



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Dissertação de Mestrado

Relação entre variância e amplitude de retornos financeiros

por

Pedro Carvalho Brom

Brasília, 6 de fevereiro de 2023

Relação entre variância e amplitude de retornos financeiros

por

Pedro Carvalho Brom

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Brasília, 6 de fevereiro de 2023

Texto aprovado por:

Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Orientador, EST/UnB

Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca

Avaliadora, MAT/IFG

Prof. Dr. Roberto Vila Gabriel

Avaliador, EST/UNB

Somos o que fazemos repetidamente. Por isso, o mérito não está na ação e sim no hábito.

(Aristóteles)

Para minha família.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos aos professores do PPGEST/UnB, em especial, ao Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita, com sua generosidade, compartilhando seus conhecimentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho, que está organizado em forma de coletânea de três artigos, discorre sobre a questão do truncamento da distribuição de dados passados, reconciliando essa limitação com a ocorrência de eventos futuros ilimitados. Mostramos que isso é possível mediante aplicação de uma lei de potência entre o comprimento do truncamento (ℓ) e o desvio padrão dos dados (σ) na forma $\ell = \zeta\sigma^\beta$, na qual ζ e β são coeficientes positivos. Essa abordagem é aplicável para uma ampla classe de distribuições simétricas — incluindo os vãos truncados de Lévy —, não sendo necessário especificar a forma exata da função de distribuição de probabilidade dos dados. Além disso, os momentos da distribuição podem variar no tempo. Em particular, a metodologia proposta foi aplicada em dados de retornos financeiros intradiários de taxas de câmbio de diferentes moedas, totalizando mais de 32 milhões de observações. Nesse caso, nosso trabalho propõe um novo tipo de padronização não-gaussiana, na forma $z = r/\sigma^\beta$, no qual r é um retorno financeiro (tipicamente sujeito a *clusters* de volatilidade) e z é o retorno padronizado sem *clusters* de volatilidade.

Palavras-chave: Vão de Lévy truncado, leis de potência, dados financeiros, taxas de câmbio.

Abstract

This work, organized as a collection of three articles, proposes a solution to the truncation problem, reconciling past-bounded information and future-unbounded events. We show that this is possible by applying a power law relating the length of the truncation (ℓ) and the standard deviation of the data (σ) given by $\ell = \zeta\sigma^\beta$, where ζ and β are positive coefficients. This approach is applicable for a wide class of symmetric distributions — including truncated Lévy flights — as it does not require the exact form of the probability distribution function. In addition, distributional moments may vary over time. In particular, we applied the proposed methodology to intraday financial returns of exchange rates for different currencies, totaling more than 32 million observations. In this case, we propose a non-Gaussian standardization in the form $z = r/\sigma^\beta$, where r is a financial return (typically subject to volatility *clusters*) and z is the standardized return without volatility *clusters*.

Keywords: Truncated Lévy flight, Power laws, Financial data, Exchange rates.

Resumo expandido

Apresentação

Este resumo expandido apresenta de forma sintetizada os principais resultados obtidos nesta dissertação. O estudo parte da premissa que as observações passadas são naturalmente limitadas (truncadas), enquanto o futuro é ilimitado. A conexão entre passado e futuro é possível mediante aplicação de uma lei de potência entre o comprimento do truncamento (ℓ) e o desvio padrão dos dados (σ) na forma $\ell = \zeta\sigma^\beta$, na qual ζ e β são coeficientes positivos. Essa abordagem é do tipo *distribution-free*, não sendo necessário especificar a forma exata da função de distribuição populacional. Além disso, seus momentos podem variar no tempo. O método foi aplicado em dados de retornos financeiros intradiários de taxas de câmbio de diferentes moedas, totalizando mais de 32 milhões de observações. Finalmente, propomos uma nova forma de padronização não-gaussiana escrita como $z = r/\sigma^\beta$, em que r é um retorno financeiro (tipicamente sujeito a *clusters* de volatilidade) e z é o retorno padronizado sem *clusters* de volatilidade.

Palavras-chave: Vão de Lévy truncado, leis de potência, dados financeiros, taxas de câmbio.

Introdução

Suponha que X_1, \dots, X_n seja uma amostra aleatória simples extraída de uma distribuição X qualquer. Agora considere para esta amostra a estatística $\lambda = \max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}$. Uma vez que os dados já foram observados, constatamos que $P(|X_i| \leq \ell | \lambda = \ell) = 1$, em que ℓ repre-

representa a amplitude dos valores absolutos dos dados passados. Logo $\ell = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, no qual x_1, \dots, x_n representa os valores realizados desta amostra. Por outro lado, o futuro é incerto e as observações futuras não são limitadas. Nesse caso, a probabilidade de incondicional é dada por

$$P(|X_i| \leq \ell) = \int_0^\ell P(|X_i| \leq \ell | \lambda = l) f_\lambda(l) dl = P(0 < \lambda \leq \ell),$$

em que $f_\lambda(l)$ é a função de densidade de probabilidade que descreve a distribuição dos máximos. Assim, enquanto $P(|X_i| > \ell | \lambda = \ell) = 0$ no passado, se olharmos para o futuro encontramos $P(|X_i| > \ell) > 0$.

Seguindo essa abordagem, o presente trabalho apresenta algumas contribuições adicionais referentes à lei de potência $\ell = \zeta \sigma^\beta$ introduzida por Matsushita et al. (2020), mostrando resultados consistentes com a distribuição dos retornos sobre o valor médio dos preços (caso $0 < \beta < 1$) e a distribuição dos retornos tradicionais (caso $\beta > 1$).

Metodologia

Considere X_t o preço no dia t , com $t \geq 1$ a tempo discreto. Considere que o processo de atualização de preço ocorra sobre o valor esperado no tempo t se defina como

$$X_t = (1 + r_t)m_t,$$

no qual $m_t = E[X_t]$ é (localmente) variável no tempo. A taxa r_t é o retorno sobre o preço médio e é um processo estocástico estacionário de primeira ordem, com média zero variância σ_t^2 , variável no tempo. Note que essa construção é compatível com a hipótese de um processo livre de arbitragem, pois podemos escrever $\nabla \ln X_t = \ln X_t - \ln X_{t-1} = \nabla \ln(1 + r_t) + \nabla \ln m_t \approx r_t + \delta_t$, with $|r_t| \ll 1$ (Matsushita et al., 2020). Desta forma, $\ln X_t$ se comporta como um passeio aleatório com *drift* local, em que o preditor do log-preço seguinte é o log-preço de hoje

mais o termo δ_t .

Como os dados passados são limitados, definimos ℓ_t como uma realização de uma variável aleatória λ_t que descreve as ocorrências dos pontos de corte variando no tempo. Em seguida, estabelecemos um modelo de probabilidade condicional que satisfaz a relação

$$P(|r_t| \leq \lambda_t | \lambda_t = \ell_t) = 1, \quad (1)$$

no qual $r_t = X_t/m_t - 1$. Como estamos lidando com retornos intradiários absolutos, assume-se $0 < \ell_t \ll 1$. Devido ao fato de que ℓ_t é a realização de λ_t refere-se ao passado, pois ℓ_t limita r_t .

Se os dados estiverem sob a lei de potência, $\ell_t = \zeta \sigma_t^\beta$, para todo t , então o retorno $|r_t|$ pode ser padronizado como

$$|Z_t| = \frac{|r_t|}{\sigma_t^\beta} = \frac{|X_t/m_t - 1|}{\sigma_t^\beta},$$

com $0 < \beta \leq 1$, ou seja, a probabilidade

$$\pi_t = P(|r_t| \leq \ell_t) = P(|Z_t| \leq \zeta)$$

depende de um limite invariante no tempo $\zeta = \ell_t/\sigma_t^\beta$. Quando $\beta = 1$, obtemos a padronização usual $|Z_t| = |r_t|/\sigma_t$, que produz uma distribuição homocedástica e truncada.

De fato, essa instância investigada para $\beta < 1$ refere-se a “retornos sobre o valor médio dos preços” (Matsushita et al., 2020; Matsushita et al., 2023), ao invés da noção usual de retornos. Como extensão, consideramos a definição usual de retornos, porque os resultados são mais amplos e também relevantes para $\beta > 1$. Todas as relações entre o desvio padrão e a amplitude dos dados de retorno financeiro estão agora incluídas na lei de potência.

Deste modo, para uma realização do ponto de truncamento ℓ_t e o desvio padrão σ_t de r_t , podemos considerar a lei de potência anteriormente discutida, $\ell_t = \zeta \sigma_t^\beta$, em que $\zeta > 0$ é invariante no tempo e $\beta > 0$. Se esta lei for válida para todo t , então $|r_t|$ pode ser padronizado

como

$$|Z_t| = \frac{|r_t|}{\sigma_t^\beta} = \frac{|X_t/X_{t-1} - 1|}{\sigma_t^\beta},$$

com $\beta > 0$, tal que

$$\pi_t = P(|r_t| \leq \ell_t) = P(|Z_t| \leq \zeta)$$

com $\zeta = \ell_t/\sigma_t^\beta$ constante.

Apesar do fato de $|Z_t|$ ser heteroscedástico para $\beta \neq 1$, π_t depende da constante ζ . Usando a média global de π_t , $\forall t$, como uma probabilidade constante π sobre o tempo, aqui podemos interpretar $1 - \pi$ como o risco futuro de $|Z_t|$ superar ζ .

Resultados e discussões

Para ilustrar os resultados do caso $0 < \beta < 1$ foram utilizados os dados de taxas intradiárias de câmbio de quinze moedas em relação ao dólar americano, transacionadas no mercado de câmbio (FOREX). O conjunto de dados é constituído por 32.308.882 preços *tick-by-tick* (com intervalos em milissegundos).

Os logaritmos do retorno absoluto diário máximo $\hat{\ell}_t$ e o desvio padrão estimado $\hat{\sigma}_t$ são linearmente correlacionados (Fig. 1), cujos coeficientes angulares $\hat{\beta}$ se encontram na Tabela 1. Observe-se esse resultado empírico é consistente com a lei de potência $\ell_t = \zeta\sigma_t^\beta$, no qual $0 < \beta < 1$.

Como a lei de potência vale para todo t , a probabilidade π não depende do tempo t . Os painéis esquerdos na Fig. 2 mostram as evoluções temporais dos retornos sobre a média r_t . Essas séries temporais apresentam *clusters* de volatilidade. Já as séries temporais dos retornos padronizados Z_t (painéis da direita) evoluem ao longo de um limite constante $\hat{\zeta}$. Como resultado, prevemos que os valores futuros de Z_t seguirão esse padrão de regularidade.

Tabela 1: Coeficientes estimados β e $\ln \zeta$, e probabilidade π .

Moeda	$\hat{\beta}$ (S.E.)	$\ln \hat{\zeta}$ (S.E.)	π
Real Brasileiro	0.82 (0.008)	-0.0735 (0.0495)	0.99459
Libra Britânica	0.85 (0.006)	-0.0698 (0.0365)	0.99035
Dólar Canadense	0.88 (0.004)	0.0768 (0.0266)	0.99045
Coroa Checa	0.88 (0.006)	-0.0101 (0.0435)	0.99009
Coroa Dinamarquesa	0.85 (0.006)	-0.0712 (0.0365)	0.99073
Dólar de Hong Kong	0.93 (0.005)	0.2883 (0.0470)	0.98996
Florim Húngaro	0.87 (0.007)	0.0950 (0.0424)	0.98962
Yen Japonês	0.85 (0.005)	-0.0922 (0.0292)	0.99109
Peso Mexicano	0.83 (0.007)	-0.2235 (0.0451)	0.99099
Coroa Norueguesa	0.87 (0.006)	0.0686 (0.0351)	0.99129
Zloty Polonês	0.86 (0.007)	-0.0011 (0.0421)	0.99008
Dólar de Singapore	0.88 (0.006)	0.0329 (0.0044)	0.99160
Rand Sul-Africano	0.87 (0.007)	0.0596 (0.0458)	0.98996
Coroa Sueca	0.87 (0.006)	0.0904 (0.0348)	0.99039
Lira Turca	0.84 (0.007)	-0.1145 (0.0462)	0.98885

Embora $|Z_t|$ constitua uma série temporal heterocedástica, ela está sujeita à constante invariante no tempo $\hat{\zeta}$, tal que $\hat{\pi} = P(|Z_t| \leq \hat{\zeta})$ e na Tabela 1 temos as estimativas dessas probabilidades π . Deste modo $1 - \hat{\pi}$ é interpretada como uma medida do risco futuro de $|Z_t|$ ultrapassar $\hat{\zeta}$.

