

Universidade de Brasília
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Marcos Vinícius Gonçalves Nihari

**Reforma da Previdência Social: Transição do
Sistema de Repartição para o Sistema
Capitalizado**

BRASÍLIA

2022

Marcos Vinícius Gonçalves Nihari

Reforma da Previdência Social: Transição do Sistema de Repartição para o Sistema Capitalizado

Tese apresentada como um dos requisitos essenciais para conclusão do Programa de Pós Graduação 2022 – Doutorado em Economia – da Universidade de Brasília.

BRASÍLIA

2022

Marcos Vinícius Gonçalves Nihari

Reforma da Previdência Social: Transição do Sistema de Repartição para o Sistema Capitalizado

Tese apresentada como um dos requisitos essenciais para conclusão do Programa de Pós Graduação 2022 – Doutorado em Economia – da Universidade de Brasília.

Brasília, 20 de dezembro de 2022

Professor Doutor George Henrique de Moura Cunha
UniAlfa
Examinador Externo

Professor Doutor Michael Christian Lehmann
Universidade de Brasília
Examinador Interno

Professor Doutor Raphael Julio Barcelos
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Examinador Externo

Professor Doutor Vander Mendes Lucas
Universidade de Brasília
Orientador

Dedicatória

Qualquer esforço singular é infrutífero sem o apoio plúrimo de pessoas que estejam dispostas a suportá-lo ao longo da jornada. A mim, foi reservado o incontestável apoio de uma pessoa que nunca se esquivou de empenhar seu melhor esforço para ajudar aqueles a seu redor. A ela, minha noiva, Jessica Macedo Schultz, dedico este singelo trabalho.

Agradecimentos

Entre muitos que tornaram possível a conclusão deste trabalho, manifesto meus sinceros agradecimentos ao Professor Vander Mendes Lucas, meu orientador, que com sua sensatez e solicitude, forneceu-me a ajuda necessária nos últimos anos para a realização deste estudo.

Não me posso olvidar, também, de agradecer àqueles que foram fonte de inspiração para que eu prosseguisse estudando, meu irmão, Thiago Gonçalves Nihari, e minha irmã, Rachel Gonçalves Nihari. Igualmente, inegável minha eterna gratidão àqueles que sempre foram meu sustentáculo, em todas as jornadas até aqui percorridas, minha mãe, Lidia Nunes Gonçalves, e meu pai, Gilberto Nihari.

Resumo

Devido ao déficit no sistema de seguridade social em muitas economias, reformas estruturais no atual sistema de repartição são comumente discutidas e o estabelecimento de um sistema capitalizado é um tópico central nessa discussão. Nesse caso, é preciso analisar se ambos os sistemas são vistos como substitutos ou complementares entre si. No caso de os sistemas serem vistos como substitutos, então há uma oportunidade para futuras reformas previdenciárias implementarem uma transição de sistemas. Mais ainda, caso se estabeleça o sistema capitalizado, deve-se definir uma taxa de retorno para rentabilizar as contribuições e deve-se direcionar o eventual excedente desse sistema. Portanto, assumindo que o governo é o único que pode definir a taxa de retorno do sistema capitalizado, que o eventual excedente gerado neste sistema deve ser distribuído para o sistema de repartição, que o objetivo do governo é para maximizar o bem-estar social e que os novos trabalhadores poderão escolher para qual sistema contribuir, propomos um modelo para calcular a taxa de retorno ótima que precisa ser estabelecida pelo governo e estimamos a proporção da população que optará por contribuir para cada regime de segurança social.

Palavras-Chave: Contribuições Previdenciárias. Reforma Previdenciária. Sistema Capitalizado. Sistema de Repartição. Previdência Privada. Previdência Social.

Abstract

Due to the deficit in social security system in many economies, structural reforms in the current pay-as-you-go system are commonly discussed and the establishment of a fully funded system is a central topic. In this case, it is necessary to analyse if both systems are seen as substitutes or complements for each other. In the case the systems are seen as substitutes, then there is an opportunity for future pension reforms to implement a systems' transition. Even more, in the case a fully funded system is established, a return rate needs to be set to capitalize the contributions, and the eventual surplus of the capitalized social security needs to be directed. Therefore, assuming that the national government is the only one who can set the return rate of the fully funded system, that the eventual surplus generated in this system should be distributed to the pay-as-you-go system, that the government's goal is to maximize the social welfare and the newly workers will be able to choose to which system to contribute, we propose a model to calculate the optimal return rate that need to be settled by government and we estimated the proportion of the population that will choose to contribute to each social security system.

Key words: Fully Funded System. Pay-as-you-go System. Private Pension. Public Pension. Social Security Contributions. Social Security Reform.

Lista de Figuras

1	Fronteira Eficiente	24
2	Carteira de Mercado e Carteira Ponderada	25
3	Evolução da Contribuição Per Capita Trimestral Média para os Sistemas Previdenciários	31
4	Extensive Form	62

Lista de Tabelas

1	Faixas de Contribuição para o INSS - Contribuinte Individual	20
2	Resultados da Regressão	37
3	Regressão para Teste de Complementaridade	38

Conteúdo

1	Parte 1: A Previdência Complementar é, de fato, complementar?	11
1.1	Introdução	11
1.2	Revisão de Literatura	14
1.2.1	Reformas Paramétricas	15
1.2.2	A Reforma para o Sistema Capitalizado	16
1.2.3	Previdência Privada como um Substituto ou Complemento	17
1.3	O Sistema Previdenciário Brasileiro	18
1.3.1	A Previdência Social	19
1.3.2	A Previdência Privada	20
1.4	Modelos de Substituibilidade e de Complementaridade	21
1.4.1	Um Modelo de Substituibilidade	21
1.4.2	Um Modelo de Complementaridade	23
1.5	Modelo de Análise e Dados	27
1.5.1	Modelo de Análise para Teste de Substituibilidade	27
1.5.2	Modelo de Análise para Teste de Complementaridade	29
1.5.3	Dados	30
1.6	Resultados	33
1.7	Testando a Substituibilidade	33
1.7.1	Testando a Complementaridade	37
1.8	Considerações Finais da Parte 1	39
2	Part 2: The Transition from Pay-As-You-Go to Fully Funded System	41
2.1	Introduction	41
2.2	The PAYG General Model	43
2.3	The Trend of the CBR Function	46
2.4	The Fully Funded System Possibility	48

	10
2.5 The transition from pay-as-you-go to fully funded in a perfect balanced system	50
2.5.1 The First Transition Aspect: The Evolution of the Population	51
2.5.2 The Second Transition Aspect: The Deficit Possibility	53
2.5.3 The Third Transition Aspect: The Surplus in FFS	54
2.5.4 The Fourth Transition Aspect: The Joint Systems	57
2.6 The optimal values	59
2.6.1 Initial Assumptions	60
2.6.2 The Proposed Game	61
2.6.3 The Game Solution: Workers' Strategy	63
2.6.4 The Game Solution: Government's Strategy	68
2.7 Especial case: Mandatory FFS	69
2.8 Further Remarks of Part 2	70
3 Appendix	72
3.1 Appendix A	72
3.2 Appendix B	74
3.3 Appendix C	75
3.4 Appendix D	77
3.5 Appendix E	79
3.6 Appendix F	81
3.7 Appendix G	83
3.8 Appendix H	86
4 Referências Bibliográficas	89

1 Parte 1: A Previdência Complementar é, de fato, complementar?

1.1 Introdução

A aposentadoria é um momento inevitável para grande parte das pessoas e, mesmo que alguns apresentem condições físicas para continuar trabalhando, pode ser até mesmo socialmente desejável que ela ocorra. Tendo em vista que a produtividade do idoso tende a ser menor do que a produtividade do trabalhador (AIYAR; EBEKE; SHAO, 2016) em ascensão profissional, a aposentadoria pode ser considerada uma ocorrência natural, exigindo um plano econômico para a manutenção do padrão de vida dos aposentados.

Neste contexto, o Estado frequentemente foi visto como sendo o responsável por prover renda aos que não podem continuar exercendo sua atividade laborativa, ou seja, a seguridade social é historicamente o principal plano de aposentadoria para a população de vários países. Como exemplo, no ano de 2008 nos Estados Unidos, 64% das pessoas com 65 anos de idade ou mais receberam pelo menos metade de suas rendas na forma de benefícios da previdência social, sendo que 22% das pessoas dentro desta faixa etária receberam a totalidade da renda na forma deste benefício (AARON, 2011).

De acordo com Caliendo, Guo e Hosseini (2012), em um mercado completo, perfeitamente competitivo e com indivíduos completamente racionais, a Previdência Social poderia ser desnecessária, pois as pessoas poupariam a quantidade ótima para a aposentadoria, utilizando o saldo acumulado durante o período laboral para compor uma carteira de investimentos que proporcionasse uma renda que maximizasse sua utilidade. Neste cenário, as pessoas iriam distribuir poupança e consumo otimamente durante suas vidas e iriam se proteger contra os riscos a que estão sujeitos, incluindo riscos macroeconômicos, como inflação e recessão (AARON, 2011). Tal argumento é, ainda, comple-

mentado pela afirmativa de Crawford e Lilien (1981): sob as premissas de que o tempo de vida é previamente conhecido, os mercados de capitais são perfeitos e os benefícios de aposentadoria são justos, é possível concluir que a Seguridade Social é equivalente a qualquer outra forma de poupança.

Contudo, é amplamente reconhecido que as condições acima não são satisfeitas, pois as pessoas cometem sucessivos erros de julgamento, os mercados são imperfeitos, o mercado de seguros é incompleto devido ao risco moral e à informação assimétrica. Logo, mercados privados não conseguem lidar com estes problemas de forma eficiente e, portanto, a Seguridade Social torna-se necessária.

Por outro lado, mecanismos privados têm evoluído para fortificar a renda a ser recebida durante a aposentadoria. De forma geral, previdências privadas não apresentam risco de perda financeira para o governo, pois o risco é completamente transmitido para o contribuinte¹.

Sendo assim, entendida a importância e a utilidade tanto dos sistemas previdenciários sociais quanto dos privados, não é de se surpreender que um tema central aos atuais debates acerca da reforma previdenciária consista na discussão sobre a importância que o setor privado e o setor público exercerão sobre a estrutura de aposentadoria (CALCIANO; TIRELLI, 2008). Neste sentido, discussões sobre a proteção pessoal de longo prazo muitas vezes enfrentam a dicotomia de que esta deveria ser primariamente uma responsabilidade pública ou privada (STEVENSON et al., 2010). De forma geral, quase todas as previdências sociais são da forma PAYG². Por outro lado, fundos capitalizados são características comuns às instituições de previdência privada. Por tal razão, mesmo que a discussão não seja originalmente sobre a dicotomia entre responsa-

¹O beneficiário da previdência privada irá receber uma renda que depende das suas contribuições, da idade de aposentadoria, da expectativa de vida e da taxa de juros (ou taxa de retorno) que o gestor do fundo conseguir alcançar (CALCIANO; TIRELLI, 2008).

²PAYG refere-se a pay-as-you-go. No sistema PAYG os indivíduos contribuem para a previdência e os valores das contribuições fluem diretamente para os atuais aposentados. A outra forma de sistema é a Capitalizada, em que os valores das contribuições são aplicados no mercado de capitais e o montante gerado é utilizado como benefício para os próprios contribuintes no momento em que se aposentam

bilidade pública ou privada, o debate sobre a organização previdenciária no futuro como sendo mais PAYG ou mais capitalizada acaba tomando essa primeira forma (CALCIANO; TIRELLI, 2008).

Contudo, ao se propor uma reforma que substitua a previdência social pela privada, cabe avaliar como o contribuinte observa cada um destes modelos. Isto é, o cidadão comum percebe que a previdência privada é um substituto da previdência social, ou interpreta que ambos os modelos são complementares? Caso a resposta seja a favor da substitutibilidade, então uma reforma que elimine a previdência social e implemente uma previdência privada poderá ser bem aceita pela sociedade. Por outro lado, caso a resposta seja de uma interpretação de complementaridade, então as futuras reformas devem buscar um equilíbrio entre a atuação estatal e a privada. Entretanto, afirmar que as previdências privada e social são sistemas substitutos ou complementares não é uma tarefa trivial.

A literatura atual já contém grande quantidade de estudos relacionados à importância da previdência (social e privada) e seu impacto no bem-estar da sociedade (KUMRU, 2011), assim como estudos sobre as diversas reformas previdenciárias pelo mundo. Contudo, a ótica dos atuais estudos é concentrada na sustentabilidade dos sistemas previdenciários, sendo poucos os estudos que analisam a ótica do contribuinte. Logo, não iremos nos dedicar a defender uma reforma que mantenha ou que elimine a Seguridade Social, assim como também não iremos apresentar uma reforma previdenciária em si. O objetivo deste artigo é, portanto, analisar a relação entre as previdências públicas e privadas, isto é, nos concentraremos em responder a seguinte pergunta: a previdência privada é um substituto ou um complemento à previdência social?

O restante deste capítulo está dividido como a seguir: a Seção 2 apresenta a atual literatura sobre reformas previdenciárias pelo mundo; a Seção 3 apresenta o sistema previdenciário brasileiro; a Seção 4 apresenta modelos teóricos que explicitam as formas como as previdências privada e social podem ser substitutas ou complementa-

res; a Seção 5 explica os modelos econométricos a serem utilizados nesta análise e expõe os dados utilizados nesses modelos; a Seção 6 exhibe os principais resultados obtidos acerca da complementaridade ou substitutibilidade dos sistemas de previdência; a Seção 7 conclui este estudo, apresentando algumas considerações finais.

1.2 Revisão de Literatura

Os sistemas previdenciários de muitas economias do mundo estão enfrentando dificuldades para manterem-se sustentáveis, de forma que, nas últimas décadas, grandes mudanças começaram a ocorrer nos modelos das nações em desenvolvimento³. A origem destas crises é principalmente fundamentada na forma como o sistema foi desenhado e na mudança demográfica de cada país (HINDRIKS; MYLES, 2004).

O primeiro problema que deriva desta mudança demográfica é a redução na taxa de natalidade, limitando o crescimento da quantidade de trabalhadores que financiarão os benefícios pagos aos aposentados. O segundo fator que intensifica o problema demográfico é o aumento da expectativa de vida, aumentando a quantidade de aposentados ao longo do tempo.

De fato, o equilíbrio financeiro da previdência social na forma PAYG depende da razão custeio/benefício, que por sua vez é significativamente alterada quando ocorrem mudanças na expectativa de vida e de natalidade da população. A consequência é que quedas na razão custeio/benefício implicam aumento da taxa de contribuição para o sistema previdenciário e, teoricamente, esse aumento não é acompanhado de elevação de benefícios, pois apenas reflete uma deterioração demográfica. Ocorre que há décadas a expectativa de vida tem aumentado ao mesmo tempo em que a taxa de natalidade tem caído (SHIPMAN, 1999).

³Dentre os países em desenvolvimento, as primeiras mudanças no sistema previdenciário foram percebidas no Chile, seguido por países da América Latina, Europa Oriental e Ásia Central (AYUSO; VALERO, 2011).

1.2.1 Reformas Paramétricas

Existem apenas três formas em se corrigir um sistema previdenciário do tipo PAYG e evitar o seu déficit: aumentar a taxa de contribuição cobrada dos trabalhadores para manter constante o valor dos benefícios pagos aos aposentados; reduzir o valor do benefício da previdência para manter constante a taxa de contribuição; ou elevar a idade mínima para a aposentadoria para reduzir a quantidade de beneficiários. De fato, as últimas reformas previdenciárias têm sido, em geral, paramétricas, isto é, têm buscado revisar os parâmetros de financiamento e de concessão de benefícios. Como exemplo de medidas paramétricas já adotadas em reformas previdenciárias pelo mundo, podem-se citar países como Dinamarca, Alemanha, Noruega, Reino Unido e Estados Unidos, que têm aumentado gradualmente a idade mínima para aposentadoria (MARTIN; WHITEHOUSE, 2008).

Embora alterações paramétricas possam ser eficientes para amenizar o problema no curto prazo, tais medidas são socialmente questionáveis, pois mudanças desta forma enfraquecem o principal propósito do programa: proporcionar renda básica aos aposentados (AARON, 2011). Além disso, mudanças paramétricas muitas vezes não são suficientes para solucionar o problema no longo prazo, pois novas reformas deverão ser feitas caso não se observe o equilíbrio demográfico necessário para sustentar o programa. Um exemplo confirma esta hipótese: mesmo que vários dos países membros da OCDE já tenham regras mais rigorosas para o cálculo do benefício da aposentadoria, estima-se que entre os anos de 2000 e 2050 os gastos públicos para provimento destes benefícios terão aumentado aproximadamente 7 pontos percentuais como proporção do PIB nestes países⁴.

Logo, não é de se surpreender que debates sobre reformas previdenciárias tenham crescido intensamente ao redor do mundo e tomam hoje várias dimensões, desde

⁴Estima-se que a fração do gasto previdenciário em relação ao PIB crescerá 10% na Noruega, 8% na Espanha e na Coreia, 5% na Alemanha e 4% na França (CALCIANO; TIRELLI, 2008).

a eficiência de mudanças paramétricas do sistema até os impactos indiretos que tais reformas têm sobre as economias nacionais. Seja como for, devido à importância da aposentadoria, a reforma de um sistema previdenciário é um objetivo muito sensível, tanto pelo aspecto econômico, quanto pelas óticas políticas, sociais e demográficas.

1.2.2 A Reforma para o Sistema Capitalizado

Além das inúmeras discussões sobre reformas paramétricas que visem à sustentabilidade do sistema PAYG de previdência, muitas nações têm considerado a possibilidade de introduzir ou expandir o atual sistema para um modelo capitalizado (CALCIANO; TIRELLI, 2008; DWYER, 2005)⁵. Uma vez que o sistema torne-se completamente capitalizado, os benefícios são pagos com recursos acumulados por cada trabalhador, rompendo com a necessária identidade entre contribuições e benefícios.

Finke e Chatterjee (2008) afirmam que a poupança privada é vista como uma diversificação para a previdência social em um momento em que o crescimento demográfico tem se tornado um problema de solvência do sistema PAYG, uma vez que a individualização das contas aumenta a responsabilidade da participação do trabalhador em sua aposentadoria.

Estes argumentos não implicam que a previdência privada seja mais consistente do que a social. Devemos observar que tanto sistemas da forma PAYG quanto da forma capitalizada são estruturalmente frágeis na ausência de crescimento econômico, mas a capitalização de fundos permite manter o sistema previdenciário balanceado em relação ao crescimento populacional, ou mais especificamente, envelhecimento populacional (CALCIANO; TIRELLI, 2008).

