de um texto introdutório no qual os estudantes expuseram reflexões, escutavam os colegas de turma, argumentavam sobre elas de modo a possibilitar um ambiente favorável às discussões matemáticas e à argumentação.

Na fase denominada Execução, a construção do pensamento matemático foi realizada em grupos, nos quais os estudantes utilizaram a comunicação como o elemento capaz de viabilizar a aprendizagem, pois era estabelecida comunicação tanto entre estudante e professora, quanto entre os próprios estudantes, sendo que neste caso, eles demonstravam mais tranquilidade para argumentar uns com os outros, defender as próprias ideias e refletir sobre elas. Nessa fase, foi solicitada a simulação, de modo que, na tarefa 2, ela deveria ser realizada com balas entregues para cada grupo e na tarefa 3, com as cadeiras da sala de aula.

Na tarefa 2, todos os grupos, tanto do vespertino quanto do noturno, fizeram a simulação, sendo que a maioria das simulações representadas estavam corretas. Por meio das produções escritas, foi possível verificar que no vespertino, foram evidenciadas mais estratégias estruturadas corretamente. Contudo, apenas no noturno os grupos apresentaram estratégias sistemáticas e generalizações. Os estudantes que estavam em processo de aprendizagem apresentaram fragilidades na resolução, as quais foram classificadas pela professora-pesquisadora com os seguintes tipos: escrituração, representação com grupos repetidos e dados aleatórios que aparecem no enunciado ou na simulação. Já os estudantes que apresentaram resoluções corretas, estruturaram o raciocínio combinatório tanto por meio da contagem direta, como também pelo algoritmo da combinação.

Na tarefa 3, a simulação em sala possibilitou a discussão matemática e argumentação entre os colegas do grupo, e, desse modo, os estudantes que se empenharam para fazer a simulação, apresentaram mais facilidade na compreensão e resolução da tarefa, conforme preconizam Alro e Skovsmose (2010), Salgado (2021) e Guerreiro *et al* (2015), ao defenderem que a aprendizagem se apoia no desenvolvimento de ações comunicativas matemáticas.

Nessa tarefa, as fragilidades apresentadas pelos estudantes foram: resolução parcial e uso de dados aleatórios, mas mesmo os grupos que não conseguiram encontrar a solução, apresentaram parte dela resolvida corretamente. Os estudantes utilizaram tanto o princípio multiplicativo, quanto algoritmos de arranjo e combinação como estratégias de resolução.

Na fase denominada Finalização, relativa à discussão coletiva (STEIN *et al*, 2008), tanto na tarefa 2 quanto na tarefa 3, as estratégias foram projetadas e, por meio da mediação da professora-pesquisadora, os estudantes explicavam uns para os outros o modo de resolução de cada grupo. Mediar o ensino exploratório foi uma experiência desafiadora para a professora-pesquisadora, pois, além de exigir preparo e conhecimento sobre a Análise Combinatória, as particularidades de cada tarefa - especificidades sobre a pirâmide alimentar e sobre o trânsito - e o domínio da resolução, também exigiu que a professora soubesse fazer perguntas e intervenções que, sob o olhar dela, pudessem encorajar o pensamento e o raciocínio matemático rigoroso e ainda saber o momento adequado de fazê-las, de modo a possibilitar a socialização e a construção do conhecimento matemático pelos próprios estudantes. Dessa forma, a prática da antecipação foi fundamental para que a professora se sentisse mais preparada para mediar a prática denominada por Stein (2008) de estabelecer conexões.

A comparação entre as três tarefas, por meio das taxas percentuais, apresentou uma mudança de níveis cognitivos menos complexos para níveis mais complexos à medida que cada tarefa matemática foi desenvolvida. Na tarefa 1, denominada avaliação diagnóstica, 42% no vespertino e 43% no noturno deixaram a resolução em branco, já nas tarefas 2 e 3, nenhum grupo de estudantes deixou de responder as tarefas. Esse fato mostrou que o trabalho em grupo favoreceu a iniciativa, a colaboração e a construção do conhecimento matemático.

A partir da análise realizada nas produções escritas, foi possível ratificar a percepção de que a avaliação pode ser utilizada como uma prática investigativa capaz de buscar a compreensão de indícios de aprendizagem dos estudantes. Por meio dessa investigação, percebeu-se que a maioria dos estudantes dessa pesquisa utilizou a enumeração direta ou o princípio multiplicativo para a resolução das tarefas. Esse contexto esteve em sintonia com o que se pretendia na pesquisa e com o que preconiza Morgado (2020) em relação ao uso desnecessário de fórmulas de modo a preterir o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A análise e a discussão coletiva de resoluções erradas contribuíram para o aprendizado dos estudantes, pois a partir da projeção delas, os estudantes foram incentivados a argumentar sobre o raciocínio apresentado e a perceber por que estava errado. Essa percepção às vezes precisava da mediação da professora-pesquisadora, mas na maioria das vezes, os próprios estudantes explicavam uns para os outros, de modo a se sentirem valorizados ao fazerem essa explicação. Desse modo, é possível inferir que além da valorização do sujeito da EJA, houve aprendizado em relação a Análise Combinatória.

As experiências vivenciadas em sala de aula, descritas nesta pesquisa, proporcionaram um diálogo entre o que propõe Ponte (2014), Stein (2008) e Canavarro (2011) e o desenvolvimento das tarefas em sala de aula, de modo a trazer reflexões não apenas sobre as dificuldades dos estudantes da EJA, mas também sobre a prática educativa da professora-pesquisadora. Apesar dessa prática, em muitos momentos, apresentar reflexos da trajetória acadêmica e da formação inicial dela, é possível perceber a relevância da formação continuada em cursos de pós-graduação, por meio dessa formação, foi possível que a professora-pesquisadora tivesse um olhar diferenciado sobre o próprio fazer pedagógico a fim de perceber, no ensino exploratório, uma possiblidade de promover a aprendizagem tanto para estudantes da EJA, quanto para a própria prática profissional.

Desse modo, ao analisar o desenvolvimento de tarefas matemáticas, de estudantes da EJA da rede pública de ensino do Distrito Federal, verificou-se que houve aspectos - tanto na produção escrita, quanto a discussão coletiva dos estudantes - que indicaram aprendizagem referentes ao raciocínio combinatório. Observou-se que as tarefas desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratório promoveram aprendizagem aos estudantes, tanto por trabalharem em grupo quanto por perceberem o uso de conceito relativos à Análise Combinatória em situações cotidianas, de modo a transitarem da linguagem comum para a linguagem matemática. Assim, o desenvolvimento de tarefas matemáticas de Análise Combinatória desenvolvidas na perspectiva do ensino exploratória foi capaz de promover a aprendizagem aos sujeitos da EJA.

