



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA / FACULDADE DO GAMA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**ESTIMATIVA DA VIDA EM FADIGA SOB CONDIÇÕES MULTIAXIAIS ALEATÓRIAS**  
**UTILIZANDO O MÉTODO *PROJECTION-BY-PROJECTION***

**EMANUELY UGULINO CARDOSO**

**ORIENTADOR: PROF. DR. JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB  
FACULDADE DE TECNOLOGIA / FACULDADE DO GAMA

**ESTIMATIVA DA VIDA EM FADIGA SOB CONDIÇÕES MULTIAXIAIS ALEATÓRIAS  
UTILIZANDO O MÉTODO *PROJECTION-BY-PROJECTION***

**EMANUELY UGULINO CARDOSO**

ORIENTADOR: PROF. DR. JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM  
INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

PUBLICAÇÃO: 101A/2022

BRASÍLIA/DF, JUNHO DE 2022

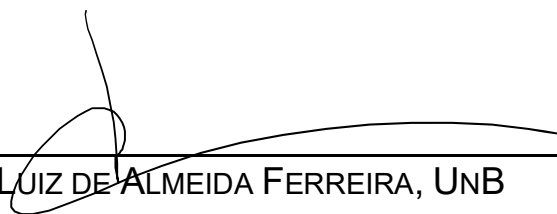
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA - UNB  
FACULDADE DE TECNOLOGIA / FACULDADE DO GAMA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA

**ESTIMATIVA DA VIDA EM FADIGA SOB CONDIÇÕES MULTIAXIAIS ALEATÓRIAS  
UTILIZANDO O MÉTODO *PROJECTION-BY-PROJECTION***

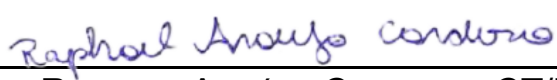
EMANUELY UGULINO CARDOSO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

  
\_\_\_\_\_  
PROF. DR. JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA, UNB  
(ORIENTADOR)

  
\_\_\_\_\_  
DR. ANDRÉ TEÓFILO BECK, EESC/USP  
(EXAMINADOR EXTERNO)

  
\_\_\_\_\_  
DR. RAPHAEL ARAÚJO CARDOSO, CT/UFRN  
(EXAMINADOR EXTERNO)

  
\_\_\_\_\_  
DR. FÁBIO COMES DE CASTRO, UNB  
(SUPLENTE)

**BRASÍLIA/DF, JUNHO DE 2022**

## FICHA CATALOGRÁFICA

UGULINO CARDOSO, EMANUELY

Estimativa da vida em fadiga sob condições multiaxiais aleatórias utilizando o método *Projection-by-Projection*. [Distrito Federal], 2022.

xii, 59p. 210 x 297 mm (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade de Materiais da Engenharia, 2020).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.  
Faculdade do Gama.

1. Projeções

2. Domínio do tempo/Domínio da frequência

3. Máxima variância

4. Custo computacional

I. ENC/FT/UnB

II. Mestre (ENC/FT/UnB – Junho/2022)

### Referência

Cardoso, Emanuely (2022). Estimativa da vida em fadiga sob condições multiaxiais aleatórias utilizando o método *Projection-by-Projection*. Dissertação de mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação 101A/2022, Programa de Pós-Graduação, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 59p.

### Cessão de Direitos

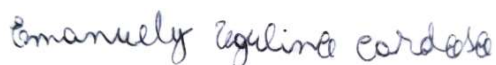
Autor: Emanuely Ugulino Cardoso

Título: Estimativa da vida em fadiga sob condições multiaxiais aleatórias utilizando o método *Projection-by-Projection*.

Grau: Mestre

Ano: 2022

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender essas cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



---

[emanuely.ugulino@gmail.com](mailto:emanuely.ugulino@gmail.com)

Brasília, DF – Brasil

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar a previsão de vida à fadiga do aço 18G2A, no domínio do tempo e da frequência, utilizando o método conhecido como Projeção por Projeção (Projection-by-Projection - PbP) aplicado principalmente em carregamentos multiaxiais. Para isso foram implementadas as rotinas do método que, em seguida, foram validadas a partir de simulações numéricas.

O método utilizado se baseia no uso de invariantes de tensões e a partir da projeção nas direções de máxima variância com base no espaço desviador são obtidos carregamentos uniaxiais independentes, sendo possível estimar o dano usando Palmgren-Miner ou através de análises dos espectros de potência.

A fim de avaliar o método PbP foram realizadas previsões no aço 18G2A considerando os testes experimentais disponíveis na literatura para vários estados de tensão em flexo-torção e com diferentes coeficientes de correlação. Foram realizadas 5 estimativas para cada espécime com o intuito de verificar a variabilidade dos resultados. Com os resultados obtidos 86% e 90% das estimativas ficaram dentro da banda de dispersão de 3 vidas calculadas, no domínio da frequência e do tempo, respectivamente, sendo que as previsões no modelo temporal foram mais variáveis, já no modelo espectral as estimativas foram mais estáveis não apresentando variações significativas.

Após estudar o comportamento das estimativas de vida à fadiga pelo método PbP, foram analisados os custos computacionais para executar as previsões em cada domínio considerando um teste para cada nível de correlação e diferentes tempos amostrais. Os tempos de processamento foram obtidos pela média de 50 execuções e no domínio da frequência os resultados não apresentaram dependência com o grau de correlação nem com o tempo amostral. Já no domínio do tempo o custo computacional aumentou proporcionalmente ao tempo amostral e o caso com correlação igual 1 apresentou um tempo de processamento maior que os demais casos.

Palavras-chave: domínio do tempo, domínio da frequência, projeções, máxima variância, custo computacional.

## **ABSTRACT**

The present work aims to predict the fatigue life of 18G2A steel, in the time and frequency domains, using the method known as Projection-by-Projection - PbP, applied mainly in multiaxial loadings. For this, the method routines were implemented, which were then validated from numerical simulations.

The method used is based on the use of stresses invariants and from projection in the direction of maximum variance on the deviatoric space, independent uniaxial loadings are obtained, being possible to estimate the damage using Palmgren-Miner or through analysis of the power spectrum.

In order to evaluate the PbP method, predictions were made on 18G2A steel considering the experimental tests available in the literature for various tension-torsion stress states and with different correlation coefficients. Five estimates were made for each specimen in order to verify the variability of the results. With the results obtained, 86% and 90% of the estimates were within the scatter band of 3 calculated lifes, in the frequency and time domain, respectively. The predictions in the temporal model were more variable, in the spectral model the estimates were more stable not showing significant variations.

After studying the behavior of fatigue life estimates by the PbP method, the computational costs to execute the predictions in each domain were analyzed considering a test for each correlation level and different sampling times. The processing times were obtained by the average of 50 executions and in the frequency domain the results showed no dependence on the degree of correlation or the sampling time. In the time domain, the computational cost increased proportionally to the sample time and the case with correlation equal to 1 presented a longer processing time than the other cases.

**Keywords:** time domain, frequency domain, projections, maximum variance, computational cost.

## SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
1.1	Contextualização .....	1
1.2	Motivação .....	3
1.3	Objetivos.....	5
1.3.1	Objetivo Geral .....	5
1.3.2	Objetivos Específicos .....	5
2	Abordagem no Domínio do Tempo.....	6
2.1	Análise Tensão-Vida.....	6
2.2	Dano por Fadiga .....	9
2.3	Técnica de Contagem de Ciclos Rainflow .....	10
3	Abordagem no Domínio da Frequência .....	13
3.1	Propriedades Espectrais.....	13
3.2	Dano por Fadiga Baseado nos Espectros de Potência .....	16
3.3	Estimativa de Vida pelo Método de Dirlik .....	17
4	Fadiga Multiaxial.....	20
4.1	Projection-by-Projection (PbP).....	22
4.2	Método PbP para um Estado Plano de Tensão.....	25
4.3	Estratégias de Previsão de Vida Usando o Método PbP .....	29
4.3.1	No Domínio do Tempo .....	29
4.3.2	No Domínio da Frequência .....	31
5	Metodologia .....	33
6	Resultados.....	38
6.1	Validação do Método PbP .....	38
6.2	Comparação do Método PbP com Testes Experimentais .....	40
6.3	Comparação da Vida em Fadiga, Método PbP <i>versus</i> Método do Plano Crítico ..	44
6.4	Custo Computacional .....	45
7	Discussões .....	47
7.1	Previsão de Vida à Fadiga do Aço 18G2A .....	47
7.2	Custo Computacional do Método PbP .....	49
8	Conclusão.....	51
8.1	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	52
	Lista de Referências .....	53
	Apêndice – Dedução da Equação do Dano de Dirlik .....	56

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 Propriedades à fadiga dos materiais utilizados nas simulações numéricas (Benasciutti et al. 2019). .....	33
Tabela 5.2 Caracterização dos estados de tensões considerados nas simulações numéricas (Benasciutti et al. 2019). .....	34
Tabela 5.3 Propriedades à fadiga do aço 18G2A (Cristofori et al. 2011). .....	36
Tabela 5.4 Condições dos testes experimentais do aço 18G2A (Cristofori et al. 2011). ...	36



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Turbina eólica: a) Modelo estrutural b) Série temporal (Gomes 2019, Adaptado).	4
Figura 2.1 Parâmetros usados nas tensões cíclicas e definição dos ciclos.	7
Figura 2.2 Curvas S-N para um aço e uma liga de alumínio (Watanabe 2014, Adaptado).	8
Figura 2.3 Regra rainflow de contagem de ciclos (Lee e Taylor 2005a, Adaptado).	11
Figura 3.1 a) Amostras de histórico de tempo b) PSD de banda estreita e banda larga dos sinais.	14
Figura 4.1 Carregamento multiaxial em fase.	21
Figura 4.2 Carregamento multiaxial fora de fase.	21
Figura 4.3 Exemplo de caminho de carregamento aleatório $\Psi$ no espaço desviador, gerado a partir de tensões de flexo-torção, para determinação das tensões no referencial do sistema de projeção.	27
Figura 4.4 Diagrama de Wöhler modificado para definição da curva S-N de referência para um carregamento multiaxial genérico.	28
Figura 5.1 Etapas do método PbP no domínio do tempo e da frequência.	35
Figura 6.1 Método PbP no domínio da frequência com o dano de banda estreita – comparação entre a vida à fadiga estimada e a vida de referência.	38
Figura 6.2 Método PbP no domínio da frequência com o método de Tovo-Benasciutti – comparação entre a vida à fadiga estimada e a vida de referência.	39
Figura 6.3 Método PbP no domínio do tempo – comparação entre a vida à fadiga estimada e a vida de referência com o método de Tovo-Benasciutti.	40
Figura 6.4 Comparação entre a vida à fadiga estimada com o método PbP no domínio da frequência e a vida experimental.	41
Figura 6.5 Barras de erro do desvio padrão das vidas estimadas no domínio da frequência.	42
Figura 6.6 Comparação no domínio do tempo entre a vida estimada e experimental.	43
Figura 6.7 Variabilidade das vidas estimadas no domínio do tempo.	43
Figura 6.8 Comparação no domínio da frequência entre a vida à fadiga estimada com os métodos do plano crítico e PbP.	44
Figura 6.9 Comparação no domínio do tempo entre a vida à fadiga estimada com os métodos do plano crítico e PbP.	45
Figura 6.10 Tempo de processamento do método PbP: a) domínio do tempo b) domínio da frequência.	46

## LISTA DE NOMENCLATURAS E ABREVIações

<b>ASTM</b>	American Society for Testing and Materials
<b>FFT</b>	Fast Fourier Transform (Transformada Rápida de Fourier)
<b>IFT</b>	Inverse Fourier Transform (Transformada de Fourier Inversa)
<b>PBP</b>	Projection-by-Projection (Projeção por Projeção)
<b>PSD</b>	Power Spectral Density (Densidade Espectral de Potência)
<b>RMS</b>	Root Mean Square (Valor Quadrático Médio)
<b>S-N</b>	Stress versus Number of cycles (Tensão versus Vida)

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS LATINOS

$A, b$	parâmetros da curva S-N
$C$	matriz de covariância das componentes de tensão
$C'$	matriz de covariância das tensões no espaço desviador
$C'_p$	matriz de covariância das projeções das tensões
$C_{ref}$	constante de resistência da curva S-N de referência
$d$	valor do dano para um nível de tensão específico
$D$	dano esperado por unidade de tempo
$D_c$	dano crítico
$D_1, D_2, D_3$	parâmetros de Dirlik
$D_{DK}$	dano de Dirlik
$D_{NB}$	dano de banda estreita
$D_{TB}$	dano de banda larga
$E[ ]$	valor esperado
$f$	frequência
$f_{S_a}(S_a)$	função de densidade de probabilidade de amplitude rainflow
$G(f)$	densidade espectral unilateral
$G(f)$	matriz PSD das componentes de tensão
$G'(f)$	matriz PSD das tensões no espaço desviador
$G'_p(f)$	matriz PSD das projeções das tensões
$\sqrt{J_{2a}}$	amplitude do segundo invariante do tensor desviador
$J_{A,ref}$	amplitude de resistência à fadiga da curva S-N de referência
$J_{A,\sigma}, J_{A,\tau}$	amplitudes de resistência para carregamento axial e de torção, respectivamente
$k_{ref}$	inclinação inversa da curva S-N de referência
$k_\sigma, k_\tau$	inclinações inversas do diagrama de Wölher modificado para carregamento axial e de torção, respectivamente

$N_f$	número de ciclos até a falha por fadiga
$N_{f,i}$	quantidade de ciclos na curva S-N correspondente a um nível de tensão
$n_i$	quantidade de ciclos para um nível de tensão
$r$	coeficiente de correlação
$R, Q$	parâmetros de Dirlik
$s$	vetor das tensões no espaço desviador
$S(f)$	densidade espectral bilateral
$S_a, S_r$	amplitude e faixa de tensão constante, respectivamente
$S_m$	tensão média
$S_{máx}, S_{mín}$	tensão máxima e mínima, respectivamente
$T$	período total de tempo
$x$	vetor das tensões

## SÍMBOLOS GREGOS

$\alpha$	fator de irregularidade
$\Gamma$	função gamma
$\gamma$	parâmetro de largura espectral
$\eta_{TB}$	parâmetro de Tovo-Benasciutti
$\theta$	ângulo de fase
$\lambda_n$	momento espectral de ordem $n$
$\nu_0$	taxa esperada de cruzamentos por unidade de tempo
$\nu_p$	taxa esperada de picos por unidade de tempo
$\rho_{ref}$	parâmetro das tensões multiaxiais
$\sigma$	tensor das tensões
$\sigma, \tau$	tensão normal e cisalhante, respectivamente
$\sigma_A, \tau_A$	resistência à fadiga para carregamento axial e de torção, respectivamente
$\sigma_H$	pressão hidrostática
$\sigma_s$	valor do RMS
$\Omega$	projeções das histórias de tensão

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

A estimativa da vida em fadiga sob carregamento multiaxial tem sido um tópico de pesquisa ativo e crescente nas últimas décadas. Uma razão pode ser o aumento do uso da análise de elementos finitos no projeto de componentes mecânicos, capaz de permitir a modelagem de geometrias de componentes complexos sob qualquer tipo de carregamento.

Na literatura, um grande número de teorias e critérios têm sido propostos para estimar a vida em fadiga sob carregamento multiaxial. Tais teorias podem ser classificadas como abordagens no “domínio do tempo”, pois aplicam algoritmos diretamente a amostras de históricos de tensão no tempo, que podem ser usados, por exemplo, para localizar o plano crítico ou para medir a amplitude do segundo invariante do tensor desviador (Benasciutti, Sherratt e Cristofori 2016).

Apesar das melhorias contínuas, o tempo de computação dos algoritmos existentes permanece alto e aumenta com o número de pontos amostrais processados, podendo até se tornar excessivo ao processar históricos de tempo aleatórios de milhares de pontos.

A abordagem no “domínio da frequência” (ou espectral) parece oferecer essa vantagem, capaz de reduzir drasticamente o tempo computacional, mantendo altos níveis de precisão, que tem sido sugerida como uma possível alternativa ao domínio do tempo para a análise de tensões aleatórias multiaxiais. Na abordagem no domínio da frequência, tensões aleatórias multiaxiais são convenientemente caracterizadas por um conjunto de funções de densidade espectral de potência – Power Spectral Density (PSD) (Benasciutti, Zanellati e Cristofori 2019).

Vários métodos para resolver o problema de fadiga multiaxial foram propostos na literatura, que podem ser subdivididos em abordagens baseadas em tensão, em deformação e baseadas em energia. A necessidade de considerar a orientação e o local de iniciação da trinca resultaram na formulação de técnicas complexas e sofisticadas, que incluem as aproximações do plano crítico, as abordagens integrais e mesoscópicas. Os critérios baseados em invariantes de tensão são geralmente

considerados os mais eficientes do ponto de vista computacional, proporcionando, ao mesmo tempo, estimativas precisas e confiáveis. Nos últimos anos, vários critérios baseados em invariantes de tensão, geralmente empregados no regime de fadiga de médio/alto ciclo, foram elaborados e validados por diferentes autores (Cristofori, Susmel e Tovo 2008).

Segundo Papadopoulos et al. (1997), os critérios de fadiga baseados nos invariantes de tensão consideram a tensão hidrostática e o segundo invariante do tensor desviador. Dentre essas abordagens, o critério de Marin foi desenvolvido com base na amplitude e no valor médio do segundo invariante do tensor desviador e não é capaz de distinguir o efeito de uma tensão de tração de uma tensão em compressão, pois as tensões são elevadas ao quadrado. Os critérios de Sines e Crossland consideram a amplitude do segundo invariante do tensor desviador e diferem ao analisar a influência da tensão hidrostática, em que Sines avalia a tensão hidrostática média; já Crossland considera o seu valor máximo. O critério Kakuno e Kawada (1979) foi elaborado principalmente para aplicação em carregamento fora de fase e sugere separar os efeitos da tensão hidrostática, considerando a amplitude e o valor médio. O critério de Deperrois (1991) se baseia na representação da trajetória de carregamento no espaço desviador transformado de 5 dimensões, em que são realizadas projeções do carregamento até atingir um subespaço de 1 dimensão.

Dentre os métodos baseados em invariantes de tensão para estimar a vida em fadiga, a abordagem chamada de “Projeção por Projeção – Projection-by-Projection (PbP)” é adequada para análise de fadiga multiaxial. O critério proposto é particularmente útil para a avaliação da durabilidade de estruturas complexas sob carregamentos aleatórios. As vantagens do método PbP podem ser obtidas no domínio do tempo, bem como para aplicações no domínio da frequência (Benasciutti, Cristofori e Tovo 2013).