⁵O Banco Mundial sugere que reformas previdenciárias sejam feitas utilizando um sistema misto de previdência pública e privada (CALCIANO; TIRELLI, 2008). Inclusive, a possibilidade da capitalização do sistema previdenciário é uma das alternativas mais discutidas nos Estados Unidos (HINDRIKS; MYLES, 2004).

1.2.3 Previdência Privada como um Substituto ou Complemento

Questionamentos sobre a relação entre previdências públicas e privadas, embora de fundamental importância nos tempos atuais, não são uma abordagem nova. Tilove (1960) já abordava este tema muito antes dos atuais problemas da Seguridade Social:

“O crescimento das previdências privadas interferiu no desenvolvimento da Seguridade Social, ou vice-versa? Qualquer um dos resultados é teoricamente possível. Pode-se argumentar que, sem a Seguridade Social, os planos de previdência privada seriam mais amplos. Por outro lado, há opiniões de que a previdência privada favorece trabalhadores de indústrias prósperas, que não teriam mais qualquer interesse pela Seguridade Social, prejudicando trabalhadores menos afortunados, que não teriam um sistema adequado de previdência social.” (TILOVE, 1960, p.10, tradução livre)

A passagem supracitada aponta para uma relação de substituição da previdência pública pela privada. Contudo, o próprio autor argumenta que a existência da Seguridade Social não prejudicou o desenvolvimento de previdências privadas, ao contrário, sendo possível que aquela tenha estimulado o desenvolvimento desta. Esta afirmação é igualmente compartilhada por Munnell (1979) ao indagar que, à primeira vista, a expansão simultânea das previdências social e privada poderia indicar que a primeira não dificultou o crescimento da segunda, tendo, ainda, encorajado o desenvolvimento desta. Ou seja, é também possível que ambos os sistemas sejam complementares entre si.

De fato, mesmo na atualidade, não há consenso sobre a relação entre os sistemas. De um lado há aqueles que defendem a existência de complementaridade entre estes. Por exemplo, Adema (2001), ao realizar uma análise de dados com os países da OCDE, concluiu que há complementariedade entre a Seguridade Social e a Privada.

Paralelamente, Caminada e Goudswaard (2005) indagam que os efeitos observa-

dos na Holanda sugerem o contrário: a redução expressiva dos benefícios da seguridade social neste país foi compensada, em grande parte, por benefícios privados, indicando que benefícios públicos e privados são substitutos.

Ainda, há aqueles que não reconhecem uma relação objetiva entre os sistemas previdenciários. Aaron (2011) defende a ideia de que as atuais propostas de reforma previdenciária que visam à substituição parcial ou total do modelo social por um modelo privado não têm mostrado qualquer avanço em relação aos seus objetivos, isto é, de manter uma estrutura saudável de seguridade para a população. Para o autor, previdências privadas não são necessárias nem suficientes para resolver os atuais problemas da seguridade social. Portanto, dado todos estes apontamentos, é perceptível que não há consenso na literatura acerca deste tema.

1.3 O Sistema Previdenciário Brasileiro

O Brasil possui tanto seus próprios sistemas públicos de seguridade social, o Regime Geral de Previdência Social (RGPS) e o Regime Próprio de Previdência Social (RPPS)⁶, que assumem a estrutura PAYG, quanto apresenta a possibilidade de o trabalhador brasileiro complementar a renda da aposentaria utilizando a previdência privada, formalmente denominada Previdência Complementar, que é capitalizada.

Intuitivamente existem duas razões para o trabalhador contribuir para um plano de previdência privada. Primeiro, porque existe um limite superior para o benefício do INSS, atualmente de R\$ 6.101,06 por mês⁷. O trabalhador que almeja uma renda durante a aposentadoria maior do que o limite deverá buscar outras formas de complementar o benefício. Segundo, porque existe a possibilidade de o benefício a ser recebido durante a aposentadoria ser menor do que a renda recebida durante o tempo laboral (devido às

⁶O RPPS é o sistema próprio dos servidores públicos e é gerido pelo ente federativo correspondente. O RGPS é o sistema utilizado pelos demais contribuintes que não sejam servidores públicos e é gerido pelo Instituto Nacional do Seguro Social (INSS).

⁷Limite máximo vigente em 2020 para contribuintes do Regime Geral de Previdência Social.

atuais regras de cálculo para o valor do benefício), assim, o trabalhador que almeja se aposentar com a mesma renda que possui atualmente poderá ter que complementar o benefício.

1.3.1 A Previdência Social

A contribuição para o INSS, por ser mandatória, é recolhida sempre que o salário é pago ao trabalhador. Contudo, se o trabalhador for cadastrado como Microempreendedor Individual (MEI), poderá escolher entre contribuir com apenas 5% do salário mínimo vigente ou recolher 20% sobre o salário de contribuição. Situação similar ocorre com um indivíduo que trabalhe por conta própria e não seja prestador de serviço à empresa ou equiparada, que pode escolher entre contribuir com 11% do salário mínimo vigente ou recolher 20% sobre o salário de contribuição. Estes dois tipos de trabalhadores são classificados como Contribuintes Individuais⁸ para o INSS.

Para o Contribuinte Individual, a diferença entre recolher o mínimo ou recolher 20% do salário de contribuição é que no primeiro caso ele não terá direito ao benefício de aposentadoria por tempo de contribuição, embora possa ter os benefícios referentes a Aposentadoria por Invalidez, Aposentadoria por Idade, Auxílio Doença, Pensão por Morte, Salário Maternidade, entre outros⁹.

Já no segundo caso, ele terá direito tanto ao benefício de aposentadoria por tempo de contribuição¹⁰ quanto aos demais benefícios da seguridade social. Logo, o Contribuinte Individual é o único tipo de trabalhador que pode perceber a previdência privada como um substituto à previdência social independentemente da renda. A Tabela

⁸Pela definição apresentada pelo Ministério da Economia, contribuintes individuais são “todos aqueles que trabalham por conta própria (de forma autônoma) ou que prestam serviços de natureza eventual a empresas, sem vínculo empregatício”.

⁹Conforme art. 80 da Lei Complementar N 123 de 2006.

¹⁰A diferença entre a Aposentadoria por Tempo de Contribuição e a Aposentadoria por Idade é que, no primeiro caso, o contribuinte poderá se aposentar assim que completar todo o período contributivo, já no segundo caso, além de ter de completar um período mínimo de contribuição, o contribuinte terá de aguardar a idade mínima necessária para requerer a aposentadoria. Dessa forma, quanto mais jovem o trabalhador começar a contribuir para o sistema previdenciário, maior será a vantagem em obter a Aposentadoria por Tempo de Contribuição.

1 apresenta as opções de contribuição para a previdência social para aqueles que se enquadram como Contribuinte Individual.

Tabela 1: Faixas de Contribuição para o INSS - Contribuinte Individual
A tabela apresenta as opções de contribuição para a previdência social para aqueles que se enquadram como Contribuinte Individual.

Salário de Contribuição	Alíquota	Observação
R\$ 1.045,00	5%	Não dá direito a Aposentadoria por Tempo de Contribuição e Certidão de Tempo de Contribuição. Exclusivo para MEI e para o contribuinte Facultativo de Baixa Renda ¹¹ .
R\$ 1.045,00	11%	Não dá direito a Aposentadoria por Tempo de Contribuição e Certidão de Tempo de Contribuição. Exclusivo para Contribuintes Individuais e Facultativos.
De R\$ 1.045,00 a R\$ 6.101,06	20%	Dá direito a todos os benefícios da Seguridade Social.

Portanto, além das duas razões intuitivas para que alguém contribua para a previdência privada, o Contribuinte Individual possui uma terceira razão: substituir o sistema social (PAYG) pelo sistema privado (capitalizado). É exatamente por esta razão que este estudo, a partir de agora, irá considerar apenas o Contribuinte Individual para realizar a análise de substitutibilidade e complementaridade dos sistemas previdenciários.

1.3.2 A Previdência Privada

Formalmente denominada Previdência Complementar, as contribuições para a previdência privada são opcionais e feitas através de instituições próprias e a critério exclusivo do contribuinte, ou seja, não há alíquota máxima ou mínima de contribuição. Ainda, existem dois tipos de instituições que podem receber as contribuições para a pre-

¹¹É considerado contribuinte facultativo de baixa renda o homem ou mulher de famílias de baixa renda e que se dedique exclusivamente ao trabalho doméstico no âmbito da sua residência (dono de casa) e não tenha renda própria.

vidência privada: as Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) e as Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC).

As EFPCs também são chamadas de Fundos de Pensão e são “constituídas exclusivamente para empregados de uma empresa ou grupo de empresas, aos servidores públicos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, bem como para associados ou membros de pessoas jurídicas de caráter profissional, classista ou setorial, denominadas instituidores”¹². Por outro lado, as EAPCs são acessíveis a quaisquer pessoas físicas que tenham interesse em constituir um plano de previdência privada. Logo, dadas as limitações de contribuições para uma EFPC, a maior parte dos contribuintes individuais para a previdência social, caso optem por contribuir para uma previdência privada, deverão fazer através de uma EAPC.

1.4 Modelos de Substituibilidade e de Complementaridade

Antes de analisarmos empiricamente se a previdência privada é percebida como um complemento ou como um substituto ao sistema social de previdência no Brasil, faz-se necessário expor teorias que justifiquem esta relação. Contudo, dado que a atual literatura não é consensual sobre este assunto, aqui apresentaremos tanto um modelo teórico que fundamente uma relação de substitutibilidade quanto um modelo que defenda a complementaridade entre os sistemas.

1.4.1 Um Modelo de Substituibilidade

Apresentaremos aqui o modelo proposto por Munnell (1979). Em sua análise sobre a interação entre previdências privadas e previdências sociais, os indivíduos podem escolher como irão acumular fundos suficientes para proporcionar a renda desejada em suas aposentadorias. Para isso, cada indivíduo pode tanto aplicar em previdência

¹²Conforme definição apresentada pela Fundação de Previdência Complementar do Brasil Central.

privada, contribuir para a seguridade social ou investir em outros ativos do mercado¹³. Sendo assim, o valor poupado para a aposentadoria em cada período (VP_t) é uma função da diferença entre a quantidade total de ativos desejada para a aposentadoria ($Ativos^*$) e a quantidade de ativos já acumulada para este fim ($Ativos_{t-1}$):

$$VP_t = f(Ativos^* - Ativos_{t-1}) \quad (1)$$

Por outro lado, a quantidade total de ativos desejada para a aposentadoria é uma função da renda desejada para a aposentadoria ($Benef^*$) e a expectativa de vida no momento em que ela ocorrer ($Anos$):

$$Ativos^* = f(Benef^*, Anos) \quad (2)$$

Ainda, o valor da renda desejada para a aposentadoria é, por sua vez, uma função da renda permanente do indivíduo, aproximada pela renda atual ($Renda_t$) e pela renda defasada ($Renda_{t-1}$), e pela taxa de desemprego ($Desemprego$):

$$Benef^* = f(Renda_t, Renda_{t-1}, Desemprego) \quad (3)$$

A quantidade de ativos já acumulada para a aposentadoria compreende a reserva já constituída em previdência social¹⁴ ($PrevSoc_{t-1}$), o valor previamente acumulado em previdência privada ($PrevPriv_{t-1}$) e a proporção dos outros ativos privados e reservados para este fim ($\lambda_1[AtivosTotais - PrevPriv]_{t-1}$):

$$Ativos_{t-1} = PrevSoc_{t-1} + PrevPriv_{t-1} + \lambda_1(AtivosTotais - PrevPriv)_{t-1} \quad (4)$$

¹³A análise é baseada em valores agregados da economia e desconsideram as diferenças de tratamento tributário e de cobertura de cada sistema.

¹⁴Dado que a previdência social é do tipo *pay-as-you-go*, este valor deve ser representado como sendo o valor presente descontado dos benefícios futuros da seguridade social.

Logo, o valor poupado para a aposentadoria em cada período é a soma da contribuição para a seguridade social ($ContSoc_t$), com a aplicação em previdência privada ($ContPriv_t$) e uma proporção de outras aplicações (OA_t):

$$VP_t = ContSoc_t + ContPriv_t + \lambda_2 OA_t \quad (5)$$

Combinando as Equações de 1 a 5 e rearranjando podemos concluir que:

$$ContSoc_t = f[Renda_t, Renda_{t-1}, Desemprego, Anos, PrevSoc_{t-1}, PrevPriv_{t-1}, \lambda_1(AtivosTotais - PrevPriv)_{t-1}] - ContPriv_t - \lambda_2 OA_t \quad (6)$$

Logo, teoricamente, o valor da contribuição para a previdência social ($ContSoc_t$) é reduzida pela exata quantidade aplicada em previdência privada ($ContPriv_t$). Sendo assim, pelo modelo proposto por Munnell (1979), os sistemas previdenciários são substitutos¹⁵.

1.4.2 Um Modelo de Complementaridade

Proporemos um modelo que fundamente a complementaridade entre os sistemas previdenciários. Para isso, assumiremos a racionalidade do contribuinte e adotaremos a teoria da Fronteira Eficiente de Markowitz e parte da teoria de precificação de ativos CAPM¹⁶, muito utilizadas nas análises de Carteiras de Investimentos.

(a) Background: CAPM

De acordo com a teoria da Fronteira Eficiente e do CAPM, o mercado é composto por um ativo livre de risco ($\sigma_0 = 0$) que remunera o investidor pela menor taxa do

¹⁵As conclusões empíricas de Munnell (1979) já foram apresentadas na seção Revisão de Literatura.

¹⁶CAPM refere-se a *Capital Asset Pricing Model*.

mercado¹⁷ ($r_0 > 0$) e por inúmeros ativos com risco¹⁸ ($\sigma_i > 0$) e com diferentes taxas de retorno esperado (r_i), assim como ilustrado exemplificadamente pelo lado esquerdo da Figura 1. Os ativos com risco podem ser compostos para criar infinitas carteiras de investimentos formadas apenas por ativos com risco. Para cada nível de risco possível destas carteiras (σ^i), toma-se a carteira de maior retorno esperado (r^i) e, desta forma, obtém-se a Fronteira Eficiente de Markowitz (FE), assim como ilustrado exemplificadamente pelo lado direito da Figura 1.

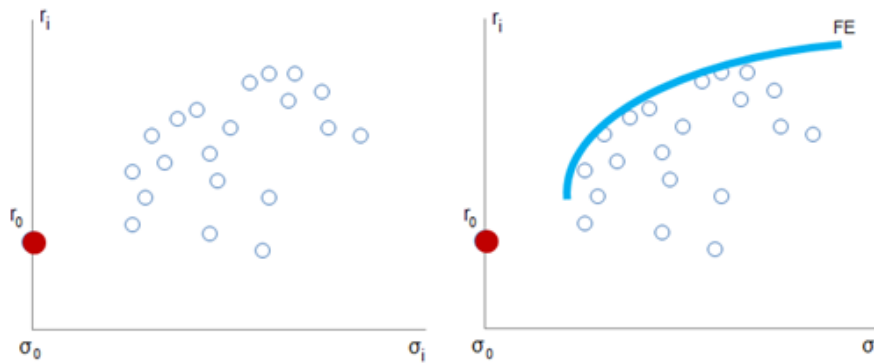


Figura 1: Fronteira Eficiente

Fonte: Elaboração Própria

Dado o retorno (r^M) e o risco (σ^M) da carteira de mercado, a carteira composta por proporções α e $1 - \alpha$ de ativo livre de risco e carteira de mercado, respectivamente, apresenta retorno (r^α) igualmente ponderado:

$$r^\alpha = \alpha r_0 + (1 - \alpha)r^M \quad (7)$$

Agora, podemos formar carteiras com o Ativo Livre de Risco, isto é, podemos tomar cada uma das carteiras sobre a Fronteira Eficiente e compô-la com uma proporção do ativo livre de risco. A carteira de mercado (CM) será aquela sobre a fronteira eficiente

¹⁷Denominada Taxa Livre de Risco.

¹⁸A expressão risco é utilizada como sendo a variância dos retornos de cada ativo ou carteira. Quanto maior a variância dos retornos, maior o risco.

que, quando composta com proporções do ativo livre de risco, apresenta o maior retorno esperado para todos os níveis de risco possíveis, assim como ilustrado exemplificadamente pelo lado esquerdo da Figura 2. Logo, todo investidor iria compor sua carteira final com uma proporção α do ativo livre de risco e uma proporção $1 - \alpha$ da carteira de mercado, a depender do risco tolerado. A reta que representa a carteira composta tanto pela carteira de mercado quanto pelo ativo livre de risco é denominada Linha de Mercado de Capitais¹⁹ (LMC). Caso o valor escolhido para α seja positivo e menor do que a unidade, ter-se-á uma carteira composta tanto pelo ativo livre de risco quanto pela carteira de mercado²⁰, assim como ilustrado exemplificadamente pelo lado direito da Figura 2.

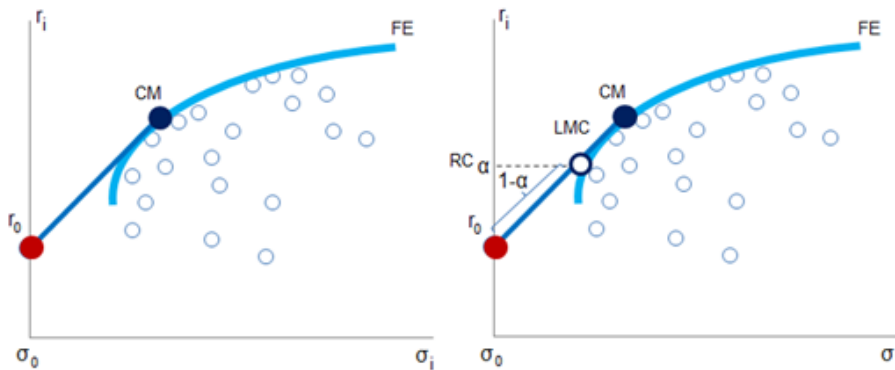


Figura 2: Carteira de Mercado e Carteira Ponderada

Fonte: Elaboração Própria

(b) Adaptação: Modelo com Previdência Social

Se considerarmos exclusivamente ativos previdenciários, isto é, fundos privados de previdência e a previdência social, poderemos adaptar o modelo da Fronteira Eficiente de Markowitz e a LMC argumentando que a previdência social equivale ao ativo livre

¹⁹Tradução para *Capital Market Line*

²⁰A teoria do CAPM assume a possibilidade de que α seja superior à unidade. Neste caso, o investidor estaria tomando recursos emprestados à taxa livre de risco e aplicando o total deste valor na carteira de mercado. A esta operação damos o nome de “alavancagem”.

de risco²¹ e que os diversos fundos privados de previdência equivalem aos ativos com risco²². Neste sentido, haveria uma carteira de mercado composta por fundos privados de previdência e, sendo assim, uma carteira ótima seria composta por uma proporção α da previdência social e uma proporção $1 - \alpha$ da carteira de mercado²³.