O objetivo geral da pesquisa foi analisar o desenvolvimento de tarefas matemáticas, de estudantes da EJA da rede pública de ensino do Distrito Federal, para verificar aspectos que indicassem aprendizagens referentes ao raciocínio combinatório. Esse objetivo foi atingido por meio dos objetivos específicos: analisar simulações e produções escritas das estratégias desenvolvidas pelos estudantes nas tarefas matemáticas, as quais, juntamente com a discussão matemática, mostraram contribuir com a aprendizagem desses estudantes; identificar e caracterizar erros apresentados nos instrumentos desenvolvidos, os quais referiam-se a erros de interpretação, operações, uso aleatório de dados e de sintaxe matemática ; possibilitar aos estudantes a utilização de estratégias diversas de resolução relacionadas aos conceitos pertencentes à Análise Combinatória, o que foi evidenciado por meio das diversas maneiras de resolução, e por último, analisar a relação entre os dados estatísticos dos instrumentos desenvolvidos em sala de aula, a qual mostrou, por meio das taxas percentuais, deslocamento das etapas de raciocínio de níveis cognitivos menos complexos para níveis mais complexos. Diante do exposto, entende-se que os objetivos da pesquisa foram alcançados.

Essa experiência metodológica foi marcante para a professora-pesquisadora no que se refere à prática profissional, ao perceber que estudantes da EJA ao desenvolver tarefas matemáticas na perspectiva do ensino exploratório, demonstravam entusiasmo, compromisso e compreensão do raciocínio matemático. E, na trajetória acadêmica, ao permitir-se, por meio do mestrado, estudar teorias presentes na Educação Matemática; discuti-las entre colegas de curso e professores comprometidos com o fazer pedagógico que almeja a aprendizagem e colocá-las em práticas nas turmas da EJA em que trabalha. Assim, fortalecer a identidade profissional para enfrentar os desafios presentes na docência.

Para trabalhos futuros, é possível desenvolver as tarefas matemáticas dessa pesquisa em turmas de Ensino Médio Regular e turmas da EJA, de modo a analisar as diferenças e similaridades entre elas e refletir qual a maneira mais adequada de desenvolvê-las com foco na aprendizagem nos estudantes. Outro aspecto que poderia ser trabalhado futuramente é o de estruturar tarefas matemáticas na perspectiva do ensino exploratório, baseadas nos tipos de erros apresentados pelos estudantes, de modo a promover a aprendizagem. E, ainda, em relação a aprendizagem dos professores, sugere-se um estudo sobre a percepção deles sobre as tarefas matemáticas dessa pesquisa, como podem sugerir novas tarefas e quais as fragilidades que apresentam ao desenvolver esse conteúdo em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCÂNTARA, Cecília de; DANTAS, Simone; PARÁ, Telma Silveira. O Jogo da Lanchonete: Sustentabilidade e Ensino dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. **Educação Matemática em Revista**. Rio de Janeiro, n.66, v.25, p.12-25, 2020. Disponível em: O Jogo da Lanchonete: sustentabilidade e ensino dos princípios aditivo e multiplicativo | Educação Matemática em Revista (sbemrevista.kinghost.net). Acesso em: 10 abr. 2023.

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 160 p.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011. 229 p.

BASTOS, A. C.; LOPES, J. R.; VICTER, E. das F. Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 3, p. 330–344, 2020. DOI: 10.26843/Rencima. v11i3.2491. Disponível em: Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio | Revista de Ensino de Ciências e Matemática (cruzeirodosul.edu.br). Acesso em: 13 maio 2023.

BEITES, Patrícia Damas; BRANCO, Maria Luísa; COSTA, Cecília. Eros em esquemas de demonstração com números complexos. p.01-31, 2020. **Scielo**. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248235587. Acesso em: 02 jun. 2023.

BERGE, C. **Principles of Combinatorics**. v.72. New York: Academic Press,1971. p.1-11.

BISHOP, A.; GOFFREE, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G.Howson & M. Otte (Eds.), **Perspectives on mathematics education** pp. 309-365. Dordrecht:D. Reidel. Disponível em: Classroom Organisation and Dynamics | SpringerLink. Acesso em: 20 mar. 2023.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Pesquisa qualitativa em educação matemática. UNESP Caxambu, MG. **Anais**[...] Caxambu, MG, 2004, p. 01-18. Disponível em: Microsoft Word - minicurso-borba.doc (unesp.br). Acesso em: 03 jun. 2023.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.** Brasília. DF: Presidência da República, [2016]. Disponível em: Constituição (planalto.gov.br). Acesso em: 08 abr. 2023.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. Câmara da Educação Básica. **Resolução n. 7, de 14 de dezembro de 2010**. Fixa Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 2010. Disponível em: Resolução CNE/CEB nº 7, de 14 de dezembro de 2010 (mec.gov.br). Acesso em: 27 jun. 2023.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base (mec.gov.br). Acesso em: 04/10/2023.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil**, Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2019. Disponível em: Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil - MEC . Acesso em: 26 jun. 2022.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. Câmara da Educação Básica. **Resolução n. 3, de 21 de novembro de 2018**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 2018. Disponível em: Resolução CNE nº 3 DE 21/11/2018 (normasbrasil.com.br). Acesso em: 27 jun.2023.

CAMPOS, Carlos Eduardo de; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: Perspectivas Investigativas. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.** v.16, p.01-20, 2021. Disponível em: Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: Perspectivas Investigativas | Revista Eletrônica de Educação Matemática (ufsc.br). Acesso em: 15 abr. 2023.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da matemática: Prática e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.115, p.11-27, 2011. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/117/119. Acesso em: 30 maio 2023.

CARVALHO, Jair Antônio de; CARVALHO, Marlene Pedrote de; BARRETO, Maria Auxiliadora Motta; ALVES, Fábio Aguiar. Andragogia: considerações sobre a aprendizagem do adulto. **Revista Eletrônica do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Saúde e do Ambiente. REMPEC – Ensino, Saúde e Ambiente**, v.3 n.1, p. 78-90, 2010. ISSN 1983-7011. Disponível em: ANDRAGOGIA: CONSIDERAÇÕES SOBRE A APRENDIZAGEM DO ADULTO | Semantic Scholar. Acesso em: 27 mar. 2023.

CEDETRAN- Centro Intersetorial de prevenção de trânsito. No trânsito, escolha a vida!. **Campanha Maio Amarelo**.2023.Disponível em: MAIO AMARELO - 10 anos do Movimento que salva vidas! o tema central: NO TRÂNSITO, ESCOLHA A VIDA! Até maio! - CENTRO INTERSETORIAL DE PREVENÇÃO DE ACIDENTES DE TRÂNSITO NO PARANÁ em CAMPANHA PERMANENTE NA EDUCAÇÃO NO TRÂNSITO.. (cedetran.org). Acesso em: 20 abr. 2023.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. São Paulo: Papirus,17ª edição, 2009. Disponível em: (14) Educação Matemática Da Teoria à Prática UBIRATAN D'AMBROSIO | Gustavo Henrique Oliveira - Academia.edu. Acesso em: 04 abr. 2023.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 6ª edição, 2019.