Os primeiros trabalhos publicados com o método PbP foram desenvolvidos por Cristofori, Susmel e Tovo em 2008, que descreveram a metodologia no domínio do tempo para estimar o dano a fadiga na presença de carregamentos multiaxiais complexos. Já em 2011, Cristofori, Benasciutti e Tovo deram continuidade no desenvolvimento do método e publicaram a formulação para o domínio da frequência, que pode ser aplicada a carregamentos aleatórios multiaxiais estacionários. Em 2014,

um exemplo numérico para análise em uma viga de aço excitada por uma aceleração de entrada aleatória foi proposto por Cristofori e Benasciutti, que realizaram uma análise de elementos finitos para calcular a matriz PSD de tensão nos nós da estrutura e aplicaram o modelo espectral do método PbP para estimar o dano a fadiga. Um guia prático para implementação do método no domínio da frequência foi apresentado por Benasciutti, Zanellati e Cristofori em 2019, que detalharam todas as etapas do método. Esses são os trabalhos de maior relevância desenvolvidos até o momento para o método PbP, que contemplam exemplos numéricos e/ou os procedimentos para implementação do método.

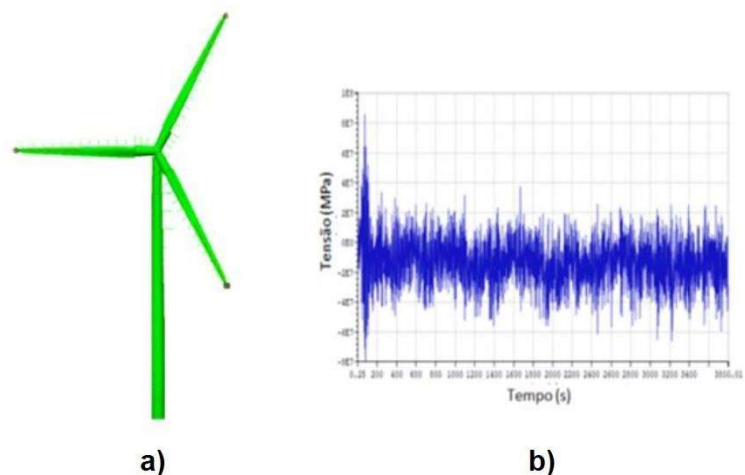
## **1.2 Motivação**

Componentes e estruturas de engenharia são frequentemente submetidas a tensões aleatórias multiaxiais em serviço, sujeitas a combinação de forças ou carregamentos de tração ou compressão, torção e flexão. Os critérios de fadiga multiaxial disponíveis são normalmente formulados no domínio do tempo aplicados a históricos de tempo de tensão simulados ou medidos, que podem se tornar computacionalmente exigentes e, portanto, impraticáveis com os tempos de análise extremamente longos necessários para o processamento de históricos multiaxiais com muitos pontos de amostra. Critérios multiaxiais baseados em frequência têm sido progressivamente desenvolvidos como ferramentas alternativas válidas, pois são capazes de reduzir o tempo computacional geral (Cristofori e Benasciutti 2014).

A excitação aleatória de banda larga é uma fonte de carga repetida em uma estrutura, originada de fontes ambientais, como estradas irregulares e correntes marítimas, mas também máquinas como motores de combustão e propulsão. A maior parte da pesquisa experimental é realizada em corpos de prova carregados em regime quase estático (sem considerar os efeitos da dinâmica estrutural), mostrando boa concordância com os resultados experimentais. No entanto, tais estudos são raros para uma estrutura vibrante, onde o estado de tensão é uma consequência da resposta dinâmica e poucos estudos estão disponíveis que exploram a excitação aleatória de banda larga e a dinâmica estrutural para induzir a falha (Mršnik, Slavič e Boltežar 2016).

Pinto Neto (2018) apresentou um caso de falha do virabrequim de um gerador de uma usina termelétrica, que é o eixo central do motor responsável em receber a força dos pistões e transformar em torque e rotação. A peça havia sido projetada para ter vida infinita e o custo estimado apenas da reposição da peça foi de seiscentos mil euros, além dos custos gerados com o equipamento fora de operação. No processo de dimensionamento dos virabrequins os programas de elementos finitos são ferramentas indispensáveis para simular os esforços aplicados na peça e otimizar (reduzir) seu comprimento e peso, mantendo níveis confiáveis de operação e uma vida segura em relação à fadiga, sendo esta a causa mais comum de falhas em metais.

As turbinas eólicas onshore ou offshore têm como principal fonte de carga a turbulência do vento e/ou do mar, caracterizadas por uma série temporal aleatória como apresentado na Figura 1.1. Gomes (2019) publicou um estudo dedicado ao entendimento do comportamento à fadiga da conexão entre a torre de suporte da turbina eólica offshore e sua fundação. A torre e a fundação são estruturas metálicas e na conexão tem a injeção de concreto de alta resistência, denominado graute, em que um dos objetivos era a análise do comportamento à fadiga do graute para diferentes estados de mar e condições de solo.



**Figura 1.1** Turbina eólica: a) Modelo estrutural b) Série temporal (Gomes 2019, Adaptado).



Os casos citados são alguns exemplos de estruturas sujeitas a carregamentos multiaxiais em que se faz necessário o estudo do comportamento à fadiga. Devido a literatura possuir poucos trabalhos com a aplicação do método PbP para análises em fadiga multiaxial, este trabalho apresenta resultados inéditos para a previsão de vida em fadiga no aço 18G2A quando submetido a carregamentos multiaxiais aleatórios, tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, a partir do método PbP. Além disso, busca elucidar as capacidades e vantagens desse método ainda pouco empregado, de modo que os resultados obtidos corroborem para difusão do método na comunidade técnica e científica, frente aos outros critérios já amplamente utilizados.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo Geral**

Neste trabalho, buscou-se estimar a vida em fadiga sob condições multiaxiais aleatórias empregando o método Projection-by-Projection tanto no domínio do tempo quanto da frequência.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

Para complementar esta pesquisa traçou-se ainda os seguintes objetivos:

- Desenvolver as rotinas computacionais do método PbP a serem utilizadas como ferramentas na previsão de vida em fadiga;
- Analisar as vidas previstas do aço 18G2A quando comparadas com os testes experimentais e com resultados de previsões disponíveis na literatura como o método do plano crítico;
- Verificar o custo computacional do método PbP.

## 2 ABORDAGEM NO DOMÍNIO DO TEMPO

### 2.1 Análise Tensão-Vida

A fadiga é um processo de dano localizado em um componente produzido por carregamento cíclico. É o resultado do processo cumulativo que consiste no início da trinca, propagação e fratura final de um componente. Durante o carregamento cíclico, a deformação plástica localizada pode ocorrer no local de maior tensão, que induz danos permanentes ao componente e uma trinca se desenvolve. À medida que o componente passa por um número crescente de ciclos de carregamento, o comprimento da trinca (dano) aumenta. Após um certo número de ciclos, a trinca fará com que o componente falhe (se separe) (Lee 2005b).

Desde meados de 1800, um método padrão de análise de modelos de fadiga tem sido a abordagem baseada na tensão. August Wöhler determinou uma curva de tensão aplicada como uma função do número de ciclos necessários para quebrar o material e uma tensão limite de resistência à fadiga para aços. Esse método também é conhecido como abordagem tensão-vida, denominado na literatura técnica como Curva S-N ou Curva de Wöhler (Watanabe 2014). Esses dados geralmente são obtidos em carregamentos de flexão, torção ou tração/compressão sem a presença de tensões médias.

Para gerar dados úteis para projetos de fadiga usando a abordagem tensão-vida, testes de fadiga são geralmente realizados em vários espécimes em diferentes amplitudes de tensão totalmente reversas ao longo de uma faixa de vidas úteis para espécimes preparados de forma idêntica, sendo assim possível desenvolver a curva S-N que representa o comportamento da vida à fadiga de um componente (Lee e Taylor 2005b).

Durante o teste de fadiga, o corpo de prova é submetido a cargas alternadas até a falha. As cargas aplicadas ao corpo de prova são definidas por uma faixa de tensão constante ( $S_r$ ) ou uma amplitude de tensão constante ( $S_a$ ) como

$$S_a = \frac{S_r}{2} = \frac{(S_{m\acute{a}x} - S_{m\acute{i}n})}{2}, \quad (2.1)$$

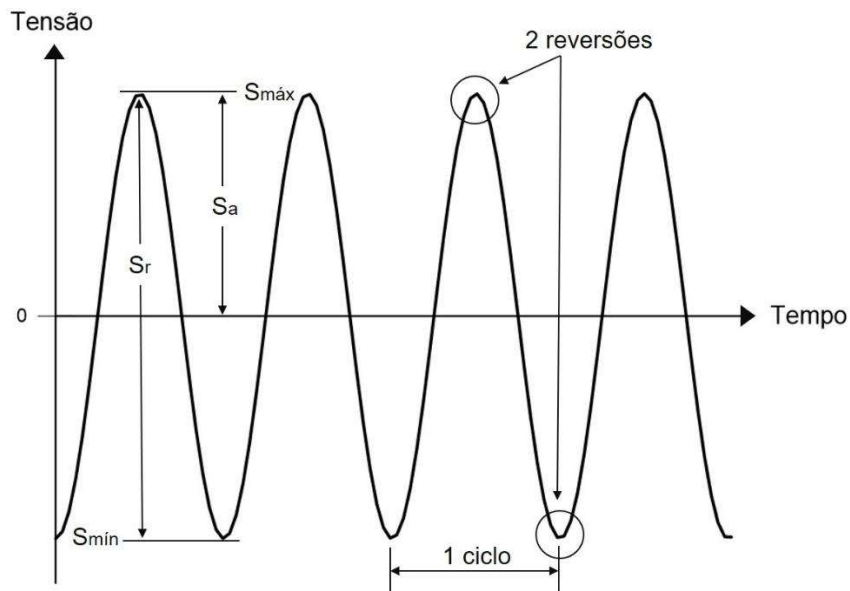
onde  $S_{m\acute{a}x}$  é a tensão máxima e  $S_{m\acute{i}n}$  a tensão mínima.

A magnitude da faixa de tensão ou amplitude é a variável controlada e o número de ciclos até a falha é a variável de resposta, que corresponde a vida em fadiga ( $N_f$ ). Em geral, a vida útil aumenta à medida que o nível de tensão diminui.

O teste de fadiga comumente conduzido com carregamento totalmente reverso indica que o carregamento está alternando em torno de uma tensão média nula. A tensão média ( $S_m$ ) é definida como

$$S_m = \frac{(S_{m\acute{a}x} + S_{m\acute{m}n})}{2}. \quad (2.2)$$

Os parâmetros das tensões como também a definição dos ciclos e reversões para um carregamento de amplitude constante são ilustrados na Figura 2.1.



**Figura 2.1** Parâmetros usados nas tensões cíclicas e definição dos ciclos.

Basquin (1910) observou os dados dos ensaios de fadiga e verificou que eles poderiam ser linearizados em um gráfico log-log. A relação de Basquin que descreve o comportamento das curvas S-N pode ser definida como

$$S_a = S'_f (2N_f)^B, \quad (2.3)$$

onde  $B$  é o expoente de resistência a fadiga e  $S'_f$  a tensão limite de resistência a fadiga do material determinado por experimentos.

De forma equivalente a relação de Basquin pode ser escrita como

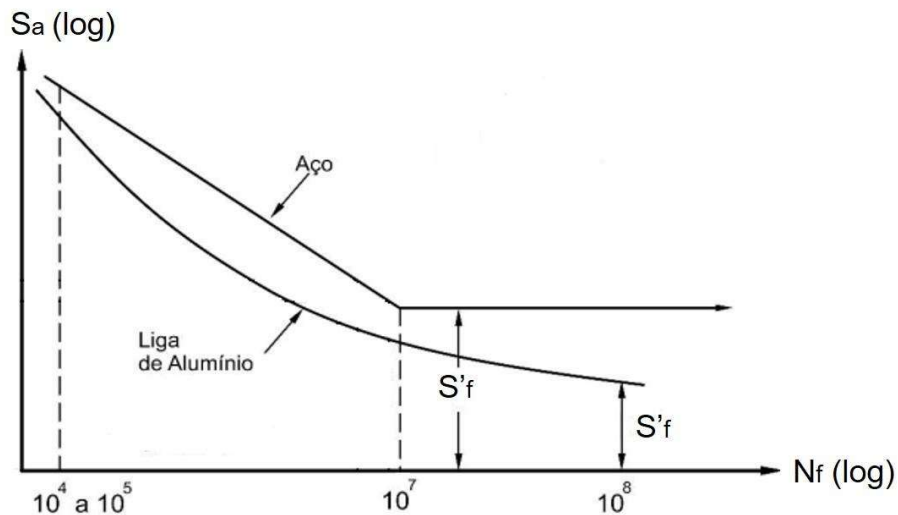
$$S_a = A(N_f)^b = (2^B S'_f)(N_f)^B, \quad (2.4)$$

e uma forma alternativa da curva S-N para prever  $N_f$  a partir de  $S_a$  é dada por

$$N_f = K S_a^{-m}, \quad (2.5)$$

onde  $m = -1/b$  e  $K = (1/A)^{-m}$ .

A configuração da curva S-N é apresentada na Figura 2.2 para um aço baixo carbono e uma liga de alumínio sob ciclo de carregamento com tensão média nula.



**Figura 2.2** Curvas S-N para um aço e uma liga de alumínio (Watanabe 2014, Adaptado).

A partir das curvas S-N para os dois materiais percebe-se que eles apresentam comportamentos distintos a fadiga. No caso do aço, quando submetido a amplitudes de tensão constante, existe um limite inferior de amplitude de tensão abaixo do qual não se observa mais a falha do componente mesmo com um número muito elevado de ciclos ( $N_f > 10^7$ ), em que a curva S-N se torna horizontal. Essa amplitude de tensão é conhecida como tensão limite de resistência à fadiga,  $S'_f$ , que corresponde a vida infinita do corpo de prova utilizado em ensaio (Branco, Fernandes e Castro 1999).

Já para o caso do alumínio esse limite de fadiga não é bem definido, em que as falhas por fadiga ocorrerão em determinado número de ciclos dependendo da tensão aplicada. Nos materiais que não possuem o limite de fadiga definido, como o alumínio, pode-se definir uma tensão limite de fadiga para  $10^8$  ciclos, que corresponde a amplitude de tensão que o corpo de prova suporta sem falhar (Cardoso 2015).

Dessa forma, a curva S-N não é geral para todos os casos, visto que vários materiais não possuem um limite de fadiga bem definido e a curva S-N continua a declinar vagarosamente (Mendes 2006).

## 2.2 Dano por Fadiga

O dano por fadiga é um processo contínuo e acumulativo, podendo ser definido como a perda de funcionalidade de um componente estrutural causada pela aplicação de esforços cíclicos que evolui até um valor crítico,  $D_c$ , caracterizado pelo aparecimento de trincas e fissuras no material (Ferreira 1997).

A previsão de dano por fadiga para componentes estruturais sujeitos a condições de carregamentos variáveis é uma questão complexa. Das teorias de acúmulo de dano propostas, a que tem sido mais utilizada é a regra linear de Palmgren-Miner.

O modelo de avaliação de dano linear usado universalmente foi proposto pela primeira vez por Palmgren em 1924 para aplicação na indústria sueca de rolamentos de esferas. Em 1937, Langer propôs independentemente uma regra linear semelhante para vasos de pressão e componentes de tubulação feitos de aço. Miner em 1945 baseou-se no trabalho de Langer e aplicou a regra de dano linear aos dados de fadiga axial para material de revestimento de aeronave. Miner demonstrou excelente concordância entre as previsões da regra de dano linear e seus resultados experimentais e, com isso, levou a uma forte associação entre Miner e a regra de dano linear que é comumente referida como regra de dano linear de Palmgren-Miner (Lee 2005b).

Na formulação da regra de Palmgren-Miner considera-se que o dano,  $d$ , de um elemento estrutural provocado por uma tensão é proporcional ao número de ciclos aplicados,  $n$ , e inversamente proporcional ao número total de ciclos até a fratura que

a tensão provocaria caso atuasse todo o tempo,  $N_f$ . Assim, o dano independe da sequência de aplicação dos diversos níveis de tensões e pode ser expresso como

$$d = \frac{n}{N_f}. \quad (2.6)$$

Considerando a existência de  $k$  níveis de tensões, cada uma sendo aplicada  $n_i$  vezes, a regra de Palmgren-Miner é escrita como

$$D = \sum_{i=1}^k d_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{f,i}} \leq D_c, \quad (2.7)$$

onde  $D_c$  representa o dano crítico que é determinado experimentalmente. A falha por fadiga é prevista quando o dano acumulado atinge o dano crítico, que normalmente é considerado igual a 1, no entanto sob certas condições de carregamento o valor médio do dano crítico pode variar de 0,15 a 1,06 (Lee 2005b). No estudo realizado por Lee et al. (1999) para carregamento de espectro aleatório o valor médio do dano foi de 1,06 com desvio padrão igual 0,47 apresentando distribuição normal.

Na análise de fadiga procura-se primeiramente descrever a história de carregamento de maneira simples, compacta e sem perda de informações significativas, que é realizado através de métodos de contagem de ciclos e, em seguida, estimar o nível de dano sofrido pela estrutura devido a aplicação de sucessivos ciclos de carga, a partir da quantificação do dano acumulado durante um determinado período de vida da estrutura (Ferreira 1997).

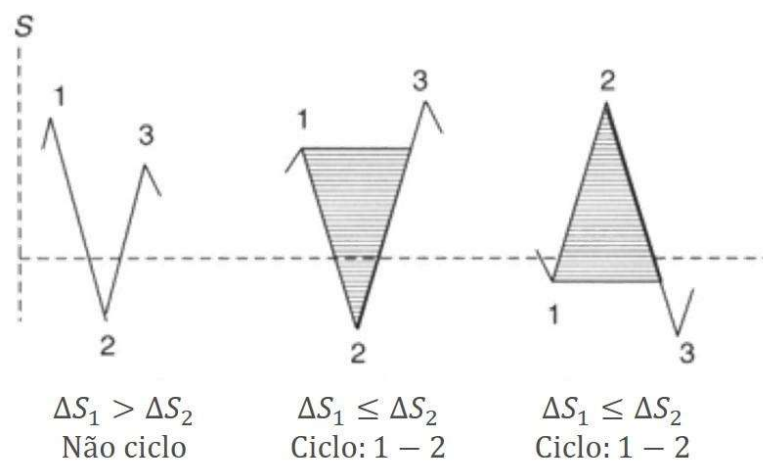
## 2.3 Técnica de Contagem de Ciclos Rainflow

A contagem de ciclos é usada para resumir históricos de carga irregular versus tempo, fornecendo o número de vezes que ocorrem ciclos de vários tamanhos. A norma ASTM E1049 propõe vários procedimentos aceitáveis para métodos de contagem cíclica empregados na análise de fadiga, entre eles o método rainflow (ASTM E1049-85 2017).