Logo, assumindo que o contribuinte visa uma determinada taxa de retorno (r^*) que seja suficiente para acumular a quantia necessária para sua aposentadoria, ele irá compor sua carteira de forma a obter esta exata taxa de retorno esperada. Sendo assim, cada contribuição para a previdência social deve ser acompanhada pela correta proporção de aplicação em previdência privada para que o retorno esperado se mantenha constante e próximo de r^* . Ou seja, os sistemas previdenciários são complementares.

Ainda, caso o retorno da carteira de mercado varie de um período para outro, a proporção de contribuições para a previdência social e para a previdência privada também devem variar, a fim de manter a constituição de uma carteira cuja taxa de retorno seja aquela estipulada anteriormente. Sendo assim, considerando que Retorno Excedente (re_t) seja o retorno de mercado que excede o retorno livre de risco em determinado período, teremos que:

$$r^* = \alpha_t r_0 + (1 - \alpha_t)(re_t + r_0) \quad (8)$$

$$r^* = \alpha_{t+1} r_0 + (1 - \alpha_{t+1})(re_{t+1} + r_0) \quad (9)$$

Das Equações 8 e 9 tem-se que:

²¹Embora a previdência social não remunere o capital de forma própria, pode-se utilizar como medida de retorno a taxa interna de retorno deste sistema previdenciário. Ainda, embora já tenhamos argumentado que a previdência social possui risco, aqui ela é utilizada como ativo livre de risco de forma análoga como títulos soberanos usualmente o são considerados no modelo CAPM.

²²Poder-se-ia argumentar que os fundos de previdência privada mantêm títulos livres de risco, como, por exemplo, os títulos soberanos. Contudo, dado que o benefício pago pela seguridade social é um direito instituído constitucionalmente, enquanto a taxa de juros dos títulos soberanos é essencialmente originária de dívida pública, podemos defender a hipótese de que o risco dos benefícios da previdência social são inferiores ao risco dos títulos públicos, ao menos pelo aspecto jurídico.

²³Neste caso, não se pode assumir α maior do que a unidade, pois não é possível tomar recursos emprestados do INSS. Ou seja, a LMC torna-se limitada para valores de α maiores ou iguais a zero e menores ou iguais à unidade.

$$\frac{1 - \alpha_t}{1 - \alpha_{t+1}} = \frac{re_{t+1}}{re_t} \quad (10)$$

Ou seja, se o retorno da carteira previdenciária de mercado (r_{t+1}) subir, então a proporção destinada à previdência social (α_{t+1}) deve aumentar. O raciocínio é análogo para o caso de o retorno da carteira previdenciária de mercado retrair. Dependendo da magnitude desta variação de retorno, é possível que seja necessário deslocar recursos entre os sistemas. Contudo, para variações suficientemente pequenas de retorno, basta que as contribuições no período seguinte sejam feitas nas adequadas proporções.

1.5 Modelo de Análise e Dados

O objetivo do presente estudo é analisar como os contribuintes percebem ambos os sistemas de previdência no Brasil, isto é, busca-se verificar se a Previdência Complementar é de fato complementar à Previdência Social. Se este for o caso, um aumento nas contribuições para o INSS deve ser observado juntamente com um aumento dos valores aplicados nas previdências privadas. O principal efeito de os contribuintes perceberem a previdência privada como complementar é que uma eventual migração total do atual sistema PAYG para um sistema capitalizado e gerenciado privadamente seria recebido com grande dificuldade pela população. Por outro lado, caso a Previdência Complementar brasileira seja percebida pela população como um método substituto para planejar a aposentadoria, uma reforma previdenciária que proponha a implementação de um sistema capitalizado enquanto cessa com o atual sistema PAYG pode ser mais facilmente aceito, ao menos pela parcela jovem e distante da aposentadoria.

1.5.1 Modelo de Análise para Teste de Substituibilidade

A análise aqui proposta será realizada através de regressão linear com dados em painel do logaritmo natural das contribuições para a previdência social (INSS), por

estado do Brasil, sobre o logaritmo natural das aplicações nas Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC), também por estado brasileiro, utilizando-se estimadores de Arellano-Bond, conforme a Equação 11:

$$\log(INSS_{it}) = \alpha + \beta \log(EAPC_{it}) + \gamma \log(INSS_{it-1}) + \theta X + e_{it} \quad (11)$$

O modelo apresentado, de forma geral, é uma adaptação do modelo proposto por Munnell (1979) e detalhado na seção anterior. De fato, o principal objetivo da regressão é analisar o efeito que as contribuições para a previdência privada têm sobre as contribuições para a seguridade social, assim como proposto pela autora.

Na regressão apresentada na Equação 11, α é o intercepto da regressão, $INSS_{it}$ é o valor das contribuições per capita²⁴ para o INSS efetuadas no trimestre t pelos residentes do estado i , $EAPC_{it}$ é o valor das aplicações per capita²⁵ nas instituições gestoras de previdência privada²⁶ no Brasil efetuadas no trimestre t pelos residentes do estado i . X é o conjunto de variáveis de controle: taxa de juros da economia, variação do índice da bolsa de valores brasileira, renda média, taxa de desemprego, taxa de variação do Produto Interno Bruto (PIB) e variáveis *dummy* para correção sazonal. Logo, percebe-se que as variáveis de controle adicionadas ao modelo estão em linha com o modelo proposto por Munnell (1979): tanto a renda média quanto o índice de desemprego foram inseridos no modelo, já a variável que determina as outras poupanças foram substituídas por variáveis que medem o custo de oportunidade do investimento previdenciário, como o rendimento do Ibovespa e a taxa de juros da economia. Em comparação com o modelo de Munnell (1979), apenas os valores iniciais de investimentos não foram considerados²⁷,

²⁴Aqui, o termo “per capita” significa o mesmo que “por contribuinte individual” que, conforme detalhado anteriormente, é uma das classificações de contribuintes para a Seguridade Social no Brasil.

²⁵Aqui, o termo “per capita” significa o mesmo que “por contribuinte” das EAPCs.

²⁶EAPC refere-se a Entidades Abertas de Previdência Complementar, que são as instituições financeiras aptas a receber contribuições previdenciárias por qualquer indivíduo, sob regime de contas individuais capitalizadas.

²⁷Saldo equivalente já acumulado em previdência social, saldo inicialmente acumulado em previdência privada e saldo previamente acumulado em outros ativos privados.

pois, como será exposto no próximo tópico, apenas uma parcela específica da população brasileira foi utilizada para a análise, de forma que os saldos iniciais destes investimentos não estavam disponíveis na época deste estudo. Além disso, e em comparação com o modelo proposto por Munnell (1979), aqui acrescentamos uma variável para medir a situação da economia brasileira, através da variação anual do PIB, e acrescentamos variáveis *dummy* para corrigir a sazonalidade das contribuições para a previdência social.

Outro ponto de elevada importância a ser destacado é que o modelo aqui proposto utiliza dados agregados por estado do país, diferentemente do modelo de Munnell (1979), que utilizou dados agregados de todo o país. Ou seja, aqui temos o potencial de encontrar divergências socioeconômicas locais, análise que não pôde ser feita pelo estudo anterior. Adicionalmente, o modelo proposto neste estudo considera os possíveis efeitos de defasagem da variável dependente, além de realizar a regressão utilizando-se valores em logaritmos naturais sempre que possível²⁸. O principal interesse em analisar a regressão proposta, contudo, ainda é avaliar o sinal do estimador β .

1.5.2 Modelo de Análise para Teste de Complementaridade

Além de testar o modelo teórico que propõe a substitutibilidade entre os sistemas previdenciários, também testaremos o modelo que sugere uma possível complementaridade entre estes. Conforme detalhado na seção anterior e indicado pela Equação 10, caso a previdência social e a previdência privada sejam complementares, espera-se que cada nova contribuição para um dos sistemas seja acompanhada pela devida proporção contributiva para o outro sistema, de forma que o retorno esperado da carteira previdenciária seja exatamente aquela almejada pelo contribuinte. Logo, para testar tal modelo, basta avaliarmos a correlação entre ambos os lados da igualdade da Equação 10. Portanto, a análise aqui proposta será realizada através de regressão linear com dados

²⁸As variações do Ibovespa e do PIB podem ser negativas, não sendo possível o uso do operador logarítmico

em painel da variação da proporção destinada à previdência privada, medida por estado do Brasil, sobre a variação do retorno excedente da carteira previdenciária de mercado em relação ao retorno implícito da previdência social²⁹, conforme a Equação 12:

$$\frac{1 - \alpha_{it}}{1 - \alpha_{it+1}} = \beta_0 + \beta_1 \frac{re_{t+1}}{re_t} + e_{it} \quad (12)$$

Na regressão apresentada na Equação 14, β_0 é o intercepto da regressão, $\frac{1 - \alpha_{it}}{1 - \alpha_{it+1}}$ é o valor da variação da proporção destinada à previdência privada entre os períodos t e $t + 1$ e em relação ao estado i , $\frac{re_{t+1}}{re_t}$ é o valor da variação do retorno excedente da carteira previdenciária de mercado entre os períodos $t + 1$ e t . O principal interesse em analisar a regressão proposta, conforme elucidado, é avaliar o valor do estimador β_1 , que deve ser positivo para que se verifique a existência de complementaridade entre os sistemas.

Foram consideradas três possibilidades para representar a carteira previdenciária de mercado: uma equivalente à carteira de referência do Ibovespa, outra composta apenas por títulos públicos federais cujo retorno é a taxa Selic e, por último, uma carteira cuja rentabilidade é determinada em iguais proporções pelo Ibovespa e pela Selic.

1.5.3 Dados

Devido à obrigatoriedade do recolhimento das contribuições para a previdência social para a grande parte dos trabalhadores brasileiros, o que impediria uma análise conclusiva sobre a complementariedade da previdência privada, os valores utilizados como pagamentos ao INSS são oriundos exclusivamente das contribuições efetuadas pelos contribuintes individuais que, conforme apresentado, possuem a opção entre contribuir com o valor mínimo e obter limitações dos benefícios da seguridade social ou contribuir com o valor máximo e poder usufruir de todos os benefícios do INSS. Os dados são dispo-

²⁹Como a previdência social não apresenta um retorno propriamente dito, é necessário estimar o retorno implícito das contribuições para este sistema. Para tal, considerou-se exclusivamente a regra de concessão de aposentadoria por idade no Brasil, tanto para pessoa do sexo masculino quanto para pessoa do sexo feminino. O retorno implícito é a Taxa Interna de Retorno. O valor de contribuição considerado é o de maior valor, isto é, 20% do salário base.

nibilizados mensalmente através do Boletim Estatístico da Previdência Social³⁰, publicado pelo Ministério da Previdência Social.

Por serem apresentados mensalmente³¹ e globalmente, os dados da previdência social precisaram ser tratados. Os valores das contribuições mensais foram divididos pelo total de contribuintes individuais em cada mês, obtendo-se a contribuição per capita mensal. Os valores obtidos foram somados para cada três meses, obtendo-se o valor da contribuição per capita trimestral para o INSS em cada estado.

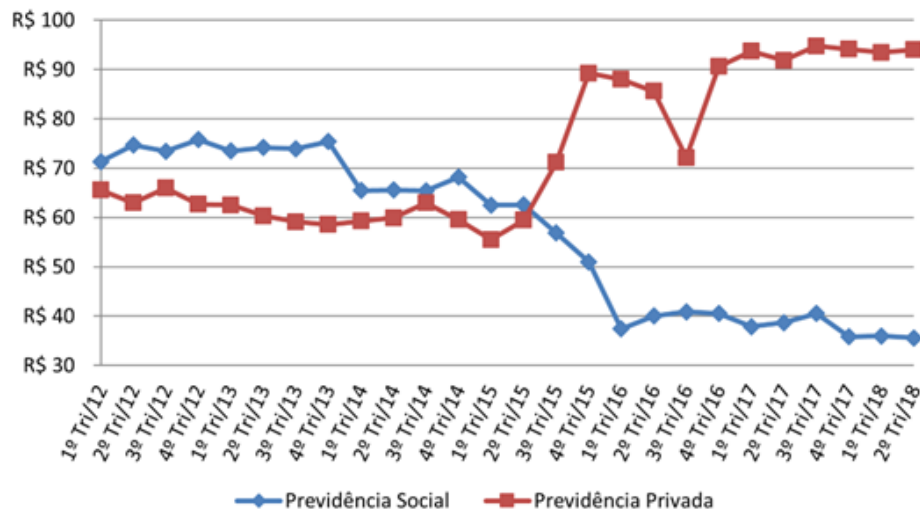


Figura 3: Evolução da Contribuição Per Capita Trimestral Média para os Sistemas Previdenciários

Fonte: Superintendência de Seguros Privados (SUSEP) e Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)

Os valores relativos às contribuições para previdência privada são publicamente divulgados pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP)³². Os dados são dis-

³⁰Disponível em <<http://www.previdencia.gov.br/dados-abertos/boletins-estatisticos-da-previdencia-social/>>. Acesso em: 3 nov. 2017.

³¹A base de dados não contém as contribuições para o INSS referentes ao mês de dezembro de 2015. Por se tratar de um mês importante, dado que os meses de dezembro concentram um elevado valor de contribuição, o total de contribuições neste mês foi estimado como sendo igual à média aritmética do total de contribuições nos meses de dezembro de 2014 e de 2016.

³²Disponível em <<https://www2.susep.gov.br/menuestatistica/SES/principal.aspx>>. Acesso em: 4 nov. 2017.

ponibilizados mensalmente e por estado brasileiro. Logo, os valores utilizados para a regressão são resultado da divisão do montante total aplicado em previdência privada em cada mês e para cada estado dividido pelo número de contribuintes daquele período, obtendo-se o valor de contribuição per capita para a previdência privada³³. Analogamente, estes valores são somados para cada três meses. A Figura 3 apresenta a evolução trimestral das contribuições per capita médias para as previdências social e privada, ambas exibidas em valores reais. Ao observá-la, a intuição natural é argumentar que os valores das contribuições para os sistemas público e privado caminham em sentidos opostos: quando um aumenta, o outro se reduz. Se este for o caso, que será testado pelo modelo de substituíbilidade, então a “previdência complementar” é, na verdade, um substituto da previdência social.

Os dados foram calculados em termos reais, tomando-se como preço base aquele praticado no início de janeiro de 2012 e utilizando-se como deflator o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), disponibilizado mensalmente pelo IBGE³⁴.

É possível notar, pela Figura 3, que há uma acentuada mudança de padrão a partir de 2015, de modo que tanto as contribuições *per capita* para a previdência privada quanto as contribuições *per capita* para a previdência social sobem e descem, respectivamente, de forma acelerada. Esse comportamento pode ser atribuído à recessão vivida pelo Brasil ao longo de 2015 e 2016. De acordo com Nery (2016), “a queda do emprego formal afeta diretamente os cofres do INSS”, e foi exatamente isso o que ocorreu: o desemprego subiu 77% ao longo dos primeiros oito meses de 2015. Ainda de acordo com Nery (2016), o déficit do RGPS em 2015 como proporção do PIB quase dobrou em relação a 2014, passando de 1,1% para 1,9%. O aumento do valor das contribuições para a previdência privada nesse mesmo período pode ser atribuído ao efeito substituição entre os sistemas: a crise pode ter gerado um sentimento de desconfiança em relação ao

³³Apenas para as previdências privadas nas EAPCs.

³⁴Disponível em https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplio.html?t=downloads_j. Acesso em: 26 dez. 2020

futuro, aumentando a necessidade do contribuinte individual planejar sua aposentadoria em um sistema alternativo à previdência social. Testar a substituição entre os sistemas é o principal objetivo deste estudo.

1.6 Resultados

1.7 Testando a Substituibilidade

A Tabela 2 apresenta o resultado obtido para a regressão proposta. A quinta coluna exibe os coeficientes da regressão que contém todas as variáveis de controle. É interessante notar que sete dos onze coeficientes são estatisticamente significantes a 95% de confiança, sendo seis deles estatisticamente significantes a 99% de confiança. Das quatro variáveis que não possuem significância estatística³⁵, três são variáveis dummy para correção sazonal, sendo a quarta variável a renda.

O principal resultado é curiosamente contraditório: a Previdência Complementar é, na verdade, substituta da previdência social. Quando consideradas todas as variáveis de controle, é possível verificar que cada 10,0% de aumento na contribuição para a previdência privada reduz as contribuições para a previdência social em aproximadamente 1,0%. A primeira coluna da Tabela 2 apresenta a correlação direta entre as contribuições para a previdência privada e para a previdência social, apenas adicionado o controle para o efeito defasado da variável dependente e, neste caso, um aumento de 10,0% na contribuição para a primeira reduz a contribuição para a segunda em aproximadamente 1,6%. Logo, apesar de estes valores estarem longe de indicar a previdência privada como um substituto perfeito à previdência social é evidente que aquela é um substituto a esta, contradizendo sua terminologia “complementar”³⁶.

³⁵Mesmo excluindo-as do modelo os demais coeficientes sofrem mínimas alterações de magnitude e se mantêm com o mesmo nível de significância.

³⁶Conforme tratado na Seção 5.3 e observação da Figura 3, há uma evidente mudança de comportamento a partir do ano de 2015. Sendo assim, duas regressões auxiliares foram elaboradas para testar se a substitutibilidade se mantém tanto no período de 2012 a 2014 quanto no período de 2015 a 2018. Os resultados se mantiveram consistentes com a conclusão apresentada para toda a amostra: o estimador de

Devido ao limite superior dos benefícios concedidos pelo INSS, poder-se-ia argumentar que o valor encontrado seria devido, contudo, ao efeito renda. Conforme a renda aumenta, o trabalhador contribui apenas para a previdência social até que a renda alcance o equivalente ao valor máximo do benefício do INSS. A partir deste momento, qualquer aumento de renda seria acompanhado unicamente de contribuições para a previdência privada. Contudo, dado que a maior renda média *per capita* da amostra utilizada neste estudo é inferior ao valor máximo da base de cálculo para contribuição para o INSS, esta argumento torna-se limitado. Ainda, a variável que mede a renda média foi incluída no modelo exatamente para evitar que seu efeito estivesse contaminando a análise. O estimador do efeito renda, entretanto, não apresentou significância estatística. Essa é uma conclusão interessante e pode estar indicando que a maior parcela dos contribuintes individuais optou, no período sob análise, por contribuir apenas com o valor mínimo para o INSS ou, tendo contribuído com a alíquota de 20%, poderia ter utilizado o valor do salário mínimo como base de cálculo para a contribuição. Dessa forma, variações na renda do contribuinte não afetariam o valor das contribuições para o sistema público de previdência. No momento de realização deste estudo, dados sobre a proporção dos contribuintes que escolhem contribuir com o mínimo ou o máximo não estavam disponíveis, impossibilitando comprovação sobre essa teoria.