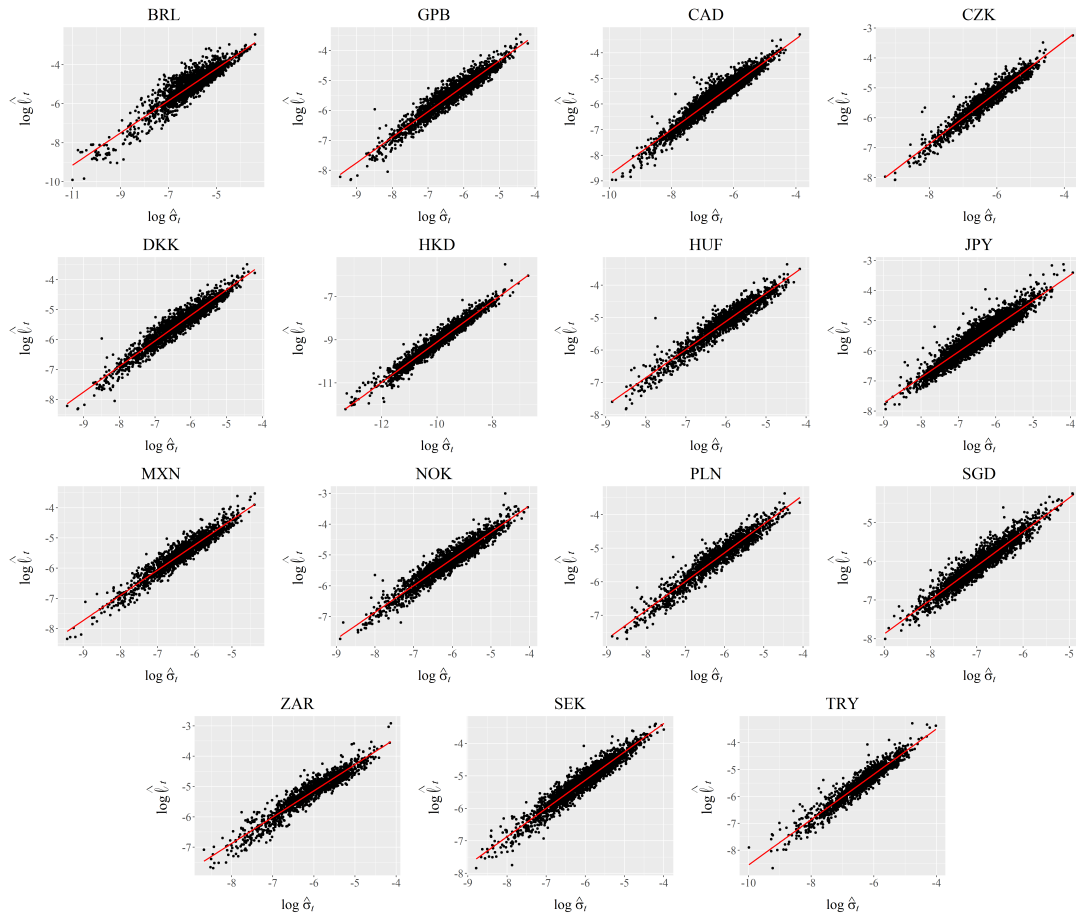


Figura 1: Gráficos de $\ln \hat{\sigma}_t$ vs. $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ mostrados na Tabela 1.

Para o caso $\beta > 1$, utilizamos dados de taxas intradiárias de câmbio do real brasileiro em relação ao dólar americano, o euro e a libra esterlina transacionados nos mercados de câmbio (FOREX). Ao todo são 629.848 preços de oferta gentilmente fornecidos por *Tick Data, LLC*. O retorno absoluto máximo diário $\hat{\ell}_t$ e a estimativa do desvio-padrão $\hat{\sigma}_t$ são variáveis linearmente correlacionadas (Figura 3, esquerda), cujas inclinações $\hat{\beta}$, apresentadas na Tabela 2, são superiores a 1. Esse resultado empírico é consistente com a lei de potência proposta, o que demonstra a plausibilidade da hipótese de truncamento para dados passados.

Os painéis centrais da Figura 3 mostram a evolução dos retornos r_t . Essas séries temporais exibem *clusters* de volatilidade, um resultado comum dos retornos financeiros. As séries temporais de retornos padronizados Z_t (painéis à direita) evoluem mais uniformemente ao longo da

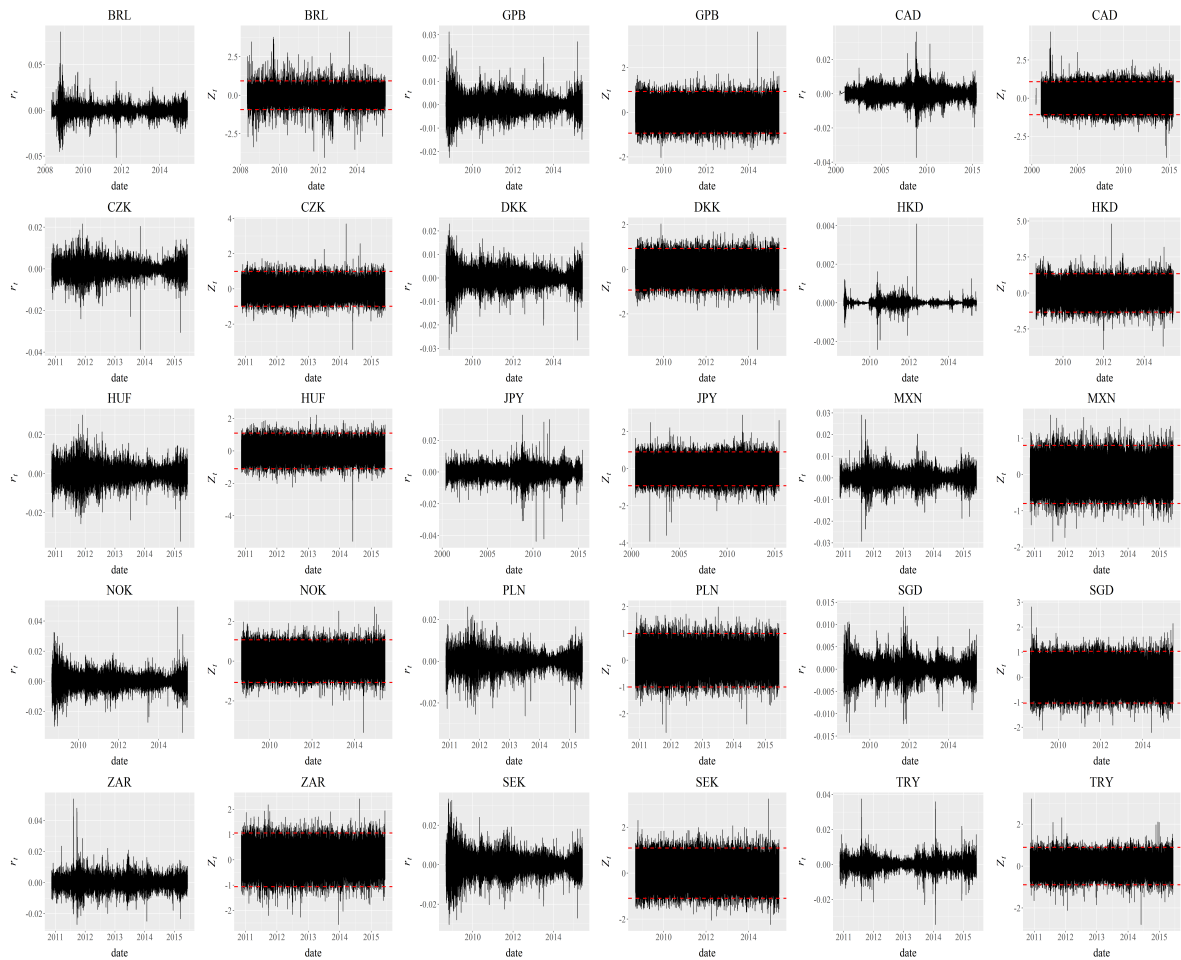


Figura 2: A evolução dos retornos observados r_t apresentados à esquerda. Direita: a evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas sólidas representando $\pm\zeta$.

Tabela 2: Coeficientes estimados de β , $\ln \zeta$ e probabilidade π .

Moeda	$\hat{\beta}$ (S.E.)	$\ln \hat{\zeta}$ (S.E.)	π
BRL/GBP	1.12 (0.011)	2.166 (0.0740)	0.9908
BRL/EUR	1.10 (0.012)	2.010 (0.0812)	0.9911
BRL/USD	1.02 (0.014)	1.749 (0.0909)	0.9948

constante ζ . A Tabela 2 também inclui a probabilidade estimada π , que está associada a ζ .

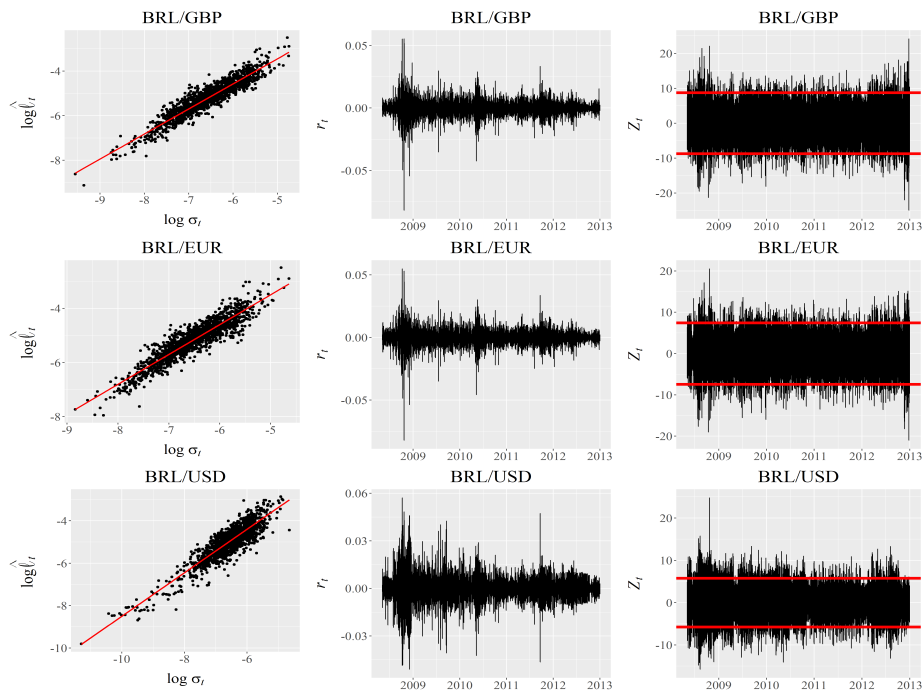


Figura 3: Esquerda: Apresenta $\ln \hat{\sigma}_t$ versus $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ apresentada na Tabela 2. Centro: A evolução dos retornos observados r_t . Direita: A evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas pontilhadas em vermelho referentes $\pm \zeta$.

Conclusão

Como conclusões deste estudo, descobrimos que as distribuições truncadas, embora não possam explicar o futuro nem os eventos extremos, permitem descrever o passado. Nessa abordagem, a lei de potência $\ell = \zeta \sigma^\beta$, com coeficiente $\zeta > 0$ e expoente $\beta > 0$, relaciona a amplitude ℓ e o desvio-padrão de σ de retornos financeiros. Com essa relação não é preciso especificar

a forma exata da função de distribuição dos retornos e a variância dos dados pode evoluir no tempo. Outro achado diz respeito à *clusters* de volatilidade na série de retornos r_t . Foi proposto e retorno padronizado $Z_t = r_t/\sigma_t^\beta$ que apresenta certo grau de homocedasticidade devido à presença de um limiar constante ζ . Os resultados teóricos foram verificados por meio de exemplos com dados reais, considerando taxas de câmbio intradiários, perfazendo mais de 32 milhões de observações. Os resultados obtidos aqui são válidos para retornos pequenos, o que é típico em dados intradiários. Finalmente, cabe ressaltar que o tema desenvolvido nesta dissertação foi bem recebido pela comunidade científica internacional, sendo que o primeiro artigo apresentado aqui já se encontra publicado na revista [Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 116 (2023) 106900].

Sumário

1	Introdução	1
2	Passado finito, futuro sem limites	5
2.1	Introdução	6
2.2	Propriedades da lei de potência	8
2.2.1	Truncamento abrupto	8
2.2.2	Truncamento abrupto ponderado	11
2.3	Modelo de probabilidade limitada para retornos	13
2.4	Análise de dados	14
2.5	Conclusão	18
3	Retornos financeiros padronizados	22
3.1	Introdução	22
3.2	Lei de potência para peq. comp.	24
3.3	Exemplo	27
3.4	Dados e análise	29
3.5	Conclusão	30
4	Relações entre ℓ e σ	34
4.1	Introdução	34
4.2	Relações de desigualdade	35

4.3	Algumas relações de recorrência	37
4.3.1	Relação 1	37
4.3.2	Relação 2	37
4.4	Conclusão	39
5	Conclusão e considerações finais	41

Lista de Tabelas

1	Coeficientes estimados β e $\ln \zeta$, e probabilidade π	xiii
2	Coeficientes estimados de β , $\ln \zeta$ e probabilidade π	xvi
2.1	Descrição dos dados.	17
2.2	Coeficientes estimados β e $\ln \zeta$, e probabilidade π	18
3.1	Descrição dos dados.	29
3.2	Coeficientes estimados de β , $\ln \zeta$ e probabilidade π	29

Lista de Figuras

1	Gráficos de $\ln \hat{\sigma}_t$ vs. $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ mostrados na Tabela 1. . .	xiv
2	A evolução dos retornos observados r_t apresentados à esquerda. Direita: a evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas sólidas representando $\pm\zeta$	xv
3	Esquerda: Apresenta $\ln \hat{\sigma}_t$ versus $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ apresentada na Tabela 2. Centro: A evolução dos retornos observados r_t . Direita: A evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas pontilhadas em vermelho referentes $\pm\zeta$	xvi
2.1	Gráficos de $\ln \hat{\sigma}_t$ vs. $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ mostrados na Tabela 2.2. .	15
2.2	A evolução dos retornos observados r_t apresentados à esquerda. Direita: a evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas sólidas representando $\pm\zeta$	16
2.3	Estimativa de ζ vs. $1 - \pi$, no qual $1 - \pi = P(Z_t > \zeta)$	16
3.1	Esquerda: Apresenta $\ln \hat{\sigma}_t$ versus $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ apresentada na Tabela 3.2. Centro: A evolução dos retornos observados r_t . Direita: A evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas pontilhadas em vermelho referentes $\pm\zeta$	30

Introdução

Sem dúvida, o desvio padrão amostral (S) de um conjunto de dados é uma estatística comumente utilizada para a estimação do desvio padrão (σ) de uma população X . Embora essa estatística apresente vício, já que, em média, ela subestima σ , à medida que o tamanho da amostra aumenta, tal vício diminui pela ação da lei fraca dos grandes números. Em alguns casos, porém, a amplitude amostral (ℓ) representa uma escolha mais natural como estimador de σ . Por exemplo, se X segue uma distribuição uniforme contínua, então o estimador de máxima verossimilhança de σ é proporcional a ℓ (Montgomery, 2009).