A regra de contagem de ciclo do método rainflow consiste em usar três pontos consecutivos em um histórico de tempo de carregamento para determinar se um ciclo

é formado. O método de contagem cíclica requer que o histórico de tensão no tempo seja reorganizado de modo que contenha apenas os picos e vales.

A Figura 2.3 mostra as regras que identificam os dois ciclos fechados possíveis em um histórico de tempo onde a tensão é o parâmetro de carga. Os três pontos de tensão consecutivos ( $S_1, S_2, S_3$ ) definem os dois intervalos consecutivos como  $\Delta S_1 = |S_1 - S_2|$  e  $\Delta S_2 = |S_2 - S_3|$ . Se  $\Delta S_1 \leq \Delta S_2$ , um ciclo de  $S_1$  a  $S_2$  é extraído, e se  $\Delta S_1 > \Delta S_2$ , nenhum ciclo é contado.



**Figura 2.3** Regra rainflow de contagem de ciclos (Lee e Taylor 2005a, Adaptado).

A regra de identificação de ciclo é aplicada para verificar a cada três pontos consecutivos desde o início até que um loop fechado seja definido. Os dois pontos que formam o ciclo são descartados e os pontos restantes são conectados entre si. Este procedimento é repetido desde o início até que os dados restantes sejam esgotados (Lee e Taylor 2005a).

Portanto, a abordagem tradicional para a análise de fadiga, também referida como abordagem no domínio do tempo, usa a técnica rainflow para contagem de ciclo que decompõe o sinal de tensão de amplitude variável no tempo em ciclos de fadiga. O dano de cada ciclo é então calculado empregando uma curva S-N, que caracteriza a resistência do material para carregamentos de amplitude constante, e o dano ao longo de todo o sinal no tempo é obtido somando o dano de todos os ciclos individuais, usando, por exemplo, a regra de dano linear de Palmgren-Miner. Essa regra consiste na soma dos danos dos ciclos independente de sua ordem no carregamento e

também postula que a falha por fadiga ocorre quando o dano total ultrapassa um nível crítico (Dirlik e Benasciutti 2021).

Como o método rainflow é amplamente utilizado para avaliação da vida à fadiga de componentes sob carregamento de amplitude variável, softwares como Matlab e Python já possuem rotinas prontas para executar a contagem de ciclos baseadas na norma ASTM E1049. A partir da entrada da história de tensão no tempo o algoritmo fornece como resultado os ciclos e/ou meio ciclos formados, identificando os pontos de início e fim que o localizam, bem como, a amplitude de tensão e o valor da tensão média.



## 3 ABORDAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

### 3.1 Propriedades Espectrais

A análise de fadiga é frequentemente realizada no domínio do tempo, em que todo carregamento de entrada e saída, resposta de tensão ou deformação, são sinais baseados no tempo. Em algumas situações, no entanto, a resposta de tensão e o carregamento de entrada são preferencialmente expressos como sinais baseados em frequência, geralmente na forma de um gráfico de densidade espectral de potência (Power Spectral Density - PSD). Nesse caso, uma função do sistema é necessária para relacionar uma PSD de entrada de carregamento a PSD de saída de resposta (Lee 2005a).

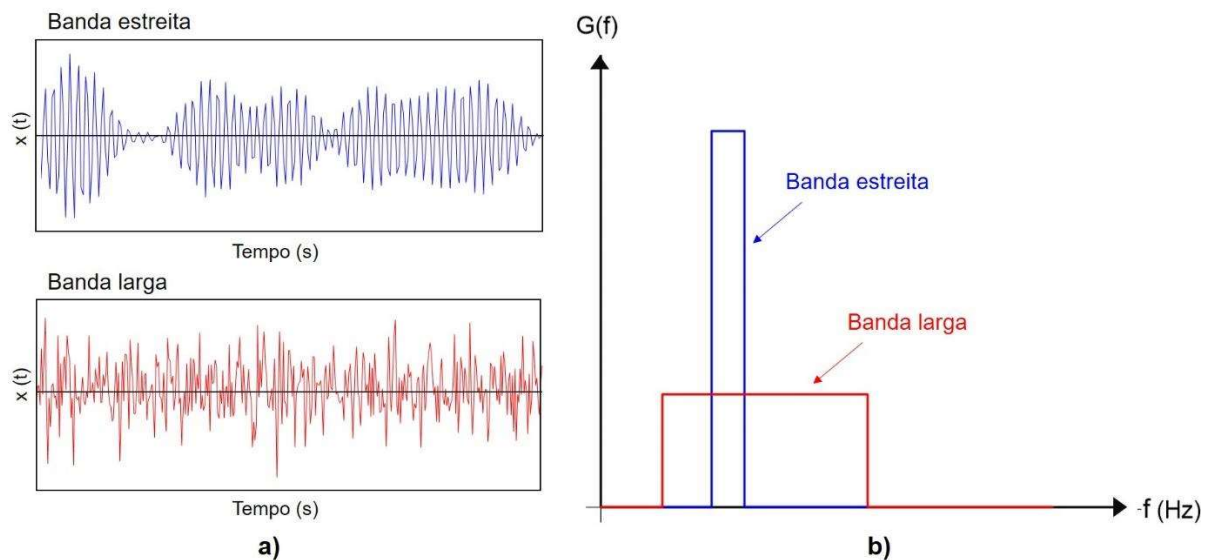
Para sistemas lineares, os cálculos de fadiga realizados inteiramente no domínio da frequência podem encurtar o tempo de cálculo consideravelmente, que corresponde à chamada abordagem no domínio da frequência (Dirlik e Benasciutti 2021).

A PSD representa a energia do sinal de tempo em diferentes frequências e é outra maneira de denotar o sinal de carregamento no domínio do tempo. A Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform - FFT) de um sinal no tempo pode ser usada para obter a PSD do carregamento, enquanto a Transformada de Fourier Inversa (Inverse Fourier Transform - IFT) pode ser usada para transformar o sinal baseado em frequência para o carregamento baseado em tempo. A transformação do histórico de carregamento entre o domínio do tempo e o domínio da frequência está sujeita a certos requisitos, segundo os quais o sinal deve ser estacionário, aleatório e gaussiano, ou seja, não variar suas propriedades estatísticas com o tempo e apresentar distribuição normal (Lee 2005a). Um processo ergódico é um processo estacionário cujas estatísticas de valor esperado (de envelope) são idênticas às estatísticas temporais (Dirlik 1985).

Na prática frequentemente utiliza-se uma densidade espectral unilateral,  $G(f)$ , limitada apenas na faixa de frequência positiva da densidade espectral bilateral,  $S(f)$ , pois as frequências negativas não têm significado físico (Bishop 1988). Um sinal aleatório pode ser classificado com base em seu conteúdo de frequência, ou seja, na

forma da sua PSD. O sinal é chamado de banda estreita se a PSD tem um pico em torno de uma única frequência, geralmente a frequência ressonante de um sistema vibratório. Em todos os outros casos em que a PSD cobre uma faixa mais ampla de frequências, o sinal aleatório é denominado banda larga (Dirlik e Benasciutti 2021).

A Figura 3.1 compara duas amostras de histórico de tempo pertencentes a dois tipos de processos aleatórios, mostrando as diferenças entre os históricos de tempo com base em suas PSD correspondentes. Foram considerados espectros de potência com blocos retangulares que são apenas idealizações dos espectros mais suaves normalmente encontrados em aplicações práticas.



**Figura 3.1** a) Amostras de histórico de tempo b) PSD de banda estreita e banda larga dos sinais.

O processo de banda estreita ou banda larga é definido por meio de vários parâmetros espectrais, dentre eles define-se os momentos espectrais de ordem  $n$ ,  $\lambda_n$ , como

$$\lambda_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^n S(f) df = \int_0^{+\infty} f^n G(f) df, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

O momento zero,  $\lambda_0$ , pode ser usado como um método alternativo de cálculo do valor da raiz quadrada média (Root Mean Square - RMS), que é uma boa indicação da intensidade de uma história de carregamento

$$RMS = \sigma_s = \sqrt{\lambda_0}, \quad (3.2)$$

e também representa uma característica importante no domínio do tempo, que é a variância da história de carregamento uniaxial  $x(t)$

$$\lambda_0 = \int_0^{+\infty} G(f)df = Var(x(t)). \quad (3.3)$$

A partir dos momentos espectrais podem ser calculados algumas características espectrais, como a taxa esperada de cruzamentos ascendentes  $\nu_0$  por unidade de tempo

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}, \quad (3.4)$$

e a taxa esperada de ocorrência de picos  $\nu_p$  por unidade de tempo

$$\nu_p = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}}. \quad (3.5)$$

O fator de irregularidade irá essencialmente medir quantos picos um sinal tem para cada vez que o sinal cruza no nível de tensão zero (Lee 2005a). A proporção entre a taxa de cruzamento zero e a taxa de cruzamento de pico é conhecida como o fator de irregularidade  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\nu_0}{\nu_p} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_4}}. \quad (3.6)$$

Quando o fator de irregularidade tende a um, significa que para cada pico, haverá aproximadamente uma passagem de nível zero e o processo terá uma largura de banda estreita, ou seja,  $\nu_0$  é igual a  $\nu_p$ . Porém, quando a largura de banda é ampla, diz-se que o fator de irregularidade tenderá a zero, dessa forma haverá picos infinitos para cada passagem de nível zero, caracterizado por um processo mais irregular (Lee 2005a).

O fator de irregularidade, que varia entre 0 e 1, pode ser utilizado para caracterizar a forma e a distribuição geométrica da frequência de um dado espectro

em função dos momentos espectrais (Benasciutti e Tovo 2005). De forma geral pode ser calculado como

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_{2n}}}. \quad (3.7)$$

O processo é considerado de banda estreita se sua densidade espectral tiver apenas uma faixa estreita de frequências. Em contraste, um processo de banda larga é aquele cuja densidade espectral cobre uma ampla banda de frequências, essa largura de banda é chamada de parâmetro de largura (Lee 2005a). O parâmetro de largura espectral,  $\gamma$ , é introduzido como

$$\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2}. \quad (3.8)$$

Assim, os processos de banda estreita devem ter um fator de irregularidade igual a 1 e um parâmetro de largura igual a 0, enquanto os processos de banda larga devem ter um fator de irregularidade tendendo a 0 e um parâmetro de largura espectral tendendo a 1 (Lee 2005a).

### 3.2 Dano por Fadiga Baseado nos Espectros de Potência

Para modelos característicos de processos gaussianos e estacionários o conceito de intensidade de dano,  $D$ , é empregado para estimar o dano por fadiga por unidade de tempo a partir da distribuição de amplitude dos ciclos contados,  $f_{S_a}(S_a)$ , sob a regra de Palmgren-Miner (Benasciutti e Tovo 2005). O dano esperado por unidade de tempo é dado por

$$D = \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{K} E(S_a^m), \quad (3.9)$$

onde  $\sum_{i=1}^k n_i = \nu_0 T$ , em que  $T$  é o período de tempo total e  $N_f S_a^m = K$ .

O valor esperado de  $S_a^m$  é

$$E(S_a^m) = \int_0^{\infty} S_a^m f_{S_a}(S_a) dS_a. \quad (3.10)$$

Se a história de carregamento no tempo for gaussiana de banda estreita estacionária e as amplitudes de tensão seguem a distribuição de Rayleigh, o valor esperado de  $S_a^m$  pode ser calculado como

$$E(S_a^m) = (\sqrt{2} \sigma_s)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right), \quad (3.11)$$

onde  $\sigma_s = \sqrt{\lambda_0}$ .

Portanto, o dano total esperado por fadiga,  $D_{NB}$ , de um processo de tensão gaussiano de banda estreita estacionário com média zero ao longo de um intervalo de tempo pode ser escrito como

$$D_{NB} = \frac{\sum_{i:1}^k n_i}{K} E(S_a^m) = \frac{v_0 T}{K} (\sqrt{2 \lambda_0})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right), \quad (3.12)$$

onde  $N_{NB} = v_0 T$  é o número total de ciclos no tempo e  $\Gamma(\cdot)$  é a função gamma (Lee 2005a).

Para um processo aleatório de banda larga o dano pode ser obtido a partir do dano de banda estreita e do parâmetro de Tovo-Benasciutti como

$$D_{TB} = \eta_{TB} D_{NB}, \quad (3.13)$$

onde  $\eta_{TB} = w + (1 - w)\alpha_2^{m-1}$  considerado como fator de correção do dano de banda estreita. O fator de ponderação  $w$  está condicionado ao espectro de potência por meio dos parâmetros do fator de irregularidade da seguinte forma

$$w = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)[1,112 (1 + \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2))e^{2,11\alpha_2} + (\alpha_1 - \alpha_2)]}{(\alpha_2 - 1)^2}, \quad (3.14)$$

assim a estimativa do dano está ligada a quatro momentos espectrais através dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  evidenciando clara dependência das propriedades espectrais (Benasciutti e Tovo 2005).

### 3.3 Estimativa de Vida pelo Método de Dirlik

Consiste em um procedimento de estimativa de vida para um componente estrutural submetido a um processo de tensão aleatório ergódico estacionário que, em geral, pode ser de banda larga. A partir da densidade espectral de potência das

cargas operacionais e utilizando a contagem rainflow foi desenvolvida uma expressão para prever a vida em fadiga.

Para derivar a distribuição dos ciclos rainflow a partir da função de densidade espectral empregou-se uma abordagem de Monte Carlo para gerar uma amostra do histórico de tensões no tempo a partir do espectro de potência usando métodos com a transformada de Fourier. O algoritmo rainflow pode ser usado no sinal no tempo para extrair os ciclos e, em seguida, a função de densidade de probabilidade dos intervalos contados do rainflow pode ser determinada, que por sua vez pode ser usada para calcular o dano por fadiga para quaisquer constantes de material dadas em uma curva S-N (Dirlik 1985).

O dano total esperado por fadiga,  $D_{DK}$ , de um processo de tensão gaussiano estacionário de banda larga ao longo de um intervalo de tempo pode ser escrito como

$$D_{DK} = \nu_p T \int_0^{\infty} \frac{1}{N_f} P_{rr}(S_r) dS_r = \frac{\nu_p T}{K} \int_0^{\infty} S_a^m P_{rr}(S_r) dS_r, \quad (3.15)$$

onde  $P_{rr}(S_r)$  é a função de densidade de probabilidade dos intervalos rainflow que consiste na soma de três distribuições: uma função exponencial, uma função de Rayleigh com parâmetro variável e uma função de Rayleigh padrão (Dirlik 1985). A expressão completa em termos de  $Z$  pode ser expressa como

$$P_{rr}(S_r) = \frac{D_1}{2\sigma_s Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{2\sigma_s R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + \frac{D_3 Z}{2\sigma_s} e^{-\frac{Z^2}{2}}, \quad (3.16)$$

onde  $Z$  é uma variável normalizada e os parâmetros da função ( $D_1, D_2, D_3, R, Q$ ) são determinados usando apenas o fator de irregularidade e a frequência média  $X_m$

$$Z = \frac{S_r}{2\sigma_s} = \frac{S_a}{\sigma_s}; \quad X_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_4}}; \quad D_1 = \frac{2(X_m - \alpha^2)}{1 + \alpha^2}; \quad R = \frac{\alpha - X_m - D_1^2}{1 - \alpha - D_1 + D_1^2}; \quad (3.17)$$

$$D_2 = \frac{1 - \alpha - D_1 + D_1^2}{1 - R}; \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2; \quad Q = \frac{1,25(\alpha - D_3 - D_2 R)}{D_1}.$$

Dessa forma, a ligação proposta entre a estimativa da vida em fadiga, com base nos intervalos contados do rainflow e a densidade espectral de potência, pode ser expressa por uma equação de forma fechada definida a partir dos momentos da

densidade espectral de potência em função dos termos RMS, número esperado de picos e cruzamentos de zero, fator de irregularidade e frequência média (Dirlik 1985).

A equação obtida por Dirlik para o cálculo do dano em fadiga se resume a

$$D_{DK} = \frac{v_p T}{K} \sigma_s^m \left[ D_1 Q^m \Gamma(m+1) + (\sqrt{2})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) (D_2 |R|^m + D_3) \right], \quad (3.18)$$

estando a dedução completa apresentada no Apêndice.

## 4 FADIGA MULTIAXIAL

Em muitas aplicações, os conjuntos mecânicos são carregados por sistemas complexos de forças cíclicas, resultando em estados de tensão multiaxial. Estimar a resistência à fadiga de materiais de engenharia submetidos a carregamento cíclico multiaxial é uma tarefa complexa, de modo que engenheiros que lidam com problemas de interesse prático precisam de metodologias precisas e confiáveis para realizar corretamente a avaliação de fadiga na presença de tais carregamento específicos (Susmel 2009).

Um estado multiaxial de tensão é resultado de carregamentos aplicados em um componente mecânico, que causam tensões em diferentes direções, como um carregamento de torção e flexão combinados que resultam em tensões normais e cisalhantes (Malcher 2006).

Os carregamentos de amplitude constante podem ser avaliados a partir da proporcionalidade e do ângulo de fase, dessa forma um carregamento proporcional é definido como qualquer estado de tensão variável no tempo em que a orientação dos eixos principais de tensão permanece fixa em relação aos eixos do componente, já um carregamento não proporcional a orientação dos eixos principais de tensão muda em relação ao eixo do componente. Fora de fase e em fase são usados para descrever casos especiais de carregamento envolvendo históricos periódicos como formas de onda senoidais ou triangulares. O carregamento de torção e flexão fora de fase sempre será não proporcional, enquanto o carregamento em fase é sempre proporcional (Socie e Marquis 1999).

Um carregamento senoidal, multiaxial no tempo pode ser representado como

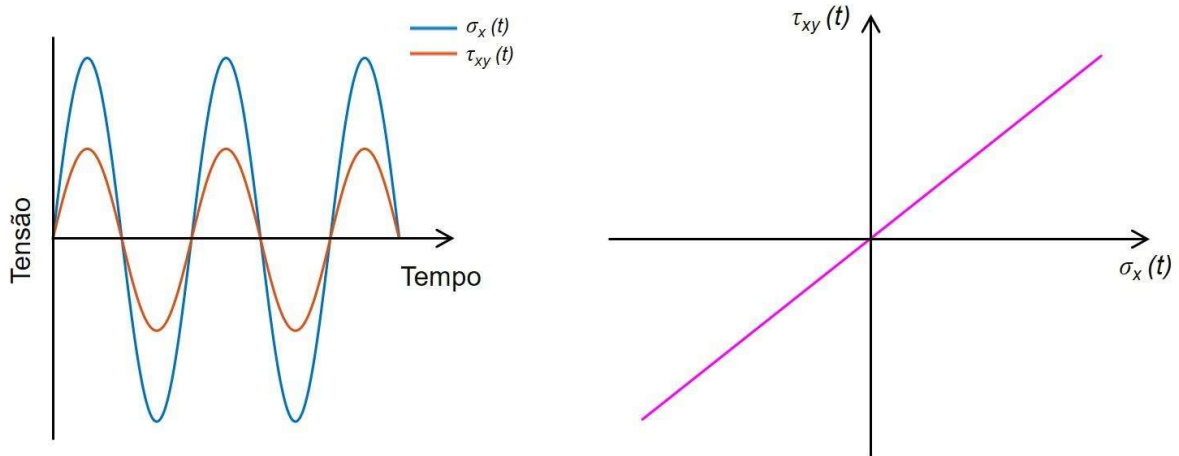
$$\sigma_x(t) = \sigma_{x,a} \text{sen}(2\pi ft), \quad (4.1 \text{ a})$$

$$\tau_{xy}(t) = a \sigma_{x,a} \text{sen}(2\pi ft - \theta). \quad (4.1 \text{ b})$$

onde  $\sigma_x(t)$  denota a tensão normal,  $\tau_{xy}(t)$  a tensão cisalhante,  $\theta$  o ângulo de fase,  $f$  a frequência,  $\sigma_{x,a}$  o valor da amplitude de tensão e  $a$  uma constante.