DALTO, Jader Otavio; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença?. **Scielo.** p. 01-13, 2009. Disponível em: SciELO - Brasil - Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença? Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença?. Acesso em: 02 abr. 2023.

DAVIS, Elizabeth A.; KRAJCIK, Joseph S. Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. Educational Researcher. **Sage Journals**. n. 3, v. 34, p. 3-14, 2005.

Disponível em: Designing Educative Curriculum Materials to Promote Teacher Learning - Elizabeth A. Davis, Joseph S. Krajcik, 2005 (sagepub.com). Acesso em: 15 maio 2023.

DÖRR, Raquel Carneiro. A Aprendizagem Dialógica como Estratégia Alternativa para Aulas de Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**. v. 14, n. 34, p. 1-17, 2021. Disponível em: A Aprendizagem Dialógica como Estratégia Alternativa para Aulas de Matemática | Perspectivas da Educação Matemática (ufms.br) . Acesso em: 18 jun. 2023.

DÖRR, Raquel Carneiro; NEVES, Regina da Silva Pina; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória. **Perspectivas da Educação Matemática.** v.16, n.42, p. 1-27, 2023. Disponível em: Vista do Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória (ufms.br) . Acesso em: 06 out. 2023.

DÖRR, Raquel Carneiro; CERQUEIRA, Elisângela Fernandes; FREITAS, Marcio Lucas de. Análise Combinatória na perspectiva do ensino exploratório. In: XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática,2023, Lima, Peru**. Anais** […] 2023, Lima, Peru, v.2, p.52,58.

ĎURIŠ, Viliam; PAVLOVIČOVÁ, Gabriela; GONDA, Dalibor; TIRPÁKOVÁ, Anna. "Teaching Combinatorial Principles Using Relations through the Placemat Method". **Mathematics** n. 15, v.9, 2021. Disponível em: Mathematics | Free Full-Text | Teaching Combinatorial Principles Using Relations through the Placemat Method (mdpi.com) Acesso em: 15 set 2023.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas –SP: UNICAMP, 2004, 844 p. Disponível em: Introdução à história da matemática howard eves - [PDF Document] (vdocuments.pub). Acesso em: 20 ago. 2023.

FEITOSA, Francisco Eteval da Silva; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Uma Investigação Didático-Pedagógica no Âmbito da Aprendizagem Cooperativa. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.** v.16, p.01-22. 2021. Disponível em: Vista do Uma investigação didático-pedagógica no âmbito da aprendizagem cooperativa (ufsc.br). Acesso em:10 jul.2023.

FERNANDES, Alessandra dos Santos, **Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da Metodologia de Polya.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro tecnológico, de Ciências Exatas e Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau. 2021. Disponível em: Resolução de problemas olímpicos envolvendo análise combinatória e probabilidade através da Metodologia de Polya (ufsc.br). Acesso em: 23 maio 2023.

FERREIRA, P. E. A..; BURIASCO, R. L. C. de. Análise da Produção Escrita em Matemática - um recurso à Avaliação como Prática de Investigação. **Revista de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 19, p. 01-15, 2022. DOI:10.37001/remat25269062v19id659. Disponível em: Análise da Produção Escrita em Matemática - um recurso à Avaliação como Prática de Investigação | Revista de Educação Matemática (revistasbemsp.com.br). Acesso em: 25 jun. 2023.

FILHO, Alcides Alves de Souza; CASSOL, Atenuza Pires; AMORIM, Antonio. Juvenilização da EJA e as implicações no processo de escolarização. **Scielo.** p.01-20, 2021. Disponível em: SciELO - Brasil - Juvenilização da EJA e as implicações no processo de escolarização Juvenilização da EJA e as implicações no processo de escolarização. Acesso em: 11 abr. 2023.

FONSECA, Jussara Aparecida da. **Análise Combinatória na Educação de Jovens e Adultos: Uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas.** 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.2012. Disponível em: 000874165.pdf (ufrgs.br) . Acesso em: 20 ago. 2023.

FREIRE, Paulo. **Política e Educação**. 5ª ed. São Paulo: Cortez, 2001.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 47ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2013.

GARNICA, A. V. M. **História Oral e educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
GUERREIRO, A.; FERREIRA, R. S. T.; MENEZES, L.; MARTINHO, M. H. Comunicação na sala de aula: a perspectiva do ensino exploratório da Matemática. **Revista Zetetiké**, n. 44, v. 23, p. 279-295, 2015. Disponível em: Universidade do Minho: Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática (uminho.pt). Acesso em: 12 maio 2023.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática ciência e aplicação, 2º ano do Ensino Médio.** 6ª edição. Livro do professor. São Paulo: Saraiva, 2017, 416 p.

LOSANO, Leticia; FIORENTINI, Dario. A constituição identitária de professores de matemática no contexto dos mestrados profissionais. **Educação em Revista**. Belo Horizonte, v.34, p.01-26. 2018. Disponível em: 1896e51883fadab2405c52085d5c241962a8.pdf (semanticscholar.org).Acesso em: 20 abr. 2023.

LIMA, Ewellen Tenório de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinatória, Probabilidade e suas articulações em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental**. Scielo**. p.01-29, 2022. Disponível em: scielo.br/j/bolema/a/84X6mfyJHcxMQBdh4krsLbb/?format=pdf. Acesso em: 17 abr. 2023.

MAINALI, Bhesh. Representation in teaching and learning mathematics. **International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)**, n.1, v.9, p.1-21. 2021. Disponível em: https://doi.org/10.46328/ijemst.1111. Acesso em: 27 maio 2023.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios.** - 11ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2020, 326 p.

MUNIZ, Cristiano Alberto. O professor de matemática pesquisador. **Cadernos de Teoria e Prática de Matemática do GESTAR de 5ª a 8ª**. MEC- Brasília, v. 3, n.1, p. 198-205, 2008. Disponível em: untitled (mec.gov.br) . Acesso em: 20 abr. 2023.

NEEDHAM, Joseph. **Science and Civilisation in China**. London: Cambridge University Press. v. 3,1959, 38 p. Disponível em: 05216326 (cambridge.org). Acesso em: 24 abr. 2023.

NELSON, Barbara Scott. Constructing Facilitative Teaching. In: WOOD, Terry; NELSON, Barbara Scott; WARFIELD, Janet E. **Beyond Classical Pedagogy: Teaching Elementary School Mathematics.** 1ª edição. New York: Routledge p. 251–273, 2001. Disponível em: Beyond Classical Pedagogy | Teaching Elementary School Mathematics | T (taylorfrancis.com). Acesso em: 26 jul.2023.