Em outras situações, ℓ serve como uma medida alternativa ou complementar a σ . Por exemplo, em controle estatístico da qualidade, geralmente sob a hipótese de que os dados constituem amostras aleatórias simples retiradas de uma população normal, a média das amplitudes amostrais é um estimador de σ utilizado como uma estatística complementar ao desvio padrão amostral (S). Nesse caso, ambas estatísticas contribuem com diferentes informações com vistas ao monitoramento da qualidade em um processo de produção (Cryer e Ryan, 1990; Roes e Does, 1995). Como outro exemplo, em um caso particular de aplicação na área de finanças, Chou (2005) propôs a amplitude como instrumento na estimação da volatilidade da série de retornos do *Standard and Poors 500* (S&P500).

Assim, por vários motivos, o estudo da relação entre o desvio padrão (σ) e a amplitude (ℓ) de uma distribuição de dados é um objeto antigo de investigação (Tippett, 1925; Shone, 1949; David, Hartley e Pearson, 1954; Douglas C. Montgomery, 2012). No entanto, grande parte dos

resultados encontrados na literatura propõem relações que dependem da forma da distribuição populacional X .

Agora, para uma situação geral na qual não se exige a definição da forma da distribuição de X , dispõe-se de relações de desigualdade entre ℓ e σ como a de Popoviciu (Popoviciu, 1935) que estabelece $\sigma \leq \ell/2$. Combinando-se essa desigualdade com a de Jensen, por exemplo, obtém-se $E[S] \leq \ell/2$. Para uma situação particular, na qual X segue uma distribuição simétrica absolutamente contínua cujo suporte possui amplitude $\ell \ll 1$, Matsushita et al. (2020) sugerem uma lei de potência na forma $\ell = \zeta\sigma^\beta$, na qual $0 < \beta \leq 1$ é um coeficiente de amortecimento e $\zeta > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Essa situação pode ser encontrada, por exemplo, em dados de retornos financeiros intradiários passados, uma vez que os valores absolutos desses retornos já realizados entre transações consecutivas no tempo são muito pequenos e limitados. Isso é decorrente do próprio processo observacional que retorna uma distribuição truncada pela finitude imposta pelo passado.

Para explicarmos isso melhor, suponha que X_1, \dots, X_n seja uma amostra aleatória simples extraída de uma distribuição X qualquer, ilimitada, como a normal ou a Cauchy. Com base nessa amostra aleatória, considere a estatística $\lambda = \max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}$. Uma vez que os dados já foram observados, é fato que

$$P(|X_i| \leq \ell | \lambda = \ell) = 1,$$

em que ℓ , neste caso, representa a amplitude dos valores absolutos dos dados passados; ou seja, $\ell = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, no qual x_1, \dots, x_n representa os valores realizados da amostra em questão. Nessa formulação, o truncamento abrupto ocorre com probabilidade 1 pela finitude do passado. Por outro lado, o futuro é incerto e, conseqüentemente, observações futuras não são limitadas. Nesse caso, a probabilidade de incondicional é

$$P(|X_i| \leq \ell) = \int_0^\ell P(|X_i| \leq \ell | \lambda = l) f_\lambda(l) dl = P(0 < \lambda \leq \ell),$$

em que $f_\lambda(l)$ é a função de densidade de probabilidade que descreve a distribuição dos máximos. Assim, enquanto $P(|X_i| > \ell | \lambda = \ell) = 0$ no passado, se olharmos para o futuro encontramos $P(|X_i| > \ell) > 0$.

Seguindo essa abordagem, o presente trabalho apresenta algumas contribuições adicionais referentes à lei de potência $\ell = \zeta\sigma^\beta$ introduzida por Matsushita et al. (2020). Esta dissertação se organiza em forma de coletâneas de três artigos.

No Capítulo 2 (artigo 1) apresentamos uma discussão na qual se contrasta a finitude das observações passadas com a possibilidade de ocorrência de valores futuros extremos. Com base em probabilidades condicionais, enquanto um modelo abruptamente truncado representa o comportamento passado, outro modelo não-truncado se encarrega de explicar as variações futuras. Nesse trabalho, seguindo (Matsushita et al., 2020), não é necessário especificar a forma da distribuição populacional, exigindo-se apenas a propriedade de simetria. Nesse contexto, propomos um novo desenvolvimento da lei de potência $\ell = \zeta\sigma^\beta$, com $0 < \beta \leq 1$ e $\zeta > 0$. A aplicação do resultado é exemplificada em um grande conjunto dados dos preços de oferta do dólar de 15 moedas negociadas no mercado de câmbio (FOREX), reunindo mais de 32 milhões de observações *tick-by-tick*. O teor deste capítulo foi publicado na revista *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* (Matsushita et al., 2022).

No Capítulo 3 (artigo 2) propomos uma extensão da lei de potência $\ell = \zeta\sigma^\beta$, na qual ela é válida para $\beta > 0$. Com esse novo resultado, o método torna-se aplicável para qualquer tipo de séries temporais de retornos financeiros. Ilustrando com dados de taxas de câmbio do real brasileiro frente à libra esterlina, o euro e o dólar americano, o trabalho discute como os *clusters* de volatilidades comumente encontrados em séries de retornos financeiros podem ser evitados mediante padronização desses retornos com a ajuda da lei de potência encontrada nesses dados. Em outras palavras, enquanto o retorno tradicional r_t constitui uma série temporal sujeito a *clusters* de volatilidades, sua forma padronizada como $Z_t = r_t/\sigma_t^\beta$ não exhibe *clusters* de volatilidades.

O capítulo 4 (artigo 3) apresenta o ensaio de um trabalho técnico que exprimem novas

proposições para o estudo de relações entre ℓ e σ , ℓ e σ^β , o que inclui relações de recorrência para derivadas da variância.

Finalmente, o Capítulo 5 exibe um resumo com as principais contribuições promovidas nesta dissertação, indicando alguns pontos que podem ser objetos de investigação futura.

Passado finito, futuro sem limites

Resumo Passado e futuro possuem naturezas estocásticas distintas, sendo que uma delas diz respeito ao truncamento dos dados. Enquanto o passado segue uma distribuição truncada, o futuro pode ser descrito por uma distribuição ilimitada. Com base nessa premissa, faz sentido prever o passado limitado (retrodizer), procurando — de alguma forma — estabelecer uma conexão com o futuro ilimitado. Partindo de uma distribuição truncada para o passado — sem a necessidade de especificar completamente sua forma funcional —, este trabalho propõe uma lei de potência que relaciona a amplitude e o desvio padrão de dados passados. A partir dessa lei, mostramos como é possível estabelecer uma conexão entre o passado truncado e o futuro ilimitado. Fato interessante deste resultado é que, como não se requer a forma exata da função de densidade de probabilidade dos dados passados, permite-se que os seus momentos, com exceção da média, variem no tempo. Dessa forma, o método proposto aqui é aplicável a uma vasta gama de distribuições simétricas. Para mostrar sua aplicabilidade e factibilidade, apresentamos exemplos com os preços em dólares americanos de 15 diferentes moedas negociadas no mercado de câmbio (FOREX), perfazendo mais de 32 milhões de dados intradiários.

Palavras-chave: Voo de Lévy truncado, Leis de potência, Dados financeiros, Taxas de câmbio.

2.1 Introdução

Um antigo provérbio dinamarquês, recontado por muitos, do jogador de beisebol Yogi Berra ao físico Niels Bohr, diz que “É difícil prever, especialmente o futuro” (*it is difficult to predict, especially the future*). Sem dúvida, é uma declaração cômica pela sua redundância. Mas há um ponto também que poderia ser considerado. Por que não prever o passado (retrodizer)? Assim como não se dispõe sobre futuro, o passado está sujeito a falta de informações. Isso porque, assim que o dado se realiza, sua distribuição de valores se caracteriza por uma distribuição truncada. Não há mais possibilidade de ocorrência de valores além dos extremos já realizados. Já o futuro pode ser ilimitado pela sua própria natureza incerta.

Neste trabalho discute-se como uma lei de potência pode ser utilizada para conectar eventos passados limitados aos eventos futuros ilimitados. Para modelar os dados, consideramos distribuições truncadas — como os vôos truncados de Lévy (Mantegna e Stanley, 1995) — e obtemos uma lei de potência que relaciona o comprimento do truncamento e o desvio padrão da distribuição.

Sem dúvida, o vôo Lévy truncado, por si só, está sujeito ao problema de indução, já que ele se limita a descrever o passado. No entanto, com base na descoberta da lei de potência (Matsushita et al., 2020), argumentamos aqui que, embora um vôo Lévy truncado não possa prever eventos extremos futuros (Schinckus, 2013), ele ainda é útil para modelar o passado. Embora consideremos vôos de Lévy truncado, nossa abordagem é aplicável a uma classe mais ampla de distribuições simétricas, porque não se requer a especificação da forma exata da função densidade de probabilidade. Além disso, os momentos de distribuição, com exceção da média, podem variar no tempo.

Ilustramos nossa metodologia analisando os preços intradiários, em dólares americanos, de 15 diferentes moedas negociadas no mercado de câmbio (FOREX), totalizando mais de 32 milhões de ticks. Aqui, parte-se da premissa de que dados de séries temporais financeiras do passado e do futuro exibem características estocásticas distintas, na qual os retornos passados

são limitados. Seja r_t um retorno financeiro intradiário realizado no instante t . Se houver uma série de retornos em determinado dia, então o máximo retorno absoluto diário é conhecido e, por isso, r_t é uma variável limitada por um ponto ℓ_t . Para mostrar nosso ponto de vista, consideramos o voo de Lévy com truncamento abrupto. Originalmente, a ideia do truncamento era justificada pela finitude dos dados (Mantegna e Stanley, 1995; Gleria, Matsushita e Da Silva, 2002; Figueiredo et al., 2003) ou pelo fato de os sistemas físicos estarem sujeitos a condições de contorno (Schinckus, 2013). Embora haja outras formas mais sofisticadas de truncamento (Koponen, 1995; Gupta e Campanha, 1999; Matsushita, Rathie e Da Silva, 2003), aqui nos limitaremos ao truncamento abrupto.

Quando se trata de prever o futuro, os retornos não realizados seguem uma distribuição ilimitada porque os limites ainda são desconhecidos. Como resultado, o voo Lévy truncado não pode explicar ou prever retornos futuros extremos. No entanto, podemos reconciliar os retornos financeiros passados e futuros da seguinte forma.

Primeiramente, propomos uma nova forma de truncamento para descrever dados passados simetricamente distribuídos com desvio padrão σ_t e ponto de corte ℓ_t . Em seguida, deduzimos uma lei de potência na forma $\ell_t = \zeta \sigma_t^\beta$ válida para pequenos valores de ℓ_t , na qual $0 < \beta \leq 1$ representa um coeficiente de amortecimento e $\zeta > 0$ é uma constante (Matsushita et al., 2020). Depois, para descrever os retornos futuros, obtemos a distribuição de probabilidade π dos retornos absolutos futuros (ilimitados), com base na média das distribuições truncadas passadas.

Como resultado, obtemos os retornos padronizados $Z_t = r_t / \sigma_t^\beta$. Em contraste aos retornos r_t , que estão sujeitos a *clusters* de volatilidade, Z_t evolui de acordo com o limiar invariante no tempo ζ , permitindo conexões com modelos clássicos de valores extremos (Tsallis, 2009; Heston, 1993; Drăgulescu e Yakovenko, 2002).

O restante do artigo está organizado da seguinte forma. A lei de potência encontrada em distribuições simétricas abruptamente truncadas é desenvolvida na Seção 2.2. O modelo proposto para os retornos sobre o valor médio do preço está descrito na Seção 2.3. A Seção 2.4

apresenta uma análise com dados de cotações *tick-by-tick* dos preços de oferta, em dólares norte-americano, de 15 moedas negociadas no mercado de câmbio para ilustrar a metodologia proposta, e na Seção 2.5 apresentamos as conclusões do estudo.