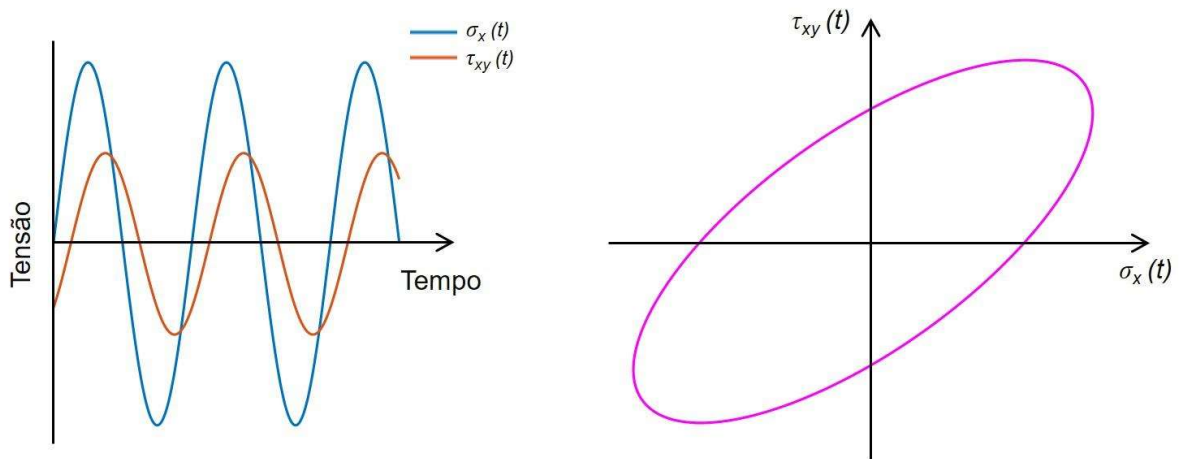
A Figura 4.1 ilustra uma situação de carregamento multiaxial em fase e o diagrama de fase, obtido através do gráfico de tensão normal e de tensão cisalhante.





**Figura 4.1** Carregamento multiaxial em fase.

A Figura 4.2 mostra uma situação de carregamento fora de fase com ângulo igual a  $45^\circ$ .



**Figura 4.2** Carregamento multiaxial fora de fase.

O diagrama de fase em um carregamento proporcional é caracterizado por uma trajetória retilínea, onde à medida que se aumenta ou diminui uma das tensões, a outra é alterada na mesma proporção. Para um carregamento não proporcional, cíclico senoidal e com amplitude constante, o diagrama é caracterizado por uma elipsóide, na medida em que a tensão em uma direção cresce, na outra direção ela pode estar crescendo ou diminuindo em proporções diferentes. Em um carregamento

multiaxial com amplitudes iguais e ângulo de fase de  $90^\circ$  o diagrama de fase é representado por um caminho circular (Malcher 2006).

No caso de carregamento não proporcional com amplitude variável o diagrama de fase é uma curva fechada com forma complexa, em que o coeficiente de correlação representa o grau de proporcionalidade, para carregamentos aleatórios multiaxiais.

No campo da fadiga de alto ciclo os componentes mecânicos reais são geralmente avaliados pela adoção de critérios baseados em tensão, incluindo critérios baseados no uso de invariantes de tensão que assumem que o dano por fadiga depende tanto da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviador quanto da tensão hidrostática (Susmel 2009).

Um novo critério multiaxial baseado nos invariantes de tensão denominado de “Projection-by-Projection (PbP)” foi proposto primeiro no domínio do tempo por Cristofori, Susmel e Tovo (2008) e depois no domínio da frequência por Cristofori, Benasciutti e Tovo (2011). O dano da história de tensão é calculado somando-se os valores de dano das projeções de tensão em um referencial principal de variância máxima. O método fornece uma expressão analítica de forma fechada para calcular o dano por fadiga de tensão multiaxial, que depende do método uniaxial usado para estimar o dano para cada projeção. Dessa forma, o método PbP pode ser interpretado como um “critério de equivalência” que transforma uma tensão multiaxial em tensões aleatórias uniaxiais no referencial principal (Benasciutti, Sherratt e Cristofori 2015).

#### **4.1 Projection-by-Projection (PbP)**

Esse método faz uso da amplitude do segundo invariante do tensor desviador  $\sqrt{J_{2a}}$  e da pressão hidrostática  $\sigma_H(t)$  para avaliar o dano devido a um carregamento de fadiga genérico. A vida em fadiga de um componente real é estimada considerando a história de carregamento descrita no espaço euclidiano de 5 dimensões, em que os danos relacionados a uma trajetória de carregamento genérica podem ser determinados a partir das contribuições calculadas pela projeção da própria trajetória do carregamento ao longo dos eixos de um referencial escolhido com base no espaço euclidiano (Cristofori, Susmel e Tovo 2008).

Do ponto de vista geométrico, a trajetória de carregamento pode ser totalmente representada em termos de suas projeções ao longo das direções de máxima variância definidas pelos eixos do referencial escolhido e adotado com base no espaço desviador de 5 dimensões. Dessa forma, a análise de uma trajetória de carregamento complexa pode ser realizada a partir de suas projeções, de tal modo que o dano relativo a cada projeção pode ser calculado primeiro e, então, o dano geral da história de carregamento pode ser obtido como uma função das diferentes contribuições dadas pelas projeções (Cristofori, Susmel e Tovo 2008).

O procedimento adotado pelo método PbP para estimar o tempo de vida à fadiga consiste na definição do referencial do sistema de projeção, na avaliação dos danos ao longo de cada projeção e, por fim, na avaliação do dano total.

Considerando que  $\sigma(t)$  represente o tensor das componentes de tensões variáveis no tempo

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde os símbolos  $\sigma$  e  $\tau$  denotam as tensões normais e cisalhantes, respectivamente. As seis componentes de tensão não redundantes do tensor  $\sigma(t)$  podem ser reordenados em um vetor tensão  $x(t) = (\sigma_{xx}(t), \sigma_{yy}(t), \sigma_{zz}(t), \tau_{xy}(t), \tau_{yz}(t), \tau_{zx}(t))$  que, no domínio da frequência, pode ser caracterizado pela matriz PSD

$$G(f) = \begin{bmatrix} G_{11}(f) & \cdots & G_{16}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{61}(f) & \cdots & G_{66}(f) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

em que os termos diagonais são componentes de tensão auto espectro e os termos fora da diagonal são espectros cruzados (Cristofori e Benasciutti 2014).

O conjunto de momentos espectrais de ordem zero da matriz PSD  $G(f)$  pode ser representado na matriz de covariância

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{61} & \cdots & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde os elementos diagonais são os termos de variância da tensão  $x_i(t)$ ,  $C_{ii} = Var(x_i(t))$ , e os elementos fora da diagonal são os termos de covariância entre as tensões  $x_i(t)$  e  $x_j(t)$ ,  $C_{ij} = Cov(x_i(t), x_j(t))$ . O coeficiente de correlação  $r_{ij}$ ,  $r_{ij} = C_{ij} / \sqrt{C_{ii} C_{jj}}$ , representa, para carregamentos aleatórios multiaxiais, o grau de proporcionalidade entre  $x_i(t)$  e  $x_j(t)$ . Quando  $r_{ij} = 1$ , os processos são perfeitamente correlacionados, ou seja, tensões proporcionais, quando  $r_{ij} = 0$ , são processos não correlacionados, ou seja, tensões não proporcionais (Cristofori, Benasciutti e Tovo 2011; Benasciutti, Zanellati e Cristofori 2019).

O dano de fadiga de uma tensão aleatória multiaxial é abordado pelo método PbP no espaço desviador. Dessa forma, o vetor das tensões no espaço desviador,  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t), s_5(t))$ , está relacionado ao tensor das tensões  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  pelas seguintes regras de transformação

$$s_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\sigma_{xx}(t) - \sigma_{yy}(t) - \sigma_{zz}(t)), \quad (4.5 \text{ a})$$

$$s_2(t) = \frac{1}{2}(\sigma_{yy}(t) - \sigma_{zz}(t)), \quad (4.5 \text{ b})$$

$$s_3(t) = \tau_{xy}(t), \quad (4.5 \text{ c})$$

$$s_4(t) = \tau_{zx}(t), \quad (4.5 \text{ d})$$

$$s_5(t) = \tau_{yz}(t). \quad (4.5 \text{ e})$$

O vetor aleatório  $\mathbf{s}(t)$  que descreve as componentes de tensão no espaço desviador pode ser caracterizado pela matriz de covariância  $\mathbf{C}'$  e no domínio da frequência pela matriz PSD 5x5  $\mathbf{G}'(f)$  (Cristofori e Benasciutti 2014). Os eixos das projeções são definidos na direção de máxima variância do espaço desviador, com isso a partir dos autovetores  $\mathbf{U}$  da matriz de covariância  $\mathbf{C}'$  as projeções das histórias de tensão no tempo são descritas como

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{U}^T \mathbf{s}(t), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{C}'_p = \mathbf{U}^T \mathbf{C}' \mathbf{U}, \quad (4.7)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega}(t) = (\Omega_{p,1}(t), \Omega_{p,2}(t), \Omega_{p,3}(t), \Omega_{p,4}(t), \Omega_{p,5}(t))$  representa as projeções na direção de máxima variância e  $\mathbf{C}'_p$  é uma matriz diagonal de variância do vetor  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ ,  $C'_{p,ii} = \text{Var}(\Omega_{p,i}(t))$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ . No domínio da frequência a matriz PSD diagonal  $\mathbf{G}'_p(f)$  determina os espectros de potência nas projeções

$$\mathbf{G}'_p(f) = \mathbf{U}^T \mathbf{G}'(f) \mathbf{U}. \quad (4.8)$$

Portanto, as projeções de tensões aleatórias  $\Omega_{p,i}(t)$  do vetor  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  são totalmente não correlacionadas, em que cada componente é uma tensão aleatória uniaxial e seu dano por fadiga pode ser estimado separadamente tanto no domínio do tempo quanto da frequência (Cristofori e Benasciutti 2014).

## 4.2 Método PbP para um Estado Plano de Tensão

No estado plano ou biaxial de tensões, o tensor das tensões passa a ter três componentes de tensões não redundantes

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

sendo  $\mathbf{x}(t) = (\sigma_{xx}(t), \sigma_{yy}(t), \tau_{xy}(t))$  o vetor das tensões, em que cada tensão é considerada uma tensão aleatória estacionária (Benasciutti, Zanellati e Cristofori 2019). No domínio da frequência, a matriz PSD passa a ser representada como

$$\mathbf{G}(f) = \begin{bmatrix} G_{xx}(f) & G_{xx,yy}(f) & G_{xx,xy}(f) \\ G_{yy,xx}(f) & G_{yy}(f) & G_{yy,xy}(f) \\ G_{xy,xx}(f) & G_{xy,yy}(f) & G_{xy}(f) \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

e a matriz de covariância

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xx,yy} & C_{xx,xy} \\ C_{yy,xx} & C_{yy} & C_{yy,xy} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

O vetor de tensão no espaço desviador passa a ter três dimensões,  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t))$ , que pode ser determinado como

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{A} * \mathbf{x}(t), \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

A matriz de covariância de  $\mathbf{s}(t)$  pode ser obtida a partir da matriz  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{A} * \mathbf{C} * \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} \\ & C'_{22} & C'_{23} \\ sim & & C'_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

assim como a matriz PSD de  $\mathbf{s}(t)$

$$\mathbf{G}'(f) = \mathbf{A} * \mathbf{G}(f) * \mathbf{A}^T. \quad (4.15)$$

Com isso, a partir dos autovetores  $\mathbf{U}$  da matriz de covariância  $\mathbf{C}'$  são obtidos os carregamentos nas projeções com a direção de máxima variância

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{U}^T \mathbf{s}(t), \quad (4.16)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega}(t) = (\Omega_{p,1}(t), \Omega_{p,2}(t), \Omega_{p,3}(t))$ .

A matriz de covariância do vetor  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  é determinada como

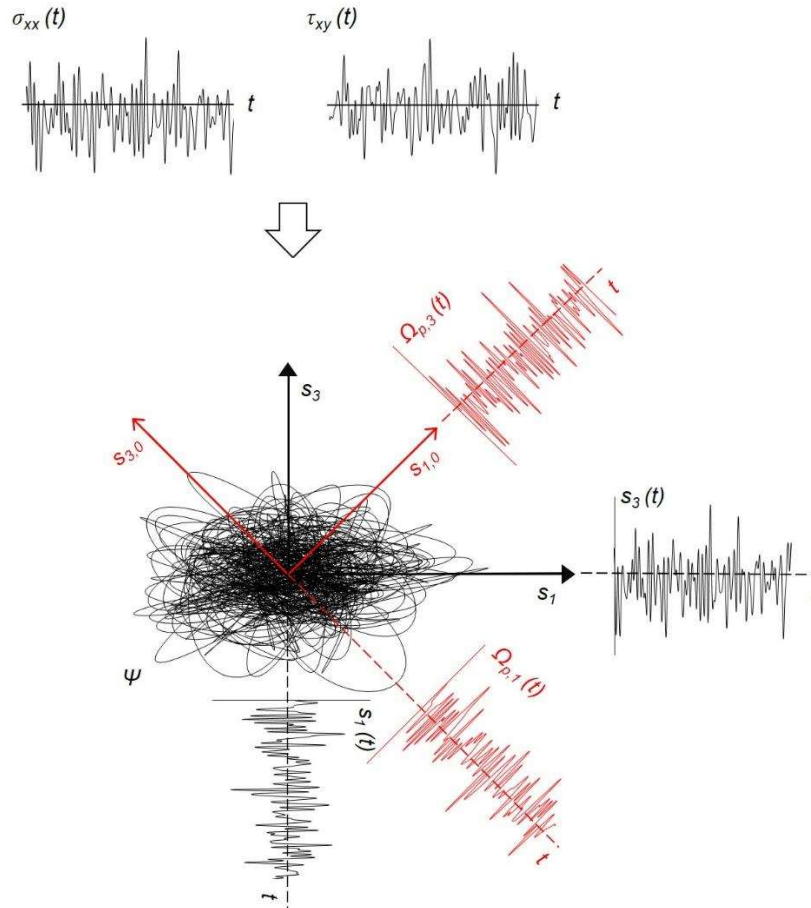
$$\mathbf{C}'_p = \mathbf{U}^T \mathbf{C}' \mathbf{U} = \begin{bmatrix} C'_{p,11} & 0 & 0 \\ 0 & C'_{p,22} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{p,33} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

e no domínio da frequência a matriz PSD é definida

$$\mathbf{G}'_p(f) = \mathbf{U}^T \mathbf{G}'(f) \mathbf{U} = \begin{bmatrix} G'_{p,11}(f) & 0 & 0 \\ 0 & G'_{p,22}(f) & 0 \\ 0 & 0 & G'_{p,33}(f) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

O princípio do método PbP pode ser ilustrado através da Figura 4.3, em que uma história de carregamento aleatória de flexo-torção  $(\sigma_{xx}(t), \tau_{xy}(t))$  é representada no espaço desviador com duas componentes não nulas  $(s_1(t), s_3(t))$  que geram um caminho de carregamento aleatório  $\Psi$ . Para definição do referencial do sistema de

projeção  $(s_{1,0}, s_{3,0})$  considera-se a direção de máxima variância do carregamento  $\Psi$ , obtendo assim as projeções das tensões  $(\Omega_{p,1}(t), \Omega_{p,3}(t))$ .



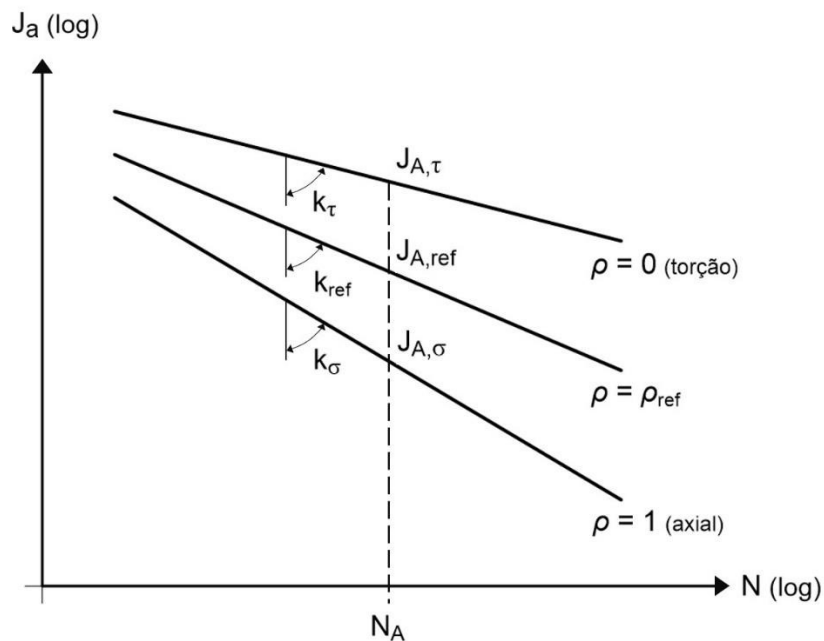
**Figura 4.3** Exemplo de caminho de carregamento aleatório  $\Psi$  no espaço desviador, gerado a partir de tensões de flexo-torção, para determinação das tensões no referencial do sistema de projeção.

O método da curva de Wöhler modificada proposto inicialmente por Susmel e Lazzarin (2002) com base na abordagem do plano crítico pode ser empregado para análise do dano em carregamento multiaxial. Susmel e Lazzarin (2002) adotaram a razão de tensão  $\rho$  no plano de iniciação de trinca como a razão entre a tensão normal máxima e a amplitude tensão cisalhante no plano de máxima amplitude de tensão cisalhante, para considerar de forma concisa o efeito da tensão média na resistência à fadiga multiaxial, bem como a presença de ângulos fora de fase não nulos.