OINHAS, Marcos Adriano Sopeletto; ZANON, Thiarla Xavier Dal-Cin. Revisão sistemática de Dissertações do PROFMAT: um diálogo entre combinatória e tecnologias digitais. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.**v.16, p.01-21, 2021. Disponível em: Revisão sistemática de Dissertações do PROFMAT: um diálogo entre combinatória e tecnologias digitais | Revista Eletrônica de Educação Matemática (ufsc.br). Acesso em: 14 abril 2023. Acesso em 02 jun.2023.

OLIARSKI, Paula Valdineia; FILLOS, Leoni Malinoski. Ensino de Matemática na EJA: Percepções e Perspectivas dos Estudantes do Ensino Médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática.** p.01-12, 2016. Disponível em: Microsoft Word - 7229_3520_ID.doc (sbem.com.br). Acesso em: 12 jul. 2023.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em Matemática. **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa, p. 11-34, 2005.

______, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; BRANCO, Neusa. **Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática.** Lisboa, p.01-20, 2012.

______, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. **PráticasProfissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa, p. 13-27, 2014.

RABELO, Mauro Luiz. **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro.** 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013, 258 p.

_______, Mauro Luiz. **Perspectivas, tendências e desafios do processo de avaliação- aula1 e 2- Educação de Jovens e Adultos**. 73 slides. pen drive. 2023.

RAMOS, Elenita Eliete de Lima. **Propondo práticas e desafiando certezas: um estudo em turma do PROEJA numa perspectiva de Educação Matemática crítica.** 2011. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. Florianópolis, SC, 2011.Disponível em: PROPONDO PRÁTICAS E DESAFIANDO CERTEZAS: UM ESTUDO EM TURMA DO PROEJA NUMA PERSPECTIVA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA (ufsc.br). Acesso em: 13 jun. 2023.

SABO, Ricardo Dezso. **Análise de livros didáticos do Ensino Médio: um estudo dos conteúdos referentes à Combinatória.** 2007. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Centro de Pós-graduação, Pesquisa e Extensão, Centro Universitário Fundação Santo André, 2007. Disponível em: https://www.pucsp.br/~cileda/Monografia_RicardoSabo.pdf. Acesso em: 28 mar. 2023.

SALGADO, Maria Aparecida de Jesus. **A comunicação em um cenário para investigação: desafios e aprendizagens docentes**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Escolar), Faculdade de Educação, Universidade Estadual **de** Campinas, São Paulo. 2021. Disponível em: Terminal RI - SophiA Biblioteca Web (unicamp.br). Acesso em: 17 abril 2023.

SANTOS, Danilo Pereira dos. **Ensino Exploratório e a aprendizagem dos Números Inteiros e Racionais: Experiência na Educação de Jovens e Adultos (EJA).** 2023**.** Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Distrito Federal. 2023.

SCHMITT, Rozimere Bernadete Guesser **O jogo escova: uma estratégia para as aulas de matemática no ensino médio.** 2021. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática).Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,Florianópolis,2021 Disponível em: O jogo escova: uma estratégia para as aulas de matemática no ensino médio (ufsc.br).Acesso em: 19 abr. 2023.

SEEDF- Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal. **Currículo em Movimento. Educação de Jovens e Adultos.** Distrito Federal, 2021.Disponível em: cirriculo-movimento-eja.pdf (educacao.df.gov.br).Acesso em: 19 abr.2023.

SERRAZINA, Lurdes. Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. 2017. In: **A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula**. Lisboa: APM, 2017, p. 9-32. Disponível em: (PDF) Planificação do ensino e aprendizagem da Matemática 1 Lurdes Serrazina (researchgate.net). Acesso em: 21 out. 2023.

SHIFTER, D. Learning to See the Invisible: What Skills and Knowledge are Needed to Engage With Students' Mathematical Ideas? In: WOOD, Terry; NELSON, Barbara Scott; WARFIELD, Janet E. **Beyond Classical Pedagogy: Teaching Elementary School Mathematics.** 1ª edição. New York: Routledge p. 109–134, 2001. Disponível em: Learning to See the Invisible | 10 | What Skills and Knowledge are Nee (taylorfrancis.com). Acesso em: 10 jun. 2023.

SILVA, Daniela Baldan da; RIBEIRO, Alessandro Jacques; AGUIAR, Marcia. Desvelando caminhos para a aprendizagem profissional do professor que ensina matemática nos anos iniciais: análise das ações de uma formadora. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.24, n. 1, p. 418-455, 2022. Disponível em: BaldandaSilvaRibeiroAguiar_EMP_2022.pdf . Acesso em: 06 out. 2023.

SILVA, Elion Souza da; ANDRADE, Fabiana Chagas de; SANTOS, Jefferson Araújo dos. Explorando Uma Lista De Transmissão Para Refletir Sobre O Conhecimento Matemático Para O Ensino De Análise Combinatória. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.** n.2, v.13, p. 210-227. 2018. Disponível em: Explorando uma lista de transmissão para refletir sobre o conhecimento matemático para o ensino de análise combinatória | Revista Eletrônica de Educação Matemática (ufsc.br) . Acesso em 22 abr. 2023.

SILVA, Évelyn Helena Nunes. **O Serviço de Atendimento Matemático à Comunidade (SAMAC) do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.** 2017. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Distrito Federal. 2017.

SILVEIRA, Adriano Alves da; ANDRADE, Silvanio de. Proposição de problema de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática-REMat.** Publicação Contínua. v.19, p.01-23. 2022. Disponível em: Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula | Revista de Educação Matemática (revistasbemsp.com.br). Acesso em: 23 ago.2023.

SILVEIRA, Adriano Alves; ANDRADE, Silvanio de. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática-REMat**. Publicação Contínua. v.17, p.01-21. 2020. Disponível em: Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio | Revista de Educação Matemática (revistasbemsp.com.br). Acesso em: 24 ago. 2023.

SKOVSMOSE. **Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE. Ole. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, n. 14, p. 66 – 91, 2000. Disponível em: Cenários para Investigação | Bolema - Boletim de Educação Matemática (unesp.br). Acesso em: 21 ago. 2023.

STEIN, Mary Kay; ENGLE, Randi A.; SMITH, Margaret S.; HUGLES, Elizabeth k. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical thinking and learning**. n.10, p.313-340, 2008. Disponível em: Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell: Mathematical Thinking and Learning: Vol 10, No 4 (tandfonline.com). Acesso 12 jun. 2023.

SWAN, Malcom. Improving the design and balance of mathematical assessment. In Mogens Niss (Ed) **ICMI Study Investigations into Assessment in Mathematics Education**, v.2, p.195 - 216,1993. Disponível em: Improving the Design and Balance of Mathematical Assessment | SpringerLink . Acesso em: 06 out.2023.

TEIXEIRA, Paula Jorge. Jogo "Grelha Retangular 3x4": uma proposta para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, p.01-21, v. 16. 2021. Disponível em: Jogo "Grelha Retangular 3 x 4": uma proposta para o desenvolvimento do raciocínio combinatório | Revista Eletrônica de Educação Matemática (ufsc.br). Acesso em: 08 jun. 2023.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Pernambuco. **Anais**[...] Pernambuco: SBEM,2004 p.01-13. online. Disponível em: A ANÁLISE COMBINATÓRIA (sbem.com.br). Acesso em: 01 jul. 2023.