2.2 Propriedades da lei de potência de distribuições simétricas truncadas

2.2.1 Truncamento abrupto

Proposição 1. *Seja uma variável aleatória Y com função de densidade $g(y) = g(-y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, com $0 < g(0) < \infty$ e $g'(0) = 0$. Considere r como sua forma truncada no intervalo $[-\ell, \ell]$, com $0 < \ell \ll 1$, cuja função de densidade é escrita como*

$$f(y) = \frac{g(y)}{2\eta(\ell)}, \quad (2.1)$$

se $|y| \leq \ell$, e $f(y) = 0$, se caso contrário, na qual

$$\eta(\ell) = \int_0^\ell g(y) dy. \quad (2.2)$$

Se σ é o desvio-padrão de r , então $\ell \propto \sigma$.

Demonstração. Cabe observar que o pressuposto $g(y) = g(-y)$ (simetria) é uma propriedade distributiva relacionada com a hipótese de truncamento dos vôos de Lévy (Mantegna e Stanley, 1995; Gleria, Matsushita e Da Silva, 2002; Figueiredo et al., 2003). Já a suposição $g'(0) = 0$ foi estabelecida para assegurar a existência de $g'(0)$.

Primeiramente, observe que $f(\ell) \uparrow \infty$ à medida que $\ell \downarrow 0$, uma vez que $\eta(\ell) \downarrow 0$ e $\lim_{\ell \downarrow 0} g(\ell) = g(0) < \infty$. Como $\lim_{\ell \downarrow 0} g'(\ell) = g'(0) = 0$, de (2.1), encontramos

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \ell f(\ell) = \lim_{\ell \downarrow 0} \frac{\ell g(\ell)}{2\eta(\ell)} = \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Assim, como $f(\ell) \uparrow \infty$ e $\ell \downarrow 0$ com taxas proporcionais, podemos concluir que

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \ell^2 f(\ell) = 0. \quad (2.4)$$

Em segundo lugar, obtemos

$$\lim_{\ell \downarrow 0} 2\ell^2 f'(\ell) = \lim_{\ell \downarrow 0} \ell^2 \left\{ \frac{g'(\ell)\eta(\ell) - g(\ell)\eta'(\ell)}{\eta^2(\ell)} \right\} = -1. \quad (2.5)$$

Dessa forma, reescrevendo a variância de r como

$$\sigma^2(\ell) = \int_{-\ell}^{\ell} y^2 f(y) dy = 2 \int_0^{\ell} y^2 f(y) dy = \frac{V(\ell)}{\eta(\ell)},$$

sendo $V(\ell) = \int_0^{\ell} y^2 g(y) dy$, sua derivada primeira por ser escrita como

$$(\sigma^2)'(\ell) = \frac{V'(\ell)}{\eta(\ell)} - \frac{V(\ell)}{\eta(\ell)} \cdot \frac{\eta'(\ell)}{\eta(\ell)} = 2\ell^2 f(\ell) \left\{ 1 - \frac{\sigma^2(\ell)}{\ell^2} \right\}. \quad (2.6)$$

Note que $|r| \leq \ell$ e, $E[(\ell - r)(r + \ell)] = E[\ell^2 - r^2] = \ell^2 - \sigma^2(\ell) \geq 0$, ou seja,

$$\frac{\sigma^2(\ell)}{\ell^2} \leq 1. \quad (2.7)$$

A relação (2.7) é conhecida como desigualdade de Popoviciu's para variâncias (Popoviciu, 1935). Aplicando os resultados (2.4) e (2.7), em (2.6), concluímos que em uma distribuição truncada como em (2.1), temos $(\sigma^2)'(0) = 0$. Agora, vamos expandir $\sigma^2(\ell)$ como

$$\sigma^2(\ell) = \sum_{k \geq 2} (\sigma^2)^{(k)}(0) \frac{\ell^k}{k!} = (\sigma^2)''(0) \frac{\ell^2}{2} + \mathcal{O}(\ell^3), \quad (2.8)$$

no qual $(\sigma^2)^{(k)}(0)$ denota a k -ésima derivada de $\sigma^2(\ell)$ avaliada em zero e $\sigma^2(0) = 0$ de acordo com a definição de variância. Daí, reescrevendo (2.6) em termos da aproximação de segunda

ordem mostrada em (2.8) como

$$(\sigma^2)'(\ell) \approx 2\ell^2 f(\ell) \left\{ 1 - \frac{(\sigma^2)''(0)}{2} \right\}, \quad (2.9)$$

encontramos

$$(\sigma^2)''(\ell) \approx [4\ell f(\ell) + 2\ell^2 f'(\ell)] \left\{ 1 - \frac{(\sigma^2)''(0)}{2} \right\} \quad (2.10)$$

mediante derivação de (2.9) com respeito a ℓ . Daí, aplicando os resultados (2.3) e (2.5) em (2.10), obtemos a aproximação

$$(\sigma^2)''(0) \approx \frac{2}{3}.$$

Logo, distribuições abruptamente truncadas na forma (2.1) seguem uma lei de escala na forma

$$\ell \approx \sqrt{3}\sigma. \quad (2.11)$$

□

A seguir, mostramos exemplos de distribuições simétricas abruptamente truncadas. Nos Exemplos 2 e 3, respectivamente, consideramos vãos truncados de Lévy com $\alpha = 1$ (Cauchy truncada) e $\alpha = 2$ (normal truncada) (Mantegna e Stanley, 1995; Gleria, Matsushita e Da Silva, 2002; Figueiredo et al., 2003). Como esperado, embora tenham formas diferentes, ambas distribuições seguem a mesma lei de potência $\ell \approx \sqrt{3}\sigma$.

Ex 1. Seja $r \sim \text{Uniforme}(-\ell, \ell)$, tal que $f(y) = 1/(2\ell)$ para $|y| < \ell$. Neste caso, $\sigma^2(\ell) = \ell^2/3$ portanto $(\sigma^2)'(\ell) = 2\ell/3$ and $(\sigma^2)''(\ell) = 2/3$. Como resultado $\ell = \sqrt{3}\sigma$.

Ex 2. Seja $r \sim \text{TCauchy}(0, 1, \ell)$ distribuição de uma Cauchy padrão, simétrica, truncada e com função de densidade $f(y) = (2 \arctan \ell)^{-1} \cdot (1 + y^2)^{-1}$, if $|y| < \ell$, com $\ell \leq 1$, e $f(y) = 0$,

se $|y| > \ell$. Sua variância é $\sigma^2(\ell) = \ell / \arctan \ell - 1$, (Johnson e Kotz, 1970). Note que $\sigma^2(0) = 0$, $(\sigma^2)'(0) = 0$ e $(\sigma^2)''(0) = 2/3$, encontramos uma aproximação de segunda ordem, $\ell \approx \sqrt{3}\sigma$.

Ex 3. Seja $r \sim \text{TNormal}(0, 1, \ell)$ distribuição de uma Gaussiana padrão, simétrica, truncada e com função de densidade $f(y) = \{\sqrt{2\pi}[1 - 2\Phi(-\ell)]\}^{-1}e^{-y^2/2}$, se $|y| < \ell$, em que $\ell \leq 1$ e Φ é a distribuição acumulada da normal padrão e $f(y) = 0$, if $|y| > \ell$, (Johnson e Kotz, 1970). Então sua variância pode ser escrita por $\sigma^2(\ell) = 1 - 2\ell f(\ell)$, com $\sigma^2(0) = 0$. Da mesma forma que no Exemplo 2, encontramos $(\sigma^2)'(0) = 0$ e $(\sigma^2)''(0) = 2/3$, isto é, $\ell \approx \sqrt{3}\sigma$.

2.2.2 Truncamento abrupto ponderado

Proposição 2. Sob os pressupostos da Proposição 1, considere o truncamento

$$f(y) = \frac{g(y)w(y, \ell)}{2\eta(\ell)}, \quad (2.12)$$

para $|y| \leq \ell$, e $f(y) = 0$, caso contrário, no qual $w(y, \ell) = w(-y, \ell) > 0$ é a função de peso e

$$\eta(\ell) = \int_0^\ell g(y)w(y, \ell)dy. \quad (2.13)$$

Se $w(y, \ell)$ for escolhida de tal forma que

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \ell f(\ell) = 0 \quad (2.14)$$

e

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \ell^2 f'(\ell) = 0, \quad (2.15)$$

então existe $0 < \beta < 1$ no qual $\ell \propto \sigma^\beta$.

Demonstração. Se a função peso $w(y, \ell)$ for escolhida de tal forma que as condições (2.14) e (2.15) sejam atendidas, então das equações (2.6) e (2.10) obtemos, de imediato, $(\sigma^2)'(0) = 0$

e $(\sigma^2)''(0) = 0$. Como resultado, pela aproximação de segunda ordem estabelecida em (2.8), encontramos

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \frac{\sigma^2(\ell)}{\ell^2} = 0. \quad (2.16)$$

Isto significa que $\sigma(\ell)$ tende para zero mais rapidamente do que ℓ . Nesse caso, se tomarmos um parâmetro de amortecimento $\beta \in (0, 1)$ tal que tenhamos

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \frac{\sigma^\beta(\ell)}{\ell} = \zeta > 0, \quad (2.17)$$

encontramos

$$\sigma^\beta \propto \ell. \quad (2.18)$$

□

Ex 4. *Uma mistura finita de distribuições é útil para modelar populações heterogêneas de uma ampla variedade de fenômenos aleatórios, (Otiniano, Gonçalves e Dorea, 2017). Aqui, exemplificamos como o caso $0 < \beta < 1$ pode ser obtido a partir de uma mistura. Considere as seguintes variáveis aleatórias $r_1 \sim \text{TCauchy}(0, 1, \ell)$ and $r_2 \sim \text{TCauchy}(0, 1, \ell^\kappa)$, com $|\ell| < 1$ e $\kappa > 1$. Tomando $g(y) = 0.5$, se $|y| \leq 1$, e $g(y) = 0$, se $|y| > 1$ e a função de peso de r é dada pela média das funções de densidade de r_1 e r_2 , f_1 e f_2 respectivamente, como $w(y, \ell) = f_2(y) + \ell[f_1(y) - f_2(y)]$, obtemos a variância da mistura r como $\sigma^2(\ell) \approx (\ell^3 + \ell^{2\kappa} - \ell^{2\kappa+1})/3$. Portanto, temos $\beta < 1$ porque $\lim_{\ell \downarrow 0} \sigma^2(\ell)/\ell^2 = 0$.*

Por fim, tomando ℓ_t e σ_t sendo o limite e o desvio padrão observado no tempo t , sob (2.12), podemos estabelecer o modelo de lei de potência como

$$\ell_t = \zeta \sigma_t^\beta, \quad (2.19)$$

em que $\zeta > 0$ denota uma quantidade positiva não dependente do tempo e $0 < \beta \leq 1$.

2.3 Modelo de probabilidade limitada para retornos

Seja X_t o preço no dia t , com $t \geq 1$ a tempo discreto. Considere que o processo de atualização de preço ocorra sobre o valor esperado no tempo t se defina como

$$X_t = (1 + r_t)m_t, \quad (2.20)$$

no qual $m_t = E[X_t]$ é (localmente) variável no tempo. A taxa r_t é o retorno sobre o preço médio e é um processo estocástico estacionário de primeira ordem, com média zero variância σ_t^2 , variável no tempo. Note que essa construção é compatível com a hipótese de um processo livre de arbitragem, pois podemos escrever $\nabla \ln X_t = \ln X_t - \ln X_{t-1} = \nabla \ln(1 + r_t) + \nabla \ln m_t \approx r_t + \delta_t$, with $|r_t| \ll 1$ (Matsushita et al., 2020). Desta forma, $\ln X_t$ se comporta como um passeio aleatório com *drift* local, em que o preditor do log-preço seguinte é o log-preço de hoje mais o termo δ_t .

Como os dados passados são limitados, definimos ℓ_t como uma realização de uma variável aleatória λ_t que descreve as ocorrências dos pontos de corte variando no tempo. Em seguida, estabelecemos um modelo de probabilidade condicional que satisfaz a relação

$$P(|r_t| \leq \lambda_t | \lambda_t = \ell_t) = 1, \quad (2.21)$$

no qual $r_t = X_t/m_t - 1$. Como estamos lidando com retornos intradiários absolutos, assume-se $0 < \ell_t \ll 1$. Devido ao fato de que ℓ_t é a realização de λ_t , Eq. (2.21) refere-se ao passado, pois ℓ_t limita r_t .

No entanto, quando se olha para o futuro indeterminado, o mecanismo de geração de dados deve ser ilimitado (não truncado). Para isso, escrevemos a distribuição de probabilidade

incondicional (ilimitada) do retorno absoluto como

$$\pi_t = P(|r_t| \leq \ell_t) = \int_0^{\ell_t} P(|r_t| \leq \lambda_t | \lambda_t = l_t) f_{\lambda_t}(l_t) dl_t = P(0 < \lambda_t \leq \ell_t), \quad (2.22)$$

em que $f_{\lambda_t}(l_t)$ denota a função de densidade de probabilidade de λ_t , e $l_t > 0$ é um ponto em seu suporte. Como resultado, $[|r_t| \leq \ell_t]$ and $[\lambda_t \leq \ell_t]$ são eventos similares em nosso modelo (2.21). A probabilidade π_t representa a média de ocorrências de (2.21) para $0 < \lambda_t \leq \ell_t$, e por isso π_t não será sempre igual a 1, pois $P(0 < \lambda_t \leq \ell_t) \leq 1$.