Embora a previdência social e a previdência privada sejam duas formas distintas de se planejar a aposentadoria, estas não são as únicas possibilidades. Ao invés do contribuinte individual pagar as taxas do INSS, ele pode gerir seus investimentos de forma individual utilizando o mercado de capitais. Por tal razão, as colunas 3, 4 e 5 da Tabela 2 incluem, também, as variáveis $Selic_t$ e $Ibovespa_t$. Como a taxa Selic é a que baliza o retorno de quase todos os títulos de renda fixa³⁷, sejam públicos ou privados, espera-se que um aumento de sua taxa aumente o custo de oportunidade em se contribuir para o interesse é negativo e estatisticamente diferente de zero.

³⁷A taxa que baliza o retorno dos investimentos em renda fixa é, na verdade, a taxa do Certificado de Depósito Interbancário (CDI). Contudo, esta taxa guarda estreita correlação com a taxa Selic.

INSS, pois uma taxa de juros elevada reduz a necessidade de poupança mensal para que se alcance o mesmo montante desejado para a aposentadoria. O índice Ibovespa, paralelamente, mede o desempenho da bolsa de valores brasileira. O raciocínio é análogo ao apresentado para a taxa Selic: um alto valor do Ibovespa indica que a rentabilidade das ações das companhias brasileiras está atraente, aumentando o custo de oportunidade em se contribuir para a previdência social.

A coluna 3 da Tabela 2 mostra indicações de que, para o caso da Selic, os resultados obtidos são condizentes com a teoria apresentada. Um aumento de 10% da taxa tende a reduzir as contribuições para o INSS em aproximadamente 0,8%. Contudo, após a adição das variáveis que medem o desemprego e o PIB, nas colunas 4 e 5 da mesma tabela, percebemos que o efeito da taxa Selic torna-se estatisticamente não significativo ou tem efeito alterado de negativo para positivo. Isso pode significar que as variáveis que medem o desemprego e o PIB estejam captando parcialmente o efeito da Selic. Esse pensamento é pertinente, uma vez que as três variáveis medem, de formas distintas, a atividade econômica³⁸. Ou seja, na coluna 5 da Tabela 2, o efeito da taxa Selic pode estar indicando que um aumento na atividade econômica causa aumento nas contribuições para o INSS pelos contribuintes individuais. Outra possível explicação seria a de que um avanço na inflação, com conseqüente aumento na taxa Selic, incentivasse os contribuintes a aumentarem suas bases de cálculo para manterem seus futuros poderes de compra preservados.

Contudo, para o caso do Ibovespa, em todas as regressões em que a variável foi incluída, o resultado contradiz a teoria: um aumento de um ponto percentual no índice aumenta as contribuições para o INSS e em apenas 0,002%, ou seja, seu efeito é economicamente próximo de zero. Este resultado pode indicar que, em se tratando de planejamento para a aposentadoria, os contribuintes apresentam preferências mais conser-

³⁸Quando a atividade econômica sobe, há tendência para aceleração da inflação, que se reflete em aumento da taxa básica de juros, a Selic. Por outro lado, o Ibovespa mede a percepção que as pessoas têm em relação ao valor de mercado das empresas brasileiras. Por fim, o PIB mede a produção interna no país. Por isso dizemos que as três variáveis medem, de formas distintas, a atividade econômica.

vadoras, ou seja, os contribuintes evitam riscos mais elevados, como seria o caso dos investimentos em ações.

Por sua vez, os resultados obtidos para o efeito do desemprego e do PIB são condizentes com a teoria³⁹. Quando a atividade econômica sobe, o desemprego se reduz e o PIB aumenta, o que pode ter como reflexo aumento da renda disponível para o contribuinte individual⁴⁰ e maior incentivo para aumentar suas contribuições para a previdência social. No modelo, este efeito é captado pelo sinal positivo do estimador para o PIB e pelo sinal negativo do estimador do desemprego, ambos estatisticamente significativos e diferentes de zero.

Por fim, o efeito da variação populacional em idade para trabalhar também é interesse: um aumento dessa variável tem como reflexo a redução das contribuições para o INSS. Podemos apontar duas possíveis explicações para esse efeito. Primeiro, pode-se argumentar que o crescimento da população em idade para trabalhar seja devido ao aumento de pessoas que completam a idade de 14 anos e, nesse caso, seus principais provedores de renda optem por reduzir as contribuições sociais para disponibilizar mais recursos para sua educação ou, até mesmo, para prevenirem-se em relação a um possível ingresso tardio não intencional no mercado de trabalho. Segundo, o aumento da população em idade para trabalhar pode ser decorrência de migrações entre as Unidades Federativas, de forma que famílias estejam buscando regiões com melhores condições de trabalho e, nesse caso, pode ser esperado que as contribuições sociais desses familiares se reduzam até que suas condições econômicas se estabilizem nessa nova região.

³⁹Inclusive com as observações feitas por Nery (2016).

⁴⁰Ou, ao menos, expectativa de aumento futuro de renda.

Tabela 2: Resultados da Regressão

A tabela apresenta os valores dos coeficientes para cada variável do modelo. Os valores com sobrescrito ***, ** e * apresentem significância estatística de ao menos 99%, 95% e 90% de confiança, respectivamente. Cada grupo da amostra corresponde a uma UF.

Variável	Regressão 1	Regressão 2	Regressão 3	Regressão 4	Regressão 5
$\log(\text{EAPC}_{it})$	-0,1550***	-0,1549***	-0,1625***	-0,0969***	-0,1019***
$\log(\text{INSS}_{it-1})$	0,8915***	0,8912***	0,8477***	0,7505***	0,5179***
$\log(\text{Renda}_{it})$		0,0043	0,1081	-0,0166	0,0059*
$\log(\text{Selic}_t)$			-0,0751***	0,0102	0,0707**
Ibovespa_t			-0,0019***	-0,0016***	-0,0017***
$\log(\text{Desemprego}_{it})$				-0,1296***	-0,0797**
PIB_t				0,0122***	0,0191***
$\log(\text{População}_t)$					-2,5054***
SegundoTri					0,0015
TerceiroTri					0,0003
QuatroTri					0,0061
Nº Observações	648	648	648	648	648
Nº Grupos	27	27	27	27	27

1.7.1 Testando a Complementaridade

Apesar de a teoria que suporta a substitutibilidade ter sido defendida na seção anterior, ainda resta testarmos a teoria que fundamenta uma possível existência de complementaridade entre os sistemas previdenciários.

Neste sentido, a Tabela 3 apresenta os resultados para o teste de complementaridade exposto pela Equação 12. Dado que a idade para a aposentadoria e a expectativa de vida são distintas para contribuintes homens e mulheres, foram feitos testes para cada um dos sexos. Ainda, sabendo que os fundos de previdência privada podem aplicar os recursos acumulados tanto em ativos de renda fixa quanto ativos de renda variável,

Tabela 3: Regressão para Teste de Complementaridade

A tabela apresenta os valores do coeficiente da Equação 12. A variável de interesse é a razão entre os retornos excedentes da carteira entre os períodos $t+1$ e t . Os valores com sobrescrito ***, ** e * apresentem significância estatística de ao menos 99%, 95% e 90% de confiança, respectivamente. Cada grupo da amostra corresponde a uma UF.

Sexo	Composição da Carteira	Ibovespa	Selic	50% Ibovespa + 50% Selic
Homem	RetornoExcedente $_{t+1/t}$	0,0022***	-0,0107	-0,0015***
	Contante	0,9875***	0,9993***	0,9914***
Mulher	RetornoExcedente $_{t+1/t}$	0,0018***	-0,0054	-0,0006***
	Contante	0,9869***	0,9942***	0,9901***
	Nº Observações	675	675	675
	Nº Grupos	27	27	27

foram realizados testes considerando três diferentes representações para a carteira previdenciária de mercado: uma carteira composta apenas por ativos de renda fixa e cuja rentabilidade é a Selic; uma carteira composta apenas por ativos de renda variável e cuja rentabilidade é a do Ibovespa; e uma carteira mista, composta de forma paritária com a primeira e a segunda carteira.

Os resultados mostram que o coeficiente de interesse ou é muito próximo de zero, casos que ocorrem com as carteiras cujas rentabilidades são o Ibovespa e a média aritmética entre Ibovespa e Selic, para ambos os sexos, ou o resultado é estatisticamente não significativo e, ainda assim, muito próximo de zero e negativo. Ou seja, não se pode afirmar que o modelo de complementaridade proposto pela Equação 12 seja válido. Ao contrário, se considerarmos algumas carteiras específicas, concluiremos com 99% de confiança que não há qualquer relação entre as variações de retorno excedente e a composição das aplicações em previdências privada e social. A complementaridade seria verificada caso o coeficiente fosse positivo e estatisticamente significativo. Logo, a ausência deste resultado corrobora a teoria de que os sistemas previdenciários são

substitutos.

1.8 Considerações Finais da Parte 1

As discussões acerca de reformas previdenciárias têm adquirido cada vez mais importância nos últimos anos em todo o mundo e medidas diversas estão sendo tomadas por cada governo, seja de mudanças paramétricas ou de uma transição parcial ou total da previdência pública para a privada. O primeiro caso, das mudanças paramétricas, já ocorre há décadas. O segundo caso, que alguns poderiam chamar de privatização da previdência social, é ligeiramente mais recente, contudo, de igual relevância. Alguns autores, como Caminada e Goudswaard (2005), afirmam que há uma atual tendência para uma maior participação de benefícios privados na composição da renda familiar, sugerindo que o meio privado tem ganhado força nas sociedades.

Entretanto, afirmar que a previdência privada e a social são substitutas ou complementares não é trivial. Neste sentido, e utilizando dados brasileiros, efetuamos uma análise de relação entre estes dois sistemas. O principal resultado verificado contradiz o termo formal “Previdência Complementar” no Brasil, uma vez que esta é amplamente percebida como um sistema substituto à previdência social. Verificou-se que, em média, o brasileiro apresenta uma taxa de substituição entre previdência social e privada de 10,2%. Isto significa que o contribuinte brasileiro aceita reduzir suas contribuições para o INSS em aproximadamente 1,0% caso suas aplicações em previdência privada aumentem 10%.

Não obstante os resultados indiquem uma substitutibilidade ainda distante de ser considerada perfeita, isto é, à proporção de um para um, não se pode negar que ela exista. Com efeito, o resultado encontrado é ainda corroborado pelo fato de que o teste para existência de complementaridade não foi conclusivo ou, em casos específicos, foi rejeitado.

Contudo, embora a transição de um sistema previdenciário da forma PAYG (ca-

racterístico da Seguridade Social) para um sistema capitalizado (comum às previdências privadas) mostre-se como uma solução viável em termos de substitutibilidade, os custos sociais envolvidos tornam uma reforma deste tipo questionável. De fato, uma economia que propusesse uma reforma implementando o sistema capitalizado teria de enfrentar um longo período de transição: o sistema PAYG não poderá cessar abruptamente⁴¹, pois os atuais aposentados demandarão seus benefícios por já terem contribuído para este sistema, e aqueles que estão próximos da aposentadoria terão pouquíssimo tempo para capitalizarem seus fundos e, portando, irão demandar uma continuidade parcial do sistema PAYG. Logo, a formação de um fundo capitalizado iria naturalmente demorar uma geração inteira e, provavelmente, haveria uma significativa pressão social para que a reforma não ocorresse (Hindrinks; Myles, 2004).

Ainda, como afirmam Hindrinks e Myles (2004), há pouca evidência de que a população executaria uma provisão adequada para suas aposentadorias. Neste sentido, o estado poderia intervir tornando mandatórias as aplicações em previdência privada, assim como são hoje as contribuições para o INSS no Brasil.

Reforçamos que as conclusões desta pesquisa não são necessariamente a favor de uma privatização da Seguridade Social, embora a literatura atual sugira que este é um caminho a ser trilhado por muitas das economias em todo o mundo. Nossa conclusão é de que a população brasileira tem percebido ambos os sistemas previdenciários, público e privado, como substitutos, indicando que uma reforma de transição de sistemas poderia ser bem aceita caso fosse gradual e bem divulgada.

⁴¹O Reino Unido, por exemplo, optou por reduzir o valor dos benefícios pagos através do sistema PAYG ao mesmo tempo em que estimula o uso de previdências privadas, isto é, encoraja a transição para um sistema capitalizado. O exemplo do Reino Unido é, provavelmente, o destino das reformas previdenciárias em todo o mundo, mas a credibilidade das previdências privadas em comparação ao modelo público é um importante fator a ser considerado por cada governo (Hindrinks; Myles, 2004).

2 Part 2: The Transition from Pay-As-You-Go to Fully Funded System

2.1 Introduction

The balance of social security system is a central topic in discussion by developed and underdeveloped economies. If the system suffers from lack of funding, the retired people will not receive their retirement payment or, at least, will receive an insufficient amount. Occurs that the social security systems in most nations were first implemented as a Pay-As-You-Go System (PAYGS) and it depends on demographic characteristics. If the worker population size decreases relatively to the retired population, the system will present deficit. Since demographic characteristics are not in control of government, this kind of system is sensitive to the nature of human behavior.

In that sense, Martínez et al. (2021) say that the search for new financial systems to sustain pensions is the primary trend at present⁴². According to Hindriks (2004), and in the same way as said by Martínez et al. (2021) and Edwards (2021), the reason for the “pension crisis” can be summed up in three topics: first, the developed economies had presented a reduction in the birth rate; second, the longevity is increasing and the people are living longer; third, there is tendency to reduce the retirement age. Thus, Hindriks says that “without major reform or an unacceptably high increase in tax rates, the pension programs will either go into deficit or pay a much reduced pension”. In the same sense, Shoven et al. (2021) and Edwards (2021) argues that, at least in the United States, the Social Security trust fund will reach insolvency by 2035.

If the economies had been implemented a Fully Funded System (FFS) of social security, demographic changes should not be a problem. In this kind of system, each person saves money for its own retirement. The funding, therefore, depends only on

⁴²And the leading countries studying new financial systems to the social security are the United Kingdom, the USA, and the Netherlands.

the interest rate of the economy. Because of that, many governments are analyzing a possibility of social security reform that changes the type from PAYGS to FFS. In this way, the most important pension reform discussed in United States is exactly to move from a PAYGS to a FFS⁴³ (HINDRIKS, 2004). But, there is an important and difficult issue pointed out by Hindriks: the transition to a fully funded system relies on the hypothesis that the workers will make the appropriate amount of savings during their labour time, and there is evidence that it is likely to not happen⁴⁴

In addition, many economists, accountants and other experts in social security say that once the PAYGS is already in place, a sudden reform can collapse the last generation in this system: given that no more contribution would be made, there would be no funding to pay benefits to current retired people. Of course, Hindriks (2004) also argues that a pension reform, if a government decides to do, should take some time enough to accumulate the proper amount of capital that will sustain the new system.

Therefore, a government needs to analyze if a transition from a PAYGS to a FFS is really beneficial for the society before making this decision. We could say that if the reform does not reduce the welfare of the population, then the transition will be at least as good as the current situation. That discussion is the mainly goal of Feldstein (1995). The idea behind his work is to give government bonds to current retirees with a value equal to the present value of the benefits they should receive in the PAYGS. That is, the idea is to eliminate the unfunded program by government debt⁴⁵.

Thus, the present study intends to show that it is possible to reform social security system from PAYGS to FFS without cost of transition and that it can be beneficial to society.

⁴³Hindriks (2004) also apoints that the United Kingdom government had made efforts to set a FFS by encouraging the use of private pensions

⁴⁴In addition, Le-rong and Xiao-yun (2021) say that cocial security has, as one of its primary aims, the provision of financial support to those deemed to be poor or facing the threat of poverty. Therefore, any social security reform needs to consider this aspect. Le-rong and Xiao-yun (2021) also argue that much social security expenditure and a more equitable social security system should be encouraged.

⁴⁵Under the Feldstein (1995) idea, he argues that the FFS would actually raise economic welfare if three conditions are met. First, the marginal product of capital needs to exceed the rate of economic growth. Second, the marginal product of capital needs also to exceed the appropriate consumption discount rate. Third, the rate of economic growth should be positive.

Here we will show that the lack of funding in the first system caused by the reform could be covered by the surplus of the second one. With that in mind, we first present a general model of PAYGS. Secondly, we show how a FFS would work and proceed to analyze the deficit in the first system and the surplus in the second one. Next, we compare the deficit and the surplus of these systems and conclude that, in given circumstances, the former is greater than the latter. Finally, we calculate the optimal values to the social security system.

2.2 The PAYG General Model

First of all, we will derive a general model of PAYGS. To do that, let's assume there are only two types of agents involved: workers and retirees. The wage received by any worker is w and the social security payment to any retiree is a proportion of the wage, that we will denote by λ_t , that is, in each period the retiree receives $\lambda_t w$ by the social security system. The parameters w and λ_t are positive, being w constant whereas λ_t can vary over time.

At the beginning, that is, when $t = 0$, the Labor Force is given by L_0 and the Population Retired Size is R_0 . In the next period, when $t = 1$ in this case, a proportion η of the workers retires, a percentage δ of the population enters the labor force and a fraction θ of the retirees dies. This process occurs every period. For our purpose, we will assume that η , δ and θ are constant over time.

Finally, to finance the system, every worker pays the Social Security Tax (SST), denoted by τ_t , that is also positive and is allowed to vary over time. All the parameters of the model are summed up in the Table 1.