WIELEITNER, H. **Historia de la Matematica**. Barcelona: Labor. 1932.134 p.

APÊNDICE A - Sistematização da revisão de literatura

Nº	Referência	País	Referencial Teórico	Objetivos	Métodos	Resultados
1	SILVA, ANDRADE, SANTOS (2018)	Brasil	SHULMAN (1986) & SHULMAN (1987)	Analisar as resoluções e discutir as condutas segundo aspectos conceituais, didáticos e pedagógicos de um problema disparador – O Problema dos Diferentes Caminhos a diferentes professores de Matemática.	Consistiu no envio de um problema disparador –O Problema dos Diferentes Caminhos a diferentes professores de Matemática, através de uma lista de transmissão do aplicativo WhatsApp. Os sujeitos deveriam refletir sobre estratégias de resolução utilizadas para estudantes, em sala de aula. A solução foi enviada por meio de mensagem de texto, fotos das resoluções e vídeo (utilizando o geoplano e explicando oralmente sua solução)	Os professores mobilizaram os diferentes aspectos do Conhecimento Matemático para o Ensino e ao simular a resolução do referido problema para os alunos, também puderam redimensionar (e refletir sobre) seus saberes, de modo a evidenciar que eles aprendem e teorizam durante a prática docente. Os professores evidenciaram riqueza de saberes, e, mesmo no professor que não chegou na resposta correta, foi possível identificar alguns dos aspectos e especificidades do Conhecimento Matemático para o Ensino. Além disso, verificou-se que a ferramenta metodológica utilizada para levantamento dos dados, a lista de transmissão do WhatsApp, mostrou-se eficaz.
2	SILVEIRA, ANDRADE (2020)	Brasil	ANDRADE (1998) e ANDRADE (2017)	Analisar como uma abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de problemas pode	Por meio da exploração, resolução e proposição de problemas, estudantes do 2º ano do Ensino Médio, no turno matutino da Escola Estadual do Ensino	Possibilitou aos alunos desempenhar o papel de sujeito principal da aprendizagem, pois expuseram suas ideias e reflexões acerca do

			ONUCHIC, (1999)	potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.	Fundamental e Médio Agenor Clemente dos Santos, na cidade de Alagoinha-PB, trabalharam em grupos com problemas de Análise Combinatória. Durante a resolução, o professor-mediador fazia a mediação de modo a colocar o estudante como o foco central do trabalho.	problema, criando um cenário com sujeitos mais autônomos e entendedores do seu próprio fazer. O processo de mediação fez o professor-pesquisador perceber o momento da aprendizagem dos estudantes, de modo a propor questões a partir das ideias levantadas por eles e a evitar o fornecimento de respostas.
3	ALCÂNTARA, DANTAS, PARÁ (2020)	Brasil	POLYA (1945) & BORDIN (2011) & PCN (1998)	Apresentar um jogo denominado Jogo da Lanchonete, de caráter inédito, que introduz e compara os conceitos de princípio aditivo e princípio multiplicativo da Combinatória e, ao mesmo tempo, aborda questões referentes ao desperdício de materiais descartáveis, promovendo uma reflexão crítica dos alunos a respeito da sustentabilidade.	Propõe um jogo sobre Análise Combinatória de modo que: os jogadores são divididos em dois grupos; em cada rodada, um grupo sorteia uma carta-pergunta e lê a questão para o grupo adversário; o grupo desafiado tenta resolver a questão, caso acerte, deverá andar a quantidade de casas descritas na carta, caso contrário, nada ocorre; o grupo desafiador lê a resolução da pergunta em voz alta, para todos compartilharem o aprendizado; vence o jogo o grupo que chegar à casa “FIM” primeiro.	Devido à dificuldade existente no ensino de combinatória, o jogo pode ser utilizado como um recurso didático que visa proporcionar uma nova visão sobre o ensino da disciplina, de modo a auxiliar o desenvolvimento de estudantes questionadores e críticos, principalmente, frente a questões de conservação ambiental. O jogo foi aplicado em uma turma do curso de se Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF) e duas turmas do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Adolpho Bloch (FAETEC - RJ), o que permitiu uma revisão e análise do material didático em questão. O fator

						lúdico da atividade foi apontado como fundamental para atrair a atenção dos alunos.
4	BASTOS, LOPES, VICTER (2020)	Brasil	D'AMBROSIO (1993) & VAN DE WALLE (2006)	Trazer reflexões para a aprendizagem da Análise Combinatória, em uma proposta que utilize como ferramenta didática à história da Matemática e a resolução de problemas.	Desenvolvido em três etapas junto a uma turma do ensino médio técnico de uma instituição pública Federal do Município de Nilópolis /Estado do Rio de Janeiro, com 31 alunos. A primeira etapa da pesquisa foi desenvolvida através do tema "O que é Análise Combinatória?" A segunda etapa de modo a destacar conceitos de Princípio Multiplicativo, Arranjo e Combinação, por meio da leitura de texto, resolução de problemas e pesquisa em livros sobre Análise Combinatória. A terceira etapa, foi desenvolvida por meio de acontecimentos matemáticos europeus a partir do séc. XVII.	Os resultados mostraram que é possível acreditar que a valorização da história para o ensino da Matemática não é uma moda transitória no discurso educacional, mas deve ser adotada como prática permanente, principalmente integrada à resolução de problemas. E ainda que, tanto a história quanto a resolução de problemas favoreceram uma postura dialógica e uma postura epistemológica. É possível ensinar e aprender Análise Combinatória de modo mais interessante quando se desenvolve uma proposta baseada na história da Matemática, integrada com a resolução de problemas. Concluiu-se ainda que a história da Matemática favorece a motivação, ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade, um instrumento que pode promover a aprendizagem matemática. E a resolução de problemas concentra a atenção dos