Se os dados estiverem sob a lei de potência (2.19) para todo t , então o retorno $|r_t|$ pode ser padronizado como

$$|Z_t| = \frac{|r_t|}{\sigma_t^\beta} = \frac{|X_t/m_t - 1|}{\sigma_t^\beta}, \quad (2.23)$$

com $0 < \beta \leq 1$, ou seja, a probabilidade

$$\pi_t = P(|r_t| \leq \ell_t) = P(|Z_t| \leq \zeta) \quad (2.24)$$

depende de um limite invariante no tempo $\zeta = \ell_t/\sigma_t^\beta$. Quando $\beta = 1$, obtemos a padronização usual $|Z_t| = |r_t|/\sigma_t$, que produz uma distribuição homocedástica e truncada, como em (2.12).

Apesar do fato de $|Z_t|$ ser heteroscedástico para $\beta \neq 1$, π_t depende da constante ζ . Usando a média de π_t , $\forall t$, como uma probabilidade constante π sobre o tempo, aqui podemos interpretar $1 - \pi$ como o risco futuro de $|Z_t|$ superar ζ .

2.4 Análise de dados

Nesta ilustração foram utilizados os dados de taxas intradiárias de câmbio de quinze moedas em relação ao dólar americano, transacionadas no mercado de câmbio (FOREX). O conjunto de dados é constituído por 32.308.882 preços *tick-by-tick* (com intervalos em milissegundos)

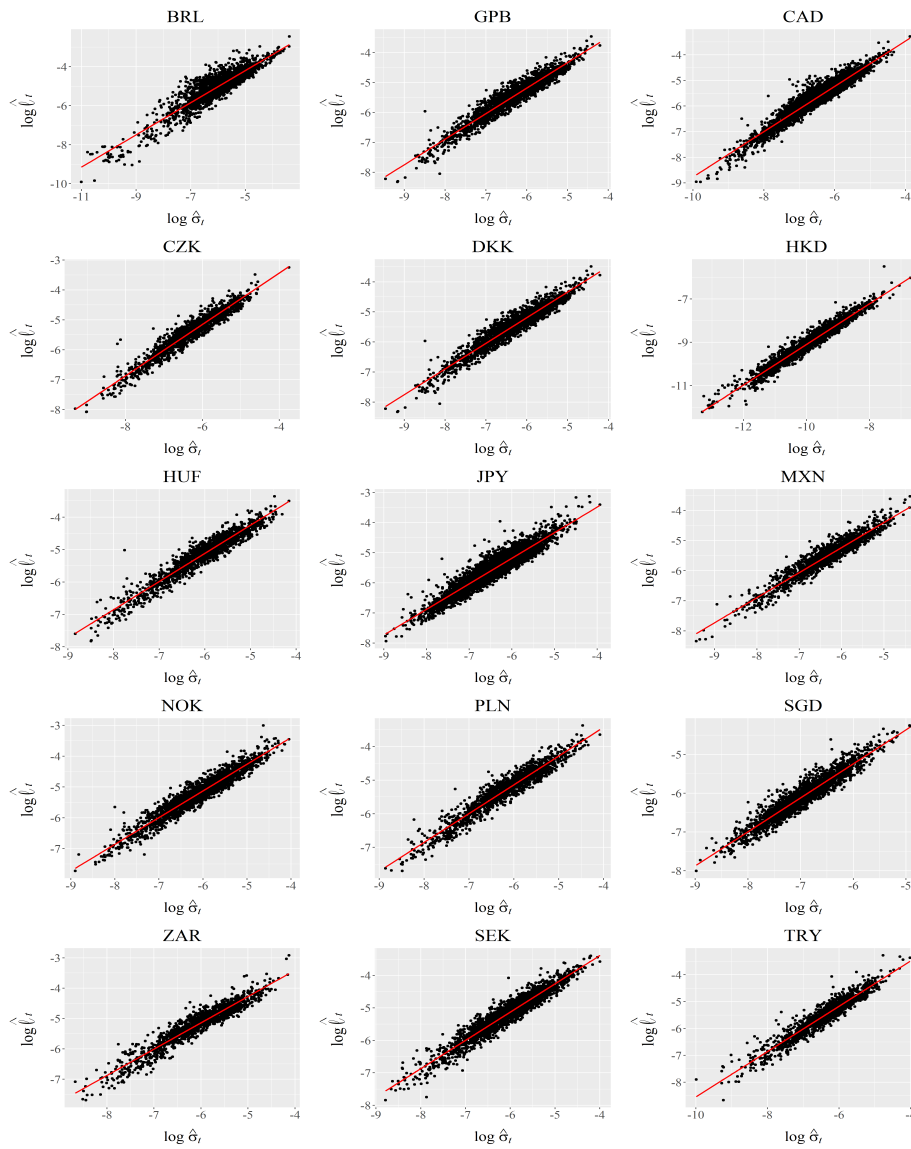


Figura 2.1: Gráficos de $\ln \hat{\sigma}_t$ vs. $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ mostrados na Tabela 2.2.

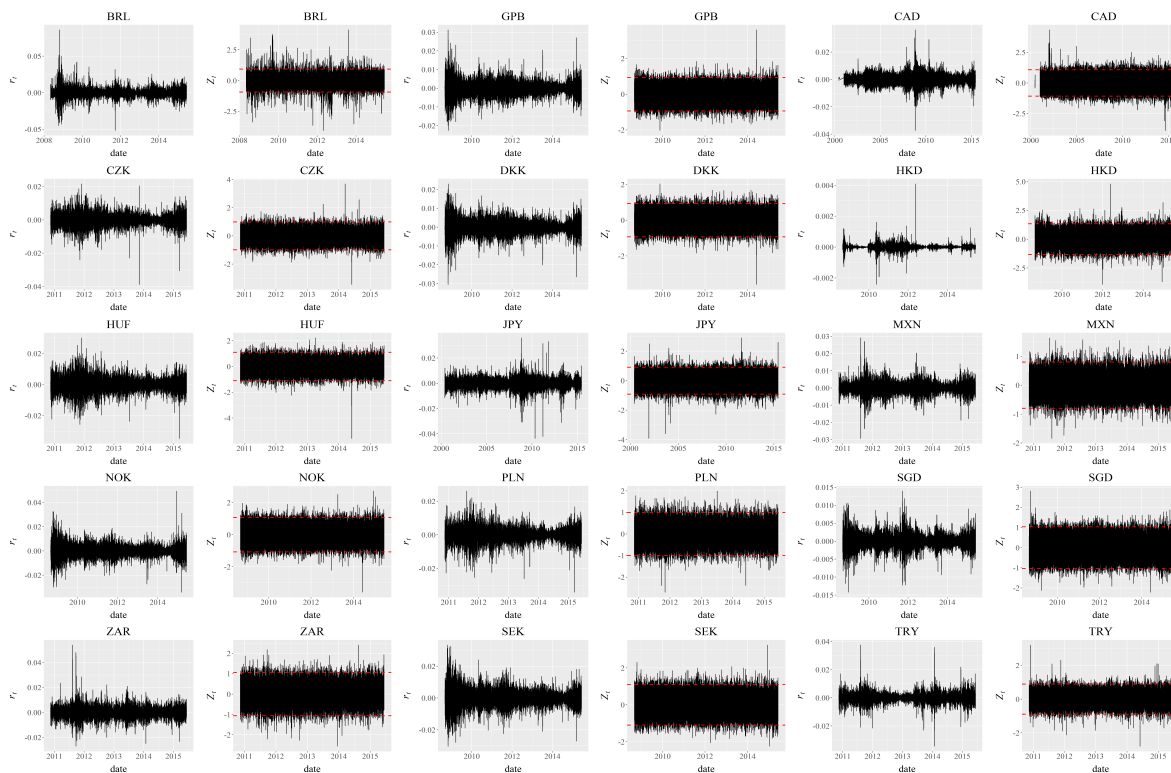


Figura 2.2: A evolução dos retornos observados r_t apresentados à esquerda. Direita: a evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas sólidas representando $\pm\zeta$.

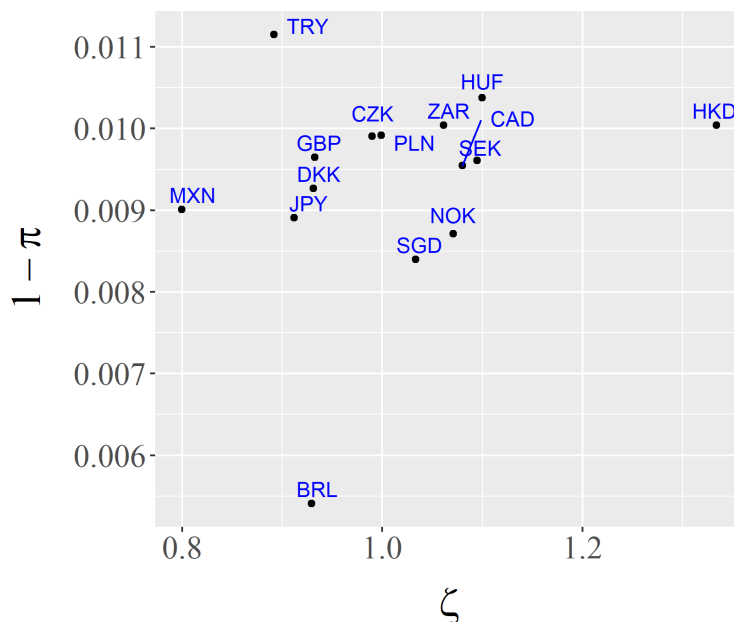


Figura 2.3: Estimativa de ζ vs. $1 - \pi$, no qual $1 - \pi = P(|Z_t| > \zeta)$.

Tabela 2.1: Descrição dos dados.

País	Moeda	Símbolo	Período	Quantidade
Brasil	Real Brasileiro	BRL	06-05-08 – 16-06-15	1,745,081
Grã-Bretanha	Libra Britânica	GBP	31-08-08 – 12-06-15	2,756,940
Canadá	Dólar Canadense	CAD	12-06-00 – 12-06-15	3,935,622
República Tcheca	Coroa Checa	CZE	13-11-10 – 12-06-15	1,599,744
Dinamarca	Coroa Dinamarquesa	DKK	31-08-08 – 12-06-15	2,492,194
Hong Kong	Dólar de Hong Kong	HKD	31-08-08 – 12-06-15	831,540
Hungria	Florim Húngaro	HUF	14-11-10 – 12-06-15	1,602,852
Japão	Yen Japonês	JPY	30-05-00 – 12-06-15	4,809,063
México	Peso Mexicano	MXN	14-11-10 – 12-06-15	1,433,279
Noruega	Coroa Norueguesa	NOK	31-08-08 – 12-06-15	2,459,707
Polônia	Zloty Polonês	PLN	14-11-10 – 12-06-15	1,618,364
Singapura	Dólar de Singapore	SGD	31-08-08 – 12-06-15	1,820,161
África do Sul	Rand Sul-Africano	ZAR	14-11-10 – 12-06-15	1,401,901
Suécia	Coroa Sueca	SEK	31-08-08 – 12-06-15	2,469,051
Turquia	Lira Turca	TRY	14-11-10 – 12-06-15	1,333,383
			Total	32,308,882

Fonte: Tick Data, LLC.

(Tabela 2.1).

Os logaritmos do retorno absoluto diário máximo $\hat{\ell}_t$ e o desvio padrão estimado $\hat{\sigma}_t$ são linearmente correlacionados (Fig. 2.1), cujos coeficientes angulares $\hat{\beta}$ se encontram na Tabela 2.2. Observe-se esse resultado empírico é consistente com a lei de potência (2.19), no qual $\beta < 1$. Isso mostra a plausibilidade da hipótese de truncamento para dados passados, ao menos sob as condições do modelo (2.12). Assim, podemos fazer inferências sobre σ_t através da lei de potência $\hat{\ell}_t = \hat{\zeta} \hat{\sigma}_t^{\hat{\beta}}$.

Como a lei de potência vale para todo t , a probabilidade (2.24) não depende do tempo t . Os painéis esquerdos na Fig. 2.2 mostram as evoluções temporais dos retornos sobre a média r_t . Essas séries temporais, como pode ser visto, apresentam *clusters* de volatilidade. Já as séries temporais dos retornos padronizados Z_t (painéis da direita), por outro lado, evoluem ao longo de um limite constante $\hat{\zeta}$. Como resultado, prevemos que os valores futuros de Z_t seguirão esse padrão de regularidade.

Tabela 2.2: Coeficientes estimados β e $\ln \zeta$, e probabilidade π .