Table 1: Model's Parameters

Labor Force Size at time t	L_t	Retiree Death Rate	θ
Population Retired Size at time t	R_t	Worker's wage	w
Entering Labor Force Rate	δ	Social Security Benefit at time t	$\lambda_t w$
Retirement Rate	η	Social Security Tax at time t	τ_t

Now we can derive the model and debate the conclusions. First of all, for the Social Security System (SS) to be perfect balanced it is necessary that the total amount paid as SST be equal the total amount received by the retirees, that is:

$$\tau_t w L_t = \lambda_t w R_t \quad (13)$$

Therefore, since we want the system to be balanced any period, it is necessary to have the retirement/labor ratio equal the contribution/benefit ratio over time. In other words, for the SS be balanced, we need to have:

$$\frac{\tau_t}{\lambda_t} = \frac{R_t}{L_t} \quad (14)$$

On the other hand, we know that a fraction θ of retirees in the previous period dies and a proportion of the workers in the previous period retires, so:

$$R_t = (1 - \theta)R_{t-1} + \eta L_{t-1} \quad (15)$$

We also know that whereas a percentage of the workers retires each period, a fraction of the population enters the labor force. If we assume that the size of the population that becomes part of the laboring force each time is exclusively a function of

the labor force size in the previous period, we have:

$$L_t = (1 - \eta)L_{t-1} + \delta L_{t-1} \quad (16)$$

Rearranging equation (16) and applying for the $t - 1$ previous periods we can conclude that:

$$L_t = (1 - \eta + \delta)^t L_0 \quad (17)$$

Here we need to point an observation: since we don't expect the population to shrink to zero, it's necessary to have $\delta \geq \eta$. In other words, we require that the entering labor force rate is greater than or equal to the retirement rate⁴⁶. Additionally, we can substitute the term t in the equation 17 for the term $t - 1$ and rewrite equation 15:

$$R_t = (1 - \theta)R_{t-1} + \eta(1 - \eta + \delta)^{t-1} L_0 \quad (18)$$

Now it is possible to calculate⁴⁷ R_t just in terms of R_0 , L_0 and the parameters θ , η and δ :

$$R_t = (1 - \theta)^t R_0 + \frac{(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \theta)^t}{\delta + \theta - \eta} \eta L_0 \quad (19)$$

Lastly, we can replace equations 17 and 19 in equation 14 to verify the condition so that the SS to be perfect balanced over the time:

$$\frac{\tau_t}{\lambda_t} = \frac{(1 - \theta)^t R_0 + \frac{(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \theta)^t}{\delta + \theta - \eta} \eta L_0}{(1 - \eta + \delta)^t L_0} \quad (20)$$

With balanced condition in mind, let's analyze what happens with the contribution/benefit ratio (CBR), given by τ_t/λ_t and denoted for the function $\phi(\cdot)$, if we change the

⁴⁶Of course it is possible to have a retirement rate greater than the entering labor force rate, but it cannot persist continuously. Even so, we have stated that η and δ are constant over time, so it is necessary to make the assumption that $\delta \geq \eta$. This assumption, nevertheless, is not enough to avoid deficit in SS, since the retired population can grow faster than labor force size.

⁴⁷See Appendix A.

value of the parameters. For simplicity, let's rewrite equation 20:

$$\phi(\theta, \eta, \delta, R_0, L_0, t) = \frac{(1 - \theta)^t R_0}{(1 - \eta + \delta)^t L_0} + \frac{\eta}{(\delta + \theta - \eta)} \left[1 - \frac{(1 - \theta)^t}{(1 - \eta + \delta)^t} \right] \quad (21)$$

Firstly, it is clear that CBR is increasing with R_0 and decreasing with L_0 , assuming that θ is less than unity and that $1 + \delta$ is larger than η . In other words, if there is no period in which every retirees die nor every new retirees overcome the new workers added to the previous ones (what is obvious, since δ is assumed to be positive and η is assumed to be less than unity), then either a larger initial number of retirees or a smaller size of the initial labor force increases the CBR function. Mathematically speaking we can point that:

$$\frac{\partial \phi}{\partial R_0} = \frac{(1 - \theta)^t}{(1 - \eta + \delta)^t L_0} > 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial L_0} = -\frac{(1 - \theta)^t R_0}{(1 - \eta + \delta)^t L_0^2} < 0 \quad (23)$$

All these conclusions are intuitive and suggests that the model is consistent with the economic theory, but none of them provide new insights to the social security study yet.

2.3 The Trend of the CBR Function

Even though we have stated the system to be balanced, we still don't know what is the trend of the CBR function over the time. Since CBR is a discrete function on t , we can't differentiate it with respect to time. In order to comprehend the evolution of the rate contribution/benefit over the periods we need to compare the function between two successive periods. The easiest way to achieve this is rewriting equation 21, where $\phi(\theta, \eta, \delta, R_0, L_0, t)$ is denoted as ϕ_t :

$$\phi_{t+1} = \frac{(1 - \theta)^{t+1} R_0}{(1 - \eta + \delta)^{t+1} L_0} + \frac{\eta}{(\delta + \theta - \eta)} \left[1 - \frac{(1 - \theta)^{t+1}}{(1 - \eta + \delta)^{t+1}} \right] \quad (24)$$

$$\phi_t = \frac{(1-\theta)^t R_0}{(1-\eta+\delta)^t L_0} + \frac{\eta}{(\delta+\theta-\eta)} \left[1 - \frac{(1-\theta)^t}{(1-\eta+\delta)^t} \right] \quad (25)$$

Now, subtracting equation 24 by equation 25 we get:

$$\phi_{t+1} - \phi_t = \frac{(1-\theta)^t}{(1-\eta+\delta)^t} \left[1 - \frac{1-\theta}{1-\eta+\delta} \right] \left[\frac{\eta}{\delta+\theta-\eta} - \frac{R_0}{L_0} \right] \quad (26)$$

Since the fraction outside the brackets is always positive, the trend of the function depends only on the sign of the terms inside the brackets. Moreover, we know $1 - \eta + \delta$ is greater than unity and $1 - \theta$ is less than one. Thus, we conclude that $1 - \frac{1-\theta}{1-\eta+\delta}$ is also positive. Additionally, the term $\delta + \theta - \eta$ is also positive⁴⁸. Therefore, the trend of CBR function only depends on the sign of the last right brackets. If $\frac{\eta}{\delta+\theta-\eta} - \frac{R_0}{L_0}$ is positive then the function tends to increase, otherwise, it tends to decrease. Since the parameters η , δ and θ are constant, we conclude that the sign of $\phi(t+1) - \phi(t)$ depends on the value of the $\frac{R_0}{L_0}$. If the initial retired population is sufficiently small compared to initial workers population, then CBR function increases over time, but if the opposite occurs, it decreases continuously.

The reason behind this behavior is that: if R_0 is small enough when compared to L_0 , then the net amount of new retirees will represent a large fraction of R_0 than the new labor force will represent as a fraction of worker population. Therefore, the contributions to the social security system will need to increase relatively to the benefits payed in order to balance the system. This is an interesting conclusion: the PAYG is a good social security system just if the number of workers is sufficiently large in comparison to the number of retirees, but this condition implies that in the long term, the system becomes less efficient over time. If we consider that in the very past the population of the big nations were composed mostly of workers, then it is not surprising that they adopted the PAYG system and that this became a big problem nowadays.

The only way to keep constant the value of CBR function over the time is to respect

⁴⁸Remember that $\delta + \theta - \eta$ is equal $(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)$.

one condition: $\frac{\eta}{\delta + \theta - \eta}$ needs to be equal to $\frac{R_0}{L_0}$. It can be shown⁴⁹ that this condition implies $\frac{R_1}{R_0} = 1 - \eta + \delta$, that is, it is necessary that the retiree population increases the same proportion as the increasing of labor force. But even that the function tends to increase or decrease over time, its speed of growth or contraction slow down, because $\phi(t + 1) - \phi(t)$ always tends to zero.

Therefore, equation 26 provides us with two interesting conclusions. Firstly, the contribution to social security tends to increase in relation to the benefits received by the retirees if the initial retired population is sufficiently smaller than labor force. Secondly, there is a steady ratio at the limit of the periods. This conclusion of the steady point is not surprisingly. Observing the CBR function we can see that, as time tends to infinite, its value tends to a constant that depends only on η , θ and δ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \frac{\eta}{\delta + \theta - \eta} \quad (27)$$

According to equation 27 we can see that a greater value of retiree death rate or entering labor force rate decreases the steady ratio. Additionally, if we differentiate the steady ratio with respect to the retirement rate, we will see that it increases in accordance with η . To conclude, the existence of a steady ratio implies that it is possible to have constant social security tax and benefit over the time in the long run⁵⁰.

2.4 The Fully Funded System Possibility

If the social security system were fully funded kind, instead of being pay-as-you-go kind, the benefits received by any retiree would be a function of the contributions made during de labor time, that is, the system would be automatically balanced. The system would work as follows: during the labor time, the worker should contribute with τ_t of his

⁴⁹See Appendix C.

⁵⁰However, once the longevity of the retirees or the birth rate changes, this steady ratio also changes. Therefore, even with a possible steady ratio, the national governments still need to reform the Social Security System, either a parametric reform or a structural one.

or her wage and this value should yield some interest rate i_c (the subscript c indicates that this is the interest rate applied to the contributions); the total amount accumulated by the worker during labor time should be taken, in the retirement moment, and invested in assets to yield another interest rate i_b (the subscript b indicates that this is the interest rate applied to the benefits) that would be enough to pay benefits during the retirement time.

Let's assume that the values of the contributions are constant over time, that is, $\tau_t = \bar{\tau}$ for all t . Also, since a proportion η of the works retires each period, it is expected that each worker will contribute to Social Security System, on average, for $\frac{1}{\eta}$ periods. Therefore, assuming that $\frac{1}{\eta}$ is an integer number, during the labor time the worker would accumulate an amount $A_{\frac{1}{\eta}}$ as in equation 28:

$$A_{\frac{1}{\eta}} = \sum_{t=1}^{\frac{1}{\eta}} \bar{\tau}w(1 + i_c)^t \quad (28)$$

Operating the sum in equation 28 we get:

$$A_{\frac{1}{\eta}} = \bar{\tau}w(1 + i_c) \frac{\left[(1 + i_c)^{\frac{1}{\eta}} - 1 \right]}{i_c} \quad (29)$$

After the labor force time, the newly retired would receive periodically a benefit that reduces $A_{\frac{1}{\eta}}$. Nevertheless, the remaining amount should yield i_b . This process is carried out until the retiree dies. Assuming that the benefit received is constant over time and denoted by $\bar{\lambda}w$, for $t \geq \frac{1}{\eta} + 1$ we have:

$$A_t = (A_{t-1} - \bar{\lambda}w)(1 + i_b) \quad (30)$$

Also, for $t \geq \frac{1}{\eta} + 1$ we can write⁵¹ A_t in function of $A_{\frac{1}{\eta}}$ and t :

$$A_t = A_{\frac{1}{\eta}}(1 + i_b)^{t-\frac{1}{\eta}} - \bar{\lambda}w(1 + i_b) \frac{-1 + (1 + i_b)^{t-\frac{1}{\eta}}}{i_b} \quad (31)$$

⁵¹See Appendix C.

We assume that the retiree dies at period $t = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\theta}$, that is, it is expected the amount $A_{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\theta}}$ to be zero⁵². So, considering that fact, substituting equation 29 in equation 31 and rewriting the equation to isolate $\bar{\lambda}$, once the main goal here is to calculate the benefit that balance the system, we get: Also, for $t \geq \frac{1}{\eta} + 1$ we can write A_t in function of $A_{\frac{1}{\eta}}$ and t :

$$\bar{\lambda} = \bar{\tau} \frac{(1 + i_c) i_b \left[-1 + (1 + i_c)^{\frac{1}{\eta}} \right]}{(1 + i_b) i_c \left[-1 + (1 + i_b)^{\frac{1}{\theta}} \right]} (1 + i_b)^{\frac{1}{\theta}} \quad (32)$$

Therefore we can conclude that the expected benefit received by the retiree during this time is a function of i_c , i_b , η and θ . It is worth noting that i_c does not need to be equal i_b . For example, the system could be structured so that the government pays the yield of the contributions and, at the time of retirement, the worker would invest all the amount saved in private assets that yields more than the public ones.

2.5 The transition from pay-as-you-go to fully funded in a perfect balanced system

Currently the debate about a social security that is fully-funded kind is becoming increasingly important, mainly because the systems of many nations are facing deficit problems. Nevertheless, the establishment of the fully-funded system faces an enormous problem: if the government establishes a fully-funded system abruptly, then the actual retirees, who did not contribute to this system, would lose their benefits. Thus, the transition to the new kind of social security needs to deal with a transition structure.

Here we will propose a pseudo-fully-funded (PFF) system to analyze this transition. By now, let's suppose the current pay-as-you-go-system (PAYG) is perfect balanced, the social security is running time enough so that we can assume the stationary ratio to be in accordance with equation 27 and both SST and benefits rate are constant and equal

⁵²Also assuming that $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\theta}$ is an integer number.

to \bar{r} and $\bar{\lambda}$, respectively. We will set today to be $t = 0$ and to be the day the government established the PFF system. The system will be structured as follows:

1. Each person that begins to work at time $t = 0$ or after will choose to contribute exclusively to current PAYG system or to a fully funded system buying a government bond named Social Security Bond (SSB) that yields i_c until retirement time;
2. The interest rate i_c paid by the government is less than the return return of private bonds i_b , but the worker is forbidden to sell the bonds before retirement time;
3. Every actual worker that had made any social contribution before $t = 0$ will keep contributing exclusively to pay-as-you-go system and will retire at this system;
4. To avoid cutting the actual benefits and the benefits of future retirees that never contributed to fully funded system, the contributions received in (1) can flow directly to the contemporary retirees, if it is necessary;
5. When the person that contribute to FFS reaches time for retirement, he or she will sell the SSB to the government and this amount will be invested in private bonds;
6. The private bonds in (5) will yield i_b and this will be enough to pay the benefits until the retiree dies.

We can list four different aspects to analyze during the transition. The first aspect is the evolution of the population size in each system. The second aspect deals with the possibility of deficit in the old PAYG system. The third aspect approaches the surplus in the new FFS. The fourth and last aspect joins both systems to balance the social security. Let's analyze each of these aspects separately.

2.5.1 The First Transition Aspect: The Evolution of the Population

The time the government begins the fully funded system there exists no person in this system, meaning that, there is no worker contributing to PFF when $t = 0$. Then the

first generation that choose to contribute to the PFF system buys SSB at period $t = 1$ and the present value of these bonds is $\bar{\tau}w$. Additionally, we know that these newly workers won't retire in PAYG system, so the government does not need to worry about paying their benefits. As a consequence, we can calculate the subscribers and the retired population in each system for periods $t > 0$. To this end, we need to rewrite equations 16 to 19.

Let's assume the labor force contributing to PAYG and to PFF systems at time t are \tilde{L}_t and \hat{L}_t , respectively. If we state that the total labor force in time t is given by \bar{L}_t , then we conclude that $\tilde{L}_t + \hat{L}_t = \bar{L}_t$. Additionally, let's assume the retired population at this same time is \tilde{R}_t and \hat{R}_t . Since the newly workers can choose which system to contribute, let's assume that each period t a constant fraction α of them choose the PFF.

$$\hat{L}_t = (1 - \eta)\hat{L}_{t-1} + \alpha\delta\bar{L}_{t-1} \quad (33)$$

$$\tilde{L}_t = (1 - \eta)\tilde{L}_{t-1} + (1 - \alpha)\delta\bar{L}_{t-1} \quad (34)$$

Considering that \hat{L}_0 is null and \tilde{L}_0 is equal all the worker population at the same period and developing both equations we get⁵³:

$$\hat{L}_t = [(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \eta)^t] \alpha\bar{L}_0 \quad (35)$$

$$\tilde{L}_t = (1 - \eta)^t\bar{L}_0 + [(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \eta)^t] (1 - \alpha)\bar{L}_0 \quad (36)$$

Lastly, we can derive the retired population size in FFS, given by \hat{R}_t , and in the PAYGS, given by \tilde{R}_t :

$$\hat{R}_t = (1 - \theta)\hat{R}_{t-1} + \eta\hat{L}_{t-1} \quad (37)$$

⁵³See Appendix D.

$$\tilde{R}_t = (1 - \theta)\tilde{R}_{t-1} + \eta\tilde{L}_{t-1} \quad (38)$$

And, as usual, we can use equations 35 and 36 in order to rewrite equation 37 and 38 to get \hat{R}_t and \tilde{R}_t in function of \bar{L}_0 , \tilde{R}_0 , δ , α , η and θ , remembering that \hat{R}_0 is null and \tilde{R}_0 is equal all the retired population at the same period:

$$\hat{R}_t = \alpha\eta\bar{L}_0 \frac{(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \theta)^t}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)} - \alpha\eta\bar{L}_0 \frac{(1 - \eta)^t - (1 - \theta)^t}{(1 - \eta) - (1 - \theta)} \quad (39)$$

$$\tilde{R}_t = (1 - \theta)^t \tilde{R}_0 + \eta(1 - \alpha)\bar{L}_0 \frac{(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \theta)^t}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)} + \eta\bar{L}_0\alpha \frac{(1 - \eta)^t - (1 - \theta)^t}{(1 - \eta) - (1 - \theta)} \quad (40)$$

2.5.2 The Second Transition Aspect: The Deficit Possibility

Now, let's analyze the balance of the system. Firstly, at $t = 0$ all the people are linked to PAYG system and, by hypothesis, it is balanced, that is, $\bar{\tau}w\tilde{L}_0 = \bar{\lambda}w\tilde{R}_0$. Nevertheless, we cannot guarantee that the next periods will remain balanced. If we do not want a deficit of the PAYG system for the periods after the establishment of FFS, we must satisfy equation 41.

$$\frac{\tilde{R}_{t+1}}{\tilde{L}_{t+1}} \leq \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \quad (41)$$

But changing t for $t + 1$ in equations 34 and 38 and then substituting in the left side of Inequality 41 we can conclude that it is not possible if α is positive⁵⁴. Thus the PAYGS will always present deficit during the transition and it can be calculated, in each period, as the difference between benefits paid and contributions received, denoted by D_t .

$$D_t = \bar{\lambda}w\tilde{R}_t - \bar{\tau}w\tilde{L}_t \quad (42)$$

⁵⁴See Appendix E.