O diagrama de Wöhler modificado utilizado para definir os parâmetros da curva S-N em situações de carregamento multiaxial considera duas curvas de fadiga que geralmente estão disponíveis para materiais: uma curva uniaxial totalmente reversa, caracterizada por  $\rho = 1$  (apenas tensão normal), e a curva de fadiga torcional totalmente reversa, caracterizada por  $\rho = 0$  (apenas tensão cisalhante) (Susmel e Lazzarin 2002).

Para o método PbP, a relação de tensões  $\rho_{ref}$  é definida de forma que leve em conta apenas o efeito devido à tensão hidrostática média, pois o grau de não proporcionalidade do histórico de carga aplicada é levado diretamente em consideração ao estimar o dano total (Cristofori, Susmel e Tovo 2008).

A Figura 4.4 mostra o diagrama de Wöhler modificado que relaciona o número de ciclos até a falha,  $N_A$ , à amplitude da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviador,  $\sqrt{J_{2a}} = J_a$  (para simplificar a notação) (Benasciutti, Zanellati e Cristofori 2019).



**Figura 4.4** Diagrama de Wöhler modificado para definição da curva S-N de referência para um carregamento multiaxial genérico.



O parâmetro  $\rho_{ref}$  depende apenas da tensão multiaxial, não do material, que quantifica a contribuição relativa de componentes de tensão hidrostática para desviadora. Com o parâmetro  $\rho_{ref}$  definido, a curva S-N de referência é completamente determinada pelos seguintes parâmetros

$$J_{A,ref} = J_{A,\tau} + \rho_{ref}[J_{A,\sigma} - J_{A,\tau}], \quad (4.19 \text{ a})$$

$$k_{ref} = k_{\tau} + \rho_{ref}[k_{\sigma} - k_{\tau}], \quad (4.19 \text{ b})$$

onde  $k_{\sigma}, k_{\tau}$  são as inclinações inversas e  $J_{A,\sigma}, J_{A,\tau}$  são, respectivamente, as amplitudes da resistência à fadiga nos ciclos  $N_A$  para carregamento axial e de torção, de modo que  $J_{A,\sigma} = \sigma_A/\sqrt{3}$  e  $J_{A,\tau} = \tau_A$  (Cristofori e Benasciutti 2014).

Em um diagrama log-log, a curva S-N de referência é expressa como  $J_a^{k_{ref}} N = C_{ref}$ , onde  $C_{ref} = N_A (J_{A,ref})^{k_{ref}}$  é uma constante de resistência;  $J_{A,ref}$  é a amplitude da resistência à fadiga nos ciclos  $N_A$  e  $k_{ref}$  é a inclinação inversa. Portanto, a curva S-N de referência no diagrama de Wöhler modificado é definida por interpolação linear dos parâmetros de fadiga para carregamento axial e de torção (Benasciutti, Zanellati e Cristofori 2019).

### 4.3 Estratégias de Previsão de Vida Usando o Método PbP

A previsão de vida pelo método PbP pode ser realizada tanto no domínio do tempo quanto da frequência, sendo que a principal diferença entre os dois domínios consiste na determinação da curva de referência S-N no diagrama de Wöhler modificado. Definido o parâmetro  $\rho_{ref}$ , conforme cada domínio, as constantes da curva S-N são definidas pela Equação (4.19) e, em seguida, realiza a estimativa do dano, que no tempo considera a técnica rainflow associada à regra de Palmgren-Miner e segue o desenvolvimento apresentado no Capítulo 2, já para o domínio da frequência analisa os espectros de potência conforme mostrado no Capítulo 3.

#### 4.3.1 No Domínio do Tempo

O método de contagem rainflow pode ser aplicado a cada projeção da história de carregamento, em que a amplitude dos ciclos definida em termos da tensão

desviadora  $J_{a_{ij}}$ , e os valores da pressão hidrostática máxima  $\sigma_{H_{ij}}$ , são registrados para cada ciclo contado (identificado pelo subscrito j) ao longo de cada projeção considerada (identificada pelo subscrito i = 1, 2, ..., 5) (Cristofori, Susmel e Tovo 2008).

A fim de estimar o dano por fadiga, a curva de referência no diagrama de Wöhler modificado pode ser localizada a partir da razão de tensões  $\rho_{ref}$  definida como

$$\rho_{ref} = \sqrt{3} \frac{\sigma_{H\ ref}}{\left(\sum_i (J_{a_{iref}})^2\right)^{1/2}}, \quad (4.20)$$

onde  $J_{a_{iref}}$  é o valor médio da amplitude para os ciclos contados em relação à projeção considerada e  $\sigma_{H\ ref}$  o valor médio das tensões hidrostáticas máximas dos ciclos, definidos pelas seguintes relações

$$\sigma_{H\ ref} = \underset{ij}{m\acute{e}dia} [\sigma_{H_{ij}}], \quad (4.21\ a)$$

$$J_{a_{iref}} = \underset{j}{m\acute{e}dia} [J_{a_{ij}}]. \quad (4.21\ b)$$

onde  $\sigma_H = \text{traço}(\boldsymbol{\sigma})/3$  é a tensão hidrostática.

O dano por fadiga,  $D_{ij}$ , devido a cada ciclo identificado pode ser então estimado

$$D_{ij} = \left[ \frac{J_{a_{ij}}}{J_{A,ref}} \right]^{k_{ref}} \frac{1}{N_A}, \quad (4.22)$$

e o dano total relativo à i-ésima projeção  $D_i$ , considerando a regra cumulativa linear proposta por Palmgren-Miner resulta na estimativa do dano  $D(\Omega_{p,i})$  relacionado ao carregamento projetado  $\Omega_{p,i}$

$$D(\Omega_{p,i}) = \sum_j D_{ij}. \quad (4.23)$$

Uma regra de acúmulo quadrática aplicada aos carregamentos projetados é assumida para avaliar o dano total devido a história de carregamento multiaxial

$$D(\Omega) = \left[ \sum_i \left( D(\Omega_{p,i}) \right)^{\frac{2}{k_{ref}}} \right] = \left[ \sum_i \left( \sum_j D_{ij} \right)^{\frac{2}{k_{ref}}} \right]^{\frac{k_{ref}}{2}}, \quad (4.24)$$

de modo que o histórico de cargas multiaxiais complexas é desacoplado ao longo das direções de máxima variância e a partir disso definido os ciclos de fadiga (Cristofori, Susmel e Tovo 2008).

### 4.3.2 No Domínio da Frequência

Para tirar o máximo proveito de uma abordagem no domínio da frequência, a definição da razão de tensões  $\rho_{ref}$  deve ser adequadamente reformulada para um carregamento aleatório multiaxial estacionário, como

$$\rho_{ref} = \sqrt{3} \frac{\frac{\sigma_{H,m}}{\sqrt{2}} + \sqrt{Var(\sigma_H(t))}}{\sqrt{\sum_i Var(\Omega_{p,i}(t))}} = \sqrt{3} \frac{\sigma_{H,m} + \sqrt{2\lambda_{0,H}}}{\sqrt{2 \sum_i \lambda_{0,i}}}, \quad (4.25)$$

onde  $\sigma_H(t)$  é a tensão hidrostática, um processo aleatório estacionário uniaxial, com média constante  $\sigma_{H,m}$  e variância  $Var(\sigma_H(t)) = \lambda_{0,H}$  (que coincide com o momento de ordem zero  $\lambda_{0,H}$  da densidade espectral de potência  $G_H(f)$  de  $\sigma_H(t)$ ). Da mesma forma, toda projeção  $\Omega_{p,i}(t)$  é um processo aleatório estacionário, com variância  $Var(\Omega_{p,i}(t)) = \lambda_{0,i}$  (onde  $\lambda_{0,i}$  é o momento de ordem zero da densidade espectral de potência  $G'_{p,i}(f)$  do carregamento projetado, que é um elemento da matriz  $G'_p(f)$ ) (Cristofori, Benasciutti e Tovo 2011).

Caso o carregamento multiaxial tenha componentes de tensão com valor médio zero, então  $\sigma_{H,m} = 0$ . No caso de carregamento senoidal de amplitude constante, a Equação (4.20) se reduz à expressão da Equação (4.25) (Cristofori, Benasciutti e Tovo 2011).

No domínio de frequência uma estimativa do dano esperado em um intervalo de tempo pode ser fornecida pelos métodos espectrais. Se a projeção aleatória  $\Omega_{p,i}(t)$  for um processo de banda estreita o dano é definido como

$$D_{NB}(\Omega_{p,i}) = \frac{v_{0,i} T}{C_{ref}} (\sqrt{2\lambda_{0,i}})^{k_{ref}} \Gamma\left(1 + \frac{k_{ref}}{2}\right), \quad (4.26)$$

e o dano total da história de carregamento multiaxial é definido a partir da regra de acúmulo quadrática

$$D_{NB}^{PbP}(\Omega) = \frac{T}{C_{ref}} \Gamma\left(1 + \frac{k_{ref}}{2}\right) \left[ \sum_i \left( 2\lambda_{0,i} (v_{0,i})^{\frac{2}{k_{ref}}} \right) \right]^{\frac{k_{ref}}{2}}. \quad (4.27)$$

Se a projeção aleatória  $\Omega_{p,i}(t)$  for um processo de banda larga o dano pode se estimado por outros métodos espectrais, como o método de Tovo-Benasciutti

$$D_{TB}(\Omega_{p,i}) = \eta_{TB,i} \frac{v_{0,i} T}{C_{ref}} (\sqrt{2\lambda_{0,i}})^{k_{ref}} \Gamma\left(1 + \frac{k_{ref}}{2}\right), \quad (4.28)$$

de modo que o dano total é obtido a partir da consideração de todas as projeções

$$D_{TB}^{PbP}(\Omega) = \frac{T}{C_{ref}} \Gamma\left(1 + \frac{k_{ref}}{2}\right) \left[ \sum_i \left( 2\lambda_{0,i} (\eta_{TB,i} v_{0,i})^{\frac{2}{k_{ref}}} \right) \right]^{\frac{k_{ref}}{2}}. \quad (4.29)$$

No mais, a teoria do método PbP pode ser facilmente estendida a outros métodos espectrais, como a expressão de Dirlik (Cristofori e Benasciutti 2014). Para esse método o dano pode ser obtido como

$$D_{DK}(\Omega_{p,i}) = \frac{v_{p,i} T}{C_{ref}} \sigma_{S,i}^{k_{ref}} \left[ D_{1,i} Q_i^{k_{ref}} \Gamma(k_{ref} + 1) + (\sqrt{2})^{k_{ref}} \Gamma\left(\frac{k_{ref}}{2} + 1\right) (D_{2,i} |R_i|^{k_{ref}} + D_{3,i}) \right], \quad (4.30)$$

em que o dano total da história de carregamento consiste em

$$D_{DK}^{PbP}(\Omega) = \frac{T}{C_{ref}} \left\{ \sum_i \left( v_{p,i}^{\frac{2}{k_{ref}}} \sigma_{S,i}^2 \left[ D_{1,i} Q_i^{k_{ref}} \Gamma(k_{ref} + 1) + (\sqrt{2})^{k_{ref}} \Gamma\left(\frac{k_{ref}}{2} + 1\right) (D_{2,i} |R_i|^{k_{ref}} + D_{3,i}) \right]^{\frac{2}{k_{ref}}} \right) \right\}^{\frac{k_{ref}}{2}}. \quad (4.31)$$

## 5 METODOLOGIA

Com o objetivo de analisar a fadiga de componentes mecânicos sujeitos a carregamentos multiaxiais empregou-se o método PbP para o cálculo do dano e da vida à fadiga, tanto no domínio da frequência quanto do tempo.

A primeira etapa do estudo foi a validação das rotinas desenvolvidas para o método PbP a partir das simulações numéricas apresentadas no artigo de Benasciutti et al. (2019), em que foram considerados quatro estados de tensões, sendo de tração biaxial e flexo-torção com correlação e sem correlação. Para esses casos foram utilizados três modelos de materiais hipotéticos com diferentes propriedades de fadiga.

As simulações foram realizadas a partir de sinais Gaussianos e estacionários com média zero, apresentando frequência centrada em 30 Hz e a razão da frequência máxima e mínima igual a 15, caracterizando um sinal de banda larga. As propriedades à fadiga dos modelos de materiais hipotéticos que foram utilizados nas simulações numéricas são apresentadas na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1** Propriedades à fadiga dos materiais utilizados nas simulações numéricas (Benasciutti et al. 2019).

Tipo do material	$N_A$	$\sigma_A$ (MPa)	$\tau_A$ (MPa)	$k_\sigma$	$k_\tau$
A	$2 \times 10^6$	100	57,7	3	3
B	$2 \times 10^6$	100	70	3	3
C	$2 \times 10^6$	100	70	3	5

As condições dos estados de tensões, assim como a correlação entre os carregamentos estão resumidas na Tabela 5.2. No domínio da frequência foram utilizados espectros idealizados conforme proposto por Benasciutti et al. (2019).

**Tabela 5.2** Caracterização dos estados de tensões considerados nas simulações numéricas (Benasciutti et al. 2019).

Caso	Razão da variância		Coeficiente de correlação		
	$V_{yy}/V_{xx}$	$V_{xy}/V_{xx}$	$r_{xx,yy}$	$r_{xx,xy}$	$r_{yy,xy}$
1	1	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0,33	0	1	0
4	0	0,33	0	0	0

O dano no domínio do tempo foi obtido por meio da técnica de rainflow e no domínio da frequência pela fórmula de banda estreita ou pelo método de Tovo-Benasciutti para espectros de banda larga.

As rotinas para o domínio da frequência primeiramente foram implementadas no software Mathcad, pois como Benasciutti et al. (2019) consideraram espectros idealizados não houve a necessidade de realizar a discretização dos espectros, dessa forma os cálculos pelo Mathcad ficaram mais simplificados. Após validar os resultados no Mathcad foram desenvolvidas as rotinas no software Matlab, devido a necessidade de realizar outras análises no trabalho considerando espectros discretizados, dessa forma as rotinas implementadas no Matlab poderiam ser aplicadas nas duas situações.

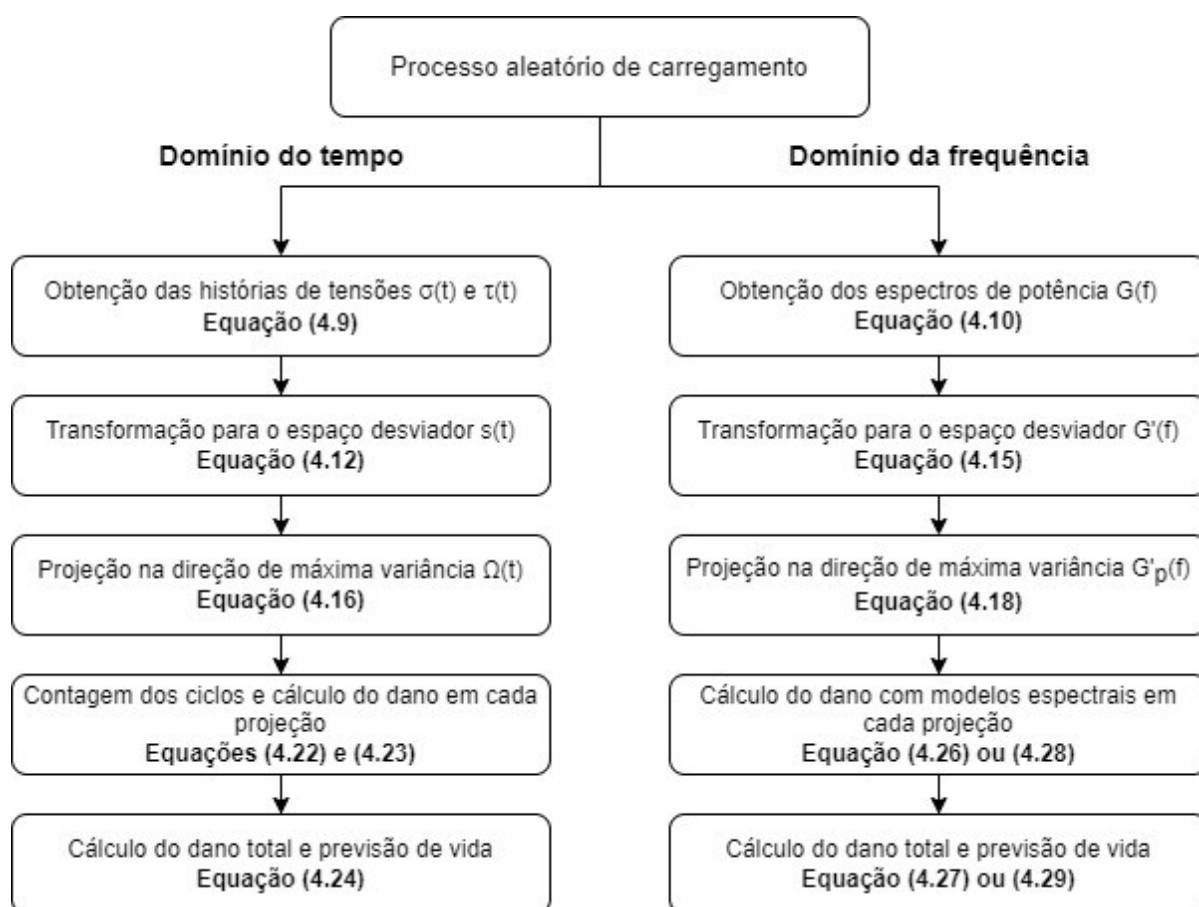
Foram desenvolvidas as rotinas para todo o processo do método PbP, incluindo assim a construção dos espectros, transformação para o espaço desviador, projeção na direção de máxima variância, cálculo do dano pelos métodos espectrais e previsão de vida à fadiga.

Em seguida foram construídas no Matlab as rotinas para o domínio do tempo, desde a construção dos sinais até a previsão de vida à fadiga. Nesse caso a técnica rainflow foi utilizada para contagem dos ciclos, no entanto empregou-se a função rainflow própria do Matlab, não sendo necessário construir a rotina dessa técnica. Pelo fato de Benasciutti et al. (2019) terem realizado as análises apenas no domínio da frequência, os resultados obtidos no domínio do tempo foram comparados com os

valores no domínio da frequência para verificar se as rotinas desenvolvidas estavam gerando resultados satisfatórios.

Dessa forma, com as simulações numéricas desenvolvidas por Benasciutti et al. (2019) foi possível validar as rotinas desenvolvidas tanto no domínio do tempo quanto da frequência através da comparação dos resultados obtidos, que foram apresentados por meio de gráficos entre a vida de referência e a vida estimada.