Moeda	$\hat{\beta}$ (S.E.)	$\ln \hat{\zeta}$ (S.E.)	π
Real Brasileiro	0.82 (0.008)	-0.0735 (0.0495)	0.99459
Libra Britânica	0.85 (0.006)	-0.0698 (0.0365)	0.99035
Dólar Canadense	0.88 (0.004)	0.0768 (0.0266)	0.99045
Coroa Checa	0.88 (0.006)	-0.0101 (0.0435)	0.99009
Coroa Dinamarquesa	0.85 (0.006)	-0.0712 (0.0365)	0.99073
Dólar de Hong Kong	0.93 (0.005)	0.2883 (0.0470)	0.98996
Florim Húngaro	0.87 (0.007)	0.0950 (0.0424)	0.98962
Yen Japonês	0.85 (0.005)	-0.0922 (0.0292)	0.99109
Peso Mexicano	0.83 (0.007)	-0.2235 (0.0451)	0.99099
Coroa Norueguesa	0.87 (0.006)	0.0686 (0.0351)	0.99129
Zloty Polonês	0.86 (0.007)	-0.0011 (0.0421)	0.99008
Dólar de Singapore	0.88 (0.006)	0.0329 (0.0044)	0.99160
Rand Sul-Africano	0.87 (0.007)	0.0596 (0.0458)	0.98996
Coroa Sueca	0.87 (0.006)	0.0904 (0.0348)	0.99039
Lira Turca	0.84 (0.007)	-0.1145 (0.0462)	0.98885

Embora $|Z_t|$ constitua uma série temporal heterocedástica, ela está sujeita à constante invariante no tempo $\hat{\zeta}$, tal que $\hat{\pi} = P(|Z_t| \leq \hat{\zeta})$. A Tabela 2.2 também inclui as estimativas dessas probabilidades π . A Fig. 2.3 mostra a dispersão de $1 - \hat{\pi}$, na qual $1 - \hat{\pi}$ é interpretada como uma medida do risco futuro de $|Z_t|$ ultrapassar $\hat{\zeta}$. A moeda brasileira, por exemplo, destaca-se com um valor mais baixo de $1 - \pi$. Ou seja, a probabilidade de seus retornos padronizados absolutos ultrapassarem $\hat{\zeta}$ é menor do que a das demais moedas.

2.5 Conclusão

Discutimos neste estudo que um voo de Lévy truncado ainda é eficaz para prever o passado, mesmo que não ele não possa descrever eventos extremos futuros. Para solucionar esse problema de indução, descobrimos que a lei de potência $\ell_t = \zeta \sigma_t^\beta$ permite conectar o passado e o futuro, em que ζ e β são parâmetros invariantes no tempo, enquanto a amplitude ℓ_t e o desvio-padrão σ podem variar no tempo.

Para justificar o caso $\beta < 1$, um modelo de truncamento ponderado foi apresentado neste

trabalho, conforme Eq. (2.12). No entanto, cabe observar que a lei de potência (2.19) permanece válida para outras formas alternativas de truncamento, desde que as condições (2.14) e (2.15) sejam atendidas.

Em nossa abordagem, não é preciso estabelecer a forma exata da função de distribuição de preços X_t . Além disso, os momentos de ordens iguais ou superiores a 2 da sua distribuição de probabilidade podem variar ao longo do tempo. Em contraste com o retorno r_t , que exhibe *clusters* de volatilidade, o retorno padronizado $Z_t = r_t/\sigma_t^\beta$ apresenta uma regularidade necessária para a retrodição. Independentemente do fato de Z_t não ser homocedástico no tempo para o caso $\beta \neq 1$, ele está relacionado a um limiar constante ζ . Esse recurso é vantajoso porque permite conexões com os modelos tradicionais da teoria dos valores extremos (Matsushita et al., 2020).

Agradecimentos. Agradecemos a Tick Data LLC (www.tickdata.com) para fornecer os dados, que estão disponíveis no Figshare¹. FAP/DF, DPI/DPP/UnB, CNPq, e Capes deram apoio financeiro.

¹<https://doi.org/10.6084/m9.figshare.19808536.v1>

Referências Bibliográficas

- Drăgulescu, A. A. e Yakovenko, V. M. (2002). “Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility”. *Quant. Finance* 2.6, pp. 443–453.
- Figueiredo, A. et al. (2003). “On the origins of truncated Lévy flights”. *Phys. Lett. A* 315, pp. 51–60.
- Gleria, I., Matsushita, R. e Da Silva, S. (2002). “Scaling power laws in the Sao Paulo Stock Exchange”. *Econ. Bull.* 7.3, pp. 1–12.
- Gupta, H. M. e Campanha, J. R. (1999). “The gradually truncated Lévy flight for systems with power-law distributions”. *Physica A* 268, pp. 231–239.
- Heston, S. L. (1993). “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”. *Rev. Financ. Stud.* 6.2, pp. 327–343.
- Johnson, N. L. e Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1. John Wiley & Sons.
- Koponen, I. (1995). “Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process”. *Phys. Rev. E* 52.1, pp. 1197–1199.
- Mantegna, R. N. e Stanley, H. E. (1995). “Scaling behavior in the dynamics of an economic index”. *Nature* 376, pp. 46–49.
- Matsushita, R., Rathie, P. e Da Silva, S. (2003). “Exponentially damped Lévy flights”. *Physica A* 326, pp. 544–555.
- Matsushita, R. et al. (2020). “Bypassing the truncation problem of truncated Lévy flights”. *Physica A* 559, p. 125035.

- Otiniano, C. E. G., Gonçalves, C. R. e Dorea, C. C. Y. (2017). “Mixture of extreme-value distributions: identifiability and estimation”. *Commun. Stat. - Theory Methods* 46, pp. 6528–6542.
- Popoviciu, T. (1935). “Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles”. *Mathematica* 9, pp. 129–145.
- Schinckus, C. (2013). “How physicists made stable Lévy processes physically plausible”. *Braz. J. Phys.* 43.4, pp. 281–293.
- Tsallis, C. (2009). “Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics: an overview after 20 years”. *Braz. J. Phys.* 39.2A, pp. 337–356.

Retornos financeiros padronizados

Resumo Previamente sugerimos uma lei de potência na forma $\ell = \zeta\sigma^\beta$, em que $\zeta > 0$ é uma constante, $0 < \beta \leq 1$ é um coeficiente de amortecimento, sendo que ℓ e σ representam amplitude e desvio padrão de retornos financeiros intradiários [Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 116 (2023) 106900]. Com resultado da aplicação dessa relação, os retornos financeiros padronizados com base nessa lei de potência exibem um padrão mais homocedástico, sem *clusters* de volatilidade. Aqui estendemos essa lei de potência, abrangendo o caso $\beta > 1$. Mostramos que a lei de potência pode ser explicada pelas pequenas variações típicas dos retornos financeiros, em que $\beta > 1$ aparece quando $\ell > 0$ se aproxima de um pequeno $\delta > 0$. Ilustramos como esse desenvolvimento adicional pode ser usado com sucesso para dados do real brasileiro versus o euro, o dólar americano e a libra esterlina.

Palavras-chave: Econofísica, Voo de Lévy truncado, Leis de potência, Dados financeiros, Taxas de câmbio.

3.1 Introdução

Um erro comum em finanças é assumir normalidade para dados leptocúrticos. Esse é o caso quando se assume que a dinâmica de retorno dos preços segue um processo difusivo com incrementos gaussianos. A distribuição estável de Lévy foi uma das primeiras formas que a econofísica tentou como uma possibilidade. A função de densidade de probabilidade estável

de Lévy é melhor do que a gaussiana para descrever retornos dos preços na parte central da distribuição de dados. Mas nenhuma dessas distribuições se encaixa nas caudas dos dados de retornos financeiros.

Embora a família ARCH-GARCH de modelos gaussianos possa descrever dados leptocúrticos, ela não explica o efeito de escala quando os retornos são agregados (Mantegna e Stanley, 1998). Em contraste, a distribuição estável de Lévy permite descrever o comportamento da agregação dos retornos financeiros. Mas é realmente difícil justificar a existência de variância com base na distribuição estável de Lévy, quando o segundo momento pode não estar definido nessa classe de distribuições. Por isso, a busca pelo comprimento de truncamento adequado tornou-se então relevante.

Por isso, o vôo truncado de Lévy (TLF) foi proposto por Mantegna e Stanley (1994), seguido por diversos refinamentos no procedimento de truncamento (Koponen, 1995; Gupta e Campanha, 1999; Matsushita, Rathie e Da Silva, 2003). Mas, ao contrário da distribuição estável de Lévy, os TLFs não podem explicar retornos extremos, como os 6 desvios padrão do índice S&P 500, (Mantegna e Stanley, 1995), ou os 2.56 desvios padrão do índice DJIA durante o Flash Crash (Mazzeu, Otuki e Da Silva, 2011). Em essência, o impasse em que os TLFs se encontram é o antigo problema da indução: como analisar adequadamente os dados extremos até que o próximo grande evento torne ineficaz o último modelo ajustado.

No entanto, um avanço permitiu que as distribuições da lei de potência contornassem seu impasse de truncamento, descobrindo dedutivamente uma lei de potência entre o comprimento do truncamento (ℓ) e seu desvio padrão (σ) (Matsushita et al., 2020). A fórmula para a lei de potência é $\ell = \zeta\sigma^\beta$, onde $0 < \beta \leq 1$ é o coeficiente de amortecimento e $\zeta > 0$ é uma constante. Mesmo que esta lei de potência não possa antecipar eventos extremos futuros (ilimitados) devido à natureza intratável do problema de indução, ela ainda pode ser utilizada para representar o passado (limitado) (Matsushita et al., 2023). No entanto, o caso crítico $\beta > 1$ não foi apresentado. Portanto, a contribuição deste artigo é preencher esta lacuna.

De fato, a instância anteriormente investigada para $\beta < 1$ refere-se a “retornos sobre o valor

médio dos preços” (Matsushita et al., 2020; Matsushita et al., 2023), ao invés da noção usual de retornos. Na extensão fornecida neste artigo, consideramos a definição usual de retornos, porque os resultados são mais amplos e também relevantes para $\beta > 1$. Todas as relações entre o desvio padrão e a amplitude dos dados de retorno financeiro estão agora incluídas na lei de potência. Em contraste com a lei de potência anterior, caracterizada por flutuações modestas, típicas nos retornos financeiros, a lei de potência atual com $\beta > 1$ se desenvolve quando ℓ se aproxima de um pequeno $\delta > 0$. Ilustramos como esse desenvolvimento adicional pode ser usado com sucesso para dados do real brasileiro versus o euro, o dólar americano e a libra esterlina.

O artigo está organizado da seguinte forma. A seção 3.2 apresenta nossos novos resultados. A Seção 3.4 os exemplifica e a Seção 3.5 finaliza com a conclusão do estudo.

3.2 Uma lei de potência para pequenos comprimentos de truncamento

Considere uma variável aleatória absolutamente contínua Y com função de densidade $g(y) = g(-y) > 0, \forall y \in \mathbb{R}$, e seja r o truncamento de y no intervalo $[-\delta - \ell, \delta + \ell]$, com $0 < \ell \ll 1$, $0 \leq \delta < 1$ fixo, e com sua função de densidade definida por

$$f(y) = \frac{g(y)}{\eta(\ell, \delta)}, \quad (3.1)$$

para $|y| \leq \delta + \ell$ e $f(y) = 0$ caso contrário, com

$$\eta(\ell, \delta) = \int_{-\delta-\ell}^{\delta+\ell} g(y)dy. \quad (3.2)$$

A variância de r pode ser escrita por

$$\sigma^2(\ell, \delta) = \int_{-\delta-\ell}^{\delta+\ell} y^2 f(y)dy = \frac{V(\ell, \delta)}{\eta(\ell, \delta)}, \quad (3.3)$$

no qual $V(\ell, \delta) = \int_{-\delta-\ell}^{\delta+\ell} y^2 g(y) dy$.