						estudantes, possibilita um ponto de partida nas aulas e envolve os estudantes que utilizam essa abordagem.
5	FERNANDES (2021)	Brasil	POLYA (2006) & BNCC (2017)	Buscar estratégias, principalmente no que se refere a interpretação de problemas e linguagem matemática, e uma melhor compreensão de conceitos envolvendo Análise Combinatória e probabilidade.	As quatro etapas para resolução de problemas da Metodologia de George Polya (Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto) foram utilizadas no desenvolvimento de problemas olímpicos, selecionados da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP desde 2005.	A ideia inicial era selecionar alguns dos problemas e aplicar em algumas turmas. Porém devido a Pandemia isso não foi possível na escola. Contudo a dissertação serve como um incentivo a novas pesquisas acerca de metodologias de ensino de Matemática, não só sobre Análise Combinatória e Probabilidade, mas também sobre outros conceitos da Matemática. Desse modo a proposta pode ser aproveitada, de modo a buscar mais qualidade e motivação para o ensino da Matemática.
6	TEIXEIRA (2021)	Brasil	PCN (1997) & COBB, CONFREY, DISESSA, LEHRER, SCHAUBLE (2003)	Estimular a exploração de conceitos matemáticos associados com o pensamento aditivo, o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório, por meio do jogo da grelha retangular 3x4.	Pesquisa bibliográfica realizada com o intuito de dimensionar a importância da proposição e a criação de um jogo que contribua com o processo de ensino aprendizagem da Matemática, para estudantes e professores. Para desenvolver O jogo da grelha retangular 3x4 é indicado a metodologia Design Experiment, uma abordagem de pesquisa	A diversão, apesar de ser importante para o desenrolar do jogo, não pode ser o que motiva o professor para propor um jogo, é preciso manter o componente didático, o pensar, o decidir. Os estudantes devem compartilhar estratégias pessoais utilizadas para vencer o jogo pois assim criam uma atmosfera agradável de trocas, reflexões e questionamentos

					educacional que visa desenvolver teorias sobre o processo de aprendizagem e os meios para apoiar essa aprendizagem.	de modo a ampliar conceitos matemáticos subjacentes ao jogo e presentes no desenrolar dele. O jogo também possibilita o exercício do raciocínio probabilístico; as reflexões para a tomada de decisões; o realizar testes de hipóteses que são levantadas durante as discussões coletivas; a ampliação do debate acerca da descoberta e ampliação de estratégias de jogo que visam melhorar a compreensão e a apropriação de conceitos e hábitos. E ainda favorece o desenvolvimento do processo de argumentação e o trabalho do professor em relação à apresentação e o desenvolvimento de ferramentas matemáticas concernentes ao ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático.
7	CAMPOS, IGLIORI (2021)	Brasil	SILVA, PESSOA (2015)	Apresentar os resultados de um levantamento bibliográfico de teses e dissertações defendidas no Brasil de 2015 a 2019 no âmbito do ensino e da aprendizagem da combinatória visando a identificar as	Estudo bibliográfico de caráter inventariante e descritivo de modo que o levantamento das produções foi realizado por meio de catálogos online que utilizou como fonte de pesquisa o catálogo de teses e dissertações da Coordenação de	Produções com foco em propostas de ensino e/ou sequência didáticas para o ensino da combinatória foram predominantes no estudo bibliográfico. De modo geral, foram baseadas na metodologia da resolução de problemas e no uso do princípio multiplicativo como forma de resolução e

				perspectivas investigativas dessas produções.	Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior –CAPES2. As produções foram subdivididas por ano, número de dissertações (no mestrado profissional e no mestrado acadêmico), número de teses e número de produções. Posteriormente foram analisadas com base em cinco critérios: propostas de ensino e/ou sequências didáticas para a Análise Combinatória; documentos curriculares e livros didáticos em que a Análise Combinatória está presente; formação de professores; recursos para o ensino da Análise Combinatória; estratégias de resolução de problemas combinatórios.	tinham como público-alvo alunos do 2º ano do ensino médio. Produções sobre a Análise Combinatória presente em livros e documentos oficiais apareceram no levantamento, contudo poderiam ser investigados outros aspectos como: de que modo o professor articula o currículo prescrito, os livros didáticos e outros recursos no preparo e no desenvolvimento das aulas sobre combinatória? Quais os impactos das orientações curriculares para o ensino da combinatória na formação do raciocínio combinatório dos alunos? As produções que se ocuparam de investigar o professor –conhecimento e prática –evidenciaram que as dificuldades enfrentadas por licenciandos e docentes com esse tema esbarram na formação. Como as propostas de intervenção foram apresentados resultados do uso de jogos, de aplicativos e de materiais concretos. Foi observada uma pesquisa que investigava as estratégias de resolução de

						problemas combinatórios proveniente de um mestrado acadêmico.
8	OINHAS, ZANON (2021)	Brasil	ROMANOWSKI, ENS (2006) & BIEMBENGUT (2007) & TEIXEIRA, BRANDÃO (2003)	Apresentar uma série de análises decorrentes de uma revisão bibliográfica sistemática de dissertações do PROFMAT produzidas no período de 2016 a 2020.	Revisão bibliográfica estruturada em três passos: *Definição das questões norteadoras da pesquisa para levantar os descritores a fim de identificar as dissertações e selecioná-las no site do PROFMAT. *Estudo das publicações, para eleger e registrar informações acerca do tema, motivações dos pesquisadores, objetivo(s), questão(ões) norteadora(s), metodologia incluindo os instrumentos utilizados e resultados encontrados por eles. *Apresentação de sínteses acerca dos conhecimentos evidenciados.	Quatro autores entenderam e trabalharam a resolução de problemas como o ato de resolver exercícios com predominância do GeoGebra como recurso tecnológico nas produções dos três primeiros. Cinco pesquisadores entenderam a resolução de problemas como uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática com a criação de dois programas educacionais (CombEsq e Playmath), o uso da lousa digital e a presença do Excel. De modo geral, constatou-se que a resolução de problemas de Análise Combinatória na educação básica mediada pelas tecnologias digitais tem sido pouco abordada e trabalhada em dissertações do PROFMAT. Contudo, todos os pesquisadores demonstraram interesse com as práticas de sala de aula, na medida em que as nove dissertações analisadas apresentaram um produto

						destinado ao uso no ambiente escolar, para iniciar ou complementar o ensino de Análise Combinatória.
9	SCHMITT (2021)	Brasil	BNCC (2018) & PCN (2000) & PCSC (2014)	Adaptar o jogo Escova para o uso didático em sala de aula, colaborando com o cálculo mental de números naturais, suas propriedades operatórias, problemas de contagem e de probabilidades condicionais.	Apresenta uma sequência didática para aplicação do jogo e uma proposta de aplicação do jogo Escova no Ensino Médio como ferramenta capaz de instigar os estudantes a pensar, organizar as ideias, bem como questionar o que pode acontecer durante o jogo.	Foi possível mostrar conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade por meio de situações numéricas que apareceram no jogo. E ainda trazer contribuições para a melhoria do ensino da Matemática, tais como o desenvolvimento de habilidades de tomada de decisão, rapidez do cálculo mental, organização do pensamento, uso de estratégias, melhora da concentração e da atenção.
10	SILVEIRA, ANDRADE (2022)	Brasil	ANDRADE (2017) & JURADO (2016)	Analisar como uma abordagem em sala de aula via Proposição de Problemas pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.	Uma turma do 2º ano do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Agenor Clemente dos Santos, localizada na cidade de Alagoinha-PB, dividida em grupos, foram desafiados a propor problemas de Análise Combinatória, a partir das palavras baralho; meninas e meninos; cidade; senhas; letras; livro; fila; cadeiras e futsal, sorteadas em sala de aula.	Os alunos não apresentaram dificuldades em resolver problemas formulados por eles, possibilitando assim um avanço nos diferentes tipos de agrupamentos de Análise Combinatória. Foram capazes de relacionar uma ideia matemática com diferentes contextos, de modo a perceber relações entre a Matemática e a realidade social deles.