A Figura 5.1 apresenta o fluxograma das etapas realizadas em cada domínio para a implementação das rotinas computacionais do método PbP considerando um estado plano de tensões.



**Figura 5.1** Etapas do método PbP no domínio do tempo e da frequência.

Após a validação das rotinas para o método PbP foram analisados os ensaios no aço 18G2A realizados por Niesłony e Macha (2007) para vários estados de tensões em flexo-torção sob diferentes correlações. Nesse trabalho Niesłony e Macha (2007)

utilizaram o método dos planos críticos para previsão de vida à fadiga, tanto no domínio do tempo quanto da frequência, e os seus resultados foram comparados aos obtidos nesta pesquisa adotando o método PbP.

Os testes experimentais foram realizados a partir de sinais no tempo Gaussianos e estacionários de banda estreita, com média zero, frequência centrada em aproximadamente 20 Hz e largura de banda de 1 Hz. As propriedades à fadiga do aço 18G2A são apresentadas na Tabela 5.3 e as condições adotadas nos testes estão resumidas na Tabela 5.4.

**Tabela 5.3** Propriedades à fadiga do aço 18G2A (Cristofori et al. 2011).

$N_A$	$\sigma_A$ (MPa)	$\tau_A$ (MPa)	$k_\sigma$	$k_\tau$
2735000	271	175	7,19	7,19

**Tabela 5.4** Condições dos testes experimentais do aço 18G2A (Cristofori et al. 2011).

Caso	Quantidade de espécimes	Razão de variância, $V_\tau/V_\sigma$	Coefficiente de correlação, $r_{xx,xy}$
N01	11	0 (flexão pura)	-
N02	5	$\infty$ (torção pura)	-
N03	6	0,31	0,01
N04	5	0,94	0,01
N05	8	0,25	1,00
N06	5	1,00	1,00
N07	4	0,94	0,50
N08	5	0,29	0,50

De acordo com Cristofori et al. (2011) nos ensaios apresentados na literatura técnica para carregamentos de amplitude variável o valor de dano crítico sugerido geralmente é menor que 1, dessa forma, conforme proposto por Cristofori et al. (2011)



para esses testes utilizou-se um dano crítico igual a 0,30 determinado a partir da calibração dos dados experimentais.

As previsões de vida à fadiga para os testes experimentais realizados por Niesłony e Macha (2007) foram obtidas através das rotinas desenvolvidas no Matlab com o método PbP tanto no domínio do tempo quanto da frequência, considerando sinal banda estreita com tempo amostral de 600 s e frequência amostral de 738 Hz. Foram realizadas cinco previsões para cada teste em cada domínio para avaliar a repetibilidade dos resultados, em que o valor da mediana foi utilizado para representar a vida prevista nos gráficos e a variação dos resultados, calculada pelo desvio padrão, foi representada pela barra de erro.

Os resultados foram apresentados por meio dos gráficos de comparação entre os tempos de vida à fadiga experimental e previsto, de modo a estabelecer algumas discussões sobre o método utilizado a partir das previsões de vida.

Com a finalidade de analisar o método PbP na previsão de vida com carregamentos multiaxiais foram comparados os resultados desta pesquisa com os apresentados por Niesłony e Macha (2007), que utilizaram o método do plano crítico definido pelo critério de máxima variância com parâmetro de falha na tensão normal máxima e a hipótese de dano de Serensen-Kogayev. A partir dessa análise entre dois métodos que apresentam diferentes processos para previsão de vida à fadiga foram observados alguns comportamentos dos resultados no domínio do tempo e da frequência.

Para avaliar o custo computacional do algoritmo do método PbP, os tempos de processamento necessários para realizar a previsão de vida à fadiga foram medidos nos dois domínios, considerando um teste para o caso sem correlação N01 sujeito a flexão pura e para as correlações 0, 1 e 0,5 foram selecionados um espécime do caso N03, N06 e N08, respectivamente. As simulações foram realizadas em uma máquina com processador Intel Core i7 4770 (4 Núcleos e 8 Threads) rodando a 3,40 GHz e com 16 GB de RAM (Frequência DRAM: 798,1 MHz). Os tempos de processamento foram medidos usando as rotinas TIC e TOC do Matlab e foi definido como o valor médio dos tempos decorridos em 50 execuções. Foram avaliados para 5 tempos amostrais, sendo 300, 600, 1200, 2400 e 4800 segundos. Para todas as análises manteve-se a frequência amostral em 738 Hz e o tamanho do espectro em  $2^{17}$  pontos.

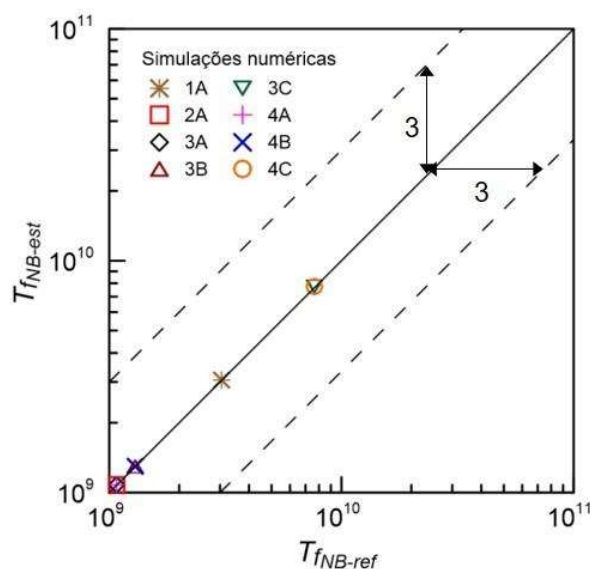
## 6 RESULTADOS

### 6.1 Validação do Método PbP

As validações das simulações numéricas de Benasciutti et al. (2019) foram realizadas no domínio da frequência a partir de sinais de banda larga e empregando o cálculo de dano pelo método de Tovo-Benasciutti por se tratar de espectros de banda larga. No entanto, o dano pelo método de Tovo-Benasciutti é obtido com base no dano de banda estreita multiplicado pelo fator de correção de Tovo-Benasciutti, dessa forma o dano considerando o método de banda estreita também foi validado.

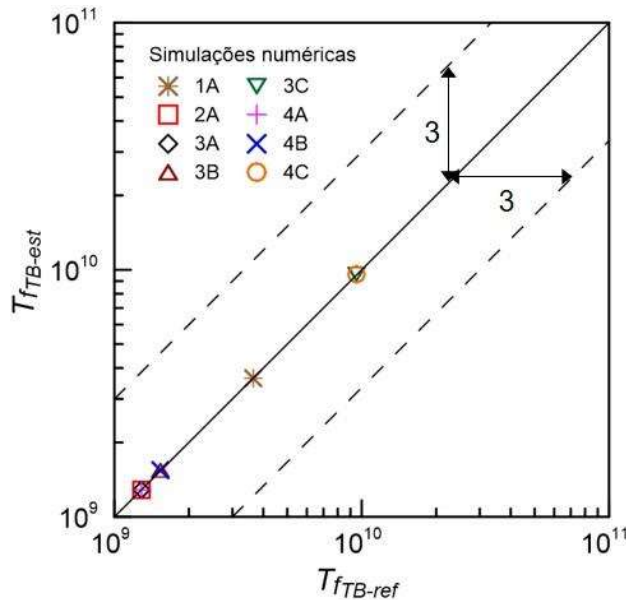
A Figura 6.1 compara, considerando o dano de banda estreita, os resultados de vida à fadiga de referência apresentados por Benasciutti et al. (2019) (eixo horizontal) e a vida estimada em fadiga (eixo vertical). A combinação perfeita ocorre na linha inclinada a 45°, em que os valores por ambos estudos são iguais e a reta é definida como  $y/x = 1$ . Já as linhas paralelas tracejadas delimitam a largura da banda de dispersão de 3 vidas previstas, em que as retas inferior e superior são definidas pelo intervalo  $1/3 < y/x < 3$ .

As legendas das simulações numéricas foram organizadas de forma que o número indica o caso do estado de tensão, Tabela 5.2, e a letra representa o tipo de material, Tabela 5.1.



**Figura 6.1** Método PbP no domínio da frequência com o dano de banda estreita – comparação entre a vida à fadiga estimada e a vida de referência.

A Figura 6.2 compara, pelo método de Tovo-Benasciutti, os resultados de vida à fadiga de referência obtidos por Benasciutti et al. (2019) (eixo horizontal) e a vida estimada em fadiga (eixo vertical).

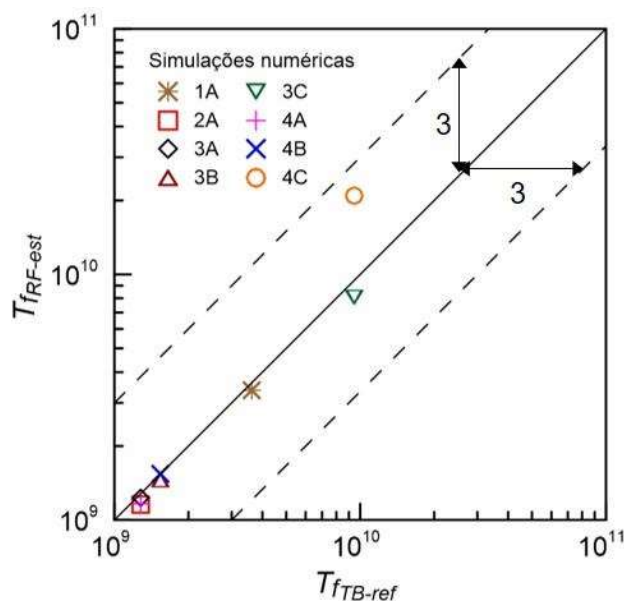


**Figura 6.2** Método PbP no domínio da frequência com o método de Tovo-Benasciutti – comparação entre a vida à fadiga estimada e a vida de referência.

Como verificado nas Figuras 6.1 e 6.2, as rotinas desenvolvidas alcançaram resultados semelhantes aos obtidos por Benasciutti et al. (2019) nos dois modelos implementados, validando as rotinas no domínio da frequência. Vale ressaltar que a elevada precisão dos resultados está relacionada ao fato de ter sido adotado espectros idealizados, evitando possíveis ruídos.

Em seguida, foram validadas as rotinas desenvolvidas no domínio do tempo que utilizaram a técnica rainflow associada à regra de Palmgren-Miner, no entanto os resultados foram comparados aos apresentados por Benasciutti et al. (2019) utilizando o método de Tovo-Benasciutti, pois os sinais são classificados como banda larga e como Benasciutti et al. não realizaram análises no domínio do tempo foi necessário comparar os resultados com um modelo no domínio da frequência.

A Figura 6.3 compara os resultados de vida à fadiga de referência com o método de Tovo-Benasciutti apresentados por Benasciutti et al. (2019) (eixo horizontal) e a vida estimada em fadiga no domínio do tempo (eixo vertical).



**Figura 6.3** Método PbP no domínio do tempo – comparação entre a vida à fadiga estimada e a vida de referência com o método de Tovo-Benasciutti.

De forma semelhante ao domínio da frequência, os resultados no domínio do tempo alcançaram uma elevada precisão, sendo possível validar as rotinas desenvolvidas. Apenas o caso 4C apresentou maior dispersão, porém ainda ficou dentro da banda de dispersão de 3. A validação seria mais adequada caso as metodologias empregadas fossem iguais, no entanto por não haver resultados dessas simulações numéricas no domínio do tempo o uso do método de Tovo-Benasciutti para comparação foi justificado.

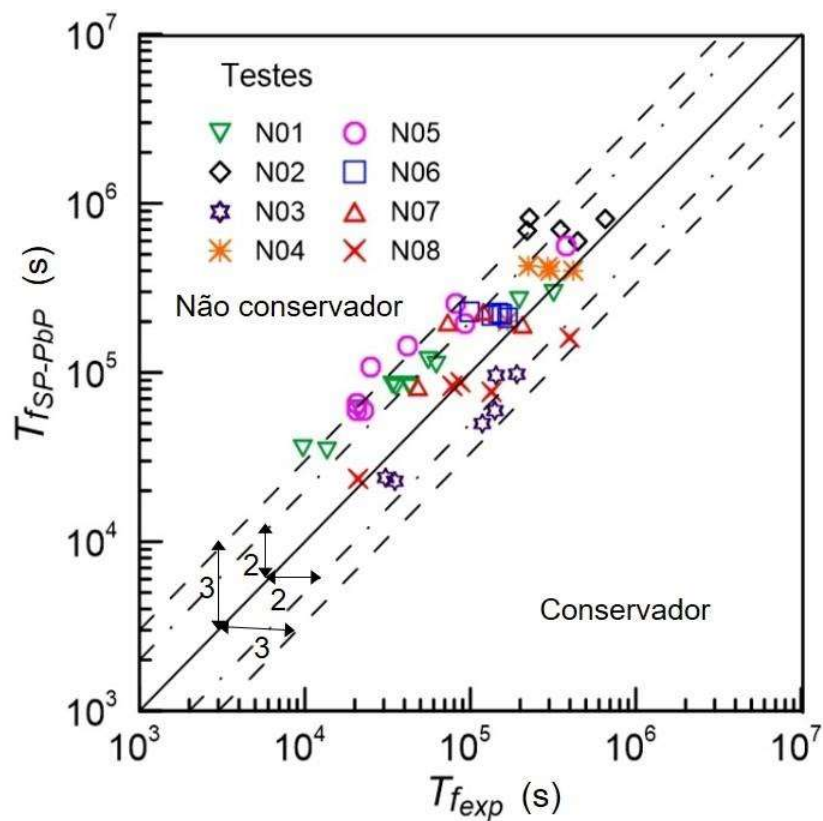
## 6.2 Comparação do Método PbP com Testes Experimentais

A partir da validação das rotinas desenvolvidas para o método PbP foram analisados alguns testes experimentais no aço 18G2A, em que a previsão de vida à fadiga foi realizada através do método PbP no domínio do tempo e da frequência. Niesłony e Macha (2007) e Łagoda, Macha e Niesłony (2005) apresentam em seus trabalhos as características do material, os estados de tensões que foram aplicados e a vida experimental para cada teste (para mais informações dos ensaios conferir as referências citadas).

Para verificar as previsões de vida pelo método PbP foram realizadas cinco análises para cada teste, dessa forma, a partir dos gráficos é possível avaliar a

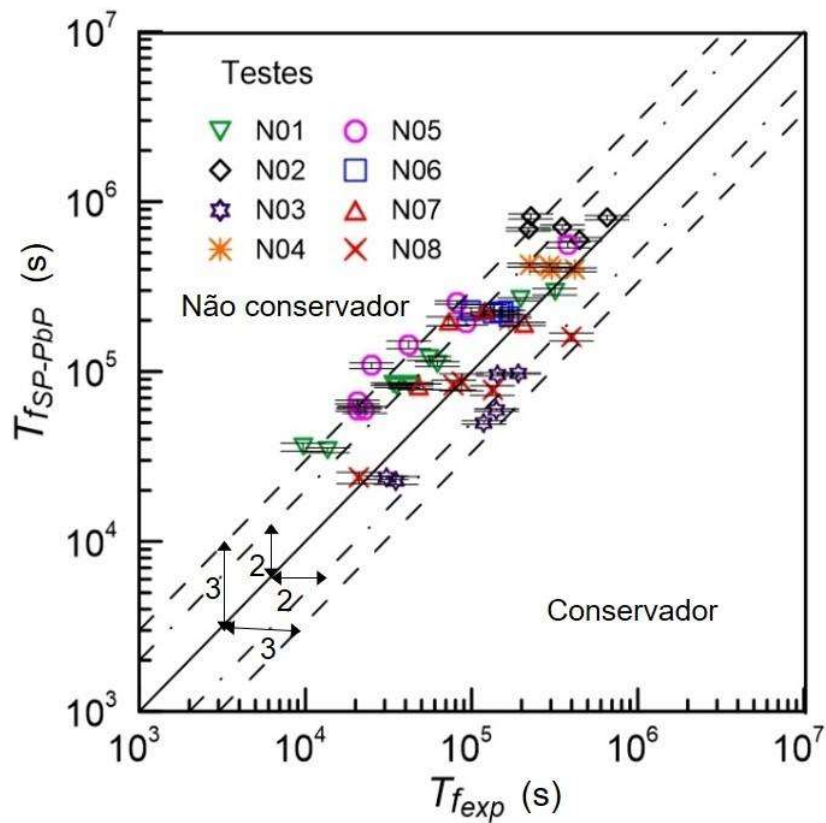
mediana das previsões e também a variação dos resultados calculada pelo desvio padrão amostral e representada pelas barras de erro.

As previsões de vida à fadiga no domínio da frequência pelo método PbP foram comparadas com a vida experimental conforme apresentado na Figura 6.4, em que a combinação perfeita ocorre na linha inclinada a 45° com a reta definida como  $y/x = 1$ . As linhas paralelas ponto-traço, definidas pelo intervalo  $1/2 < y/x < 2$ , e as linhas tracejadas, definidas pelo intervalo  $1/3 < y/x < 3$ , delimitam a largura da banda de dispersão de 2 e 3 vidas previstas, respectivamente.



**Figura 6.4** Comparação entre a vida à fadiga estimada com o método PbP no domínio da frequência e a vida experimental.

A variabilidade das previsões de vida à fadiga no domínio da frequência pelo método PbP é mostrada na Figura 6.5, onde as barras de erro representam o desvio padrão para cada teste.



**Figura 6.5** Barras de erro do desvio padrão das vidas estimadas no domínio da frequência.

Em seguida, foram realizadas as previsões de vida à fadiga no domínio do tempo pelo método PbP para todos os testes, considerando os resultados de cinco análises para cada espécime. A Figura 6.6 compara os resultados da vida prevista pelo método PbP com a vida experimental e a Figura 6.7 apresenta a variabilidade das previsões realizadas no domínio do tempo. Os resultados para a vida prevista nos gráficos consideram o valor da mediana das análises realizadas e o desvio padrão é representado pelas barras de erro.