Neste artigo, consideramos $\delta > 0$, pois o caso $\delta = 0$ já foi tratado previamente, tendo sido encontrada a relação $\sigma(\ell, 0) \propto \ell$, (Matsushita et al., 2023). Agora, considerando $V'(\ell, \delta) = \partial V(\ell, \delta)/\partial \ell = 2(\delta + \ell)^2 g(\delta + \ell)$, obtemos a primeira derivada de $\sigma^2(\ell, \delta)$ com respeito a ℓ como

$$(\sigma^2)'(\ell, \delta) = \frac{V'(\ell, \delta)}{\eta(\ell, \delta)} - \frac{V(\ell, \delta)}{\eta(\ell, \delta)} \cdot \frac{\eta'(\ell, \delta)}{\eta(\ell, \delta)} = 2(\delta + \ell)^2 f(\delta + \ell) \left\{ 1 - \frac{\sigma^2(\ell, \delta)}{(\delta + \ell)^2} \right\}. \quad (3.4)$$

Note que $|r| \leq (\delta + \ell)$, então $E[(\delta + \ell - r)(r + \delta + \ell)] = E[(\delta + \ell)^2 - r^2] = (\delta + \ell)^2 - \sigma^2(\ell, \delta) \geq 0$, (Popoviciu, 1935), ou seja,

$$\frac{\sigma^2(\ell, \delta)}{(\delta + \ell)^2} \leq 1. \quad (3.5)$$

Consequentemente, $(\sigma^2)'(\ell, \delta) > 0$. E, se a derivada (3.4) for avaliada no ponto $\ell = 0$, obtemos

$$(\sigma^2)'(0, \delta) = \delta^2 f(\delta) \left\{ 1 - \frac{\sigma^2}{\delta^2} \right\} > 0,$$

em que $\sigma^2 = \sigma^2(0, \delta) = V(0, \delta)/\eta(0, \delta)$ pela Eq. (3.3). Como resultado, em uma distribuição truncada, conforme descrito em (3.1), com $\delta^2 > \sigma^2(0, \delta) > 0$ e $f(\delta) > 0$, encontramos

$$(\sigma^2)'(0, \delta) > 0.$$

Agora, para um ℓ suficientemente pequeno, consideremos a aproximação de primeira ordem de $\sigma^2(\ell, \delta)$,

$$\sigma^2(\ell, \delta) = \sigma^2(0, \delta) + (\sigma^2)'(0, \delta)\ell + \mathcal{O}(\ell^2). \quad (3.6)$$

Utilizando (3.5), e fazendo $0 < \sigma < \delta \ll 1$, o termo $\sigma^2(0, \delta)$ pode ser negligenciado, o que

proporciona a relação

$$\sigma^2(\ell) \approx (\sigma^2)'(0)\ell. \quad (3.7)$$

Dessa forma, a distribuição abruptamente truncada, descrita em (3.1) se relaciona a uma lei de potência na forma

$$\ell \propto \sigma^2. \quad (3.8)$$

Seguindo Matsushita et al. (2023), considere a função de peso $w(y, \ell) = w(-y, \ell) > 0$, tal que a distribuição truncada seja descrita por

$$f(y) = \frac{g(y)w(y, \ell)}{\eta(\ell, \delta)}, \quad (3.9)$$

para $|y| \leq \delta + \ell$, e $f(y) = 0$, caso contrário. Nesse caso,

$$\eta(\ell, \delta) = \int_{-\delta-\ell}^{\delta+\ell} g(y)w(y, \ell)dy. \quad (3.10)$$

Escolhendo convenientemente $w(y, \ell)$ de tal forma que

$$\lim_{\ell \downarrow 0} f(\delta + \ell) = 0 \quad (3.11)$$

para todo $\delta > 0$, obtemos $(\sigma^2)'(0, \delta) = 0$. Como resultado, por (3.7), a aproximação de primeira ordem será

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \frac{\sigma^2(\ell, \delta)}{\ell} \approx 0. \quad (3.12)$$

Isto significa que $\sigma^2(\ell, \delta)$ tende para zero mais rapidamente do que ℓ . Portanto podemos definir

um expoente $\beta > 0$ tal que

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \frac{\sigma^\beta(\ell, \delta)}{\ell} = \zeta > 0. \quad (3.13)$$

Logo,

$$\ell \propto \sigma^\beta, \quad (3.14)$$

para algum $\beta > 0$.

3.3 Exemplo

Seja X_t o preço de um ativo no instante $t \geq 1$, a tempo discreto. Considere a variação desse preço relativamente ao instante anterior como

$$X_t = (1 + r_t)X_{t-1},$$

em que r_t é um retorno que segue uma distribuição de probabilidade com média zero e variância σ_t^2 . Como os dados passados são limitados, se ℓ_t representa um ponto de truncamento variando no tempo amostrado de uma distribuição λ_t , podemos definir um modelo de probabilidade condicional que satisfaça a relação

$$P(|r_t| \leq \lambda_t | \lambda_t = \ell_t) = 1. \quad (3.15)$$

Como estamos lidando com retornos intradiários absolutos, assumimos taxas pequenas, tais que $0 < \ell_t \ll 1$. Devido ao fato de ℓ_t ser uma realização de λ_t , Eq. (3.15) refere-se ao passado, quando ℓ_t limita $|r_t|$. No entanto, como o futuro é indeterminado, a distribuição de

probabilidade incondicional (ilimitada) do retorno absoluto satisfaz

$$\pi_t = P(|r_t| \leq \ell_t) = \int_0^{\ell_t} P(|r_t| \leq \lambda_t | \lambda_t = l_t) f_{\lambda_t}(l_t) dl_t = P(0 < \lambda_t \leq \ell_t), \quad (3.16)$$

em que $f_{\lambda_t}(l_t)$ descreve a função de densidade de probabilidade de λ_t e $l_t > 0$ é um ponto de seu suporte. Como resultado, $[|r_t| \leq \ell_t]$ e $[\lambda_t \leq \ell_t]$ são eventos similares na relação proposta em (3.15). Embora π_t represente a média de probabilidades unitárias em (3.15) para todo $0 < \lambda_t \leq \ell_t$, π_t nem sempre será igual a um, uma vez que $P(0 < \lambda_t \leq \ell_t) \leq 1$. Dada uma realização do ponto de truncamento ℓ_t e o desvio padrão σ_t de r_t , podemos considerar a lei de potência (3.9)

$$\ell_t = \zeta \sigma_t^\beta, \quad (3.17)$$

em que $\zeta > 0$ é invariante no tempo e $\beta > 0$. Se (3.17) for válida para todo t , então $|r_t|$ pode ser padronizado como

$$|Z_t| = \frac{|r_t|}{\sigma_t^\beta} = \frac{|X_t/X_{t-1} - 1|}{\sigma_t^\beta}, \quad (3.18)$$

com $\beta > 0$, tal que

$$\pi_t = P(|r_t| \leq \ell_t) = P(|Z_t| \leq \zeta) \quad (3.19)$$

com $\zeta = \ell_t/\sigma_t^\beta$ constante. Apesar de $|Z_t|$ formar uma série heterocedástica para $\beta \neq 1$, π_t depende de uma constante ζ invariante no tempo. Assim, interpretamos a média global de π_t , $\forall t$, como uma probabilidade π , em que $1 - \pi$ representa uma medida de risco futuro de $|Z_t|$ superar um ζ constante.

3.4 Dados e análise

Para demonstrar nosso método utilizamos dados de taxas intradiárias de câmbio do real brasileiro em relação ao dólar americano, o euro e a libra esterlina transacionados nos mercados de câmbio (FOREX). Ao todo são 629.848 preços de oferta gentilmente fornecidos por *Tick Data, LLC* (Tabela 3.1).

Claramente, o retorno absoluto máximo diário $\hat{\ell}_t$ e a estimativa do desvio-padrão $\hat{\sigma}_t$ são variáveis linearmente correlacionadas (Figura 3.1, esquerda), cujas inclinações $\hat{\beta}$, apresentadas na Tabela 3.2, são superiores a 1. Esse resultado empírico é consistente com a lei de potência (3.17), o que demonstra a plausibilidade da hipótese de truncamento para dados passados, ao menos sob as condições do modelo (3.9).

Tabela 3.1: Descrição dos dados.

Taxa de câmbio	Moeda	Período	Total de observações
Real brasileiro/Libra esterlina	BRL/GBP	05 May 08 – 31 Dec 12	118,237
Real brasileiro/Euro	BRL/EUR	06 May 08 – 31 Dec 12	122,512
Real brasileiro/Dólar americano	BRL/USD	06 May 08 – 31 Dec 12	389,099
		Total	629,848

Fonte: Tick Data, LLC.

Os painéis centrais da Figura 3.1 mostram a evolução dos retornos r_t . Essas séries temporais, como pode ser visto, exibem *clusters* de volatilidade, um resultado comum dos retornos financeiros. As séries temporais de retornos padronizados Z_t (painéis à direita), por outro lado, evoluem mais uniformemente ao longo da constante ζ . A Tabela 3.2 também inclui a probabilidade estimada π , que está associada a ζ .

Tabela 3.2: Coeficientes estimados de β , $\ln \zeta$ e probabilidade π .

Moeda	$\hat{\beta}$ (S.E.)	$\ln \hat{\zeta}$ (S.E.)	π
BRL/GBP	1.12 (0.011)	2.166 (0.0740)	0.9908
BRL/EUR	1.10 (0.012)	2.010 (0.0812)	0.9911
BRL/USD	1.02 (0.014)	1.749 (0.0909)	0.9948

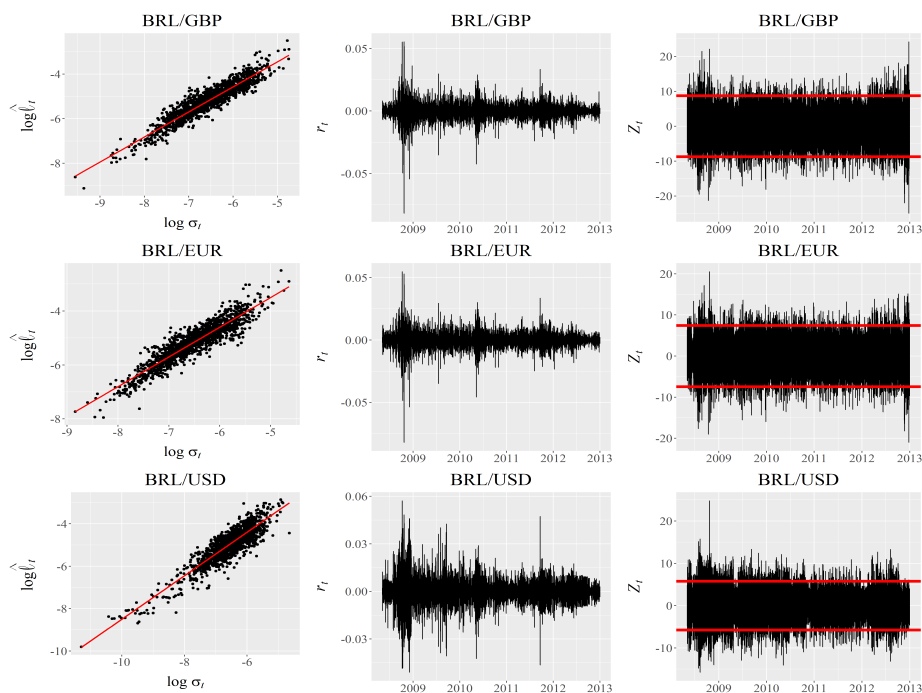


Figura 3.1: Esquerda: Apresenta $\ln \hat{\sigma}_t$ versus $\ln \hat{\ell}_t$, com a linha ajustada tendo a inclinação $\hat{\beta}$ apresentada na Tabela 3.2. Centro: A evolução dos retornos observados r_t . Direita: A evolução dos retornos padronizados Z_t , com linhas pontilhadas em vermelho referentes $\pm\zeta$.

3.5 Conclusão

Este artigo propõe uma lei de potência aplicável para retornos financeiros intradiários, na qual o comprimento de truncamento (ℓ) se relaciona com seu desvio padrão (σ) dos retornos, segundo a lei de potência é $\ell = \zeta\sigma^\beta$, em que $\beta > 0$ é o expoente e $\zeta > 0$ é uma constante. Os parâmetros ζ e β são invariantes no tempo, enquanto o comprimento de corte ℓ e o desvio padrão σ variam no tempo. Uma vantagem desse método é que não é preciso especificar a forma exata da função de distribuição do retorno r_t . Além disso, os momentos da distribuição podem variar no tempo. Em contraste com a presença de *clusters* de volatilidade r_t , os retornos padronizados $Z_t = r_t/\sigma_t^\beta$ mostram algum grau de regularidade, pois Z_t está vinculado a um limite constante ζ . A plausibilidade e a aplicabilidade dos nossos achados são sustentados por estudos empíricos com dados de retornos intradiários das taxas de câmbio do real brasileiro contra o euro, o dólar americano e a libra esterlina.

Agradecimentos. Agradecemos ao *Tick Data LLC* (www.tickdata.com) pelo fornecimento dos dados. FAP/DF, DPI/DPP/UnB, CNPq, e Capes forneceram apoio financeiro.

Referências Bibliográficas

- Gupta, H. M. e Campanha, J. R. (1999). “The gradually truncated Lévy flight for systems with power-law distributions”. *Physica A* 268, pp. 231–239.
- Koponen, I. (1995). “Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process”. *Phys. Rev. E* 52.1, pp. 1197–1199.
- Mantegna, R. N. e Stanley, H. E. (1994). “Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: The truncated Lévy flight”. *Phys. Rev. Lett.* 73.22, pp. 2946–2949.
- (1995). “Scaling behavior in the dynamics of an economic index”. *Nature* 376, pp. 46–49.
- (1998). “Modeling of financial data: comparison of the truncated Lévy flight and the ARCH(1) and GARCH(1,1) processes”. *Physica A* 254, pp. 77–84.
- Matsushita, R., Rathie, P. e Da Silva, S. (2003). “Exponentially damped Lévy flights”. *Physica A* 326, pp. 544–555.
- Matsushita, R. et al. (2020). “Bypassing the truncation problem of truncated Lévy flights”. *Physica A* 559, p. 125035.
- Matsushita, Raul et al. (2023). “Retrodicting with the truncated Lévy flight”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 116, p. 106900. ISSN: 1007-5704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106900>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570422003872>.
- Mazzeu, Joao, Otuki, Thiago e Da Silva, Sergio (2011). *The canonical econophysics approach to the flash crash of May 6, 2010*. Rel. técn.

§3.5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Popoviciu, T. (1935). “Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles”. *Mathematica* 9, pp. 129–145.

Relações entre a amplitude e o desvio padrão de dados limitados

Resumo Nos artigos anteriores desenvolvemos uma lei de potência relativa a comprimento de truncamento (ℓ) e desvio padrão (σ) na forma $\ell = \zeta\sigma^\beta$, em que $\zeta > 0$ é uma constante e $\beta > 0$ é um expoente. Neste artigo propomos um ensaio no qual novas proposições são sugeridas para o estudo de relações entre ℓ e σ , contemplando relações de recorrência para derivadas da variância.