11	LIMA, BORBA (2022)	Brasil	VERGNAUD (1996)	Discutir como está proposto o trabalho referente à Combinatória e à Probabilidade e como, são evidenciadas essas articulações entre essas áreas nas coleções de livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental aprovadas pelo PNLD 2017.	Foram analisados 44 volumes que constituem onze coleções de livros didáticos de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental aprovadas pelo PNLD 2017. Evidenciou-se 1172 problemas de natureza combinatória ou probabilística os quais foram analisados de acordo com: tipo de problema; representações simbólicas (apresentadas e solicitadas) e natureza da articulação (representação simbólica ou contexto)	Não há uma distribuição equilibrada de problemas combinatórios e probabilísticos, pois apenas 15,4% articulam esses conceitos nas coleções analisadas. Há evidências nos problemas analisados de relações entre a Combinatória e a Probabilidade de modo que exploram tanto articulações por meio de representações simbólicas quanto da utilização de contextos típicos.
12	ĎURIŠ PAVLOVIČOVÁ GONDA TIRPÁKOVÁ (2021)	Eslováquia	MAMONA-DOWNS e DOWNS (2004) & KAPUR (1970)	Examinar as estruturas combinatórias básicas e apresenta seu uso e aprendizagem utilizando relações através do método Placemat no processo de ensino.	A experiência foi realizada repetidamente entre crianças na escola secundária selecionada em Žilina, República Eslovaca, durante quatro anos letivos consecutivos, de 2016/2017 a 2019/2020. Um total de 104 alunos participaram do experimento. Os alunos foram divididos em grupo experimental, que escolheu participar do método de Placemat e grupo controle que escolheu participar da abordagem clássica. Os estudantes responderam	Com base na representação gráfica dos resultados de ambos os testes, foi possível verificar que a nota dos estudantes que participaram do método de Placemat foram maiores em relação aos estudantes que não participaram. Para os autores este fato indica uma maior probabilidade do aprendizado de Análise Combinatória por meio da aprendizagem colaborativa.

					testes para verificar a equivalência entre os grupos e o aprendizado do raciocínio combinatório. O método de Placemat consistiu em Aprendizagem colaborativa. Os estudantes receberam o material uma semana antes da aula em sala com exemplos e explicações; no dia da aula apresentaram as dúvidas que foram respondidas em forma de discussão sob a supervisão da professora.	

Fonte: Pesquisa online (2023)

APÊNDICE B – Tarefa 1 -Avaliação Diagnóstica

Avaliação Diagnóstica
Nome:____ Turma:________
Turno:_____________________
Idade:___________ Profissão:___________________________________

1. Os pais de uma criança resolveram fazer a festa de aniversário do filho. Para isso, fizeram uma pesquisa sobre o preço e a quantidade de cada tipo de refrigerante, que está representada na seguinte tabela:

Refrigerante	Quantidade (litro)	Preço(R$)
A	0,5	3,38
B	1,0	4,62
C	1,5	5,46
D	2,0	8,40
E	3,0	12,96

Independentemente do tipo e com o objetivo de comprar refrigerante com menor preço por litro, descreva uma estratégia matemática que explique qual o tipo de refrigerante que os pais deverão comprar.

2. Para se deslocar entre duas cidades satélites do Distrito Federal, uma pessoa pode usar o ônibus, o carro particular ou a bicicleta. Faça uma representação gráfica (desenho) que mostre de quantas maneiras ela pode escolher os meios de transporte se não pretende usar na volta o mesmo transporte utilizado na ida.

3. Pense em uma situação cotidiana que você utilizou operações matemáticas para resolvê-la. Com base nessa situação, construa um exercício matemático, que envolva no mínimo a operação de multiplicação e apresente a solução.

APÊNDICE C –Tarefa 2 “Alimentação Saudável”

Tarefa Matemática 2- Alimentação saudável – Grupo _____ Turma : 3º___

1.Forme grupos de 5 pessoas (3 minutos). Escrevam as respostas a todos os itens

2. Leia o texto (2 minutos)

De acordo com o Guia Alimentar para a população brasileira (2014), a alimentação adequada e saudável é um direito humano básico que envolve a garantia ao acesso permanente e regular, de forma socialmente justa, a uma prática alimentar adequada aos aspectos biológicos e sociais do indivíduo e que deve estar em acordo com as necessidades alimentares especiais.

3. Diálogos e Reflexões (8 minutos)

a) Você sabe que, de acordo com a Constituição da República Federativa do Brasil/88, a alimentação é um direito social do ser humano? Esse direito é exercido por você e por todos os moradores da sua cidade? Por quê?

b) Você acredita que o tipo de alimentação e as preferências alimentares podem ser determinadas pela região onde a pessoa nasceu e onde ela vive? Por quê?

c)Você acredita que ter uma alimentação saudável é importante para o ser humano? Por quê?

d) Na sua opinião existe alguma relação entre alimentação não saudável e obesidade?

e) De acordo com o que você come e suas preferências alimentares, você sabe combinar os alimentos para que sua alimentação seja considerada saudável de acordo com a pirâmide alimentar?

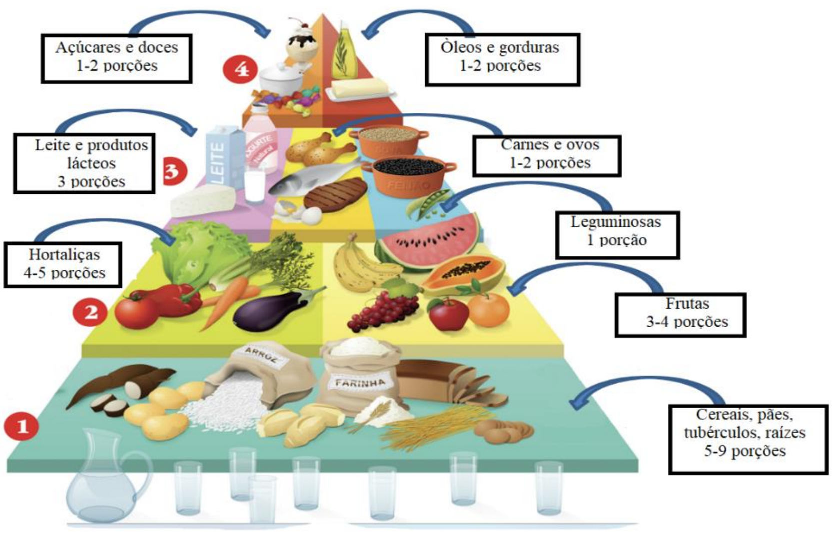


Figura 1 : Pirâmide alimentar adaptada
Fonte: PHILIP,S.T. et al,1996

Agora, faça uma síntese e escreva sobre o que foi discutido em sala sobre esse item 3.