Now, we can face the question about how to finance this deficit, and the answer is quite obvious: generate debt. As we have stated before, the interest rate of private bonds is i_b , so this will be the cost to the government balances the system. The total public debit (TPD_t) can be calculated as in equation 43:

$$TPD_t = (1 + i_b)TPD_{t-1} + \bar{\lambda}w\tilde{R}_t - \bar{\tau}w\tilde{L}_t \quad (43)$$

By hypothesis, since the PAYG system is balanced when $t = 0$, we know that $TPD_0 = 0$ and $\bar{\lambda}w\tilde{R}_0 = \bar{\tau}w\tilde{L}_0$. Additionally, we know by equation 27 that $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\lambda}} = \frac{\eta}{\delta + \theta - \eta}$. Therefore, if we substitute equations 36 and 40 in equation 43, we get:

$$TPD_t = (1 + i_b)TPD_{t-1} + \bar{\tau}w\bar{L}_0\delta\alpha \frac{(1 - \eta)^t - (1 - \theta)^t}{(1 - \eta) - (1 - \theta)} \quad (44)$$

Since $TPD_t = 0$, we can rewrite⁵⁵ equation 44 as:

$$TPD_t = \frac{\bar{\tau}w\bar{L}_0\delta\alpha}{(1 - \eta) - (1 - \theta)} \left[\frac{(1 - \eta)^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta) - (1 + i_b)} - \frac{(1 - \theta)^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \theta) - (1 + i_b)} \right] \quad (45)$$

2.5.3 The Third Transition Aspect: The Surplus in FFS

Once the a fraction of the new workers contribute to a FFS, the government do not need to worry about paying their benefits in the future. Moreover, since the profitability of SSB, given by i_c , is less than the private market interest rate, given by i_b , the government has the possibility to obtain a surplus from the system. For each contribution made, the government can invest the value in private market and, at the retirement time, rebuys the SSB at the same time that appropriates the remain value of the investment made. To see that, we can calculate the value accumulated by the FFS (VA_t) over the time like in equation 46. The operation occurs according to the following dynamics: each fraction of generation of worker after $t = 0$ will buy SSB every period at value $\bar{\tau}w$, so the total

⁵⁵See Appendix A.

value bought each period is given by $\bar{\tau}w\hat{L}_t$; the value received by the government will be invested in private market and will yield i_b until retirement time; every period a proportion of these workers retires and they receive B_t by selling their SSB.

$$VA_t = (1 + i_b)VA_{t-1} + \bar{\tau}w\hat{L}_t - B_t \quad (46)$$

The actual value of the SSB held by workers (SSB_t) is given by the sum of the contributions made during working time added to the yield obtained by the interest rate i_c plus the actual contributions and deducted by the amount received for the retirees by selling their bonds.

$$SSB_t = (1 + i_c)SSB_{t-1} + \bar{\tau}w\hat{L}_t - B_t \quad (47)$$

Each period a proportion η of workers retires and they sell their SSB, in other words, they receive the actual value of the respective bonds.

$$B_t = \eta(1 + i_c)SSB_{t-1} \quad (48)$$

Substituting equations 48 and 35 in equation 47 we can calculate SSB_t in terms of $\eta, i_c, \bar{\tau}, w, \delta, \bar{L}_0$ and SSB_{t-1} .

$$SSB_t = (1 - \eta)(1 + i_c)SSB_{t-1} + \alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0 [(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \eta)^t] \quad (49)$$

Proceeding, we can develop equation 49, noting that $SSB_0 = 0$, in order to simplify our analysis⁵⁶.

$$SSB_t = \alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0 \left\{ \frac{(1 - \eta + \delta)^t - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^t}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} - \frac{(1 - \eta)^t - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^t}{(1 - \eta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \right\} \quad (50)$$

Now, we are able to calculate the surplus of FFS. Since VA_t is the accumulated

⁵⁶See Appendix B.

value in possession of the government and SSB_t is the value accumulated that belongs to the workers, the surplus function of the FFS at time t , denoted by the $\chi_t(\cdot)$, is given by the difference between VA_t and SSB_t .

$$\chi_t = VA_t - SSB_t \quad (51)$$

But, by equations 46 and 47, we get:

$$\chi_t = (1 + i_b)VA_{t-1} - (1 + i_c)SSB_{t-1} \quad (52)$$

Summing and subtracting $(1 + i_b)SSB_{t-1}$ we can rewrite equation 52:

$$\chi_t = (1 + i_b)\chi_{t-1} - (i_b - i_c)SSB_{t-1} \quad (53)$$

Now, noticing that $\chi_0 = 0$, we can substitute equation 50, changing t for $t - 1$, in equation 53 and develop it to get:

$$\chi_t = \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{r}w\bar{L}_0}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \left[\frac{(1 - \eta + \delta)^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta + \delta) - (1 + i_b)} - \frac{[(1 - \eta)(1 + i_c)]^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta)(1 + i_c) - (1 + i_b)} \right] - \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{r}w\bar{L}_0}{(1 - \eta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \left[\frac{(1 - \eta)^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta) - (1 + i_b)} - \frac{[(1 - \eta)(1 + i_c)]^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta)(1 + i_c) - (1 + i_b)} \right] \quad (54)$$

This is the surplus in the FFS and, even more, it is possible to show that equation 54 is always positive⁵⁷. Although, there is an intuition to the surplus of the FFS: since it is a fully funded system and the government can set its return rate, equal or less than the economy interest rate, it is not possible to this system present déficit.

⁵⁷See Appendix F.

2.5.4 The Fourth Transition Aspect: The Joint Systems

If on the one hand we can have deficit in the PAYG system, on the other hand we certainly have surplus in the FFS. It is intuitive to compensate the systems, that is, to use the surplus of FFS to cover the deficit in PAYG system. The result of this balance is given by the difference $\chi_t - TPD_t$. Therefore, if we want to analyze the possibility that the surplus in FFS is large enough to compensate the deficit in PAYG system, we can compare the present value of χ_t and TPD_t at $t = 0$. For this purpose, let's rewrite equations 45 and 54 dividing them by $(1 + i_b)^t$.

$$\frac{TPD_t}{(1 + i_b)^t} = \frac{\bar{\tau}w\bar{L}_0\delta\alpha}{(1 - \eta) - (1 - \theta)} \left[\frac{\frac{(1-\eta)^t}{(1+i_b)^t} - 1}{(1 - \eta) - (1 + i_b)} - \frac{\frac{(1-\theta)^t}{(1+i_b)^t} - 1}{(1 - \theta) - (1 + i_b)} \right] \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\chi_t}{(1 + i_b)^t} &= \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\tilde{L}_0}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \left[\frac{1 - \frac{(1-\eta+\delta)^t}{(1+i_b)^t}}{(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)} - \frac{1 - \frac{[(1-\eta)(1+i_c)]^t}{(1+i_b)^t}}{(1 + i_b) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \right] \\ &\quad - \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\tilde{L}_0}{(1 - \eta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \left[\frac{1 - \frac{(1-\eta)^t}{(1+i_b)^t}}{(1 + i_b) - (1 - \eta)} - \frac{1 - \frac{[(1-\eta)(1+i_c)]^t}{(1+i_b)^t}}{(1 + i_b) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

Therefore, in the long term the present value of the total public debt tends to a constant:

$$\lim \frac{TPD_t}{(1 + i_b)^t} \rightarrow \bar{\tau}w\bar{L}_0\delta\alpha \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta)} \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \theta)} \quad (57)$$

On the other hand, there are three situations that can occur to the present value of the surplus of the fully funded system. The first situation occurs if $1 + i_b < 1 - \eta + \delta$. In this case, the present value of χ_t tends to infinite and is shown in equation 58.

$$\lim \frac{\chi_t}{(1 + i_b)^t} \rightarrow +\infty \quad (58)$$

The second situation occur if $1 + i_b = 1 - \eta + \delta$ and, in this case, the present value of χ_t also tends to infinite⁵⁸.

$$\lim \frac{\chi_t}{(1 + i_b)^t} \rightarrow +\infty \quad (59)$$

The third and last situation occur when $1 + i_b > 1 - \eta + \delta$. In this case, the present value of χ_t tends to a constant and is shown in equation 60.

$$\lim \frac{\chi_t}{(1 + i_b)^t} \rightarrow (i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0\delta \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)} \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta)} \quad (60)$$

Now we can define the Transition Function, given by Ω , as the difference between the present value of χ_t and TPD_t in the long term, that is:

$$\Omega = \lim \frac{\chi_t}{(1 + i_b)^t} - \lim \frac{TPD_t}{(1 + i_b)^t} \quad (61)$$

Since we have shown that the present value of total public debt tends to a constant, in both first and second situations, when $1 - \eta + \delta$ is at least as large as $1 + i_b$, it is clear that Ω will always be positive, that is, the surplus in FFS will always be greater than the total public debit in the PAYG system.

But these situations are not very interesting for us, since it requires the work force to be sufficiently high and it is not the case that generates the social security crisis. In fact, it is the opposite situation that turn the pensions systems unbalanced. So, the third situation, when $1 - \eta + \delta < 1 + i_b$, this is, when the work force growth is less than the interest rate, that is the mainly discussion here.

Therefore, comparing equation 57 to equation 60, we can conclude⁵⁹ that Ω will

⁵⁸See Appendix G.

⁵⁹See Appendix H.

be positive if, and only if:

$$1 + i_c < (1 + i_b) \times \frac{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)}{(1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta)} \quad (62)$$

This means that the return offered in the FFS cannot be that great, and there is a kind of intuition on this conclusion. If the return offered to the workers in the FFS is so great that approaches i_b , then the surplus in that system will be irrelevant. So, in order to have a surplus large enough to overcome the deficit in the PAYG, the return offered to the workers, that is, the i_c value, must respect a maximum value.

The result above leads to a strong conclusion: if the interest rate of economy is greater than the net incoming labor force, then the yield of the Social Security Bonds can be set at a value that turns the Transition Function, Ω , positive in some time. This means that it is possible to reform a social security system so as the current PAYG system is replaced with FFS without present costs. Even more, the reform can raise the public budget that can be used to increase social security benefits, decrease social security tax or be used freely by government. Any of these situations would raise the welfare of society.

2.6 The optimal values

Since we have shown that it is possible to have a surplus in the FFS that is more than enough to cover the deficit in the PAYGS, as described before, we need to set how to reform that system. One possibility of social security reform is offering a capitalized system to the population and let them decide to contribute to one or other social security system. This decision, of course, would be made considering the expected return of each system: if the worker believes the expected return of PAYGS will be larger than the same return in the FFS, he or she will choose the first one; on the other hand, if the interest rate in the capitalized system is expected to be larger than the return in PAYG, so the worker will choose the FFS.

Nevertheless, the government must decide what to do with the superavit in FFS. One possibility is that the local legislation requires this amount to be used on the social security system itself. If this is the case, the surplus could be paid to the retired in the PAYGS⁶⁰. So, the government must stipulate an interest rate that maximizes the social welfare of population. If the interest rate is too large, all the workers would choose to contribute to FFS, no surplus would be generated and the government could not pay all the benefits of the present retired people on PAYGS. On the other hand, if the interest rate in FFS is too small, just a few people would choose to contribute to that system, the total surplus would still be small and the increase in the social welfare would be insignificant. Therefore, it is expected that there will be an optimal interest rate i_c that maximizes social welfare. Even more, it is expected that there will be an optimal structure of the fraction of the population that will choose to contribute to each system.

Therefore, this is exactly one of the purposes of this work: to calculate the optimal interest rate in FFS and the optimal fraction of the population that choose to contribute to this system, considering that the surplus in the FFS will be transferred to the PAYGS. To do so, we will approach the problem by a perspective of game theory.

2.6.1 Initial Assumptions

Before we proceed to the game theory approach, we need to set some initial premises. First of all, we will consider that, in the moment the FFS is established, the PAYGS has been running for a long time enough so we can assume equation 27. This also means that we are considering the PAYGS was balanced at that time.

The PAYGS balance assumption is not an obstacle to the model proposed. If it is possible to have a surplus in the FFS, as demonstrated early, then the surplus could be used at least to reduce a previous deficit in the PAYGS in case this system was not balanced.

⁶⁰It would be redundant to pay this amount to the retired in the FFS, because it would merely imply a raise in the interest rate of that system.

Lastly, from that point on, we will always consider the situation when the work force growth is less than the interest rate, that is, when $1 - \eta + \delta < 1 + i_b$, since this is the mainly issue in discussion nowadays.

2.6.2 The Proposed Game

As stated before, the solution to the problem can be achieved by a game theory structure. So, the first step is modeling the game. Let's show the intuition of the game, define who the players are, what their strategies are and what the expected payoffs of every player are.

The game begins at time t_0 , when the national government, given by N , establishes the FFS. At this time, the government announces the current return rate of this system. The return rate can be any real number. Next, in time t'_0 , the newly workers of generation G_0 decide if they will contribute to the FFS or to the PAYGS. In fact, since it is a set of decisions made by many people, this decision can be summarized by the fraction α_0 of newly workers that will contribute to the FFS. Remember that the current workers that are already contributing to any system cannot change their option. Additionally, it is useful to note that α_0 cannot be negative nor greater than unity. These two steps conclude the first period, and the game goes on.

In the time t_1 the government updates the current interest rate on FFS and its value can be less, greater or the same as before, but all the people that is already contributing to the fully funded system will also be affected by government's decision. Next, in time t'_1 , the newly workers of generation G_1 also decides its fraction α_1 of people that will contribute to FFS. This game goes on indefinitely.

Therefore, the game can be shown extensively as:

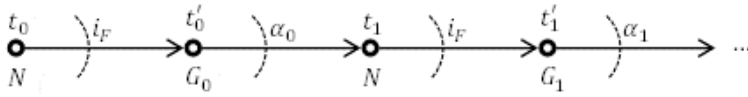


Figura 4: Extensive Form

Source: Own elaboration

Given that, we know that the game has countable infinite players, one of them is the national government and the others are the generations of newly workers that will contribute to one or other social security system. The government plays each other time and each generations α plays just once in the between government decisions.

The possible strategies of the government in each time it plays are $i_c \in R$ and the possible strategies for each generation i are $\alpha_i \in [0, 1]$. Additionally, the payoff of each generation i , given by P_i , can be given by the average additional benefit they achieve in comparison to the benefit they would have if the FFS was not established. That is, $P_i = \alpha_i(b_i^{FSS} - \tilde{b}) + (1 - \alpha_i)(b_i^{PAYGS} - \tilde{b})$, where b_i^{FSS} is the expected benefit for the generation's fraction that chose to contribute to FFS, b_i^{PAYGS} is the expected benefit for the generation's fraction that chose to contribute to PAYGS and \tilde{b} is the benefit that everyone would have if FFS was not established. Lastly, since the goal of national government is to increase the social welfare of population, its payoff P_N is simply the sum of all generations' payoff, that is, $P_N = \sum_i P_i$, without not covered deficit in the PAYGS.

It is important to notice that the game is the sequential type and each player make its decision based on the previous decisions made by all and on the expected decisions that will be made by himself, in case the player is the government, or by the other players, in case the player is a generation of workers. All the information is perfect and known by all the players.

For the purpose of this paper, we will restrict our analysis to the trivial case, that is, to the case when all the worker generations choose the same proportion of themselves

that will contribute to FFS and the government set a constant return rate to that system.

$$\alpha_i = \alpha \forall i \in N \quad (63)$$

$$i_c^t = i_c \forall t \in N \quad (64)$$

2.6.3 The Game Solution: Workers' Strategy

Since the people can choose to which system to contribute, the benefit in both systems must be equal, that is, we need to have $b_i^{FFS} - \tilde{b} = b_i^{PAYGS} - \tilde{b}$. It is quite obvious: since every player has all the information, if the expected benefit in one system is greater than in the other, a larger fraction of the population will choose to contribute to the first one.

Additionally, as we have stated that the return rate of FFS will be constant over time, the individual additional gain in the PAYGS, that is, the additional gain received by each retiree in this system, provided by the transferred surplus of FFS, must also be constant over time⁶¹. That said, let's denote the additional gain received by each retiree in PAYGS as ρ . Therefore, the total additional gain received by the retired people in the pay-as-you-go system in each period TAG_t will be:

$$TAG_t = \rho \tilde{R}_t \quad (65)$$

And the present value of all additional gains (PVG) received will be:

$$PVG = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\rho \tilde{R}_t}{(1 + i_b)^t} \quad (66)$$

Substituting equation 40 in equation 66 and operating the sum, also remembering

⁶¹For the purpose of this paper, we are considering there is no inflation on prices.

that we are considering the case when the work force does not increase sufficiently, that is, when $1 - \eta + \delta < 1 + i_b$ we get:

$$PVG = \rho \frac{(1 + i_b)}{(1 + i_b) - (1 - \theta)} \times \left[\tilde{R}_0 + \frac{\eta \bar{L}_0 (1 - \alpha)}{(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)} + \frac{\eta \bar{L}_0 \alpha}{(1 + i_b) - (1 - \eta)} \right] \quad (67)$$

Additionally, since we are assuming that the PAYGS was running for a long time enough so we can assume equation 27 and we are considering the PAYGS was balanced at that time, it is possible to substitute \tilde{R}_0 by $\bar{L}_0 \frac{\eta}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)}$, that is:

$$PVG = \rho \eta \bar{L}_0 \frac{(1 + i_b)}{(1 + i_b) - (1 - \theta)} \times \left[\frac{1}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)} + \frac{(1 - \alpha)}{(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)} + \frac{\alpha}{(1 + i_b) - (1 - \eta)} \right] \quad (68)$$

Note that, since ρ is the additional gain received periodically by each retiree in PAYGS, we know that $\rho = b_i^{PAYGS} - \tilde{b}$. Now, we need to equal ρ to the additional gain received by each retiree in FFS. To do so, we can go back in Section 2.4 and rewrite its equations. In this sense, it is enough to rewrite equations 30 and 31.