Palavras-chave: Leis de potência, Amplitude, Lei de Recorrência.

4.1 Introdução

Seja r_t uma variável aleatória com média μ e desvio padrão σ , e considere um processo estocástico gerador de limites λ tal que possamos escrever

$$P(|r - \mu| \leq \lambda | \lambda = \ell) = 1.$$

Para pequenas variações, de modo que $0 < \ell_t \ll 1$, independentemente da forma da distribuição de r , nos artigos anteriores que compõem esta dissertação, mostramos que ℓ e σ se relacionam

como

$$\ell_t = \zeta \sigma_t^\beta,$$

em que ζ e β são constantes positivas (Matsushita et al., 2020; Matsushita et al., 2023). Nesse caminho, outros resultados teóricos foram encontrados, mas não foram utilizados.

Assim, o objetivo deste artigo é relatar as proposições enunciadas com as suas respectivas demonstrações, para possíveis aplicações futuras. Ele está organizado da seguinte forma. A Seção 4.2 apresenta proposições relativas a relações de desigualdade entre ℓ e σ , e ℓ e σ^β . Na Seção 4.3 trata das relações de recorrência entre as derivadas de σ com respeito a ℓ . As conclusões são abordadas na Seção 4.4.

4.2 Relações de desigualdade

Proposição 3. *Se r for uma variável aleatória absolutamente contínua, com média μ e desvio padrão σ , cujo suporte se restringe ao intervalo $I = [\delta_1 - c\ell, \delta_2 + \ell]$, com $0 \leq \delta_2 - \delta_1 \leq \ell$ e $c \in [0, 1]$, então $\sigma \leq \frac{3}{2}\ell$.*

Demonstração. Considerando o erro quadrático médio,

$$\mathbb{E} \left\{ \left[r - \frac{m+M}{2} \right]^2 \right\} = \sigma^2 + \left(\mu - \frac{m+M}{2} \right)^2,$$

no qual $m = \inf(I) = \delta_1 - c\ell$ e $M = \sup(I) = \delta_2 + \ell$, temos

$$\sigma^2 \leq \mathbb{E} \left\{ \left[r - \frac{m+M}{2} \right]^2 \right\} = \frac{1}{4} \mathbb{E} \left\{ \left[r - m + r - M \right]^2 \right\} \leq \frac{1}{4} \mathbb{E} \left\{ \left[(r - m) - (r - M) \right]^2 \right\},$$

pois $r - m \geq 0$ e $r - M \leq 0$. Assim, podemos escrever

$$\sigma^2 \leq \frac{1}{4} \mathbb{E} \{ (M - m)^2 \} = \frac{[\delta_2 - \delta_1 + \ell(1 + c)]^2}{4} \leq \frac{9\ell^2}{4}, \quad (4.1)$$

pois $0 < \delta_2 - \delta_1 \leq \ell$ e $0 \leq c \leq 1$. Logo, $\sigma \leq \frac{3}{2}\ell$.

□

Proposição 4. Considerando a proposição 3, se $\ell < 1$, $\forall \beta \geq 1$, existe uma constante $\zeta > 0$ tal que $0 \leq \zeta\sigma^\beta \leq \ell$.

Demonstração. Seja a desigualdade 4.1, então

$$\sigma \leq \frac{\delta_2 - \delta_1 + \ell(1+c)}{2} \leq \frac{3\ell}{2} \leq 2\ell.$$

Como $0 < \ell < 1$, para qualquer $\beta > 1$ temos $0 < \ell^\beta < \ell$. Nesse caso podemos escrever

$$\sigma^\beta \leq 2^\beta \ell^\beta < 2^\beta \ell.$$

Logo, $\exists \zeta > 0$ tal que $0 \leq \zeta\sigma^\beta \leq \ell$.

□

Proposição 5. Sob as condições das Proposições 3 e 4, considere a transformação $X = m + rm$, em que $E[X] = m$, $E[r] = 0$ e $\text{Var}[X] = \sigma_X^2 = m^2\sigma^2$. Nesse caso, a desigualdade $0 \leq \zeta\sigma^\beta \leq \ell$ implica $|m| \geq \zeta \cdot \frac{\sigma_X}{\ell^{1/\beta}}$.

Demonstração. Da Proposição 3, para o caso $\beta = 1$ sabemos que $\sigma \leq \frac{3}{2}\ell$. Assim, $\sigma_X = |m|\sigma \leq |m|\frac{3}{2}\ell$. Ou seja, $|m| \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_X}{\ell}$. Agora, se $0 \leq \zeta\sigma^\beta \leq \ell$, com $\beta > 1$, temos $\sigma \leq \zeta^{-1}\ell^{1/\beta}$. Desse modo, $\sigma_X = |m|\sigma \leq |m|\zeta^{-1}\ell^{1/\beta}$. Portanto, nesse caso, conclui-se que $|m| \geq \zeta \cdot \frac{\sigma_X}{\ell^{1/\beta}}$.

□

4.3 Algumas relações de recorrência

4.3.1 Relação 1

Seja $X \sim U[\delta_1 - c\ell, \delta_2 + \ell]$, de modo que $\text{Var}(X) = \sigma^2(\ell) = \frac{[d + \ell(1 + c)]^2}{12}$, com $d = \delta_2 - \delta_1$.

A derivada de $\sigma^2(\ell)$ com respeito a ℓ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (\sigma^2)'(\ell) &= \frac{2(1 + c)[d + \ell(1 + c)]}{12} \\ &= \frac{2(1 + c)[d + \ell(1 + c)]}{12} \times \frac{d + \ell(1 + c)}{d + \ell(1 + c)} \\ &= 2 \frac{1 + c}{d + \ell(1 + c)} \sigma^2(\ell) \\ &= 2 \cdot \frac{1 + c}{R} \sigma^2(\ell), \end{aligned}$$

em que R representa a amplitude do suporte de X . A segunda derivada de $\sigma^2(\ell)$ com respeito a ℓ é

$$\begin{aligned} (\sigma^2)''(\ell) &= \frac{2(1 + c)^2}{12} \\ &= \frac{2(1 + c)^2}{12} \times \frac{R^2}{R^2} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1 + c}{R} \right)^2 \sigma^2(\ell) \\ &= \frac{1 + c}{R} (\sigma^2)'(\ell). \end{aligned}$$

4.3.2 Relação 2

Para o caso geral, para uma variável truncada r não necessariamente uniforme, mas definida sobre o suporte $[\delta_1 - c\ell, \delta_2 + \ell]$, por Popoviciu (1935), temos a desigualdade $\text{Var}(r) = \sigma^2(\ell) \leq \frac{[d + \ell(1 + c)]^2}{4} = Q(\ell)$. Assim,

$$(\sigma^2)'(\ell) \leq \frac{2(1 + c)[d + \ell(1 + c)]}{4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(1+c)[d+\ell(1+c)]}{4} \times \frac{d+\ell(1+c)}{d+\ell(1+c)} \\ &= 2 \frac{1+c}{d+\ell(1+c)} Q(\ell) \\ &= 2 \cdot \frac{1+c}{R} Q(\ell), \end{aligned}$$

em que R representa a amplitude do suporte de r . Com respeito à segunda derivada,

$$\begin{aligned} (\sigma^2)''(\ell) &\leq \frac{2(1+c)^2}{4} \\ &= \frac{2(1+c)^2}{4} \times \frac{R^2}{R^2} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1+c}{R} \right)^2 Q(\ell). \end{aligned}$$

4.4 Conclusão

Neste artigo apresentamos alguns resultados teóricos adicionais que dizem respeito a relações entre ℓ e σ . Esses resultados podem subsidiar estudos futuros sobre modelos de probabilidade para distribuições truncadas de retornos financeiros passados.

Referências Bibliográficas

- Matsushita, R. et al. (2020). “Bypassing the truncation problem of truncated Lévy flights”. *Physica A* 559, p. 125035.
- Matsushita, Raul et al. (2023). “Retrodicting with the truncated Lévy flight”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 116, p. 106900. ISSN: 1007-5704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106900>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570422003872>.
- Popoviciu, T. (1935). “Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles”. *Mathematica* 9, pp. 129–145.

Conclusão e considerações finais

Como conclusões deste estudo, descobrimos que as distribuições truncadas — embora não possam explicar o futuro nem os eventos extremos — permitem descrever o passado. Nessa abordagem, descobrimos uma lei de potência na forma $\ell = \zeta\sigma^\beta$, com coeficiente $\zeta > 0$ e expoente $\beta > 0$, que relaciona a amplitude ℓ e o desvio-padrão de σ de um conjunto de retornos financeiros. Essa relação é *distribution-free*, já que não é preciso especificar a forma exata da função de distribuição dos retornos, sendo que a variância dos dados pode evoluir no tempo. Outro achado diz respeito à já conhecida presença de *clusters* de volatilidade na série de retornos r_t . Em contraste a esse fato estilizado, o retorno padronizado $Z_t = r_t/\sigma_t^\beta$ apresenta certo grau de homocedasticidade devido à presença de um limiar constante ζ . Os resultados teóricos foram verificados por meio de exemplos com dados reais, considerando taxas de câmbio intradiários, perfazendo mais de 32 milhões de observações. Os resultados obtidos aqui são válidos para retornos pequenos, o que é típico em dados intradiários.

Resta agora o desafio de desenvolver aplicações e conexões com a área de finanças. Um ensaio sobre isso foi apresentado por Matsushita et al. (2020), que mostraram que os retornos padronizados podem ser descritos por um modelo de probabilidade da teoria dos valores extremos. Isso abriria uma possível conexão com a modelagem do *Value-at-Risk* (VaR). Além disso, como ocorre na área de controle estatístico de qualidade, a descoberta dessa lei de potência permitiria — em tese — a utilização da amplitude dos retornos absolutos como um indicador da volatilidade dos retornos financeiros. Desse modo, sob a ótica da análise de séries tempo-

rais, modelar amplitudes poderia remeter a modelos mais simples do que os famosos modelos da família ARCH/GARCH para volatilidades. Finalmente, uma terceira frente de pesquisa diz respeito ao conceito de blocos máximos. Para se estudar valores extremos, o método dos blocos máximos exige um conjunto de dados identicamente distribuídos organizados em blocos de dados de mesmo tamanho. A padronização efetuada com a ajuda da lei de potência poderia resolver não apenas o problema da heterocedasticidade a qual os retornos estão sujeitos, mas também poderia flexibilizar a exigência por blocos de tamanhos iguais.

Finalmente, cabe ressaltar que o tema desenvolvido nesta dissertação foi bem recebido pela comunidade científica internacional, sendo que o primeiro artigo apresentado aqui já se encontra publicado na revista [Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 116 (2023) 106900].

Referências Bibliográficas

- Chou, Ray Yeutien (2005). “Forecasting Financial Volatilities with Extreme Values: The Conditional Autoregressive Range (CARR) Model”. *Journal of Money, Credit and Banking* 37.3, pp. 561–582.
- Cryer, Jonathan D. e Ryan, Thomas P. (1990). “The Estimation of Sigma for an X Chart: or S/c4?” *Journal of Quality Technology* 22.3, pp. 187–192. DOI: 10.1080/00224065.1990.11979238. eprint: <https://doi.org/10.1080/00224065.1990.11979238>. URL: <https://doi.org/10.1080/00224065.1990.11979238>.
- David, H. A., Hartley, H. O. e Pearson, E. S. (1954). “The Distribution of the Ratio, in a Single Normal Sample, of Range to Standard Deviation”. *Biometrika* 41.3/4, pp. 482–493. ISSN: 00063444. URL: <http://www.jstor.org/stable/2332728> (acesso em 18/06/2022).
- Douglas C. Montgomery Elizabeth A. Peck, G. Geoffrey (2012). *Introduction to linear regression analysis*. John Wiley Sons, Inc.
- Matsushita, R. et al. (2020). “Bypassing the truncation problem of truncated Lévy flights”. *Physica A* 559, p. 125035.
- Matsushita, Raul et al. (2022). “Retrodicting with the Truncated Lévy Flight”.
- Matsushita, Raul et al. (2023). “Retrodicting with the truncated Lévy flight”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 116, p. 106900. ISSN: 1007-5704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106900>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570422003872>.

- Montgomery, Douglas C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley Sons, Inc.
- Popoviciu, T. (1935). “Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles”. *Mathematica* 9, pp. 129–145.
- Roes, Kit C. B. e Does, Ronald J. M. M. (1995). “Shewhart-Type Charts in Nonstandard Situations”. *Technometrics* 37.1, pp. 15–24. ISSN: 00401706. URL: <http://www.jstor.org/stable/1269146> (acesso em 18/06/2022).
- Shone, K. J. (1949). “Relations Between the Standard Deviation and the Distribution of Range in Non-Normal Populations”. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 11.1, pp. 85–88. ISSN: 00359246. URL: <http://www.jstor.org/stable/2983697> (acesso em 18/06/2022).
- Tippett, L. H. C. (1925). “On the Extreme Individuals and the Range of Samples Taken from a Normal Population”. *Biometrika* 17.3/4, pp. 364–387. ISSN: 00063444. URL: <http://www.jstor.org/stable/2332087> (acesso em 18/06/2022).