____
____
____
____

4.Com base na pirâmide alimentar, apresentada na questão 3, é possível fazer várias combinações de alimentos para uma alimentação ser considerada saudável a partir da figura 1, preencha a tabela abaixo de acordo com a quantidade de figuras desenhadas na pirâmide, para representar o grupo alimentar e a quantidade mínima de porções. (8 minutos)

Quantidade de figuras que representam alimentos diferentes na pirâmide	Grupo Alimentar	Quantidade mínima de porções
	Açucares e doces	
	Leite e produtos lácteos	
	Hortaliças	
	Óleos e gorduras	
	Carnes e ovos	
	Leguminosas	
	Frutas	
	Cereais,pães, tubérculos e raízes	

5. Analise, discuta com seu grupo a seguinte situação **e escreva as ideias no papel.** (2 minutos)

Uma pessoa comprou 4 saquinhos de balas de frutas com sabores diferentes, sendo que cada bala possue em média 36 kcal por unidade . Ela pretende ingerir somente as porções mínimas da pirâmide alimentar e, ao fazer uma pesquisa na internet, descobriu que uma porção do grupo alimentar que as balas pertencem corresponde a 110 kcal .

6. De acordo com a situação apresentada no item 5 e com base na pirâmide alimentar, explique os seguintes questionamentos: (10 minutos)

a) A qual grupo alimentar as balas pertencem? Justifique.

b) Qual a quantidade de porções mínimas do grupo alimentar encontrado no item a? Justifique.

c) Quantas kcal, corresponde a quantidade de porções encontrada no item b ? Justifique.

d) Qual a quantidade máxima de balas que ela poderá consumir por dia, sem ultrapassar a quantidade de porções mínimas? Justifique.

7. Distribuição de 4 saquinhos de balas com sabores diferentes, para cada grupo. (2 minutos)

8. Simule com as balas recebidas as maneiras possíveis da pessoa consumir as balas, em relação aos sabores. Organize essa simulação na mesa e tire uma fotografia com o celular. (10 minutos)

9. Respeitadas as restrições do problema, elabore uma estratégia matemática que denota o número de diferentes maneiras possíveis de a pessoa consumir a quantidade máxima de balas com sabores diferentes sem ultrapassar a porção mínima diária do grupo alimentar que as balas pertencem ? Registre (escreva) essa estratégia. (15 minutos)

10. Discussão com os estudantes sobre a estratégia. (10 minutos)

11. Conclusão (10 minutos)

Nome dos componentes do grupo
1.____
2.____
3.____
4.____
5.____
6.____

APÊNDICE D – Tarefa 3 “Viagem de Carro”

Tarefa Matemática 3- Viagem de Carro – Grupo _____ Turma : 3º___

1. Formem grupos de 6 pessoas. (5 minutos)

2. Leiam o seguinte texto: (2 minutos)

Em 2023, o Movimento Maio Amarelo comemora 10 anos e nesse ano, novamente a CNT (Confederação Nacional de Transporte) em parceria com o Observatório Nacional de Segurança Viária está patrocinando a campanha. Já o Governo Federal, por intermédio dos Ministérios do Transportes e das Cidades apoiarão a campanha que traz como tema central: “No trânsito, escolha a vida”, definido na Resolução 980/2022.

A cada ano, trazemos um tema para reflexão durante o mês de maio. Nesses 10 anos, muitos foram as mensagens, mas o que elas têm em comum é lembrar sempre que isso é um grande problema social, mas a solução está em cada um de nós. (DETRAN, 2023)

3. Alguém de vocês do grupo, já sofreu acidente de trânsito? (3 minutos)

4. Vocês consideram importante respeitar as leis e o código de trânsito? Por quê? (3 minutos)

5. Analise em grupo a seguinte situação-problema: (2 minutos)

Uma família irá viajar daqui a quatro semanas em um carro de sete lugares, sendo dois bancos dianteiros - um deles, o do motorista - e cinco bancos traseiros. Na família há um pai e uma mãe, ambos habilitados a dirigir, além de quatro filhos que, atualmente, tem asseguintes idades: 7, 13, 17 e 21 anos. Nesta família, assim que completam 18 anos, os filhos iniciam o curso de direção na autoescola, e após 3 meses estão aptos a dirigir. Sabe-se ainda que os dois filhos mais velhos farão aniversário na semana anterior à viagem e que o banco dianteiro destinado ao passageiro deve, necessariamente, estar ocupado.

6. Com os integrantes do seu grupo e utilizando as cadeiras da sala, simule maneiras possíveis de a família se acomodar no carro para a viagem. (10 minutos)

7. De acordo com a situação-problema e com base no código de trânsito, explique os seguintes questionamentos. (10 minutos)

a) Quais os integrantes da família estarão aptos a ocupar o lugar do motorista no dia da viagem?

b) Quais os integrantes da família estarão aptos a ocupar o banco dianteiro de passageiro?

c) O carro pode ter o banco da frente vazio?

8. Respeitadas as restrições do problema, elabore uma estratégia matemática que denota o número de maneiras possíveis de a família se acomodar no carro para a viagem. (25 minutos)

Grupo:________
Nome:____
____
____
____
____

Uma família irá viajar daqui a quatro semanas em um carro de sete lugares, sendo dois bancos dianteiros - um deles, o do motorista - e cinco bancos traseiros. Na família há um pai e uma mãe, ambos habilitados a dirigir, além de quatro filhos que, atualmente, tem asseguintes idades: 7, 13, 17 e 21 anos. Nesta família, assim que completam 18 anos, os filhos iniciam o curso de direção na autoescola, e após 3 meses estão aptos a dirigir. Sabe-se ainda que os dois filhos mais velhos farão aniversário na semana anterior à viagem e que o banco dianteiro destinado ao passageiro deve, necessariamente, estar ocupado.

Respeitadas as restrições do problema, elabore e explique uma estratégia matemática que denota o número de maneiras possíveis de a família se acomodar no carro para a viagem.

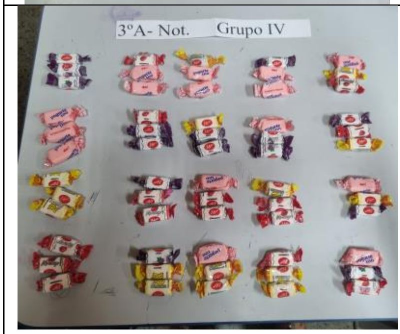
9. Discussão com os estudantes sobre as estratégias (10 minutos)
10.Conclusão (10 minutos)

APÊNDICE E – Simulações da tarefa 2 -Vespertino

Simulações do vespertino			
			
			

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

APÊNDICE F – Simulações da tarefa 2 - Noturno

<table>
<tr><th colspan="3">Simulações do noturno</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2023)