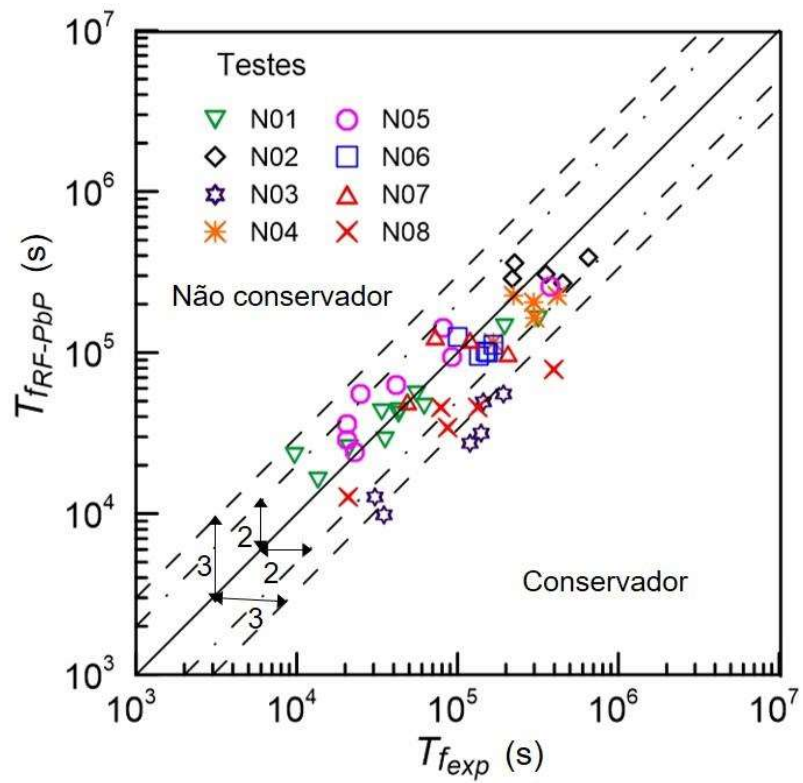


Figura 6.6 Comparação no domínio do tempo entre a vida estimada e experimental.

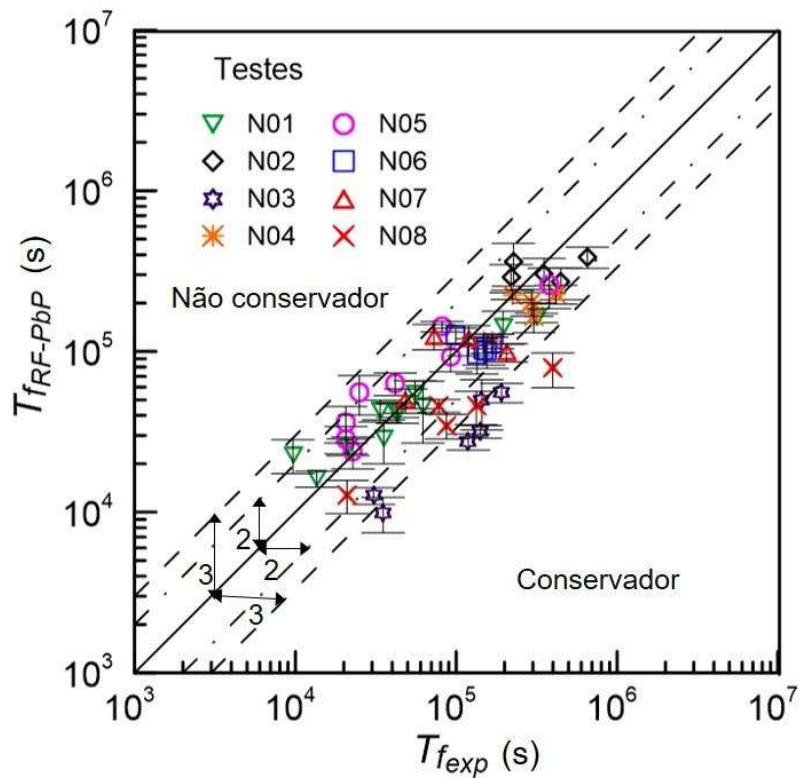


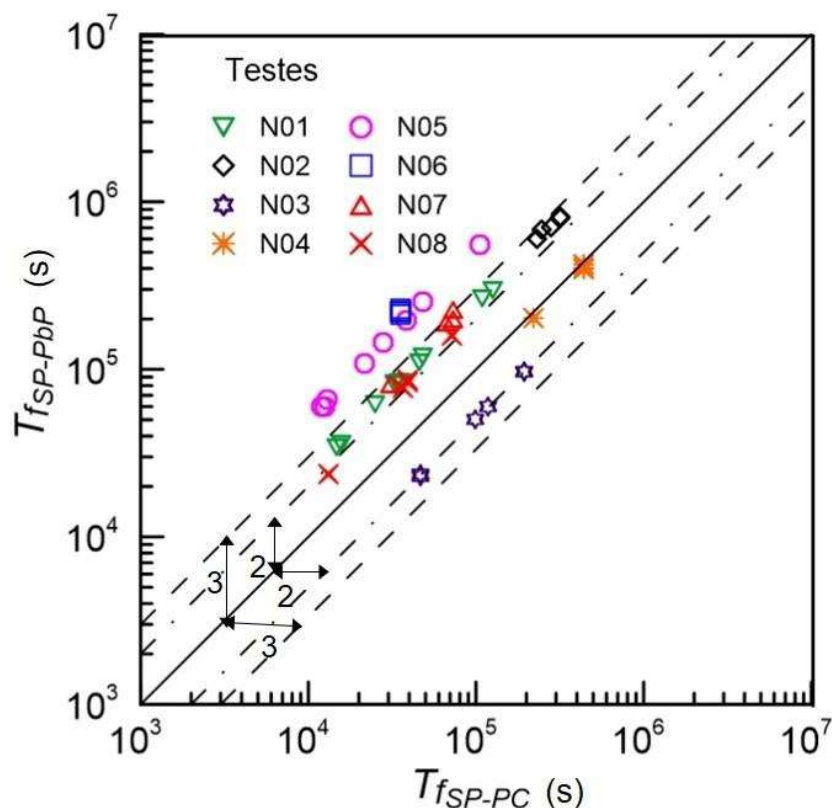
Figura 6.7 Variabilidade das vidas estimadas no domínio do tempo.

As análises no domínio do tempo são realizadas com base na técnica rainflow de contagem e identificação de ciclos, já no domínio da frequência são consideradas as propriedades do espectro de potência.

### 6.3 Comparação da Vida em Fadiga, Método PbP versus Método do Plano Crítico

Com relação a previsão de vida do aço 18G2A, Nieslony e Macha (2007) apresentaram resultados estimados para os mesmos ensaios, no entanto adotaram o método do plano crítico definido pelo critério de máxima variância com parâmetro de falha na tensão normal máxima e o dano foi calculado através da hipótese de Serensen-Kogayev considerando o dano crítico igual 1.

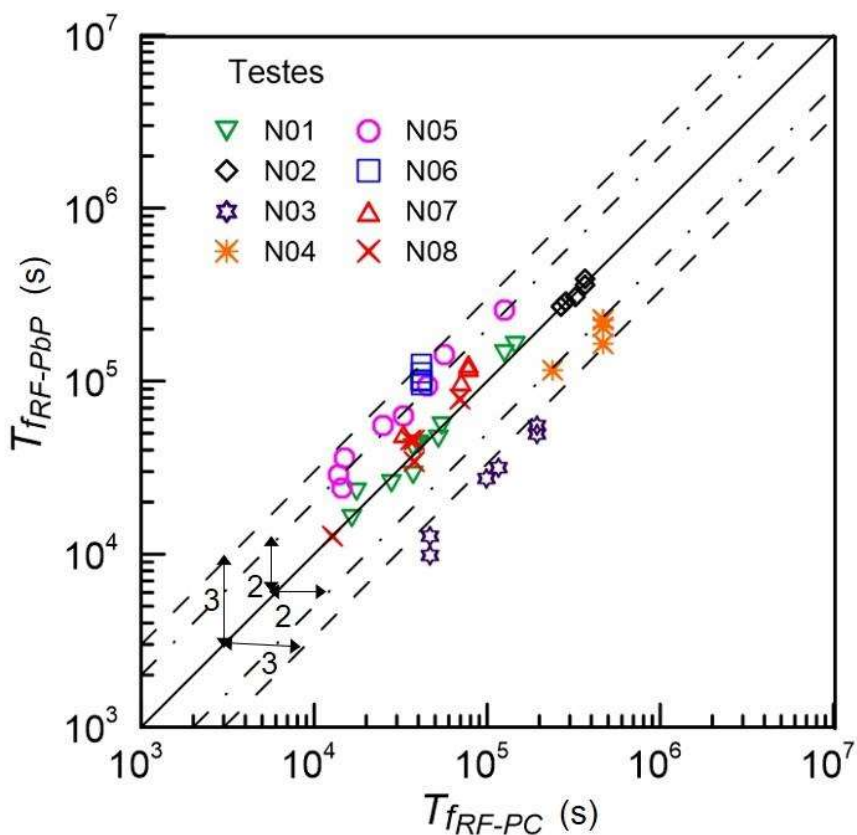
No domínio da frequência, Nieslony e Macha (2007) realizaram as previsões a partir dos espectros de potência e a Figura 6.8 apresenta a comparação dos seus resultados com a vida estimada pelo método PbP.



**Figura 6.8** Comparação no domínio da frequência entre a vida à fadiga estimada com os métodos do plano crítico e PbP.



Já no domínio do tempo, empregaram a técnica rainflow e a Figura 6.9 mostra a comparação dos seus resultados com a vida estimada pelo método PbP.



**Figura 6.9** Comparação no domínio do tempo entre a vida à fadiga estimada com os métodos do plano crítico e PbP.

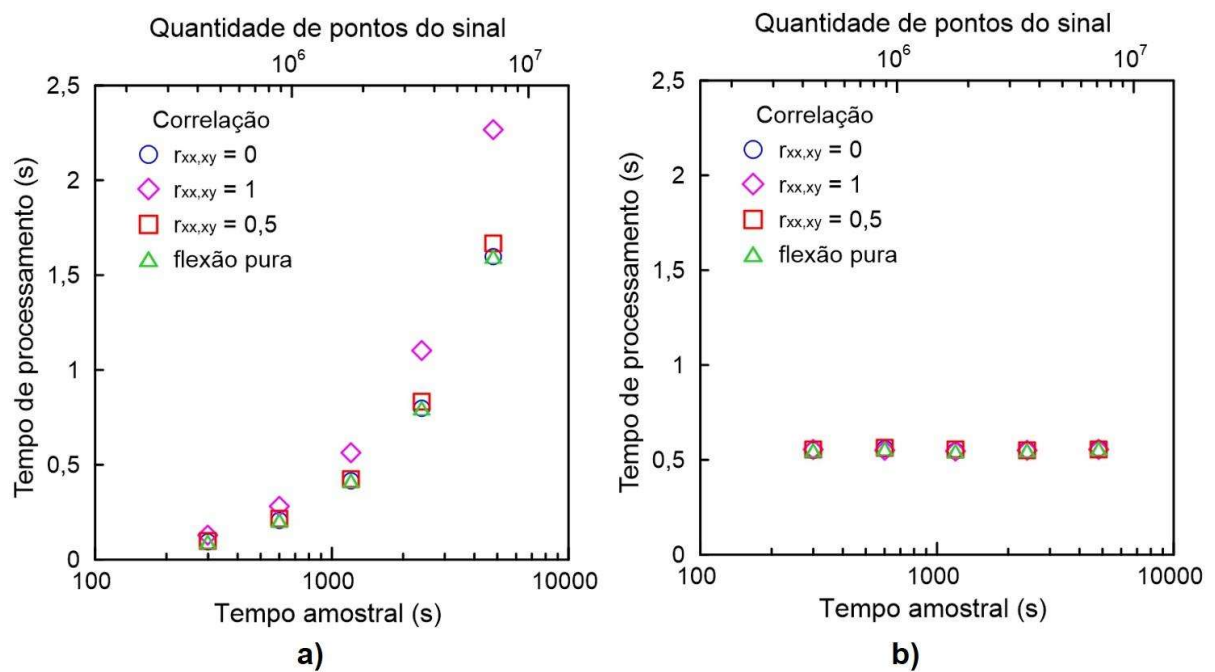
Os resultados obtidos por Niesłony e Macha (2007) foram também apresentados para que possa servir de comparação aos resultados alcançados pelo método PbP.

## 6.4 Custo Computacional

O tempo de processamento para a previsão de vida à fadiga pelo método PbP foi analisado para diferentes tempos amostrais, considerando um teste para cada correlação tanto no domínio do tempo quanto da frequência. Os tempos foram medidos pela rotina TIC e TOC do Matlab e expressam o tempo total para a previsão à fadiga, incluindo as etapas de transformação para o espaço desviador, projeções nas direções de máxima variância, cálculo dos danos e a previsão de vida conforme apresentado na Figura 5.1. Os sinais no tempo e os espectros de potência após serem

gerados são utilizados como dados de entrada para o método PbP no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente, sendo o tempo computacional medido a partir da entrada desses dados no algoritmo do método PbP.

Os tempos computacionais para os testes analisados são apresentados na Figura 6.10.



**Figura 6.10** Tempo de processamento do método PbP: a) domínio do tempo b) domínio da frequência.

## 7 DISCUSSÕES

### 7.1 Previsão de Vida à Fadiga do Aço 18G2A

Analisando o método PbP no domínio da frequência, Figura 6.4, foram estimados 57% e 86% dos espécimes dentro das bandas de dispersão de 2 e 3, respectivamente. As larguras de bandas de dispersão de 2 e 3 vidas previstas são comumente utilizadas nas verificações de previsão de vida à fadiga. Os casos N01, N02 e N05 tiveram espécimes fora das bandas de dispersão adotadas, sendo o caso N05 o que apresentou maior dispersão.

Com relação a vida prevista, 78% dos espécimes apresentaram vidas não conservadoras, pois a previsão resultou em valores maiores que a vida experimental. Todos os espécimes que tiveram vidas conservadoras ficaram dentro das bandas de dispersão.

Já o método PbP no domínio do tempo, Figura 6.6, 76% e 90% dos espécimes ficaram dentro das bandas de dispersão de 2 e 3, respectivamente. Os casos N03 e N08 apresentaram espécimes fora das bandas de dispersão, sendo o caso N03 o que teve maior dispersão.

Nesse domínio 63% dos espécimes apresentaram vidas conservadoras, obtendo previsões menores que a vida experimental e todos os espécimes que tiveram vidas não conservadoras ficaram dentro das bandas de dispersão.

Nos dois domínios analisados a porcentagem de espécimes que ficaram fora das bandas de dispersão foram praticamente iguais, no entanto foram de casos diferentes. As previsões no domínio do tempo foram menores que no domínio da frequência e resultaram em vidas mais próximas da vida experimental, pois o número de espécimes dentro da banda de dispersão de 2 foi maior.

Além disso, as variações da vida prevista foram maiores no domínio do tempo, apresentando maior desvio padrão conforme indicam as barras de erro na Figura 6.7. Já no domínio da frequência as variações são desprezíveis, pois geram um desvio padrão muito pequeno como apresentado na Figura 6.5. Isso ocorre porque no modelo temporal é realizada a análise dos ciclos do sinal e como o sinal é gerado de forma aleatória as variações nos resultados podem acontecer, já no modelo espectral

são analisadas as características dos espectros de potência e essas características são menos variáveis por analisarem o sinal inteiro, tornando assim o modelo mais estável. Essa situação foi identificada também no trabalho realizado por Cardoso e Ferreira (2021), que analisaram a variação das previsões de vida à fadiga tanto no domínio do tempo quanto de frequência e observaram que os métodos temporais foram mais variáveis que os métodos espectrais.

Ao comparar as previsões realizadas por Niesłony e Macha (2007) com as do método PbP ambas no domínio da frequência, 20% e 71% dos espécimes ficaram dentro das bandas de dispersão de 2 e 3, respectivamente, conforme mostra a Figura 6.8. Com exceção dos casos N03 e N04, todos os outros tiveram previsões de vida maiores pelo método PbP, sendo que o caso N04 obteve a maior similaridade nos resultados entre os métodos. Os casos N05 e N06 foram os que apresentaram as maiores diferenças com o método do plano crítico, pois as vidas previstas com o método PbP foram maiores.

Já no domínio do tempo a Figura 6.9 mostra a comparação entre os dois métodos, em que 55% e 86% dos espécimes ficaram dentro da banda de dispersão de 2 e 3, respectivamente. Todos os espécimes do caso N03, coeficiente de correlação igual 0, ficaram fora das bandas de dispersão, tendo previsões menores pelo método PbP do que pelo plano crítico e no caso N06, coeficiente de correlação igual 1, um espécime ficou fora das bandas adotadas.

Analisando ainda os resultados da Figura 6.9, pois as análises no domínio do tempo tiveram resultados mais semelhantes entre os dois métodos, verifica-se que os casos não proporcionais com correlação igual a 0 (N03 e N04) tiveram previsões menores pelo método PbP e os casos proporcionais com correlação igual a 1 (N05 e N06) previsões maiores pelo método PbP independentemente da razão de variância entre os sinais de torção e flexão.

Já os casos com correlação igual a 0,5 (N07 e N08) e os que foram submetidos a carregamentos uniaxiais (N01 e N02) apresentaram resultados semelhantes entre os métodos do plano crítico e PbP, principalmente os casos N01 e N02 que tiveram previsões muito próximas por ambos os métodos.

Dessa forma, verifica-se que as estimativas de vida à fadiga para os casos com carregamentos uniaxiais e com correlação intermediária não apresentam diferenças

significativas entre os dois métodos, no entanto a baixa similaridade entre as previsões se torna perceptível nos casos proporcionais e não proporcionais. Vale ressaltar que o método PbP considera as projeções do carregamento com base nos invariantes de tensão e utiliza a regra de Palmgren-Miner para o dano, já a abordagem apresentada por Niesłony e Macha (2007) utiliza o critério de plano crítico baseado na tensão normal máxima e a hipótese de Serensen-Kogayev para o dano, por isso, as diferenças entre os dois métodos estão sendo analisadas para melhor compreender as diferenças apresentadas nas previsões de vida.

## **7.2 Custo Computacional do Método PbP**

Ao analisar o custo computacional para executar as análises pelo método PbP, verificou-se no domínio do tempo que o custo computacional para previsão de vida cresce proporcionalmente ao tempo amostral adotado, pois o tamanho do sinal é ampliado na mesma proporção do tempo amostral. Já no domínio da frequência o custo computacional não varia com o tempo amostral, visto que o espectro de potência permanece com o mesmo tamanho.

No domínio do tempo, Figura 6.10a), ao analisar sinais perfeitamente correlacionados o tempo de processamento aumenta em média 37% em relação aos sinais sem correlação perfeita, pois nesse caso uma das projeções é um ruído e isso faz com que a técnica rainflow empregada na contagem dos ciclos seja mais demorada. Nos outros testes com flexão pura e coeficientes de correlações iguais a 0 e 0,5 as projeções não apresentam nenhum ruído, obtendo assim tempos semelhantes entre si, pois o custo computacional para realizar o rainflow em uma projeção ativa ou nula é praticamente o mesmo, tendo um maior processamento apenas na presença de ruído.

O tempo de processamento das etapas de transformação para o espaço desviador e para as projeções nas direções de máxima variância são iguais para todas as correlações e cada uma dessas etapas representam cerca de 10% do custo total. Dessa forma, a etapa que demanda maior processamento é a contagem dos ciclos e a diferença significativa no tempo total da correlação de coeficiente 1 para os outros casos ocorre nessa fase.