In equation 30, the expression $\bar{\lambda}w$ represents the benefit that would be received by each retiree. But now, to this benefit will be added the value of ρ . So, rewriting this equation we get.

$$A_t = [A_{t-1} - (\rho + \bar{\lambda}w)] (1 + i_b) \quad (69)$$

And, again, for $t \geq \frac{1}{\eta} + 1$ we can write⁶² A_t in function of $A_{\frac{1}{\eta}}$ and t :

$$A_t = A_{\frac{1}{\eta}} (1 + i_b)^{t - \frac{1}{\eta}} - (\rho + \bar{\lambda}w) (1 + i_b) \frac{[-1 + (1 + i_b)^{t - \frac{1}{\eta}}]}{i_b} \quad (70)$$

As we have stated before, the retiree dies at period $t = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\theta}$, that is, it is expected

⁶²See Appendix C.

the amount $A_{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\theta}}$ to be zero. Therefore, considering that fact, substituting equation 29 in equation 70 and rewriting the equation to isolate ρ , we get:

$$\rho = \bar{\tau}w \frac{(1+i_c) i_b}{(1+i_b) i_c} \left[\frac{-1 + (1+i_c)^{\frac{1}{\eta}}}{-1 + (1+i_b)^{\frac{1}{\theta}}} \right] (1+i_b)^{\frac{1}{\theta}} - \bar{\lambda}w \quad (71)$$

Now, we can equal PVG , given by equation 68, to the present value of the balance between the surplus in the FFS, given by equation 60, and the deficit in the PAYGS, given by equation 57, that is, to the Transition Function, Ω , given by equation 61:

$$PVG = \lim \frac{\chi_t}{(1+i_b)^t} - \lim \frac{TPD_t}{(1+i_b)^t} \quad (72)$$

Next, we can develop equation 72 and, subsequently, isolate α to get the worker's solution⁶³.

$$\alpha = \frac{EAB \times RD}{CC + EAB} \quad (73)$$

where

$$EAB = \rho\eta \frac{(1+i_b)}{(1+i_b) - (1-\theta)} \quad (74)$$

$$RD = \frac{(1+i_b) - (1-\theta)}{(1-\eta + \delta) - (1-\theta)} \times \frac{(1+i_b) - (1-\eta)}{(1-\eta + \delta) - (1-\eta)} \quad (75)$$

$$CC = \bar{\tau}w \left[\frac{(1+i_b) - (1+i_c)}{(1+i_b) - (1-\eta)(1+i_c)} - \frac{(1+i_b) - (1-\eta + \delta)}{(1+i_b) - (1-\theta)} \right] \quad (76)$$

Here, it is worth some analysis. The worker's solution, given by α , is described as been a function of three factor: EAB , RD and CC . The acronyms stand for *Expected Additional Benefit* factor, *Relative Difference* factor and *Contribution Cost* factor.

The first one, the *Expected Additional Benefit* factor, given by EAB , represents

⁶³To get equation 58, it is necessary to use equations 14 and 27, also remembering that \tilde{R}_0 and \bar{L}_0 are, respectively, equal to all the retirees and all the workers at the moment the FFS is established.

the effect that the additional benefit has on the worker's decision. Note that EAB can be written as in equation 77, that is, the Expected Additional Benefit factor is the product of the probability of retirement, given by ρ , and the present value of the additional benefit, given by b , discounted by the interest rate of the economy $(1 + i_b)$ and the probability of keep receiving the benefit in the next period $(1 - \theta)$, given that θ is the Retiree Death Rate, as shown in Table 1.

$$EAB = \sum_{t=0}^{\infty} \rho \left(\frac{1 - \theta}{1 + i_b} \right)^t \quad (77)$$

In other words, the EAB factor simply shows what the expectations of the workers are. If these expectations are too low, then the worker's solution will be not to choose the FFS. The extreme case occurs if $\rho = 0$ and, consequently, EAB also turns to null. On the other hand, even if EAB factor is too high, the worker's solution should not be expected to be $\alpha = 1$. A quick analysis shows that, if EAB tends to infinity and both RD and CC do not increase indefinitely, then α would, at most, tend to the value of RD factor⁶⁴.

Proceeding, the *Relative Difference* factor, given by RD , represents how much the interest rate exceeds the work force growth rate relatively to Retiree Death Rate and to Retirement Rate. Here, we need to remember that we are analyzing only the case when the work force growth is less than the interest rate, so the relative difference between these parameters is some useful in the moment.

The interpretation of the RD 's effect on worker's strategy is directly: the higher the difference between interest rate and work force growth, the higher the proportion of worker's that will choose the FFS.

Continuing, and maybe not so intuitive, the *Contribution Cost* factor, given by CC , represents a general cost to contrite to the FFS. To see this, we can decompose the CC factor in two parts. The first part is a cost of opportunity to contribute to FFS instead of saving the same amount privately, and will be denoted by CO . The second part is the Age Pyramid Compensation, and will be denoted by APC . The decomposition of CC is shown

⁶⁴Mathematically, it is $\lim \alpha = RDI$.

in equation 78.

$$CC = CO - APC \quad (78)$$

where

$$CO = \bar{\tau}w \frac{(1 + i_b) - (1 + i_c)}{(1 + i_b) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \quad (79)$$

$$APC = \bar{\tau}w \frac{(1 + i_b) - (1 + \eta + \delta)}{(1 + i_b) - (1 - \theta)} \quad (80)$$

The CO part indicates that the difference between the interest rate of the economy, i_b , and the rate of return of FFS, i_c , is an implicit cost to the worker, even known that he or she is obligated to contribute, either in FFS or in PAYGS. To improve the interpretation, we can suppose two extreme cases: the case when no one retires anymore and the case when everyone retires one period after a single contribution to the FFS. In the first case, the retirement rate will be null, that is, $\eta = 0$, and the contribution cost will be exactly the amount paid each period to the FFS, that is, $CO = \tau w$. In the second case, the retirement rate will be the unit, that is, $\eta = 1$, and the contribution cost will be the lost earning for not have invested the contribution privately, that is, will be $\bar{\tau}w(i_b - i_c)$, discounted for one period by the interest rate i_b .

The APC part indicates the structure, or the composition, of the pension system relatively to the interest rate. It can be seen by noting that the higher $1 - \theta$, the lower the difference between the interest rate and the retiree survival rate, and the wider the top of the age pyramid. On the other hand, the higher $1 - \eta + \delta$, the lower the difference between the interest rate and the work force growth rate, and the wider the base of the pyramid.

To the worker's strategy, a wider top means he or she will share the superávit with more people during the retirement, that is, a higher $1 - \theta$ indicates it is not a good idea to be in PAYGS. Differently, a wider base, given by a higher $1 - \eta + \delta$, indicates there will be more people contributing for both systems, which means that there may be more superávit to be shared in PAYGS. Mathematically, an increase in $1 - \theta$ causes an increase in APC

and, consequently, a decrease in CC . On the other hand, an increase in $1 - \eta + \delta$ causes a decrease in APC and an increase in CC . That is why the APC part can be seen as an age pyramid compensation to the Contribution Cost.

All these factors describe the worker's strategy, given by α . But each worker's generation decides after the government sets the return rate of the FFS, as shown in section 2.6.2. Therefore, next we will analyze the government's strategy.

2.6.4 The Game Solution: Government's Strategy

As set before, we will restrict our analysis to the trivial case, that is, to the case when the government set a constant return rate to the FFS, as shown in equation 64.

Since the government's payoff is the social welfare, the government's goal is to maximize the present value of the balance between the surplus in the FFS and the deficit in the PAYGS, that is, the government's goal is to maximize the Transition Function, Ω , given by equation 61, in terms of the return rate of FFS, given by i_c . Therefore, it is necessary to differentiate Ω as function of i_c and set it equal to zero.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i_c} = 0 \quad (81)$$

Developing equation 81, always remembering equations 71 and 73, we get:

$$CC^2 \times \frac{\partial \rho}{\partial i_c} + \rho \times EAB \times \frac{\partial CC}{\partial i_c} = 0 \quad (82)$$

Now, we need to note that ρ , given by equation 71, can be rewritten as:

$$\rho = \bar{\tau}w(1 + i_b)^{\frac{1}{\theta}} \frac{\sum_{t=1}^{\frac{1}{\eta}} (1 + i_c)^t}{\sum_{t=1}^{\frac{1}{\theta}} (1 + i_b)^t} - \bar{\lambda}w \quad (83)$$

That said, we can differentiate ρ as function of i_c .

$$\frac{\partial \rho}{\partial i_c} = \bar{\tau} w (1 + i_b)^{\frac{1}{\theta}} \left[\sum_{t=1}^{\frac{1}{\theta}} (1 + i_b)^t \right]^{-1} \sum_{t=1}^{\frac{1}{\eta}} (1 + i_c)^{t-1} \quad (84)$$

It means that $\frac{\partial \rho}{\partial i_c}$ is a polynomial function with $\frac{1}{\eta} - 1$ degrees. Therefore, equation 82 can have $\frac{1}{\eta} - 1$ solutions.

2.7 Especial case: Mandatory FFS

There is one particular case that is of great interest in the pension reforms discussion: a full transition from PAYGS to FFS. On the context of the present model, it is equivalent to set $\alpha = 1$, that is, to force all the next worker's generations to be in the FFS. However, in this case, the government do not need to worry about the return rate of the FFS, because it will not change the proportion in each system at all.

Nevertheless, it is expected that the government do not generate unconditional debt, that is, the return rate of FFS should be set in some level that the Transition Function, given by equation 61, do not be negative. This means the government should respect, at least, the rule in equation 62. Therefore, if the work force growth rate is less than the interest rate of the economy, that is, if $1 - \eta + \delta < 1 + i_b$, and if the government still maximize the social welfare, the return rate of FFS will be given by equation 85.

$$1 + i_c = (1 + i_b) \times \frac{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)}{(1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta)} \quad (85)$$

Additionally, as expected, the work force contributing to PAYGS and the retiree population in this system, given by \tilde{L}_t and \tilde{R}_t , respectively, will both tend to zero in the long term. On the other hand, the work force contributing to FFS and the retiree population in the new system, given by \hat{L}_t and \hat{R}_t , respectively, will converge to R_t and L_t , also in the long term. Mathematically, this conclusion just points out the consistence of the model.

Since the retirement rate is given by θ , as stated in table 1, it is expected that there will be workers contributing to PAYG for $\frac{1}{\eta}$ periods. Also, since the retiree death rate is given by θ , it is expected that the last worker to retiree in PAYGS will receive the retirement wage for $\frac{1}{\theta}$ periods. So, $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\eta}$ periods after mandatory FFS be established, the government no longer will need to worry about pension systems anymore, since everyone will be associated with a capitalized pension system.

The social welfare, although, will depend on the level of i_c . If the return rate on FFS is large enough, then the social welfare may be increased. Of course, if the return rate is too small so the retirement benefit in FFS is less the retirement wage in the old PAYGS, then the social welfare will be decreased. The only way to keep the social welfare constant over time is to set the return rate according to equation 32. Of course, to do so, that is not guaranteed that the Transition Function will be null.

2.8 Further Remarks of Part 2

In this study, we proposed a model of transition of the social security from pay-as-you-go system to fully funded system. The model considered that the future worker's generations may choose between those systems, but, once the decision had been made, it is not reversible. Additionally, the proposed model considered that the return rate of the fully funded system would be set by the government, and it could be less than the economy interest rate. In this regard, it was possible to estimate the proportion of the future worker's generations that was expected to choose the fully funded system. Even more, we also estimated the optimal fully funded system's return rate that maximize the social welfare.

We are aware that it is not an ideal model and it does not captures all the singularities of social securities around the world. The entire model was built based on some populational and economic parameters that may be oversimplified. It was done intentionally, once our goal was to model a general social security transition possibility.

The application of the model in any social security transition, although, strongly depends on the factual parameters of each economy and, even more, depends on a possible range of particularities of each system, such as different conditions to men and women, multiple retirement rules, local laws and other factors. It is also important to highlight that the proposed model indicates the transition could be beneficial if, and only if, the workforce growth or the interest rate is large enough, which may not be the case of many economies.

Complementary, future studies may test the consistence of the proposed model to real cases and, if desirable, make some structural adjustments on the parameters and assumptions. Like any theoretical model, the purpose of our study was point out a possibility to be considered in the real world and contribute to the contemporary knowledge of social security reform.

3 Appendix

3.1 Appendix A

Let's demonstrate that if $a, b, c, d, e, k, w, y, z$ and m are positive, then $a_t = ma_{t-1} + bk^{t-1} + cw^{t-1} + dy^{t-1} + ez^{t-1}$ implies:

$$a_t = m^t a_0 + \frac{k^t - m^t}{k - m} b + \frac{w^t - m^t}{w - m} c + \frac{y^t - m^t}{y - m} d + \frac{z^t - m^t}{z - m} e \quad (86)$$

To do so, we need to write the following system:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = ma_{t-1} + bk^{t-1} + cw^{t-1} + dy^{t-1} + ez^{t-1} \\ a_{t-1} = ma_{t-2} + bk^{t-2} + cw^{t-2} + dy^{t-2} + ez^{t-2} \\ \dots \\ a_2 = ma_1 + bk^1 + cw^1 + dy^1 + ez^1 \\ a_1 = ma_0 + bk^0 + cw^0 + dy^0 + ez^0 \end{array} \right. \quad (87)$$

Now, we can multiply the lines of the system 87 by an exponent of m :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = ma_{t-1} + bk^{t-1} + cw^{t-1} + dy^{t-1} + ez^{t-1} \\ ma_{t-1} = m^2 a_{t-2} + mbk^{t-2} + mcw^{t-2} + mdy^{t-2} + mez^{t-2} \\ \dots \\ m^{t-2} a_2 = m^{t-1} a_1 + m^{t-2} bk^1 + m^{t-2} cw^1 + m^{t-2} dy^1 + m^{t-2} ez^1 \\ m^{t-1} a_1 = m^t a_0 + m^{t-1} bk^0 + m^{t-1} cw^0 + m^{t-1} dy^0 + m^{t-1} ez^0 \end{array} \right. \quad (88)$$

Next, we need to sum the lines of system 88 to get:

$$\begin{aligned}
 a_t &= m^t a_0 \\
 &+ b [m^{t-1} + km^{t-2} + \dots + k^{t-2}m + k^{t-1}] \\
 &+ c [m^{t-1} + wm^{t-2} + \dots + w^{t-2}m + w^{t-1}] \\
 &+ d [m^{t-1} + ym^{t-2} + \dots + y^{t-2}m + y^{t-1}] \\
 &+ e [m^{t-1} + zm^{t-2} + \dots + z^{t-2}m + z^{t-1}]
 \end{aligned} \tag{89}$$

Operating the sums inside the brackets, if k, w, y, z are all different from m , we conclude that:

$$a_t = m^t a_0 + \frac{k^t - m^t}{k - m} b + \frac{w^t - m^t}{w - m} c + \frac{y^t - m^t}{y - m} d + \frac{z^t - m^t}{z - m} e \tag{90}$$

Just as we wanted to demonstrate.

3.2 Appendix B

Let's demonstrate that $\frac{\eta}{\delta+\theta-\eta} - \frac{R_0}{L_0} = 0$ implies $\frac{R_1}{R_0} = 1 - \eta + \delta$. To do so, firstly we need to rewrite $\frac{\eta}{\delta+\theta-\eta} - \frac{R_0}{L_0} = 0$:

$$\eta L_0 = R_0 (1 - \eta + \delta) - R_0 (1 - \theta) \quad (91)$$

Now, we can add $R_0 (1 - \theta)$ in both sides of Equation 91:

$$\eta L_0 + R_0 (1 - \theta) = R_0 (1 - \eta + \delta) \quad (92)$$

The next step is to see that the left side of Equation 92 is the same as Equation 19 applied to $t = 1$. That is:

$$R_1 = R_0 (1 - \eta + \delta) \quad (93)$$

And we conclude that $\frac{R_1}{R_0} = 1 - \eta + \delta$, just as we wanted to demonstrate.

3.3 Appendix C

Let's demonstrate that if a , b , k and m are positive, then $a_t = ma_{t-1} - mb$ implies:

$$a_t = m^{t-k}a_k - mb \left[\frac{1 - m^{t-k}}{1 - m} \right] \quad (94)$$

To do so, we need to write the following system:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = ma_{t-1} - bm \\ a_{t-1} = ma_{t-2} - bm \\ \dots \\ a_{k+2} = ma_{k+1} - bm \\ a_{k+1} = ma_k - bm \end{array} \right. \quad (95)$$

Now, we can multiply the lines of system 95 by an exponent of m :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = ma_{t-1} - bm \\ ma_{t-1} = m^2a_{t-2} - bm^2 \\ \dots \\ m^{t-k-2}a_{k+2} = m^{t-k-1}a_{k+1} - bm^{t-k-1} \\ m^{t-k-1}a_{k+1} = m^{t-k}a_k - bm^{t-k} \end{array} \right. \quad (96)$$

Next, we need to sum the lines of system 96 to get:

$$a_t = m^{t-k}a_k - b [m + m^2 + \dots + m^{t-k-1} + m^{t-k}] \quad (97)$$

Operating the sum inside the brackets we conclude that:

$$a_t = m^{t-k} a_k - mb \left[\frac{1 - m^{t-k}}{1 - m} \right] \quad (98)$$

Just as we wanted to demonstrate.

3.4 Appendix D

Considering that \hat{L}_0 is null and \tilde{L}_0 is equal all the worker population at the same period, let's demonstrate that:

$$\hat{L}_t = (1 - \eta) \hat{L}_{t-1} + \alpha \delta \bar{L}_{t-1} \longrightarrow \hat{L}_t = [(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \eta)^t] \alpha \bar{L}_0$$

and

$$\tilde{L}_t = (1 - \eta) \tilde{L}_{t-1} + (1 - \alpha) \delta \bar{L}_{t-1} \longrightarrow \tilde{L}_t = (1 - \eta)^t \bar{L}_0 + [(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \eta)^t] (1 - \alpha) \bar{L}_0$$

To do so, we need to write the following system:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{L}_t = (1 - \eta) \hat{L}_{t-1} + \alpha \delta \bar{L}_{t-1} \\ \hat{L}_{t-1} = (1 - \eta) \hat{L}_{t-2} + \alpha \delta \bar{L}_{t-2} \\ \dots \\ \hat{L}_2 = (1 - \eta) \hat{L}_1 + \alpha \delta \bar{L}_1 \\ \hat{L}_1 = (1 - \eta) \hat{L}_0 + \alpha \delta \bar{L}_0 \end{array} \right. \quad (99)$$

Now, we can multiply the lines of system 99 by an exponent of $(1 - \eta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{L}_t = (1 - \eta) \hat{L}_{t-1} + \alpha \delta \bar{L}_{t-1} \\ \hat{L}_{t-1} (1 - \eta) = (1 - \eta)^2 \hat{L}_{t-2} + \alpha \delta \bar{L}_{t-2} (1 - \eta) \\ \dots \\ \hat{L}_2 (1 - \eta)^{t-2} = (1 - \eta)^{t-1} \hat{L}_1 + \alpha \delta \bar{L}_1 (1 - \eta)^{t-2} \\ \hat{L}_1 (1 - \eta)^{t-1} = (1 - \eta)^t \hat{L}_0 + \alpha \delta \bar{L}_0 (1 - \eta)^{t-1} \end{array} \right. \quad (100)$$

Next, considering that \hat{L}_0 is null, we need to sum the lines of system 100, remembering, by Equation 17, that $\bar{L}_t = (1 - \eta + \delta)^t \bar{L}_0$, to get:

$$\hat{L}_t = \alpha \delta (1 - \eta)^{t-1} \bar{L}_0 \sum_{k=0}^{t-1} \frac{(1 - \eta + \delta)^k}{(1 - \eta)^k} \quad (101)$$

Operating the sum we conclude that:

$$\hat{L}_t = [(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \eta)^t] \alpha \bar{L}_0 \quad (102)$$

Just as we wanted to firstly demonstrate. Now, we can do the same with the second part of the demonstration, remembering that $\tilde{L}_0 = \bar{L}_0$ to conclude that:

$$\tilde{L}_t = (1 - \eta) \bar{L}_0 + [(1 - \eta + \delta)^t - (1 - \eta)^t] (1 - \alpha) \bar{L}_0 \quad (103)$$

Just as we wanted to demonstrate.