Ao analisar no domínio da frequência, Figura 6.10b), o custo computacional não depende do fator de correlação, pois o processamento das características espectrais demanda o mesmo custo em todos os casos. Além disso, o tempo de processamento para cada etapa do método PbP não apresenta diferenças significativas entre si.

Os custos computacionais da etapa do cálculo do dano total e estimativa de vida são desprezíveis em relação ao custo total nos dois domínios analisados, de modo que a rotina TIC e TOC do Matlab apresentava tempo igual a 0. Em vista de diminuir o custo computacional poderia ter sido aplicada a técnica rainflow e a análise das características espectrais apenas nas projeções ativas, evitando analisar as componentes que não geram danos como as projeções nulas e também os ruídos, que acontecem devido aos cálculos numéricos.

No mais, a partir dos resultados apresentados percebe-se que o método PbP consegue realizar previsões de vida à fadiga em estruturas sujeitas a carregamentos multiaxiais de forma ágil, pois o custo computacional foi semelhante ao analisar carregamentos uniaxiais, como o caso de flexão pura.

## 8 CONCLUSÃO

Essa pesquisa apresentou o desenvolvimento do método PbP a partir da implementação das rotinas computacionais para análises de previsão de vida em fadiga multiaxial no domínio do tempo e da frequência. Fazendo uso das rotinas desenvolvidas foi possível prever a vida em fadiga do aço 18G2A, deixando como contribuição para a literatura resultados inéditos de previsões de vida para o aço 18G2A com o método PbP, pois outros pesquisadores só haviam publicado os dados de testes experimentais e previsões de vida por outros métodos, como do plano crítico.

Os resultados obtidos para a previsão de vida do aço 18G2A foram satisfatórios quando comparados com a vida experimental, em que mais de 85% dos espécimes avaliados estiveram dentro da banda de dispersão de 3. Com relação aos domínios analisados, o método PbP no domínio do tempo apresentou previsões mais próximas dos valores experimentais que o domínio da frequência.

Entre as vantagens observadas do método PbP verificou-se a praticidade do método em transformar carregamentos aleatórios multiaxiais em carregamentos uniaxiais (as projeções), bem como a facilidade para a implementação das rotinas computacionais. Além disso, as análises realizadas demandam baixo custo computacional até mesmo considerando milhares de pontos, principalmente quando comparados com outras metodologias presentes na literatura como o método do plano crítico que, em geral, demanda um custo maior que pelo método PbP apenas para realizar a pesquisa de planos.

O custo computacional no domínio da frequência não depende da complexidade das histórias de carregamento e nem do tempo amostral, pois o tempo de processamento para todos os casos se manteve o mesmo. Dessa forma, uma das vantagens da análise no domínio da frequência é o baixo custo computacional. Já no domínio do tempo com o aumento do tempo amostral aumenta-se o tamanho do sinal e, conseqüentemente, o tempo de processamento cresce, pois os sinais passam a ter mais informações.

Portanto, a aplicação do método PbP nessa pesquisa, para a previsão de vida em fadiga multiaxial, alcançou resultados satisfatórios quando comparados com as vidas experimentais e com um baixo custo computacional.

## **8.1 Sugestões para Trabalhos Futuros**

A partir das rotinas computacionais desenvolvidas alguns passos para evolução deste estudo seriam considerar outros testes experimentais em fadiga multiaxial e aplicar o método PbP para previsão de vida, com o intuito de comparar as vidas experimentais com as vidas previstas e verificar o comportamento do método.

Outro ponto que pode ser considerado, caso sejam utilizados carregamentos de banda larga, seria aplicar o método de Dirlik e o método de Tovo-Benasciutti para realizar a previsão de vida no domínio da frequência e analisar qual método apresenta melhores previsões.



## LISTA DE REFERÊNCIAS

- ASTM E1049-85. 2017. "Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis."
- Basquin, O. 1910. "The Exponential Law of Endurance Tests." *American Society for Testing and Materials Proceedings* 10:625–30.
- Benasciutti, D., A. Cristofori e R. Tovo. 2013. "Analogies between Spectral Methods and Multiaxial Criteria in Fatigue Damage Evaluation." *Probabilistic Engineering Mechanics* 31:39–45.
- Benasciutti, D., F. Sherratt e A. Cristofori. 2015. "Basic Principles of Spectral Multi-Axial Fatigue Analysis." Pp. 34–42 in *Procedia Engineering*. Vol. 101. Elsevier B.V.
- Benasciutti, D., F. Sherratt e A. Cristofori. 2016. "Recent Developments in Frequency Domain Multi-Axial Fatigue Analysis." *International Journal of Fatigue* 91:397–413.
- Benasciutti, D. e R. Tovo. 2005. "Spectral Methods for Lifetime Prediction under Wide-Band Stationary Random Processes." *International Journal of Fatigue* 27:867–77.
- Benasciutti, D., D. Zanellati e A. Cristofori. 2019. "The 'Projection-by-Projection' (PbP) Criterion for Multiaxial Random Fatigue Loadings: Guidelines to Practical Implementation." *Frattura Ed Integrità Strutturale* 47:348–66.
- Bishop, N. 1988. "The Use of Frequency Domain Parameters to Predict Structural Fatigue." Tese. Department of Engineering, University of Warwick, Inglaterra.
- Branco, C., A. Fernandes e P. Castro. 1999. *Fadiga de Estruturas Soldadas*. 2nd ed. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Cardoso, E. e J. Ferreira. 2021. "Analysis of the Fatigue Life Prediction of Overhead Conductors Considering the Time and Frequency Domain." in *26th International Congress of Mechanical Engineering*.
- Cardoso, R. 2015. "Problema de Propagação de Trincas Em Condições de Fretting." Dissertação. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil.
- Cristofori, A. e D. Benasciutti. 2014. "'Projection-by-Projection' Approach: A Spectral Method for Multiaxial Random Fatigue." *SAE International*.
- Cristofori, A., D. Benasciutti e R. Tovo. 2011. "A Stress Invariant Based Spectral Method to Estimate Fatigue Life under Multiaxial Random Loading." *International Journal of Fatigue* 33(7):887–99.
- Cristofori, A., L. Susmel e R. Tovo. 2008. "A Stress Invariant Based Criterion to Estimate Fatigue Damage under Multiaxial Loading." *International Journal of Fatigue* 30:1646–58.
- Deperrois, A. 1991. "Sur Le Calcul de Limites d'endurance Des Aciers." Tese. École polytechnique, França.
- Dirlik, T. 1985. "Application of Computers in Fatigue Analysis." Tese. Department of Engineering, University of Warwick, Inglaterra.
- Dirlik, T. e D. Benasciutti. 2021. "Dirlik and Tovo-Benasciutti Spectral Methods in Vibration Fatigue: A Review with a Historical Perspective." *Multidisciplinary Digital Publishing Institute* 11.
- Ferreira, J. 1997. "Um Modelo Para a Previsão Da Incerteza Do Dano Por Fadiga." Tese. Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do

- Rio de Janeiro, Brasil.
- Gomes, F. 2019. "Análise De Fadiga De Turbinas Eólicas Offshore Tipo Monopile Com Conexão Grauteada." Dissertação. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- Kakuno, H. e Y. Kawada. 1979. "A New Criterion of Fatigue Strength of a Round Bar Subjected To Combined Static and Repeated Bending and Torsion." *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 2(2):229–36.
- Łagoda, T., E. Macha e A. Niesłony. 2005. "Fatigue Life Calculation by Means of the Cycle Counting and Spectral Methods under Multiaxial Random Loading." *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 28(4):409–20.
- Lee, Y-L. 2005a. "Fatigue Analysis in the Frequency Domain." Pp. 369–94 in *Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice*, Yung-Li Lee, J. Pan, R. B. Hathaway e M. E. Barkey (Ed.). Elsevier Inc.
- Lee, Y-L. 2005b. "Fatigue Damage Theories." Pp. 57–76 in *Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice*, Yung-Li Lee, J. Pan, R. B. Hathaway e M. E. Barkey (Ed.). Elsevier Inc.
- Lee, Y-L e D. Taylor. 2005a. "Cycle Counting Techniques." Pp. 77–102 in *Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice*, Yung-Li Lee, J. Pan, R. B. Hathaway e M. E. Barkey (Ed.). Elsevier Inc.
- Lee, Y-L e D. Taylor. 2005b. "Stress-Based Fatigue Analysis and Design." Pp. 103–80 in *Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice*, Yung-Li Lee, J. Pan, R. B. Hathaway e M. E. Barkey (Ed.). Elsevier Inc.
- Lee, Y. L., M. W. Lu, R. Segar, C. Welch e R. Rudy. 1999. "Reliability-Based Cumulative Fatigue Damage Assessment in Crack Initiation." *International Journal of Materials and Product Technology* 14(1):1–16.
- Malcher, L. 2006. "Um Modelo Para Determinação Da Resistência à Fadiga Multiaxial Para Carregamentos de Flexão e Torção Combinados, Fora Da Fase e Com Amplitude Constante: Com Base No Critério Do Invariante Do Tensor." Dissertação. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil.
- Mendes, M. 2006. "Estimativa Do Limite De Fadiga Sob Condições De Fretting Considerando O Método Da Distância Crítica Do Ponto Em Uma Abordagem Por Elementos Finitos." Dissertação. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil.
- Mršnik, M., J. Slavič e M. Boltežar. 2016. "Multiaxial Vibration Fatigue - A Theoretical and Experimental Comparison." *Mechanical Systems and Signal Processing* 76–77:409–23.
- Niesłony, A. e E. Macha. 2007. "Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue." P. 146 in *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Vol. 33, F. Pfeiffer e P. Wriggers (Ed.). Springer.
- Papadopoulos, I., P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini e A. Bernasconi. 1997. "A Comparative Study of Multiaxial High-Cycle Fatigue Criteria for Metals." *International Journal of Fatigue* 19(3):219–35.
- Pinto Neto, E. 2018. "Avaliação de Modelos Multiaxiais Para Estimativa Da Resistência à Fadiga de Aços Naturalmente Defeituosos." Dissertação. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil.

- Socie, D. e G. Marquis. 1999. *Multiaxial Fatigue*. SAE International.
- Susmel, L. 2009. *Multiaxial Notch Fatigue: From Nominal to Local Stress/Strain Quantities*. Woodhead Publishing.
- Susmel, L. e P. Lazzarin. 2002. "A Bi-Parametric Wöhler Curve for High Cycle Multiaxial Fatigue Assessment." *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 25(1):63–78.
- Watanabe, L. 2014. "Análise Da Vida à Fadiga de Cabos Condutores de Energia Submetidos a Carregamentos Aleatórios." Tese. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil.

## APÊNDICE – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DO DANO DE DIRLIK

O dano total esperado por fadiga pelo método de Dirlik,  $D_{DK}$

$$D_{DK} = \frac{\nu_p T}{K} \int_0^\infty S_a^m P_{rr}(S_r) dS_r. \quad (A1)$$

sendo  $P_{rr}(S_r)$  a função de densidade de probabilidade dos intervalos rainflow em termos de  $Z$  definida como

$$P_{rr}(S_r) = \frac{D_1}{2\sigma_S Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{2\sigma_S R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + \frac{D_3 Z}{2\sigma_S} e^{-\frac{Z^2}{2}}, \quad (A2)$$

em que  $Z = \frac{S_r}{2\sigma_S} = \frac{S_a}{\sigma_S}$ .

Portanto, tem-se a integral a ser resolvida

$$I = \int_0^\infty S_a^m P_{rr}(S_r) dS_r = \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m \left[ \frac{D_1}{2\sigma_S Q} e^{-\frac{S_r}{2\sigma_S Q}} + \frac{D_2 S_r}{4\sigma_S^2 R^2} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2 R^2}} + \frac{D_3 S_r}{4\sigma_S^2} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2}} \right] dS_r. \quad (A3)$$

Separando a integral em partes

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m \frac{D_1}{2\sigma_S Q} e^{-\frac{S_r}{2\sigma_S Q}} dS_r + \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m \frac{D_2 S_r}{4\sigma_S^2 R^2} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2 R^2}} dS_r + \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m \frac{D_3 S_r}{4\sigma_S^2} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2}} dS_r, \quad (A4)$$

de modo que

$$I_1 = \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m \frac{D_1}{2\sigma_S Q} e^{-\frac{S_r}{2\sigma_S Q}} dS_r; \quad I_2 = \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m \frac{D_2 S_r}{4\sigma_S^2 R^2} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2 R^2}} dS_r; \quad (A5)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m \frac{D_3 S_r}{4\sigma_S^2} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2}} dS_r,$$

ou seja,

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (A6)$$

Resolvendo a integral  $I_1$

$$I_1 = \frac{D_1}{2\sigma_S Q} \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^m e^{-\frac{S_r}{2\sigma_S Q}} dS_r. \quad (A7)$$

Realizando uma mudança de variável

$$m = a - 1; \quad \frac{S_r}{2\sigma_S Q} = x \quad \text{e} \quad dS_r = 2\sigma_S Q dx. \quad (\text{A8})$$

A integral  $I_1$  pode ser reescrita como

$$I_1 = \frac{D_1}{2\sigma_S Q} \int_0^\infty (\sigma_S Q x)^{a-1} e^{-x} 2\sigma_S Q dx = D_1 (\sigma_S Q)^{a-1} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx. \quad (\text{A9})$$

Sabendo que a função gamma é definida como

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad (\text{A10})$$

a integral  $I_1$  pode ser expressa com base na função gamma

$$I_1 = D_1 (\sigma_S Q)^{a-1} \Gamma(a). \quad (\text{A11})$$

Retornando da mudança de variável

$$I_1 = D_1 (\sigma_S Q)^m \Gamma(m + 1). \quad (\text{A12})$$

Resolvendo a integral  $I_2$

$$I_2 = \frac{D_2}{2\sigma_S^2 R^2} \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^{m+1} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2 R^2}} dS_r. \quad (\text{A13})$$

Realizando uma mudança de variável

$$m + 1 = a - 1; \quad \frac{S_r^2}{8\sigma_S^2 R^2} = x \quad \text{e} \quad dS_r = \frac{\sqrt{2} \sigma_S R}{\sqrt{x}} dx. \quad (\text{A14})$$

A integral  $I_2$  pode ser reescrita como

$$I_2 = \frac{D_2}{2\sigma_S^2 R^2} \int_0^\infty (\sqrt{2} \sigma_S R \sqrt{x})^{a-1} e^{-x} \frac{\sqrt{2} \sigma_S R}{\sqrt{x}} dx = \frac{D_2}{2\sigma_S R} \sqrt{2} (\sqrt{2} \sigma_S R)^{a-1} \int_0^\infty (\sqrt{x})^{a-1} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx. \quad (\text{A15})$$

Simplificando a expressão

$$I_2 = D_2 (2)^{\frac{a}{2}-1} (\sigma_S R)^{a-2} \int_0^\infty (\sqrt{x})^{a-2} e^{-x} dx. \quad (\text{A16})$$

Realizando outra mudança de variável

$$a = 2b, \quad (\text{A17})$$

a integral  $I_2$  pode ser reescrita como

$$I_2 = D_2 (2)^{b-1} (\sigma_S R)^{2b-2} \int_0^\infty (\sqrt{x})^{2b-2} e^{-x} dx = D_2 (2)^{b-1} (\sigma_S R)^{2b-2} \int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx . \quad (\text{A18})$$

Utilizando a função gamma apresentada na Equação (A10)

$$I_2 = D_2 (2)^{b-1} (\sigma_S R)^{2b-2} \Gamma(b) . \quad (\text{A19})$$

Retornando da mudança de variável

$$I_2 = D_2 (2)^{\frac{a}{2}-1} (\sigma_S R)^{a-2} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) = D_2 (2)^{\frac{m}{2}} (\sigma_S R)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) . \quad (\text{A20})$$

Resolvendo a integral  $I_3$

$$I_3 = \frac{D_3}{2\sigma_S^2} \int_0^\infty \left(\frac{S_r}{2}\right)^{m+1} e^{-\frac{S_r^2}{8\sigma_S^2}} dS_r . \quad (\text{A21})$$

Realizando uma mudança de variável

$$m + 1 = a - 1; \quad \frac{S_r^2}{8\sigma_S^2} = x \quad \text{e} \quad dS_r = \frac{\sqrt{2} \sigma_S}{\sqrt{x}} dx . \quad (\text{A22})$$

A integral  $I_3$  pode ser reescrita como

$$I_3 = \frac{D_3}{2\sigma_S^2} \int_0^\infty (\sqrt{2}\sigma_S \sqrt{x})^{a-1} e^{-x} \frac{\sqrt{2} \sigma_S}{\sqrt{x}} dx = \frac{D_3}{2\sigma_S} \sqrt{2} (\sqrt{2}\sigma_S)^{a-1} \int_0^\infty (\sqrt{x})^{a-1} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx . \quad (\text{A23})$$

Simplificando a expressão

$$I_3 = D_3 (2)^{\frac{a}{2}-1} (\sigma_S)^{a-2} \int_0^\infty (\sqrt{x})^{a-2} e^{-x} dx . \quad (\text{A24})$$

Realizando outra mudança de variável

$$a = 2b , \quad (\text{A25})$$

a integral  $I_3$  pode ser reescrita como

$$I_3 = D_3 (2)^{b-1} (\sigma_S)^{2b-2} \int_0^\infty (\sqrt{x})^{2b-2} e^{-x} dx = D_3 (2)^{b-1} (\sigma_S)^{2b-2} \int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx . \quad (\text{A26})$$

Utilizando a função gamma apresentada na Equação (A10)

$$I_3 = D_3 (2)^{b-1} (\sigma_S)^{2b-2} \Gamma(b) . \quad (\text{A27})$$

Retornando da mudança de variável

$$I_3 = D_3 (2)^{\frac{a}{2}-1} (\sigma_S)^{a-2} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) = D_3 (2)^{\frac{m}{2}} (\sigma_S)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right). \quad (\text{A28})$$

Juntando todas as integrais resolvidas

$$I = D_1 (\sigma_S Q)^m \Gamma(m + 1) + D_2 (2)^{\frac{m}{2}} (\sigma_S R)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) + D_3 (2)^{\frac{m}{2}} (\sigma_S)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right). \quad (\text{A29})$$

Simplificando a equação

$$I = \sigma_S^m \left[ D_1 Q^m \Gamma(m + 1) + (\sqrt{2})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) (D_2 |R|^m) + D_3 \right]. \quad (\text{A30})$$

Substituindo a integral na Equação (A1), o dano de Dirlik em um intervalo de tempo  $T$  pode ser determinado como

$$D_{DK} = \frac{v_p T}{K} \sigma_S^m \left[ D_1 Q^m \Gamma(m + 1) + (\sqrt{2})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) (D_2 |R|^m + D_3) \right]. \quad (\text{A31})$$