3.5 Appendix E

Let's demonstrate that $\frac{\tilde{R}_{t+1}}{\tilde{L}_{t+1}} \leq \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t}$ is not possible if α is positive.

Firstly, let's rewrite Equations 34 and 38 changing t for $t + 1$ and then substituting in Inequality 41.

$$\frac{(1 - \theta)\tilde{R}_t + \eta\tilde{L}_t}{(1 - \eta)\tilde{L}_t + (1 - \alpha)\delta\bar{L}_t} \leq \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \quad (104)$$

Next, we can multiply the Inequality by $\frac{(1-\eta)\tilde{L}_t+(1-\alpha)\delta\bar{L}_t}{\tilde{L}_t}$:

$$\frac{(1 - \theta)\tilde{R}_t + \eta\tilde{L}_t}{\tilde{L}_t} \leq \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \times \frac{(1 - \eta)\tilde{L}_t + (1 - \alpha)\delta\bar{L}_t}{\tilde{L}_t} \quad (105)$$

Rearranging Inequality 105 we get:

$$\eta + (1 - \theta) \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \leq \left[(1 - \eta) + (1 - \alpha) \delta \frac{\bar{L}_t}{\tilde{L}_t} \right] \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \quad (106)$$

We know that $\frac{\bar{L}_t}{\tilde{L}_t} \leq 1$. Therefore:

$$\eta + (1 - \theta) \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \leq [(1 - \eta) + (1 - \alpha) \delta] \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \quad (107)$$

Now, rearranging 107 we get:

$$\frac{\eta}{(1 - \alpha) \delta + \theta - \eta} \leq \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} \quad (108)$$

But, since we are considering that the social security system to be running for a long time, we know that $\frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t} = \frac{\eta}{\delta + \theta - \eta}$, as shown in Equation 27. So, rewriting Inequality 108 we get:

$$\frac{\eta}{(1 - \alpha) \delta + \theta - \eta} \leq \frac{\eta}{\delta + \theta - \eta} \quad (109)$$

Finally, rearranging Inequality 109 we get:

$$\alpha \leq 0 \tag{110}$$

That is, $\frac{\tilde{R}_{t+1}}{\tilde{L}_{t+1}} \leq \frac{\tilde{R}_t}{\tilde{L}_t}$ is just possible if α is not positive.

As we wanted to demonstrate.

3.6 Appendix F

Let's demonstrate that χ_t is always positive.

First of all, we need to note that⁶⁵:

$$\frac{(1 - \eta + \delta)^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta + \delta) - (1 + i_b)} = \sum_{k=1}^t (1 - \eta + \delta)^{t-k} (1 + i_b)^{k-1} \quad (111)$$

$$\frac{[(1 - \eta)(1 + i_c)]^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta)(1 + i_c) - (1 + i_b)} = \sum_{k=1}^t [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-k} (1 + i_b)^{k-1} \quad (112)$$

$$\frac{(1 - \eta)^t - (1 + i_b)^t}{(1 - \eta) - (1 + i_b)} = \sum_{k=1}^t (1 - \eta)^{t-k} (1 + i_b)^{k-1} \quad (113)$$

Now, substituting Equations from 111 to 113 in Equation 54 we get:

$$\begin{aligned} \chi_t = & \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{r}w\bar{L}_0}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \left[\sum_{k=1}^t (1 - \eta + \delta)^{t-k} (1 + i_b)^{k-1} - \sum_{k=1}^t [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-k} (1 + i_b)^{k-1} \right] \\ & - \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{r}w\bar{L}_0}{(1 - \eta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \left[\sum_{k=1}^t (1 - \eta)^{t-k} (1 + i_b)^{k-1} - \sum_{k=1}^t [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-k} (1 + i_b)^{k-1} \right] \end{aligned} \quad (114)$$

Next, we can rearrange Equation 114:

$$\begin{aligned} \chi_t = & \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{r}w\bar{L}_0}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \sum_{k=1}^t \left[(1 - \eta + \delta)^{t-k} - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-k} \right] (1 + i_b)^{k-1} \\ & - \frac{(i_b - i_c)\alpha\bar{r}w\bar{L}_0}{(1 - \eta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \sum_{k=1}^t \left[(1 - \eta)^{t-k} - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-k} \right] (1 + i_b)^{k-1} \end{aligned} \quad (115)$$

⁶⁵For this purpose, it is necessary to also note that for any positive w and z we have $w^t - z^t = (w - z) \sum_{k=1}^t w^{t-k} z^{k-1}$.

Again, we need to note that:

$$\frac{(1 - \eta + \delta)^{t-k} - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-k}}{(1 - \eta + \delta) - [(1 - \eta)(1 + i_c)]} = \sum_{p=1}^{t-k} (1 - \eta + \delta)^{t-k-p} [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{p-1} \quad (116)$$

$$\frac{(1 - \eta)^{t-k} - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-k}}{(1 - \eta) - [(1 - \eta)(1 + i_c)]} = \sum_{p=1}^{t-k} (1 - \eta)^{t-k-p} [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{p-1} \quad (117)$$

Substituting Equations from 116 and 117 in Equation 115 we get:

$$\begin{aligned} \chi_t = & (i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0 \sum_{k=1}^t \left[\sum_{p=1}^{t-k} (1 - \eta + \delta)^{t-k-p} [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{p-1} \right] (1 + i_b)^{k-1} \\ & - (i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0 \sum_{k=1}^t \left[\sum_{p=1}^{t-k} (1 - \eta)^{t-k-p} [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{p-1} \right] (1 + i_b)^{k-1} \end{aligned} \quad (118)$$

Once more, we can rearrange Equation 118 to get:

$$\begin{aligned} \chi_t = & (i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0 \times \\ & \sum_{k=1}^t \left[\sum_{p=1}^{t-k} (1 - \eta + \delta)^{t-k-p} [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{p-1} - (1 - \eta)^{t-k-p} [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{p-1} \right] (1 + i_b)^{k-1} \end{aligned} \quad (119)$$

Lastly, we can rewrite Equation 119 as:

$$\begin{aligned} \chi_t = & (i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0 \times \\ & \sum_{k=1}^t \left[\sum_{p=1}^{t-k} \left[(1 - \eta + \delta)^{t-k-p} - (1 - \eta)^{t-k-p} \right] [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{p-1} \right] (1 + i_b)^{k-1} \end{aligned} \quad (120)$$

But, since $(1 - \eta + \delta) > (1 - \eta)$, $(i_b - i_c)\alpha\bar{\tau}w\bar{L}_0 > 0$, $(1 - \eta)(1 + i_c) > 0$ and $(1 + i_b) >$, we conclude that χ_t is always positive.

Just as we wanted to demonstrate.

3.7 Appendix G

$$\begin{aligned} \chi_t &= (1 + i_b)\chi_{t-1} - (i_b - i_c) \\ \alpha\bar{r}w\bar{L}_0 &\left\{ \begin{aligned} &\frac{(1 - \eta + \delta)^{t-1} - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-1}}{(1 - \eta + \delta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \\ &\frac{(1 - \eta)^{t-1} - [(1 - \eta)(1 + i_c)]^{t-1}}{(1 - \eta) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (121)$$

Let's demonstrate that if $a, b, c, d, e, k, w, y, z$ and m are positive, $k = m$, and m is larger than w, y and z , then $a_t = ma_{t-1} + bk^{t-1} + cw^{t-1} + dy^{t-1} + ez^{t-1}$ implies:

$$\lim a_t \longrightarrow \infty \quad (122)$$

To do so, we need to write the following system:

$$\left\{ \begin{aligned} a_t &= ma_{t-1} + bk^{t-1} + cw^{t-1} + dy^{t-1} + ez^{t-1} \\ a_{t-1} &= ma_{t-2} + bk^{t-2} + cw^{t-2} + dy^{t-2} + ez^{t-2} \\ &\dots \\ a_2 &= ma_1 + bk^1 + cw^1 + dy^1 + ez^1 \\ a_1 &= ma_0 + bk^0 + cw^0 + dy^0 + ez^0 \end{aligned} \right. \quad (123)$$

Now, we can multiply the lines of the system 87 by an exponent of m :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = ma_{t-1} + bk^{t-1} + cw^{t-1} + dy^{t-1} + ez^{t-1} \\ ma_{t-1} = m^2a_{t-2} + mbk^{t-2} + mcw^{t-2} + mdy^{t-2} + mezt^{t-2} \\ \dots \\ m^{t-2}a_2 = m^{t-1}a_1 + m^{t-2}bk^1 + m^{t-2}cw^1 + m^{t-2}dy^1 + m^{t-2}ez^1 \\ m^{t-1}a_1 = m^ta_0 + m^{t-1}bk^0 + m^{t-1}cw^0 + m^{t-1}dy^0 + m^{t-1}ez^0 \end{array} \right. \quad (124)$$

Next, we need to sum the lines of system 88 to get:

$$\begin{aligned} a_t &= m^ta_0 \\ &+ b [m^{t-1} + km^{t-2} + \dots + k^{t-2}m + k^{t-1}] \\ &+ c [m^{t-1} + wm^{t-2} + \dots + w^{t-2}m + w^{t-1}] \\ &+ d [m^{t-1} + ym^{t-2} + \dots + y^{t-2}m + y^{t-1}] \\ &+ e [m^{t-1} + zm^{t-2} + \dots + z^{t-2}m + z^{t-1}] \end{aligned} \quad (125)$$

Since we set $k = m$, we can rewrite system 141 as:

$$\begin{aligned} a_t &= m^ta_0 \\ &+ b [m^{t-1} + m^{t-1} + \dots + m^{t-1} + m^{t-1}] \\ &+ c [m^{t-1} + wm^{t-2} + \dots + w^{t-2}m + w^{t-1}] \\ &+ d [m^{t-1} + ym^{t-2} + \dots + y^{t-2}m + y^{t-1}] \\ &+ e [m^{t-1} + zm^{t-2} + \dots + z^{t-2}m + z^{t-1}] \end{aligned} \quad (126)$$

Operating the sums inside the brackets, if w, y, z are all different from m , we get:

$$a_t = m^t a_0 + btm^{t-1} + \frac{w^t - m^t}{w - m}c + \frac{y^t - m^t}{y - m}d + \frac{z^t - m^t}{z - m}e \quad (127)$$

Now, we can multiply both sides of Equation 127 by $\frac{1}{m^t}$:

$$\frac{a_t}{m^t} = a_0 + \frac{bt}{m} + \frac{\frac{w^t}{m^t} - 1}{w - m}c + \frac{\frac{y^t}{m^t} - 1}{y - m}d + \frac{\frac{z^t}{m^t} - 1}{z - m}e \quad (128)$$

Therefore, we conclude that:

$$\lim \frac{a_t}{m^t} \rightarrow \infty \quad (129)$$

Just as we wanted to demonstrate.

3.8 Appendix H

Let's demonstrate that if

$$1 - \eta + \delta < 1 + i_b \quad (130)$$

then

$$(i_b - i_c) \alpha \bar{\tau} w \bar{L}_o \delta \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)} \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta)} > \bar{\tau} w \bar{L}_o \delta \alpha \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta)} \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \theta)} \quad (131)$$

only if

$$(1 + i_c) < (1 + i_b) \times \frac{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)}{(1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta)} \quad (132)$$

But, first of all, we need to demonstrate that

$$(1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta) > 0 \quad (133)$$

when

$$1 - \eta + \delta < 1 + i_b \quad (134)$$

To do so, let's note that:

$$(1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta) = (1 + i_b) - (1 - \theta) - [(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)](1 - \eta) \quad (135)$$

But, since $1 - \eta < 1$, we know that:

$$\begin{aligned} (1 + i_b) - (1 - \theta) - [(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)](1 - \eta) > \\ (1 + i_b) - (1 - \theta) - [(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)] \end{aligned} \quad (136)$$

So we get:

$$\begin{aligned} (1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta) > \\ (1 + i_b) - (1 - \theta) - [(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)] \end{aligned} \quad (137)$$

Developing the right side of the Inequality 137 we get:

$$\begin{aligned} (1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta) > \\ (1 - \eta + \delta) - (1 - \theta) \end{aligned} \quad (138)$$

But we know that $1 - \eta + \delta > 1$ and that $1 - \theta < 1$. Therefore, $(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta) > 0$, and we conclude that:

$$(1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta) > 0 \quad (139)$$

Now we can go back and demonstrate 131. For this purpose, we can cut off the common positive terms $\alpha \bar{r} w \bar{L}_0 \delta$ and $\frac{1}{(1+i_b)-(1-\theta)}$:

$$(i_b - i_c) \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta)(1 + i_c)} \times \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)} > \frac{1}{(1 + i_b) - (1 - \theta)} \quad (140)$$

Next, noticing that $(i_b - i_c) = (1 + i_b) - (1 + i_c)$, we can rewrite the Inequality 140:

$$[(1 + i_b) - (1 + i_c)] [(1 + i_b) - (1 - \theta)] > [(1 + i_b) - (1 - \eta)(1 + i_c)] [(1 + i_b) - (1 - \eta + \delta)] \quad (141)$$

Developing the Inequality 141, cutting off the common positive terms and isolating

$1 + i_c$ we get:

$$(1 + i_b) \frac{(1 - \eta + \delta) - (1 - \theta)}{(1 + i_b) - (1 - \theta) - (1 + i_b)(1 - \eta) + (1 - \eta + \delta)(1 - \eta)} > (1 + i_c) \quad (142)$$

As we wanted to demonstrate.

4 Referências Bibliográficas

AARON, Henry. Social Security Reconsidered. *National Tax Journal*, Washington, v. 64, n. 2, p. 385-414, 2011.

ADEMA, Williem. Net Social Expenditure. *OECD Labour Market and Social Policy Occasional Papers*, n. 52, 2001.

AIYAR, Shekhar; EBEKE, Christian; SHAO, Xiaobo. The Impact of Workforce Aging on European Productivity. *IMF Working Paper*. n. 16, 2016.

AYUSO, Mercedes; VALERO, Diego. Can complementary pension plans take on the role of improving retirement pensions in developing nations? Case Study – The Dominican Republic. *International Social Security Review*, Geneva, v. 64, n. 2, p. 65-89, 2011.

CALIENDO, Frank; GUO, Lei; HOSSEINI, Roozbeh. Social Security is NOT a Substitute for Annuities. *Review of Economic Dynamics*, Amsterdã, v.17, n. 4, p. 739-755, 2014.

CALCIANO, Filippo; TIRELLI, Mario. Public Versus Private Old-Age Pensions in Europe. *European Review*. Cambridge, v. 7, n. 2, p. 277-286, 2008.

CAMINADA, Koen; GOUDSWAARD, Kees. Are Public and Private Social Expenditures Complementary? *International Advances in Economic Research*, Atlanta, v. 11, n. 2, p. 175-189, 2005.

CRAWFORD, Vincent; LILIEN, David. Social Security and the Retirement Decision. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford, v. 96, n. 3, p. 505-529, ago. 1981.

DWYER, Gerald. Social Security Private Accounts: A Risky Proposition? *Economic Review*, Atlanta, v. 90, n. 3, p. 1-13, jul. 2005.

EDWARDS, Allison. Social Security reform: How to prevent the program's bankruptcy

James Madison University, Virgínia, n. 134, 2021.

ELTON, Edwin; GRUBER, Martin; BROWN, Stephen; GOETZMANN, William. *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. 8. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

FINKE, Michael. CHATTERJEE, Swarnankur. Social Security: Who Wants Private Accounts. *Financial Services Review*, Amsterdã, v. 17, n. 4, p. 289-319, 2008.

HINDRIKS, Jean; MYLES, Gareth. *Intermediate Public Economics*. Cambridge: The MIT Press, 2004.

KUMRU, Cagri; THANOPOULOS, Athanasios. Social Security Reform with Self-Control Preferences. *Journal of Public Economics*, Amsterdã, v. 95, n. 7, p. 886-899, 2011

LE-RONG, Yu; XIAO-YUN, Li. The effects of social security expenditure on reducing income inequality and rural poverty in China. *Journal of Integrative Agriculture*, China, n. 20, p. 1060-1067, 2021.

MARTIN, John; WHITEHOUSE, Edward. Reforming Retirement-Income Systems: Lessons from the Recent Experiences of *OECD Countries*. *OECD Social, Employment and Migration Working Papers*, n. 66, 2008.

MARTÍNEZ, Maria; SANTOS-JAÉN, José; AMIN, Fahim-ul; MARTÍN-CERVANTES, Pedro. *Pensions, Ageing and Social Security Research: Literature Review and Global Trends*. *Mathematics*, n. 9, 2021.

MUNNELL, Alicia. The Future of the U.S. Pension System. In CAMPBELL, Colin. *Financing Social Security*. Washington: American Enterprise Institute for Public Policy Research, 1979. p. 237-264.

NERY, Pedro. A Previdência tem Déficit ou Superávit? Considerações em tempos de

“CPMF da Previdência”. *Boletim Legislativo*, n. 37, 2015.

TILOVE, Robert. Social and Economic Implications of Private Pensions, *Industrial & Labor Relations Review*, Ithaca, v. 14, n. 1, p. 24-34, 1960.

SHIPMAN, William. Retiring with Dignity: Social Security vs. Private Markets, *The Washington Quarterly*, Washington, v. 22, n. 1, p. 119-126, 1999.

SHOVEN, John; SLALOV, Sita; WATSON, John. How Does Social Security Reform Indecision Affect Younger Cohorts? *National Bureau of Economic Research*, Cambridge, Working Paper n. 28850, 2021.

STEVENSON, David; COHEN, Marc; TELL, Eileen; BURWELL, Brian. The Complementarity of Public and Private Long Term Care Coverage. *Health Affairs*, Maryland, v. 29, n. 1, p. 96-101, 2010.

VARIAN, Hal. *Microeconomia: Princípios Básicos*. 7. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2003.